日 本 数 学 会

２００７年度　秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会

講演アブストラクト

２００７年 ９月

於　東 北 大 学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9 月 23 日 (日)　第 VIII 会場

9:00 ～ 12:00

1	大 藪 卓	微分形式, 他 4 件	5
2	西 本 勝 之 (デカルト出版)*	N-fractional calculus of some logarithmic functions	15
3	西 脇 純 一 (近 畿 大 理 工)* 尾 和 重 義 (近 畿 大 理 工)	New class of certain analytic functions	15
4	齋 藤 三 郎 (群 馬 大 工)* 松 浦 勉 (群 馬 大 工) 藤 原 宏 志 (京 大 情 報)	ラプラス変換の実逆変換の困難性と克服について	15
5	戸 田 暢 茂 *	On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation	15
6	伊 藤 雅 明 (広 島 大 工)* 柴 雅 和 (広 島 大 工) 幡 谷 泰 史 (山 口 大 理)	Riemann 面の等角的埋め込みと Poiseuille 流れの一般化	15
7	G. D. Anderson (Michigan 州立大) * 須 川 敏 幸 (広 島 大 理) M. K.Vamanamurthy (Auckland 大) M. Vuorinen (Turku 大)	Hypergeometric functions and hyperbolic metric	15
8	小 森 洋 平 (阪 市 大 理)*	On counterexamples to the equivariant $K = 2$ conjecture	15
9	藤 川 英 華 (上 智 大 理 工)* 松 崎 克 彦 (岡 山 大 自 然)	Intermediate Teichmüller space	15
10	志 賀 啓 成 (東 工 大 理 工)*	Klein 群の不変成分の Riemann map について	20
11	宍 倉 光 広 (京 大 理)*	擬等角写像の一点での等角性について	10

14:15 ～ 16:15

12	平 田 賢 太 郎 (秋田大教育文化)*	Dirichlet 境界条件を満たす非線形楕円型方程式の正値解の存在	15
13	米 田 力 生 (小 樽 商 科 大)*	The composition operators with closed range on the Dirichlet spaces	15
14	宮 本 育 子 (千 葉 大 理)* 吉 田 英 信	コーン内の無限遠点での minimally thin な集合の定量的な特徴付け	15
15	中 川 勇 人 (名大多元数理)*	Non-tangential limits of α-parabolic functions	15
16	水 田 義 弘 (広島大総合科)* 下 村 哲 (広 島 大 教 育) 大 野 貴 雄 (広 島 大 理)	Vanishing integrability for Riesz potentials of functions in generalized Lebesgue spaces	15
17	大 野 貴 雄 (広 島 大 理)*	Continuity properties for logarithmic potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent	15
18	中 井 三 留 *	Evans ポテンシャルと Riesz 分解	15

16:30 ～ 17:30　特別講演

下 村 哲 (広 島 大 教 育)*　ソボレフの定理について

9 月 24 日 (月)　第 VIII 会場

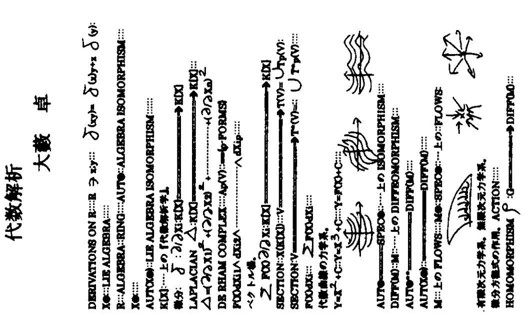
9:30 ～ 11:45

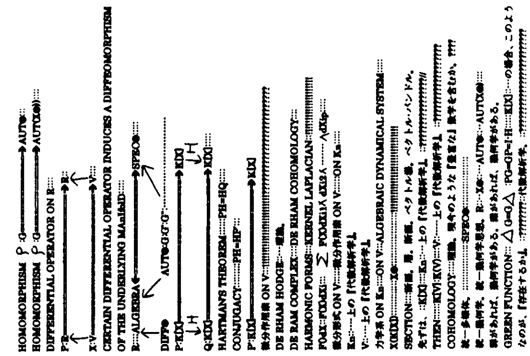
19	篠原知子 (都立産業技術高専)*	周期的不定点に存在する不変曲線族		10
20	上田哲生 (京　大　理)*	複素射影空間上の力学系に関する Fatou 写像の接続		15
21	松島敏夫 (石川工高専)*	複素単位球上の有界正則写像の境界挙動		10
22	阿部　誠 (熊本大医)*	Stein 空間における有理型近似定理		10
23	阿部　誠 (熊本大医)*	強い有理型近似性質をもつ領域について		10
24	都丸　正 (群馬大医)	C*-作用をもつリーマン面の退化族と C*-作用をもつ 2 次元特異点		15
25	児玉秋雄 (金沢大自然) 清水　悟 (東北大理)	An intrinsic characterization of the unit polydisc		15
26	大沢健夫 (名大多元数理)	複素葉層構造に付随する簡約可能な構造について—トーラスの場合		15
27	大沢健夫 (名大多元数理)	Levi 非平坦な擬凸境界の連結性について		15
28	山口博史	Hopf 多様体上の擬凸状領域について		15

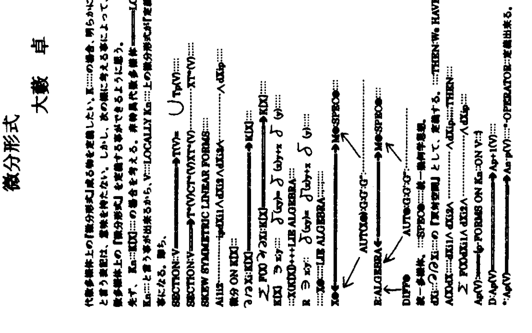
14:15 ～ 15:15　特別講演

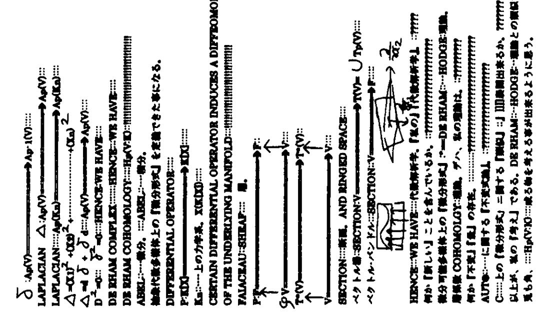
甲斐千舟 (九大数理)*　等質有界領域の対称性条件, 性質の良い有界領域実現について

1









R.S.HAMILTON の定理

大藪　卓

RICCI FLOW::::::HAMILTON::---の定理。

::::1980::----年代に得られた。

最近、S3::-POINCARE::-予想。THURSTON の

GEOMETRIZATION CONJECTURE:::の証明に使われた。

系。

SIMPLY CONNECTED RICCI CURVATURE POSTIVE

3::---MANIFOLD IS DIFFEOMORPHIC TO S3:::::

POINCARE CONJECTURE:;:::S3::::::

BOCHNER'S THEOREN

M:::::::VANISHING THEOREM:::消滅定理。

RICCI CURVATURE PITIVE:═══════→

H1(M:R)=0::::::

HOMOTOPY SPHERE::::S3:::

H1(M:R)=0::::H2(M:R)═══;;;Ho(M:R)=R:::

H3(M:R)=R::::::::::

SIMPLY CONNECTED::::RICCI CURVATURE

POSITIVE::::←════════════::H1(M:R)=0:::::

HENCE::::

M IS DIFFEOMORPHIC TO S3::!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

S3::---POINCARE CONJECTURE::::

THURSTON::::の方は、全く見当が付かない。

既に、全ぱいは示されている。:*!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

HOPF FIBRATION::::

S1════════→S3════════→S2:

S3════════→S7════════→S4:::

S7════════→S15════════→S8:

S3::S4::---POINCARE CONJECTURES::::

::::筆者の結果。::!!!!!!!!!!!!!!!1980:::年代に得られた。

::::INDUCED BUNDLE::---の方法を使うのである。

S1════════→S3════════→S2:

INDUCED BUNDLE::

S1════════→G════════→M::::

INDUCED BUNDLE

大藪　卓

INDUCED BUNDLE::::と言う概念がある。何に使うのか、

と言う事は別にして、簡単ながら、紹介したい。

PRINCIPAL FIBRATION::::主束。

K════════→G════════→G/K::::

INDUCED BUNDLE:

K════════→G'════════→M:::

THEN::we will HAVE:::

M══G/K:::HOMOTOPY EQUIVALENT::THEN═══→

G══G':HOMOTOPY EQUIVALENT::::

IF G══G':HOMEOMORPHIC::THEN::════════→

M══G/K:::HOMEOMORPHIC:::::

FIBER BUNDLE:::::INDUCED BUNDLE:::

F:B'════════→B:::連続写像。

F════════→E════════→B:::

INDUCED BUNDLE::::

F'════════→E'════════→B'::::

おおむね、FIBER F'=F $^{-1}$ (p $^{-1}$ (b))::::

即ち、おおむね、F══F':::::

E=FXB/~~~~~~

E'=FXB'/~~~~~~~

RIEMANN::--面。

Γ════════→D════════→D/ Γ

IDUCED BUNDLE:

Γ════════→D'════════→R:::

D::UNIT DISK::::

R=D/ Γ :::HOMOTOPY EQUIVALENT::*THEN═══→

D══D':HOMOTOPY EQUIVALENT:::

HOPF FIBRATION:::

S1════════→S3════════→S2:

S3════════→S7════════→S4:

S7════════→S15════════→S8:

O(n)════════→O(n+1)════════→O(n+1)/O(n)=Sn::::

今の所、POINCARE::--予想に使うのが、『目的』。

R-DIFFEOMORPHISM

大藪　卓

P-S THEOREM:::::

M=M':DIFFEOMORPHIC←════→C^{∞}(M)=C^{∞}(M'):RING ISO.

M══M':DIFFEOMORPHIC←═══→$\mathfrak{X}^{\infty}$(M)=$\mathfrak{X}^{\infty}$(M')::LIE ALGEBRA ISO.

R══R':ALGEBRA ISOMORPHISM←═→SPEC●=SPEC(R'):ISOMORPHIC

R══R':RING ISOMORPHIC←═══→M●=M(R'):*ISOMORPHIC::::

R══R':RING ISOMORPHIC←═══→AUT●=FAUT(R')F $^{-1}$

DIFF●=FDIFF(R0F $^{-1}$

R::::---AUT●::----X●::::----AUT(X●)::---MATHEMATICS:::::

M●::----SPEC●::---MATHEMATICS:::::::::::::::::

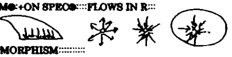
R:ALGEBRA←══════════════→M●:SPEC●::

DIFF●　　AUT●::G:G':G":·························

X●←══════════════→M●:SPEC●::

AUT(X●):G:G':G":····················

FLOWS ON M●:+ON SPEC●::::FLOWS IN R:::



R:---DIFFEOMORPHISM::::::::::

R::---DIFFEOMORPHISM INDUCES A R::-RING ISOMORPHISM:?????????

DIFF(M)════→O(C^{∞}(M))════→DIFF(C^{∞}(M))::

DIFF(M)════→O(C^{∞}(M))════→DIFF(C^{∞}(M)):

AUT●════→O●════→DIFF●:

AUT●════→O●════→DIFF●:

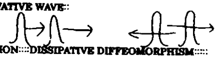
CERTAIN DIFFERENTIAL OPERATOR INDUCES A DIFFEOMORPHISM OF THE UNDERLYING MANIFOLD:::::

EVOLUTION EQUATION INDUCES A DIFFEOMORPHISM OF THE UNDERLYING MANIFOLD::::::::

TRAVELLING WAVE:::::U=U(t:x)=U(x-ct)

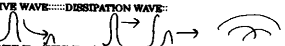
CONSERVATION.CONSERVATIVE DIFFEOMORPHISM:::

CONSERVATIVE WAVE::



DISSIPATION:::DISSIPATIVE DIFFEOMORPHISM:::::

DISSIPATIVE WAVE::::::DISSIPATION WAVE::



古典解、超関数解、超関数解の存在が言えたら、ソレが、古典解になるためには、:::::??

D ⊃ R ⊃ L2(M) ⊃ C^{∞}(M):::::::

関数空間の中に、微分方程式の『解』を見出す事。

D::----DIFFEOMORPHISM:::::←═══→R::---DIFFEOMORPHISM:::

一つの STRATEGY::::である。

P:D════════════→D:

P:R════════════→R:::

F:M●════════════════→M●:

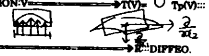
F:SPEC●════════════════→SPEC●:

DIFFERENTIAL OPERATOR═══→UNDERLYING MANIFOLD::::DIFFEO.

力学系、ベクトル場。

SECTION:M════════→T(M)= ∪Tp(M)::

SECTION:V════════→T(V)= ∪ Tp(V):::



P:R══════════════→R:::DIFFEO.

F:M●══════════════→M●:::DIFFEO.

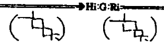
F:SPEC●══════════════→SPECX●:::DIFFEO.....

R::---DIFFEOMORPHISM::::::----F::·DIFFEOMORPHISM::?>?????????????///

R=Ro+R1+R2+R3+······························

△ Ri= λi Ri:

G:Hi════════════→Hi:G:Ri════════════→Ri::



R::---HOMOTOPY EQUIVALENCE::::::R::---POINCARE CONJECTURES:::

DIFFEO..═══→LINEAR ISOMORPHISM═→RING ISO.

2

N- Fractional Calculus of Some Logarithmic Functions,

Katsuyuki Nishimoto *Descartes Press Co.*

Abstract

In a previous article of the author, N- fractional calculus

$$\left(\left(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha}-d\right)^{\delta}\right)_{\gamma}$$

are reported.

In this paper N- fractional calculus of logarithmic functions

$$\left(\log\left(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha}-d\right)\right)_{\gamma}$$

are discussed. Then we have the following theorem, for example.

Theorem 1. We have

(i) $\left(\log\left(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha}-d\right)\right)_{\gamma}$

$$=e^{-i\pi\gamma}(z-b)^{-\gamma}\Big[\,\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta k+\gamma)}{\Gamma(\beta k+1)}\left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^{k}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{d}{(z-b)^{\alpha\beta}}\right)^{k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\alpha k]_m\Gamma(\beta m+\alpha\beta k+\gamma)}{m!\,\Gamma(\beta m+\alpha\beta k)}\left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^{m}\ \Big]$$

where

$$\left|\frac{d}{((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha}}\right|,\quad \left|\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right|,\quad \left|\frac{d}{(z-b)^{\alpha\beta}}\right|<1,$$

$$|\Gamma(\gamma)|,\quad \left|\frac{\Gamma(\beta k+\gamma)}{\Gamma(\beta k+1)}\right|,\quad \left|\frac{\Gamma(\beta m+\alpha\beta k+\gamma)}{\Gamma(\beta m+\alpha\beta k)}\right|<\infty,$$

and

$$[\lambda]_k=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)=\Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda)\ \textit{with}\ [\lambda]_0=1\ ,$$

(Notation of Pochhammer).

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century);Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto ; On the fractional calculus $(a-z)^\beta$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 19 - 27.

[7] K. Nishimoto and S.- T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol.5 May (1994), 27 - 34.

[8] S.- T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^\beta$ and $\log(cz-a)$, J. Frac.Calc.Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[9] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions and Some Identities, J. Frac. Calc. Vol.21, May (2002), 1 - 6.

[10] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logerithmic Functions I, J. Frac Calc.Vol.21, May (2002), 7 - 12.

[11] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Products of Some Power Functions, J. Frac.Calc Vol.27, May (2005), 83 - 88.

[12] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Composite Functions, J. Frac. Calc. Vol. 29, May (2006), 35 - 44.

[13] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Composite Algebraic Functions , J. Frac. Caic. Vol. 31, May (2007), 11 - 23.

[14] David Dunmmit and Richard M. Foote ; Abstract Algebra, Prentice Hall (1991).

[15] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).

[16] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[17] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Naoka, USSR.

[18] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[19] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No.301, (1994), Longman.

[20] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continume Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.

[21] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.

[22] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

Katsuyuki Nishimoto
Institute for Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

3 New class of certain analytic functions

Junichi Nishiwaki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For $g(z) \in \mathcal{A}$, we say that $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$ if it satisfies

$$\operatorname{Re}\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right) > \alpha \left|\frac{g(z)}{h(z)} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $h(z) \in \mathcal{A}$, $\alpha(\alpha \geqq 0)$, and $\beta(0 \leqq \beta < 1)$. If $h(z) = z$, then $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, z)$ is defined as

$$\operatorname{Re}\left(\frac{g(z)}{z}\right) > \alpha \left|\frac{g(z)}{z} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha(\alpha \geqq 0)$ and $\beta(0 \leqq \beta < 1)$. If $g(z) = zf'(z)$ and $h(z) = f(z)$ for $f(z) \in \mathcal{A}$, then $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$ is equivalent to

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha(\alpha \geqq 0)$ and $\beta(0 \leqq \beta < 1)$. This class was introduced by S. Shams, S. R. Kulkarni and J. M. Jahangiri (Internat. J. Math. Math. Sci. **55**(2004), 2959 - 2961). Also this class was denoted by $\mathcal{SD}(\alpha, \beta)$.

Remark For $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$, we write $w(z) = g(z)/h(z) = u + iv$.

If $\alpha > 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = 1$ and is bounded by the ellipse

$$\left(u - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} v^2 < \frac{\alpha^2(\beta - 1)^2}{(\alpha^2 - 1)^2}.$$

If $\alpha = 1$, then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = 1$ and is bounded by the parabola

$$u > \frac{v^2}{2(1 - \beta)} + \frac{1 + \beta}{2}.$$

If $0 \leqq \alpha < 1$, then then w lies in the domain which is the part of the complex plane which contains $w = 1$ and is bounded by the hyperbola

$$\left(u - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2 - 1}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}v^2 > \frac{\alpha^2(\beta - 1)^2}{(\alpha^2 - 1)^2}.$$

In the present talk, for $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$, we write

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \qquad h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n, \qquad F(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n.$$

Theorem 1 *If $g(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|b_n| - \beta|c_n| + \alpha|b_n - c_n|) \leqq 1 - \beta$$

for some $h(z) \in \mathcal{A}$ with $|b_n| \geqq |c_n| \, (n \geqq 2), \alpha \geqq 0$, and $0 \leqq \beta < 1$, then $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$.

Corollary 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{(1 + \alpha)n - (\alpha + \beta)\} |a_n| \leqq 1 - \beta$$

for some $\alpha(\alpha \geqq 0)$ and $\beta(0 \leqq \beta < 1)$, then $f(z) \in \mathcal{SD}(\alpha, \beta)$.

Theorem 2 *If $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$, then*

$$|b_n| \leqq \frac{2(1 - \beta)}{|1 - \alpha|} \left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} |c_n| + \frac{|1 - \alpha|}{2(1 - \beta)}|c_n|\right) \qquad (n \geqq 2).$$

Corollary 2 *If $f(z) \in \mathcal{SD}(\alpha, \beta)$, then*

$$|a_2| \leqq \frac{2(1 - \beta)}{|1 - \alpha|}, \qquad |a_n| \leqq \frac{2(1 - \beta)}{(n - 1)|1 - \alpha|} \prod_{k=1}^{n-2} \left(1 + \frac{2(1 - \beta)}{k|1 - \alpha|}\right) \quad (n \geqq 3).$$

Let us define

$$I_c(F(z)) = \frac{c}{z^c} \int_0^z t^{c-1} F(t) dt \qquad (c \geqq 1)$$

for $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$.

Theorem 3 *If $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$ with $0 \leqq \alpha < 1$, then*

$$\mathrm{Re} I_c(F(z)) > \frac{2c(\beta - \alpha) + (1 - \alpha)}{(2c + 1)(1 - \alpha)} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Theorem 4 *If $g(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, h(z))$ with $\alpha > 1$, then*

$$|I_c(F(z)) - 1| < \frac{c(1 - \beta)}{2(\alpha - 1)} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

4
ラプラス変換の実逆変換の困難性と克服について

群馬大工　齋藤三郎；群馬大工 松浦勉; 京大情報　藤原宏志

関数 F のラプラス変換

$$(\mathcal{L}F)(p) = f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}F(t)dt, \quad p > 0$$

の逆変換を考える．普通は複素数値関数としての逆変換公式を考えるが、実正軸上の離散点における値のみを用いて逆変換を求めたい多くの場合が存在する．これが実逆変換の問題で、解析関数を正の実軸上の値で捉える必要があるので難問とされているものである．その困難性は良く知られている公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) = F(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{t}{k}\frac{d}{dt}\right)\left[\frac{n}{t}f\left(\frac{n}{t}\right)\right] = F(t)$$

([14,16]) などから分かる．さらに [3,4] を参照．　さらに大きな文献が [17,18] にある．　特に解析接続との関連について [7,8] を参照．

熱伝導における逆問題やラプラス変換の実逆変換には本質的な難しさがあるが、計算機の威力で解決できたと考える．その経過と背景、方法について報告したい。

References

[1] 斎藤三郎, 再生核の理論入門,　　牧野書店 (2002).

[2] 今井 仁司, 応用解析における多倍長計算, 数学, 日本数学会編集, 岩波書店, 55(2003), 316-325.

[3] D.-W. Byun and S. Saitoh, A real inversion formula for the Laplace transform, Z. Anal. Anw., **12**(1993), 597-603.

[4] G. Doetsch, Handbuch der Laplace Transformation, Vol. 1., Birkhäuser Verlag, Basel, 1950.

[5] H. Fujiwara, T. Matsuura and S. Saitoh, Numerical real inversion formulas of the Laplace transfrom by using a Fredholm integral equation of the second kind, (in preparation).

[6] H. Imai, T. Takeuchi and M. Kushida, On numerical simulation of partial differential equations in infinite precision, Advances in Mathematical Sciences and Applications, 9(1999), 1007-1016.

[7] V.V. Kryzhniy, Regularized inversion of integral transformations of Mellin convolution type, Inverse Problems, **19**(2003), 573-583.

[8] V. V. Kryzhniy, Numerical inversion of the Laplace transform: analysis via regularized analytic continuation, Inverse Problems, **22** (2006), 579-597.

[9] T. Matsuura, S. Saitoh and D.D. Trong, Approximate and analytical inversion formulas in heat conduction on multidimensional spaces, J. of Inverse and Ill-posed Problems, **13** (2005), 479-493.

[10] T. Matsuura and S. Saitoh, Analytical and numerical inversion formulas in the Gaussian convolution by using the Paley-Wiener spaces, Applicable Analysis, **85**(2006), 901-915.

[11] T. Matsuura and S. Saitoh, Analytical and numerical real inversion formulas of the Laplace transform, The ISAAC Catani Congress Proceedings (to appear).

[12] T. Matsuura, A. Al-Shuaibi, H. Fuijiwara and S. Saitoh, Numerical real inversion formulas of the Laplace transform by using a Fredholm integral equation of the second kind, Journal of Analysis and Applications, **5**(2007), 123-136.

[13] T. Matsuura, A. Al-Shuaibi, H. Fuijiwara, S. Saitoh and M. Sugihara, Numerical real inversion formulas of the Laplace transform by a sinc method, (in preparation).

[14] E. L. Post, Generalized diffentiation, Trans. Amer. Math. Soc., **32**(1930), 723-781.

[15] S. Saitoh, Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications, *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, **369** (1997), Addison Wesley Longman, UK.

