日 本 数 学 会

２ ０ ０ ７年度年会

函 数 論 分 科 会

講 演 アブストラクト

２　０　０　７ 年 ３ 月

於　　埼 玉 大 学

第3日 3月29日 (木)

9:00～12:00

1 西本 勝之 (デカルト出版) * N-Fractional calculus of some algebraic functions ········ 15

2 S.-D.Lin (Chung Yuan Christian Univ.) * Explicit solutions of a certain class of associated Legendre equations by means of fractional calculus ········ 15
Y.-S.Tsai (Chung Yuan Christian Univ.)
P.-Y.Wang (Nan-Ya Institute of Technology)
K.Nishimoto (デカルト出版)

3 P.-Y.Wang (Nan-Ya Institute of Technology) * Fractional calculus approaches to the solutions of the Bessel differential equation of general order ········ 15
S.-D.Lin (Chung Yuan Christian Univ.)
S.T.Tu (Chung Yuan Christian Univ.)
K. Nishimoto (デカルト出版)

4 藤解 和也 (金沢大自然) * A special fundamental solution base and its product ········ 15

5 戸田 暢茂 (愛知工大) * Some notes on holomorphic curves extremal for the defect relation ········ 15

6 川上 裕 (名大多元数理) * 双曲線ガウス写像の完全分岐値数について ········ 15

7 倉田 久靖 (米子高専) * Quasi-symmetricity for the non-linear Green function on a tree ········ 15

8 下村 勝孝 (茨城大理) * $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ の回転不変計量に関する caloric morphism ········ 15
西尾 昌治 (大阪市大理)

9 水田 義弘 (広大総合) * Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes ········ 15
下村 哲 (広大教育)

10 中井 三留 (名工大) * 優調和関数の平均連続性 ········ 15
多田 俊政 (大同工大)

14:15～15:15 特別講演

佐官 謙一 (大阪市大理) * On asymptotically sharp inequalities for quasiconformal harmonic mappings

---

第4日 3月30日 (金)

9:15～11:45

11 大藪 卓 Statement of the results, 他3点 ········ 10

12 尾和 重義 (近畿大理工) * Subordinations and integral means inequalities for certain analytic functions ········ 15
関根 忠行 (日大薬)
山川 陸夫 (芝浦工大工)

13 西脇 純一 (近畿大理工) * Convolutions and Hölder inequality for certain analytic functions ········ 15
尾和 重義 (近畿大理工)

14	布川　護 尾和　重義 西脇　純一 斎藤　斉	 (近畿大理工) (近畿大理工) (群馬高専)	* Sufficient conditions for starlikeness and convexity of analytic functions with real coefficients ······ 15
15	西尾　昌治 鈴木　紀明 山田　雅博	(阪市大理) (名大多元数理) (岐阜大教育)	* Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces ······ 15
16	米田　力生	(小樽商科大)	* Composition operators on the weighted Bloch space and the weighted Dirichlet spaces with closed range ······ 15
17	杉山　登志	(京大理)	* Moduli space of polynomial maps of **C** ······ 15
18	志賀　啓成	(東工大理工)	* Denjoy-Wolff theorem on Riemann surfaces ······ 10
19	松崎　克彦	(岡山大自然)	* Symmetric groups that are not the symmetric conjugates of Fuchsian groups ······ 15
20	F. Martin 梅原　雅顕 山田　光太郎	(Univ. de Granada) (阪大) (九大)	* 共役な曲面と同時に有界となる $\mathbf{R}^3$ の完備な極小曲面 ······ 15

14:15~15:40

21	阿部　誠	(熊本大医)	* Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子 ······ 10
22	塚本　真輝	(京大理)	* 代数トーラス内の全正則曲線について ······ 15
23	奥間　智弘	(山形大地域教育)	* On the Casson invariant conjecture of Neumann-Wahl ······ 15
24	和田　浩吉	(東京農大二高)	* 有理 3 重点の特徴付け ······ 15
25	大沢　健夫 甲斐　千舟	(名大多元数理) (京大理)	* A note on the Bergman metric of bounded homogeneous domains ······ 15
26	大沢　健夫	(名大多元数理)	$\bar{\partial}$ 閉形式の積分で得られる関数族に対するサイクル空間上の補間定理 ······ 15

16:00~17:00　特別講演

安達　謙三　(長崎大教育)　* 強擬凸領域の部分多様体からの正則関数の拡張について

1

N- Fractional Calculus of Some Algebraic Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article N- fractional calculus of the functions

$$(z^{2^n} \pm c^{2^n})^{-1} \quad (z^{2^n} \neq \pm c^{2^n}.\ n = 1, 2, 3)$$

are reported. A theorem obtained here is shown as follows for example.

Theorem. We have

$$\left(\frac{1}{z^4 - c^4}\right)_\nu = \frac{1}{2c^2}\left\{g(z;\nu;c)\frac{1}{z^2 - c^2} - g(z;\nu;ic)\frac{1}{z^2 + c^2}\right\} \quad (z^2 \neq \pm c^2.\ c \neq 0),$$

where

$$g(z;\nu;c) = \frac{1}{2c} e^{-i\pi\nu}\Gamma(1+\nu)\frac{(z+c)^{1+\nu} - (z-c)^{1+\nu}}{(z^2 - c^2)^\nu} \quad (z \neq \pm c.\ c \neq 0)$$

and $\nu \notin Z^-$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some IdentitiesJ. Frac. Calc. Vol.21, May (2002), 1 - 6.

[6] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I , J. Frac.Calc.Vol.21, May (2002), 7 - 12.

[7] K. Nishimoto, Ming- Lai Lin, Chen- E. Yen and Pin- Yu Wang ; N-fractional calculus of the Function $(z-c)^{-1}$ and Beta Functions, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 55 - 66.

[8] Shih Tong Tu, Shy- Der Lin, Pin- Yu Wang and K. Nishimoto ; Some Relationship Associated with the Beta Function and the Function $(z-c)^{-n}$ via N-Fractional Calculus , J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 75 - 80

[9] K. Nishimoto ; On Some Double and Triple Infinite Sums (A Serendipity in N-Fractional Calculus), J. Frac.Calc. Vol.23, May (2003), 67 - 74.
[10] K. Nishimoto, Shih- Tong Tu and Pin- Yu Wang ; N-fractional calculus of the Power Function $(z-c)^{-b}$ and Beta Functions, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 89 - 102.
[11] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).
[12] K. S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, (1993).
[13] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
[14] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.); Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

2

Explicit Solutions of a Certain Class of Associated Legendre Equations by Means of Fractional Calculus

Shy-Der Lin[1], Yen-Shung Tsai[1], Pin-Yu Wang[2] and Katsuyuki Nishimoto[3]

[1] Department of Applied Mathematics, Chung Yuan Christian University, Chung-Li 32023, Taiwan, ROC.
E-Mail: <shyder><yenshung>@cycu.edu.tw

[2] Department of Mechanical Engineering, Nan-Ya Institute of Technology, Chung-Li 32023, Taiwan, ROC.
E-Mail: pinyu@nanya.edu.tw

[3] Institute for Applied Mathematics, Descartes Press Co.
2-13-10 Kaguike, Koriyama, 963-8833, Japan.

Abstract

In recent years, many authors have demonstrated the usefulness of fractional calculus in the derivation of particular solutions of a number of linear ordinary and partial differential equations of the second and higher orders. The main object of the present paper is to show how several recent contributions on this subject, involving a certain class of associated Legendre equations, can be obtained (in a unified manner) by suitably applying some general theorems on particular solutions of a certain family of linear ordinary fractional differintegral equations.

Key Words and Phrases. Fractional calculus, Legendre equations, generalized Leibniz rule, analytic functions, differintegral equations, ordinary and partial differential equations, index law, linearity property, principal value, Bessel's equation, power-series solutions, Legendre polynomials.

3

Fractional Calculus Approaches to The Solutions of The Bessel Differential Equation of General Order

Pin-Yu Wang[1], Shy-Der Lin[2], Shih-Tong Tu[2]
and Katsuyuki Nishimoto[3]

[1] Department of Mechanical Engineering, Nan-Ya Institute of Technology, Chung-Li 32023, Taiwan, ROC.
E-Mail: pinyu@nanya.edu.tw

[2] Department of Applied Mathematics, Chung Yuan Christian University, Chung-Li 32023, Taiwan, ROC.
E-Mail: shyder@cycu.edu.tw; sttu@math.cycu.edu.tw

[3] Institute for Applied Mathematics, Descartes Press Co.
2-13-10 Kaguike, Koriyama, 963-8833, Japan.

Abstract

In a remarkably large number of recent works, one can find the emphasis upon (and demonstrations of) the usefulness of fractional calculus operators in the derivation of (explicit) particular solutions of significantly general families of linear ordinary and partial differential equations of the second and higher orders. The main object of this presentation is to survey some earlier investigations of this simple fractional-calculus approach to the solutions of the classical Bessel differential equation of general order and to show how it would lead naturally to several interesting consequences which include (for example) an alternative derivation of the complete power-series solutions obtainable usually by the Frobenius method. The underlying analysis presented here is based chiefly upon some of the general theorems on (explicit) particular solutions of a certain family of linear ordinary fractional differintegral equations with polynomial coefficients.

Key Words and Phrases. Operators of fractional calculus, Bessel differential equation, Fuchsian (and non-Fuchsian) differential equations, differintetgral equations, (ordinary and partial) linear differential equations, polynomial coefficients, Frobenius method, power-series solutions, Bessel functions,

4

A special fundamental solution base and its product

藤解和也（金沢大学大学院自然科学研究科）

整函数 E と $n \in \mathbb{N}$ を与えて一次独立な n 個の整函数が成す系 $\{w_1, \dots, w_n\}$ で、Wronskian が $W(w_1, \dots, w_n) \equiv 1$ を満たし、かつその積は E に一致するものを構成する。この結果を、整函数を係数とする同次線型微分方程式の解の零点分布の研究に応用する。

問 1 *There are given a positive integer n, a domain Ω and a meromorphic function $E(z)$ on Ω. Find n functions $w_1, \dots, w_n$ (which may not be meromorphic on Ω in general) such that the Wronski determinant and the product satisfy*

$$W(w_1, \dots, w_n) \equiv 1 \qquad \text{and} \qquad E(z) = \prod_{j=1}^{n} w_j(z) \quad (z \in \Omega). \tag{1}$$

本講演では、この問題に対するひとつの答として次の結果について述べる：

定理 1 *Define the functions w_j $(j = 1, \cdots, n)$ by*

$$w_j(z) = E(z)^{1/n} \exp\left(\frac{e^{\frac{2\pi i j}{n}}}{V_n} \int^z E(\zeta)^{-\frac{2}{n(n-1)}} d\zeta \right), \tag{2}$$

where V_n is the Vandermonde determinant of the $e^{2\pi i j/n}$ $(j = 1, \dots, n)$, that is,

$$V_n := \prod_{\mu=1}^{n-1} \prod_{\nu=\mu}^{n-1} \left(e^{2\pi i(\nu+1)/n} - e^{2\pi i \nu/n} \right). \tag{3}$$

In the definition (2), the principal branch is chosen for $E^{1/n}$ and $E^{2/n(n-1)}$ respectively, and the integral is considered along a suitable curve in Ω. Then the system of the w_j satisfies (1).

次の疑問は自然であり、「一般には」正しいと考えるものの現時点で証明できていない：

問 2 *Is such a system of n functions w_j determined uniquely up to constant multiple c_j with $\prod_{j=1}^{n} c_j$?*

特殊な分解を許すなら否定的な回答も可能である。上記 (2) で与えられる w_j は、$E(z) = z^3/2$ に対して多項式の 3 つ組 $\{1, z, z^2/2\}$, $W(1, z, z^2/2) \equiv 1$, ではなく平面上で定義される多価函数 $w_j := z^{1-c^j/(c-1)}/\sqrt[3]{2}$ $(j = 1, 2, 3)$, $c = e^{2\pi i/3}$ を与える。対応する方程式 $w^{(3)} + \frac{1}{z^2} w' - \frac{1+\lambda^3}{z^3} w = 0$ は $z = 0$ に確定特異点を持ち、$1, z, z^2/2$ に対応する方程式 $y^{(3)} = 0$ とは大きく異なる。

実際、証明では [2] のアイデアを元に与えられた E と W から n 階の同次線型微分方程式を構成し、その基本解として求める系を得る。

整函数を係数にもつ線型微分方程式の任意の解は超越整函数であるが、すべての係数が多項式であればその位数は正の有理数となる。また係数に超越函数が含まれていれば、位数無限大の解が存在する ([3])。これらの値分布についても係数の情報を用いて記述することが可能であり、本質的に零点以外の値分布は normal であることも判っている。講演では、解の零点分布について示されている定理と今回得られた結果との関連を述べる。例えば G. Frank [1] による多項式係数の方程式と 0 を除外値にもつ基本解系に関する結果

定理 A *Consider a linear differential equation*

$$L_n(w) := w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \cdots + a_0(z)w = 0\,, \tag{4}$$

where the $a_j(z)$ are polynomials, $a_0(z) \not\equiv 0$. It has a fundamental system with the Picard value 0, when there is a polynomial $q(z)$ such that the transformation

$$w(z) = \exp\{q(z)\}u(z)$$

reduces $L_n(w) = 0$ into a differential equation in $u(z)$ with constant coefficients.

や H. Wittich の定理などについて考察する。 これは上述した「反例」とも関連する。また各係数の位数が有限で、いずれも零点の収束指数が有限であるような基本解系が存在すれば、それら基本解の積もまた有限位数をもつことが知られている。次の意味でその逆も成り立つ：

系 1 *For a 'suitably' given entire function E of finite order, we find an nth order homogenous linear equation of the form*

$$w^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} A_j(z)w^{(j)} = 0\,, \tag{5}$$

and its fundamental system of solutions w_j satisfying:

1. *every coefficient A_j is entire and of finite order;*
2. *the exponent of convergence of w_j is finite.*

参考文献

[1] Frank, G., *Picardsche Ausnahmewerte bei Losungen linearer Differentialgleichungen.* Manuscripta Math. **2** (1970), 181–190.

[2] Tohge, K., Logarithmic derivatives of meromorphic or algebroid solutions of some homogeneous linear differential equations. Analysis (Munich) 19 (1999), no. 3, 273–297.

[3] Wittich, H., *Neuere Untersuchungen uber eindeutige analytische Funktionen.* (German) Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N.F.), Heft 8. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1955.

5 Some notes on holomorphic curves extremal for the defect relation

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation $(f_1, \cdots, f_{n+1}) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, where n is a positive integer.

For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, we put

$$(\boldsymbol{a}, f(z)) = a_1 f_1(z) + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}(z), \quad (\boldsymbol{a}, f) = a_1 f_1 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}.$$

When $(\boldsymbol{a}, f)$ has at least one zero, we say that $\boldsymbol{a}$ has multiplicity m if all the zeros of the function $(\boldsymbol{a}, f(z))$ have multiplicity at least m, while at least one zero has multiplicity m. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has no zero, we set $m = \infty$. We put

$$\mu_n(\boldsymbol{a}, f) = 1 - n/\max(m, n).$$

Then, $0 \le \mu_n(\boldsymbol{a}, f) \le \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \le 1$ and $\mu_n(\boldsymbol{a}, f) = 1$ if and only if $m = \infty$.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position, where $N \ge n$ and

$$X(0) = \{\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in X | a_{n+1} = 0\}, \; M_n^1(X, f) = \{\boldsymbol{a} \in X | \mu_n(\boldsymbol{a}, f) = 1\}.$$

For a non-empty subset P of X, let $V(P)$ be the vector space spanned by $\{\boldsymbol{a} \in P\}$ and $d(P) = \dim V(P)$.

Defect Relation I ([1]($N = n$), [3]($N > n$). See [2]).

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \mu_n(\boldsymbol{a}, f) \le \sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \le 2N - n + 1.$$

(b) We put for $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$

$$\mathcal{T}(r, f) = \int_a^r \frac{T(t, f)}{t} dt; \; \mathcal{N}(r, \boldsymbol{a}, f) = \int_a^r \frac{N(t, \boldsymbol{a}, f)}{t} dt; \; \mathcal{M}(r, \varphi) = \int_a^r \frac{m(t, \varphi)}{t} dt,$$

where φ is a meromorphic function in $|z| < \infty$ and $a > 1$.

Further, we put $\tilde{\Delta}(\boldsymbol{a}, f) = 1 - \liminf_{r \to \infty} \mathcal{N}(r, \boldsymbol{a}, f)/\mathcal{T}(r, f)$. Then,

$$0 \le \delta(\boldsymbol{a}, f) \le \tilde{\Delta}(\boldsymbol{a}, f) \le \Delta(\boldsymbol{a}, f) \le 1.$$

Lemma 1. Let g be a transcendental meromorphic function in $|z| < \infty$. Then,

$$\mathcal{M}(r, g/g^{(k)}) \le O\{\log \mathcal{T}(r, g)\} + O\{(\log r)^2\}.$$

(c) We put for $u(z) = \max_{1 \le j \le n} |f_j(z)|$

$$t(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\log u(re^{i\theta}) - \log u(e^{i\theta})\} d\theta, \quad t_o(r, f) = \int_a^r t(t, f)/t dt$$

and $\gamma = \liminf_{r\to\infty} t(r,f)/T(r,f)$, $\gamma_o = \liminf_{r\to\infty} t_o(r,f)/T(r,f)$. Then, $0 \le \gamma \le \gamma_o \le 1$.

Let $w : X \to (0,1]$ be the Nochka weight function for X and $\rho(f)$ be the order of f.

Defect relation II.

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in X}^{*} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \le 2N - n + 1 - \frac{N}{n}(n-d)(1-\gamma_o),$$

where $d = \sum_{\boldsymbol{a}\in X(0)} w(\boldsymbol{a})$.

Note. γ_o can be replaced by γ when $\rho(f) < \infty$.

Lemma 2. Suppose that $\sum_{\boldsymbol{a}\in X} \mu_n(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1$. Then

$$\tilde{\Delta}(\boldsymbol{a}, f) = 0 \quad (\boldsymbol{a} \in X - M_n^1(X, f)).$$

Note. $\tilde{\Delta}(\boldsymbol{a}, f)$ can be replaced by $\Delta(\boldsymbol{a}, f)$ when $\rho(f) < \infty$.

2. Results. [I]. Suppose that $N > n \ge 2$ and that

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1.$$

If $\gamma_o < 1$, then (a) $\#X(0) = N$; (b) there is a subset $P \subset X$ satisfying

$\#P = N - n + 1$, $d(P) = 1$, $\delta_n(\boldsymbol{a}, f) = 1$ $(\boldsymbol{a} \in P)$ and $X(0) \cap P = \phi$.

[II]. Suppose that $N > n \ge 2$ and that $\gamma_o < 1$, then

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in X} \mu_n(\boldsymbol{a}, f) < 2N - n + 1.$$

Note. In [I] and [II], γ_o can be replaced by γ when $\rho(f) < \infty$.

