日 本 数 学 会

２ ０ ０ ６ 年度秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会

講 演 アブストラクト

２ ０ ０ ６ 年 ９ 月

於　大 阪 市 立 大 学

函 数 論 分 科 会

9 月 19 日 (火) 第 VI 会場

9:00 ~ 12:00

14:15 ~ 16:05

16:30 ~ 17:30 特別講演

平地健吾 (東大数理) Szegö 核の不変式論

9 月 20 日 (水)　第 VI 会場

9:00 ~ 11:45

13:00 ~ 14:00　特別講演

角 大 輝 (阪 大 理)* 有理半群, ランダムな複素力学系と複素平面上の特異関数

1

N- Fractional Calculus of Some Composite Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article N- fractional calculus of composite functions

$$((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha} \qquad ((z-b)^{\beta}-c \neq 0)$$

and

$$\log((z-b)^{\beta}-c) \qquad ((z-b)^{\beta}-c \neq 0,1)$$

are discussed.

Theorem 1. *We have*

(i) $$(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha})_{\gamma} = e^{-i\pi\gamma}(z-b)^{\alpha\beta-\gamma}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\alpha]_k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(\beta k-\alpha\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta k-\alpha\beta)} \left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^k, \quad \left(\left| \frac{\Gamma(\beta k-\alpha\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta k-\alpha\beta)} \right| < \infty \right) \quad (1)$$

and

(ii) $$(((z-b)^{\beta}-c)^{\alpha})_m = (-1)^m (z-b)^{\alpha\beta-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\alpha]_k \, [\beta k-\alpha\beta]_m}{k!} \left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^k, \quad (2)$$

$$(m \in Z_0^+),$$

where $$|c/(z-b)^{\beta}| < 1,$$

and

$$[\lambda]_k = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1) = \Gamma(\lambda+k)/\Gamma(\lambda) \quad \textit{with} \quad [\lambda]_0 = 1,$$

(Notation of Pochhammer).

Theorem 2. We have

(i) $$(\log((z-b)^{\beta}-c))_{\gamma} = -e^{-i\pi\gamma}\beta(z-b)^{-\gamma}\Gamma(\gamma)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta k+\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta k+1)} \left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^k, \quad \left(|\Gamma(\gamma)|, \left| \frac{\Gamma(\beta k+\gamma)}{\Gamma(\beta k)} \right| < \infty \right), \quad (3)$$

and

(ii) $$(\log((z-b)^{\beta}-c))_m = (-1)^{m+1}\beta(z-b)^{-m}\Gamma(m)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta k+m)}{\Gamma(m)\Gamma(\beta k+1)} \left(\frac{c}{(z-b)^{\beta}}\right)^k, \quad (m \in \mathbf{Z}^+), \quad (4)$$

where

$$(z-b)^{\beta}-c \neq 0,1 \quad \textit{and} \quad |c/(z-b)^{\beta}| < 1 .$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto; On the fractional calculus of functions $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 19 - 27.

[7] S.-T. Tu and K. Nishimoto ;On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc. Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[8] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of The Power and Logarithmic Functions, and Some Identities, J. Frac.Calc.Vol.21, May (2002), 1 - 6.

[9] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I , J. Ftac. Calc. Vol. 21, May (2002), 7 - 12.

[10] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions and Some Identities (Continue), J. Frac. Calc. Vol.22, Nov. (2002), 59 - 65.

[11] David Dummit and Richard M. Foote ; Abstract Algebra, Prentice Hall (1991).

[12] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).

[13] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[14] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.

[15] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Diffetial Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[16] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No.301, (1994), Longman.

[17] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continume Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.

[18] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.

[19] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

2

N - Fractional Calculus of Some Products which Contain Some Logarithmic Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In a previous paper of the author, the N- fractional calculus of products of power functions ;

$$((z-c)^{\alpha}\cdot(z-c)^{\beta})_{\gamma}\ ,\ ((z-c)^{\beta}\cdot(z-c)^{\alpha})_{\gamma}\ ,\ \text{and}\ ((z-c)^{\alpha+\beta})_{\gamma}\ ,$$

$$\text{where}\quad z-c\neq 0 \text{ and } \alpha,\beta,\gamma\ \notin Z_0^+,$$

are discussed.

In this article, N- fractional calculus of some products which contain some logarithmic functions are discussed.

That is,

$$((z-c)^{\alpha}\cdot(\log(z-c))_{-\beta})_{\gamma}$$

and

$$((\log(z-c))_{-\alpha}\cdot(\log(z-c))_{-\beta})_{\gamma}\ ,$$

$$\text{where}\quad z-c\neq 0,1 \text{ and } \alpha,\beta,\gamma\ \notin Z_0^+.$$

are discussed for example.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto ; Some values of products $(z^{\beta}\cdot z^{\gamma})_{\alpha}$ obtained by computer, J. Frac. Calc. Vol.1, May (1992), 1 - 6.

[7] K. Nishimoto ; Some equalities derived from the fractional differintegrated functions $g(z,\alpha)=(e^{z}\cdot z)_{\alpha}$, and $h(z,\alpha)=(\log z\cdot z)_{\alpha}$, J. Frac. Calc. Vol.2, Nov. (1992), 1 - 9.

3 2つの1点集合と2つの2点集合を共有する有理形関数の一意性について

城崎　学　　　　大阪府立大学工学部

竹谷匡玄　　　　大阪府立大学大学院工学研究科

$\mathcal{A} = \{S_j\}_{j=1}^{q}$ を $\hat{C}$ の互いに交わらない有限集合の有限族とする．

定義. $\mathcal{A}$ が有理形関数に対する一意性をもつとは，C 上の非定数有理形関数 f, g に対して，

$$f^{-1}(S_j) = g^{-1}(S_j) \quad (CM) \quad (1 \leq j \leq q)$$

から $f = g$ が導かれるときにいう．

例えば Nevanlinna の 4 点定理より，

定理A. $q = 4$ で $S_j = \{a_j\}$ はすべて 1 点集合とする．このとき，a_1, a_2, a_3, a_4 の非調和比が任意の順で -1 でなければ，$\mathcal{A}$ は有理形関数に対する一意性をもつ．