[16] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[17] *http://library.wolfram.com /inforcenter/MathSource/4738/*

[18] *http://www.columbia.edu/ ww2040/abate.html*

5 On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction.

(a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, let $\delta_n(\boldsymbol{a}, f)$ be the $n-$truncated defect of $\boldsymbol{a}$ with respect to f.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $2N - n + 2 \leq \#X$, where N is an integer satisfying $N \geq n$.

Truncated Defect Relation ([1]($N = n$), [4]($N > n$). See [2], [3].)

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in a holomorphic curve f satisfying

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1. \tag{1}$$

(b) For a non-empty, finite subset S of X, we denote $V(S)$ =the vector space spanned by elements of S and $d(S) = \dim V(S)$. Let

$$\mathcal{O} = \{S \subset X \mid 0 < \#S \leq N + 1\}.$$

Then, $\#\{d(S)/\#S \mid S \in \mathcal{O}\} < \infty$. We put

$$\lambda = \min_{S \in \mathcal{O}} \frac{d(S)}{\#S}.$$

Proposition 1([5]). $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq (n + 1)/\lambda$.

Proposition 2([5]). Suppose that $N > n$ and that (1) holds. When n is even, $\lambda < (n + 1)/(2N - n + 1)$.

Theorem A([5]). Suppose that $N > n$ and that (1) holds. If $\lambda < (n+1)/(2N-n+1)$, in particular, if n is even, then there exists a subset P of X satisfying

(i) $d(P)(2N - n + 1)/(n + 1) < \#P$ and (ii) $\delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 1$ $(\boldsymbol{a} \in P)$.

2. Lemma and Result.

Let

$$\mathcal{W} = \{\tau : X \to (0,1] \mid \forall S \in \mathcal{O},\ \sum_{\boldsymbol{a} \in S} \tau(\boldsymbol{a}) \le d(S)\}.$$

Lemma 1. $\forall \tau \in \mathcal{W},\ \sum_{\boldsymbol{a} \in X} \tau(\boldsymbol{a})\delta_n(\boldsymbol{a}, f) \le n+1.$

Lemma 2([7]). There exist a function $w : X \to (0,1]$ and a constant h satisfying

(a) $0 < hw(\boldsymbol{a}) \le 1$ $(\boldsymbol{a} \in X)$; (b) $\sum_{\boldsymbol{a} \in X}(1 - hw(\boldsymbol{a})) = 2N - n + 1 - h(n+1)$;
(c) $N/n \le h \le (2N - n + 1)/(n+1)$; (d) $w \in \mathcal{W}$.

Lemma 3. (1) holds if and only if
(i) $(1 - hw(\boldsymbol{a}))(1 - \delta_n(\boldsymbol{a}, f)) = 0$ $(\boldsymbol{a} \in X)$ and (ii) $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} w(\boldsymbol{a})\delta_n(\boldsymbol{a}, f) = n+1.$

Let $D_n^1 = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 1\}$.

Proposition 3([6]). Suppose that (1) holds. If $d(D_n^1) = n+1$, then $\# D_n^1 = 2N - n + 1$.

As an improvement of Theorem A, we have the following

Theorem. Suppose that $N > n$, $d(D_n^1) \le n$ and that (1) holds. Then, $\lambda \le (n+1)/(2N - n + 1)$. If $\lambda < (n+1)/(2N - n + 1)$, in particular, if n is even, then

$$\# D_n^1 = d(D_n^1) + N - n.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica, 7(1933), 5-31.

[2] W. Chen: Defect relations for degenerate meromorphic maps. Trans. Amer. Math. Soc., 319-2(1990), 499-515.

[3] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[4] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic curves. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 269-3(1983), 547-552.

[5] N. Toda: A survey of extremal holomorphic curves for the truncated defect relation. Bull. Nagoya Inst. Tech., 55(2003), 1-18.

[6] N. Toda: On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation and some applications. Proc. Japan Acad., 81A(2005), 99-104.

[7] N. Toda: A generalization of Nochka weight function (preprint).

6

Riemann 面の等角的埋め込みと Poiseuille 流れの一般化

伊藤　雅明	広島大学工学研究科
柴　　雅和	広島大学工学研究科
幡谷　泰史	山口大学理学部

種数 1 の任意の開 Riemann 面 R とその標準ホモロジー基底 (mod ∂R) χ が与えられているとする．他方で，種数 1 の閉 Riemann 面 (torus)T とその標準ホモロジー基底 χ_T の対 (T,χ_T) があるとき，対 (R,χ) を対 (T,χ_T) に自然な意味で — すなわち誘導されるホモロジー群の間の準同型写像が 2 つの基底 χ および χ_T を対応させるように — 等角的に埋め込もうとすると，(T,χ_T) は著しく制限されることが分かっている．具体的にいえば (T,χ_T) のモジュラス $\tau=\tau[T,\chi_T]$ は上半平面内のある閉円板に属することが必要十分である：

$$\begin{aligned} M &= M(R,\chi) \\ &:= \{\tau\in\mathbb{C}\mid \tau=\tau[T,\chi_T] \text{ for which } \exists f:(R,\chi)\to(T,\chi_T), \text{conformal}\} \end{aligned}$$

は閉円板である；ただし，1 点に退化する場合を除外しない．

さらに，任意の $\tau\in M(R,\chi)$ について，τ をモジュラスとする (T,χ_T) の上で，像 Riemann 面によって覆われない部分の集合の（埋め込み等角写像 f を変化させたときの）最大面積

$$\alpha(\tau):=\max\{\mathrm{Area}(T\setminus f(R))\mid f:(R,\chi)\to(T,\chi_T),\ \text{conformal}\}$$

が作る曲面は回転放物面

$$\alpha(\tau)=\frac{\rho_*^2-|\tau-\tau_*|^2}{2\rho_*}$$

であることも知っている (実際にはもっと詳しく分かっている：この曲面と M とで囲まれる部分が等角的埋め込み $f:(R,\chi)\to(T,\chi_T)$ の全体によって正確に覆い尽くされている)．

他方で，流体物理学においてPoiseuilleの流れとしてよく知られているように，粘性率が定数である粘性流体が半径ρ_*の無限に長い円柱$M \times \mathbb{R}$内の定常流の速度ベクトルは，(定数倍を無視して) $(0,0,\alpha(\tau))$で与えられる．

[注意] 上のような現象の比較検討は，種数が0である場合にも既に可能であるが，従来殆どなされていない．

閉円板Mは上半平面$\mathbb{H}$内の双曲的円板でもあるが，固定された$\tau \in M$について，面積比の最大値が作る曲面

$$A(\tau) := \max\{\mathrm{Area}(T \setminus f(R))/\mathrm{Area}(T) \mid f : (R, \chi) \to (T, \chi_T),\ \mathrm{conformal}\}$$

が，回転放物面と類似の性質 — 双曲的な同心円周上で定数値をとる — ことも私たちは知っている．

この状況を実現するような（無限に長い）管の内部を流れる粘性流体の存在を推測することには相応の理由があるであろう．実際，切り口が円板Mである無限に長い管(円管) $M \times \mathbb{R}$の内部で速度ベクトル$(0,0,A(\tau))$をもつ粘性流体の粘性率μは，いわゆるNavier-Stokesの方程式から導かれた（μに関する）偏微分方程式を解けば求められるが，今回は，特性曲線の方法を用いて実解析的に得られる解μについて述べる．解は，

$$\begin{aligned} a &:= \mathrm{Re}\,\tau_*, \\ b &:= \mathrm{Im}\,\tau_*, \\ c &:= \sqrt{b^2 - \rho_*^2} \end{aligned}$$

とおくとき，

$$\mu(x,y) = \frac{-\rho k y^2}{(x-a)^2}\left\{\frac{(x-a)^2 + y^2 - c^2}{2(x-a)}\mathrm{Sin}^{-1}\frac{2(x-a)(y+c)}{(x-a)^2+(y+c)^2} - y + c\right\}$$

で与えられる．

ここで，kは管長方向の圧力勾配で，それは考察対象の現象では負の一定値をとる（ことが要請される）．また，逆正弦関数は$\mathrm{Sin}^{-1}0 = 0$を満たすものである．

こうして，各$\tau \in M$に対して最大面積比を与えるM上の関数$A(\tau)$は，粘性率が上のμで与えられる粘性流体の円管内の定常的な流れを実現するものであることが分かった．

7

HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND HYPERBOLIC METRIC

Glen D. Anderson (Michigan State University)
須川 敏幸（広島大学大学院理学研究科）
M. K. Vamanamurthy (University of Auckland)
Matti Vuorinen (University of Turku)

平面領域は境界が２点以上からなるとき双曲計量を許容するので双曲的と呼ばれるが，そのような領域への正則写像の歪曲定理や増大度定理を得るには双曲計量または双曲距離の下からの評価が重要となる．双曲計量の領域に関する単調性から，極大な平面領域である２点穴あき平面の双曲計量が特に重要で，実際古典的な Picard, Landau, Schottky の定理などは本質的には２点穴あき平面の双曲計量の性質に深く依存している．

２点穴あき平面は，２点が $0,1$ の場合，すなわち $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ の場合に考えれば十分であるが，その双曲計量は（複素数をパラメータとする）第一種完全楕円積分を用いて表示される．(このことは，Agard の 1965 年の論文から読みとれるが，その中に明示的に書かれなかったので，文献に現れるようになるのは比較的最近のことのようである．詳しくは，[4] を参照されたい.)

第一種完全楕円積分は超幾何函数のパラメータを特殊化したものとして記述できることから，超幾何函数に関する性質から双曲計量に関する情報が引き出せると期待される．近年，コンピュータによる数値実験が容易になってきたこともあり，超幾何函数に関するかなり細かい評価や不等式が数多く，厳密に示されるようになってきた（たとえば，[1] を参照のこと）．今回そのような手法を用いて，次のような定理が得られた．$B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b), R(a,b)=2\Psi(1)-\Psi(a)-\Psi(b), \Psi(t)=\Gamma'(t)/\Gamma(t)$ とする．

定理 1. a,b を $ab<a+b$ を満たす正数とし，$\mathbb{R}$ 上の函数 P を

$$P(t)=F\left(a,b;a+b;\frac{e^t}{1+e^t}\right)F\left(a,b;a+b;\frac{1}{1+e^t}\right)$$

により定義する．

(1) P は偶函数で，$P''(t)>0$ （従って，狭義凸）であり，

$$P(t)=[|t|+R(a,b)]/B(a,b)+O(te^{-|t|})\quad(t\to\pm\infty).$$

(2) 導函数 P' は奇函数で，$\mathbb{R}$ 上狭義単調増加，$P'(0)=0, P'(t)=(|t|/t)B(a,b)+O(te^{-|t|})$ $(t\to\pm\infty)$ を満たす．特に，$-1/B(a,b)<P'(t)<1/B(a,b)$ $(t\in\mathbb{R})$．

(3) 函数 $P(t)\pm t/B(a,b)$ は $\pm t\geq 0$ において狭義凸かつ狭義単調増加 $(t>0)$ ／減少 $(t<0)$ である．特に，$R(a,b)/B(a,b)<P(t)-|t|/B(a,b)\leq P(0)$ $(t\in\mathbb{R})$．

(4) 函数 $G(t)=(P(t)-P(0))/t$ は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加で，その像は $(-1/B(a,b),1/B(a,b))$ である．

定理 2. a, b を正数として $\mathbb{R}$ 上の函数 Q, q をそれぞれ

$$Q(t) = \frac{F\left(a, b; a+b; \frac{e^t}{1+e^t}\right)}{F\left(a, b; a+b; \frac{1}{1+e^t}\right)}, \quad q(t) = \log Q(t)$$

により定める．このとき，

(1) Q は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加な正値函数で，$Q(t)Q(-t) = 1$ かつ $Q(t) = B(a,b)^{-1}[t + R(a,b)] + O(te^{-t})$ $(t \to +\infty)$ を満たす．
(2) q は $\mathbb{R}$ 上狭義単調増加な奇函数で，$q(t) = \log t - \log B(a,b) + O(1/t)$ $(t \to +\infty)$ を満たす．
(3) $q(t)$ は $t < 0$ 上狭義凸，$t > 0$ 上狭義凹である．
(4) $q(t)/t$ は $t > 0$ において狭義単調減少，従って q は $(0, +\infty)$ 上で劣加法的，すなわち $q(t+t') \le q(t) + q(t')$ $(t, t' > 0)$ が成り立つ．
(5) $a + b \ge 1$ の時，$Q(t) - t/B(a,b)$ は $t > 0$ において狭義単調減少かつ狭義凸である．
(6) $a + b \ge 1$ の時，$(R(a,b) + t)/B(a,b) < Q(t) < 1 + t/B(a,b)$ $(t > 0)$ である．

$\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ の（曲率 -4 の）双曲計量を $\lambda(z)|dz|$, 双曲距離を $d(z,w)$ とすれば，$\lambda(z) \ge \lambda(-|z|), d(z,w) \ge d(-|z|, -|w|)$ であり，

$$\lambda(-x) = \frac{1}{2\pi x F(\frac{1}{1+x}) F(\frac{x}{1+x})}$$

$$d(-x, -y) = |\Phi(\tfrac{x}{1+x}) - \Phi(\tfrac{y}{1+y})|$$

と表される．ただし，ここに $0 < s < 1$ に対して

$$\Phi(s) = \frac{1}{2} \log \frac{F(s)}{F(1-s)},$$

$$F(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-st^2)}} = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; s)$$

とする．従って，上記の定理において $a = b = 1/2$ とすれば $P(t) = [2\pi e^t \lambda(-e^t)]^{-1}, q(t) = 2\Phi(e^t)$ となり，上記の定理から，[4] において予想として挙げられていた主張の多くが証明される．ただし，それらのうちいくつかは既に，Baricz [2], Betsakos [3] によって示されていることを注意しておく（が，我々の証明法は彼らのものとは異なる）．

References

[1] Anderson, G. D., Vamanamurthy, M. K. and Vuorinen, M. K. *Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps*, Wiley-Interscience (1997).

[2] Baricz, Á. Turán type ineuqualities for generalized complete elliptic integrals, *to appear in Math. Z.*

[3] Betsakos, D. Estimation of the hyperbolic metric by using the punctured plane, *preprint.*

[4] Sugawa, T. and Vuorinen, M. Some inequalities for the Poincaré metric of plane domains, *Math. Z.*, **250** (2005), 885–906.

8

On counterexamples to the equivariant K=2 conjecture

小森洋平（大阪市立大学理学部数学教室）

Let Ω be a simply connected domain in the Riemann sphere $\hat{\mathbf{C}}$ whose boundary contains more than two points. Thinking of $\hat{\mathbf{C}}$ as the boundary of hyperbolic 3-space $\mathbf{H}^3$, we denote the boundary of the hyperbolic convex hull of $\hat{\mathbf{C}} - \Omega$ in $\mathbf{H}^3$ by Dome(Ω).

On one hand Riemann's mapping theorem tells us that Ω is conformal to the unit disk $\mathbf{D}$ with its conformal structure. On the other hand Thurston [2] proved that Dome(Ω) with its induced metric from $\mathbf{H}^3$ is isometric to $\mathbf{D}$ with its hyperbolic structure. Since Ω and Dome(Ω) share the same boundary $\partial\Omega$ in $\hat{\mathbf{C}}$, it is natural to look for quasiconformal maps $f : \Omega \to \mathrm{Dome}(\Omega)$ such that the continuous extension of f to $\partial\Omega$ acts as the identity map on $\partial\Omega$.

Let Möb(Ω) denote the group of Möbius transformations which preserve Ω. Then Möb(Ω) also acts on Dome(Ω) as a group of hyperbolic isometries by means of the Poincaré extension. Let $K_{eq}(\Omega)$ be the infimum of the maximal dilatations of Möb(Ω)-equivariant quasiconformal maps from Ω to Dome(Ω) with this boundary condition.

In this talk, by means of the numerical calculation of moduli of hyperbolic quadrilaterals [1], we show some ideas to estimate $K_{eq}(\Omega)$ from below when Ω is a region of discontinuity of a quasi-fuchsian group.

References

[1] P. Buser and R. Silhol, Geodesics, periods, and equations of real hyperelliptic curves, Duke Math. Vol. 108, No.2 (2001), 211-250.

[2] Epstein, D. B. A. and A. Marden, Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces, in Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 111 (1987), 113–253.

[3] Y. Komori and C. Matthews, An explicit counterexample to the equivariant K=2 conjecture, Conform. Geom. Dyn. 10 (2006), 184-196.

9 Intermediate Teichmüller space

Ege Fujikawa (Sophia University)
Katsuhiko Matsuzaki (Okayama University)

The Teichmüller space $T(R)$ of a Riemann surface R is the set of all marked Riemann surfaces that are quasiconformally equivalent to R. Let $M(R)$ be the moduli space of a Riemann surface R, namely the set of all biholomorphic equivalence classes of R. Then we have a projection $\pi : T(R) \to M(R)$ by forgetting all the markings of Riemann surfaces. We consider a new projection π' by forgetting the markings only on compact subsurfaces of Riemann surfaces, and then the projection π is divided into π' and another projection $\pi'' : \pi'((T(R)) \to M(R)$. In this talk, we observe the new space $\pi'(T(R))$, which will be called the intermediate Teichmüller space (between $T(R)$ and $M(R)$), and investigate a complex structure and the group of biholomorphic automorophisms.

We have another projection from the Teichmüller space. The asymptotic Teichmüller space $AT(R)$ is a quotient space of the Teichmüller space that is defined by asymptotically conformal homeomorphisms. Then we have a natural projection $\rho : T(R) \to AT(R)$. We would like to state that the projections π and ρ are interrelated to each other: the projection ρ is also divided into $\pi' : T(R) \to \pi'(T(R))$ and $\rho'' : \pi'(T(R)) \to AT(R)$. Namely, the intermediate Teichmüller space lies also between $T(R)$ and $AT(R)$.

If R is of analytically finite type, then the intermediate Teichmüller space is coincident with the moduli space $M(R)$, and the asymptotic Teichmüller space $AT(R)$ is just one point. If R is the unit disk $\mathbb{D}$, then the intermediate Teichmüller space is coincident with the universal Teichmüller space $T(\mathbb{D})$.

Now we state the concrete definition of the intermediate Teichmüller space.

Definition 1. We say that two quasiconformal homeomorphisms f_1 and f_2 on a Riemann surface R are *equivalent* if there exist a conformal homeomorphism $h : f_1(R) \to f_2(R)$ and a compact subset V_h on $f_1(R)$ such that, for each connected component W of $f_1(R) - V_h$ that is not a cusp neighborhood, the quasiconformal homeomorphism $f_2 \circ f_1^{-1}|_W$ restricted to W is homotopic to $h|_W$. The *intermediate Teichmüller space* $IT(R)$ of R is the set of all equivalence classes $[f]$ of quasiconformal homeomorphisms f on R.

A pseudo-distance between two points $[f_1]$ and $[f_2]$ in $IT(R)$ is defined by $d([f_1],[f_2]) = (1/2)\inf \log K(f)$, where the infimum is taken over all quasiconformal homeomorphisms f that is homotopic to $f_2 \circ f_1^{-1}$ outside of a compact subsurface of $f_1(R)$, and $K(f)$ is the maximal dilatation of f.

It is known that the Teichmüller space and the asymptotic Teichmüller space are complex Banach manifolds. We would like to consider a complex structure of the intermediate Teichmüller spaces as well as the metric structure. However, since it is difficult to consider these structures for all Riemann surfaces, we have to assume that Riemann surfaces satisfy a certain condition on hyperbolic geometry.

Theorem 2. *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then* (i) *the intermediate Teichmüller space $IT(R)$ has a complex manifold structure;* (ii) *the pseudo-distance d is a complete distance which is coincident with the Kobayashi distance on $IT(R)$.*

To obtain another equivalent definition of the intermediate Teichmüller space, we consider a subgroup of the quasiconformal mapping class group $\mathrm{MCG}(R)$.

Definition 3. A quasiconformal mapping class $[g] \in \mathrm{MCG}(R)$ is said to be *eventually trivial* if there exists a compact subsurface V_g of R such that, for each connected component W of $R - V_g$ that is not a cusp neighborhood, the restriction $g|_W : W \to R$ is homotopic to the inclusion map $id|_W : W \hookrightarrow R$. The *eventually trivial mapping class group* $E(R)$ is the group of all eventually trivial mapping classes.

We see that the intermediate Teichmüller space $IT(R)$ is coincident with the quotient space $T(R)/E(R)$. Note that if R is of analytically finite type, then $E(R) = \mathrm{MCG}(R)$. Theorem 2 follows from the following proposition.

Proposition 4. *Let R be an analytically infinite Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then the eventually trivial mapping class group $E(R)$ acts on $T(R)$ discontinuously and freely. Namely, for every point $p \in T(R)$, the orbit $E(R)(p)$ is a discrete set and the isotropy subgroup $\mathrm{Stab}_{E(R)}(p)$ is trivial.*

Remark that the problem whether the pseudo-distance d is a distance on $IT(R)$ is equivalent to the problem whether the orbit of every point $p \in T(R)$ under the action of the eventually trivial mapping class group $E(R)$ is closed in $T(R)$.

We determine the biholomorphic automorphism group of $IT(R)$. Every element of $\mathrm{MCG}(R)$ induces a biholomorphic automorphism of $AT(R)$. Let $\mathrm{Aut}(AT(R))$ be the group of all biholomorphic automorphisms of $AT(R)$. Then we have a homomorphism $\iota_{AT} : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(AT(R))$ and define $\mathrm{Mod}_{AT}(R) = \iota_{AT}(\mathrm{MCG}(R))$. The homomorphism ι_{AT} is surjective for no Riemann surfaces R of infinite type, namely $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ is always a proper subgroup of $\mathrm{Aut}(AT(R))$. However we can characterize $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ as the biholomorphic automorphism group of $IT(R)$.