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[3] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

6

双曲的ガウス写像の完全分岐値数について

川上　裕 (Kawakami Yu)[1]
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

我々はこれまでユークリッド空間内の極小曲面のガウス写像の値分布論的性質について調べてきた．3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面のガウス写像は開リーマン面上の有理型函数とみなすことができるので，除外値数やそれを拡張した完全分岐値数の評価式などの値分布論的性質を示すことができる．我々は論文 [KKM] において代数的極小曲面（有限全曲率完備極小曲面のこと）やシャーク曲面など特殊な無限全曲率の場合を含む "擬代数的極小曲面" という完備極小曲面のクラスを定義して，そのクラスに属する曲面のガウス写像の完全分岐値数の最良の評価式を得ることができた．さらに $\mathbf{R}^4$ 内の擬代数的極小曲面のガウス写像（[Ka2] 参照）や $\mathbf{R}^n$ 内の擬代数的極小曲面の一般化されたガウス写像（[JR] 参照）の完全分岐値数についても最良の評価式を得ることができた．

ところで，上記のような性質は3次元双曲空間 $\mathbf{H}^3$ 内の完備な平均曲率1の曲面（以下，平均曲率1の曲面を "CMC-1" 曲面と呼ぶことにする）の双曲的ガウス写像に対しても成り立つことが期待される．実際，この曲面の双曲的ガウス写像は開リーマン面上の有理型函数とみなすことができ，除外値数の評価について極小曲面のガウス写像のときと同様の結果がユ先生（[Yu]）やローゼンバーグ先生たち（[CHR]）によって知られている．そこで，我々はこの場合の完全分岐値数の評価について調べ，いくつか結果を得ることができた．まず完備なCMC-1曲面の双曲的ガウス写像の完全分岐値数について，ユ先生の論文 [Yu] を改良することで次の結果を示すことができた．

主結果 1 ([Ka3])**.** $x\colon M \to \boldsymbol{H}^3$ を3次元双曲空間内の非平坦（ガウス曲率が恒等的に0でない）な完備 *CMC*-1曲面とし，$G\colon M \to \hat{\boldsymbol{C}}$ をその双曲的ガウス写像とする．D_G をその写像の除外値数，ν_G を完全分岐値数とすると次の式が成り立つ．

$$D_G \leq \nu_G \leq 4\,. \tag{1}$$

実際，$\nu_G = 4$ の例が存在するので，上の式の評価は最良である．

また完備なCMC-1曲面の双曲的ガウス写像 G の次数が有限の場合（この曲面のことを**代数的 CMC-1 曲面**と呼ぶことにする），定義域のリーマン面はコンパクトリーマン面（その種数を γ とする）から有限個（k 個とする）の点を除いた穴あきリーマン面 $\overline{M}_\gamma\backslash\{p_1,\ldots,p_k\}$ と等角同値になり，G は穴で高々極しかとらないことがわかるが，このときの完全分岐値数に対して次の式が成り立つ．

[1] *E-mail Address*: m02008w@math.nagoya-u.ac.jp

主結果 2 ([Ka3]). $x\colon \overline{M}_\gamma \backslash \{p_1, \dots, p_k\} \to \boldsymbol{H}^3$ を3次元双曲空間内の非平坦な代数的 CMC-1 曲面とし，G をその双曲的ガウス写像とする．D_G をその写像の除外値数，ν_G を完全分岐値数とすると次の式が成り立つ．

$$D_G \leq \nu_G \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad R = \frac{d}{\gamma - 1 + k/2} > 1\,. \tag{2}$$

特に $D_G \leq \nu_G < 4$ が成り立つので，この場合の双曲的ガウス写像の除外値数は高々3である

本講演ではここで述べたことの詳細や代数的極小曲面のガウス写像の性質との違い（$\nu_G = 2.5$ の例が発見できない！）について報告する予定である．

参考文献

[CHR] P. Collin, L. Hauswirth, and H. Rosenberg, *The Gaussian image of mean curvature one surfaces in* $\boldsymbol{H}^3$ *of finite total curvature*, Fukaya Kenji (ed.) et al., Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry, Mathematical Society of Japan. Adv. Stud. Pure Math. **34** (2002) 9–14.

[Fu] H. Fujimoto, *Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in* $\boldsymbol{R}^m$, Vieweg (1993).

[JR] L. Jin and M. Ru, *Algebraic curves and the Gauss map of algebraic minimal surfaces*, preprint, 2006.

[Ka1] Y. Kawakami, *On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces*, Proc. Japan Acad. **82**, Ser A (2006), 1–3.

[KKM] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces*, Submitted, math.DG/0511543.

[Ka2] Y. Kawakami, *The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces in* $\boldsymbol{R}^4$, Submitted, math.DG/0603320.

[Ka3] Y. Kawakami, *Ramification estimates of the hyperbolic Gauss map of mean curvature* 1 *surfaces in hyperbolic* 3*-space*, in preparation.

[RUY] W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, *Mean curvature* 1 *surfaces in hyperbolic* 3*-space with low total curvature I*, Hiroshima Math. J. **34** (2004), 21–56.

[Yu] Z. Yu, *Value distribution of hyperbolic Gauss maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2997–3001.

7

Quasi-symmetricity for the non-linear Green function on a tree

倉田久靖（米子高専）

Let $1 < p < \infty$. We consider p-harmonic functions on a tree. Let $\mathcal{T} = (V, E, r)$ be a locally finite connected tree with a resistance r, where $V = V(\mathcal{T})$ is the vertex set and $E = E(\mathcal{T})$ is the edge set. An edge $(x, y) \in E$ is an ordered pair of vertices such that $(x, y) \in E$ if and only if $(y, x) \in E$. If $(x, y) \in E$, then we say that x is adjacent to y and write $x \sim y$. A resistance r is a positive function on E such that $r(y, x) = r(x, y)$. We define the discrete derivative ∇u and the discrete p-Laplacian $\Delta_p u$ for a function u on V by

$$\nabla u(x, y) = r(x, y)^{-1}(u(y) - u(x)),$$
$$\Delta_p u(x) = \sum_{\substack{y \in V \\ y \sim x}} |\nabla u(x, y)|^{p-2} \nabla u(x, y).$$

Let $D \subset V$. If $\Delta_p u = 0$ in D, then we say that u is p-harmonic in D. For these accounts see [1, 2, 3].

Let $x, y \in V$. A path joining x to y is a sequence $\{x = x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l = y\}$ of distinct vertices such that $x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_{l-1} \sim x_l$. Since $\mathcal{T}$ is a tree, it is uniquely determined and denoted by $\overline{xy}$. For $x \in V$ let $\deg(x)$ be the degree of x, i.e., $\deg(x) = \#\{y \in V; x \sim y\}$. Let $A \subset E$ and $x \in V$. We remove A from E, then we obtain some components. We denote by $\mathcal{S}(\mathcal{T}, A, x)$ the component which contains x.

We define the Dirichlet sum $D_p[u]$ of order p by

$$D_p[u] = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} r(x, y) |\nabla u(x, y)|^p.$$

Denote by $\mathbf{D}^{(p)}(\mathcal{T})$ the set of functions on V with finite Dirichlet sum of order p. Then $\mathbf{D}^{(p)}(\mathcal{T})$ is a Banach space with the norm $\|u\|_p = (D_p[u] + |u(x_0)|)^{1/p}$, where x_0 is a fixed vertex. Let $L_0(\mathcal{T})$ be the set of functions on V with finite support. Also let $\mathbf{D}_0^{(p)}(\mathcal{T})$ be the closure of $L_0(\mathcal{T})$ in $\mathbf{D}^{(p)}(\mathcal{T})$ with respect to the norm $\|\cdot\|_p$. A tree $\mathcal{T}$ is said to be of hyperbolic type of order p if $1 \notin \mathbf{D}_0^{(p)}(\mathcal{T})$; a tree $\mathcal{T}$ is said to be of parabolic type of order p otherwise. Consider the discrete boundary value problem

$$\Delta_p u = -\delta_a, \qquad u \in \mathbf{D}_0^{(p)}(\mathcal{T}), \tag{1}$$

where δ_a is the characteristic function of $\{a\}$, i.e., $\delta_a(x) = 1$ if $x = a$ and $\delta_a(x) = 0$ otherwise. The solution u to (1) uniquely exists if and only if the tree is of hyperbolic type of order p. We call the solution u the p-Green function with pole at a and denote it by g_a. For details see Yamasaki [2, 3].

Let

$$H(x,y) = \frac{g_x(y)}{g_y(x)} \qquad \text{for } x, y \in V,$$
$$M(\mathcal{T}) = \sup_{x,y \in V} H(x,y)$$

It is well known that $M(\mathcal{T}) = 1$ for any tree $\mathcal{T}$ if $p = 2$. However, if $p \neq 2$, then it is not known that $M(\mathcal{T}) = 1$, even whether $M(\mathcal{T})$ is finite or not. We consider the problem whether $M(\mathcal{T})$ is finite or not for $p \neq 2$. A tree $\mathcal{T}$ is said to have a symmetric p-Green function if $M(\mathcal{T}) = 1$; a tree $\mathcal{T}$ is said to have a quasi-symmetric p-Green function if $M(\mathcal{T})$ is finite.

Theorem 1. *Let $\mathcal{T} = (V, E, r)$ be a tree of hyperbolic type of order p. Let $(a_1, a_2) \in E$. Let $\mathcal{T}_1 = \mathcal{S}(\mathcal{T}, \{(a_1, a_2)\}, a_1)$ and $\mathcal{T}_2 = \mathcal{S}(\mathcal{T}, \{(a_1, a_2)\}, a_2)$. Then $\mathcal{T}$ has a quasi-symmetric p-Green function if and only if each of $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ has a quasi-symmetric p-Green function.*

Theorem 2. *Let $p \neq 2$. Let (V, E, r) be a tree.*

(1) *Suppose that there are only finitely many $x \in V$ such that* $\deg(x) \geq 3$. *Then (V, E, r) has a quasi-symmetric p-Green function whenever (V, E, r) is of hyperbolic type of order p.*

(2) *Suppose that there are infinitely many $x \in V$ such that* $\deg(x) \geq 3$. *Then we find two resistances r_1 and r_2 with the following conditions.*

   (a) *The tree (V, E, r_1) is of hyperbolic type of order p and has a quasi-symmetric p-Green function.*

   (b) *The tree (V, E, r_2) is of hyperbolic type of order p and, however, does not have a quasi-symmetric p-Green function.*

参考文献

[1] Paolo M. Soardi, *Potential theory on infinite networks*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1590, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[2] Maretsugu Yamasaki, *Parabolic and hyperbolic infinite networks*, Hiroshima Math. J. **7** (1977), no. 1, 135–146.

[3] ______, *Nonlinear Poisson equations on an infinite network*, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **23** (1989), 1–9.

8

$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ の回転不変計量に関する caloric morphism

下村勝孝（茨城大学理学部）
西尾昌治（大阪市立大学理学研究科）

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(n \geqq 3)$ に，回転不変なリーマン計量

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

を入れてリーマン多様体とする．計量 g に関する gradient を ∇_g で，Laplacian を Δ_g でそれぞれ表す．

D を $\mathbb{R} \times M$ 内の領域とし，$f(t,x) = (f_0(t,x), f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x))$ を D から $\mathbb{R} \times M$ への C^∞ 級写像, φ を D 上の正値 C^∞ 級関数とする．任意の領域 $E \subset f(D)$ 上で熱方程式

$$H_g u := \frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta_g u = 0$$

を満たす任意の関数 $u(\tau, y)$ に対して，$v(t,x) = \varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$ が $f^{-1}(E) \subset D$ 上で熱方程式

$$H_g v = 0$$

を満たす時，(f, φ) を **caloric morphism** と呼ぶ．

計量が回転不変ならば, x に関する回転は caloric morphism であるから, t に関する平行移動と合わせた

$$f(t,x) = (t + d, Rx), \quad \varphi(t,x) = 1, \quad (d \in \mathbb{R}, R \text{ は直交行列})$$

が, 自明な caloric morphism として, 常に存在する．

(f,φ) が caloric morphism であることと，次の (1) - (4) は同値である ([1]).

$$(1) \qquad H_g\varphi = 0,$$

$$(2) \qquad H_g f_i = 2g(\nabla_g \log\varphi, \nabla_g f_i) - [(\Delta_g y_i)\circ f]\frac{df_0}{dt}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$(3) \qquad \nabla_g f_0 = 0,$$

$$(4) \qquad g(\nabla_g f_i, \nabla_g f_j) = (g^{ij}\circ f)\frac{df_0}{dt}, \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

この講演では, 3 次元以上の場合について, 回転不変な計量に関する caloric morphism (f,φ) および, その時の計量 g を具体的に決定する問題に関する結果を報告する.

特に

(1) どのような計量について自明でない caloric morphism が存在するか,

(2) その場合, caloric morphism を構成する基本的変換は何か,

を中心として報告する.

References

[1] M. Nishio and K. Shimomura, *A characterization of caloric morphisms between manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 111 – 122.

[2] K. Shimomura, *Caloric morphisms with respect to radial metrics on* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, Math. J. Ibaraki Univ. **35** (2003), 35 – 53.

[3] M. Nishio and K. Shimomura, *Caloric morphisms with respect to rotation invariant metric on Euclidean spaces*, preprint.

9

Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes

水田 義弘　広島大学・総合科学部
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

本講演では，Adams-Hurri-Syrjänen [1]，Edmunds-Gurka-Opic [2]，Trudinger [6], Mizuta-Shimomura [4] の研究に関連して，リースポテンシャル $R_\alpha f$ の Vanishing exponential integrability について報告する．

α $(0<\alpha<n)$ 次のリースポテンシャル

$$R_\alpha f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}f(y)dy$$

を考える．ここに，f は非負可測関数で $R_\alpha f\not\equiv\infty$ と仮定する．C_{α,Φ_p} はリース容量とする．

条件

$$\int_{\mathbf{R}^n}\Phi_p(f(y))\,dy<\infty$$

を考える:

$(\varphi1)$ $\Phi_p(r)=r^p\varphi(r)$, $1<p<\infty$; φ は開区間 $(0,\infty)$ 上正値かつ単調．$\Phi_p(0)=0$.

$(\varphi2)$ $c^{-1}\varphi(r)\leqq\varphi(r^2)\leqq c\varphi(r)\quad(r>0)$

$(\varphi3)$

$$\int_1^\infty\varphi(t)^{-1/(p-1)}t^{-1}dt=\infty.$$

ここでは，簡単のため，以下，$\varphi(r)=[\log(e+f(y))]^a[\log(e+\log(e+f(y)))]^b$, つまり，

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(y)^p[\log(e+f(y))]^a[\log(e+\log(e+f(y)))]^b\,dy<\infty$$

を仮定する．

定理 1．$\alpha p=n$, $a<p-1$, $\beta=p/(p-1-a)$, $\gamma=b/(p-1-a)$ とする．このとき，C_{α,Φ_p}-容量が零の集合 E が存在して，$^\forall x_0\in\mathbf{R}^n\setminus E$, $^\forall A>0$ に対して，

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\Big\{\exp(A|R_\alpha f(x)-R_\alpha f(x_0)|^\beta \times(\log(e+|R_\alpha f(x)-R_\alpha f(x_0)|))^\gamma)-1\Big\}\,dx=0 \tag{1}$$

$a=p-1$ のとき，$^\forall\beta>0$ ($^\forall\gamma>0$) に対して (1) は成り立つ．$a>p-1$ のとき，$R_\alpha f$ は $\mathbf{R}^n$ 上連続である (Mizuta [3])．文献 [1] で，Adams-Hurri-Syrjänen は，$0\leq a<p-1$, $b=0$ のときについて論じている．

定理2. $\alpha p = n$, $a = p-1$, $b < p-1$, $\beta = p/(p-1-b)$ とする．このとき，C_{α,Φ_p}-容量が零の集合 E が存在して，$^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$, $^\forall A > 0$, $^\forall B > 0$ に対して，

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} \left\{\exp(A\exp(B|R_\alpha f(x) - R_\alpha f(x_0)|^\beta)) - e^A\right\}\, dx = 0 \qquad (2)$$

$b > p-1$ のとき，$R_\alpha f$ は $\mathbf{R}^n$ 上連続であり（Mizuta [3]），$^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$, $^\forall \beta > 0$ に対して (2) は成り立つ．

本報告の結果は [5] による．

参考文献

[1] D. R. Adams and R. Hurri-Syrjänen, Vanishing exponential integrability for functions whose gradients belong to $L^n(\log(e+L))^\alpha$, J. Funct. Anal. **197** (2003), 162-178.

[2] D. E. Edmunds, P. Gurka and B. Opic, Double exponential integrability, Bessel potentials and embedding theorems, Studia Math. **115** (1995), 151-181.

[3] Y. Mizuta, Continuity properties of Riesz potentials and boundary limits of Beppo Levi functions, Math. Scand. **63** (1988), 238-260.

[4] Y. Mizuta and T. Shimomura, Exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Hiroshima Math. J. **28** (1998), 355-371.

[5] Y. Mizuta and T. Shimomura, Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, to appear in Illinois J. Math.

[6] N. Trudinger, On imbeddings into Orlicz spaces and some applications, J. Math. Mech. **17** (1967), 473-483.

10

優調和関数の平均連続性

中井 三留（名工大・名誉教授）

多田 俊政（大同工大）

M を C^∞ 級の d 次元 $(d \geqq 2)$ 多様体で, コムパクトであってもなくてもかまわないが, 可符号かつ連結とする. M に C^∞ 級の弧要素 ds を

$$ds^2 = \sum_{1\leqq i,j\leqq d} g_{ij}(x)dx_i dx_j \quad (x = (x_1, \cdots, x_d))$$

で与えて M は Riemann 多様体であるとし, $g = \det(g_{ij})$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ とおいて M 上の Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{1\leqq i,j\leqq d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\mu\right)u = 0 \tag{1}$$

を考える (cf. e.g. [5]), 但しそのポテンシャル μ は M 上の Kato 測度, 即ち M 上の Radon 測度で, M の任意の局所球 (V, x) に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sup_{|x|<\varepsilon}\int_{|y|<\varepsilon} N(x-y)d|\mu|(y)\right) = 0$$

をみたすものとする, 但し $N(t) = \log(1/|t|)$ $(d = 2)$, $1/|t|^{d-2}$ $(d \geqq 3)$ で, $|\mu|$ は μ の全変分測度とする. (1) の開集合 $U \subset M$ 上の連続超関数解 (それを U 上の μ 調和関数と呼ぶ) の全体を $H_\mu(U)$ と記すとき, $H_\mu : U \mapsto H_\mu(U)$ を M 上の調和層として (M, H_μ) は Brelot 調和空間となる (cf. [1]). よって各開集合 U 上の境界値 f の Dirichlet 解 $(H_\mu)_f^U$ を考えることが出来る. そのとき M 上の下半連続関数 u で, M 上常に $u > -\infty$ かつ M 上 $u \not\equiv +\infty$ となり, さらに harmonically concave (即ち任意の十分小さな局所球 V 達に対して V 上 $u \geqq (H_\mu)_u^V$) となるとき, u は M 上 μ **優調和**であると言って, その全体を $S_\mu(M)$ と記す. $g_{ij} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta) かつ $\mu \equiv 0$ の場合には周知の基本的かつ初等的知識 (cf. e.g. [2]) に他ならない次の結果を報告する

定理. 任意の $u \in S_\mu(M)$ は M 上平均連続である, 即ち, すべての点 $a \in M$ に於いて

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{\lambda(B(a,r))}\int_{B(a,r)} u(x)d\lambda(x) = u(a) \tag{2}$$

となる, 但し $B(a,r)$ は a 中心半径 r の測地球, $d\lambda(x)=\sqrt{g(x)}dx_1\cdots dx_d$ $(x=(x_1,\cdots,x_d))$ は M 上の体積要素とする.

証明は2段階の作業に分ける. 先ず $S_0(M)$ (即ち $\mu\equiv 0$ に対する 0 優調和関数族) に対して微分方程式論的議論に基づき (cf. [3], [4]) (2) を示す. 次に調和空間の摂動論的手法により $S_0(M)$ の結果を $S_\mu(M)$ へ移行させることにより $S_\mu(M)$ に対して (2) を示す. 上の定理の測地球 $B(a,r)$ は, a における測地座標による Euclid 球でおきかえることが出来る.

参照文献

[1] A. Boukricha, W. Hansen, and H. Hueber: *Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces*, Expo. Math., **5**(1987), 97–135.

[2] L. L. Helms: *Introduction to Potential Theory*, Weily-Interscience, 1969.

[3] H. Hueber and M. Sieveking: *Uniform bounds for quotients of Green functions on $C^{1,1}$-domains*, Ann. Inst. Fourier, **32**, 1(1982), 105–117.

[4] H. Hueber and M. Sieveking: *On the quatients of Green functions (preliminary version)*, Preprint, Bielefeld, September, 1980.

[5] L. Sario, M. Nakai, C. Wang, and L. O. Chung: *Classification Theory of Riemannian Manifolds*, Lecture Notes in Math. **605**, Springer, 1977.

特別講演

On asymptotically sharp inequalities for quasiconformal harmonic mappings

佐官 謙一 (大阪市立大学大学院理学研究科)

Introduction

Let $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ and let $\mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ stand for the class of all sense-preserving homeomorphic self-mappings of $\mathbb{T}$. Given any $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ we consider the Poisson extension $\mathrm{P}[f]$ of f to $\mathbb{D}$, where

$$\mathrm{P}[f](z) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)\,\mathrm{Re}\,\frac{u+z}{u-z}|\,\mathrm{d}\,u|\ , \quad z \in \mathbb{D}\ .$$

According to the famous Radó-Kneser-Choquet theorem (cf. e.g. [3], [5] and references quoted there), $\mathrm{P}[f]$ is a harmonic and homeomorphic self-mapping of $\mathbb{D}$.