が成り立つ．

定理B (Tohge). $q = 4$ で $S_1 = \{1\}, S_2 = \{-1\}, S_3 = \{\infty\}, S_4 = \{a, b\}$ とする．このとき，条件

$$a + b \neq 0,\ ab \neq 1,\ a + b \neq \pm 2,\ (a \pm 1)(b \pm 1) \neq 4$$

が成り立てば，$\mathcal{A}$ は有理形関数に対する一意性をもつ．

[8] K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 19 - 27.
[9] K. Nishimoto and Shih -Tong Tu ; On the fractional calculus $((z-a)^{\beta}\cdot(z-b)^{\gamma})_{\alpha}$, J. Frac. Calc. Vol.4, Nov. (1993), 13 - 21.
[10] Shih - Tong Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc.Vol.5, May (1994), 35 - 43.
[11] Shih - Tong Tu and Ding - Kuo Chyan ; A certain family of infinite series, differintegrable functions and Psi functions, J. Frac.Calc. Vol. 7, May (1995), 41 - 46.
[12] Katsuyuki Nishimoto ; On $(e^{z}\cdot z^{m})_{-n}$ and $(z^{m}\cdot e^{z})_{-n}$, where $m\in Z_0^{+}$, $n\in Z^{+}$ (A serendipity in N- fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 12, Nov. (1997), 23 - 27.
[13] J. Matera, A. I. Prieto, S. S. de Romero and K. Nishimoto ; N- Fractional calculus of some elementary functions, J. Frac. Calc. Vol. 12, Nov. (1997), 37 - 46.
[14] K. Nishimoto and Tsu - Chen Wu ; On $(z^{m}\cdot\log z)_{-n}$ nad $(e^{mz}\cdot\log z)_{-n}$,where $m\in Z_0^{+}$, $n\in Z^{+}$ (A serendipity in N- fractional calculus), J. Frac. Calc.Vol.13, May (1998), 29 - 36.
[15] Shih - Tong Tu, Ding - Kuo Chyan and Shing - Hwa Leu ; Commutativity of Leibniz Rule in Fractional Calculus , J. Frac. Calc.Vol.14, Nov. (1998), 77 - 82.
[16] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Products of Some Power Functions, J. Frac. Calc. Vol. 27, May (2005), 83 - 88.
[17] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus (1974), Academic Press.
[18] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.
[19] S. G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.
[20] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Diffetial Equations, John Wiley & Sons, (1993).
[21] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No. 301, (1994), Longman.
[22] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.
[23] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 JAPAN

定義. ~~$\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を $\hat{C}$ の分割とする，i.e., S_α は互いに交わらない $\hat{C}$ の部分集合で，$\cup_{\alpha\in A}S_\alpha = \hat{C}$. このと~~き，点 $z \in \hat{C}$ が 1 次変換 T の $\mathcal{A}$ に対する**渡り歩き点**とは，z と $T(z)$ が同じ $S_j(j=0,1,\cdots,q)$ に入っていないときにいう．ただし，$S_0 = \hat{C}\setminus(\cup_{j=1}^{q}S_j)$.

定理C. q は 6 以上の整数として，S_j はすべて 2 点集合とする．$\mathcal{A}$ に対して恒等変換以外の任意の 1 次変換が 3 個以上の渡り歩き点をもつならば，$\{S_1,\cdots,S_q\}$ は有理形関数に対する一意性をもつ．

注意. 一般に族 $\mathcal{A}=\{S_1,\cdots,S_q\}$ をとったとき，それに対し渡り歩き点が 2 個以下の恒等変換でない 1 次変換 T が存在すれば，有理形関数 f を適当にとって $g=T(f)$ とすることにより，族 $\mathcal{A}$ が有理形関数に対する一意性を持たないことが分かる．すなわち，恒等変換でない 1 次変換の渡り歩き点が 3 点以上という条件は $\mathcal{A}$ が有理形関数に対する一意性をもつための必要条件である．

では，定理Cで条件 $q\geq 6$ を落とせるか？　この場合でも注意より $q\geq 3$ が必要である．ここではこの問題を少しやさしくして，2 つの 1 点集合と 2 つの 2 点集合からなる族を考える．

定理. $q=4$ とし，S_1, S_2 は 2 点集合，S_3, S_4 は 1 点集合とする．このとき，$\mathcal{A}$ に対して恒等変換以外の任意の 1 次変換が 3 個以上の渡り歩き点をもつならば，$\mathcal{A}$ は有理形関数に対する一意性をもつ．

4 On a defect relation for holomorphic curves (II)

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, we put

$$(\boldsymbol{a}, f(z)) = a_1 f_1(z) + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}(z), \quad (\boldsymbol{a}, f) = a_1 f_1 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}.$$

Let $t \geq 0$. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has at least one zero in $|z| \geq t$, we say that $\boldsymbol{a}$ has multiplicity $m(t)$ if all the zeros of the equation $(\boldsymbol{a}, f(z)) = 0$ in $|z| \geq t$ have multiplicity at least $m(t)$, while at least one zero in $|z| \geq t$ has multiplicity $m(t)$. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has no zero in $|z| \geq t$, we set $m(t) = \infty$.

For any positive integer k, we put

$$\mu_k(\boldsymbol{a}, f; t) = 1 - \frac{k}{\max(m(t), k)}.$$

Then, $\mu_k(\boldsymbol{a}, f; t)$ is increasing with respect to t; $0 \leq \mu_k(\boldsymbol{a}, f; t) \leq \delta_k(\boldsymbol{a}, f) \leq 1$ and $\mu_k(\boldsymbol{a}, f; t) = 1$ if and only if $m(t) = \infty$. $\boldsymbol{a}$ is Picard-exceptional for f if and only if there exists a number t such that $\mu_k(\boldsymbol{a}, f; t) = 1$.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$.

Defect Relation (see [1, Theorem 3.3.15]). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequality:

$$\sum_{j=1}^{q} \mu_n(\boldsymbol{a}_j, f; t) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curve f extremal for the defect relation.

(b) Let $\boldsymbol{C}(z)$ be the field of rational functions and we put

$$V = \{(c_1, \cdots, c_{n+1}) \mid \sum_{j=1}^{n+1} c_j f_j = 0, c_j \in \boldsymbol{C}(z)\}.$$

V is a vector space over $\boldsymbol{C}(z)$. We put $d_p = \dim V$. Then, $0 \leq d_p \leq n-1$.

For a non-empty finite subset P of X, we denote
$V(P)$=the vector space generated by elements of P;
$d(P) = \dim V(P)$.

2. Result. We put

$$M_n^+(t) = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \mu_n(\boldsymbol{a}, f; t) > 0\} \text{ and } M_n^1(t) = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \mu_n(\boldsymbol{a}, f; t) = 1\}.$$

Proposition. (a) $\#M_n^1(t) \leq N + 1 + (N-n)/(n-d_p)$ ([2]).
(b) $\#M_n^+(t) \leq (n+1)(2N-n+1)$.
(c) If $d(M_n^1(t)) \geq n+1$, then, $M_n^+(t) \subset M_n^1(t)$.

Let ℓ be a positive integer.
Theorem. Suppose that $N > n \geq 2$. If for some t

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in M_n^+(t)} \mu_n(\boldsymbol{a}, f; t) = 2N - n + 1,$$

then, we have the followings:
(a) For any $\boldsymbol{a} \in X - M_n^1(t)$, $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 0$.