Theorem 5. *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then the biholomorphic automorphism group $\mathrm{Aut}(IT(R))$ of $IT(R)$ is isomorphic to $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$.*

10　Klein 群の不変成分の Riemann Map について

東工大大学院・理理工学研究科　志賀　啓成

1　Introduction

G を有限生成非初等的 Klein 群，Ω_G をその不連続領域，Λ_G をその極限集合とする．Klein 群 G は 3 次元双曲空間 $\mathbf{H}^3$ に真性不連続に作用している．したがって，その商空間 $N_G = \mathbf{H}^3/G$ は 3 次元双曲多様体（あるいは orbifold）になる．この講演では G, N_G などの性質と Ω_G—特に Ω_G が単連結な不変成分を持つとき—の（解析的）性質の関係を見る．

例えば，Ω_G が二つの不変成分を持つとき，G は quasi-Fuchs 群になり，したがって Ω_G の連結成分は単連結で，quasi-disk になる (Maskit). すると，Ω の連結成分 Ω_0 には単位円板 $\mathbf{D}$ から Ω_0 への Riemann map φ が存在するが，幾何学的函数論の一般論より，この φ に関してある定数 $A > 0, \kappa \in (0,1)$ がとれて，

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1-|z|)^{\kappa}} \tag{1}$$

が成立することが知られている (Pommerenke など). ここでは，このような性質をいくつかの群に関して考察する．

2　主結果

Klein 群で単連結な不変成分をただ一つ持つとき，b-group という．b-group で幾何学的有限なものを regular b-group という．G を regular b-group として，その単連結不変成分を Ω_0 とする．このとき $\Lambda_G = \partial\Omega_0$ であるが，適当に共役をとれば $\partial\Omega_0 \subset \mathbf{C}$ と仮定してよい．この仮定の下で以下が成り立つ．

定理 1　上の仮定の下で，$\varphi : \mathbf{D} \to \Omega_0$ を *Riemann map* とすると，ある定数 $A > 0$ が存在して，$\partial\mathbf{D}$ の近傍で

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1-|z|)|\log(1-|z|)|^2} \tag{2}$$

が成立する．

この結果から，Abikoff 等によって得られている regular b-group の極限集合の局所連結性が示されるが．実際には，以下のようなもっと詳しい情報が得られる．

系 2 *G を regular b-group とすると，その極限集合 Λ_G は局所連結である．特に Riemann map $\varphi : \mathbf{D} \to \Omega_0$ は境界まで連続的に拡張され，$\partial\Omega_0 \subset \mathbf{C}$ ならば*

$$|\varphi(e^{i\theta_1}) - \varphi(e^{i\theta_2})| \leq \left|\frac{A}{\log(\theta_1 - \theta_2)}\right| \tag{3}$$

なる連続性を持つ．

定理 1 における評価で現れる log のベキの 2 という数字であるが，これは以下の意味で sharp である．

定理 3 *G を単連結な不変成分 Ω_0 を持つ有限生成非初等的 Klein 群とする．$\partial\Omega_0 \subset \mathbf{C}$ と仮定し，$\varphi : \mathbf{D} \to \Omega_0$ を Riemann map とする．このとき以下は同値である．*

1. ある定数 $\alpha, A > 0$ および $\zeta_0 \in \Omega_0$ が存在して，任意の $z \in \varphi^{-1}(G\zeta_0) - \{\varphi^{-1}(\infty)\}$ に対して，

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)|\log(1 - |z|)|^{2+\alpha}} \tag{4}$$

が成り立つ．

2. G は quasi-Fuchs 群である．

3. ある定数 $A > 0, \kappa \in (0, 1)$ がとれて，$\partial\mathbf{D}$ の近傍で

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)^{\kappa}}. \tag{5}$$

が成り立つ．

G が幾何学的に無限でも，N_G の単射半径が正ならば—このとき G は有限幾何 (bounded geometry) を持つという—同様の評価が示される．

定理 4 *G が有限幾何を持つ b-group とする．上と同様の記号で，ある $\alpha > 0$ が存在して，*

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{A}{(1 - |z|)|\log(1 - |z|)|^{\alpha}} \tag{6}$$

が成り立つ．

11　擬等角写像の一点での等角性について

宍倉 光広　(京都大学大学院理学研究科)

擬等角写像の一点における等角性（あるいは微分可能性）については、Teichmüller, Wittich, Beilinskiĭ, Lehto らにより十分条件 (1) が与えられ、その後も Reich-Walczak, Brakalova-Jenkins, Gutlyanskiĭ-Martio, McMullen らにより改良が与えられている。これまで証明は、まず絶対値に関する微分可能性を示し、それを用いて偏角の変動を調べるという２段階に分かれており、剰余項の評価はかなり悪いものとなっている。本講演では、簡単な等角不変量（非調和比 Cross-ratio）に対する Grötzsch 型不等式を用いて絶対値と偏角を同時に評価し、さらに剰余項も具体的に評価する方法を提案する。以下では、$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(0)=0$ をみたす擬等角写像とし、$\mu(z)=f_{\bar z}(z)/f_z(z)$ とする。

定理 1 (Teichmüller, Wittich, Belinskiĭ, Lehto; Lehto-Virtanen の本参照 §6, Theorem 6.1, P.232). $\mu(z)$ が ある $0<r<\infty$ に対して

$$I(r)=\iint_{|z|<r}\frac{|\mu(z)|}{(1-|\mu(z)|)}\frac{dx\,dy}{|z|^2}<\infty \tag{1}$$

をみたすとき、f は $z=0$ において次の意味で等角である：ある複素数 $A\neq 0$ と関数 $\varepsilon_f(r)$ で $\lim_{r\searrow 0}\varepsilon_f(r)=0$ をみたすものがあって、

$$\left|\frac{f(z)}{z}-A\right|\le |A|\varepsilon_f(|z|)\quad (z\to 0) \tag{2}$$

となる。

定理 2 (Gutlyanskiĭ-Martio). (1) の代わりに

$$\iint_{|z|<1}\frac{|\mu(z)|^2}{(1-|\mu(z)|)}\frac{dx\,dy}{|z|^2}<\infty \text{ かつ } \iint_{|z|<1}\frac{\mu(z)}{(1-\underbrace{|\mu(z)|}_{|\mu(z)|^2})}\frac{dx\,dy}{z^2} \text{ が主値の意味で収束} \tag{3}$$

ならば、やはり f は $z=0$ において等角である。

これらの証明に次を利用する。

補題 3 (4 点穴あき球面に対する Grötzsch 型不等式; Ahlfors の本または Gradiner-Lakic の本参照). $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ を擬等角写像、z_1,z_2,z_3,z_4 を $\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 4 点とし、$w_j=f(z_j)$ $(j=1,2,3,4)$ とおく。このとき、

$$d_\Omega(Cr(z_1,z_2,z_3,z_4),Cr(w_1,w_2,w_3,w_4))\le\log\overline{K}_f(z_1,z_2,z_3,z_4), \tag{4}$$

ここで、d_Ω は $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ の双曲計量、$Cr(z_1,z_2,z_3,z_4)$ は 4 点の非調和比、

$$\overline{K}_f(z_1,z_2,z_3,z_4)=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\left|1+e^{i\theta}\mu(z)\frac{\varphi(z)}{|\varphi(z)|}\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}|\varphi(z)|dx\,dy\bigg/\iint_{\mathbb{C}}|\varphi(z)|dx\,dy$$

ただし、$\varphi(z)=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ $(z_j=\infty$ のときは $(z-z_j)$ を除く$)$.

定義. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対し、 $\varphi_{z_1,z_2}(z) = \frac{z_1}{z(z-z_1)(z-z_2)}$ とおき、

$$J(\mu; z_1, z_2) = 2\left|\iint_{\mathbb{C}} \frac{\mu(z)\varphi_{z_1,z_2}(z)}{1-|\mu(z)|^2}dx\,dy\right| + 2\iint_{\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|^2|\varphi_{z_1,z_2}(z)|}{1-|\mu(z)|^2}dx\,dy$$

と定義する。このとき、$\overline{K}_f(z_1, z_2, 0, \infty) = 1 + J(\mu; z_1, z_2) / \iint_{\mathbb{C}} |\varphi_{z_1,z_2}(z)|dx\,dy$.

命題 4 (Key Proposition). 定数 $C_1, C_2 > 0$, $0 < \delta_1 < 1$ が存在して、$0 < |z_2| \leq \delta_1|z_1| < \infty$ かつ $J(\mu; z_1, z_2) \leq C_1 \log\frac{|z_1|}{|z_2|}$ ならば、

$$\left|\log\frac{f(z_1)}{z_1} - \log\frac{f(z_2)}{z_2}\right| \leq C_2 J(\mu; z_1, z_2). \tag{5}$$

$\varphi_{z_1,z_2}(z)$ は $|z_2| < r_2' < |z| < r_1' < |z_1|$ では $1/z^2$ に「近い」ことを使えば、(1) または (3) のもとで $0 < |z_2| \leq \delta_1|z_1|$, $z_1 \to 0$, $z_2 \to 0$ のとき $J(\mu; z_1, z_2) \to 0$ となるので、定理 1, 2 が証明でき、(2) での $\varepsilon_f(r)$ (r 十分小) について次の評価を得る。

$$\varepsilon_f(r) \leq 3C_2 \sup\{J(\mu; z_1, z_2) : |z_1| \leq r \text{ and } 0 < |z_2| \leq \delta_1|z_1|\}. \tag{6}$$

この $J(\mu; z_1, z_2)$ の評価をするだけで、剰余項 $\varepsilon_f(r)$ についての評価を得ることができる。例えば、

定理 5. f が K-qc で、(1) をみたし、さらにある $\alpha > 0$ に対し、 $I(r) = O(r^\alpha)$ $(r \to 0)$ となるとき、ある $\beta > 0$ が存在して、

$$\varepsilon_f(r) = O(r^\beta).$$

となる。

注意. Lehto-Virtanen の本での $\varepsilon_f(r)$ の評価は、$\left(\frac{1}{\log\frac{1}{r}}\right)^{1/2(K+2)}$ という項を含み、これより悪い。Schatz は $\iint \frac{|\mu(z)|}{|z|^p}dx\,dy < \infty$ $(p > 2)$ を仮定し、また McMullen("Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle", Theorem 2.25) は、$Area(B_r(0) \cap supp\,\mu) = O(r^{2+\alpha})$ を仮定し、同様の Hölder 型評価を得ているが、上記定理はその条件をゆるめたものとなっている。

この結果は、複素力学系の無理的中立不動点の剛性問題に応用される。(トポロジー分科会で発表予定)

命題 4 の証明には、補題 3 と次を使う。

補題 6. 定数 $C_1, C_3 > 0$, $0 < \delta_1 < 1$ があって、$\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $|\zeta_1| < \delta_1$ かつ $d_\Omega(\zeta_1, \zeta_2) \leq C_1$ なら、

$$\left|\log\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right| \leq C_3 d_\Omega(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \log|\zeta_1|.$$

参考文献

[LV] O. Lehto and K. I. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the Plane, 2nd Edn., Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[GM] V. Gutlyanskiĭand O. Martio, Conformality of a quasiconformal mapping at a point, J. Anal. Math. 91 (2003), 179–192.

12 Dirichlet境界条件を満たす非線形楕円型方程式の正値解の存在

平田 賢太郎

秋田大学教育文化学部基礎数理

Dは$\mathbb{R}^n$内の有界領域とし，∂DでDの境界を表す．Δは$\mathbb{R}^n$上のLaplace作用素とする．次の形の非線形方程式のDirichlet問題を考える（実際はもっと一般の形）：

$$
\begin{cases}\Delta u = Vu^p & \text{in } D \quad \text{(distribution)} \\ u=\phi & \text{on } \partial D\end{cases} \tag{1}
$$

ただし，pは定数，Vは適当な条件を満たすD上の可測関数である．

問題. すべての非負値関数$\phi \in C(\partial D)$に対して(1)は正値解をもつか？

$V \le 0$のとき$\Delta u = Vu^p$の正値解は優調和関数だから，$\phi \ge 0$であれば(1)の正値解の存在が期待できる！しかし，$V \ge 0$のときは$\Delta u = Vu^p$の正値解は劣調和関数だから境界で最大値をとる．つまり，$\phi \equiv 0$に対して(1)は正値解をもたない．

$p > 1$の場合のChen-Williams-Zhao [1]の結果を述べる．$V \in \mathcal{K}(D)$とは，

$$
\lim_{\substack{m(E)\to 0\\ E\subset D}} \left(\sup_{x\in D} \int_E \frac{|V(y)|}{|x-y|^{n-2}} dy \right) = 0
$$

を満たすときをいう．ただし，mは$\mathbb{R}^n$上のLebesgue測度である．

定理 (Chen-Williams-Zhao). Dは$\mathbb{R}^n$ $(n \ge 3)$内の有界Lipschitz領域とする．$p > 1$は定数，$V \in \mathcal{K}(D)$とする．$\phi \not\equiv 0$で

$$
\sup_{\partial D} \phi \le A(p, V, D)
$$

ならば，(1)は正値解$u \in C(\overline{D})$をもつ．

次に特異型非線形摂動$(p < 0)$の場合を考える．$\alpha > 0$として

$$
\begin{cases}\Delta u = Vu^{-\alpha} & \text{in } D \\ u=\phi & \text{on } \partial D\end{cases} \tag{2}
$$

この場合，小さいϕに対して正値解の存在は保証されない．以下，Green関数$G(x,y)$をもち，Dirichlet問題に関して正則な有界領域をDirichlet正則領域とよぶ．

定理 (非存在). D は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の Dirichlet 正則領域で単位球を含むとする．$\alpha > 0$ は定数，$V \equiv \kappa > 0$（定数）とする．

$$\sup_{\partial D} \phi \leq \left(\frac{\kappa}{2n}\right)^{1/(1+\alpha)}$$

ならば，(2) は正値解をもたない．

存在定理を述べる為に次の関数族を導入する．$V \in \mathcal{G}(D)$ とは，各 $z \in \overline{D}$ に対して

$$\lim_{r \to 0} \left(\sup_{x \in D \cap B(z,r)} \int_{D \cap B(z,r)} G(x,y)|V(y)|dy \right) = 0$$

を満たすときをいう．このとき，

$$\|V\|_{\mathcal{G}(D)} := \sup_{x \in D} \int_D G(x,y)|V(y)|dy < \infty$$

がわかる．また，$V \in L^1_\omega(D)$ とは，各 $z \in \overline{D}$ と $0 < r < r_z$ に対して

$$\int_{D \setminus B(z,2r)} |V(y)| \omega\big(y, \partial B(z,r) \cap D, D \setminus \overline{B(z,r)}\big) dy < \infty$$

を満たすときをいう．$0 \leq \omega \leq 1$ より，$L^1(D) \subsetneq L^1_\omega(D)$ である．

定理 (存在). D は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の Dirichlet 正則領域とする．$\alpha > 0$ は定数，$V \in \mathcal{G}(D) \cap L^1_\omega(D)$ とする．

$$\inf_{\partial D} \phi \geq \frac{1+\alpha}{\alpha^{\alpha/(1+\alpha)}} \|V\|_{\mathcal{G}(D)}^{1/(1+\alpha)}$$

ならば，(2) は正値解 $u \in C(\overline{D})$ をもつ．

系. D は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の Dirichlet 正則領域で単位球と同じ体積をもつとする．$\alpha > 0$ は定数，$V \equiv \kappa > 0$（定数）とする．

$$\inf_{\partial D} \phi \geq \frac{1+\alpha}{\alpha^{\alpha/(1+\alpha)}} \left(\frac{\kappa}{2n}\right)^{1/(1+\alpha)}$$

ならば，(2) は正値解 $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ をもつ．

注意. Lipschitz 領域 D においては $\mathcal{G}(D) \subset L^1_\omega(D)$ である．また，D が滑らかな領域ならば，$\delta_D^{-1} \in \mathcal{G}(D) \setminus \mathcal{K}(D)$ である．従って，$\Delta u = \delta_D(x)^{-1} u^{-\alpha}$ にも適用できる．

参考文献

[1] Z. Q. Chen, R. J. Williams and Z. Zhao, *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations with Dirichlet boundary conditions*, Math. Ann. **298** (1994), no. 3, 543–556.

[2] K. Hirata, *On the existence of positive solutions of singular nonlinear elliptic equations with Dirichlet boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. (to appear)

13

The composition operators with closed range on the Dirichlet spaces

米田　力生　　(小樽商科大学)

$\alpha > 0$ に対して、空間 $\mathcal{B}_\alpha$ は

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ は, ブロッホ空間と呼ばれる. $dA(z)$ は D 上の normalized area measure とする.

$\alpha > -1$ に対して, 荷重付きディリクレ空間 D^α は

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|^2(\alpha+1)dA(z) < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする. $\alpha = 1$ のとき, $\mathcal{D}^1 = H^2$ は, ハーディー空間になる. $\alpha = 2$ のとき, $\mathcal{D}^2 = L_a^2$ は, ベルグマン空間になる.$\alpha = 0$ のとき, $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$ は, ディリクレ空間になる.

一般に X を バナッハ空間とし, T を linear operator from X into X とする. そのとき, T は 次を満たすならば, bounded below on X と呼ばれる : $\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$ and positive constants $C > 0$.

D 上の解析関数 g に対して, 合成作用素 C_φ は, $C_\varphi f = f \circ \varphi$ と定義される. この研究では, この合成作用素がいつ $\mathcal{D}$ 上で bounded below になるのかに関する研究をし, 以下の結果が得られた :

Theorem 1. *Let $0 < \alpha < 1$ and $s > 1$ and $\gamma = 2\alpha - 2 + s$. Suppose $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded. If $C_\varphi : \mathcal{D}^\gamma \to \mathcal{D}^\gamma$ is bounded below, then $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded below.*

Corollary 2. *Suppose $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded* $(0 < \alpha < 1)$. *If $C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ is bounded below, then $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded below for some $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.*

Theorem 3. *Let $0 < \alpha < 1$. Suppose φ is a univalent self-map of D. Suppose that $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded (i.e.* $\sup_{z\in D}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^\alpha |\varphi'(z)| < +\infty$). *The following are equivalent.*

(1) *$C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded below for some $0 < \alpha < 1$.*

(2) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ *is bounded below for all* $0 < \alpha < 1$.
(3) $C_\varphi : L^2_a \to L^2_a$ *is bounded below.*
(4) $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *is bounded below.*
(5) $C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *is bounded below.*
(6) $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ *is bounded below.*
(7) $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *is bounded below.*
(8) φ *is an automorphism of the open unit disc* D.

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149-158.

[2] R.Aulaskari, P.Lappan and J.Miao, On $\alpha-$Bloch Spaces and Multipliers of Dirichlet Spaces, J.Math.Anal.Appl.209(1997),103-121.

[3] P.S.Bourdon and J.A.Cima and A.L.Matheson, Compact composi tion operators on BMOA, Trans.Amer.Math.Soc.344(1994), 2183-2196.

[4] H.Chen and P.Gauthier, Boundedness From Below of Composition Operators on Bloch spaces, in preprint.

[5] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of the Amer.Math.Soc.133,5 (2004), 1371-1377.

[6] P.Ghatage and D.Zheng, Hyperbolic derivatives and generalized schwartz-Pick estimates, Proceedings of the Amer.Math.Soc.132,11(2004), 3309-3318.

[7] M.Jovovic and B.MacCluer, Composition operators on Dirichlet spaces, Acta Sci.Math.(Szeged) 63(1997), 229-247.

[8] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[9] G.McDonald and C.Sundberg, Toeplitz operators on the disc, indiana Univ.Math.J.28(1979),595-611.

[10] C.C.Cowen and B.D.MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995..

[11] R.Zhao, On α-Bloch functions and VMOA, Acta Math.Sci.16(1996), 349-360.

[12] N.Zorboska, Composition operators With Closed Range,Trans.Amer. Math.Soc.344(1994), 791-801.

14 コーン内の無限遠点での minimally thin な集合の定量的な特徴付け

宮本育子（千葉大・理学研究科)、吉田英信

Essén and Jackson [2], Essén, Jackson and Rippon [3] は、次のような、半空間 $\mathbf{T}_n$ 内の無限遠点での minimally thin な集合に対して、それの加算個の球による被覆の結果を証明した。

定理 EJR. $n \geq 2$ とし、$h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は、$h(0) = 0$ と次の条件

$$\int_0^1 h(x)x^{1-n}dx \ < \infty$$

を満たす、連続な増加関数とする。このとき、$\mathbf{T}_n$ 内の ∞ で minimally thin な集合は、次の条件

$$(*) \qquad 0 < \frac{r_k}{y_k} \leq \sqrt{n} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y_k}{|P_k|}\right)^n h\left(\frac{r_k}{y_k}\right) < +\infty$$

を満たす, 中心 $P_k = (X_k, y_k) \in \mathbf{T}_n$, 半径 r_k の球の可算列 $\{B(P_k, r_k)\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ によって覆われる。ここで、$|P_k|$ は P_k と原点との距離。

この講演では、上記の定理 EJR を彼らとは異なる方法で、コーン内の ∞ で minimally thin な集合に対して拡張精密化した結果を報告する。ここで、コーンとは、単位球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ 上の滑らかな境界を持つ領域 Ω に対して、次の集合

$$C_n(\Omega) = \{(r, \Theta) \in \mathbf{R}^n;\ r \in (0, +\infty),\ (1, \Theta) \in \Omega\}$$

をいう ($n = 2$ の場合は角領域)。半空間 $\mathbf{T}_n$ は Ω を上半単位球 $\mathbf{S}_+^{n-1}$ とする特別なコーンである。

定理 (Miyamoto and Yoshida [5, 定理 3]). $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は、$h(0) = 0$ 、かつ、条件

$$\int_0^1 h(x)x^{1-n}dx \ < \ +\infty$$

を満たす、連続な増加関数とする。このとき、$C_n(\Omega)$ 内の ∞ で minimally thin な集合は、どんなに小さな数 $c > 0$ に対しても、次の条件

$$(**) \qquad 0 < \frac{r_k}{d(P_k)} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}c \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{d(P_k)}{|P_k|})^n h(\frac{r_k}{d(P_k)}) < +\infty$$

を満たす中心 $P_k \in C_n(\Omega)$, 半径 r_k の球の可算列 $\{B(P_k, r_k)\}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ によって覆われる。ここで、$d(P_k)$ は P_k から $C_n(\Omega)$ の境界までの距離。

注意 $(*)$ と $(**)$ の違いに注意したい。$(*)$ では、球 $B(P_k, r_k)$ は必ずしも $\mathbf{T}_n$ 内に完全に含まれるとは限らないが、$(**)$ のもとでは、c が小さい時には球 $B(P_k, r_k)$ は完全に $C_n(\Omega)$ に含まれている。

この定理において、$h(x) = x^n$ とおけば、異なる方法によって得られた次の結果を得る。

系 (Miyamoto, Yanagishita and Yoshida [4, 定理 2]). $C_n(\Omega)$ 内の ∞ で minimally thin な集合は、

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{r_k}{d_k})^n < +\infty$$

をみたす、中心 $P_k \in C_n(\Omega)$, 半径 r_k の球の可算列 $\{B(P_k, r_k)\}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ によって覆われる。

この定理の証明は、Essén、Jackson、Rippon 達の方法とは異なり、Azarin [1] に類する方法、すなわち、Besicovitch の被覆定理を利用する方法でなされる。また、$(**)$ を得るために、次の条件

$$(\delta - 1) diam(W_i) \leq \mathrm{dist}(W_i, \partial C_n(\Omega)) \leq 2\delta diam(W_i)$$

を満たす、「δ $(\delta > 1)$ に関する $C_n(\Omega)$ の Whitney cubes の列」$\{W_i\}$ を用いる。ここで、$\mathrm{dist}(W_i, \partial C_n(\Omega))$ は W_i と $C_n(\Omega)$ の境界との距離を、$diam(W_i)$ は W_i の直径を表す (Stein [6])。

参考文献

[1] V.S. Azarin, Generalization of a theorem of Hayman on subharmonic functions in an m-dimensional cone, Mat. Sb. 66(1965), 248-264; Amer. Math. Soc. Translation (2)80(1969), 119-138

[2] M. Essén and H.L. Jackson, On the covering properties of certain exceptional sets in a half-space, Hiroshima Math. J. 10(1980), 233-262.

[3] M. Essén, H.L. Jackson and P.J. Rippon, On minimally thin and rarefied sets in $\mathbf{R}^p, p \geq 2$, Hiroshima Math. J. 15(1985), 393-410.

[4] I. Miyamoto, M. Yanagishita and H. Yoshida, Beurling-Dahlberg-Sjögren type theorems for minimally thin sets in a cone, Canad.Math.Bull. 46(2003), 252-264.

[5] I. Miyamoto and H. Yoshida, On a covering property of minimally thin sets at infinity in a cone, preprint.

[6] E. M. Stein, Singular integrals and differntiability properties of functions, Princeton University Press, 1970.