First in section 1 we assume that $\mathrm{P}[f](0) = 0$ and that f admits a K-quasiconformal extension $\tilde{F}$ to $\mathbb{D}$ satisfying $\tilde{F}(0) = 0$. We then obtain a variant of Schwarz's lemma for $\mathrm{P}[f]$, which gives an upper bound of $|\,\mathrm{P}[f](z)|$ and which is asymptotically sharp as K tends to 1.

Next in section 2 assuming that $\mathrm{P}[f]$ is a K-quasiconformal mapping and that $\mathrm{P}[f](0) = 0$, we obtain a variant of Heinz's inequality. It gives lower bounds of $|\partial_x F|^2 + |\partial_y F|^2$ and $|\partial F|$ where $F = \mathrm{P}[f]$, and they are asymptotically sharp as K tends to 1.

Finally on quasiconformality of $\mathrm{P}[f]$, it is known that $\mathrm{P}[f]$ is not quasiconformal in general even if f admits a quasiconformal extension to $\mathbb{D}$ (see [10],[8] and [18]). In [11] and [12] we gave intrinsic characterizations of quasiconformality of $\mathrm{P}[f]$ in terms of the Cauchy and Cauchy-Stieltjes singular integrals involving f. Subsequently and decisively in [17] M. Pavlović proved that if $F = \mathrm{P}[f]$ is quasiconformal, then F is bi-Lipschitz with respect to the Euclidean metric. As an improvement of this, using the results given in sections 3 and 4, we find in section 5 explicit estimations of bi-Lipschitz constants for such mappings F that are expressed by means of the maximal dilatation K of F and $|F^{-1}(0)|$. Under the additional assumption $F(0) = 0$ the estimations are asymptotically sharp as K tends to 1, so F behaves almost like a rotation for sufficiently small K.

This note is a summary of [13], [14], [15] and [16] which are joint works with D. Partyka (Catholic Univ. of Lublin, Poland).

1 A variant of Schwarz's lemma

Schwarz's lemma for harmonic mappings is stated as follows.

Theorem A. ([6],[2]) *Suppose that u is a complex-valued harmonic function on $\mathbb{D}$, $|u(z)| < 1$ on $\mathbb{D}$, and $u(0) = 0$. Then for every $z \in \mathbb{D}$,*

$$|u(z)| \leq \frac{4}{\pi} \arctan |z|.$$

We now recall that the Hersch-Pfluger distortion function Φ_K is defined for any $K > 0$ by the equalities

$$\Phi_K(r) := \mu^{-1}(\mu(r)/K)\ , \quad 0 < r < 1\ ; \quad \Phi_K(0) := 0\, ,\ \Phi_K(1) := 1\ ,$$

where $\mu(r)$ stands for the module of the Grötzsch extremal domain $\mathbb{D} \setminus [0, r]$; cf. [7] and [9, p.53 and p.63].

By means of the distortion function $\Phi_{1/K}$ we obtain a variant of Schwarz's lemma for harmonic mappings.

Theorem 1. ([15, Th. 3.3 and Remark 3.4]) *Let $K \geq 1$ and let $F = \mathrm{P}[f]$ for some $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ which admits a K-quasiconformal extension $\tilde{F}$ to $\mathbb{D}$ satisfying $\tilde{F}(0) = 0$. Assume that $F(0) = 0$. Then for every $z \in \mathbb{D}$,*

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \Lambda_K(|z|) \\ &:= \frac{4}{\pi} \arctan |z| - \frac{8|z|(1-|z|^2)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos t)\Phi_{1/K}(\sin(t/2))^2}{(1+|z|^2)^2 - 4|z|^2(\cos t)^2} \, \mathrm{d}t \\ &= |z| + \frac{8|z|(1-|z|^2)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos t)\left[(\sin(t/2))^2 - \Phi_{1/K}(\sin(t/2))^2\right]}{(1+|z|^2)^2 - 4|z|^2(\cos t)^2} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Moreover, $\Lambda_1(|z|) = |z|$ and the following equalities hold:

$$\lim_{K \to 1^+} \limsup_{r \to 0^+} \frac{\Lambda_K(r)}{r} = 1 \quad , \quad \lim_{K \to 1^+} \liminf_{r \to 1^-} \frac{1 - \Lambda_K(r)}{1 - r} = 1\ .$$

2 A variant of Heinz's inequality

Heinz showed in [6] the following (see [4], too).

Theorem B. *Assume that F is a one-to-one harmonic mapping of $\mathbb{D}$ onto itself normalized by $F(0) = 0$. Then for every $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{D}$,*

$$|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 \geq \frac{2}{\pi^2} \, .$$

For $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ the limit

$$f'(z) := \lim_{u \to z} \frac{f(u) - f(z)}{u - z}$$

exists for a. e. $z \in \mathbb{T}$, and set

$$d_f := \operatorname*{ess\,inf}_{z \in \mathbb{T}} |f'(z)| \, . \tag{1}$$

For $K \geq 1$ set

$$L_K^* := \frac{2}{\pi} \int_0^{\Phi_{1/K}(1/\sqrt{2})^2} \frac{\mathrm{d}\, t}{\Phi_K\left(\sqrt{t}\right) \Phi_{1/K}\left(\sqrt{1-t}\right)} \, . \tag{2}$$

Then L_K^* is a strictly decreasing function of $K \geq 1$ such that

$$\lim_{K \to 1} L_K^* = L_1^* = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{K \to +\infty} L_K^* = 0 \quad \text{(cf. [14, Lemma1.4])}.$$

By means of L_K^* we obtain a lower bound of d_f and a variant of Heinz's inequality for quasiconformal harmonic mappings.

Theorem 2. ([14, Th. 2.1]) *Given $K \geq 1$ let F be a K-quasiconformal and harmonic self-mapping of $\mathbb{D}$ satisfying $F(0) = 0$. If f is the boundary valued function of F, then*

$$d_f \geq \frac{1}{K} \max\left\{ \frac{2}{\pi}, L_K^* \right\} \, .$$

Theorem 3. ([14, Th. 2.2]) *Given $K \geq 1$ let F be a K-quasiconformal and harmonic self-mapping of $\mathbb{D}$ satisfying $F(0) = 0$. Then the inequalities*

$$|\partial F(z)| \geq \frac{K+1}{2K} \max\left\{\frac{2}{\pi}, L_K^*\right\} \tag{3}$$

and

$$|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{K}\right)^2 \max\left\{\frac{4}{\pi^2}, {L_K^*}^2\right\} \tag{4}$$

hold for every $z \in \mathbb{D}$. Moreover, the right hand sides in (3) and (4) are decreasing and continuous functions of $K \geq 1$ with values in $(1/\pi, 1]$ and $(2/\pi^2, 2]$, respectively.

3 On boundary properties for quasiconformal self-mappings of the unit disk

We recall that the Cauchy singular integral $\mathrm{C}_{\mathbb{T}}[f]$ of a function $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ Lebesgue integrable on $\mathbb{T}$ is defined for every $z \in \mathbb{T}$ as follows:

$$\mathrm{C}_{\mathbb{T}}[f](z) := \mathrm{PV}\,\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}\,u := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}(z,\varepsilon)} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}\,u \tag{5}$$

whenever the limit exists and $\mathrm{C}_{\mathbb{T}}[f](z) := 0$ otherwise, where $\mathbb{T}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \varepsilon) := \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{T} : |t - x| < \varepsilon\}$. Here and subsequently, integration along any arc $I \subset \mathbb{T}$ is understood under counterclockwise orientation.

Lemma 1. ([16, Lemma 1.1]) *Suppose that $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ is absolutely continuous on $\mathbb{T}$ and that f is differentiable at a point $z \in \mathbb{T}$. Then both the following limits exist and*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Re}\left[\frac{z\overline{f(z)}}{\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}(z,\varepsilon)} \frac{f'(u)}{u-z}\,\mathrm{d}\,u\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}(z,\varepsilon)} \frac{|f(u)-f(z)|^2}{|u-z|^2}\,|\,\mathrm{d}\,u|\;.$$

Moreover, both the following limits simultaneously exist or not and in the first case

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{Im}\left[\frac{z\overline{f(z)}}{\pi\,\mathrm{i}}\int_{\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}(z,\varepsilon)}\frac{f'(u)}{u-z}\,\mathrm{d}\,u\right] = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}(z,\varepsilon)}\frac{\operatorname{Im}[f(u)\overline{f(z)}]}{|u-z|^2}|\,\mathrm{d}\,u|\ .$$

Given a continuous function $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ and $z\in\mathbb{T}$ set

$$\mathrm{V}[f](z) := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}(z,\varepsilon)}\frac{|f(u)-f(z)|^2}{|u-z|^2}|\,\mathrm{d}\,u|\ , \tag{6}$$

$$\mathrm{V}^*[f](z) := -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}(z,\varepsilon)}\frac{\operatorname{Im}[f(u)\overline{f(z)}]}{|u-z|^2}|\,\mathrm{d}\,u|\ , \tag{7}$$

provided the limits exist as well as $\mathrm{V}[f](z) := +\infty$ and $\mathrm{V}^*[f](z) := 0$ otherwise.

Theorem 4. ([16, Th. 1.2]) *If $f\in\mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ is absolutely continuous on $\mathbb{T}$, then for a.e. $z\in\mathbb{T}$, the limit in* (5) *with f replaced by f' and the limits in* (6) *and* (7) *exist, and*

$$2\,\mathrm{C}_{\mathbb{T}}[f'](z) = \overline{z}f(z)\big(\mathrm{V}[f](z)+\mathrm{i}\,\mathrm{V}^*[f](z)\big)\ .$$

Lemma 2. ([16, Lemma 1.3]) *For every $K\geq 1$ the following inequalities hold:*

$$1\leq M_K := \frac{4}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{\Phi_K(r)}{r}\right)^{1+1/K}\frac{\mathrm{d}\,r}{\sqrt{1-r^2}}\leq K^2 2^{5(1-1/K^2)/2}$$

and

$$1\geq L_K := \frac{4}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{\Phi_{1/K}(r)}{r}\right)^{1+1/K}\frac{\mathrm{d}\,r}{\sqrt{1-r^2}}\geq \frac{K2^{5(1-K^2)/(2K)}}{K^2+K-1}\ .$$

In particular, $L_K\to 1$ and $M_K\to 1$ as $K\to 1^+$.

Given a continuous function $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ and $z \in \mathbb{T}$ set

$$f^+(z) := \sup_{u\in\mathbb{T}\setminus\{z\}} \left|\frac{f(u)-f(z)}{u-z}\right| \in [0,+\infty] \, ,$$
$$f^-(z) := \inf_{u\in\mathbb{T}\setminus\{z\}} \left|\frac{f(u)-f(z)}{u-z}\right| \in [0,+\infty) \, .$$

For $K \geq 1$ write $\mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$ for the class of all K-quasiconformal self-mappings of $\mathbb{D}$.

Theorem 5. ([16, Th. 1.4]) *Given $K \geq 1$ and $F \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$ let f be the boundary valued function of F. If $F(0) = 0$, then*

$$L_K(f^-(z))^{1-1/K} \leq \mathrm{V}[f](z) \leq M_K(f^+(z))^{1-1/K} \, , \quad z \in \mathbb{T} \, .$$

Lemma 3. ([16, Lemma 1.5]) *Suppose that $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ is absolutely continuous on $\mathbb{T}$. Then*

$$\sup_{z\in\mathbb{T}} f^+(z) = e_f := \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |f'(z)|$$

as well as

$$\inf_{z\in\mathbb{T}} f^-(z) = d_f$$

where d_f is defined by (1).

Corollary 1. ([16, Cor. 1.6]) *Given $K \geq 1$ and $F \in \mathrm{QC}(\mathbb{D}; K)$ let f be the boundary valued function of F. If $F(0) = 0$ and f is absolutely continuous on $\mathbb{T}$, then*

$$L_K d_f^{1-1/K} \leq \mathrm{V}[f](z) = 2\,\mathrm{Re}\left[z\overline{f(z)}\,\mathrm{C}_{\mathbb{T}}[f'](z)\right] \leq M_K e_f^{1-1/K}$$

for a.e. $z \in \mathbb{T}$.

4 Derivatives of quasiconformal harmonic mappings and Hardy spaces

For $K \geq 1$ and a domain Ω in $\mathbb{C}$ we denote by $\mathrm{QCH}(\mathbb{D}, \Omega; K)$ the class of all K-quasiconformal harmonic mappings of $\mathbb{D}$ onto Ω.

Lemma 4. ([16, Lemma 2.1]) *Given $K \geq 1$ and a domain Ω in $\mathbb{C}$ let $F \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}, \Omega; K)$. If Ω is bounded by a rectifiable Jordan curve Γ, then*

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}_r} |\partial F(z)| |\mathrm{d}\, z| \leq \frac{K+1}{2} |\Gamma|_1$$

and

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}_r} |\bar{\partial} F(z)| |\mathrm{d}\, z| \leq \frac{K-1}{2} |\Gamma|_1$$

where $\mathbb{T}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ and $|\Gamma|_1$ is the length of Γ. In particular, ∂F and $\overline{\bar{\partial} F}$ belong to the Hardy space $\mathrm{H}^1(\mathbb{D})$.

Corollary 2. ([16, Cor. 2.2]) *Given $K \geq 1$ and a domain Ω in $\mathbb{C}$ let $F \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}, \Omega; K)$. If Ω is bounded by a rectifiable Jordan curve Γ, then the boundary valued function f of F is absolutely continuous.*

Modifying the proof of Lemma 4 we may easily derive the following lemma.

Lemma 5. ([16, Lemma 2.3]) *Given $K \geq 1$ and a Jordan domain Ω in $\mathbb{C}$ let $F \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}, \Omega; K)$. If the boundary valued function f of F satisfies the inequality*

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v| \ , \quad u, v \in \mathbb{T} \ ,$$

for some positive constant L, then

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |\partial F(z)| \leq \frac{K+1}{2} L$$

and

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\bar{\partial} F(z)| \le \frac{K-1}{2} L \ .$$

In particular, ∂F *and* $\overline{\bar{\partial} F}$ *belong to the Hardy space* $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$.

5 The bi-Lipschitz property for quasiconformal harmonic self-mappings of the unit disk

For $K \ge 1$ we denote by $\mathrm{QCH}(\mathbb{D}; K)$ the class of all K-quasiconformal harmonic self-mappings of $\mathbb{D}$.

Theorem 6. ([16, Th. 3.1]) *Given* $K \ge 1$ *and* $F \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}; K)$ *let* f *be the boundary valued function of* F. *Then for a.e.* $z \in \mathbb{T}$,

$$\left| \mathrm{V}[f](z) + \mathrm{i}\, \mathrm{V}^*[f](z) - \frac{1}{2}(K + \frac{1}{K})|f'(z)| \right| \le \frac{1}{2}(K - \frac{1}{K})|f'(z)| \ .$$

In particular, for a.e. $z \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{K}|f'(z)| \le \mathrm{V}[f](z) \le K|f'(z)| \quad \textit{and} \quad |\mathrm{V}^*[f](z)| \le \frac{1}{2}(K - \frac{1}{K})|f'(z)| \ .$$

Theorem 7. ([16, Th. 3.2]) *Given* $K \ge 1$ *and* $F \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}; K)$ *let* f *be the boundary valued function of* F. *If* $F(0) = 0$, *then for a.e.* $z \in \mathbb{T}$,

$$\frac{2^{5(1-K^2)/2}}{(K^2+K-1)^K} \le (L_K/K)^K \le |f'(z)| \le (M_K K)^K \le K^{3K} 2^{5(K-1/K)/2} \ . \tag{8}$$

Theorem 8. ([16, Th. 3.3]) *Given* $K \ge 1$ *and* $F \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}; K)$ *assume that* $F(0) = 0$. *Then for all* $z, w \in \mathbb{D}$,

$$|F(z) - F(w)| \le K(M_K K)^K |z - w| \le K^{3K+1} 2^{5(K-1/K)/2} |z - w| \tag{9}$$

as well as

$$|F(z) - F(w)| \ge \frac{L_K^{3K}}{K^{4K+1} M_K^K} |z - w| \ge \frac{2^{5(1-K^2)(3+1/K)/2}}{K^{3K+1}(K^2+K-1)^{3K}} |z - w| \ . \tag{10}$$

Applying Theorem 3 we derive an alternative estimation to (10) like below.

Theorem 9. ([16, Th. 3.4]) *Given $K \geq 1$ and $F \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}; K)$ assume that $F(0) = 0$. Then for all $z, w \in \mathbb{D}$,*

$$|F(z) - F(w)| \geq \frac{1}{K} \max\{\frac{2}{\pi}, L_K^*\}|z - w| \tag{11}$$

where L_K^* is defined by (2).

Remark 1. ([16, Remark 3.5]) All the estimations in Theorems 7, 8 and 9 hold under the assumption $F(0) = 0$. In a general case where $a := F^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ we may replace F by the composition $F_a := F \circ H_a$, where $H_a(z) := (z + a)(1 + \bar{a}z)^{-1}$, $z \in \mathbb{D}$. Then $F_a(0) = 0$ and $F_a \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}; K)$. Applying the theorems to F_a we obtain variants of all the estimations (8), (9), (10) and (11) by multiplying some terms of them by constants $A := (1 - |a|)/(1 + |a|)$ or $B := (1 + |a|)/(1 - |a|)$ as follows:

(i) the first two terms in (8) by A and the last two ones by B;

(ii) the last two terms in (9) by B and the last two ones in (10) by A;

(iii) the right hand side in (11) by A.

Remark 2. ([16, Remark 3.6]) Remark 1 yields an explicit variant of [17, Theorem 1.2] with L expressed by means of $|F^{-1}(0)|$ and K. Remark 1 combined with [12, Corollary 4.3] implies explicit variants of [17, Theorem 1.1] with 0 and ∞ replaced by constants expressed by means of $|F^{-1}(0)|$ and K. Moreover, under the normalized condition $F(0) = 0$ the explicit variants appear to be asymptotically sharp as K tends to 1, which is a consequence of the estimations (8), (9), (10) and (11) where all terms involving K tend to 1 as $K \to 1^+$. This means that $F \in \mathrm{QCH}(\mathbb{D}; K)$ keeping the origin fixed behaves almost like a rotation for sufficiently small K.

References

[1] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen, *Distortion function for plane quasiconformal mappings*, Israel J. Math. **62**(1988), 1–16.

[2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, G.T.M. 137, Springer, 2001.

[3] D. Bshouty and W. Hengartner, *Univalent harmonic mappings in the plane*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A **48**(1994), 12–42.

[4] G. Choquet, *Sur les homéomorphisms harmoniques d'un disque D sur D*, Complex Variables **24** (1993), 47–48.

[5] P. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[6] E. Heinz, *On one-to-one harmonic mappings*, Pacific J. Math. **9**(1959), 101–105.

[7] J. Hersch and A. Pfluger, *Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris. **234** (1952), 43–45.

[8] R. S. Laugesen, *Planar harmonic maps with inner and Blaschke dilatations*, J. London Math. Soc. **56**(1997), 37–48.

[9] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, 2nd ed., Grundlehren 126, Springer, Berlin, 1973.

[10] O. Martio, *On harmonic quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **425**(1968), 1–9.

[11] D. Partyka and K. Sakan, *A note on non-quasiconformal harmonic extensions*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź **47** (1997), 51–63, Série: Recherches sur les déformations **23**.

[12] ______, *Quasiconformality of harmonic extensions*, J. of Comp. and Appl. Math. **105** (1999), 425–436.

[13] ———, *On Heinz's inequality*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź **52** (2002), 27–34, Série: Recherches sur les déformations **36**.

[14] ———, *On an asymptotically sharp variant of Heinz's inequality*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **30** (2005), 167–182.

[15] ———, *Three variants of Schwarz's lemma for harmonic mappings*, to appear in Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź , Série: Recherches sur les déformations.

[16] ———, *On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings*, Preprint.

[17] M. Pavlović, *Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **27** (2002), 365–372.

[18] S. Yang, *Harmonic extensions and extremal quasiconformal extensions*, Hunan Daxue Xuebao **22**(1995), no.6, Suppl. 42–51.