(b) (i) $d_p = n - 1$ and $\#M_n^1(t) = 2N - n + 1$ or
(ii) $d(M_n^1(t)) \leq (n+1)/2$ and $\#M_n^1(t) \leq (2N-n+1)/2$.

(c) When $n = 2\ell$, $\#M_n^1(t) > (2N-n+1)/(n+1)$.

(d) When $n = 2\ell - 1$, either (I) $\#M_n^1(t) > (2N-n+1)/(n+1)$ or

(II) $\#M_n^+(t)$ is divisible by $N - \ell + 1$ and for $p = \#M_n^+(t)/(N-\ell+1)$

$$M_n^+(t) = \bigcup_{j=1}^{p} P_j, \quad \#P_j = N - \ell + 1, \quad d(P_j) = \ell.$$

References

[1] Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Mathematics, Vieweg, Braunschweig/Wiesbarden,1993.

[2] A.A.Goldberg and S.B.Tushkanov: On the exceptional linear combinations of entire functions. Teor. Funk. Anal. i Pril., 13(1971), 67-74 (in Russian).

5

A Valiron-Mokhon'ko type result for an entire function of small growth and its applications

石崎　克也（日本工業大学）

柳原　二郎

この講演で登場する函数は, 特に断らない限り複素平面上有理型なものとする. $R(w)$ を有理函数として, その次数を d とする. このとき, Nevanlinna の特性関数について

$$T(r, R(f)) = dT(r, f) + O(1) \tag{1}$$

が成り立つ. 実際には, R を z と w の有理函数 $R(z, w)$, その w についての次数 $\deg_w R$ を d としても $T(r, R(z, f)) = dT(r, f) + O(\log r)$ が成り立つ. この Valiron-Mokhon'ko の定理 [10], [7] と呼ばれる Nevanlinna の特性関数についての性質は複素平面上で微分方程式・函数方程式などを取り扱う際に多くの局面で応用されてきた. 例えば, Laine [8] など. 定理の特徴の一つに, Nevanlinna 理論特有の除外区間を含まないという事実がある. この性質は, 微分方程式などの取り扱いと異なり, 反復操作を必要とする函数方程式の取り扱いの際には重要である. Nevanlinna 理論を複素平面や単位円板ではなく角領域などにおいて展開したい場合 Valiron-Mokhon'ko 型の定理がどのような形で成り立つのかは常に考慮しなくてはならない問題と考えられる. 特に, (A)「(1) に対応する "等号" が成立する」かどうか, (B)「除外区間は取り除くことができるか」が問題である. 例えば角領域では Nevanlinna 角領域特性関数 $T_{\alpha\beta}(r, f)$ や Tsuji 特性関数 $\mathfrak{T}(r, f)$ [9], については (A) が成立つ [5, p.50] が, $T(r, f)$ を定義する積分を角領域に制限したものについては不等式しか得られない [6].

ここでは, R の代わりに増大度の小さい超越整函数 F とした場合を考える. f は整函数とし, F は次の増大の条件を満たすと仮定する

$$\log M(r, F) = K(\log r)^p(1 + o(1)), \tag{2}$$

ここで, $K > 0, p > 1$ である.

Theorem 1. 超越整函数 F は (2) を満たすとする. 次の等式が成り立つ.

$$\log M(r, F(f)) = K(\log M(r, f))^p(1 + o(1)). \tag{3}$$

考えられる問題として, F を (2) を満たす有理型函数に置き換えられるか, (3) において $\log M(r, f)$ を $T(r, f)$ に置き換えられるかどうか, などの問題が考えられる. Theorem 1 の証明の一方法は Clunie [3] の評価式の利用である.

(2) を満たす F の例として q 差分方程式の解がある [2]. 応用の一つとして Bergweiler-Hayman の条件 [1, p. 57] を満たす線形 q-差分方程式の整函数解を F とするとき, Theorem 1 の (3) によって Schröder 方程式 $f(sz) = F(f(z))$ の解 $f(z)$ に関しては, 任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して a は Valiron の除外値にならないことが得られる. このことは, Eremenko-Sodin [4] の結果は F が上記の条件を満たしている場合は自然に拡張されることを示している. 証明には第 2 基本定理に無限個の定数を許したものを用いる.

References

[1] Bergweiler W, and W. K. Hayman, *Zeros of solutions of a functional equation*, Comput. Methods Funct. Theory 3 (2003), 55–78.

$p = 2$

[2] Bergweiler, W., K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Growth of meromorphic solutions of some functional equations I*, Aequationes Math. 63 (2002) 140–151.

[3] Clunie, J., *The maximum modulus of an integral function of an integral function*, Quart. J. Math. (2) 6 (1955), 176–178.

[4] Eremenko, A. E. and M. L. Sodin, *Iteration of rational functions and the distribution of the values of the Poincaré functions*, J. Soviet Math. 58, (1992), 504–509.

[5] Gol'dberg, A. A. and I. V. Ostrovskii, Distribution of Values of Meromorphic Functions. Nauka, Moskva 1970.

[6] Ishizaki, K. and N. Yanagihara, *Borel and Julia directions of meromorphic Schröder functions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 139 (1) (2005), 139–147.

[7] Mokhon'ko A. Z., *The Nevanlinna chracteristics of certain meromorphic functions*, (Russian) Teor. Funkts., Funkts. Anal. Prilozh. 14, 83-87 (1971).

[8] Laine I., Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[9] Tsuji, M., Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen, Tokyo, 1959.

[10] Valiron, G., *Sur la dérivée des fonctions algébroïdes*, Bull. Soc. Math. France 59 (1931), 17–39.

6 優調和性の超関数的特徴付け

中井 三留（名工大・名誉教授）
多田 俊政（大同工大）

M を d 次元 ($d \geqq 2$) 連結 C^∞Riemann 多様体とし, 完閉でも非完閉でも良いとする. M 上の Kato 族の一般符号 Radon 測度の全体を $\mathcal{K}(M)$ と記す. M 上の固有体積測度 $\lambda \in \mathcal{K}(M)$ である. $\mu = (d\mu/d\lambda)\lambda + \mu_s$ を $\mu \in \mathcal{K}(M)$ の λ 絶対連続部分 $(d\mu/d\lambda)\lambda$ と λ 特異部分 μ_s への分解とし, $\mathrm{supp}(|\mu|_s)$ を μ の特異台と呼ぶ. $\mu \in \mathcal{K}(M)$ をポテンシャルに持つ Schrödinger 作用素 $-\Delta + \mu$ (Δ は M 上の Laplace-Beltrami 作用素) の定める調和層 H_μ による Brelot 調和空間 (M, H_μ) に於いて, M 上恒等的に $+\infty$ でない $(-\infty, +\infty]$ 値下半連続関数 u で, 各 H_μ 正則部分領域 V と ∂V 上 $u \geqq f$ となる全ての $f \in C(\partial M)$ に対し V 上で V 上の境界値 f の H_μ Dirichlet 解 $(H_\mu)_f^V \leqq u$ が満たされる時 u を M 上の μ 優調和関数と呼ぶ. 次の結果を報告する.