15 Non-tangential limits of α-parabolic functions

中川　勇人（名大多元数理）

$(N+1)$ 次元ユークリッド空間 $(N \geq 1)$ における上半平面

$$\mathbb{R}_+^{N+1} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x \in \mathbb{R}^N, t > 0\}$$

において，α-放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ とは，

$$L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha \qquad (0 < \alpha \leq 1)$$

で定義されるものであり，α-放物型関数とは超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ が成り立つ関数 u のこととする．$L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ は，

$$W^{(\alpha)}(x,t) := \begin{cases} (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi & (x \in \mathbb{R}^N, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^N, t \leq 0) \end{cases}$$

で定義される．この $W^{(\alpha)}$ は $\alpha = 1/2$ のときには，

$$W^{(\frac{1}{2})}(x,t) = \begin{cases} \Gamma(\frac{n+1}{2})\, t\, (\pi(|x|^2 + t^2))^{-\frac{n+1}{2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0, \end{cases}$$

$\alpha = 1$ のときには，

$$W^{(1)}(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(-|x|^2/4t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

であり，それぞれは Poisson 核および Gauss-Weierstrass 核である．$\mathbb{R}_+^{N+1}$ 上の p 乗可積分な α-放物型関数のつくる Banach 空間は α は $\alpha = 1/2$ のときに $\mathbb{R}_+^{N+1}$ 上の調和関数全体，$\alpha = 1$ のときに熱方程式の解全体に一致する．$W^{(\alpha)}$ は x についての正規性をもち，常に非負である．すなわち，

$$\int_{\mathbb{R}^N} W^{(\alpha)}(x-y,t)\, dx = 1, W^{(\alpha)}(x,t) \geq 0$$

を常に満たす．また，k を非負整数，$\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N)$ として，

$$\exists C > 0, x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \left|\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(x,t)\right| \leq C t^{1-k}(t + |x|^{2\alpha})^{-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}-1}$$

と評価できる．

$f \in L^p(\mathbb{R}^N)(1 \le p \le \infty)$ の $W^{(\alpha)}$ に関する積分 $u(x,t)$ を，

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) W^{(\alpha)}(y,t)\, dy$$

で定義する．この $u(x,t)$ は α-放物型関数である．この積分は $\mathbb{R}_+^{N+1}$ の境界 $\{(x,0) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x \in \mathbb{R}\}$ への non-tangential limit を一般的には持たない．調和関数空間および熱方程式の解空間（すなわち，$\alpha = 1/2, 1$）については，古典的には Lebesgue 点での non-tangential limits の存在が知られている（[SW]）．最近の研究では，Shapiro が σ-set という Lebesgue 点を真に包含する集合を定義し，その集合に属する点では non-tangential limits が存在することを示した（[S2]）．

今回の報告は，$W^{(\alpha)}$ に関する積分 $u(x,t)$ についても，α-放物型 σ-set なる集合を

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t.

$$|x - x_0| < \delta, r < \delta \Longrightarrow \left| \int_{B(x_0,r)} (f(y) - f(x_0))\, dy \right| < \varepsilon(|x - x_0|^{\frac{1}{2\alpha}} + r)^N$$

を満たす点全体 x_0 と定義し，それに属する点での non-tangential limits が存在することを示すことである．この結果は 2 つの意味で従来の結果の拡張になっている．つまり，調和関数と熱方程式というそれぞれの視点で別々に扱っていた問題を統一的に取り組むことで見通しが良くなること，さらに，$1/2 \le \alpha \le 1$ のときには α-放物型 σ-set は σ-set を含んでいることである．

参考文献

[S2] V. L. Shapiro, Poisson integrals and nontangential limits, Proc. of the Amer. Math. Soc. **134**, No. 11 (2006), pp.3181-3189.

[NSS] M. Nishio, K. Shimomura, N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. of Math. Vol. 42, No. 1 (2005), pp.133-162.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

16

Vanishing integrability for Riesz potentials of functions in generalized Lebesgue spaces

水田 義弘　広島大学・総合科学部
大野 貴雄　広島大学大学院・理学研究科
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

$\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 $p(\cdot) : \mathbf{R}^n \to [1, \infty)$ に対して,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{f(y)}{\lambda} \right|^{p(y)} dy < \infty \quad (^\exists \lambda > 0)$$

となる $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とし, そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{f(y)}{\lambda} \right|^{p(y)} dy \le 1 \right\}$$

で定める ([2, Kováčik-Rákosník]). 特に, $p(x) = p_0$(一定) のとき, $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n) = L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$.

α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x - y|^{\alpha - n} f(y) dy$$

を考える. ここに, f は非負可測関数で $U_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する.

集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ と開集合 $G \subset \mathbf{R}^n$ に対して, リース容量を

$$C_{\alpha, p(\cdot)}(E; G) = \inf_f \int_G f(y)^{p(y)} dy$$

と定義する. ここに, 下限は G^c 上 0, $x \in E$ に対して $U_\alpha f(x) \ge 1$ であるような $\mathbf{R}^n$ 上の非負可測関数 f のすべてにわたってとられる. また, 任意の有界開集合 G に対して,

$$C_{\alpha, p(\cdot)}(E \cap G; G) = 0$$

のとき, $C_{\alpha, p(\cdot)}$-容量が零という.

次の事実はよく知られている.

定理 A. $f \in L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p_0 < \infty)$ とする. このとき, C_{α, p_0}-容量が零の集合 E が存在して, $1/q_0 \ge 1/p_0 - \alpha/n$ なる $1 < q_0 < \infty$ に対して,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} |U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|^{q_0} dx = 0, \quad {}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$$

本講演では, 定理 A の拡張を行う. このために, $(0, \infty)$ 上の正値非増加関数 k は次を満たすものを考える:

(k1) $(\log(1/t))^{-\varepsilon_0} k(t)$ は $(0, r_0)$ 上非減少関数 $(^\exists \varepsilon_0 > 0, 0 <^\exists r_0 < 1/e)$;

(k2) $\lim_{t\to\infty} k(t) \geq 1$.

そこで，変動指数$p(\cdot)$は，

(p1) $$|p(x)-p(y)| \leq \frac{\log k(|x-y|)}{\log(1/|x-y|)} \qquad (|x-y|<1/e)$$

を満たすものを考える．

$$1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/n$$

とし，$A>n, t\geq 0, x\in \mathbf{R}^n$に対して，

$$\Phi_A(t,x) = \{tk(t^{-1})^{-A/p(x)^2}\}^{p^\sharp(x)}$$

とする．

主定理. $p(\cdot)$は，$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) < n/\alpha$かつ(p1)を満たすとする．このとき，$f\in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ならば，

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \Phi_A(|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|, x)dx = 0, \quad {}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus (E_1 \cup E_2)$$

ここに，

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x\in\mathbf{R}^n : U_\alpha f(x) = \infty\}, \\ E_2 &= \left\{x\in\mathbf{R}^n : \limsup_{r\to 0+}\int_{B(x,r)} r^{\alpha p(y)-n} f(y)^{p(y)}dy > 0\right\} \end{aligned}$$

この定理は，Harjulehto-Hästö [3, Theorem 4.12]，二村・水田・下村 [1, Theorem 4.5] の結果を含んでいる．

また，本講演では主定理において除外集合の$C_{\alpha,p(\cdot)}$-容量が零になる変動指数$p(\cdot)$の例も紹介する．

参考文献

[1] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential spaces of variable exponent, Math. Nachr. **279** (2006), 1463–1473.

[2] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[3] P. Harjulehto and P. Hästö, Lebesgue points in variable exponent spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **29** (2004), 295–306.

17 Continuity properties for logarithmic potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent

大野 貴雄　　広島大学大学院・理学研究科

対数ポテンシャル

$$Lf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \log(1/|x-y|) f(y) dy$$

を考える．ここに，f は可測関数で $-\infty < Lf \not\equiv \infty$ と仮定する．
次の事実はよく知られている．

> **定理 A** ([2, Theorem 9.1, Section 5.9]). $\mathbf{R}^n$ 上の局所可積分関数 f は
>
> $$\int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|(\log(2+|f(y)|))dy < \infty$$
>
> を満たすとする．このとき，Lf は $\mathbf{R}^n$ 上連続である．

本講演では，定理 A の拡張を行う．このために，有界開集合 G 内のコンパクト集合 K に対して，

$$K(r) = \{x \in G : \delta_K(x) < r\}$$

とする．ここに，$\delta_K(x)$ は x と K との距離を表す．
$(0,\infty)$ 上の正値非増加関数 k は次を満たすものを考える：

(k1) $(\log(1/t))^{-\varepsilon_0} k(t)$ は $(0, r_0)$ 上非減少関数 $(^\exists\varepsilon_0 > 0, 0 <^\exists r_0 < 1/e)$;

(k2) $\lim_{t\to\infty} k(t) \geq 1$.

そこで，変動指数 $p(\cdot)$ は，

$$p(x) = 1 + \frac{\log k(|x-y|)}{\log(1/|x-y|)} \qquad (|x-y| < 1/e)$$

を考える．
$0 \leq \nu \leq n, \beta \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\sup_{x\in G, r>0} r^{-\nu}(\log(2+r^{-1}))^{\beta} \int_{G\cap B(x,r)} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} dy < \infty \quad (^\exists\lambda > 0)$$

となる G 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot),\nu,\beta}(G)$ とし，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot),\nu,\beta} = \inf\left\{\lambda > 0 : \sup_{x\in G, r>0} r^{-\nu}(\log(2+r^{-1}))^{\beta} \int_{G\cap B(x,r)} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} dy \leq 1\right\}$$

で定める ([1, Kováčik-Rákosník], [4, Morrey]).

定理 1. $0 \le \nu \le \alpha \le n$ とする．コンパクト集合 $K \subset G$ は

$$K(r) \le Cr^{\alpha}$$

を満たすとする．このとき，$\|f\|_{p(\cdot),\nu,\beta} \le 1$ ならば，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\sup_{x \in G, r>0} \int_{G \cap B(x,r)} |f(y)| k(|f(y)|^{-1})^{\alpha-\nu} dy \le Cr^{\nu}(\log(2+r^{-1}))^{-\beta}$$

この定理は，$\nu = \beta = 0$ のときの [3, Lemma 2.4] の結果を含んでいる．
$0 < r < 1/2$ に対して，

$$k_\beta(r) = \begin{cases} \int_0^r (\log(2+t^{-1}))^{-\beta} k(t)^{-\alpha} \frac{dt}{t} & \text{if } \nu = 0, \\ (\log(2+r^{-1}))^{-\beta} k(r)^{-(\alpha-\nu)} & \text{if } 0 < \nu < 1, \\ \int_r^1 (\log(2+t^{-1}))^{-\beta} k(t)^{-(\alpha-1)} \frac{dt}{t} & \text{if } \nu = 1 \end{cases}$$

とする．定理 1 を用いて，次の対数ポテンシャルの連続性を得る．

定理 2. $0 \le \nu \le 1, \nu \le \alpha \le n$ とする．$\nu = 0$ のとき，

$$\int_0^{1/2} (\log(2+t^{-1}))^{-\beta} k(t)^{-\alpha} \frac{dt}{t} < \infty$$

を満たすとする．コンパクト集合 K は

$$K(r) \le Cr^{\alpha}$$

を満たすとする．このとき，$f \in L^{p(\cdot),\nu,\beta}(\mathbf{R}^n)$ ならば，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$|Lf(x) - Lf(z)| \le C|x-z|^{\nu} k_\beta(|x-z|) \qquad (|x-z| < 1/e)$$

参考文献

[1] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[2] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosyo, Tokyo, 1996.

[3] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Integrability of maximal functions for generalized Lebesgue spaces with variable exponent, to appear in Math. Nachr.

[4] C. B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no.1, 126–166.

18　Evansポテンシャルと Riesz 分解

中井 三留（名工大・名誉教授）

数年前 Premalatha [5] は平面 $\mathbb{R}^2$ 上の優調和関数 u が $\mathbb{R}^2$ 上の調和関数 $h(x)$ と $\mathbb{R}^2$ 上の Borel 測度 $\mu := -\Delta u \geqq 0$ の対数ポテンシャルの和としての Riesz 分解

(1)
$$u(x) = h(x) + \frac{1}{c_2}\int_{\mathbb{R}^2} \log\frac{1}{|x-y|}d\mu(y)$$

を許容する (但し $c_2 = \sigma_2 = 2\pi$) 為の必要十分条件は円周平均

$$m(t,u) = \frac{1}{c_2}\int_{|x|=t} u(x)d\theta(x)$$

(但し $td\theta$ は円周 $|x| = t$ の弧要素) を使って

(2)
$$m(t^2,u) - 2m(t,u) = \mathcal{O}(1) \quad (t \to +\infty)$$

であることを示した. 最近発表の論文 [1] で Kitaura-Mizuta は, Euclid 空間 $\mathbb{R}^d(d \geqq 2)$ 上の双優調和関数の場合へ上の Premalatha の定理を一般化すると共に, その手法で, 元々の Premalatha の定理そのものへの別証明を与え, 又 Premalatha の定理の高次元化として $\mathbb{R}^d(d \geqq 3)$ の場合に於いては (1) を

(3)
$$u(x) = h(x) + \frac{1}{c_d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|^{d-2}}d\mu(y)$$

で置き換えたもの (但し, h は $\mathbb{R}^d$ 上調和, $\mu = -\Delta u \geqq 0$, c_d は単位球面積 σ_d の $(d-2)$ 倍) の成立の必要十分条件が球面平均 $m(t,u) = (1/c_d)\int_{|x|=t} u(x)d\theta(x)$ (但し $t^{d-1}d\theta$ は球面 $|x| = t$ 上の面素) の言葉で

(4)
$$m(2t,u) - 2^{2-d}m(t,u) = \mathcal{O}(1) \quad (t \to +\infty)$$

となることを示した.

本講演では上記の $\mathbb{R}^d$ 上の Premalatha の定理を上記 [1] とは異なり形式を保った儘, 放物型 Riemann 多様体 M(次元 $d \geqq 2$) の場合へ一般化可能であることを報告する (上記 [1] の $\mathbb{R}^d(d \geqq 3)$ は放物型ではなく双曲型故形式を変える). M 上の Evans 核 $e(x,y)$ とは, M 上の対称核 (即ち $e(x,y) = e(y,x)$) で, $e : M \times M \to (-\infty, +\infty]$ は連続で, $e(\cdot,y)$ は $M \setminus \{y\}$ 上調和で, y に正特異点, M の Alexandroff 点には負特異点を持つもので, $M = \mathbb{R}^2$ なら $e(x,y) = \log(1/|x-y|)$ である ([2],[3];[6],[7],[8] も参照). Evans 核 $e(x,y)$ の惹起する中心 $o \in M$ の極システム (r,θ) を

(5)
$$\begin{cases} r = \exp(-e(\cdot,o)) \\ d\theta = -*de(\cdot,o) \end{cases}$$

で与え, 球面 $r(x) = t > 0$ 上の球面平均を $m(t,u) = (1/c_d) \int_{r(x)=t} u(x) d\theta(x)$ で与えるとき, 次の結果が得られる ([4]): M 上の任意の優調和関数 u に対して, $\mu = -\Delta u \geqq 0$ は M 上の Borel 測度であるが, u が M 上の調和関数 h と μ の Evans ポテンシャルに依る Riesz 分解

$$u(x) = h(x) + \frac{1}{c_d} \int_M e(x,y) d\mu(y) \quad (x \in M) \tag{6}$$

を許容する為の必要十分条件は

$$m(t^2, u) - 2m(t, u) = \mathcal{O}(1) \quad (t \to +\infty) \tag{7}$$

となることである.

基本公式 $m(t, e(\cdot, y)) = \max\{\log e(x, y), t\}$.

参 照 文 献

[1] K. Kitaura and Y. Mizuta: *Spherical means and Riesz decomposition for superbiharmonic functions*, J. Math. Soc. Japan, **58**(2006), 501-533.

[2] M. Nakai: *On Evans potential*, Proc. Japan Acad., **38**(1962), 624-629.

[3] M. Nakai: *On Evans kernel*, Pacific J. Math., **22**(1967), 125-137.

[4] M. Nakai: *Evans potentials and the Riesz decomposition*, Preprint.

[5] Premalatha: *Logarithmic potentials*, Arab J. Math. Sc., **7**(2001), 47-53.

[6] L. Sario and M. Nakai: *Classification Theory of Riemann surfaces*, Springer-Verlag, 1970.

[7] L. Sario et al.: *Classification Theory of Riemannian Manifolds*, Lecture Notes in Math. **605**, Springer-Verlag, 1977.

[8] L. Sario and K. Noshiro: *Value Distribution Theory*, D. Van Nostrand, 1966.

特別講演

ソボレフの定理について

下村 哲　（広島大学大学院・教育学研究科）

1　ソボレフ関数

$\mathbf{R}^n$ の球体 B 上のソボレフ関数 $u \in W^{1,1}(B) = \{u \in L^1(B) : |\nabla u| \in L^1(B)\}$ について，不等式

$$|u(x) - u_B| \le C(n) \int_B |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy \quad (x \in B)$$

が成り立つ．ここに，

$$u_B = \fint_B u\, dx = \frac{1}{|B|} \int_B u\, dx$$

は積分平均を表す．

このソボレフ関数のポテンシャル評価から，ソボレフ関数の性質を研究するとき，リースポテンシャルの性質を研究することが重要であることがわかる．

2　ソボレフの定理

α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャルは

$$U_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy$$

で定義される．ここに，f は非負可測関数で $U_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する．リースポテンシャル $U_\alpha f$ に対して，次のソボレフの定理がよく知られている．

定理 2.1　（ソボレフの定理）$1 < p < \infty$, $G \subset \mathbf{R}^n$ を有界集合とする．

（1）（ソボレフの不等式）$1/p^\sharp = 1/p - \alpha/n > 0$ ならば，

$$\|U_\alpha f\|_{p^\sharp} \le C\|f\|_p$$

ここに，$\|f\|_p$ はルベーグの L^p ノルムで，$p^\sharp$ は p のソボレフ指数と呼ばれる．

（2）（Trudinger の不等式）$\alpha p = n$ ならば，

$$\int_G \exp(A(U_\alpha f(x))^\beta) dx < \infty, {}^\forall A > 0;\ \beta = p/(p-1)$$

（3）$0 < \alpha - n/p < 1$ のとき，$U_\alpha f$ はヘルダー連続である：

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \le C|x-z|^{\alpha-n/p} \quad (x \in G, z \in G)$$

$\alpha p \leq n$ のときは，一般に，リースポテンシャル $U_\alpha f$ は連続とは限らない．$\alpha p = n$ のとき，条件 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ を強めて，次の条件を考える：

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(y)^{n/\alpha}[\log(e+f(y))]^\sigma \, dy < \infty \tag{1}$$

(i) $\sigma > n/\alpha - 1$ ならば，$U_\alpha f$ は連続

(ii) $\sigma \leq n/\alpha - 1$ ならば，$U_\alpha f$ は連続とは限らない

そこで，条件 (1) を一般化して，条件

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Phi_{p,\varphi}(f(y)) \, dy < \infty \tag{2}$$

を考える．ここに，$1 < p < \infty$，$\Phi_{p,\varphi}(r) = r^p \varphi(r)$ $(r > 0)$ かつ $\Phi_{p,\varphi}(0) = 0$ で，

$(\varphi 1)$ φ は開区間 $(0, \infty)$ 上正値かつ単調．

$(\varphi 2)$ $c^{-1}\varphi(r) \leqq \varphi(r^2) \leqq c\varphi(r) \quad (r > 0)$

3　ヘルダー連続性

定理 3.1 ([19], [20], [24]) 条件 (2) を満足する非負可測関数 f に対するポテンシャル $U_\alpha f$ が連続であるための必要十分条件は，

$$\int_1^\infty \{t^{\alpha p - n}\varphi(t)\}^{-1/(p-1)} t^{-1} dt < \infty \tag{3}$$

$\alpha p > n$ のとき (3) は満たされる；$\alpha p = n$, $\varphi(r) = [\log(e+r)]^\sigma$ のとき，(3) が満たされるための条件は $\sigma > n/\alpha - 1$ である．

Edmunds-Krbec [8] は，ある $\sigma < 0$ に対して (1) を満たす関数 f の $n/p+1$ 次のベッセルポテンシャルのリプシッツ連続性を研究した．ベッセル核はリース核と原点付近では同じオーダーをもつ．この Edmunds-Krbec の研究に関連して，$n/p \leq \alpha \leq n/p+1$ である α 次のリースポテンシャルのヘルダー連続性が得られる．

定理 3.2 ([24, Theorem 3.1]) $0 \leq \alpha - n/p \leq 1$ のとき，(2) を満足する非負可測関数 f に対して，

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \leq C\kappa(|x-z|) \quad (|x-z| \to 0)$$

ここに，

$$\begin{aligned}\kappa(r) \;=\; & \left(\int_0^r \{t^{n-\alpha p}\varphi(t^{-1})\}^{-1/(p-1)} t^{-1} dt\right)^{(p-1)/p} \\ & + r\left(\int_r^1 \{t^{n-\alpha p+p}\varphi(t^{-1})\}^{-1/(p-1)} t^{-1} dt\right)^{(p-1)/p}\end{aligned}$$

定理 3.2 は，Edmunds-Krbec [8] と Brézis-Wainger [3] の連続性に関する結果を一般化するものである．実際，$\alpha = n/p + 1, p - 1 > \sigma$ ならば，

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \le O(|x-z|[\log(1/|x-z|)]^{(p-1-\sigma)/p}) \qquad (|x-z| \to 0)$$

距離空間上のソボレフ関数に対するヘルダー連続性に関する結果については，[25], Hajłasz-Koskela [14] を参照してほしい．

4 Trudinger の不等式とソボレフの不等式

開集合 $G \subset \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\int_G \Phi_{p,\varphi}(|g(x)|)\, dx < \infty$$

となる G 上の局所可積分関数からなる関数空間を $L^{\Phi_{p,\varphi}}(G)$ とし，

$$\|g\|_{\Phi_{p,\varphi}} = \|g\|_{\Phi_{p,\varphi},G} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_G \Phi_{p,\varphi}(|g(x)|/\lambda)\, dx \le 1\right\}$$

とする．

$f \in L^{\Phi_{p,\varphi}}(G)$ のとき，リースポテンシャルに対する Trudinger の不等式とソボレフの不等式を確立することを目指す．そのために，$1 < p < n/\alpha$ のとき，

$$\varphi_p^*(r) = \left[\int_0^r \{t^{\alpha p - n}\varphi(t)\}^{-p'/p} t^{-1} dt\right]^{1/p'} \qquad (r \ge 0)$$

とする．ここに，$1/p + 1/p' = 1$. $p = n/\alpha > 1$ のとき，

$$\varphi_p^*(r) = \left[\int_1^r \{\varphi(t)\}^{-p'/p} t^{-1} dt\right]^{1/p'} \qquad (r \ge 2)$$

とし，$t \in [0,2)$ に対して $\varphi_p^*(t) = (t/2)\varphi_p^*(2)$ として $[0,\infty)$ 上増加な連続関数となるようにする．$\Psi_{p,\varphi}$ を

$$\Psi_{p,\varphi}(r) = (\psi_n \circ (\varphi_p^*)^{-1})(r) \qquad (r \ge 0)$$

で定める．ここに，$\psi_n(r) = r^n$ であり，$(\varphi_p^*)^{-1}$ は φ_p^* の逆関数である (Alberico-Cianchi [2])．$\Psi_{p,\varphi}(r)$ は $[0,\infty)$ 上連続であり，$\Psi_{p,\varphi}(0) = 0$.