11

構造定理
STATEMENT OF THE RESULTS:::

大藪　卓

DIFF(G)o+==========G::::

DIFF(G/K)o+========G::::

DIFF(G/ Γ)o+=======G::::

::::::HOMOTOPY EQUIVALENCE:::::

DIFF(M)→O(C^{∞}(M))→DIFF(C^{∞}(M))::::

DIFF(M)=====→O(C^{∞}(M))::::

REPRESENTATIONS::::::

F*　(Hi)　=　O　(Hi)::

● ^{t}O=I::無限次元·実·直交行列。

O(n) ∋ A:::

BAB^{-1}= $\begin{pmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_k \end{pmatrix}$ $P_i=\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

H=Ho+H1+H2+H3+························

R-DIFFEOMORPHISM

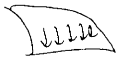
大藪　卓

R===R':RING ISOMORPHISM=====→

M®=M(R')::::SPEC®=SPEC(R')::DIFFEOMORPHI

C::ISOMORPHIC::HOMEOMORPHIC::::::

M®:::::SPEC®::::上の FLOWS:::



超関数の空間。:::::D::::::環を成さない。

D ⊃L2(M) ⊃ C^{∞}(M):::::ALGEBRA:::環。

M(L2(M))::::M(C^{∞}(M))::::上の FLOWS::::

R::----DIFFEOMORPHISM::::

超関数解。

古典解。

関数空間。HILBERT:::空間。BANACH::----空間。

線形位相空間。

線形順序空間。

· △ Hi= λ_iHi:

$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq$ ----

定理。(MATHER):::

DIFF(M)o+ IS A SIMPLE GROUP::::

定理。

IN DIFF(M):::::fGf^{-1}=G=====→f ∈G:::

DIFF(M)o+=GXB:as a topological space::::

G::MAXIMAL COMPACT SUBGROUP:::

B::::CONTRACTIBLE SPACE::====R^{∞}

岩沢の定理。

G:::::NON::-COMPACT::::群。

G=KXB:as a topological space:::

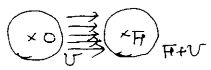
K::MAXIMAL COMPACT SUBGROUP:::

B:::CONTRACTIBLE SPACE::====Rn::::

CARTAN::::位相的には、コンパクト群だけが、重要である。コレラの『思想』の延長上にあると言ってもよい。

DIFF(M)::::AUT®::::AUT(X®):BIR(V):::

R::::::===================→M®:::



R:::上の FLOWS::::

M®::SPEC®::---上の FLOWS::::::

::::::R::---DIFFEOMORPHISM:::::

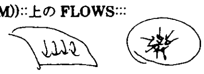
M::::上の FLOWS*::::C^{∞}(M):::内の FLOWS:::

M(L2(M)))::上の FLOWS:::

M(C^{∞}(M)))::上の FLOWS:::::

M®::::上の FLOWS::::

M(Co(M))::上の FLOWS:::



超関数解。古典解。

Ut=Uxx= △ U:::

△ :C^{∞}(M)===========→C^{∞}(M):::

Exp(t△):C^{∞}(M)============→C^{∞}(M)::::

M®::SPEC®:::の構造。私には、よく分からない。

SECTION:M===→T(M)

大藪 卓

ベクトル場:M======→T(M)= ∪ Tp(M):

X:::::df(φ t(p))/dt=Xpf:::::

1-PARAMETER FAMILY OF DIFFEOMORPHISM

DIFFEOMORPHISM:::FLOWS ON M::::

RIEMANN::----面上の FLOWS::::::

M::---上の FLOWS::::::::

M⊕:SPEC⊕:::--上の FLOWS::::

Kn::::上の FLOWS::::

V::::上の FLOWS:::::

X:V=============→T(V)= ∪ Tp(V):::

Kn::::::V:::上の FLOWS::::

:::::DYNAMICAL SYSTEMS::::

:::::::::代数的力学系。

REPRESENTATIONS::::

DIFF(M) ∋ f:::

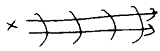
F* (Hi) = O (Hi):

● t_O=I:::無限次元・実・直交行列。

M===M':DIFFEOMORPHIC::THEN:::

SPEC(M:△)=SPEC(M':△):::と出来る。

ISOSPECTRAL DOMAIN DEFORMATION::::



SPECTRES::::一つの「相」を表している。

LIKE SCHRODINGER EQUATION:::::

ihUt=HU:::::HU=EU::::::::::

相転移。:::PHASE TRANSITION:::::

Rt:Ro================→Rt::

:::::ALGEBRA DEFORMATION::

Mt:M(Ro)======→M(Rt):::DOMAIN DEF/

SPECTRAL PROBLEM

大藪 卓

ISOSPECTRAL PROBLEM:::

SPECTRAL GEOMETRY::::

SPECTRAL PROBLEM::::

ISOSPECTRAL DEFORMATION:::

SPEC(M: △)=SPEC(M': △):::::の時、::M::::と

M':::::の関係如何。??????????????????

定理。

ISOSPECTRAL:::

SPEC(M:△)=SPEC(M':△):::

M===M':HOMOTOPY EQUIVALENT::::THEN:::

M===M':DIFFEOMORPHIC::::

C^{∞}(M)=Ho+H1+H2+H3+···············

$\triangle H_i = \lambda_i H_i$:

$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq$ ——

R=Ro+R1+R2+R3+·····················

X(K[X])←====================→Kn::

AUT(X(K[X])):G:G':G":---------

X⊕:::微分 ON R::::::

R ∋x:y: δ(xy)=δ(x)y+x δ(y):::

R=C^{∞} (M⊕)::::

微 ON R:::::X:::::M⊕=====→T(M⊕)):

X:SPEC⊕=======→T(SPEC⊕)):

(x)⊗∂/∂x)⊗dx):

C^{∞}(S1)c {exp(inx)}

$\mathfrak{X}^{\infty}$(S1)c {exp(inx)d/dx}

C^{∞} (S1)c ⊃ p:::極大イデアル。

P=xC^{∞}(S1)c::::

微分:C^{∞}(S1)c========→C^{∞}(S1)c::::

ベクトル場となる。!!!!!!!!!

デハ、X⊕::X(K[X])::::???????????????????

ヘクトル場の類似となっている。

X(K[X]):::の JUSTIFICATION::::

1 2

Subordinations and integral means inequalities for certain analytic functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Tadayuki Sekine (Nihon University)
Rikuo Yamakawa (Shibaura Institute of Technology)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For functions $f(z) \in \mathcal{A}$ and $g(z) \in \mathcal{A}$, we say that $f(z)$ is subordinate to $g(z)$, written by $f(z) \prec g(z)$, if there exists an anlytic function $w(z)$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1\ (z \in \mathbb{U})$ such that $f(z) = g(w(z))$. In particular, if $g(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then the subordination $f(z) \prec g(z)$ is equivalent to $f(0) = g(0)$ and $f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U})$.

Further, J. E. Littlewood (Proc. London Math. Soc. **23**(1925), 481 - 519) has shown the following lemma.

Lemma 1 *If $f(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{U}$ with $f(z) \prec g(z)\ (z \in \mathbb{U})$, then, for $\mu > 0$ and $z = re^{i\theta}\ (0 < r < 1)$,*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{\mu}\, d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^{\mu}\, d\theta.$$

Applying the subordination theorem due to S. S. Miller and P. T. Mocanu (J. Math. Anal. Appl. **65**(1978), 289 - 305), we consider

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\alpha f(z) + \beta z f'(z) - \gamma \frac{zf'(z)}{f(z)} - \delta \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \frac{2a\alpha + a\beta + 2\gamma - 4\delta}{4} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $a > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geqq 0, \gamma \geqq -(a\beta)/2$, and $\delta \geqq 0$, then, for $\mu > 0$ and $z = re^{i\theta}\ (0 < r < 1)$,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{\mu}\, d\theta \leqq \frac{2\pi a^{\mu} r^{\mu}}{(1+r^2)^{\mu/2}} \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{2n-1}(2j+\mu)}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{r}{1+r^2}\right)^{2n}\right\}.$$

Corollary 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\alpha f(z) + \beta z f'(z) - \gamma \frac{zf'(z)}{f(z)} - \delta \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \frac{2\alpha + \beta + 2\gamma - 4\delta}{4} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geqq 0, \gamma \geqq -\beta$, *and* $\delta \geqq 0$, *then, for* $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$,

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqq \frac{\pi r^2}{1+r^2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{2n-1}(j+1)}{(n!)^2}\left(\frac{r}{1+r^2}\right)^{2n}\right\}.$$

Theorem 2 *If* $f(z) \in \mathcal{A}$ *satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\alpha f'(z)^{1/a} + \beta\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \gamma\frac{zf'''(z)}{f''(z)}\right) > \frac{\alpha + (a+1)\gamma - a\beta}{2} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $0 < a \leqq 2, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geqq (a-1)\gamma/a$, *and* $\gamma \geqq 0$, *then, for* $\mu > 0$ *and* $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$,

$$\int_0^{2\pi} \left|f'(re^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta \leqq \frac{2\pi}{(1+r^2)^{a\mu/2}}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{2n-1}(2j+a\mu)}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{1+r^2}\right)^{2n}\right\}.$$

Corollary 2 *If* $f(z) \in \mathcal{A}$ *satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\alpha f'(z)^{1/a} + \beta\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \gamma\frac{zf'''(z)}{f''(z)}\right) > \frac{\alpha + (a+1)\gamma - a\beta}{2} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $0 < a \leqq 2, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geqq (a-1)\gamma/a$, *and* $\gamma \geqq 0$, *then, for* $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$,

$$|f(z)| \leqq \frac{2\pi r}{(1+r^2)^{a/2}}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{2n-1}(2j+a)}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{r}{1+r^2}\right)^{2n}\right\}.$$

13

Convolutions and Hölder inequality for certain analytic functions

Junichi Nishiwaki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{MD}(\alpha, \beta)$ be the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \alpha \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha(\alpha \leqq 0)$ and for some $\beta(\beta > 1)$¿

Remark If $f(z) \in \mathcal{MD}(\alpha, \beta)$, then, for $\alpha < -1$, $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ lies in the region $G(\alpha, \beta) = \{w = u + iv \,|\mathrm{Re}(w) < \alpha|w-1| + \beta\}$, that is, the part of the complex plane which contains $w = 1$ and is bounded by the ellipse

$$\left(u - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} v^2 = \frac{\alpha^2(\beta - 1)^2}{(\alpha^2 - 1)^2},$$

and, for $\alpha = -1$, $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ belongs to the region which contains $w = 0$ and is bounded by the pababola

$$u = -\frac{v^2 - \beta^2 + 1}{2(\beta - 1)}.$$

Further more, for $-1 < \alpha \leqq 0$, $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ lies in the region which is the part of the complex plane containing $w = 0$ and bounded by the hyperbola

$$\left(u - \frac{\beta - \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} v^2 = \frac{\alpha^2(\beta - 1)^1}{1 - \alpha^2},$$

and for $\alpha = 0$, $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ belongs to the half plane which contains $w = 0$ and is bounded by $u = \beta$.

Lemma 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{|n - \beta + 1| + |n - \beta - 1| - 2\alpha(n-1)\} |a_n| \leqq \beta - |2 - \beta|$$

for some $\alpha(\alpha \leqq 0)$ *and for some* $\beta(\beta > 1)$, *then* $f(z) \in \mathcal{MD}(\alpha, \beta)$.

Note that, for $1 < \beta \leqq 2$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|n-\beta+1| + |n-\beta-1| - 2\alpha(n-1)}{\beta - |2-\beta|} |a_n| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(1-\alpha)}{\beta-1} |a_n|$$

and, for $\beta > 2$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|n-\beta+1| + |n-\beta-1| - 2\alpha(n-1)}{\beta - |2-\beta|} |a_n| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \{n(1-\alpha) - 3 + \alpha + \beta\} |a_n|.$$

Thus, we introduce the following subclasses of $\mathcal{A}$:

$$f(z) \in \mathcal{M}_1(\alpha,\beta) \iff \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(1-\alpha)}{\beta-1} |a_n| \leqq 1 \ (1 < \beta \leqq 2)$$

and

$$f(z) \in \mathcal{M}_2(\alpha,\beta) \iff \sum_{n=2}^{\infty} \{n(1-\alpha) - 3 + \alpha + \beta\} |a_n| \ (\beta > 2).$$

Let $f_j(z) \in \mathcal{A}$ be given by

$$f_j(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \qquad (j = 1, 2, 3, \dots m).$$

For $f_j(z) \in \mathcal{A}$, we define

$$H_m(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{n,j}^{p_j} \right) z^n \qquad (p_j > 0),$$

which is the generalization of convolutions.

Applying Hölder inequality , we derive

Theorem 1 *If* $f_j(z) \in \mathcal{M}_1(\alpha, \beta_j)$ *for each* $j = 1, 2, 3, \dots, m$, *then* $H_m(z) \in \mathcal{M}_1(\alpha, \beta^*)$ *with*

$$\beta^* = 1 + \frac{\prod_{j=1}^{m} (\beta_j - 1)^{p_j}}{(1-\alpha)^{s-1}},$$

where $s = \sum_{j=1}^{m} p_j \geqq 1, p_j \geqq 1/q_j, q_j > 1$, *and* $\sum_{j=1}^{m} (1/q_j) \geqq 1$.

Theorem 4 *If* $f_j(z) \in \mathcal{M}_2(\alpha_j, \beta)$ *for each* $j = 1, 2, 3, \dots, m$, *then* $H_m(z) \in \mathcal{M}_2(\alpha^*, \beta)$ *with*

$$\alpha^* = \max_{n \geqq 2} \left\{ 1 - \frac{(\beta - 2) + \prod_{j=1}^{m} (n(1-\alpha_j) - 3 + \alpha_j + \beta)^{p_j}}{n-1} \right\},$$

where $\sum_{j=1}^{m} p_j \geqq 1, p_j \geqq 1/q_j, q_j > 1$, *and* $\sum_{j=1}^{m} (1/q_j) \geqq 1$.

14

Sufficient conditions for starlikeness and convexity of analytic functions with real coefficients

Mamoru Nunokawa (Emeritus Professor of University of Gunma)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Junichi Nishiwaki (Kinki University)
Hitoshi Saitoh (Gunma College of Technology)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. R. Singh and S. Ringh (Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska **35**(1981), 145 - 148) have showed that

$$f(z) \in \mathcal{A},\ \mathrm{Re}\,(f'(z) + zf''(z)) > 0 \implies \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0\ (z \in \mathbb{U}).$$

P. T. Mocanu (Mathematica **37**(1995), 171 - 182) has imporved the above result. On the other hand, G. S. Salagean (Mathematica **47**(2005), 209 - 216) has introduced the subclass $\mathcal{N}$ of functions $f(z) \in \mathcal{A}$ with negative coefficients. For $f(z) \in \mathcal{N}$, G. S. Salagean has shown that

$$\mathrm{Re}\,(f'(z) + zf''(z)) > -1 \implies \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$$

and that

$$\mathrm{Re}\,(f'(z) + zf''(z)) > 0 \implies \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Lemma 1 *Let $f(z) \in \mathcal{A}$ and*

$$\mathrm{Re}\,(f'(z) + \alpha zf''(z)) > -\frac{\alpha}{2} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha(\alpha > 0)$. Then $\mathrm{Re}f'(z) > 0\ (z \in \mathbb{U})$.

Lemma2 (M. Nunokawa, Proc. Japan Acad. **68**(1992), 152 - 153) *Let $p(z)$ be analytic in $\mathbb{U}, p(0) = 1, p(z) \neq 0\,(z \in \mathbb{U})$, and suppose that there exists a point $z_0 \in \mathbb{U}$ such that*

$$|\arg p(z)| < \frac{\pi}{2}\alpha \qquad (|z| < |z_0|)$$

and

$$|\arg p(z_0)| = \frac{\pi}{2}\alpha,$$

where $\alpha > 0$. *Then we have*

$$\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = ik\alpha,$$

where

$$k \geqq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \qquad (\arg p(z_0) = \frac{\pi}{2}\alpha)$$

and

$$k \leqq -\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \qquad (\arg p(z_0) = -\frac{\pi}{2}\alpha),$$

where $p(z_0)^{1/\alpha} = \pm ia$ *and* $a > 0$.

In the present paper, we introduce the subclass $\mathcal{T}$ of $\mathcal{A}$ consisting of analytic functions $f(z)$ with real coefficients, that is,

$$\mathcal{T} = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} \,|\, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Theorem 1 *Let* $f(z) \in \mathcal{T}$ *and suppose that*

$$\mathrm{Re}\,(f'(z) + \alpha z f'(z)) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

where $\alpha \geqq 1$. *Then we have*

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad (z \in \mathbb{U}),$$

or $f(z)$ *is convex of order* $(\alpha - 1)/\alpha$.

Corollary 1 *Let* $f(z) \in \mathcal{T}$ *and suppose that*

$$\mathrm{Re}\,(f'(z) + zf''(z)) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Then we have

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

and

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Corollary 2 *Let* $f(z) \in \mathcal{T}$ *and suppose that*

$$\mathrm{Re}\left(f'(z) + 2zf''(z) + \frac{1}{2}z^2 f''(z)\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Then $\mathrm{Re} f'(z) > 0 \, (z \in \mathbb{U})$ *and*

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > -1 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

15

Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces

西尾昌治（大阪市大・理）
鈴木紀明（名大・多元数理）
山田雅博（岐阜大・教育）

H を $(n+1)$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ の上半平面，すなわち，

$$H = \{X = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,;\, x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$$

とする。また，$1 \leq p < \infty$ に対し，$L^p = L^p(H, dV)$ を通常の Lebesgue 空間とする。ここで，dV は，Lebesgue 測度を表すものとする。$0 < \alpha \leq 1$ に対し，α 次放物型作用素

$$L^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^\alpha$$

の解で L^p に属するもの全体を b^p_α と書き，これを放物型 Bergman 空間と呼ぶ。

本講演におけるテーマは，この空間 b^p_α における補間点列問題である。H の点列 $\mathbb{X} = \{X_j\} = \{(x_j, t_j)\}$ をとり，固定する。また，$\gamma \in \mathbb{N}^n_0$ を多重指数，$k \in \mathbb{N}_0$ とする。

b^p_α 上で以下の作用素

$$T^{\gamma,k}_p u = T^{\gamma,k}_{p,\mathbb{X}} u = \left\{ t_j^{\left(\frac{n}{2\alpha}+1\right)\frac{1}{p}+\frac{|\gamma|}{2\alpha}+k} \partial^\gamma_x \partial^k_t u(X_j) \right\},$$

を考える。さらに，ℓ^p を通常の数列空間とする。

問題

(i) $T^{\gamma,k}_p : b^p_\alpha \to \ell^p$ が有界となるのは，$\mathbb{X} = \{X_j\}$ がどのような点列のときか。

(ii) $T^{\gamma,k}_p : b^p_\alpha \to \ell^p$ が全射となるのは，$\mathbb{X} = \{X_j\}$ がどのような点列のときか。

上記，(i) および (ii) を同時に満たすとき，$\mathbb{X} = \{X_j\}$ を空間 b^p_α の補間点列と呼ぶ。この問題に関し，幾つかの定義を行う。$Y = (y,s) \in H$ と $0 < \delta < 1$ に対し，

$$S^{(\alpha)}_\delta(Y) = S^{(\alpha)}_\delta(y,s) = \left\{ (x,t) \in H; |x-y| < \left(\tfrac{2\delta}{1-\delta^2}s\right)^{1/2\alpha},\ \tfrac{1-\delta}{1+\delta}s < t < \tfrac{1+\delta}{1-\delta}s \right\}$$

とし，$S^{(\alpha)}_\delta(Y)$ を α 次放物型円柱と呼ぶことにする。また，点列 $\mathbb{X} = \{X_j\}$ が α 次放物型の意味で δ-separated であるとは，$S^{(\alpha)}_\delta(X_j) \cap S^{(\alpha)}_\delta(X_m) = \emptyset\ (j \neq m)$ なるときを言うものとする。さらに，有限集合 E に対し，$\#E$ で集合 E の要素の個数を表すものとする。

まず，問題の (i) に関する結果を述べる。

定理 1

$1 \le p < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$ を多重指数，$k \in \mathbb{N}_0$ とする。次の (1) 〜 (3) は，同値である。

(1) $T_p^{\gamma,k} : b_\alpha^p \to \ell^p$ は有界である。

(2) 任意の（あるいは，ある）$0 < \varepsilon < 1$ に対し，自然数 L が存在して，$\#(\mathbb{X} \cap S_\varepsilon^{(\alpha)}(Y)) \le L$ が全ての点 $Y \in H$ に対して成立する。すなわち，各 $S_\varepsilon^{(\alpha)}(Y)$ に属する $\mathbb{X}$ の点列の個数は，一定数以下である。

(3) 任意の（あるいは，ある）$0 < \delta < 1$ に対し，自然数 M が存在して，$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{X}_M$ と分解でき，各 $\mathbb{X}_i$ は α 次放物型の意味で δ-separated である。

定理 1 より，作用素 $T_p^{\gamma,k} : b_\alpha^p \to \ell^p$ の有界性は，p によらない。すなわち，ある p について $T_p^{\gamma,k} : b_\alpha^p \to \ell^p$ が有界であれば，全ての p について $T_p^{\gamma,k} : b_\alpha^p \to \ell^p$ は有界となる。

次に，問題の (ii) に関する結果を述べる。

定理 2

$1 \le p < \infty$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$ を多重指数で γ_i が全て偶数，$k \in \mathbb{N}_0$ とする。ある $0 < \delta_0 < 1$ が存在して，点列 $\mathbb{X} = \{X_j\}$ が $\delta \ge \delta_0$ について α 次放物型の意味で δ-separated ならば，$T_p^{\gamma,k} : b_\alpha^p \to \ell^p$ は全射である。

定理 2 における δ_0 は，p に依存する。すなわち，ある p について $T_p^{\gamma,k} : b_\alpha^p \to \ell^p$ が全射であっても，p とは異なる q について $T_q^{\gamma,k} : b_\alpha^q \to \ell^q$ が全射となるとはかぎらない。

また，$p = \infty$ に対応する放物型 Bloch 空間，および放物型 little Bloch 空間に関する同様の結果についても報告する。

References

[1] B. R. Choe and H. Yi, Representations and interpolations of harmonic Bergman functions on half-spaces, Nagoya Math. J. **151**(1998), 51–89.