定理: $u \in C(M)$ が M 上 μ 優調和と成る為の必要十分条件は, 超関数の意味で, M 上

$$(1) \qquad (-\Delta + \mu)u \geqq 0$$

となる事, 即ち, 全ての $\varphi \in C_0^\infty(M)^+$ に対して

$$(2) \qquad -\int_M u(x)\Delta\varphi(x)d\lambda(x) + \int_M u(x)\varphi(x)d\mu(x) \geqq 0$$

となることである.

条件 $u \in C(M)$ は大変強い要求であることは承知しているが, 分り易くて応用上はこれでも十分有用である. 勿論 (1) を考える以上 $u \in L^1_{loc}(M, \lambda + |\mu|)$ は不可欠の大前提である. もし u が M 上 μ 優調和なら R.-M. Hervé ([1]) の F. Riesz の定理を使えば (1) は無条件に従う. 逆に u が $M \setminus \mathrm{supp}(|\mu_s|)$ 上本質的局所下方有界で $\mathrm{supp}(|\mu_s|)$ の各点で連続のとき (1) が成り立てば u は M 上 μ 優調和関数となる. よって特に μ が λ 絶対連続なら M 上 u が本質的局所下方有界で (1) を満たせば, u は M 上 μ 優調和となる. これは十分満足出来る結果と思う. 一般の場合の u の $\mathrm{supp}(|\mu_s|)$ の各点での連続性はいかにも強いが, 何等かの条件は置かねばならぬ ([4] 参照).

M 上正値 μ 優調和関数が存在しないとき (又は, 存在するとき) $\mu \in \mathcal{K}(M)$ は M 上 elliptic (又は, nonelliptic) と言いその全体を $\mathcal{K}_e(M)$(又は, $\mathcal{K}_{ne}(M)$) と記す. M 上各 $y \in M$ に対し

$$(-\Delta + \mu)g_\mu(\cdot, y) = \delta_y \quad \text{(Dirac delta)}$$

となる極値正連続関数 $g_\mu(\cdot,y)$ を y に極を持つ μ Green 関数と呼び, μ Green 関数が M 上に存在するとき μ を M 上 hyperbolic と言いその全体を $\mathcal{K}_h(M)$ と記す. $\mathcal{K}_h(M)\subset\mathcal{K}_{ne}(M)$ であり, $\mathcal{K}_p(M):=\mathcal{K}_{ne}\setminus\mathcal{K}_h(M)$ の各 μ は M 上 parabolic と言う. 次の直和分解が成り立つ.

$$\mathcal{K}(M)=\mathcal{K}_e(M)\dotplus\mathcal{K}_{ne}(M)=\mathcal{K}_e(M)\dotplus\mathcal{K}_p(M)\dotplus\mathcal{K}_h(M).$$

これ等について次の 2 結果が上記定理の応用として得られる.

増大不変性. $\boldsymbol{\mu\in\mathcal{K}_{ne}(M)}$ **で** $\boldsymbol{\mu\leqq\nu\in\mathcal{K}(M)}$ **かつ** $\boldsymbol{\mu\not\equiv\nu}$ **なら** $\boldsymbol{\nu\in\mathcal{K}_h(M)}$**.** (L. Myrberg [3], A. Lahtinen [2], [5] 参照)

縮小不変性. $\boldsymbol{\mu\in\mathcal{K}_{ne}(M)\setminus\{0\}}$ **のとき任意の実数** $\boldsymbol{c\in(0,1)}$ **に対し** $\boldsymbol{c\mu\in\mathcal{K}_h(M)}$**.** ([5] 参照)

参 照 文 献

[1] R.-M. HERVÉ: *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **12**(1962), 415-571.

[2] A. LAHTINEN: *On the solution of $\Delta u=Pu$ for acceptable densities on open Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **515**(1972), 1-38.

[3] L. MYRBERG: *Über die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung $\Delta u=c(P)u$ auf Riemannschen Flächen*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **170**(1954), 1-8.

[4] M. NAKAI: *Continuity of solutions of Schrödinger equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **110**(1991), 581-597.

[5] M. NAKAI AND T. TADA: *Growth and contraction invariance of hyperbolicity*, Preprint.

7

The Composition Operators with Closed Range on $BMOA$

米田　力生　　（小樽商科大学）

空間$\mathcal{B}$は

$$\| f \|_{\mathcal{B}}= \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)| < +\infty$$

を満たすD上の解析関数全体とする．$\mathcal{B}$は, ブロッホ空間と呼ばれる．$dA(z)$はD上の normalized area measure とする．

$\alpha > -1$に対して, 荷重付きディリクレ空間D_p^αは

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|^p (\alpha+1) dA(z) < +\infty$$

を満たすD上の解析関数全体とする．$\alpha = 1$かつ$p=2$のとき, $D_2^1 = H^2$は, ハーディー空間になる．$\alpha = 2$かつ$p = 2$のとき, $D_2^2 = L_a^2$は, ベルグマン空間になる．

一般にXをバナッハ空間とし，Tを linear operator from X into Xとする．そのとき，Tは次を満たすならば，bounded below on Xと呼ばれる：$\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$ and positive constants $C > 0$.

D上の解析関数gに対して, 合成作用素C_φは, $C_\varphi f = f\circ\varphi$と定義される．この研究では，この合成作用素がいつ$BMOA$上で bounded below になるのかに関する研究をし，以下の結果が得られた：

命題 1. *Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. Suppose that $\sup_{z\in D}|\varphi'(z)| < +\infty$. If $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ is bounded below, then $C_\varphi : H^2 \to H^2$ is bounded below.*

定理 2. *If $C_\varphi : H^2 \to H^2$ is bounded below, then $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ is bounded below.*

系 3. *Suppose φ is a univalent self-map of the open unit disk D. Suppose that $\sup_{z\in D}|\varphi'(z)| < +\infty$. Then the following statements are equivalent :*

(1) $C_\varphi : BMOA \to BMOA$ *is bounded below.*
(2) $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *is bounded below.*
(3) $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *is bounded below.*

(4) $\quad C_\varphi : L_a^2 \to L_a^2$ *is bounded below.*

References

[1] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.133,5(2004), 1371-1377.

[2] H.Hedenmalm and B.Korenblum and K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York.

[3] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[4] R.Yoneda, Multiplication Operators, Integration Operators And Companion Operators On Weighted Bloch Spaces, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[5] R.Yoneda, Pointwise multipliers from $BMOA^\alpha$ to the α-Bloch space, Complex Variables Vol.49,No.14, pp1045-1061.

[6] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.

[7] R.Yoneda, Essential norms of Integration operators and Multipliers on weighted Bloch spaces, in preprint.