定理 4.1 ([27]) $\alpha p \le n$，$G \subset \mathbf{R}^n$ を有界集合とする．$\|f\|_{\Phi_{p,\varphi}} \le 1$ ならば，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$\int_G \Psi_{p,\varphi}(\varepsilon_0 U_\alpha f(x))\, dx \le 1$$

注意 4.1 定理 4.1 は次を示す.

$$\|U_\alpha f\|_{\Psi_{p,\varphi}} \leq C\|f\|_{\Phi_{p,\varphi}} \quad (f \in L^{\Phi_{p,\varphi}}(G))$$

ここに，$\|\cdot\|_{\Psi_{p,\varphi}}$ は，$\|\cdot\|_{\Phi_{p,\varphi}}$ と同様に定義される.

局所可積分関数 f に対して，極大関数 Mf を次で定める:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{G\cap B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

ソボレフの定理の研究において，極大関数は重要な役割を果たす. 定理 4.1 の証明は，リースポテンシャルを極大関数で評価する Hedberg [16] の方法に基づいている. 証明のために，次の補題を利用する.

補題 4.1 $\alpha p = n$，$G \subset \mathbf{R}^n$ を有界集合とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $C > 0$ が存在して

$$\int_G \Phi_{p,\varphi}(f(y))dy \leq 1 \Longrightarrow (\varphi_p^*)^{-1}(U_\alpha f(x)) \leq C\{\Phi_{p,\varphi}(Mf(x))\}^{1/n} + \varepsilon$$

例 4.1 $p = n/\alpha > 1$，$q \leq p-1$ とし，$\Phi_{p,q}(r) = r^p[\log(e+r)]^q$ とする. $q < p-1$ のとき，

$$\Psi_{p,q}(r) \geq C\exp(nr^{p/(p-1-q)})$$

となり，$q = p-1$ のとき，

$$\Psi_{p,q}(r) \geq C\exp(n\exp(r^{p'}))$$

となる. ゆえに，Edmunds-Gurka-Opic [9, Theorem 4.6], [10, Theorems 3.1, 3.2] や [23, Theorems A, B] で得られた Trudinger 型の不等式を得ることができる.

系 4.1 $\alpha p \leq n$，$G \subset \mathbf{R}^n$ を有界集合とする. $\Phi_{p,q}(r) = r^p[\log(e+r)]^q$ とする.

(1) $q < p-1$ のとき，$\|f\|_{\Phi_{p,q}} \leq 1$ ならば，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$\int_G \{\exp(\varepsilon_0 U_\alpha f(x)^\beta) - 1\}dx \leq 1$$

ここに，$\beta = p/(p-1-q)$.

(2) $q = p-1$ のとき，$\|f\|_{\Phi_{p,q}} \leq 1$ ならば，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$\int_G \{\exp(\exp(\varepsilon_0 U_\alpha f(x)^\beta) - e\}dx \leq 1$$

ここに，$\beta = p/(p-1)$.

$q > p-1$ のとき, $U_\alpha f$ は G 上連続である (定理 3.1).

注意 4.2 (Fusco-Lions-Sbordone [11]) $G \subset \mathbf{R}^n$ を有界集合とする. ある $\sigma > 0$ に対して,

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^\sigma \int_G f(y)^{n-\varepsilon} dy = 0 \tag{4}$$

ならば,

$$\int_G \exp(U_1 f(x)^\beta)\ dx < \infty$$

ここに, $\beta = n/(n-1+\sigma)$.

$$\int_G f(y)^n [\log(e + f(y))]^{-\sigma} dy < \infty$$

ならば, (4) を満たすことに注意する.

注意 4.3 ([23, Theorems A, B], [8]) 系 4.1 を証明するのに次を用いても証明できる. $\beta > 0$, u を G 上非負可測関数とする. そのとき, 次の 2 つは同値:

(1)
$$\int_G \exp[Au(x)^\beta] dx < \infty, \qquad {}^\forall A > 0$$

(2)
$$\lim_{q \to \infty} \frac{1}{q^{1/\beta}} \left(\int_G u(x)^q dx \right)^{1/q} = 0$$

次のソボレフ型の不等式を得ることができる:

系 4.2 $\alpha p < n$ とする. $\|f\|_{\Phi_{p,\varphi}} \le 1$ ならば,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \{U_\alpha f(x) \varphi(U_\alpha f(x))^{1/p}\}^{p^\sharp}\ dx \le C \qquad (1/p^\sharp = 1/p - \alpha/n)$$

5 ルベーグ点

次の事実はよく知られている.

定理 5.1 $f \in L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p_0 < \infty)$ とする. このとき, C_{α,p_0}-容量が零の集合 E が存在して, $1/q_0 \ge 1/p_0 - \alpha/n$ なる $1 < q_0 < \infty$ に対して,

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x_0,r)} |U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|^{q_0} dx = 0, \qquad {}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$$

定理 5.1 に関連して, 定理 4.1 の応用として, Adams-Hurri-Syrjänen [1, Theorem 1.6] や [26, Theorems A, B] による結果を拡張するために, $f \in L^{\Phi_{p,\varphi}}(\mathbf{R}^n)$ のリースポテンシャルの連続性を議論する.

定理 5.2 ([27]) f は (2) を満たすとする. $x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus (E_\infty \cup E_* \cup E^*)$ ならば,

$$\lim_{r \to 0+} \fint_{B(x_0,r)} \Psi_{p,\varphi}(A|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|)\, dx = 0, \qquad {}^\forall A > 0$$

ここに,

$$\begin{aligned} E_\infty &= \{x \in \mathbf{R}^n : \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)\, dy = \infty\}, \\ E_* &= \{x \in \mathbf{R}^n : \limsup_{r \to 0} r^{\alpha p - n} \varphi(r^{-1})^{-1} \int_{B(x,r)} \Phi_{p,\varphi}(f(y))\, dy > 0\}, \\ E^* &= \{x \in \mathbf{R}^n : \limsup_{r \to 0} r^{\alpha p - n} \int_{B(x,r)} \Phi_{p,\varphi}(f(y))\, dy > 0\} \end{aligned}$$

除外集合の大きさを測るために次の容量を定義する.

集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ と開集合 $G \subset \mathbf{R}^n$ に対して,

$$C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}(E;G) = \inf_f \int_G \Phi_{p,\varphi}(f(y))dy$$

と定義する. ここに, 下限は G^c 上で 0, $x \in E$ に対して $U_\alpha f(x) \geq 1$ であるような $\mathbf{R}^n$ 上の非負可測関数 f のすべてに渡ってとられる. この容量はよく知られた古典的な容量と同じく加算劣加法性や単調性を満たす (cf. Meyers [18], Mizuta [21]). $\varphi \equiv 1$ のとき, $C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}$ を $C_{\alpha,p}$ と書く. 任意の有界開集合 G に対して

$$C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}(E \cap G; G) = 0$$

のとき, E は $C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}$ 容量が零の集合といい, $C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}(E) = 0$ と書く.

系 5.1 ([27]) $\alpha p \leq n$ とする. f が (2) を満たすとき,

$$\lim_{r \to 0+} \fint_{B(x_0,r)} \Psi_{p,\varphi}(A|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|)\, dx = 0, \qquad {}^\forall A > 0,\ {}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$$

ここに, $\alpha p = n$ または φ が非増加のとき $C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}(E) = 0$ であり, $\alpha p < n$ かつ φ が非減少のとき $C_{\alpha,p}(E) = 0$ である.

実際, $\alpha p = n$ または φ が非増加のとき, $E^* \subset E_*$ となり, $E = E_\infty \cup E_*$ をとる; $\alpha p < n$ かつ φ が非減少のとき $E_* \subset E^*$ となり, $E = E_\infty \cup E^*$ をとる.

系 5.2 ([26, Theorem A]) $\alpha p = n$, $\varphi(r) = (\log r)^{q_1}[\log(e+\log(e+r))]^{q_2}$ (q_1, $q_2 \in \mathbf{R}$), $\Phi_{p,\varphi}(r) = r^p \varphi(r)$ とする. f が (2) を満たすとする.

(1) $q_1 < p-1$ のとき, $C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}$ 容量が零の集合が存在して, ${}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$, ${}^\forall A > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0+} \fint_{B(x_0,r)} & \{\exp(A|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|^{\beta_1} \\ & \times (\log(1 + |U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|))^{\beta_2}) - 1\}\, dx = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ここに, $\beta_1 = p/(p-1-q_1)$, $\beta_2 = q_2/(p-1-q_1)$.

(2) $q_1 > p-1$ のとき, $U_\alpha f$ は $\mathbf{R}^n$ 上連続であり, ${}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)| = o((\log(1/|x-x_0|))^{1/\beta_1}(\log\log(1/|x-x_0|))^{-q_2/p}) \quad (x \to x_0)$$

$q_1 = p-1$ のとき, ${}^\forall\beta_1 > 0$ (${}^\forall\beta_2 > 0$) に対して (5) は成り立つ. 文献 [1] で, Adams-Hurri-Syrjänen は, $0 \le q_1 < p-1$, $q_2 = 0$ のときについて論じている.

$q_1 = p-1$ の場合は次のように扱うことができる:

系 5.3 ([26, Theorem B]) $\alpha p = n$, $\varphi(r) = \varphi_{p-1,q}(r) = (\log r)^{p-1}[\log(e+\log(e+r))]^q$, $\Phi_{p,\varphi}(r) = r^p\varphi(r)$ とする. f が (2) を満たすとする.

(1) $q < p-1$ のとき, $C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}$ 容量が零の集合が存在して, ${}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$, ${}^\forall A > 0$ に対して,

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{B(x_0,r)} \{\exp(\exp(A|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|^\beta)) - e\}dx = 0$$

ここに, $\beta = p/(p-1-q)$.

(2) $q = p-1$ のとき, $C_{\alpha,\Phi_{p,\varphi}}$ 容量が零の集合が存在して, ${}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$, ${}^\forall A > 0$ に対して,

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{B(x_0,r)} \{\exp(\exp(\exp(A|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|^\beta))) - e^e\}dx = 0$$

ここに, $\beta = p/(p-1)$.

(3) $q > p-1$ のとき, $U_\alpha f$ は $\mathbf{R}^n$ 上連続であり, ${}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)| = o((\log(\log(1/|x-x_0|)))^{(p-1-q)/p}) \qquad (x \to x_0)$$

6 変動指数をもつ関数空間

$\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 $p(\cdot) : \mathbf{R}^n \to [1,\infty)$ に対して,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} dy < \infty \quad ({}^\exists\lambda > 0)$$

となる $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とし, そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbf{R}^n} \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} dy \le 1\right\}$$

で定める (Orlicz [28], Kováčik-Rákosník [17]). 特に, $p(x) = p_0$(一定) のとき, $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n) = L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$. $C_{\alpha,p(\cdot)}$ はリース容量とする.

Diening [6], Cruz-Uribe-Fiorenza-Neugebauer [5] は, 変動指数が弱い連続性のもとで極大関数の有界性が導けることを示した :

定理 6.1 (cf. Diening [6], Cruz-Uribe-Fiorenza-Neugebauer [5]) $p(\cdot)$ は

(p1) $1 < \inf_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) \le \sup_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) < \infty$

(p2) $|p(x) - p(y)| \le \dfrac{c}{\log(1/|x-y|)} \qquad (|x-y| < 1/e)$

(p3) $|p(x) - p(y)| \le \dfrac{c}{\log|x|} \qquad (|y| > |x|/2 > e/2)$

を満たす．このとき，

$$\|Mf\|_{p(\cdot)} \le C\|f\|_{p(\cdot)}$$

この研究により，変動指数をもつソボレフ空間においても極大関数の有界性をソボレフの定理の研究に応用することができる ([12], [13], Diening [7]).

また，定理 5.1 に関連して，Harjulehto-Hästö [15] は，変動指数 $p(\cdot)$ が (p1)，(p2) を満たすとき，次の定理を証明した：

定理 6.2 (Harjulehto-Hästö [15]) $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とする．このとき，$C_{1,p(\cdot)}$-容量が零の集合 E が存在し，$1/q(x) \ge 1/p(x) - 1/n$ なる $1 < q(x) < \infty$ に対して，

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{B(x_0,r)} |U_1 f(x) - U_1 f(x_0)|^{q(x)} dx = 0, \qquad {}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$$

定理 6.2 の拡張を行うために，$p(\cdot)$ は，

(p4) $|p(x) - p(y)| \le \dfrac{a\log(\log(1/|x-y|))}{\log(1/|x-y|)} + \dfrac{b}{\log(1/|x-y|)}$

を満たすとする $(a \ge 0, b > 0)$.

$$1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/n$$

とする．$a > 0$ のとき $\tilde{a} > a$，$a = 0$ のときは $\tilde{a} = 0$ として，$A(x) = \tilde{a}n/p(x)^2$ とおく．$t \ge 0, x \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\Phi(t) = \Phi(t,x) = \{t(\log(e+t))^{-A(x)}\}^{p^\sharp(x)}$$

とする．

定理 6.3 ([22]) $p(\cdot)$ は，$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) < n/\alpha$ かつ (p4) を満たすとする．このとき，$f \in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ ならば，

$$\lim_{r\to 0+} \fint_{B(x_0,r)} \Phi(|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|) dx = 0, \qquad {}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus (E_1 \cup E_2)$$

ここに，

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbf{R}^n : U_\alpha f(x) = \infty\}, \\ E_2 &= \left\{x \in \mathbf{R}^n : \limsup_{r\to 0+} \int_{B(x,r)} r^{\alpha p(y)-n} f(y)^{p(y)} dy > 0\right\} \end{aligned}$$

この定理は，Harjulehto-Hästö [15, Theorem 4.12]，[12, Theorem 4.5] の結果を含んでいる．

参考文献

[1] D. R. Adams and R. Hurri-Syrjänen, Vanishing exponential integrability for functions whose gradients belong to $L^n(\log(e+L))^\alpha$, J. Funct. Anal. **197** (2003), 162-178.

[2] A. Alberico and A. Cianchi, Differentiability properties of Orlicz-Sobolev functions, Ark. Mat. **43** (2005), 1-28.

[3] H. Brézis and S. Wainger, A note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities, Comm. Partial Diff. Equations 5, 773-789 (1980).

[4] A. Cianchi, Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces, J. London Math. Soc. **60** (1999), 187–202.

[5] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 223-238, **29** (2004), 247-249.

[6] L. Diening, Maximal functions on generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. **7**(2) (2004), 245–253.

[7] L. Diening, Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. **263**(1) (2004), 31–43.

[8] D. E. Edmunds and M. Krbec, Two limiting cases of Sobolev imbeddings, Houston Math. J. **21**, 119-128 (1995).

[9] D. E. Edmunds, P. Gurka and B. Opic, Double exponential integrability, Bessel potentials and embedding theorems, Studia Math. **115** (1995), 151–181.

[10] D. E. Edmunds, P. Gurka and B. Opic, Sharpness of embeddings in logarithmic Bessel-potential spaces, Proc. Royal Soc. Edinburgh. **126** (1996), 995–1009.

[11] N. Fusco, P. L. Lions and C. Sbordone, Sobolev embedding theorems in borderline cases, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 561-565.

[12] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential spaces of variable exponent, Math. Nachr. **279** (2006), 1463-1473.

[13] T.Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent on metric spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), 495-522.

[14] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré, Mem.Amer.Math.Soc. **145** (2000).

[15] P. Harjulehto and P. Hästö, Lebesgue points in variable exponent spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **29** (2004), 295–306.

[16] L. I. Hedberg, On certain convolution inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 505–510.

[17] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[18] N. G. Meyers, A theory of capacities for potentials in Lebesgue classes, Math. Scand. **8** (1970), 255-292.

[19] Y. Mizuta, Continuity properties of Riesz potentials and boundary limits of Beppo Levi functions, Math. Scand. **63**, 238-260 (1988).

[20] Y. Mizuta, Continuity properties of potentials and Beppo-Levi-Deny functions, Hiroshima Math. J. **23**, 79-153 (1993).

[21] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosyo, Tokyo, 1996.

[22] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Vanishing integrability for Riesz potentials of functions in generalized Lebesgue spaces, preprint.

[23] Y. Mizuta and T. Shimomura, Exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Hiroshima Math. J. **28** (1998), 355–371.

[24] Y. Mizuta and T. Shimomura, Differentiability and Hölder continuity of Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Analysis **20** (2000), 201-223.

[25] Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity and differentiability for weighted Sobolev spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2985-2994.

[26] Y. Mizuta and T. Shimomura, Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, to appear in Illinois J. Math.

[27] Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity properties of Riesz potentials of Orlicz functions, preprint.

[28] W. Orlicz, Über konjugierte Exponentenfolgen, Studia Math. **3** (1931), 200–211.

[29] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[30] N. S. Trudinger, On imbeddings into Orlicz spaces and some applications, J. Math. Mech. **17** (1967), 473-483.

19 周期的不定点に存在する不変曲線族

篠原 知子（東京都立産業技術高等専門学校）

複素 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像 $F:[x:y:z]\mapsto[f_0:f_1:f_2]$ の力学系を考察する．点 $p\in\mathbf{P}^2$ が F の不定点であるとは，$G(\tilde{p})=(0,0,0)$ がある点 $\tilde{p}\in\pi^{-1}(p)$ で成り立つことである．但し，G は $G:(x,y,z)\to(f_0,f_1,f_2)$ の形をした $\mathbf{C}^3$ 上の多項式写像，π は $\pi:\mathbf{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbf{P}^2$ の標準射影とする．p が不定点であるとき，$\bigcap_{U_p}\overline{F(U_p\setminus\{p\})}$ は一点にならない．但し，U_p は p の任意の開近傍とする．よって F は不定点 p では不連続である．更に，不定点 p が $p\in\bigcap_{U_p}\overline{F(U_p\setminus\{p\})}$ を満たすとき p を周期的不定点と呼ぶことにする．定義より，周期的不定点は再帰性を持っているため，不動点の場合と同様に様々な力学系構造が存在することが期待される．

これまで周期的不定点 p における力学系構造の研究は，Y. Yamagishi [4], [5] や T. C. Dinh, R. Dujardin, N. Sibony [1] らによって行われてきた．彼らは，周期的不定点 p で，F のヤコビ行列 $JF(p)$ が安定な固有ベクトルを持つ場合について研究を行い，カントール集合 $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ によって対応付けられる，安定多様体やカレントの族が不定点 p において存在することを示した．一方，本研究では次の様な点 p を通る曲線族を対象とする．

Definition. 点 p を通る曲線族 $\{W_j\}_{j\in J}$ が F により点 p で局所的に不変であるとは次の 2 条件を満たすこととする．
(1) 正則写像 $\Phi_j:\Delta_{\rho_j}\to\mathbf{C}^2$ で $\Phi_j(0)=p$ と $\Phi_j(\Delta_{\rho_j})=W_j$ を満たすものが存在する，
(2) 任意の W_j に対して，ただ一つの $j'\in J$ と p のある開近傍 $N_{j'}$ が存在し $F\circ\Phi_j(0)=p$ と $F\circ\Phi_j(\Delta_{\rho_j})\cap N_{j'}\subset V_{j'}$ が成立する．但し $\Delta_{\rho_j}:=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<\rho_j\}$ とする．

これまでに，[2], [3] において，カントール集合 $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ の部分集合 J によって対応付けられる，不定点 p を通り写像 F により不変な曲線族 $\{W_j\}_{j\in J}$ を blow up を用いて定義した．また，$\{W_j\}_{j\in J}$ は不定点 p で存在する，F により不変な曲線族の中で最大の族であることを示した．ここで，この不変曲線族は安定多様体だけではなく，中心多様体や不安定多様体も含むことから，これらの結果は Y. Yamagishi や T. C. Dinh らの結果の一般化の一つになっていることに注意する．

本講演では，座標近傍 $\mathbf{C}^2$ 上，次の形をした有理写像 F の不定点 $(0,0)$ における不変曲線族 $\{W_j\}_{j\in J}$ についての考察を報告する．

$$F(x,y)=\left(ax,\frac{y(y-x)}{x^2}\right),\quad |a|>4.$$

特に，W_j の数と性質を調べ，W_j が不安定多様体であることを示す．主結果は以下の通りである．

$$J=\left\{j=(j_1,j_2,\dots)\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}\mid j_n=2\ \text{となる}\ n\ \text{が有限個}\right\}$$

とする．

Theorem.
(1) 任意の記号列 $j=(j_1,j_2,\dots)\in J$ に対して，ある自然数 n_0 で，任意の $n>n_0$ に対して $j_n=1$ となるものが存在し，$W_j=F^{-n_0}(W_{11\dots})\neq\emptyset$ である．特に W_j は点 p の不安定多様体となる．
(2) $j_n=2$ となる n が無限個存在するとき $W_j=\emptyset$ である．

References

[1] T. C. Dinh, R. Dujardin and N. Sibony, *On the dynamics near infinity of some polynomial mappings in* $\mathbf{C}^2$, Math. Ann. 333 (2005), 703-739.

[2] T. Shinohara, *A construction of invariant curves at a periodic indeterminate point*, Suurikaiseki kenkyuusho Koukyuroku,1494 (2006), 13–23.

[3] T. Shinohara, *Unstable curves at a periodic indeterminate point*, preprint.

[4] Y. Yamagishi, *Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point*, Nonlinearity, 14 (2001), 113–120.

[5] Y. Yamagishi, *On the local convergence of Newton's method*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55 (2003) 897–908.