[2] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-Parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math. **42**(2005), 133–162.

[3] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces, preprint.

[4] R. Rochberg, Interpolation by functions in Bergman spaces, Michigan. Math. J. **29**(1982), 229–236.

16

Composition operators on the weighted Bloch space and the weighted Dirichlet spaces with closed range

米田　力生　　（小樽商科大学）

空間 $\mathcal{B}_\alpha$ は

$$\| f \|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする. $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ は the Bloch space と呼ばれる. $dA(z)$ は D 上の normalized area measure とする.

$\alpha > -1$ に対して, the weighted Dirichret space D_p^α は

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|^p (\alpha+1) dA(z) < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする. $\alpha = 1$ かつ $p = 2$ のとき, $D_2^1 = H^2$ は the Hardy space になる. $\alpha = 2$ かつ $p = 2$ のとき, $D_2^2 = L_a^2$ は the Bergman space になる.

$\alpha > 0$ のとき, D の部分集合 Γ が *sampling set for* $\mathcal{B}_\alpha$ と呼ばれるのは, *there exists a positive constant* $C > 0$ *such that*

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| \le C \sup_{z\in\Gamma}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|,$$

for all $f \in \mathcal{B}_\alpha$ を満たすときである.

一般に X を Banach spaces とし, T を linear operator from X into X とする. そのとき, T は 次を満たすならば, bounded below on X と呼ばれる : $\| Tf \| \ge C \| f \|$ for all $f \in X$ and positive constants $C > 0$.

本研究では, 合成作用素がいつ $\mathcal{B}_\alpha$、D_p^α 上で bounded below になるのかに関する研究をし, 以下の結果が得られた :

Theorem 1. *Let $\alpha \ge 1$. Suppose φ is a univalent self-map of D. Then the following are equivalent.*

(1) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ *is bounded below*

(2) $\| \varphi_w \circ \varphi \|_{\mathcal{B}_\alpha / \mathcal{C}} \ge C$ *for any* $w \in D$

(3) *For any* $\epsilon < C$, $\rho(z, F_\epsilon) \le \sqrt{1-\epsilon} = r$, *for any* $z \in D$

(4) *For any* $\epsilon < C$, $\exists r' > 0$ *and some constant* $K > 0$ *such that*

$$|D(w,r') \cap F_\epsilon| \ge K\, |D(w,r')|$$

for all $w \in D$.

Theorem 2. *Let $1 \leq \alpha \leq \beta$. Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. If the composition operator $C_\varphi : \mathcal{B}_\beta \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded below, then $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded below.*

Theorem 3. *Let $\alpha > 1$. Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. If the composition operator $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\alpha$ is bounded below, then $C_\varphi : L^2_a \to L^2_a$ is bounded below.*

References

[1] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.133,5(2004), 1371-1377.

[2] H.Hedenmalm and B.Korenblum and K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York.

[3] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[4] R.Yoneda, Multiplication Operators, Integration Operators And Companion Operators On Weighted Bloch Spaces, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[5] R.Yoneda, Pointwise multipliers from $BMOA^\alpha$ to the α-Bloch space, Complex Variables Vol.49,No.14, pp1045-1061.

[6] R.Yoneda, Composition operators with closed range on the weighted Bloch space, the weighted Dirichlet spaces, in preprint.

[7] R.Yoneda, The characterizations of three inequalities on the weighted Bergman Spaces, in preprint.

17

Moduli space of polynomial maps of $\mathbb{C}$

杉山 登志
京都大学大学院理学研究科数学教室

For a natural number d with $d \geq 2$, we will denote the moduli space of polynomial maps of degree d by

$$P_d := \{f \in \mathbb{C}[z] \mid \deg f = d\} / \sim,$$

where the relation $\sim$ denotes the affine conjugacy of polynomial maps, *i.e.* for polynomial maps $f, g \in \mathbb{C}[z]$, the equivalent relation $f \sim g$ holds if and only if there exists an affine transformation $\gamma(z) = az + b$ with $a, b \in \mathbb{C}$ and $a \neq 0$ such that the equality $f = \gamma \circ g \circ \gamma^{-1}$ holds. We will put

$$\mathrm{Fix}(f) := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid f(\zeta) = \zeta\}$$

for $f \in \mathbb{C}[z]$, where we consider $\mathrm{Fix}(f)$ counted with multiplicity. Thus we always have $\#(\mathrm{Fix}(f)) = \deg f$.

Remark 1. For a polynomial map $f \in P_d$ and its fixed point $\zeta \in \mathrm{Fix}(f)$, the point ζ is a multiple fixed point of f if and only if $f'(\zeta) = 1$.

Proposition 2 (Fixed point theorem). *Let d be a natural number with $d \geq 2$, and suppose that a polynomial map $f \in P_d$ has no multiple fixed point. Then we have the equality*

$$\sum_{\zeta \in \mathrm{Fix}(f)} \frac{1}{1 - f'(\zeta)} = 0. \tag{1}$$

On the basis of Proposition 2, we will put

$$\Lambda_d := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d \,\middle|\, \sum_{i=1}^{d} \prod_{j \neq i} (1 - \lambda_j) = 0 \right\} \Big/ \mathfrak{S}_d,$$

where $\mathfrak{S}_d$ denotes the d-th symmetry group and $\mathfrak{S}_d$ acts on $\mathbb{C}^d$ as a permutation of coordinates. Then we can define the map $\Phi_d : P_d \to \Lambda_d$ by

$$f \mapsto (f'(\zeta))_{\zeta \in \mathrm{Fix}(f)}.$$

Theorem 3. *In the case $d = 2$ or 3, the map Φ_d is bijective.*

This theorem is well-known and easy to prove. In this talk, we will consider the map Φ_d in the case $d \geq 4$ in detail.

Main Theorem . *Let d be a natural number with $d \geq 4$, and suppose that $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ are complex numbers with $\lambda_i \neq 1$ for $i = 1, \ldots, d$ and with $\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1-\lambda_i} = 0$. We will put $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, and will denote by $\bar{\lambda}$ the equivalent class of λ in Λ_d. Then*

1. *we always have the inequalities $0 \leq \#\left(\Phi_d^{-1}\left(\bar{\lambda}\right)\right) \leq (d-2)!$.*

2. *The cardinality $\#\left(\Phi_d^{-1}\left(\bar{\lambda}\right)\right)$ is completely determined by and is practically computed by hand from the following 2 combinatorial data:*

$$\mathcal{I}(\lambda) := \left\{ I \subsetneq \{1, 2, \ldots, d\} \;\middle|\; I \neq \emptyset, \quad \sum_{i \in I} \frac{1}{1-\lambda_i} = 0 \right\}$$
$$\mathcal{K}(\lambda) := \left\{ K \subseteq \{1, 2, \ldots, d\} \mid i, j \in K \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j \right\}.$$

3. *If the inclusion relations $\mathcal{I}(\lambda) \subseteq \mathcal{I}(\lambda')$ and $\mathcal{K}(\lambda) \subseteq \mathcal{K}(\lambda')$ hold, then we have the inequality $\#\left(\Phi_d^{-1}\left(\bar{\lambda}\right)\right) \geq \#\left(\Phi_d^{-1}\left(\bar{\lambda}'\right)\right)$.*

4. *The equality $\#\left(\Phi_d^{-1}\left(\bar{\lambda}\right)\right) = (d-2)!$ holds if and only if the set $\mathcal{I}(\lambda)$ is empty and the complex numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ are mutually distinct.*

5. *If there exist non-zero integers $c_1, \ldots, c_d$ which satisfy the conditions $\frac{1}{1-\lambda_1} : \cdots : \frac{1}{1-\lambda_d} = c_1 : \cdots : c_d$ and $\sum_{i=1}^{d} |c_i| \leq 2(d-2)$, then the set $\Phi_d^{-1}\left(\bar{\lambda}\right)$ is empty.*

6. *In the case $d \leq 7$, the set $\Phi_d^{-1}\left(\bar{\lambda}\right)$ is empty if and only if there exist non-zero integers $c_1, \ldots, c_d$ which satisfy the conditions $\frac{1}{1-\lambda_1} : \cdots : \frac{1}{1-\lambda_d} = c_1 : \cdots : c_d$ and $\sum_{i=1}^{d} |c_i| \leq 2(d-2)$.*

18

DENJOY-WOLFF THEOREM ON RIEMANN SURFACES

東京工業大学理工学研究科　志賀　啓成

Hyperbolic Riemann surface R 上の非定数自己正則写像 φ の力学系は次のタイプに分類される (cf. [6]).

(1) Finite order – ある自然数 n がとれて, $\varphi^n = id$.
(2) 吸引的 – φ は R 内に固定点 p を持ち, $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に R 上広義一様収束する.
(3) Rotation – R は単位円, 穴あき円板または二重円環と等角同値で, φ は無理的回転と共役.
(4) Escaping – R 内の任意のコンパクト集合 K に対して $\{\varphi^n(K)\}_{n=1}^{\infty}$ は R の (理想) 境界に発散する.

この中で, 最後の Escaping の状況が興味深いが, R が特に単位円板 Δ の場合, 次の Denjoy-Wolff の定理が知られている.

Theorem 1. φ は Δ からそれ自身への正則写像で *Escaping* とする. このとき, ある $\zeta \in \partial\Delta$ が存在して, $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty}$ は Δ 上 ζ に広義一様収束する.

この講演では, この Denjoy-Wolff の定理で Δ を Riemann surface R に置き換えて考察する. この方向の研究では, M. Heins[3] による R が compact bordered Riemann surface のときの Theorem 1 の拡張がある. すなわち;

Theorem 2. R を *compact bordered Riemann surface* とする. このとき R の *Escaping holomorphic map* φ に対し, ある $\zeta \in \partial R$ がとれて, $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty}$ は R 上 ζ に広義一様収束する.

まず, この Theorem 2 の別証明を, Fatou-Riesz の定理の正則写像バージョンを証明することにより与える. もちろん, この方法は古典的な Denjoy-Wolff の定理の別証明も与えている. この別証明の論法を利用すると, もう少し一般の形で Theorem 1 が拡張される. すなわち;

Corollary 1. R を SO_{HB} *surface* で, φ は R の *Escaping holomorphic map* とする. さらに, R のある点の φ による *orbit* が R の相対境界に集積点を持つならば, $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty}$ は R 上相対境界のある点 ζ に広義一様収束する.

ここで, Riemann surface R が SO_{HB} surface とは, R の理想境界の調和速度が 0 であるときを言う. ただし, 相対境界はコンパクトである必要はない.

一般に R からそれ自身への連続写像 φ は, R の基本群の準同型を導き, したがって R を表す Fuchs 群 Γ からそれ自身へのの準同型 θ_φ を引き起こす. Corollary 1 の仮定の下では, この準同型写像 θ_φ はある種の "ベキ零性" を持っていることが分かる. すなわち,

Theorem 3. $R = \Delta/\Gamma$, φ は *Corollary 1* の仮定を満たすとする. このとき, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して, ある $n = n(\gamma) \in \mathbb{N}$ がとれて, $\theta_\varphi^n(\gamma) = id$ が成り立つ.

上の定理において $n(\gamma)$ を γ に無関係に一様に取れないかどうかということがすぐに問題になる. Γ が有限生成の場合は明らかに γ に無関係に取ることができるが, Γ が無限生成の場合には, 必ずしもそうはならない. 実際に例を作ることが出来る.

このような定理を更に一般のRiemann surfaceで考察するためには，対象となるRiemann surfaceを何らかの形でコンパクト化する必要がある．Martinコンパクト化は最も適当と思われるコンパクト化の一つだが，F. Larusson[4]はHeinsの方法を用いて，Martin境界がある種のregularityを持つ時にDenjoy-Wolffの定理が正しいことを証明した．一方，P. Poggi-Corradini[7]はMartinコンパクト化では，Denjoy-Wolffの定理が成立しない平面領域が存在することを注意した．しかし，Corollary 1を考えれば，Rが調和次元1のendの場合—それはirregularな境界点を含むが—そのMartinコンパクト化においてDenjoy-Wolffの定理が成り立つことが分かる．一般にRが種数無限大であるとき，それ自身へのnon-trivialな正則写像を構成するのは存外難しいが，この場合実際に調和次元1のendと理想境界の1点へescapeする正則写像を構成することができる．

References

[1] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Springer 1963.

[2] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, 1981.

[3] M. Heins, A theorem of Wolff-Denjoy type, in "Complex Analysis", Birkhäuser, Basel, 81–86, 1988.

[4] F. Lárusson, A Wolff-Denjoy theorem for infinitely connected Riemann surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2745–2750.

[5] Masaoka, H. and S. Segawa, Harmonic dimensions of covering Riemann surfaces. Kodai Math. J. **17** (1994), 351–359.

[6] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures*, Vieweg 1999.

[7] P. Poggi-Corradini, On the failure of a generalized Denjoy-Wolff theorem, Conformal Geometry and Dynamics **6** (2002), 12–32.

[8] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Maruzen 1959.

19

Symmetric groups that are not the symmetric conjugates of Fuchsian groups

Katsuhiko Matsuzaki
Department of Mathematics, Okayama University

A *quasiconformal group* is a discrete group of quasiconformal automorphisms of the unit disk Δ whose maximal dilatations are uniformly bounded. A quasisymmetric automorphism of the unit circle $\partial\Delta$ is the boundary extension of a quasiconformal automorphism of Δ. A *quasisymmetric group* is a discrete group of quasisymmetric automorphisms of $\partial\Delta$ whose quasisymmetric constants are uniformly bounded. It is clear that the boundary extension of a quasiconformal group to $\partial\Delta$ is a quasisymmetric group. Due to Sullivan [7] and Tukia [8], every quasiconformal group is conjugate to a conformal group (Fuchsian group) by a quasiconformal homeomorphism $\Delta \to \Delta$.

On the other hand, since there is no canonical extension of the homeomorphisms $\partial\Delta \to \partial\Delta$ to those of Δ preserving the group structure (cf. [2]), it was difficult to see that every quasisymmetric group is conjugate to a Fuchsian group by a quasisymmetric homeomorphism $\partial\Delta \to \partial\Delta$, or equivalently, every quasisymmetric group is the boundary extension of a quasiconformal group. Recently, this has been shown to be true by Markovic [6], based on a famous result by Tukia [9], Gabai [3] and Casson-Jungreis [1] that a quasisymmetric group, which is a convergence group in the sense of Gehring-Martin [5], is conjugate to a Fuchsian group by a topological homeomorphism $\partial\Delta \to \partial\Delta$.

An *asymptotically conformal group* is a quasiconformal group whose elements are asymptotically conformal automorphisms of Δ. A symmetric automorphism is the extension of an asymptotically conformal automorphism to $\partial\Delta$, which was originally introduced by Gardiner-Sullivan [4]. A *symmetric group* is a quasisymmetric group whose elements are symmetric automorphisms of $\partial\Delta$. It is clear that the boundary extension of an asymptotically conformal group to $\partial\Delta$ is a symmetric group. However, we do not know whether the converse is true or not.

In this talk, we consider an analogous problem to the above context; whether a symmetric group is conjugate to a Fuchsian group by a symmetric homeomorphism $\partial\Delta \to \partial\Delta$ or not. Our answer is negative: *To every infinite Fuchsian group possibly with torsion, there exists a quasisymmetric conjugate symmetric group that is not conjugate to any Fuchsian group by a symmetric homeomorphism.* Further, we extend this problem to a study of asymptotically conformal mapping class subgroups on Riemann surfaces of general type.

Theorem. *Let $G \subset \mathrm{Conf}(R)$ be a group of conformal automorphisms of a Riemann surface R. Assume that G admits a non-trivial homogenous quasi-homomorphism $\varphi : G \to \mathbf{R}$. Then there exists a quasiconformal homeomorphism $f : R \to R'$ such that $G_f = fGf^{-1}$ is a group of asymptotically conformal automorphisms of R' but there exists no asymptotically conformal homeomorphism $h : R' \to R''$ such that $hG_fh^{-1} \subset \mathrm{Conf}(R'')$.*

Here, a map $\varphi : G \to \mathbf{R}$ is said to be a *quasi-homomorphism* if there exists a constant $D \geq 0$ such that $|\varphi(g_1g_2) - \varphi(g_1) - \varphi(g_2)| \leq D$ for any g_1 and g_2 in G. Moreover, it is *homogenous* if $\varphi(g^n) = n\varphi(g)$ for any $g \in G$ and any $n \in \mathbb{Z}$.

The above theorem can be paraphrased as a statement on the existence of a fixed point of the isometric action of G on a closed subspace of the Teichmüller space, which is a fiber over the asymptotic Teichmüller space.

References

[1] A. Casson and D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 441–456.

[2] A. Douady and C. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), 23–48.

[3] D. Gabai, *Convergence groups are Fuchsian groups*, Ann. of Math. **136** (1992), 447–510.

[4] F. Gardiner and D. Sullivan, *Symmetric structures on a closed curve*, Amer. J. Math. **114** (1992), 683–736.

[5] F. Gehring and G. Martin, *Discrete quasiconformal groups*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 331–358.

[6] V. Markovic, *Quasisymmetric groups*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 673–715.

[7] D. Sullivan, *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions*, Riemann surfaces and related topics, Ann. Math. Studies, vol. 97, Princeton Univ. Press, 1981, pp. 465–496.

[8] P. Tukia, *On two-dimensional quasiconformal groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **5** (1980), 73–78.

[9] P. Tukia, *Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups*, J. Reine Angew. Math. **391** (1988), 1–54.