8

放物型 Bergman 空間における Toeplitz 作用素のコンパクト性

鈴木 紀明 (名大・多元数理)
西尾 昌治 (大阪市大・理)
山田 雅博 (岐阜大・教育)

$n+1$ 次元 Euclid 空間の上半空間

$$H = \{(x,t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R};\ t > 0\}$$

上の α 次放物型作用素

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^{\alpha}$$

の p 乗可積分な解全体 $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ が放物型 Bergman 空間である．ただし，$0 < \alpha \le 1$, $1 \le p < \infty$ とする．$L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ の評価と $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ の元に対する Huygens property から $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ が Banach 空間になることがわかり，さらに Hilbert 空間 $\boldsymbol{b}^2_\alpha$ の再生核 R_α は

$$R_\alpha(x,t,y,s) = -2\partial_t W^{(\alpha)}(x-y, t+s)$$

で与えられる．これが定める積分作用素は L^2 から $\boldsymbol{b}^2_\alpha$ への直交射影であるが，$p > 1$ ならば，L^p から $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ への有界作用素でもある．これらの事実から，$p > 1$ ならば $(\boldsymbol{b}^p_\alpha)^* = \boldsymbol{b}^q_\alpha$ $(1/p + 1/q = 1)$ および $(\boldsymbol{b}^1_\alpha)^* = \mathcal{B}/\boldsymbol{R}$, $(\mathcal{B}_0/\boldsymbol{R})^* = \boldsymbol{b}^1_\alpha$ がわかる．ここで $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}_0$ は放物型 Bloch 空間および little Bloch 空間である ([1]).

さて，H 上の非負 Radon 測度 μ に対する Toeplitz 作用素を以下で定義する：

$$(T_\mu u)(x,t) := \int R_\alpha(x,t,y,s)u(y,s)d\mu(y,s).$$

この作用素の性質を調べるために次の関数を考える：

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}^{(\alpha)}_\tau(x,t) &:= t^{-\tau(\frac{n}{2\alpha}+1)}\mu(Q^{(\alpha)}(x,t)) \\
\tilde{\mu}^{(\alpha)}_\tau(x,t) &:= t^{(2-\tau)(\frac{n}{2\alpha}+1)}\int R_\alpha(y,s,x,t)^2 d\mu(y,s)
\end{aligned}$$

ここで，τ は実数，$Q^{(\alpha)}(x,t)$ は α-放物型 Carleson box ((x,t) が底面の中心で，高さ t, 横幅が $t^{1/2\alpha}$ の直方体) である．$\hat{\mu}^{(\alpha)}_\tau(x,t)$ が H 上の有界関数のとき μ を τ-Carleson 測度と呼ぶ．

報告者たちは [2] の中で，$1 \le p \le q < \infty$ のとき μ が $\tau = (1/p+1-1/q)$-Carleson 測度であるなら，$T_\mu = T_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}^p_\alpha \to \boldsymbol{b}^q_\alpha$ は有界であることを示した (μ に対する若干

の仮定をおけば逆も成り立つ．$\tilde{\mu}_{\tau}^{(\alpha)}(x,t)$ の有界性とも同値になる)．また，$q=\infty$ の場合は $\boldsymbol{b}_{\alpha}^{q}$ の代わりに $\mathcal{B}_{\alpha}/\boldsymbol{R}$ を考えれば同様な結果が成り立つ．なお，この Toeplitz 作用素の有界性は自然な埋め込み (ただし単射とは限らない)

$$\iota_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}_{\alpha}^{p} \hookrightarrow L^{q}(H,\mu)$$

の有界性 $\|u\|_{L^{q}(H,\mu)} \leq C\|u\|_{\boldsymbol{b}_{\alpha}^{p}}$ と深く関係している．

さて，今回の報告の主結果は $T_{\mu,p,q}$ と $\iota_{\mu,p,q}$ のコンパクト性についてである．

定理 1. $1 < p \leq q \leq \infty$ とし $\tau = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ とする．H 上の非負 Radon 測度 μ はある実数 $\beta > 0$ に対して $\int (1+t+|x|)^{-\beta} d\mu(x,t) < \infty$ を仮定する．このとき以下は同値である：

(1) Toeplitz 作用素 $T_{\mu,p,q} : \boldsymbol{b}_{\alpha}^{p} \to \boldsymbol{b}_{\alpha}^{q}$ はコンパクト作用素である．(ただし $q=\infty$ のときは $T_{\mu,p,\infty} : \boldsymbol{b}_{\alpha}^{p} \to \mathcal{B}_{\alpha}/\boldsymbol{R}$).

(2) $\lim_{(x,t)\to\infty} \hat{\mu}_{\tau}^{(\alpha)}(x,t) = 0$.

(3) $\lim_{(x,t)\to\infty} \tilde{\mu}_{\tau}^{(\alpha)}(x,t) = 0$.

ここで ∞ は H の一点コンパクト化に対する無限点である．

定理 2. $1 < p \leq q < \infty$ に対して $\sigma = q/p$ とする．自然な埋め込み $\iota_{\mu,p,q}$ がコンパクトである必要かつ十分条件は $\lim_{(x,t)\to\infty} \hat{\mu}_{\sigma}^{(\alpha)}(x,t) = 0$ である．

$p=1$ のときはコンパクト性よりも強い ∗コンパクト性を $T_{\mu,1,q}$ と $\iota_{\mu,1,q}$ に課せば，定理 1 と定理 2 の同値性はそのまま成り立つ．反射的 Banach 空間ではコンパクト性と ∗コンパクト性は一致する．

参考文献

[1] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., 42 (2005), 133–162.

[2] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, preprint.

9

Jump Theorem for Harmonic Functions and Discontinuity of Static Magnetic Fields

山口 博史

$\mathbb{R}^3$ の閉曲面 Σ に与えられた面電流より生じる静磁場は Σ に沿って不連続性を有することに着目して，調和関数の落差定理を用いて静磁場を作成出来ることを示すのが講演の目的である。

$D \subset\subset \mathbb{R}^m$（ただし，$m \geq 3$）を C^ω 級滑らかな閉曲面 Σ で囲まれた領域とする．簡単のために，$D^+ = D$, $D^- = \mathbb{R}^m \setminus \overline{D}$ と置く．Σ の薄いチューブ近傍 V を取り，$D_1 = D^+ \cup V$, $D_2 = D^- \cup V$ と置く．このとき，次の調和関数に対する落差定理が成立する (例えば，[1] の第 9 章を参照)

命題 1. h を V での調和関数とする．このとき，次を満たす D_i $(i = 1, 2)$ での調和関数 h_i がただ一組存在する：

$$\begin{array}{lll} (1) & h_2 - h_1 = h & \text{in } V, \\ (2) & h_2(x) = O(1/\|x\|) & \text{at } x = \infty. \end{array}$$