20 複素射影空間上の力学系に関する Fatou 写像の接続

上田 哲生（京都大学理学研究科）

$\mathbb{P}^n$ を n 次元複素射影空間，$f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ を正則写像で $\deg f = d \geq 2$ とする．f の Fatou 集合 Ω は

$$\Omega := \{p \in \mathbb{P}^n \mid \{f^j\}_{j \geq 0} \text{ は } p \text{ のある近傍で正規族をなす}\}.$$

によって定義される．これを一般化して Fatou 写像を次のように定義する：

複素解析空間 R から $\mathbb{P}^n$ への正則写像 φ が f に関する Fatou 写像であるとは，$\{f^j \circ \varphi\}_{j \geq 0}$ が正規族をなすことをいう．

ここでは次の２つの定理を示す：

定理 1 S を *Riemann* 面とし E を S の閉極集合とする．$\varphi : S - E \to \mathbb{P}^n$ が *Fatou* 写像であれば φ は *Fatou* 写像 $\tilde{\varphi} : S \to \mathbb{P}^n$ に接続される．

定理 2 S を *Riemann* 面とし E を S の閉極集合とする．$\varphi : S \to \mathbb{P}^n$ が正則写像であって $\varphi(S - E)$ が *Fatou* 集合 Ω に含まれるならば $\varphi(S)$ もまた Ω に含まれる．

ここで E が極集合であるとは，局所的に劣調和関数が値 $-\infty$ をとる集合として表されることをいう．

定理１は $S - E$ から種数 ≥ 2 のコンパクト Riemann 面への写像の接続定理（西野）及びその一般化（鈴木）の類似である．証明は鈴木の方法と同様の方針でなされる．

定理１，２で E が１点からなる場合は，Fornæss - Sibony による Fatou 成分（Fatou 集合の連結成分）の分類に応用できる．

以下に定理１の証明の概略を述べる．

- $\mathcal{X} = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ とし，$\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^n$ を自然な射影とする．

- 正則写像 $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ に対して d 次斉次多項式写像 $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ で $F^{-1}(0) = \{0\}$ かつ $\pi \circ F|\mathcal{X} = f \circ \pi$ となるものがある．

- F の Green 関数 h を次のように定める：

$$h(z) := \lim_{j\to\infty} \frac{1}{d^j} \log \|F^j(z)\|, \quad z \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

- 正則写像 $\varphi : R \to \mathbb{P}^n$ に対して $\pi \circ \Phi = \varphi$ となる $\Phi : R \to \mathcal{X}$ を φ のリフトとよぶ．

命題 3 正則写像 $\varphi : R \to \mathbb{P}^n$ について次の性質は同値である．

(i) φ は *Fatou* 写像．

(ii) 写像列 $\{f^j \circ \varphi\}_{j\geq 0}$ は広義一様収束部分列を含む．

(iii) V が R の開集合で $\Phi_V : V \to \mathcal{X}$ が $\varphi|V$ の正則なリフトのとき，$h \circ \Phi_V$ は多重劣調和．

(iv) 任意の点 $\zeta \in R$, に対して ζ の近傍 V と $\varphi|V$ の正則なリフト Φ_V で，恒等的に $h \circ \Phi_V = 0$ となるものがある．．

命題 4 $\varphi : R \to \mathbb{P}^n$ を f に関する *Fatou* 写像とする．このとき R のホモロジー被覆 $\tilde{R}$ から $\mathcal{X}$ への正則写像 $\tilde{\Phi}$ で

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle \pi_{\tilde{R}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ R & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

が可換であり，恒等的に$h \circ \tilde{\Phi} = 0$ となるものが存在する．さらに準同型写像$t : \Gamma_{\tilde{R}} \to U(1)$ で $\tilde{\Phi} \circ \gamma = t(\gamma)\tilde{\Phi} \quad (\gamma \in \Gamma_{\tilde{R}})$ となるものがある．ここで $\Gamma_{\tilde{R}}$ は $\tilde{R}$ の被覆変換群，$U(1)$ は絶対値 1 の複素数からなる乗法群．

定理 1 を示すには S が円板のときを考えればよい．$R = D - E$ として命題 4 を適用すれば，$\mathbb{C}^{n+1}$ の Euclid 計量から自然に $D - E$ の計量が誘導される．Evans–Selberg の関数と面積と長さの間の不等式を用いて準同型 t が恒等的に 1 であることを示す．

21
複素単位球上の有界正則写像の境界挙動

松島 敏夫（石川工業高専）

n 次元複素単位球 B_n（$n \geq 1$）で定義される有界正則関数 f の境界挙動について、「f は B_n の境界 ∂B_n のほとんどすべての点において admissible limit（$n = 1$ の場合 nontangential limit）を持つ」という Fatou 型の定理がよく知られている。この型の定理より、有界正則関数の境界挙動はゆるやかな印象を受けるが、次の事実が成り立つ [1],[2]。

定理１． $\{\zeta_k\}_{k=1}^m$, $1 \leq m \leq +\infty$ を ∂B_n の任意の点列とする。このとき、B_n 上の有界正則関数 f で、すべての ζ_k における半径にそった集積値集合

$$\bigcap_{T<1} \overline{\{f(t\zeta_k) : T < t < 1\}}$$

が、半径正の閉円板を含むものが存在する。

この定理は、有界正則関数の境界挙動が必ずしもゆるやかとはいえないことを示している。有界正則写像については次の結果が得られている [2],[3]。

定理２． $\{\zeta_k\}_{k=1}^m$, $1 \leq m \leq +\infty$ を ∂B_n の任意の点列とする。このとき、B_n を $\mathbb{C}^g$ $(g < +\infty)$ にうつす有界正則写像 F で、すべての ζ_k における半径にそった集積値集合

$$\bigcap_{T<1} \overline{\{F(t\zeta_k) : T < t < 1\}}$$

が、半径正の多重閉円板を含むものが存在する。

これらの結果においては集積値集合が円板や多重円板を「含む」となっており、形状がいまひとつはっきりしていない。今回これらの拡張と精密化を試み、つぎの結果が得られた。

定理３． $\{\zeta_k\}_{k=1}^m$, $1 \leq m \leq +\infty$ を ∂B_n の任意の点列とし、g は任意の正整数とする。各 ζ_k に対して $1 \leq s(\zeta_k) \leq g$ をみたす任意の整数 $s(\zeta_k)$ と、$\sum_{j=1}^{s(\zeta_k)} k(j) \leq g$ をみたす正整数の組 $\Big(k(1), k(2), \ldots, k\big(s(\zeta_k)\big)\Big) \in \left(\mathbb{Z}_+\right)^{s(\zeta_k)}$ を任意に与える。このとき、B_n を $\mathbb{C}^g$ $(g < +\infty)$ にうつす有界正則写像 F で、各 ζ_k における半径にそった集積値集合が、次元がそれぞれ $k(1), k(2), \ldots, k\big(s(\zeta_k)\big)$ である $s(\zeta_k)$ 個の半径正の閉球の直積となるものが存在する。

$g=1$ のとき、すべての k に対して $s(\zeta_k)=1$、$k(1)=1$ となるので、次の系が得られる。以下 $1\leq m\leq +\infty$、$g<+\infty$ とする。

系1． $\{\zeta_k\}_{k=1}^m$ を ∂B_n の任意の点列とする。このとき、B_n 上の有界正則関数 f で、すべての ζ_k における半径にそった集積値集合が、半径正の閉円板となるものが存在する。

すべての k について $s(\zeta_k)=g$、$k(j)=1$ $(1\leq j\leq g)$ ととると、次の系を得る。

系2． $\{\zeta_k\}_{k=1}^m$ を ∂B_n の任意の点列とする。このとき、B_n を $\mathbb{C}^g$ にうつす有界正則写像 F で、すべての ζ_k における半径にそった集積値集合が、半径正の g 次元多重閉円板となるものが存在する。

これらはそれぞれ定理１、定理２の精密化となっている。さらに各 k について $s(\zeta_k)=1$、 $k(1)=g$ ととると次の結果が得られる。

系3． $\{\zeta_k\}_{k=1}^m$ を ∂B_n の任意の点列とする。このとき、B_n を $\mathbb{C}^g$ にうつす有界正則写像 F で、すべての ζ_k における半径にそった集積値集合が、半径正の g 次元閉球となるものが存在する。

References

[1] T. Matsushima, Bounded holomorphic function with some boundary behavior in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Kodai Math. J., **24** (2001) 305-312.

[2] T. Matsushima, Boundary behavior of holomorphic functions and maps, Thesis of Kanazawa University.

[3] T. Matsushima, Bounded holomorphic functions and maps with some boundary behavior, J. Math. Anal. Appl., **285** (2003) 691-707.

22 Stein 空間における有理型近似定理

阿部 誠*

複素空間はつねに被約かつ第 2 可算と仮定する．複素空間 X のコンパクト集合 K に対し，集合

$$ {}_HK_X = \tilde{K}_X := \{x \in X \mid 任意の\ f \in \mathscr{O}(X)\ に対し\ f(x) \in f(K)\} $$

を K の X における**有理型凸被**とよぶ（Hirschowitz [6, p. 49]，Lupacciolu [7]，Abe-Furushima [3]，Abe [1, 2]）．

一般に, G を Picard 群 $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群とする．X のコンパクト集合 K に対し，$L \in G$, $s \in \Gamma(X, \mathscr{O}(L))$, $A = \{s = 0\}$, $A \cap K = \emptyset$ をみたす A 全体の集合を $\mathscr{S}(G, K)$ と書くとき，集合

$$ \tilde{K}_{X,G} = \bigcap_{A \in \mathscr{S}(G,K)} (X \setminus A) $$

を K の X における G に関する（一般化された）**有理型凸被**とよぶ.

注 1. $\mathrm{Pic}(X)$ の単位元を $\mathbb{1}_X$ と書けば，${}_HK_X = \tilde{K}_{X,\{\mathbb{1}_X\}}$.

複素空間 X の解析的集合 A は，X で疎（nowhere dense）かつ $N(\mathscr{I}) = A$ をみたす X 上の連接主イデアル層 $\mathscr{I}$ が存在するとき，X の**超曲面**（hypersurface）とよばれる．X のコンパクト集合 K に対し,

$$ {}_hK_X := \{x \in X \mid X\ の任意の超曲面\ A\ に対し\ x \in A\ ならば\ A \cap K \neq \emptyset\} $$

と書く（Hirschowitz [6, p. 50]）.

命題 2. X を孤立点をもたない Stein 空間とする．このとき，X の任意のコンパクト集合 K に対し，${}_hK_X = \tilde{K}_{X,\mathrm{Pic}(X)}$.

注 3. X が孤立点をもたない Stein 空間のとき，X の任意のコンパクト集合 K に対し，${}_hK_X \subset {}_HK_X$ が成り立つ．X が Stein 多様体のとき，X の任意のコンパクト集合 K に対して ${}_hK_X = {}_HK_X$ が成り立つことは，$\mathrm{Hom}(H_2(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ と同値である（Colţoiu [4]）.

命題 4. X を孤立点をもたない Stein 空間，G を $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群とする．このとき，次の 2 条件は同値である.

(1) X の任意のコンパクト集合 K に対し，$\mathscr{S}(G, K) \neq \emptyset$.
(2) X の任意の相対コンパクト開集合 D に対し，$L|_D = \mathbb{1}_D$ なる $L \in G$ が存在する.

* 〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

例 5. 例えば，$X := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}^2$, $A := \{(z, w) \mid z = w^{i}\}$ のとき，正因子 A の定める X 上の正則直線束を L とすれば，$K := \{|z| = |w| = 1\}$ について，$\tilde{K}_{X,\{L^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}} = X$ (Stein [8] の例).

Stein 空間において，次の有理型近似定理が成り立ち，これは Weil-岡の有理近似定理の一般化である.

定理 6. X を Stein 空間，G を $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群，K を $\tilde{K}_{X,G} = K$ なる X のコンパクト集合とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{O}(K)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，$L \in G$ と $f, g \in \Gamma(X, \mathscr{O}(L))$ が存在して，集合 $\{g = 0\}$ は X で疎，K 上で $g \neq 0$，かつ $\|\varphi - (f/g)\|_K < \varepsilon$.

系 7 ([2, Theorem 11]). X を Stein 空間，K を ${}_HK_X = K$ なる X のコンパクト集合とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{O}(K)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，正則関数 $f, g \in \mathscr{O}(X)$ が存在して，集合 $\{g = 0\}$ は X で疎，K 上で $g \neq 0$ かつ $\|\varphi - (f/g)\|_K < \varepsilon$.

系 8 (cf. Nguyen [5, Lemma 2.2]). X を Stein 多様体 S の開集合，K を ${}_HK_X = K$ なる X のコンパクト集合とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{O}(K)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，$f, g \in \mathscr{O}(X)$ が存在して，K 上で $g \neq 0$ かつ $\|\varphi - (f/g)\|_K < \varepsilon$.

系 9 (cf. Hirschowitz [6, Théorème 2]). X を孤立点をもたない Stein 空間，K を ${}_hK_X = K$ なる X のコンパクト集合とする．このとき，任意の $\varphi \in \mathscr{O}(K)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，有理型関数 $h \in \mathscr{M}(X) \cap \mathscr{O}(K)$ が存在して，$\|\varphi - h\|_K < \varepsilon$.

参考文献

[1] 阿部誠: 有理型近似性質をもつ領域について. In: 第 44 回多変数関数論サマーセミナー予稿集, pp. 15–19. 越後湯沢 (2005)

[2] Abe, M.: Meromorphic approximation theorem in a Stein space. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **184**, 263–274 (2005)

[3] Abe, M., Furushima, M.: On the meromorphic convexity of normality domains in a Stein manifold. Manuscripta Math. **103**, 447–453 (2000)

[4] Colţoiu, M.: On hulls of meromorphy and a class of Stein manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28**, 405–412 (1999)

[5] Nguyen, Q.D.: Weak Runge pairs in $\mathbf{C}^n$. J. Math. Anal. Appl. **327**, 71–78 (2007)

[6] Hirschowitz, A.: Sur l'approximation des hypersurfaces. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **25**, 47–58 (1971)

[7] Lupacciolu, G.: Complements of domains with respect to hulls of outside compact sets. Math. Z. **214**, 111–117 (1993)

[8] Stein, K.: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. **117**, 727–757 (1941)

Stolzenberg, Acta Math 109 / 1963)

23 強い有理型近似性質をもつ領域について

阿部 誠*

複素空間はつねに被約かつ第2可算と仮定する．複素空間 X のコンパクト集合 K について，集合

$$\hat{K}_X := \{x \in X \mid 任意の\ f \in \mathscr{O}(X)\ に対し\ f(x) \in f(K)\}$$

を K の X における**有理型凸被**（meromorphically convex hull）とよぶ．複素空間 X の開集合 D が**有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸**（meromorphically $\mathscr{O}(X)$-convex）とは，D 内の任意のコンパクト集合 K に対し，集合 $\hat{K}_X \cap D$ がコンパクトなことである．

注意 1. $\mathbb{C}^n$ の開集合 D について，有理型 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$-凸 $\Leftrightarrow$ **有理凸** (rationally convex)．

定理 2 ([1])**.** Stein 多様体 X の開集合 D について，次の2条件は同値である．

(1) D は有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸である．

(2) D は Stein であり，かつ任意の $\varphi \in \mathscr{O}(D)$，コンパクト集合 $K \subset D$，$\varepsilon > 0$ に対し，$f \in \mathscr{O}(X)$ と $g \in \mathrm{Ac}(X)$ が存在して，K 上で $g \neq 0$ かつ $\|\varphi - (f/g)\|_K < \varepsilon$.

複素空間 X の開集合 D について，$f \in \mathscr{O}(X)$，$g \in \mathrm{Ac}(X)$，かつ D 上で $g \neq 0$ なる $h = (f/g)|_D$ 全体を $\mathscr{Q}_X(D)$ で表す．

命題 3 ([3])**.** Stein 空間 X の開集合 D について，次の2条件は同値である．

(1) D は $\mathscr{Q}_X(D)$-凸である．

(2) D は Stein であり，かつ任意の $\varphi \in \mathscr{O}(D)$，コンパクト集合 $K \subset D$，$\varepsilon > 0$ に対し，$f \in \mathscr{O}(X)$ と $g \in \mathrm{Ac}(X)$ が存在して，D 上で $g \neq 0$ かつ $\|\varphi - (f/g)\|_K < \varepsilon$.

次は Runge の有理近似定理の一般化である（cf. Behnke-Stein [4, Satz 13]）．

命題 4 ([3])**.** D を1次元 Stein 空間 X の開集合とする．任意の $\varphi \in \mathscr{O}(D)$，コンパクト集合 $K \subset D$，$\varepsilon > 0$ に対し，$m \in \mathscr{M}(X) \cap \mathscr{O}(D)$ が存在して，$\|\varphi - m\|_K < \varepsilon$.

一般に，複素空間 X の開集合 D は，$\mathscr{Q}_X(D)$-凸ならば有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸であるが，X が既約 Stein 空間の場合に限定しても，$\dim X \geq 2$ のとき，逆は正しくない．

定理 5 ([3])**.** $\mathbb{C}^n$ の開集合 D について，次の包含関係が成り立つ．また，$n \geq 2$ のときは，いずれの"$\Rightarrow$"も逆は成り立たない．

$$多項式凸 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathscr{R}(D)\text{-凸} \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathscr{Q}_{\mathbb{C}^n}(D)\text{-凸} \overset{(3)}{\Rightarrow} 有理凸 \overset{(4)}{\Rightarrow} \mathrm{Stein}$$

* 〒862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

ただし，$\mathscr{R}(D) := \mathbb{C}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \cap \mathscr{O}(D)$.

逆が成り立たない例（$n=2$ の場合）.

(1) Hartogs の三角形 $D := \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < |z_2| < 1\}$. Nishino [5, 6] の例.
(2) $D := \mathbb{C}^2 \setminus S$, S は $\mathbb{C}^2$ の超越的既約超曲面.
(3) $D := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \setminus S$, $S := \left\{(z_1, z_2) \mid z_2 = e^{1/z_1}\right\}$.
$D := (\Delta \times \mathbb{C}^*) \cup \left(\left(\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}\right) \times \mathbb{C}\right)$, $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
(4) Stein [8] の例. Oka [7] の例. Wermer [9] の例.

定理 6 ([2]). Stein 空間 X の開集合 D について，次の 2 条件は同値である.

(1) D は有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸である.
(2) 各 D_ν が $\mathscr{Q}_X(D_\nu)$-凸であるような X の開集合の単調増加列 $\{D_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ が存在して，D はその極限である.

定理 7 ([2]). $\mathbb{C}^n$ の（連結な）開集合 D について，次の 2 条件は同値である†.

(1) D は有理凸である.
(2) 各 D_ν が $\mathscr{R}(D_\nu)$-凸であるような $\mathbb{C}^n$ の (連結な) 開集合の単調増加列 $\{D_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ が存在して，D はその極限である.

参考文献

[1] Abe, M.: Meromorphic approximation theorem in a Stein space. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **184**, 263–274 (2005)
[2] Abe, M.: A note on the meromorphic $\mathscr{O}(X)$-convexity. Kumamoto J. Math. **18**, 17–23 (2005)
[3] Abe, M.: Open sets satisfying the strong meromorphic approximation property. Toyama Math. J. **29**, 7–23 (2006)
[4] Behnke, H., Stein, K.: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430–461 (1949)
[5] Nishino, T.: Un exemple concernant la convexité par rapport aux polynômes. J. Math. Kyoto Univ. **6**, 85–90 (1966)
[6] 西野利雄: 単連結で有理凸状であるが多項式凸状ではない例. In: 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2003 年度年会, pp. 67–68. 東京大学 (2003)
[7] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IV – Domaines d'holomorphie et domaines rationellment convexes. Japan. J. Math. **17**, 517–521 (1941)
[8] Stein, K.: Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen. Math. Ann. **117**, 727–757 (1941)
[9] Wermer, J.: On a domain equivalent to the bidisk. Math. Ann. **248**, 193–194 (1980)

† Oka [7] では，(2) がにおける有理凸性の定義である.

24

$\mathbb{C}^*$-作用をもつリーマン面の退化族と $\mathbb{C}^*$-作用をもつ２次元特異点.

都丸 正 (群馬大学医学部保健学科)

参考文献 [T] で得られた結果を、$\mathbb{C}^*$-作用付きの状況で考察し、以下の結果が得られたので報告する。

定義　(X, o) を２次元正規特異点とする。$\mathcal{O}_{X,o}$ をその局所環とし、$\mathfrak{m}_{X,o}$ を極大イデアルとする。$h \in \mathfrak{m}_{X,o}$ が perfect power 元とは、$g \in \mathfrak{m}_{X,o}$ が存在し、$f = g^\ell$ $(\ell \geqq 2)$ と書けることと定義する。

参考文献 [T] において次を示した。

定理　(X, o) を２次元正規特異点とし、$h \in \mathfrak{m}_{X,o}$ を perfect power 元ではないとする。このとき、退化族 $\Phi : S \longrightarrow \Delta$ と、特異点解消 $\pi : (\tilde{X}, E) \longrightarrow (X, o)$ で $(\tilde{X}, E) \subset (S, \mathrm{supp}(S_o))$　かつ、$\Phi|_{\tilde{X}} = f \circ \pi$ を満たすものが存在する。

上記結果の $\mathbb{C}^*$-作用付きの結果が成り立つことを報告する。まず、$\mathbb{C}^*$-作用付き退化族の定義を与える。

定義 $\Phi : S \longrightarrow \Delta$ を代数曲線の退化族とする（即ち、S は複素曲面、Φ は固有正則写像、Δ は複素平面の原点０を中心とする開円板、原点以外の点のファイバーは種数 g のコンパクトリーマン面、原点のファイバーは特異点を持ちうるコンパクト複素曲線)。effective な正則な作用 $\sigma : \mathbb{C}^* \times S \to S$ をもち、$t \in \mathbb{C}^*, p \in S$ に対し、$\Phi(t \cdot P) = t^d \Phi(p)$ を満たすとき、$\mathbb{C}^*$-作用をもつ（代数曲線の）退化族、または、$\mathbb{C}^*$-pencil という。ただし、$t \cdot P := \sigma(t, p)$。

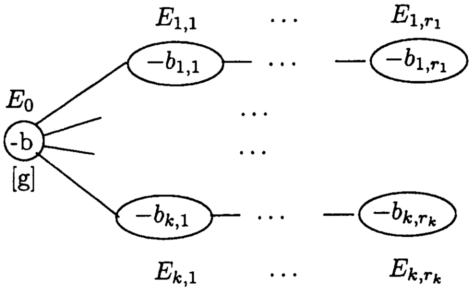
主定理 1.　(X, o) を $\mathbb{C}^*$-作用をもつ２次元特異点とし、$\pi : (\tilde{X}, E) \longrightarrow (X, o)$ を $\mathbb{C}^*$-作用をもつ良特異点解消とする。(X, o) の次数付きアフィン環 R_X をとる。また、$\bar{F} \in R_X$ は perfect power 元ではないとする。このとき、$\mathbb{C}^*$-pencil $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{C}$ で、$\mathbb{C}^*$-作用つきの写像で与えられる次の図を満たすようなものが存在する：

$$\begin{tikzcd} (\tilde{X}, E) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\bar{F}\circ\pi"'] & (S, \mathrm{supp}(S_o)). \arrow[dl, "\Phi"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

証明の方針　[T] の証明では (X, o) の特異点解消空間に、適当な何個かの巡回商特異点の特異点解消空間を貼り合わせ退化族の全空間 S を構成した。それに対し、主定理１ではあるコンパクト Riemann 面上の $\mathbb{P}^1$-束の全空間 $\bar{S}$ とそれ上の適当な有理型関数 $\bar{F}$ を考える。$\bar{S}$ 上の $\mathbb{C}^*$ に関する固定点達をブローアップしてゆき S とし、それ上に $\bar{F}$ を引き上げ F とする。S の適当な因子 D を除き、$S \backslash D$ 上に F を制限したものを Φ として構

成される。このようにして構成した S と F が、主定理 1 の性質を持つことを Pinkham 構成を用いて示す。

$\mathbb{C}^*$ 作用を持つ 2 次元特異点の特異点解消で、例外集合の重み付きグラフが次のようなものが存在することを Orlik-Wagreich が示した。



この場合、この特異点の解析構造は、中心になるコンパクト Riemann 面 E_o と E_o の法束、及び E_o と各枝の交点 $E_o \cap E_{i,1}$ $(i = 1, \cdots, k)$ の解析構造によって決まることを H. Pinkham が示し、この特異点の次数付きアフィン環 R_X は $R_X \simeq \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(E_o, \mathcal{O}_{E_o}(D^{(k)})t^k$. のようになることを示した。ただし、$D^{(k)} := kN^* - \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \frac{e_i k}{d_i} \right\} P_i$, $N := N_{E_o/\tilde{X}}$ とする。

主定理 2. (1) $\mathbb{C}^*$-作用をもつコンパクト Riemann 面の退化族は適当な $\mathbb{C}^*$-ブローアップを行うと特異ファイバーは星形の重み付きグラフとなる。

この状況で、特異点の場合と同様な有理因子 $D^{(k)}$ がを考えられる。これを、Pinkham-Demazure 因子という。

(2) $\mathbb{C}^*$-作用をもつのコンパクト Riemann 面の退化族は、特異ファイバーの numerical な条件と、Pinkham-Demazure Data で解析的にきまる。

(3) $\Phi : S \longrightarrow \Delta$ を $\mathbb{C}^*$-作用をもつコンパクト Riemann 面の退化族。D を Pinkham-Demazure 因子とするとき、$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C} \cdot \Phi^k \simeq \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(E_o, \mathcal{O}_{E_o}(D^{(k)})t^k$。

参考文献

[OW] P. Orlik and P. Wagreich, Isolated singularities of algebraicsurfaces with $\mathbb{C}^*$-action. Ann. Math. 93, 205-228 (1971)

[P] H. Pinkham, Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action, Math. Ann. 227 (1977), 183-193.