20

共役な曲面と同時に有界となる $\boldsymbol{R}^3$ の完備な極小曲面

Francisco Martín (Universidad de Granada)
梅原雅顕 (大阪大学)
山田光太郎 (九州大学)

リーマン面 M から $\boldsymbol{C}^3$ への正則写像 $X = (X^1, X^2, X^3)\colon M \to \boldsymbol{C}^3$ が等方的 (null または isotropic) であるとは

$$\left(\frac{dX^1}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dX^2}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dX^3}{dz}\right)^2 = 0$$

が成り立つことである．ただし z は M の局所複素座標である．また，はめこみ $X\colon M \to \boldsymbol{C}^3$ が完備であるとは，$\boldsymbol{C}^3$ の標準的なエルミート計量の X による引き戻しが M の完備なリーマン計量を与えていることである．ここでは次の定理を紹介したい：

定理 ([MUY]). 完備な等方的はめこみ $X : \mathbb{D}_1 \to \boldsymbol{C}^3$ で，その像が有界なものが存在する．ただし $\mathbb{D}_1 \subset \boldsymbol{C}$ は単位円板である．

さらに任意の負でない整数 k に対して，種数 k で一つのエンドをもつリーマン面 Σ_k と，完備かつ有界な等方的はめこみ $X_k\colon \Sigma_k \to \boldsymbol{C}^3$ が存在する．

よく知られるように，完備な等方的はめこみ $X\colon M \to \boldsymbol{C}^3$ の実部 $\mathrm{Re}\, X\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ と虚部 $\mathrm{Im}\, X\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ は，共にリーマン面 M から 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ への完備かつ極小（平均曲率 0）な共形はめこみを与える．$\mathrm{Im}\, X$ は，$\mathrm{Re}\, X$ に共役な極小曲面とよばれ，両者は同じ誘導計量をもつ．この定理に関する歴史的な背景についてであるが，古くからの難問であった E. Calabi の問題 [Ca]:

$\boldsymbol{R}^3$ の完備な極小曲面で，その像が有界なものが存在するか

に対して，1996 年に N. Nadirashvili [N] が，像が有界な完備な極小共形はめこみ $f\colon \mathbb{D}_1 \to \boldsymbol{R}^3$ を構成することにより解決した．その後，その方法に改良がなされ，任意種数の完備かつ有界な極小曲面も [LMM] で構成されている．しかし，これらの例の構成法では，共役な極小曲面も有界であることは保証できなかった．今回の我々の主定理は実部・虚部ともに有界な例を構成したものである．つまり，極小曲面の言葉で述べれば，

完備かつ有界な極小曲面で，その共役極小曲面も有界であるもの

を構成したことになる．この定理の応用として，次を示すことができる．

系 1 ([MUY]). 任意の番号 k に対して，種数 k で一つのエンドをもつリーマン面 Σ_k で，次のようなものが存在する：

- 有界な正則はめこみ $Y\colon \Sigma_k \to \boldsymbol{C}^2$ が存在する.
- 有界な正則埋め込み $F\colon \Sigma_k \to \boldsymbol{C}^n$ $(n \geq 4)$ が存在する.

さらに $\boldsymbol{C}^3$ から $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ への適当な射影変換を用いて，定理で構成した $\boldsymbol{C}^3$ の曲面を $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ に写すことにより，**完備，有界な等方的はめこみ** $\Sigma_k \to \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ **も構成することができる**. 一方，定曲率 -1 の 3 次元双曲空間 H^3 内の平均曲率 1 をもつ曲面（CMC-1 曲面）は $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ への等方的はめこみを $H^3 = \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})/\mathrm{SU}(2)$ へ射影することによって得られる（Bryant の表現公式）. したがって，特に以下の系も示されたことになる.

系 2 ([MUY]). 任意の番号 k に対して，種数 k で一つのエンドをもつのリーマン面 Σ_k から，3 次元双曲型空間への平均曲率 1 の共形的はめ込み $Y\colon \Sigma_k \to H^3$ で完備かつ有界なものが存在する.

Nadirashvili による有界な極小曲面の構成は，等方的はめこみの列 X_n ($X_n\colon \mathbb{D}_1 \to \boldsymbol{C}^3$) で，誘導計量による $\mathbb{D}_1$ の半径が $1/n$ のオーダーで増大し，$\mathrm{Re}\, X_n$ の像の直径が $1/n^2$ のオーダーで増大するものを帰納的に構成することによってなされる. 帰納法の各ステップは，円板内の labyrinth とよばれる複雑な形のコンパクト集合を定義し，そこで「大きな値」をとる正則関数（Runge の定理より得られる）を用いて Weierstrass 表現のデータとなる正則関数を変形することで得られる. この方法では，$\mathrm{Re}\, X$ の像の直径が（間接的に）評価できるが，labyrinth の外側での X の情報は直接得られていなかった. 我々の主定理の証明では，この変形に用いる関数を構成するステップを具体的にあたえ，labyrinth の外での X の大きさの評価を行った.

参考文献

[Ca] E. Calabi, *Problems in differential geometry*, ed. S. Kobayashi and J. Eells, Jr., in Proceedings of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, Japan, 1965, Nippon Hyoronsha Co., Ltd., Tokyo (1966) p. 170.

[LMM] F. J. López, F. Martín, and S. Morales, *Adding handles to Nadirashvili's surfaces*, J. Differential Geom. **60** (2002), no. 1, 155–175.

[MUY] F. Martín, M. Umehara and K.Yamada, *Complete bounded null curves immersed in $\boldsymbol{C}^3$ and* $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$, preprint, math.DG/0603530.

[N] N. Nadirashvili, *Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces*, Invent. Math., **126** (1996), 457–465.

21

Stein 多様体の領域上の正則直線束と因子

阿部 誠*

被約複素空間 D 上の Cousin-II 分布 $\{(U_i, m_i)\}_{i\in I}$ の定める Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ に対し，コサイクル $\{m_i/m_j\} \in Z^1(\{U_i\}_{i\in I}, \mathcal{O}^*)$ の定める D 上の正則直線束を $[\mathfrak{d}]$ と書く．

定理 1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を（必ずしも被約でない）純 n 次元 Cohen-Macaulay Stein 空間，D を X の開集合とし，次の 2 条件を仮定する．

i）$H^k(D, \mathcal{O}_X|_D) = 0 \quad (2 \leqq k \leqq n-1)$.

ii）D 上の正則直線束 L が，標準的な準同型の合成

$$H^1(D, \mathcal{O}_X|_D) \to H^1(D, \mathcal{O}) \to H^1(D, \mathcal{O}^*)$$

の像に属するならば，D 上の Cartier 因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$（ただし，$\mathcal{O} := (\mathcal{O}_X/\mathcal{N}_X)|_D$ は D の被約複素構造層）．

このとき，D は任意の $x \in \partial D \setminus \mathrm{Sing}(X, \mathcal{O}_X)$ において局所 Stein である．

定理 1 と Docquier-Grauert [4] の定理より，次の定理を得る．

定理 2. X を n 次元 Stein 多様体とする．このとき，条件

$$H^k(D, \mathcal{O}) = 0 \quad (2 \leqq k \leqq n-1)$$

をみたす X の開集合 D について，次の 4 条件は同値である．

（1）D は Stein である．

（2）D 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の正因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

（3）D 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

（4）D 上の位相的に自明な任意の正則直線束 L に対し，D 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

系 3 (Abe [1, Theorem 3]). X を 2 次元 Stein 多様体とする．このとき，X の開集合 D について，定理 2 の 4 条件は同値である．

系 4 (Ballico [3, Theorem 1]). X を Stein 多様体，$\varphi : X \to \mathbb{R}$ を $\mathscr{C}^2$ 級弱 2-凸関数 (Andreotti-Grauert の意味）とする．このとき，開集合 $D := \{\varphi < c\}$（c は定数）について，定理 2 の 4 条件は同値である．

*〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

命題 5 (Abe [1, p. 272]). X を $\dim X \geqq 3$ なる Stein 多様体，A を $\operatorname{codim} A \geqq 3$ なる S の解析的集合，$D := S \setminus A$ とする．このとき，D 上の任意の正則直線束 L に対し，D 上の正因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

Δ を単位円板として，$M := \Delta^2 \setminus \{(0,0)\}$，$U_\nu := \Delta^2 \setminus \{z_\nu = 0\}$ $(\nu = 1, 2)$ とおく．

補題 6. 関数 $h \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$ の $(0,0)$ における Laurent 展開が $cz_1^{r_1} z_2^{r_2}$ $(r_1 < 0, r_2 < 0, c \neq 0)$ の形の項をもてば，$e^h \in \mathcal{O}^*(U_1 \cap U_2) = Z^1(\{U_1, U_2\}, \mathcal{O}^*)$ の定める M 上の正則直線束は自明でない．

補題 7 (Ballico [2, Remark 1.4]). M 上の正則直線束 L に対し，次の 2 条件は同値である．

（1） L は自明 (holomorphically trivial).

（2） M 上の因子 $\mathfrak{d}$ が存在して，$L = [\mathfrak{d}]$.

定理 1 の証明は，$n = 2$ の場合，補題 6, 7 に基き，Kajiwara-Kazama [6] の方法，Grauert-Remmert [5] の定理，Levi の拡張定理（Kajiwara-Sakai [7]）を用いる．なお，$X = \mathbb{C}^n$ の場合に限定すれば，Lelong [8] の定理により，証明は相当に簡略化できる．

参考文献

[1] M. Abe, *Holomorphic line bundles on a domain of a two-dimensional Stein manifold*, Ann. Polon. Math. **83** (2004), 269–272.

[2] E. Ballico, *Holomorphic vector bundles on* $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$, Israel J. Math. **128** (2002), 197–204.

[3] E. Ballico, *Cousin I condition and Stein spaces*, Complex Var. Theory Appl. **50** (2005), 23–25.

[4] F. Docquier and H. Grauert, *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **140** (1960), 94–123.

[5] H. Grauert and R. Remmert, *Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie*, Comment. Math. Helv. **31** (1956), 152–183.

[6] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set*, Math. Ann. **204** (1973), 1–12.

[7] J. Kajiwara and E. Sakai, *Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions*, Nagoya Math. J. **29** (1967), 75–84.

[8] P. Lelong, *Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques*, J. Analyse Math. **2** (1952), 178–208.

22

代数トーラス内の全正則曲線について

塚本真輝 (京都大学大学院理学研究科)

$z = x + y\sqrt{-1}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の自然な座標とし、$f(z)$ を複素平面上の整函数とする。今、$f(z)$ に対して、非負整数 m と正定数 C があって、次が成立すると仮定しよう:

$$|f(z)| \leq C|z|^m \quad (|z| \geq 1).$$

すると、$f(z)$ は次数が m 以下の多項式になる。これは一変数函数論でよく知られた事実である。これに類似の現象が、ある種の全正則曲線について成立するということを紹介したい。

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の複素多様体 X を次で定義する:

$$X := \{[1 : z_1 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^n | \, z_i \neq 0, \, (1 \leq i \leq n)\} \cong (\mathbb{C}^*)^n.$$

X は代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の自然な射影埋め込みである。X 上の計量として Fubini-Study 計量の制限を取る。(この計量は、代数トーラスの普遍被覆 $\mathbb{C}^n$ から導入される平坦計量とは異なっている。) 正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ に対して、その微分 df のノルムを次で定義する:

$$|df|(z) := |df(\partial/\partial z)| \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Theorem 1. 正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ に対して、非負整数 m と正定数 C が存在して、次が成立すると仮定する:

$$|df|(z) \leq C|z|^m \quad (|z| \geq 1). \tag{1}$$

すると、次数が $m+1$ 以下の多項式 $g_1(z), g_2(z), \cdots, g_n(z)$ が存在して、$f(z)$ は次の形に表される:

$$f(z) = [1 : e^{g_1(z)} : e^{g_2(z)} : \cdots : e^{g_n(z)}]. \tag{2}$$

もし、代数トーラス上の計量として、普遍被覆 $\mathbb{C}^n$ から導入される計量を用いたならば、上の命題が成立することは自明である。Theorem 1 は、Fubini-Study 計量を用いても同じ結論が成立すると主張している。

特に $m = 0$ とすると、次の命題になる。

Corollary 2 (F. Berteloot, J. Duval (2001)). X 内の *Brody* 曲線 $f : \mathbb{C} \to X$ は次の形で表される：

$$f(z) = [\,1 : e^{a_1 z + b_1} : e^{a_2 z + b_2} : \cdots : e^{a_n z + b_n}\,].$$

ここで、$a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ は複素数である。

この命題は [BD, Appendice] において証明されている。

Theorem 1 が主張していることは、写像の微分の増大度が写像の形を決定するということである。これは、より明確に次のように定式化できる。$g_1(z), \cdots, g_n(z)$ を多項式として、$f : \mathbb{C} \to X$ を (2) で定義する。この時、

Theorem 3. f が定数写像で無いならば次が成立する：

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\max_{|z|=r} \log |df|(z)}{\log r} = \max(\deg g_1(z), \cdots, \deg g_n(z)) - 1.$$

Corollary 4. 正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ に対して、非負実数 λ と正定数 C が存在して、次が成立すると仮定する：

$$|df|(z) \le C|z|^{\lambda} \quad (|z| \ge 1).$$

すると、正定数 C' が存在して次が成り立つ：

$$|df|(z) \le C'|z|^{[\lambda]} \quad (|z| \ge 1).$$

ここで、$[\lambda]$ はガウス記号である。

Theorem 1 の証明について一言触れておきたい。(1) の仮定から、

$$T(r, f) := \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z| \le t} |df|^2(z)\, dxdy \le \mathrm{const} \cdot r^{2m+2} \quad (r \ge 1).$$

ここで、$T(r, f)$ は f の特性函数である。これから標準的な議論によって、次数が「$2m+2$」以下の多項式 $g_1(z), \cdots, g_n(z)$ を用いて、f は (2) の形で表されることが分かる。しかし、定理が主張している多項式の次数は「$m+1$」以下であり、このギャップを埋めるのが証明の主要な点である。そのために、$|df|$ の挙動を詳しく調べることになる。

参考文献

[BD] F. Berteloot, J. Duval, Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires, Enseign. Math. **47** (2001) 253-267

[T] M. Tsukamoto, On holomorphic curves in algebraic torus, preprint, arXiv: math.CV/0606742

Gromov. Math Phys Anal Geom. 2 (1999), 323-415.
Eremenko, preprint, Purdue Univ.

2 3

ON THE CASSON INVARIANT CONJECTURE OF NEUMANN–WAHL

奥間 智弘　(山形大・地域教育)

(A. Némethi 氏 (Rényi Institute) との共同研究)

以下，(X, o) を2次元正規特異点，Σ をそのリンクとし，Σ はホモロジー球面であると仮定する．Σ の Casson 不変量を λ, (X, o) のミルナーファイバーの符号数を σ で表す．λ は (X, o) の位相不変量であるが，σ は一般にはそうではない．

Neumann と Wahl は [2] において次を予想した．

Conjecture 1. (X, o) が完全交叉のとき，$\lambda = \sigma/8$.

$\pi\colon \widetilde{X} \to X$ を良特異点解消，s を例外集合の既約成分の個数，K を $\widetilde{X}$ 上の標準因子とすると，Durfee と Laufer の公式により

$$-\sigma = 8p_g + K^2 + s$$

となるから，予想を，幾何種数 p_g が

$$p_g = -\lambda - \frac{K^2 + s}{8}$$

と表せる位相不変量になる，と言い換えることも出来る．

Neumann と Wahl は, [2] において，X が Brieskorn 完全交叉または $z^n + f(x, y) = 0$ という形の超曲面の場合に予想が正しいことを証明した．[3] においては，(X, o) の双対グラフ Γ のデータから組み合わせ論的に得られる方程式系を導入し，それらによって定義される特異点が完全交叉孤立特異点であり，その双対グラフが Γ になる (すなわち，その特異点は X と同じ位相型をもつ) ことを示した．そのように定義される特異点を splice 特異点とよぶ．さらに彼らは特殊な splice 特異点に対して予想が正しいことを証明した．

今回紹介したいのは，次の定理である．

Theorem 2 ([1]). X が *splice* 特異点なら，予想は正しい．

リンクがホモロジー球面であるような完全交叉2次元孤立特異点は splice 特異点ではないか，という予想 (期待) もある (cf. [5]) が，よく分かっていない．

定理の証明の概略について述べる．

Neumann と Wahl の方法と同様に，リンクがホモロジー球面であるような二つの splice 特異点 X_1 と X_2 を "splice" して得られる splice 特異点を X_3 とするとき，$\sigma_{X_3} = \sigma_{X_1} + \sigma_{X_2}$ と同値な p_g に関する等式が成り立つことを示す．実際，λ も splicing に関する加法性を持ち，X は予想が確かめられている特異点を splice して得られることが知られている．その「等式」を得るために，p_g と双対グラフの分割に関する公式 (cf. [4]) を用いる．ただし，双対グラフの分割と splicing (の逆操作) は異なる概念なので，結び付けるには工夫が必要である．

REFERENCES

1. A. Némethi and T. Okuma, *On the Casson Invariant Conjecture of Neumann–Wahl*, arXiv:math.AG/0610465.
2. W. D. Neumann and J. Wahl, *Casson invariant of links of singularities*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 58–78.
3. ______, *Complex surface singularities with integral homology sphere links*, Geom. Topol. **9** (2005), 757–811.
4. T. Okuma, *The geometric genus of splice-quotient singularities*, arXiv:math.AG/0610464.
5. J. Stevens, *Universal abelian covers of superisolated singularities*, arXiv:math.AG/0601669.

24

有理3重点の特徴付け

和田　浩吉　（東京農大二高）

(X,x) を2次元正規特異点, $\pi:(\widetilde{X},A)\to(X,x)$ を最小特異点解消, $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ を例外集合の既約分解とする. このとき, 有理3重点の特徴付けとして, Artin [1] による9双対グラフの分類、Tjurina [2] による有理3重点の具体的な定義方程式が与えられている. そこで我々は, Knöller, 渡邊によって定義された多重種数 $\gamma_m(X,x)$, $\delta_m(X,x)$ の $m=2$ のときの第2多重種数 γ_2, δ_2 の観点から次の有理3重点の特徴付けを与えた.

定理1 ([3]). (X,x) を2次元正規特異点とし, $\pi(\tilde{X},A)\to(X,x)$ を最小特異点解消とする. 次の条件は同値である.

(1) (X,x) は有理3重点である.

(2) $I_\gamma(X,x)=3$, i.e., $\gamma_1=\gamma_2=0, \gamma_3\neq 0$.

(3) $\delta_2(X,x)=0$ かつ $\mathrm{mult}(X,x)=3$.

(4) $\gamma_2(X,x)=0$ かつ $\mathrm{mult}(X,x)=3$.

(5) $\delta_2(X,x)=0$ かつ $K\cdot A=1$.

(6) $\gamma_2(X,x)=0$ かつ $K\cdot A=1$.

次に, 我々は任意の A_i に対して $(-K-W)\cdot A_i\geq 0$ となる最小の正サイクル W を定義した. ただし, K は $\widetilde{X}$ 上の標準因子である. このサイクル W は Laufer の計算列と同様, 帰納的に計算して求めることができる: $W_0=0$, $W_1=A_{i_1}$ とおく. $W_k,(k\geq 1)$ が与えられるとすると次の2つの可能性がある.

(1) $(-K-W_k)\cdot A_{i_{k+1}}<0$ となるような $A_{i_{k+1}}$ が存在するならば $W_{k+1}=W_k+A_{i_{k+1}}$ とおく.

(2) 存在しないならば, 終わりにして $W=W_k$ とおく.

このようにして A_{i_1} から W への計算列が構成できる. このとき, 次のような有理3重点の特徴付けを与えた.

定理2 ([4]). (X,x) を2次元正規特異点とし, $\pi(\tilde{X},A)\to(X,x)$ を最小特異点解消とする. このとき, (X,x) が有理3重点であるための必要十分条件は (X,x) は有理型で $j>0$ に対して, 性質 $(K+W_{j-1})\cdot A_{i_j}=1$ をもつ A_{i_1} から W への計算列 $\{W_i\}_{i=0}^{l}$ が存在する.

参考文献

[1] M. Artin, *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. 88 (1966), 129-136

[2] G.N.Tjurina, *Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points*, Functional Anal. Appl. 2 (1968), 324-332.

[3] K. Wada, *Characterizations of minimally elliptic singularities and rational triple points*, Saitama Math. J 22 (2004), 1-9

[4] ——, *A characterization of the vanishing of the second plurigenus for normal surface singularities*, to appear in Bull. Korean Math. Soc.

25

A note on the Bergman metric of bounded homogeneous domains

大沢 健夫 (名大・多元数理)
甲斐 千舟 (京大・理, 学振特別研究員 (PD))

D を $\mathbb{C}^n$ の有界領域とし, その Bergman 計量を ds^2_D で表す. ds^2_D の potential 関数で, その gradient のノルムを ds^2_D に関して測ったときにそれが D 全体で有界であるようなものが存在するとき, ds^2_D が **d 有界**であると言うことにしよう. このような性質をもつ有界領域は, 後に述べる命題 3 のような著しい性質をもつことが明らかになってきており, 今後の研究の進展が期待される.