この命題の証明における h_i $(i = 1, 2)$ の積分表示の性質から，次の定理が得られる：

定理 1. $\omega = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$ を V での調和 1－形式する．このとき，次を満たす D_i $(i = 1, 2)$ での調和 1－形式 Ω_i がただ一組存在する：

$$\begin{array}{lll} (1) & \Omega_2 - \Omega_1 = \omega & \text{in } V, \\ (2) & \Omega_2(x) = O(1/\|x\|) & \text{at } x = \infty. \end{array}$$

今後，$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^3$ とする．$J\, dS_x = (f_1, f_2, f_3)\, dS_x$ を 面 Σ 上の C^ω 級面電流とする．$J\, dS_x$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ に静磁場を B_J を生じる (参照 [3])．各領域 $D^\pm$ でそれぞれ $B_J = B_J^\pm$ と置く．曲面 Σ の点 x での単位外法線ベクトルを n_x として，Σ 上で

$$n_x \times J(x) = (g_1, g_2, g_3), \qquad \sigma_J = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$$

を考えると，σ_J は Σ 上の閉 1－形式であり，$B_J^\pm$ は各々 Σ まで連続に延長できて，面 Σ に沿って次の不連続性を持つ：

$$B_J^+(x) - B_J^-(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x)), \qquad x \in \Sigma.$$

この情勢の下で，先ず，Cauchy-Kowalevsky の定理を用いて，σ_J を Σ の薄いチューブ近傍 V での調和 1− 形式 $\widehat{\sigma}_J=\widehat{g}_1dx+\widehat{g}_2dy+\widehat{g}_3dz$ に延長する．次に，定理 1 から，次を満たす $D^\pm\cup V$ での調和 1− 形式 $\mathcal{G}^\pm$ が作れる：

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \mathcal{G}^+-\mathcal{G}^-=\widehat{\sigma}_J & \text{in } V,\\
(2) & \mathcal{G}^-(x)=O(1/\|x\|) & \text{at } x=\infty.
\end{array}
$$

最後に，

$$
\mathcal{G}^\pm(x)=G_1^\pm dx+G_2^\pm dy+G_3^\pm dz,\quad (x,y,z)\in D^\pm\cup V
$$

とおくと次が得られる：

系 1.　各 $D^\pm$ において，$B_J^\pm=(G_1^\pm,G_2^\pm,G_3^\pm)$ である．

今，$Z_1^\infty(\overline{D^-})$ を，外部閉領域 $\overline{D^-}$ での C^∞ 閉 1− 形式の全体とする．$\gamma\ (\not\sim 0)$ を $\overline{D^-}$ の閉曲線とする．このとき，線形作用

$$
L_\gamma:\omega\in Z_1^\infty(\overline{D^-})\ \mapsto\ \int_\gamma\omega\in\mathbb{R}
$$

は連続な作用になるから，Weyl 直交分解定理によって，次を満たす $\overline{D^-}$ での C^ω 級 2 形式 $\sigma_\gamma\ (\not\equiv 0)$ が存在する：

$$
\int_\gamma\omega=(\omega,*\sigma_\gamma)_{D^-},\qquad \forall\,\omega\in Z_1^\infty(\overline{D^-}).
$$

$\overline{D^-}(=D\cup\Sigma)$ において $\sigma_\gamma=\alpha dy\wedge dz+\beta dz\wedge dx+\gamma dx\wedge dy$ とおく．このとき，系 1 と同じ方法によって次を得る：

系 2. (cf. T. Harada [3])　$J\,dS_x:=\big((\alpha,\beta,\gamma)|_\Sigma\times n_x\big)\,dS_x$ は Σ 上の面電流であって，次の静磁場を生じる：

$$
B_J:=\begin{cases}0 & \text{in } D^+,\\ (\alpha,\beta,\gamma) & \text{in } D^-\end{cases}
$$

これを外部平衡磁場と呼ぶ．この定理は，内部平衡電磁場の存在 (cf. [2]) と融合されて，R^3 の領域 D の一点に極を有する Green 関数（電場の平衡ポテンシャル）に対応して，D の一点に極を有する 3 方向の Green ベクトルポテンシャルとも言うべき概念（磁場の平衡ベクトルポテンシャル）の存在を示唆するものである．

文献

[1]　S. Axer, P. Bourdan and W. Ramey, *Harmonic Function Theory,* Graduate Texts in Math., Springer, 2001.

[2]　U. Cegrell and H. Yamaguchi, Construction of equilibrium magnetic vector potentials, *Potential Analysis* 15 (2001), 302-331.

[3]　T. Harada，面電流と磁場の研究，奈良女子大学院人間文化研究科後期課程論文集 ２００６年.

10

二つの半ユークリッド空間の動径方向計量に関する caloric morphism

下村勝孝

茨城大学理学部

$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ に，二つの非退化実二次形式 (どちらも負定値ではないとする)

$$\gamma(x,y) = \sum_{ij=1}^{n} \gamma_{ij} x_i y_j, \quad \eta(x,y) = \sum_{ij=1}^{n} \eta_{ij} x_i y_j$$

で計量を入れた、二つの半ユークリッド空間

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n; \gamma(x,x) > 0\}, \quad N = \{x \in \mathbb{R}^n; \eta(x,x) > 0\}$$

を考える。M, N 上では $\langle x \rangle_\gamma = \sqrt{\gamma(x,x)}$, $\langle x \rangle_\eta = \sqrt{\eta(x,x)}$ がそれぞれ原点からの距離を表す．そこで ρ_j $(j=1,2)$ を区間 $I_j \subset (0,\infty)$ 上の正値 C^∞ 級関数として，M, N にそれぞれ半リーマン計量 (ここではこの計量を **動径方向計量** と呼ぶ)

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \rho_1(\langle x \rangle_\gamma) \gamma_{ij} dx_i dx_j, \quad \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \rho_2(\langle x \rangle_\eta) \eta_{ij} dx_i dx_j$$

を入れて半リーマン多様体とする．計量 g, h に関する gradient を ∇_g, ∇_h で，Laplacian を Δ_g, Δ_h でそれぞれ表す．

D を $\mathbb{R} \times M$ 内の領域とし，$f(t,x) = (f_0(t,x), f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x))$ を D から $\mathbb{R} \times N$ への C^∞ 級写像，φ を D 上の正値 C^∞ 級関数とする．$f(D)$ 上で計量 h に関する熱方程式

$$H_h u := \frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta_h u = 0$$

を満たす任意の関数 $u(\tau, y)$ に対して，$\varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$ が D 上で計量 g に関する熱方程式

$$H_g u := \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_g u = 0$$

を満たす時，(f,φ) を **caloric morphism** と呼ぶ．

(f,φ) が caloric morphism であることと，次の (1) - (4) は同値である ([1])．

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad H_g\varphi = 0,\\
&(2) \qquad H_g f_i = 2g(\nabla_g \log\varphi, \nabla_g f_i) - [(\Delta_h y_i)\circ f]\frac{df_0}{dt}, \quad i = 1,\ldots,n\\
&(3) \qquad \nabla_g f_0 = 0,\\
&(4) \qquad g(\nabla_g f_i, \nabla_g f_j) = (h^{ij}\circ f)\frac{df_0}{dt}, \quad i,j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

この講演では, [2], [3] の結果の拡張, 即ち写像 f が

$$f(t,x) = (f_0(t), A(t)x)$$

又は

$$f(t,x) = (f_0(t), \langle x\rangle_\gamma^{-2}A(t)x)$$

$(A(t)\in GL(n,\mathbb{R}))$ の形をした caloric morphism (f,φ) の形を具体的に決定する問題に関する結果を報告する．

References

[1] M. Nishio and K. Shimomura, *A characterization of caloric morphisms between manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 111 – 122.