[T] T. Tomaru, On Pencil genus for normal surface singularities, J. Math. Soc. Japan, Vol. 59, N0 1 (2007), p.35-80.

25 An intrinsic characterization of the unit polydisc

Akio Kodama (Kanazawa Univ.)

Satoru Shimizu (Tohoku Univ.)

In 1907, it was shown by Poincaré that the Riemann mapping theorem does not hold in the higher dimensional case. In fact, he proved that *there exists no biholomorphic mapping from the unit polydisc* Δ^2 *onto the unit ball* B^2 *in* $\mathbb{C}^2$ by comparing carefully the topological structures of the isotropy subgroups of $\mathrm{Aut}(\Delta^2)$ and $\mathrm{Aut}(B^2)$ at the origin o of $\mathbb{C}^2$. In view of this fact, for a given complex manifold M, it seems to be an important problem to bring out some complex analytic nature of M under some topological conditions on the holomorphic automorphism group $\mathrm{Aut}(M)$, equipped with the compact-open topology. In connection with this, we would like to study the following:

Question. *Let M and N be connected complex manifolds and assume that their holomorphic automorphism groups* $\mathrm{Aut}(M)$ *and* $\mathrm{Aut}(N)$ *are isomorphic as topological groups. Then is M biholomorphically equivalent to N?*

Recall that there exist bounded domains D_1, D_2 in $\mathbb{C}^n$ such that D_1 is not biholomorphically equivalent to D_2, and further, the only holomorphic automorphism of D_j is the identity for $j = 1, 2$. Thus, the answer to this last question is negative, in general. However, there already exist several articles solving this question affirmatively in the case where the manifolds M or N are some special domains in $\mathbb{C}^n$; for instance, Isaev-Kruzhilin [4], Isaev [3], Kodama-Shimizu [6], [7] and Byun-Kodama-Shimizu [2]. In particular, as an application of their classification theorem obtained in [4] for complex manifolds of dimension n admitting effective actions of the unitary group $U(n)$, Isaev showed in [3] that *if the holomorphic automorphism group* $\mathrm{Aut}(M)$ *of a connected complex manifold* M *of dimension* n *is isomorphic to the holomorphic automorhism group* $\mathrm{Aut}(B^n)$ *of the unit ball* B^n *in* $\mathbb{C}^n$ *as topological groups, then* M *is biholomorphically equivalent to* B^n. In view of this, it would be naturally expected that exactly the same conclusion is also valid for the unit polydisc Δ^n in $\mathbb{C}^n$. This cannot be clarified in full generality at this moment. However, under some suitable condition on the manifold M, we can establish the following intrinsic characterization of the unit polydisc as our main result:

Theorem. *Let* M *be a connected complex manifold of dimension* n *that is holomorphically separable and admits a smooth envelope of holomorphy. Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ *as topological groups. Then* M *is biholomorphically equivalent to* Δ^n.

Let D be an arbitrary domain in $\mathbb{C}^n$. Then it is well-known that D admits a smooth envelope of holomorphy. Consequently, we obtain the following:

Corollary. *Let* M *be a connected Stein manifold of dimension* n *or a domain in* $\mathbb{C}^n$. *Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(\Delta^n)$ *as topological groups. Then* M *is biholomorphically equivalent to* Δ^n.

Our proof of the Theorem is based on three main facts: a well-known fact on torus actions on complex manifolds due to Barrett-Bedford-Dadok [1], an important fact on homogeneous hyperbolic manifolds by Nakajima [8] and some fact on the relationship between boundedness and hyperbolicity in the category of circular domains in $\mathbb{C}^n$ due to Kodama [5].

References: [1] Math. Z. **202** (1989), 65–82. [2] Forum Math. **18** (2006), 983–1009. [3] J. Geom. Anal. **14** (2004), 697–700. [4] Canad. J. Math. **54** (2002), 1254–1279. [5] Proc. Japan Acad. **58** (1982), 227–230. [6] Osaka J. Math. **41** (2004), 85–95. [7] J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 643–663. [8] J. Math. Kyoto Univ. **25** (1985), 269–291.

26　複素葉層構造に付随する簡約可能な構造について —— トーラスの場合

大沢健夫（名古屋大学 多元数理）

序説

Mをコンパクトなケーラー多様体、$X \subset M$を実解析的なレビ平坦閉超曲面とする。［O-3］においてつぎの結果が得られた。

定理 0.1.　$M \setminus X$ 上には次の条件(＊)をみたす C^∞ 級の多重劣調和皆既関数 Φ は存在しない。

（＊）　Φのレビ形式（$\partial\bar{\partial}\Phi$ を $M \setminus X$ 上の正則接ベクトル束のエルミート形式とみなしたもの）は、（Φの定義域に含まれる）あるコンパクト集合の補集合上でいたるところ3個以上の正固有値をもつ。

その後、Xの代わりに余次元が1の複素解析的集合を考えても似たような結果が得られた。具体的には以下の通り。

定理 0.2.（cf.［O-4］）　$D \subset M$ を余次元が（いたる所）1であるような複素解析的閉集合とし、その既約分解を $\bigcup_{k=1}^{m} D_k$ とする。このとき、もし自然数の組 $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$ が存在して因子 $\sum \mu_k D_k$ の定める直線束がD上で位相的に自明になれば、$M \setminus D$ 上には(＊)をみたす多重劣調和なC^∞級皆既関数は存在しない。

注意.　(＊)における数字‘3’は最良である。（定理0.1については［O-1, 2］定理0.2については［U］を参照されたい。）

主結果

上記において $M\setminus X$（または $M\setminus D$）は局所擬凸であるが、とくに M が複素トーラスの場合、点 $z\in M$ から X（または D）までの距離を $\delta(z)$ とすると、岡の定理により $-\log\delta(z)$ は $M\setminus X$（または $M\setminus D$）上の連続な多重劣調和皆既関数である。ここで松本の公式 [M] を用いると、$\partial\bar\partial(-\log\delta(z))$ を X や D の'曲率'で評価することができるので、定理 0.1 と定理 0.2 で用いた議論を敷衍してつぎの結果が得られる。

定理 1.1. $\mathbb{T}$ を複素トーラス、$A\subset\mathbb{T}$ を閉集合とし、A の近傍上に余次元が 1 の複素葉層構造 $\mathcal{F}$（$\subset\Omega^1_{\mathbb{T}}$ ＝正則1形式の層）があって、A は $\mathcal{F}$ の安定集合（即ち $\mathcal{F}$ の葉の和集合）であり、かつ $\mathcal{F}$ は A のある近傍上で位相的に自明（可逆層として）であるとする。このときつぎのいずれかが成り立つ。

1) A は $\mathbb{T}$ の全測地的な実超曲面の和集合である。

2) 2次元の複素トーラス $\mathbb{T}'$ と正則写像 $\pi:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{T}'$、および $A'\subset\mathbb{T}'$ が存在して $A=\pi^{-1}(A')$ となる。

注意. $\mathcal{F}$ 自体が簡約可能だという主張ではないし、そうならない例もある。

文献

[M] Matsumoto, K., Levi form of logarithmic distance to complex submanifolds and its application to developability, Adv. Stud. in Pure Math. 42, 2004, pp. 203-207.

[O-1] Ohsawa, T., A Stein domain with smooth boundary which has a product structure, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18 (1982), 1185-1186.

[O-2] ———, On the Levi-flats in complex tori of dimension two, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 42 (2006), 361-377, Supplement : ibid. 379-382.

[O-3] ———, On the complements of Levi-flats in Kähler manifolds of dimension ≥ 3, Nagoya Math. J. 185 (2007), 161-169.

[O-4] ———, A remark on pseudoconvex domains with analytic complements in compact Kähler manifolds, to appear in J. Math. Kyoto Univ. 47 (2007)

[U] Ueda, T., On the neighbourhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ. 22 (1983), 583-607.

27 Levi非平坦な擬凸境界の連結性について

大沢健夫（名大多元数理）

複素多様体上のLevi問題については、H. Grauertによるつぎの結果が基本的である。

定理 0.1. 強擬凸領域は正則凸である。

ただしここでは複素多様体 M に対して C^2級の実超曲面を境界とする相対コンパクトな領域 D を考える。Dが強擬凸であるとは、Dの閉包がDの各境界点において適当な正則局所座標に関して外接球面片をもつことをいう。いいかえれば、Dの境界∂Dの定義関数 ρ の Levi形式 $\partial\bar{\partial}\rho$ を $\mathrm{Ker}\,\partial\rho$ に制限したものが ∂D の点xで正定値であるとき、∂Dは xで強擬凸であるということにし、Dが強擬凸であるとは ∂D がいたるところ強擬凸なことであるとする。$\partial\bar{\partial}\rho | \mathrm{Ker}\,\partial\rho$ が ∂D 上いたるところ半正値であるとき、∂Dは擬凸であるという。

［D-O］においてつぎの結果が示された。

定理 0.2. $\dim M = 2$，∂Dは実解析的であり擬凸、かつ少なくとも1点で強擬凸であるとする。このとき、さらに ∂D が連結であるならばDは正則凸である。

この命題が∂Dの連結性の仮定なしに成立するかどうかに興味をもち、つぎの結果を得た。

定理 1.1. (cf.［O］) $\dim M = 2$，$D \subset\subset M$，∂Dは実解析的であり擬凸、かつある1点で強擬凸であるとする。このとき、Mが連結で非定数有理型関数をもてば、Dは正則凸である。

これにより、（定理0.1のよく知られた帰結である）2次元以上の強擬凸領域の境界の連結性を、以下のように拡張することができる。

定理1.1の系　Mは2次元以上の連結な射影的代数多様体、$D \subset M$、∂Dは実解析的であり擬凸、しかしLevi平坦ではないとする。このとき∂Dは連結である。

ただし∂Dが擬凸であって、上記の$\partial\bar{\partial}\rho \mid \mathrm{Ker}\,\partial\rho$が$\partial D$上いたる所$0$であるとき、$\partial D$はLevi平坦であるという。

文献

[D-O]　Diederich, K. and Ohsawa, T.,　*A Levi problem on two-dimensional complex manifolds,* Math. Ann. 261 (1982), 255-261.

[O]　Ohsawa, T.,　Preprint (On the connectednes property of pseudoconvex boundaries in complex manifolds)

28

Hopf 多様体の擬凸状領域について

山口博史

$n \geq 1$ は自然数，c_i $(i = 1, \ldots, n)$ は $c_i \in \mathbb{C}^*$，$|c_i| \overset{<}{\cancel{\neq}} 1$ とする．$(\mathbb{C}^n)^* = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ と書く．2点 $z = (z_1, \ldots, z_n)$，$w = (w_1, \ldots, w_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$ に対して，同値関係

$$z \sim w \quad \text{iff} \quad \exists k \in \boldsymbol{Z} \quad \text{s.t.} \ \ w_i = c_i^k z_i \ \ (i = 1, \ldots, n)$$

を入れる．このとき，

$$\mathbb{H}_n := (\mathbb{C}^n)^* / \sim$$

は n 次元コンパクト多様体となり，$(c_1, \ldots, c_n)$ に関する Hopf 多様体と呼ばれる．$n = 1$ のときは，通常の複素一次元のトーラス T_{c_1} である．

$c_1 = \ldots = c_n (= c)$ となる特別の場合の Hopf 多様体 $\mathbb{H}_n$ を c に関する特殊 Hopf 多様体と呼び，$\mathcal{H}_n(c)$ と書くことにする．この場合は，自然な射影

$$\widehat{\pi} : z \in \mathcal{H}_n(c) \mapsto [z] \in \mathbb{P}^{n-1}$$

が考えられ，$\widehat{\pi}^{-1}(\zeta) \approx T_c$，$\forall \zeta \in \mathbb{P}^{n-1}$ である．

本講演では，複素多様体の領域上のロバン関数を用いて，次を示す：

定理 1. Hopf 多様体 $\mathbb{H}_n$ での C^ω 級の境界で囲まれた擬凸状領域 D は弱一完備である．

定理 2. 特殊 Hopf 多様体 $\mathcal{H}_n(c)$ での C^2 級の境界で囲まれた擬凸状領域 D が Stein 領域でないものは次の形に限る：$\mathbb{P}^{n-1}$ での C^2 級の境界で囲まれた Stein 領域 D_0 が存在して $D = \widehat{\pi}^{-1}(D_0)$ である．

特別講演

等質有界領域の対称性条件,
性質の良い有界領域実現について

甲斐 千舟[1] **(九大・数理, 学振特別研究員 (PD))**
(伊師 英之氏 (名大・多元数理) との共同研究を含む)

概要. 特別な等質有界領域である対称有界領域は, Harish-Chandra 実現と呼ばれる標準的な有界領域実現をもつ. 近年, R. Penney や野村隆昭氏が Bergman 核を用いて, Harish-Chandra 実現を一般の等質有界領域に拡張した. 本講演では, この有界領域実現が Xu Yichao の定義した Bergman 写像と一致することを示す. Bergman 写像は, S. Bergman が考察した代表領域や極小領域に関連していて, 内在的な意味を理解しやすい. さらに, Bergman 写像をある種の Kähler 多様体に自然に一般化できることも示す (一般 Bergman 写像). これを用いると, 野村氏の定義した "有界領域実現の族" は, "等質有界領域の等質 Kähler 計量に付随する一般 Bergman 写像の族" と捉えることができ, その凸性によって対称有界領域が特徴付けられるという講演者の定理を, 簡潔な形で言い換えることができる.

1. 序

本講演では, 等質有界領域に性質の良い有界領域実現を与える試みについてお話ししたい. ここで等質有界領域とは, 有界領域 $D \subset \mathbb{C}^N$ で, D の正則自己同相写像から成る群 (有限次元 Lie 群である) が推移的に作用しているものをいう. また, 有界領域が対称であるとは, 領域の各点に対してそれを孤立固定点とするような位数 2 の正則自己同相写像が存在することである. 対称有界領域は Bergman 計量に関して, 非コンパクト型 Hermite 対称空間となる. なお, 対称有界領域は等質である.

周知の通り, 一次元では Riemann の写像定理により, $\mathbb{C}$ 全体と異なる単連結な領域はすべて, 単位円板に正則同相である. この事実は, "単位円板が一次元の等質有界領域の 標準的な 有界領域実現を与えている" と捉えることができる. また, 単位円板は Cayley 変換によって非有界な上半平面と写り合う.

単位円板は対称領域であるから, 一次元の等質有界領域は対称である. $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3$ では É. Cartan が等質有界領域を分類し, それらが全て対称領域であることを示した [2]. しかし 4 次元以上では非対称な等質有界領域が存在し, しかも, 等質有界領域のクラスの中で対称なものが非常に特殊であることが判明している. 実際, 対称有界領域の正則同相類は各次元に有限個しか存在しないが, 7 次元以上では, 非対称な等質有界領域のそれは連続無限個ある.

É. Cartan のもう一つの重要な仕事は, 古典型の非コンパクト型 Hermite 対称空間を有界領域として実現したことである. 例外型に関しては, Harish-Chandra が古典型も含めて, 分類を用いない Lie 群論的な方法で有界領域実現を与えた

[1]E-mail: kai@math.kyushu-u.ac.jp

[5]. これが今日, 非コンパクト型 Hermite 対称空間の Harish-Chandra 実現と呼ばれているものである. 任意の対称有界領域は非コンパクト型 Hermite 対称空間であるから, Harish-Chandra 実現は対称有界領域の "標準的な" 有界領域実現を与えている. 標準的であるという理由は多々あるが, 本講演に関係のあるものを挙げるならば, 1992 年の Mok と Tsai の仕事 [11] がある. それは, "ランクが 2 以上の既約な対称有界領域の有界領域実現で 凸な ものは, Harish-Chandra 実現をアファイン変換で写したものに限る" という結果である.

さて, 任意の 等質 有界領域は, 上半平面の高次元化である等質 Siegel 領域に正則同相である. 等質 Siegel 領域はアファイン等質な, 形の整った領域であり, 等質有界領域の標準的な 非有界 領域実現を与えている. 対称 有界領域の場合には, Harish-Chandra 実現を対称 Siegel 領域に写す Cayley 変換が Korányi と Wolf によって定義されている [8]. それは, 立体射影で複素平面を Riemann 球面内に写したときに, 一次元の Cayley 変換が Riemann 球面内での $\pi/2$ 回転に対応しているという事実を Lie 群論的に高次元に拡張したものである.

非対称な等質有界領域の場合には, 標準的な有界領域実現は存在しないであろうと考えられてきた. 確かに, 標準的なものが一意的に存在するという状況は考えにくい. しかし, 性質の良い有界領域実現が存在するらしいということが, R. Penney や野村隆昭氏によって独立に発見された. Penney は Harish-Chandra 実現の定義を, 簡潔な方法で少し変形することによって等質な場合に拡張できることを示した [17]. また, 等質 Siegel 領域を彼の有界領域実現に写す写像を Cayley 変換と呼んだ. これは, 領域が対称な場合には Korányi と Wolf の Cayley 変換 (の逆変換) と一致する. また野村氏は, 等質 Siegel 領域の Laplace-Beltrami 作用素と Berezin 変換の可換性が対称なものを特徴付けることを証明した際に [12], その可換性を表す式に有界領域実現が自然に現れることを見つけ, それが Penney のものと一致することに気付いた. これは Bergman 核 に付随して定義されるものであったが, 野村氏は Szegö 核に付随する Cayley 変換も定義し, それを [16] で本質的に活用した. さらに, これら二つを含む, 等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族を定義した [15].

講演者はこの Cayley 変換の族を用いて, その像の凸性によって対称 Siegel 領域を特徴付けた [7]. 対称 Siegel 領域の Cayley 変換の像である Harish-Chandra 実現の凸性の重要性は, Mok と Tsai の仕事で示唆されているし, 凸性という初等的な性質と対称性という高度な性質が結び付くという現象は, それ自体, 興味深い. しかしながら, 等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族がどのような有界領域実現を与えているか, すなわち, それのもつ内在的な意味が何かということは不明なままであった.

このような状況の中で, 講演者と伊師英之氏との共同研究によって, Xu Yichao が Bergman 写像なる有界領域実現を 1980 年頃に定義していたことがわかり [18], それが Bergman 核に付随する Cayley 変換に一致することが判明した. Bergman 写像は, Bergman 核を用いて非常に簡潔な形で定義でき, 等質有界領域の間の正則同相写像が Bergman 写像の像の方ではユニタリ同型写像になるなどの, 著しい性質をもつ (§2). それだけでなく, Xu が Bergman 写像を定義した動機は, S. Bergman が考察した代表領域や極小領域に端を発しており [1], 実際に Bergman 写像はそれらの領域を与えていることが, 我々の共同研究で確認されている. 代表領域とは, 高次元の領域を分類するために, 領域の正則同相類の代表元を選び出す目的で定義されたものであり, また極小領域は, 領域の Euclid 体積をあ

る意味で最小にするものである．このような領域の概念を用いることによって，Bergman 写像や，それと一致する，Bergman 核に付随する Cayley 変換のもつ内在的な意味が明らかになる可能性がある (代表領域や極小領域に関する詳しいことは，本稿執筆時点でまだ整理できていないため書くことができないが，講演ではできるだけお話ししたい)．また，講演者が証明した凸性による特徴付け定理と，Mok と Tsai の仕事に関連して自然に提起される問題 "凸な等質有界領域は対称か?" を解決する手段を，Bermgan 写像が与える可能性もある (§5)．

さらに我々の共同研究によって，Bergman 写像を，計量がポテンシャルをもつような Kähler 多様体に自然に拡張できることが明らかになった (§3)．これを一般 Bergman 写像と呼ぶ．まず Kähler 多様体として等質有界領域をとると[2]，次の事実が得られる (§4): "等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族は，等質有界領域の等質 Kähler 計量に付随して定義される一般 Bergman 写像の族である．" これによって，講演者の定理は次のような簡潔な形に言い換えられる: "D を等質有界領域とし，h をその上の等質 Kähler 計量とする．このとき，h に付随する一般 Bergman 写像 σ^h の像 $\sigma^h(D)$ が凸であるための必要十分条件は，D が対称であり，かつ h が Bergman 計量の正の定数倍となっていることである．"

一般 Bergman 写像はポテンシャルの取り方に依らず，計量によって決まるので，Kähler 多様体の構造を何らかの形で反映していると考えられる．しかし，Kähler 多様体の情報がどれくらい像に反映するか，といった問題は今後の課題である (§5)．等質有界領域の場合の研究から始めて，一般 Bergman 写像ができるだけ広いクラスの Kähler 多様体に対して有用な概念であることを示すべく，研究を進めていく予定である．

2. Xu の Bergman 写像

まず，定義が非常に簡潔な Xu の Bergman 写像から見ていくことにしよう．$D \subset \mathbb{C}^N$ を有界領域に正則同相な領域とする．D は Bergman 核をもつから，それを $K_D : D \times D \to \mathbb{C}$ で表す．$z \in D$ における Bergman 計量を表す正定値 Hermite 行列を $T_D(z)$ と書く:

$$T_D(z)_{jk} := \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} \log K_D(z,z) \qquad (1 \leq j,k \leq N).$$

$\zeta \in D$ に対し，$K_D^\zeta(z) := K_D(\zeta, z)$ $(z \in D)$ と定義すると，K_D^ζ は反正則関数である．$p \in D$ とする．**Bergman 写像** $\sigma_p : D \to \mathbb{C}^N$ を次のように定義する:

$$\sigma_p(\zeta) := T_D(p)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{grad}_{\bar{z}} \log \frac{K_D^\zeta(p)}{K_D^p(p)} \qquad (\zeta \in D).$$

ここで，反正則関数 $f(z)$ $(z \in D)$ に対し，$\operatorname{grad}_{\bar{z}} f(p) := {}^{t}(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_N}(p))$ とおいた．明らかに σ_p は正則である．しかし一般に σ_p は単射であるとは限らないし，像 $\sigma_p(D)$ が有界であるかどうかもわからない．

[2]Dorfmeister と中島和文氏による次の基本定理によって，等質 Kähler 多様体のクラスにおける等質有界領域の位置付けが理解できる: "任意の等質 Kähler 多様体は，等質有界領域を底空間とし，平坦な等質 Kähler 多様体と単連結でコンパクトな等質 Kähler 多様体の直積をファイバーとする正則ファイバー束の構造をもつ (複素多様体としては，これら 3 つの直積となる)．"

領域 $D' \subset \mathbb{C}^N$ が D と正則同相であるとし, 正則同相写像を $\alpha : D \xrightarrow{\sim} D'$ とする. α は Bergman 計量に関して等長であるから,

$$T_D(p) = J(\alpha, p)^* T_{D'}(\alpha(p)) J(\alpha, p)$$

が成立する. ただし, $J(\alpha, p)$ は p における α の正則 Jacobi 行列である. よって,

$$L(\alpha, p) := T_{D'}(\alpha(p))^{-1/2} (J(\alpha, p)^*)^{-1} T_D(p)^{1/2}$$

と定義すれば, $L(\alpha, p)$ はユニタリ行列である. 簡単な計算によって, 次のことがわかる:

補題 2.1. D' に対して $\alpha(p)$ において定義した Bergman 写像を $\sigma'_{\alpha(p)}$ で表すと,

$$\sigma'_{\alpha(p)} \circ \alpha = L(\alpha, p) \circ \sigma_p$$

が成立する. □

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] \arrow[d, "\sigma_p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D' \arrow[d, "\sigma'_{\alpha(p)}"] \\ \mathbb{C}^N \arrow[r, "L(\alpha,p)"] & \mathbb{C}^N \end{tikzcd}$$

すなわち, 領域の間の正則同相写像が, 像の方では線型化される. 特に領域 D が等質ならば, $p, p' \in D$ に対して $\sigma_p(D)$ と $\sigma_{p'}(D)$ はユニタリ同値であるから, 像の形は本質的に変わらない. このときさらに, 次のことが証明できる:

定理 2.2 (Xu). $D \subset \mathbb{C}^N$ が等質有界領域であるとする. このとき任意の $p \in D$ に対して, σ_p は D を <u>有界</u> 領域 $\sigma_p(D)$ に正則同相に写す. □

例. Riemann の写像定理より, 下記の三つの領域は互いに正則同相である. いずれの場合も, $\sigma_p(D)$ は半径 $\sqrt{2}$ の開円板となる.