既に, 対称有界領域 [4] や強擬凸領域 [2] の Bergman 計量が d 有界性をもつことが知られている. 本講演の主結果は次の通りである:

定理 1 $D \subset \mathbb{C}^n$ を等質有界領域とする. このとき, D 上の実解析関数 φ で

$$ds^2_D = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} dz_\alpha d\bar{z}_\beta$$

を満たし, かつ

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \right|_{ds^2_D}$$

が定数となるものが存在する. ここで, $|\cdot|_{ds^2_D}$ は ds^2_D に関して測ったノルムを表す.

定理 1 の証明では次の事実が鍵となる: 任意の等質有界領域は**等質 Siegel 領域**と呼ばれる上半平面型の領域に正則同相であり, 等質 Siegel 領域には affine 変換から成る群が推移的に作用している.

さらに, この affine 等質性を用いることにより, 我々は次のことを示した.

命題 2 定理 1 の $|\partial\varphi|_{ds^2_D}$ は φ の選び方に依らない.

D の等質性から ds^2_D の完備性が従うが, これと定理 1 で得られた d 有界性を合わせることにより, [1] から次の定理が得られる:

定理 3 D の (p,q) 型の L^2 $\bar{\partial}$-cohomology を $H^{p,q}_{(2)}(D)$ で表す. このとき,

$$\dim H^{p,q}_{(2)}(D) = \begin{cases} \infty & (p+q=n), \\ 0 & (p+q \neq n), \end{cases}$$

が成立する.

しかし残念ながら我々が論文 [6] を投稿した後に, ds^2_D の d 有界性が [3] で既に証明されていることが判明した. また定数 $|\partial\varphi|_{ds^2_D}$ の値に関しては, それが D の次元

に近いものになってしまうことが, 伊師英之氏の計算により明らかとなった [5]. このような事情があるのだが, 定理 1 の証明方法に触れることなどに意味があると思われるので, この機会に我々の試みについて報告させていただきたい.

参考文献

[1] B.-Y. Chen, *Infinite dimensionality of the middle L^2-cohomology on non-compact Kähler hyperbolic manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), 683–689.

[2] H. Donnelly, *L_2 cohomology of pseudoconvex domains with complete Kähler metric*, Michigan Math. J. **41** (1994), 433–442.

[3] H. Donnelly, *L_2 cohomology of the Bergman metric for weakly pseudoconvex domains*, Illinois J. Math. **41** (1997), 151–160.

[4] M. Gromov, *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory*, J. Diff. G. **33** (1991), 263–292.

[5] H. Ishi, *On the Bergman metric of Siegel domains*, preprint.

[6] C. Kai and T. Ohsawa, *A note on the Bergman metric of bounded homogeneous domains*, to appear in Nagoya Math. J.

[7] È. B. Vinberg, S. G. Gindikin and I. I. Pjateckiĭ-Šapiro, *Classification and canonical realization of complex homogeneous bounded domains*, Trudy Moskov. Mat. Obsc. **12** (1963), 359–388; Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 404–437.

26

$\bar{\partial}$閉形式の積分で得られる関数族に対するサイクル空間上の補間定理

大沢健夫（名古屋大学 多元数理）

Mを（連結かつパラコンパクトな）n次元複素多様体とし、$\mathcal{C}_k(M)$をMのkサイクルの空間とする。$\mathcal{C}_k(M)$は、Mのk次元のコンパクトな既約解析的部分集合を有限個とって来て、それらの自然数係数の形式和をつくったもの（kサイクル）を要素とする集合であり、その上にはD. Barletにより標準的な方法で複素解析空間の構造が入れられている。

$\mathcal{C}_k(M)$の起源は、一変数代数関数論におけるAbelの定理にある。これはまた、代数幾何学におけるChow座標、Chow概型を一般化したものである。

、の各連結成分

Andreotti, Norguet, Siu, Barletらの研究により、MがAndreotti-Grauertの意味で$(q+1)$-完備ならば$\mathcal{C}_q(M)$は Stein空間であることがわかっている。よってこのとき、$\mathcal{C}_q(M)$上の'良い'関数について論じることに意味がある。

Barletは、M上のなめらかな(k,k)型$\bar{\partial}$閉形式に対して、それを各kサイクル上で積分することにより生じる$\mathcal{C}_k(M)$上の関数は、上述の標準的な複素構造に関して正則であることを示した。

この正則関数の集合に対して補間問題をL^2評価式の方法で解き、以下の結果を得た。

定理. Mを$(q+1)$完備な複素多様体、φをM上の$(q+1)$擬凸な皆既関数、γ_μを$\mathcal{C}_q(M)$内の点列で$\lim_{\mu\to\infty} \sup_{|\gamma_\mu|} \varphi = \infty$をみたすものとする。ただし$|\gamma_\mu|$は$\gamma_\mu$の台を表す。

to appear in Publ. RIMS

このとき M 上の完備なエルミート計量 g と C^∞ 級増加凸関数 $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ および正数 K が存在して、数列 $c = \{c_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ で収束条件

$$\|c\|_\tau := \sum_{\mu=1}^{\infty} |c_\mu| \exp\left(-\tau(\varphi(x_\mu))\right) < \infty \quad (x_\mu \in |\gamma_\mu|)$$

をみたすものに対して、M 上の C^∞ 級 (k, k) 型 $\bar{\partial}$ 閉形式 ω で、条件

$$\|\omega\|_\tau := \int_M |\omega|_g \exp(-\tau \circ \varphi)\, dV_g \leq K \|c\|_\tau$$

および

$$\int_{\gamma_\mu} \omega = c_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots)$$

をみたすものが存在する。ただし $|\cdot|_g$ と dV_g はそれぞれ g に関する長さと体積要素を表す。

Thm（藤木）M がコンパクトなら $\underbrace{C_{n-1}}_{\text{の各連結成分}}$ は proj. alg. とくにコンパクト.

特別講演

強擬凸領域の部分多様体からの正則関数の拡張について

安達謙三 (長崎大学教育学部)

0. 序文

本講演では主として, $\mathbf{C}^n$ 内の強擬凸領域 D の部分多様体上の正則関数を D 上の正則関数に条件を保ったまま拡張するという問題について述べる. さらに, 一般の有界擬凸領域に関する大沢・竹腰の定理と L^p 接続に関する反例, および $\bar{\partial}$ 問題の解の評価について解説する.

1. 滑らかな境界をもつ強擬凸領域の部分多様体からの正則関数の拡張

定義 1.1 Ω を複素多様体とする. Ω 上の正則関数全体の空間を $\mathcal{O}(\Omega)$ で表す. Ω 上の有界正則関数全体の空間を $H^\infty(\Omega)$ で表す. Ω において k 回連続微分可能な関数全体の空間を $C^k(\Omega)$, $k = 0, 1, \cdots, \infty$, で表す. また, Ω で正則かつ $\overline{\Omega}$ で連続な関数全体の空間を $A(\Omega)$ で表す.

定義 1.2 (Leray 写像) D は $\mathbf{C}^n$ の C^1 境界をもつ有界領域とする. C^1 級写像

$$w = (w_1, \cdots, w_n) : D \times \partial D \to \mathbf{C}^n$$

が D に対する Leray 写像であるとは

$$< w(z,\zeta), \zeta - z > \neq 0 \qquad ((z,\zeta) \in D \times \partial D)$$

が成立することである.

$w(z,\zeta)$ は D に対する Leray 写像とする.

$$\omega'_\zeta(w(z,\zeta)) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} w_j(z,\zeta) \bigwedge_{k \neq j}^{\cdot} \bar{\partial}_\zeta w_k(z,\zeta),$$

$$\omega(\zeta) := d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$$

と定義する. f は ∂D 上の L^1 関数とする. このとき

$$(L_{\partial D} f)(z) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \frac{\omega'_\zeta(w(z,\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{< w(z,\zeta), \zeta - z >^n} \qquad (z \in D)$$

と定義する.

定理 1.1 (**Cauchy-Fantappiè の積分公式**) D は $\mathbf{C}^n$ の C^1 境界をもつ有界領域とする. f が $\overline{D}$ で連続で, D で正則 (すなわち, $f \in A(D)$) ならば

$$f(z) = L_{\partial D} f(z) \qquad (z \in D)$$

が成立する.

$D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は C^2 境界をもつ強擬凸領域とする. X は $\overline{D}$ の近傍における閉部分多様体で, ∂D と横断的 (transversal) に交わるとする.

定理 1.2 (Henkin [HEN](1972)) 線形作用素 $E: H^\infty(X\cap D)\to H^\infty(D)$ で, $E(f)|_{X\cap D}=f$ をみたすものが存在する. さらに, $f\in A(X\cap D)$ ならば, $E(f)\in A(D)$ となる.

注意 1.1 (1) 定理 1.2 は D が有界擬凸領域で, $\partial(X\cap D)$ が D の強擬凸境界点から成る場合は成立する. (Adachi [AD2, AD3])

(2) 定理 1.2 の証明は D が強凸領域で, $X=\{z_k=z_{k+1}=\cdots=z_n=0\}$ の場合に Cauchy-Fantappiè の積分公式を用いて正則関数の有界接続を証明し, D が強擬凸領域で X が一般の部分多様体の場合には X を局所的に強凸領域の線形部分多様体に埋め込むやり方で証明している.

定理 1.3 $D\subset\subset \mathbf{C}^n$ は C^∞ 境界をもつ強擬凸領域とする. このとき次が成立する.

(1) (Adachi [AD1](1980), Elgueta [ELG](1980)) $f\in\mathcal{O}(X\cap D)\cap C^\infty(\overline{X\cap D})$ ならば $Ef\in\mathcal{O}(D)\cap C^\infty(\overline{D})$ となる.

(2) (Jakóbczak [JAK](1983), Adachi [AD4](1994)) $f\in\mathcal{O}(X\cap D)\cap C^k(\overline{X\cap D})$, $k=0,1,2,\cdots$, ならば, $Ef\in\mathcal{O}(D)\cap C^k(\overline{D})$ が成り立つ.

$D\subset\subset\mathbf{C}^n$ は強擬凸領域とする. 境界の滑らかさは仮定しない. すると, ∂D の近傍 θ と $\overline{\theta}$ の近傍において C^2 級強多重劣調和関数 ρ が存在して

$$D\cap\theta=\{z\in\theta\mid \rho(z)<0\}$$

と表される. $\overline{\theta}$ で C^1 級の関数 a_{jk} に対して

$$F(z,\zeta):=2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j}(\zeta)(\zeta_j-z_j)-\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(\zeta)(\zeta_j-z_j)(\zeta_k-z_k).$$

と定義する. ここで, a_{jk} は $\overline{\theta}$ において ρ に 2 次の導関数まで十分に近い関数である. ρ が C^3 級のときは

$$a_{jk}=\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_j\partial\zeta_k}$$

とする. このときは $F(z,\zeta)$ は Levi 多項式になる.

滑らかな境界をもつ強擬凸領域における Leray 写像 $w(z,\zeta)$ で, $w(z,\zeta)$ が z に関して正則関数になるものが, Henkin [HEN](1969) と Ramirez [RAM](1970) によって構成された. 次の定理 1.4 はそれを滑らかでない境界をもつ強擬凸領域の場合まで一般化したもので, Henkin-Leiterer [HER](1984) によって得られた.

定理 1.4 $D\subset\subset\mathbf{C}^n$ は強擬凸領域とする. ∂D の近傍 $U\subset\theta$ と, $(D\cup U)\times U$ で C^2 級の関数 $\Phi(z,\zeta)$ と $\widetilde{\Phi}(z,\zeta)$ が存在して次が成り立つ.

(a) $\Phi(z,\zeta)$ と $\widetilde{\Phi}(z,\zeta)$ は $z\in D\cup U$ について正則である.

(b) $\varepsilon>0$ が存在して,

$$\Phi(z,\zeta)\neq 0,\ \widetilde{\Phi}(z,\zeta)\neq 0 \qquad ((z,\zeta)\in(D\cup U)\times U, |\zeta-z|\geq\varepsilon).$$

(c) $(D\cup U)\times U$ における C^2 関数 $M(z,\zeta)\neq 0$ と $\widetilde{M}(z,\zeta)\neq 0$ が存在して,

$$\Phi(z,\zeta)=F(z,\zeta)M(z,\zeta)\qquad ((z,\zeta)\in (D\cup U)\times U,\ |\zeta-z|\leq\varepsilon).$$

$$\widetilde{\Phi}(z,\zeta)=(F(z,\zeta)-2\rho(\zeta))\widetilde{M}(z,\zeta)\qquad ((z,\zeta)\in (D\cup U)\times U,\ |\zeta-z|\leq\varepsilon)$$

(d) $(D\cup U)\times U$ における C^2 関数 $w_j(z,\zeta)$, $j=1,\cdots,n$, が存在して

$$\Phi(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{n}(z_j-\zeta_j)w_j(z,\zeta)\qquad ((z,\zeta)\in (D\cup U)\times U).$$

が成立する. さらに, $w_j(z,\zeta)$ は $z\in D\cup U$ について正則である.

$\varepsilon_0>0$ を, $\{\zeta\in\theta \mid |\rho(\zeta)|<2\varepsilon_0\}\subset\subset U$ となるようにとる. $\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{C}^n)$ を, $0\leq\varphi\leq 1$ をみたし, $\zeta\in\theta$, $\rho(\zeta)\geq-\varepsilon_0$ のとき $\varphi(\zeta)=1$, $\zeta\in(D-\theta)\cup\{\zeta\in\theta \mid \rho(\zeta)\leq-2\varepsilon_0\}$ のとき, $\varphi(\zeta)=0$ となるようにとる. 定理 1.4(d) における Leray 写像 $w(z,\zeta)=(w_1(z,\zeta),\cdots,w_n(z,\zeta))$ に対して

$$\omega_\zeta\left(\frac{\varphi(\zeta)w(z,\zeta)}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right):=\bigwedge_{j=1}^{n}d_\zeta\left(\frac{\varphi(\zeta)w_j(z,\zeta)}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right)$$

と定義する. また, D 上の L^1 関数 f に対して

$$L_Df(z):=\frac{n!}{(2\pi i)^n}\int_D f(\zeta)\omega_\zeta\left(\frac{\varphi(\zeta)w(z,\zeta)}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right)\wedge\omega(\zeta)\qquad (z\in D)$$

と定義する. $w(z,\zeta)$, $\widetilde{\Phi}(z,\zeta)$ は z について正則であるから, L_Df は D において正則である.

定理 1.4 で得られた Leray 写像を Cauchy-Fantappiè の積分公式に当てはめて, Stokes の定理を用いて変形すると次の定理が成立することが, Henkin-Leiterer [HER] によって示された.

定理 1.5 $D\subset\subset\mathbf{C}^n$ は強擬凸領域とする (境界は滑らかでなくてもよい).

f は D における L^1 正則関数とする. すると

$$f(z)=L_Df(z)\qquad (z\in D)\tag{1}$$

が成立する.

注意 1.2 $D\cap\theta=\{z\in\theta \mid \rho(z)<0\}$ が強凸領域の場合は滑らかでない境界点, すなわち, $\rho(z)=d\rho(z)=0$ となる点は存在しないが, 強擬凸領域の場合は滑らかでない境界点が存在する場合もある.

次に積分公式 (1) を利用して, Beatrous によって証明された $D\cap X$ 上の正則関数のウエイトつき L^p 接続について述べる.

$$\begin{aligned}\delta(z)&=\mathrm{dist}(z,\partial D),\\ \delta_{D\cap X}(z)&=\mathrm{dist}(z,\partial(D\cap X)).\end{aligned}$$

とおく. また, $0 < p < \infty$, $s > -1$ に対して,

$$\begin{aligned} A_s^p(D \cap X) &= \{f \in \mathcal{O}(D \cap X) \mid \int_{D \cap X} |f|^p \delta_{D \cap X}^s dV_{D \cap X} < \infty\}, \\ A_s^p(D) &= \{f \in \mathcal{O}(D) \mid \int_D |f|^p \delta^s dV < \infty\}. \end{aligned}$$

$$A_{-1}^p(D) = H^p(D) \text{ (Hardy class)}$$

と定義する. ここで, dV は $\mathbf{C}^n$ のルベーグ測度で, $dV_{D \cap X}$ は $D \cap X$ 上の体積形式である. このとき, Beatrous [BEA] は次が成立することを示した. Cumenge [CUM](1983) は $s = -1$ の場合を証明した.

定理 1.6 (Beatrous [BEA](1985)) $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は C^2 境界をもつ強擬凸領域とする. すると, 線形作用素

$$E : A_{n-m+s}^p(D \cap X) \to A_s^p(D) \qquad (s \geq -1)$$

で, $Ef|_{D \cap X} = f$ をみたすものが存在する. ここで, $m = \dim_{\mathbf{C}} X$.

注意 1.3 Adachi-Kajimoto [ADK] は Kerzman-Stein [KES] の結果を利用して, D の部分多様体の境界上の Lipschitz 関数が $A(D)$ に属する関数に拡張可能である条件を考察した.

2. 一般の有界擬凸領域の部分多様体からの L^2 接続

定理 2.1 (大沢・竹腰の定理 [OHT](1987)) D は $\mathbf{C}^n$ の有界擬凸領域とする. φ は D 上の多重劣調和関数で, $X = \{z \in \mathbf{C}^n \mid z_n = 0\}$ とする. すると, D にのみ依存する定数 $C = C(D)$ が存在して, 次が成立する.

$D \cap X$ で正則な関数 f が

$$\int_{D \cap X} |f(z', 0)|^2 e^{-\varphi(z', 0)} dV' < \infty$$

を満たすならば, D 上の正則関数 F が存在して, $D \cap X$ 上で $F = f$ を満たし, さらに

$$\int_D |F|^2 e^{-\varphi} dV \leq C(D) \int_{D \cap X} |f|^2 e^{-\varphi} dV'$$

が成立する. ここで, dV, dV' はそれぞれ, $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}^{n-1}$ におけるルベーグ測度である.

Berndtsson は大沢・竹腰の定理における定数 $C(D)$ の具体的な数値を求めた.

定理 2.2 (Berndtsson [BR2](1996)) D は $\mathbf{C}^n$ の有界擬凸領域とする. φ は D 上の多重劣調和関数とする. h は D で正則で, $|h| \leq 1$ とする. $V = \{z \in D \mid h(z) = 0\}$ とする. すると, V で正則な関数 f に対して, D 上の正則関数 F が存在して, V 上で $F = f$ をみたし, さらに

$$\int_D |F|^2 e^{-\varphi} dV \leq 4\pi \int_V |f|^2 \frac{e^{-\varphi}}{|\partial h|^2} dV'$$

が成立する.

注意 2.1 Siu [SIU](1996) は定理 2.1 における定数 $C(D)$ は $D \subset \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z_n| \leq 1\}$ のとき $C(D) = \frac{64}{9}\pi\left(1+\frac{1}{4e}\right)^{1/2}$ と取ることができることを示した.

注意 2.2 Adachi-Andersson-Cho [ADO] は Berndtsson の積分公式を利用して解析的多面体の部分多様体上の H^p 接続と L^p 接続を考察した.

3. L^p $(p > 2)$ 接続に関する Diederich-Mazzilli の反例

$\mathbf{C}^n$ の滑らかな境界をもつ有界領域 D 上の微分形式に対するウエイト付き積分公式が Berndtsson-Andersson [BRA](1982) によって作られた. この積分公式をさらに発展させることにより, D の閉包 $\overline{D}$ の近傍における部分多様体 X が ∂D と横断的に交わる場合に, Berndtsson [BR1](1983) が $X \cap D$ 上の積分公式を導いた. 部分多様体上の正則関数に関する積分公式は他にも余次元 1 の場合に, Stout [STO](1975), それを任意次元に拡張した Hatziafratis [HAT](1986) による積分公式がある. 滑らかな境界をもつ有界凸領域における Berndtsson の積分公式は次のように表される.