[2] K. Shimomura, *Caloric morphisms with respect to radial metrics on* $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, Math. J. Ibaraki Univ. **35** (2003), 35 – 53.

[3] K. Shimomura, *Caloric morphisms with respect to radial metrics on semi-euclidean spaces*, Math. J. Ibaraki Univ. **37** (2005), 81 – 103.

11

Sobolev embeddings for variable exponent Riesz potentials on metric spaces

二村 俊英　大同工業大学
水田 義弘　広島大学・総合科学部
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

X を距離空間, μ を X 上のボレル測度とする. 任意の開球 $B = B(x,r)$ と $B' = B(x',r')$ ($x' \in B$, $0 < r' \leqq r$) に対して, $0 < \mu(B) < \infty$ かつ

$$\frac{\mu(B')}{\mu(B)} \geqq C\left(\frac{r'}{r}\right)^s$$

となる定数 $C > 0$ と $s \geqq 1$ が存在すると仮定する.

有界開集合 G 上の連続関数 $p(\cdot) : G \to (1,\infty)$ に対して,

$$\int_G \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} d\mu(y) < \infty \qquad (\exists\lambda > 0)$$

となる G 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(G)$ とし, そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),G} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_G \left|\frac{f(y)}{\lambda}\right|^{p(y)} d\mu(y) \leq 1\right\}$$

で定める ([7, Kováčik-Rákosník]). 特に, $p(x) = p_0$ (一定) のとき, $L^{p(\cdot)}(G) = L^{p_0}(G)$.

G 上の局所可積分関数 f に対して, 極大関数 $\mathcal{M}f$ を次で定める:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|d\mu(y).$$

本講演では $p(\cdot)$ は,

(p1) $|p(x) - p(y)| \leq \dfrac{a_1 \log(\log(1/|x-y|))}{\log(1/|x-y|)} + \dfrac{a_2}{\log(1/|x-y|)}$
$(x \in G,\ y \in G,\ |x-y| < 1/4\ )$

を満たすとする ($a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$).

定理 1. $p(\cdot)$ は, $1 < \inf_{x\in G} p(x) \leq \sup_{x\in G} p(x) < \infty$ かつ (p1) を満たすとする. $a_1 > 0$ のとき $a > a_1$, $a_1 = 0$ のとき $a = 0$ として, $A(x) = as/p(x)^2$ とおく. このとき, $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ ならば,

$$\int_G \left\{\mathcal{M}f(x)(\log(\mathcal{M}f(x)+e))^{-A(x)}\right\}^{p(x)} d\mu(x) \leq C$$

$a_1 = 0$ のとき, 定理 1 は, Harjulehto-Hästö-Pere [6] が証明した. $X = \mathbf{R}^n$ ($s = n$) のときの [4, Theorem 2.4], Diening [2] の結果を含んでいる. 非有界領域の場合には,

さらなる条件をつけて，同様の結果を得る（Cruz-Uribe, Fiorenza and Neugebauer [1]）

G 上の関数 f に対する α $(0 < \alpha < s)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_G \frac{|x-y|^\alpha f(y)}{\mu(B(x,|x-y|))} d\mu(y)$$

を考える．

$$1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/s$$

とする．

定理 2. $p(\cdot)$ は，$1 < \inf_{x \in G} p(x) \le \sup_{x \in G} p(x) < s/\alpha$ かつ (p1) を満たすとする．$a_1 > 0$ のとき $a > a_1$，$a_1 = 0$ のとき $a = 0$ として，$A(x) = as/p(x)^2$ とおく．このとき，$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ ならば，

$$\int_G \left\{U_\alpha f(x)(\log(U_\alpha f(x) + e))^{-A(x)}\right\}^{p^\sharp(x)} d\mu(x) \le C$$

この定理は，$X = \mathbf{R}^n$ $(s = n)$ のときの [4, Theorem 3.4]，Diening [3] の結果を含んでいる．

本報告の結果は [5] による．

参考文献

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 223-238.

[2] L. Diening, Maximal functions on generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. **7**(2) (2004), 245-253.

[3] L. Diening, Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. **263**(1) (2004), 31-43.

[4] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent, to appear in Math. Nachr. **279** (2006).

[5] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent on metric spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **31** (2006), 495-522.

[6] P. Harjulehto, P. Hästö and M. Pere: Variable exponent Lebesgue spaces on metric spaces: the Hardy-Littlezood maximal operator, Real Anal. Exchange **30** (2004/2005), 87-104.

[7] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592-618.

1 2

Vanishing integrability for Riesz potentials of functions in generalized Lebesgue spaces

水田 義弘　広島大学・総合科学部
大野 貴雄　広島大学大学院・理学研究科
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

$\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 $p(\cdot) : \mathbf{R}^n \to [1, \infty)$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{f(y)}{\lambda} \right|^{p(y)} dy < \infty \quad (^\exists \lambda > 0)$$

となる $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とし，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{f(y)}{\lambda} \right|^{p(y)} dy \le 1 \right\}$$

で定める ([2, Kováčik-Rákosník])．特に，$p(x) = p_0$(一定) のとき，$L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n) = L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$

α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x - y|^{\alpha - n} f(y) dy$$

を考える．ここに，f は非負可測関数で $U_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する．$C_{\alpha, p(\cdot)}$ はリース容量とする．

次の事実はよく知られている．

定理 A. $f \in L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$ $(1 < p_0 < \infty)$ とする．このとき，C_{α,p_0}-容量が零の集合 E が存在して，$1/q_0 \ge 1/p_0 - \alpha/n$ なる $1 < q_0 < \infty$ に対して，

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} |U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|^{q_0} dx = 0, \quad ^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$$

定理 A に関連して，Harjulehto-Hästö [3] は，変動指数 $p(\cdot)$ が

(p1) $1 < \inf_{x \in \mathbf{R}^n} p(x) \le \sup_{x \in \mathbf{R}^n} p(x) < \infty$