- D を単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とする. Bergman 核は $K_D(\zeta, z) = 1/\pi(1 - \zeta\bar{z})^{-2}$ で与えられ, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log K_D^\zeta(z) = 2\zeta(1 - \zeta\bar{z})^{-1}, T_D(z) = 2(1 - |z|^2)^{-2}$ となる. よって $p \in D$ に対し,

$$\sigma_p(\zeta) = \frac{1 - |p|^2}{\sqrt{2}} \Big(\frac{2\zeta}{1 - \bar{p}\zeta} - \frac{2p}{1 - |p|^2} \Big) = \frac{\sqrt{2}(\zeta - p)}{1 - \bar{p}\zeta}.$$

- D を上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ にとる. Bergman 核は $K_D(\zeta, z) = \frac{1}{\pi}(\frac{\zeta - \bar{z}}{i})^{-2}$ であり, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log K_D^\zeta(z) = \frac{2}{\zeta - \bar{z}}, T_D(z) = 2(\frac{\zeta - \bar{z}}{i})^{-2}$ となる. よって $p \in D$ に対し,

$$\sigma_p(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\frac{p - \bar{p}}{i} \Big) \Big\{ \frac{2}{\zeta - \bar{p}} - \frac{2}{p - \bar{p}} \Big\} = \sqrt{2} i \frac{\zeta - p}{\zeta - \bar{p}}.$$

- D を帯状領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \Re z < 1\}$ にとる.

$$K_D(\zeta, z) = \pi(16 \cos^2(\pi(\zeta + \bar{z})/4))^{-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log K_D^\zeta(z) = \frac{\pi}{2} \tan(\pi(\zeta + \bar{z})/4), \quad T_D(z) = \pi^2 (8 \cos^2(\pi(z + \bar{z})/4))^{-1}$$

となる. よって $p \in D$ に対し,

$$\sigma_p(\zeta) = \sqrt{2} \cos(\pi(p + \bar{p})/4) \{ \tan(\pi(\zeta + \bar{p})/4) - \tan(\pi(p + \bar{p})/4) \}.$$

3. 一般 Bergman 写像

Bergman 写像は次のようにして, 自然に一般化される. (M,h) を N 次元の Kähler 多様体とし, 次のような関数 $\psi : M \times M \to \mathbb{C}$ が存在すると仮定する:

(i) ψ は第一変数に関して正則, 第二変数に関して反正則である.

(ii) 各点 $z \in M$ で, 正則局所座標 $(z_1, \dots, z_N)$ に関して次のように表せる:

$$h(z) = \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \psi(z,z) dz_j d\bar{z}_k.$$

このような関数 ψ を Kähler 計量 h の**ポテンシャル核**と呼ぶことにする. $\zeta \in M$ に対し, 反正則関数 $\psi^\zeta : M \to \mathbb{C}$ を $\psi^\zeta(z) := \psi(\zeta, z)$ で定義する. $p \in M$ とする. **一般 Bergman 写像** $\sigma_p^h : M \to T^*M_p^{(0,1)}$ は次のように定義される:

$$\sigma_p^h(\zeta) := \bar{\partial}\psi^\zeta(p) - \bar{\partial}\psi^p(p) \qquad (\zeta \in M).$$

明らかに σ_p^h は正則である. σ_p^h は $p \in M$ の選び方のみに依存し, ポテンシャル核の取り方に依らない. すなわち, 次のことが証明できる:

命題 3.1. $\widetilde{\psi} : M \times M \to \mathbb{C}$ も Kähler 計量 h のポテンシャル核であるとする. このとき, $\bar{\partial}\psi^\zeta(z) = \bar{\partial}\widetilde{\psi}^\zeta(z)$ $(\zeta, z \in M)$. □

もう一つ Kähler 多様体 (M', h') があるとし, 等長な正則同相写像 $\alpha : M' \xrightarrow{\sim} M$ が存在するとしよう. ψ を引き戻すことによって, h' のポテンシャル核 ψ' を作ることができる:

$$\psi'(z_1, z_2) := \psi(\alpha(z_1), \alpha(z_2)) \qquad (z_1, z_2 \in M').$$

$p' := \alpha^{-1}(p)$ とおく. M' に対して p' において定義した一般 Bergman 写像を $\sigma'^{h'}_{p'} : M' \to T^*M'^{(0,1)}_{p'}$ で表すことにしよう.

補題 3.2. 右の図式は可換である. すなわち,

$$\alpha^* \circ \sigma_p^h \circ \alpha = \sigma'^{h'}_{p'}$$

が成立する. □

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] \arrow[d, "\sigma'^{h'}_{p'}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "\sigma_p^h"] \\
T^*M'^{(0,1)}_{p'} & T^*M_p^{(0,1)} \arrow[l, "\alpha^*"']
\end{tikzcd}$$

$T^*M_p^{(0,1)}, T^*M'^{(0,1)}_{p'}$ にそれぞれ h, h' から誘導される Hermite 計量を入れると, α^* はユニタリ写像となる.

§4 で詳しく述べるが, 野村氏の定義した等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族は, 等質 Siegel 領域の等質 Kähler 計量から定義される一般 Bergman 写像の族と考えることができる. よって,

命題 3.3. D を等質有界領域とし, h を D 上の等質 Kähler 計量とする. 任意の $p \in D$ をとる. このとき, 一般 Bergman 写像 σ_p^h は D を<u>有界</u>領域 $\sigma_p(D)$ に正則同相に写す.

これを踏まえると, 講演者が証明した対称 Siegel 領域の特徴付け定理は, 次のように, 理解しやすい簡潔な形に言い換えられる:

定理 3.4. Dを等質有界領域とし, hをD上の等質 Kähler 計量とする. 任意に $p \in D$をとる. このとき,

$$\sigma_p^h(D) \text{ が凸である} \iff \begin{cases} \bullet\ D \text{ が対称,} \\ \bullet\ h \text{ が Bergman 計量の正の定数倍.} \end{cases}$$

4. 等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族と一般 Bergman 写像

まず Siegel 領域の定義を確認しよう. Vを有限次元の実ベクトル空間とし, その中に直線を含まない開凸錐Ωが与えられているとする. $W := V_{\mathbb{C}}$ (Vの複素化ベクトル空間) とおく. もうひとつ別の, 有限次元の複素ベクトル空間Uが与えられているとする. Hermite 写像$Q : U \times U \to W$ (第一変数に関して複素線型, 第二変数に関して複素反線型とする) がΩ正値であるとする (これは正定値性の高次元化である):

$$\forall u \in U \setminus \{0\}, \quad Q(u, u) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}.$$

このとき, **Siegel 領域**Dが次のように定義される:

$$D := \{(u, w) \in U \times W \mid \Re w - \tfrac{1}{2}Q(u, u) \in \Omega\}. \tag{4.1}$$

このように本稿では, 上半平面型ではなく右半平面型として Siegel 領域を定義する (もちろん数学的に本質的な違いは無い). Uは$U = \{0\}$であってもよい. このときQは自明となり, $D = \Omega + iV$の形となる. これを**管状領域** (または第1種 Siegel 領域) と呼ぶ.

例.

- $V := \mathbb{R}, \Omega := \mathbb{R}_{>0}$のとき, 管状領域$D = \Omega + iV$は右半平面$\{\Re z > 0\}$に他ならない.
- $V := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}), \Omega := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})^+$ (n次の正定値実対称行列の成す錐) のとき, 管状領域$D = \Omega + iV$は Siegel 上半平面 (ここでは右半平面であるが) と呼ばれる古典的な Hermite 対称空間である. Dは Cayley 変換

  $$w \mapsto (w - E_n)(w + E_n)^{-1} \qquad (E_n \text{ は } n \text{ 次の単位行列})$$

  によって, $\{\|w\|_{\mathrm{op}} < 1\}$ ($\|w\|_{\mathrm{op}}$はwを$\mathbb{C}^n$上の線型作用素とみたときの作用素ノルム) と正則同相である.
- $V := \mathbb{R}, \Omega := \mathbb{R}_{>0}, U = \mathbb{C}^{N-1}, Q(u_1, u_2) := u_1 \cdot \overline{u}_2$ (複素ユークリッド内積) と定義する. Qは正定値なので, Ω正値である. これらから定義される Siegel 領域

  $$D = \{(u, w) \in \mathbb{C}^{N-1} \times \mathbb{C} \mid \Re w - \tfrac{1}{2}|u|^2 > 0\}$$

  は, Cayley 変換

  $$(u, w) \mapsto \left(\frac{2u}{w+1}, \frac{w-1}{w+1}\right)$$

  によって単位球と正則同相である.

4.1. **等質 Siegel 領域の等質 Kähler 計量.** D を (4.1) で定義される Siegel 領域とする. さらに D は等質であるとする. このとき Ω は**等質錐**となる. すなわち, Lie 群

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V) \mid g(\Omega) = \Omega\}$$

が Ω に推移的に作用している.

少し意外なことに, D 上の任意の等質 Kähler 計量を次のように記述することができる. まず, Ω に単純推移的に作用するような, $G(\Omega)$ の分裂可解な部分群 H が存在する. 任意に $E \in \Omega$ をとり, 固定する. $\Delta : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ を H 相対不変関数とする. 対称双線型形式

$$\langle x|y\rangle_\Delta := D_x D_y \log \Delta(E) \qquad (x, y \in V)$$

が正定値な内積を定めるとき, Δ は**認容的**であると言うことにする (D_x は x 方向の方向微分を表す).

$\Delta : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ を認容的な H 相対不変関数とする. Δ は $\Omega + iV$ 上の正則関数に解析接続される. $\psi_\Delta : D \times D \to \mathbb{C}$ を

$$\psi_\Delta((u_1, w_1), (u_2, w_2)) := \log \Delta(w_1 + \overline{w}_2 - Q(u_1, u_2)) \qquad ((u_j, w_j) \in D)$$

と定義する. $z \in D$ における正則接ベクトル空間 $TM_z^{(1,0)}$ を自然な方法で $U \times W$ と同一視し, Hermite 計量 h_Δ を

$$h_\Delta((u_1, w_1), (u_2, w_2))_z := \partial_{(u_1,w_1)} \overline{\partial}_{(u_2,w_2)} \psi_\Delta(z, z)$$

で定義する (ただし通常のように, $\partial_v := (D_v - iD_{iv})/2, \overline{\partial}_v := (D_v + iD_{iv})/2$ ($v \in U \times W$) とおいた). h_Δ は ψ_Δ をポテンシャル核とする D 上の Kähler 計量である. しかも等質である.

注意. h_Δ の等質性は本稿の説明からは明らかでないが, 等質 Siegel 領域に付随する正規 j 代数を用いると, 理解しやすい. すなわち, 等質 Siegel 領域 D の正則自己同型群の分裂可解な部分群 G で, D に単純推移的に作用するものが存在し, その Lie 環 $\mathfrak{g}$ は正規 j 代数の構造をもつ. 実は, 本稿の "認容的な Δ" は "$\mathfrak{g}$ 上の認容的線型形式 f_Δ" に対応していて, f_Δ は $\mathfrak{g}$ 上に複素構造で不変な正定値 Hermite 内積を定める. これを G 上に左不変に移し, 軌道写像を用いて G と微分同相な D に写すことによって, D 上の等質 Kähler 計量 h_Δ が定まる. □

Dorfmeister の結果 [3, §3.3, Theorem 2], [3, §3.4, Theorem 1] を使うことによって, 非自明な次の事実が得られる.

命題 4.1. 等質 Siegel 領域 D 上の任意の等質 Kähler 計量を h とする. このとき, 認容的な H 相対不変関数 $\Delta : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, (D, h) と (D, h_Δ) は Kähler 多様体として同型になる.

例. $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}), \Omega = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})^+$ の場合. $g \in GL(n, \mathbb{R})$ に対し, V への作用 $\rho(g)$ を $\rho(g)v := gv{}^tg$ で定義する. Ω に単純推移的に作用する分裂可解群は

$$H = \{\rho(g) \mid g \in GL(n, \mathbb{R}), g \text{ は対角成分が正の下三角行列}\}$$

で与えられる. 認容的な H 相対不変関数は

$$\Delta_{(s_1,\dots,s_r)} := \det\nolimits_{[1]}^{-(s_1-s_2)} \cdots \det\nolimits_{[n-1]}^{-(s_{n-1}-s_n)} \det\nolimits_{[n]}^{-s_n} \qquad (s_1, \dots, s_n > 0)$$

なる形の関数 (の正の定数倍) である．ここで $\det_{[1]},\ldots,\det_{[n]}=\det$ は，主小行列式を左上から順にとったものである．特に，$D=\Omega+iV$ の Bergman 計量に対応する H 相対不変関数は，$\Delta_{(2d,\ldots,2d)}$ ($d:=1+(n-1)/2$) で与えられる．

4.2. **等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族.** §4.1 に引き続き，D を等質 Siegel 領域とし，$\Delta:\Omega\to\mathbb{R}_{>0}$ を認容的な H 相対不変関数とする．Δ に付随する**擬逆元写像** $\mathcal{I}_\Delta:\Omega\to V^*$ を次のように定義する:

$$\langle v,\mathcal{I}_\Delta(x)\rangle=-D_v\log\Delta(x)\qquad(v\in V).$$

注意. $\Omega=\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})^+\subset V=\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ のとき，$x\in\Omega$ の逆行列は次のように特徴付けられる:

$$\mathrm{tr}(vx^{-1})=-D_v\log\det(x)^{-1}\qquad(v\in V).$$

すなわち，正定値内積 $(w,w')\mapsto\mathrm{tr}(ww')$ で V^* を V と同一視したときに，x^{-1} は $-\operatorname{grad}\log\det(x)^{-1}$ と一致する．Ω が一般の対称錐の場合も，付随する Jordan 代数における逆元は，tr 関数と det 関数を用いて同様に特徴付けられる．このような意味で，擬逆元写像 $\mathcal{I}_\Delta$ は Jordan 代数の逆元写像の拡張となっている．□

$\mathcal{I}_\Delta$ の主な性質をまとめておく．

- Ω の双対錐 Ω^* は
$$\Omega^*:=\{f\in V^*\mid\forall x\in\overline{\Omega}\setminus\{0\},\langle x,f\rangle>0\}$$
と定義され，これも等質錐である．擬逆元写像 $\mathcal{I}_\Delta$ は Ω から Ω^* への全単射を与える．
- $\mathcal{I}_\Delta(E)=E_\Delta$．ただし $E_\Delta\in V^*$ は $\langle v,E_\Delta\rangle=\langle v|E\rangle_\Delta$ ($v\in V$) によって定まるものである．
- $\mathcal{I}_\Delta$ は H 同変である: $\mathcal{I}_\Delta(hx)=h\cdot\mathcal{I}_\Delta(x)$ ($h\in H,x\in\Omega$)．ここで，$\cdot$ は H の V^* への反傾作用を表す ($\langle v,h\cdot f\rangle=\langle h^{-1}v,f\rangle$)．
- $\mathcal{I}_\Delta$ は双有理写像 $\mathcal{I}_\Delta:W\to W^*$ に拡張される．$\Omega+iV$ 上では正則である．

さて，Δ に付随する **Cayley 変換** $\mathcal{C}_\Delta$ は次のような有理写像 $U\times W\to U^\dagger\times W^*$ ($U^\dagger$ は U 上の複素反線型形式の空間) として定義される:

$$\mathcal{C}_\Delta(u,w):=(\langle 2Q(u,\cdot),\mathcal{I}_\Delta(w+E)\rangle,E_\Delta-2\mathcal{I}_\Delta(w+E))\quad((u,w)\in U\times W).$$

D と $\mathcal{C}_\Delta(D)$ は正則同相であり，$\mathcal{C}_\Delta(D)$ は有界である [15, Theorem 4.20]．

4.3. **一般 Bergman 写像としての Cayley 変換.** D 上の反正則関数 $f(z)$ と $p\in D$ に対し，$\overline{\partial}f(p)\in T^*D_p^{(0,1)}$ を次のようにして $(U\times W)^\dagger$ の元と見る:

$$\langle v,\overline{\partial}f(p)\rangle=\overline{\partial}_vf(p)\qquad(v\in U\times W).$$

命題 4.2. $p:=(0,E)\in D$ とおく．Cayley 変換 $\mathcal{C}_\Delta$ と一般 Bergman 写像 $\sigma_p^{h_\Delta}:D\to T^*D_p^{(0,1)}\simeq(U\times W)^\dagger$ との間には次の関係が成立する．

$$\sigma_p^{h_\Delta}=\tfrac{1}{2}\mathcal{C}_\Delta\circ\theta.$$

ただし，$\theta(u,w):=(u,\overline{w})$ である．

5. 今後の課題について

- 基本的な問題としてまず最初に挙げられるのは, 次のことである.

  問題 5.1. 一般 Bergman 写像が単射となるのは Kähler 多様体がどのようなときか? また, 像が有界となるのはどのようなときか?

- 序文でも述べたように, 一般 Bergman 写像の特別な場合である Xu の Bergman 写像に関しては, 代表領域や極小領域といった概念を用いて, 内在的な意味を明らかにすることができると思われる. そこで,

  問題 5.2. 一般 Bergman 写像の内在的な意味はあるか?

- これも漠然とした問題であるが,

  問題 5.3. 一般 Bergman 写像は Kähler 多様体の情報をどれくらい像に反映するか?

  もう少し問題を具体的にしよう. 補題 3.2 で見たように, Kähler 多様体の間の同型写像は, 一般 Bergman 写像の像ではユニタリ同型写像となる. そこで, この逆が問題となる:

  問題 5.4. 二つの Kähler 多様体の, 一般 Bergman 写像の像がユニタリ同型ならば, もとの Kähler 多様体は同型か?

  一般 Bergman 写像が単射でない, すなわち, 像が潰れてしまう場合もあるだろうから, 問題 5.4 は一般には No であるように思われる. しかし, とりあえず Kähler 多様体として, 等質 Kähler 計量を入れた等質有界領域をとってきた場合には, Yes となるかもしれない. この場合には, 一般 Bergman 写像は今までに研究してきた Cayley 変換の族であるから, 具体的な計算によってアタックできる可能性がある.
- 最後に, 以前から講演者が興味をもっている問題に触れたい. 序文でも述べたように, (ランクが 2 以上の既約な) 対称有界領域の有界領域実現で凸なものは, Harish-Chandra 実現のみである. 一方で, Xu の Bergman 写像による等質有界領域の像は, 領域が対称な場合には Harish-Chandra 実現と一致して凸であるが, 非対称な場合には凸でないことが, 定理 3.4 によって明らかとなった. Bergman 写像は代表領域や極小領域を与えるなど, 性質の良い有界領域実現であるから, これが凸でないとなれば, 他の有界領域実現も凸でないのではないか? という雰囲気がある. そこで, 次の問題に自然に興味が湧く:

  問題 5.5. 非対称な等質有界領域は凸な有界領域実現をもたないのではないか? 言い換えれば, 凸な等質有界領域は対称ではないか?

  もし仮に次のことが証明できたとすると, 定理 3.4 と併せることによって問題 5.5 は肯定的に解決される:

  "等質有界領域が凸ならば, その Bergman 写像の像は凸である."

  問題 5.5 に関しては [4] も参照されたい.

REFERENCES

1. S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, Second, revised ed., Mathematical Surveys, no. V, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970.
2. É. Cartan, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), 116–162, Œuvres complètes I (1984), 1259–1305.
3. J. Dorfmeister, *Simply transitive groups and Kähler structures on homogeneous Siegel domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), 293–305.
4. S. G. Gindikin, *Some remarks and problems on complex homogeneous domains*, Sci. China Ser. A **49** (2006), no. 11, 1655–1661.
5. Harish-Chandra, *Representations of semisimple Lie groups. VI. Integrable and square-integrable representations*, Amer. J. Math. **78** (1956), 564–628.
6. H. Ishi, *On symplectic representataions of normal j-algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains*, Differential Geom. Appl. **24** (2006), 588–612.
7. C. Kai, *A characterization of symmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images*, Tohoku Math. J. **59** (2007), 101–118.
8. A. Korányi and J. A. Wolf, *Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 265–288.
9. Q.-K. Lu, *On the representative domain*, Several complex variables (Hangzhou, 1981) (Boston, MA), Birkhäuser Boston, 1984, pp. 199–211.
10. M. Maschler, *Minimal domains and their bergman kernel function*, Pacific J. Math. **6** (1956), 501–516.
11. N. Mok and I.-H. Tsai, *Rigidity of convex realizations of irreducible bounded symmetric domains of rank ≥ 2*, J. Reine Angew. Math. **431** (1992), 91–122.
12. T. Nomura, *Berezin transforms and Laplace-Beltrami operators on homogeneous Siegel domains*, Diff. Geom. Appl. **15** (2001), 91–106.
13. ———, *A characterization of symmetric Siegel domains through a Cayley transform*, Transform. Groups **6** (2001), 227–260.
14. ———, *On Penney's Cayley tranform of a homogeneous Siegel domain*, J. Lie Theory **11** (2001), 185–206.
15. ———, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, Diff. Geom. Appl. **18** (2003), 55–78.
16. ———, *Geometric norm equality related to the harmonicity of the Poisson kernel for homogeneous Siegel domains*, J. Funct. Anal. **198** (2003), 229–267.
17. R. Penney, *The Harish-Chandra realization for non-symmetric domains in $\mathbb{C}^n$*, 1996, pp. 295–313.
18. Y.-C. Xu, *Theory of complex homogeneous bounded domains*, Mathematics and its Applications, vol. 569, Science Press/ Kluwer Academic Publishers, Beijing/ Dordrecht, 2005.
19. 野村 隆昭, **等質 Siegel 領域の対称性条件をめぐって**, **57** (2005), 350–368.

〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 九州大学大学院数理学研究院
E-mail address: kai@math.kyushu-u.ac.jp