$D = \{z \mid \rho(z) < 0\}$ は $\mathbf{C}^n$ の滑らかな境界をもつ有界凸領域とする. $f_1, \cdots, f_m$ は $\overline{D}$ の近傍 $\widetilde{D}$ で正則で, ∂D において $\partial f_1 \wedge \cdots \wedge \partial f_m \wedge \partial\rho \neq 0$ と仮定する. $g_i^j(z,\zeta)$ は $\widetilde{D} \times \widetilde{D}$ で正則で

$$f_j(z) - f_j(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} g_i^j(z,\zeta)(z_i - \zeta_i) \qquad ((z,\zeta) \in \widetilde{D} \times \widetilde{D})$$

をみたすとする.

$$\begin{aligned}
X &= \{z \in \widetilde{D} \mid f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}, \\
Q &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j} d\zeta_j, \\
g^j &= \sum_{i=1}^{n} g_i^j d\zeta_i \qquad (j = 1, 2, \cdots, m), \\
\mu &= C_m \frac{g^1 \wedge \cdots \wedge g^m \wedge \overline{\partial f_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial f_m}}{\|\partial f\|^2} dV_{D\cap X}
\end{aligned}$$

とおく. ここで, $dV_{D\cap X}$ は $D \cap X$ 上の体積形式である. このとき, 次の定理が成立する.

定理 3.1 f が $D \cap X$ において正則, $\overline{D \cap X}$ で C^1 級ならば, N を自然数とするとき, $z \in D \cap X$ に対して

$$f(z) = C_{n,m} \int_{D\cap X} f(\zeta) \left(\frac{\rho(\zeta)}{< \partial\rho(\zeta), z - \zeta > + \rho(\zeta)}\right)^{N+n-m} \left(\bar{\partial}\left(\frac{Q}{\rho}\right)\right)^{n-m} \wedge \mu \qquad (2)$$

が成立する. ここで

$$< \partial\rho(\zeta), z - \zeta > = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j}(\zeta)(z_j - \zeta_j)$$

と定義する.

D は $\mathbf{C}^n$ における複素楕円体とする. すなわち, $q_1, \cdots, q_n$ を自然数とするとき

$$D = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \rho(z) = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2q_j} - 1 < 0\}$$

と表される. D は滑らかな境界をもつ有界凸領域である.

$$q = \sup_{1 \le j \le n} \{q_j\}$$

とおく. このとき次の不等式が成立する.

補題 3.1(Range [RAN](1976)) $(\zeta, z) \in \overline{D} \times \overline{D}$ に対して, 定数 $C > 0$ が存在して次が成立する.

$$\mathrm{Re}(< \partial\rho(\zeta), \zeta - z > -\rho(\zeta)) \ge C(-\rho(\zeta) - \rho(z) + \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^{2q_j - 2}|z_j - \zeta_j|^2 + |z_j - \zeta_j|^{2q_j}). \quad (3)$$

不等式 (3) を用いて Range は次を証明した.

定理 3.2 (Range [RAN]) 定数 $C > 0$ が存在して, 次が成立する.

D 上のすべての有界 $\bar{\partial}$ 閉 $(0,1)$ 形式 f に対して, D 上の $1/q$-Hölder 連続な関数 u が存在して,

$$\bar{\partial} u = f, \quad \|u\|_{1/q, D} \le C\|f\|_D$$

が成り立つ.

Diederich-Mazzilli は Berndtsson の積分公式 (2) と不等式 (3) を用いて, 複素楕円体の部分多様体からの正則関数の L^p $(p > 2)$ 接続に関する反例を与えた. H.R. Cho [CHO](1998) も Fornaess-Sibony [FOS] の結果を用いて反例を与えている.

定理 3.3(Diederich-Mazzilli [DIM](1997)) $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 p と複素楕円体 $D \subset \mathbf{C}^{2p+1}$, ∂D と横断的に交わる $\mathbf{C}^{2p+1}$ の部分多様体 X, $D \cap X$ 上の有界正則関数 f が存在して, 次を満たす.

D 上の正則関数 g で, $D \cap X$ 上で $g = f$ を満たし, $g \in L^{2+\varepsilon}(D)$ となるものは存在しない.

4. $\bar{\partial}$ 問題の解の評価

定義 $f \in L^2_{(p,q)}(D, \varphi)$ であるとは

$$\|f\|^2_\varphi := \int_D |f|^2 e^{-\varphi} dV < \infty.$$

が成立することをいう.

$D \subset \mathbf{C}^n$ は擬凸開集合とする. このとき Hörmander は次の定理を証明した.

定理 4.1 (Hörmander [HR1, HR2](1965)) $D \subset \mathbf{C}^n$ は擬凸開集合で, φ は D 上の多重劣調和関数とする. もし $g \in L^2_{(p,q+1)}(D, \varphi)$ が $\bar{\partial} g = 0$ を満たすならば, $\bar{\partial} u = g$ の解 $u \in L^2_{(p,q)}(D, \mathrm{loc})$ で,

$$\int_D |u|^2 e^{-\varphi}(1 + |z|^2)^{-2} dV \le \int_D |g|^2 e^{-\varphi} dV.$$

を満たすものが存在する.

$D \subset\subset \mathbf{C}^n$ が滑らかな境界をもつ強擬凸領域のとき, D 上の $\bar{\partial}$ 問題の解の一様評価と Hölder 評価が得られた.

定理 4.2 $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかな境界をもつ強擬凸領域とする．すると，定数 $C > 0$ が存在して次が成立する．

(1) (Grauert-Lieb [GRL](1970), Lieb [LIE](1970), Kerzman [KER](1971), Ovrelid [OVR](1971)) $f \in L^r_{(p,q)}(D)$ $(1 \le r \le \infty)$ が $\bar\partial f = 0$ を満たすならば，$\bar\partial g = f$ を満たす $g \in L^r_{(p,q-1)}(D)$ が存在する．

(2) (Henkin-Romanov [HEV](1971)) D 上の有界な (p,q) 形式 f が $\bar\partial f = 0$ を満たすならば，D 上の $(p, q-1)$ 形式 g が存在して，

$$\|g\|_{1/2,D} \le C\|f\|_{0,D}, \quad \bar\partial g = f$$

が成り立つ．

注意 4.1 (1) E.M. Stein は $\overline{D}$ 上の連続 $(0,1)$ 形式 f で $\bar\partial f = 0$ を満たすものが存在して，任意の $\alpha > \frac{1}{2}$ に対して $\|g\|_{\alpha,D} < \infty$ をみたす $\bar\partial g = f$ の解 g は存在しないことを証明した．

(2) 定理 4.2 は滑らかでない境界をもつ $\mathbf{C}^n$ の強擬凸領域に対しても成り立つことを Bruna-Burguès [BRB] (1987) が証明した．

5. 滑らかでない境界をもつ強擬凸領域の部分多様体からの正則関数の拡張

$D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかでない境界をもつ強擬凸領域で，$X = \{z \in \mathbf{C}^n \mid z_n = 0\}$ とする．

$\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$ に対して，

$$\zeta' = (\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1}),$$

$$\partial_{\zeta'} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} d\zeta_j, \quad \bar\partial_{\zeta'} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar\zeta_j} d\bar\zeta_j,$$

$$d_{\zeta'} = \bar\partial_{\zeta'} + \partial_{\zeta'}, \quad \omega_{\zeta'}(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_{n-1},$$

$$(w'(z,\zeta)) = (w_1(z,\zeta), \cdots, w_{n-1}(z,\zeta))$$

と定義する．ここで，$w(z,\zeta) = (w_1(z,\zeta), \cdots, w_n(z,\zeta))$ は定理 1.4 におけるものとする．

$$\omega_{\zeta'}\left(\frac{\chi(\zeta)(w(z,\zeta))'}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right) = \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bar\partial_{\zeta'}\left(\frac{\chi(\zeta) w_j(z,\zeta)}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right)$$

と定義する．定理 1.4 より，$\partial D \backslash X$ の開近傍 $U_{\partial D\backslash X}$ が存在して

$$\widetilde{\Phi}(z,\zeta) \neq 0 \qquad (\zeta \in X \cap \overline{D},\ z \in D \cup U_{\partial D \backslash X})$$

が成立する．

$f \in \mathcal{O}(D \cap X) \cap L^1(D \cap X)$ と $z \in D \cup U_{\partial D\backslash X}$ に対して

$$Ef(z) := \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{X \cap D} f(\zeta)\omega_{\zeta'}\left(\frac{\chi(\zeta)(w(z,\zeta))'}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)}\right) \wedge \omega_{\zeta'}(\zeta)$$

と定義する．このとき，定理 1.5 より次が成立する．

定理 5.1 $X \cap D$ 上の正則関数 f に対して，$Ef(z)$ は $D \cup U_{\partial D \backslash X}$ において正則で

$$Ef(z) = f(z) \qquad (z \in X \cap D)$$

が成立する．

$z \in U, \zeta \in U \cap D$ に対して

$$\Phi^*(z,\zeta) = \Phi(\zeta, z), \quad {}^*w(z,\zeta) = -w(\zeta, z)$$

$${}^*w'(z,\zeta) = ({}^*w_1(z,\zeta), \cdots, {}^*w_{n-1}(z,\zeta))$$

と定義する．このとき，次の定理が成立する．

定理 5.2 (Henkin-Leiterer [HER](1984)) f は $X \cap D$ において正則とする．このとき，$z \in \partial D \backslash X$ に対して

$$Ef(z) = z_n \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{X \cap D} f(\zeta) \det{}_{1,n-1} \left(\frac{{}^*w(z,\zeta)}{\Phi^*(z,\zeta)}, \bar{\partial}_{\zeta'} \frac{\chi(\zeta) w(z,\zeta)}{\widetilde{\Phi}(z,\zeta)} \right) \wedge \omega_{\zeta'}(\zeta)$$

が成立する．

定理 5.3 (Henkin-Leiterer [HER](1984))

$$|Ef(z)| \leq C \|f\|_{D \cap X} \qquad (z \in \overline{D} \backslash (\partial D \cap X))$$

注意 5.1 D が滑らかな境界をもつ強擬凸領域の場合の証明では

$$t_1(\zeta) = \rho(\zeta) - \rho(z), \quad t_2(\zeta) = \operatorname{Im} \Phi(z,\zeta),$$

$$t_{2j-1}(\zeta) = \operatorname{Re}(\zeta_j - z_j), \quad t_{2j}(\zeta) = \operatorname{Im}(\zeta_j - z_j) \qquad (j = 2, \cdots, n-1)$$

とおくと $(t_1, \cdots, t_{2n-2})$ が $D \cap X$ において局所座標系を構成することから積分を評価するが，境界が滑らかでない場合は $d\rho = 0$ となる境界点が存在するのでそれに代わるものが必要である．

定理 5.3 から $X \cap D$ 上の有界正則関数は D 上の有界正則関数に拡張される．さらに次の定理が成立する．

定理 5.4 (Henkin-Leiterer [HER](1984)) X は Stein 多様体とする．$D \subset\subset X$ は強擬凸領域とする．∂D は必ずしも滑らかでなくてもよい．X は $\overline{D}$ の近傍における閉部分多様体とする．このとき次が成立する．

(1) $X \cap D$ 上の有界正則関数 f に対して，D 上の有界正則関数 F が存在して，$X \cap D$ 上で $F = f$ が成立する．

(2) $X \cap \overline{D}$ 上連続で，$X \cap D$ 上正則な関数 f に対して，$\overline{D}$ 上で連続，D 上正則な関数 F が存在して，$X \cap D$ 上で $F = f$ が成立する．

定義 5.1 $S^{reg} = \{z \in \partial D \mid d\rho(z) \neq 0\}$ は境界の滑らかな部分とする．すると集合 $\partial D \backslash S^{reg}$ は局所的に実次元が n 以下の C^1 部分多様体に含まれる．

滑らかでない境界をもつ強擬凸領域 $D = \{z \mid \rho(z) < 0\}$ と $\gamma > 0$ に対して

$$E_\gamma(z) = \{\zeta \in D \mid |\zeta - z| < \gamma \|d\rho(z)\|\}$$

とおく．また，

$$t(z,\zeta) = \mathrm{Im} < w(z,\zeta), \zeta - z >,$$

$$\zeta_j = \xi_j + i\xi_{j+n}, \quad z_j = \eta_j + i\eta_{j+n}$$

とおく．ここで，$w(z,\zeta)$ は D に対する Leray 写像である．このとき，Schmalz [SCH](1989) は滑らかでない境界をもつ強擬凸領域 D に対して次の定理を証明した．

定理 5.5 定数 $c > 0$, $\gamma > 0$ と自然数 μ, $\nu \in \{1, \cdots, 2n\}$ が存在して次が成立する．

$\{\rho, t(z,\zeta), \xi_1, \cdots, {}_{\hat{\mu}}, {}_{\hat{\nu}}, \cdots, \xi_{2n}\}$ (ここで，ξ_μ と ξ_ν は除かれることを意味する) は $E_\gamma(z)$ において座標系を構成する．さらに次の評価式が成立する．

$$d\sigma(\zeta) \leq \frac{c}{\|d\rho(z)\|} |d_\zeta t(z,\zeta) \wedge \cdots, \cdots, {}_{\hat{\mu}}, {}_{\hat{\nu}}, \cdots \wedge d\xi_{2n}| \qquad (\zeta \in S^{reg} \cap E_\gamma(z)),$$

$$dV(\zeta) \leq \frac{c}{\|d\rho(\zeta)\|^2} |d\rho(\zeta) \wedge d_\zeta t(z,\zeta) \wedge \cdots, \cdots, {}_{\hat{\mu}}, {}_{\hat{\nu}}, \cdots \wedge d\xi_{2n}| \qquad (\zeta \in E_\gamma(z)).$$

ここで，$d\sigma$ は S^{reg} 上の面測度で，dV は $\mathbf{C}^n$ 上のルベーグ測度である．

定理 5.6 (Adachi [AD5](2003)) $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかでない境界をもつ強擬凸領域とする．$D \cap X$ 上の L^p $(p \geq 1)$ 正則関数 f に対して，D 上の L^p 正則関数 F で，$F|_{D \cap X} = f$ をみたすものが存在する．

定義 5.2 $0 < p < \infty$ に対して，$Ef \in H^p(D)$ であるとは

$$\int_{S^{reg} \backslash X} |Ef(z)|^p d\sigma < \infty$$

を満たすことと定義する．

定理 5.7 (Adachi [AD6](2007)) $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ は滑らかでない境界をもつ強擬凸領域とする．D の定義関数 ρ は C^3 級と仮定する．$f \in L^p(X \cap D)$ $(1 < p < \infty)$ は $X \cap D$ で正則とする．すると $F \in H^p(D)$ で，$F|_{X \cap D} = f$ を満たすものが存在する．

参考文献

[AD1] K. Adachi, *Continuation of A^∞-functions from submanifolds to strictly pseudoconvex domains*, J. Math. Soc. Japan **32**(1980), 331-341.

[AD2] K. Adachi, *Extending bounded holomorphic functions from certain subvarieties of a weakly pseudoconvex domain*, Pacific J. Math., **110**(1984), 9-19.

[AD3] K. Adachi, *Continuation of bounded holomorphic functions from certain subvarieties to weakly pseudoconvex domains*, Pacific J. Math., **130**(1987), 1-8.

[AD4] K. Adachi, *Continuation of holomorphic functions from subvarieties to pseudoconvex domains*, Kobe J. Math., **11**(1994), 33-47.

[AD5] K. Adachi, *L^p extension of holomorphic functions from submanifolds to strictly pseudoconvex domains with nonsmooth boundary, Nagoya Math. J.* **172**(2003), 103-110.

[AD6] K. Adachi, *Extensions of holomorphic functions from submanifolds of a strictly pseudoconvex domain with non-smooth boundary*, Bull. Fac. Edu. Nagasaki University: Natural Science, No. **75**(2007), to appear.

[AD7] K. Adachi, *Several complex variables and integral formulas*, World Scientific, 2007, to appear.

[ADK] K. Adachi and H. Kajimoto, On the extension of Lipschitz functions from boundaries of subvarieties to strongly pseudoconvex domains, Pacific J. Math., **158**(1993), 201-222.

[ADO] K. Adachi, M. Andersson and H.R. Cho, *L^p and H^p extensions of holomorphic functions from subvarieties of analytic polyhedra*, Pacific J. Math., **189**(1999), 201-210.

[AM1] E. Amar, *Extension de fonctions holomorphes et courants*, Bull. Sci. Math., **107**(1983), 25-48.

[AM2] E. Amar, *Cohomologie complexe et applications*, J. London Math. Soc., **29**(1984), 127-140.

[BEA] F. Beatrous, *L^p estimates for extensions of holomorphic functions*, Michigan Math. J., **32**(1985), 361-380.

[BR1] B. Berndtsson, *A formula for interpolation and division in* $\mathbf{C}^n$, Math. Ann., **263**(1983), 399-418.

[BR2] B. Berndtsson, *The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman*, Ann. Inst. Fourier, **46**(1996), 1083-1094.

[BRA] B. Berndtsson and M. Andersson, *Henkin-Ramirez formulas with weight factors*, Ann. Inst. Fourier, **32**(1982), 91-110.

[BRB] J. Bruna and J. Burguès, *Holomorphic approximation and estimates for the ∂-equation on strictly pseudoconvex nonsmooth domains*, Duke Math. J., **55**(1987), 539-596.

[CHO] H.R. Cho, *A counterexample to the L^p extension of holomorphic functions from subvarieties to pseudoconvex domains, Complex Variables* **35**(1998), 89-91.

[CUM] A. Cumenge, *Extension dans des classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimation de type "measures de Carleson" pour l'equation ∂*, Ann. Inst. Fourier, **33**(1983), 59-97.

[DIM] K. Diederich and E. Mazzilli, *Extension and restriction of holomorphic functions*, Ann. Inst. Fourier, **47** (1997), 1079-1099.

[ELG] M. Elgueta, *Extensions to strictly pseudoconvex domains of functions holomorphic in a submanifold in general position and C'nfty up to the boundary*, Ill. J. Math., **24**(1980), 1-17.

[FOS] J.E. Fornaess and N. Sibony, *On L^p estimates for $\bar\partial$*, Proc. Symp. Pure Math., **52**(1991), 129-163.

[GRL] H. Grauert and I. Lieb, *Das Ramirezsche integral und die Lösung der Gleichung $\bar\partial f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen*, Proc. Conf. Complex Analysis, Rice University, **56**(1970), 29-50.

[HAT] T.E. Hatziafratis, *Integral Representation formulas on analytic varieties*, Pacific J. Math., **123** (1986), 71-91.

[HEN] G.M. Henkin, *Continuation of bounded holomorphic functions from submanifolds in general position in a strictly pseudoconvex domain*, Math. USSR Izv., **6**(1972), 536-563.

[HER] G.M. Henkin and J. Leiterer, *Theory of functions on complex manifolds*, Birkhäuser, 1984.

[HEV] G.M. Henkin and A.V Romanov, *Exact Hölder estimates for the solutions of the $\bar\partial$-equation*, Math. USSR Izvestija, **5**(1971), 1180-1192.

[HR1] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar\partial$-operator*, Acta Math., **113**(1965), 89-152.

[HR2] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, Third edition, North Holland, 1990.

[JAK] P. Jakóbczak, *On the regularity of extension to strictly pseudo-convex domains of functions holomorphic in a submanifold in general position*, Ann. Polon. Math., **42**(1983), 115-124.

[KER] N. Kerzman, *Hölder and L^p estimates for solutions of $\bar\partial u = f$ in strongly pseudoconvex domains*, Comm. Pure Appl. Math., **24**(1971), 301-379.

[KES] N. Kerzman and E.M. Stein, *The Szegö kernel in terms of Cauchy-Fantappiè kernels*, Duke Math. J., **45**(1978), 197-224.

[OHT] T. Ohsawa and K. Takegoshi, *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z., **195**(1987), 197-204.

[LIE] I. Lieb, *Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten*, Math. Ann., **190**(1970), 6-44.

[OVR] N. Ovrelid, *Integral representation formulas and L^p estimates for the bar∂-equation*, Math. Scand., **29** (1971), 137-160.

[RAM] E. Ramirez, *Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis*, Math. Ann., **184**(1970), 172-187.

[RAN] R.M. Range, *On Hölder estimates for $\bar{\partial}u = f$ on weakly pseudoconvex domains*, Int. Conf. Cortona, 1976.

[SCH] G. Schmalz, *Solution of the $\bar{\partial}$-equation with uniform estimates on strictly q-convex domains with non-smooth boundary*, Math. Z., **202** (1989), 409-430.

[SIU] Y.T. Siu, *The Fujita conjecture and the extension theorem of Ohsawa-Takegoshi*, Proc. 3rd Int. RIMSJ., Geometric Complex Analysis, 1996, 577-592.

[STO] E.L. Stout, *An integral formula for holomorphic functions on strictly pseudoconvex hypersurfaces*, Duke Math. J., **42**(1975), 347-356.

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．