(p2) $|p(x) - p(y)| \le \dfrac{c}{\log(1/|x - y|)} \qquad (|x - y| < 1/e)$

を満たすとき，次の定理を証明した：

定理 B (Harjulehto-Hästö [3]). $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ とする．このとき，$C_{1,p(\cdot)}$-容量が零の集合 E が存在し，$1/q(x) \ge 1/p(x) - 1/n$ なる $1 < q(x) < \infty$ に対して，

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} |U_1 f(x) - U_1 f(x_0)|^{q(x)} dx = 0, \quad ^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus E$$

本講演では，定理Bの拡張を行う．このために，$p(\cdot)$ は，

(p3) $|p(x)-p(y)| \le \dfrac{a\log(\log(1/|x-y|))}{\log(1/|x-y|)} + \dfrac{b}{\log(1/|x-y|)}$

を満たすとする $(a \ge 0, b > 0)$.

$$\frac{1}{p^\sharp(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}$$

とする．$a > 0$ のとき $\tilde{a} > a$，$a = 0$ のときは $\tilde{a} = 0$ として，$A(x) = \tilde{a}n(x)/p(x)^2$ とおく．$t \ge 0, x \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\Phi(t) = \Phi(t,x) = \{t(\log(e+t))^{-A(x)}\}^{p^\sharp(x)}$$

とする．

主定理. $p(\cdot)$ は，$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) < n/\alpha$ かつ (p3) を満たすとする．このとき，$f \in L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ ならば，

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \Phi(|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(x_0)|)dx = 0, \quad {}^\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \setminus (E_1 \cup E_2)$$

ここに，

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbf{R}^n : U_\alpha f(x) = \infty\}, \\ E_2 &= \left\{x \in \mathbf{R}^n : \limsup_{r\to 0+} r^{\alpha p(x)-n}(\log(1/r))^{\alpha a}\int_{B(x,r)} f(y)^{p(y)}dy > 0\right\} \end{aligned}$$

この定理は，Harjulehto-Hästö [3, Theorem 4.12]，二村・水田・下村 [1, Theorem 4.5] の結果を含んでいる．

参考文献

[1] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential spaces of variable exponent, Math. Nachr. **279** (2006).

[2] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[3] P. Harjulehto and P. Hästö, Lebesgue points in variable exponent spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **29** (2004), 295–306.

13

多項式凸性と強い円板的性質

阿部 誠*

複素空間 X はつねに被約かつ第 2 可算とする．複素空間 X の開集合 D が（**正則**）$\mathscr{O}(X)$**-凸**とは，D 内の任意のコンパクト集合 K に対し，集合 $\hat{K}_X \cap D$ がコンパクトなことである．ただし，$\hat{K}_X$ は K の X における**正則凸被**を表す．複素空間 X の開集合 D が X において**強い円板的性質**をもつとは，条件「$\varphi : \bar{\Delta} \to X$ が連続，$\varphi|_\Delta$ が正則，$\varphi(\partial\Delta) \subset D \Rightarrow \varphi(\bar{\Delta}) \subset D$」をみたすことである．ただし，$\Delta \subset \mathbb{C}$ は単位円板を表す．次の命題は容易に確かめられる．

命題 1 ([1, Proposition 1])**.** Stein 空間 X の任意の $\mathscr{O}(X)$-凸開集合 D は X において強い円板的性質をもつ．

系 2 ([1, Corollary 2])**.** $\mathbb{C}^n$ の任意の多項式凸開集合 D は $\mathbb{C}^n$ において強い円板的性質をもつ．

系 3 ([1, Corollary 4])**.** $\mathbb{C}^n$ の開集合 D が $\mathbb{C}^n$ において強い円板的性質をもてば，$\mathbb{C}^n$ 内の任意の複素直線 L に対し，共通部分 $D \cap L$ は単連結である．

なお，複素空間 X，族 $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(X)$ に対し，$\mathscr{F}|_U$ が一様有界であるような X の開集合 U 全体の合併を $B(\mathscr{F})$，$\mathscr{F}$ が点 x で同程度連続であるような $x \in X$ 全体の集合を $E(\mathscr{F})$ と書くとき，命題 1 に関連し，次のふたつの事実がある．

定理 4 (Fuks [7, pp. 15–19], Tsuji [12], Abe-Tabata [4])**.** Stein 多様体 X の開集合 D について，次の 3 条件は同値である．

(1) D は $\mathscr{O}(X)$-凸である．
(2) 族 $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(X)$ が存在して，$D = B(\mathscr{F})$．
(3) 族 $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(X)$ が存在して，$D = E(\mathscr{F})$．

定理 5 (Abe-Furushima-Tsuji [3])**.** X を複素多様体とする．任意の $\mathscr{F} \subset \mathscr{O}(X)$ に対し，$B(\mathscr{F})$ と $E(\mathscr{F})$ は X において強い円板的性質をもつ．

複素空間 X の開集合 D が**有理型** $\mathscr{O}(X)$**-凸**とは，D 内の任意のコンパクト集合 K に対し，集合 $\check{K}_X \cap D$ がコンパクトなことである．ただし，$\check{K}_X$ は，任意の $f \in \mathscr{O}(X)$ に対し $f(x) \in f(K)$ をみたす点 $x \in X$ 全体の集合であり，これは K の X における**有理型凸被**とよばれる．

定理 6 ([1, Theorem 5])**.** Stein 多様体 X の開集合 D が単連結かつ有理型 $\mathscr{O}(X)$-凸ならば，D は X において強い円板的性質をもつ．

系 7 ([1, Corollary 6])**.** $\mathbb{C}^n$ の開集合 D が単連結かつ有理凸ならば，D は $\mathbb{C}^n$ において強い円板的性質をもつ．

次の**西野領域** D_M は $\mathbb{C}^2$ において有理凸である．

$$D_M := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid 1 < |z| < M, |w| < 1\} \setminus S,$$

ただし，$M > 1$，$S := \bigcup_{t \in [0,1]} \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid (1-t)z^2 - 2tz + w = 0\}$．

* 〒 862-0976 熊本市九品寺 4-24-1 熊本大学医学部保健学科

命題 8 ([1, Proposition 8]). 任意の $M>1$ に対し，西野領域 D_M は $\mathbb{C}^2$ において強い円板的性質をもつ.

Nishino [9, 10] は，十分大きい M に対し D_M は単連結であり，D_M が単連結ならば D_M は多項式凸でないことを証明した．Duval [6] も単連結かつ有理凸であり，かつ多項式凸でない $\mathbb{C}^2$ の開集合の例を与えた．ゆえに，次の定理を得る．

定理 9 ([1, Theorem 7]). $n \geqq 2$ のとき，系 2 の逆は成り立たない．すなわち，$\mathbb{C}^n$ において強い円板的性質をもち，かつ多項式凸でない開集合が存在する．

D と D^* を $D \subset D^*$ なる $\mathbb{C}^n$ の Stein 開集合とするとき，Bremermann [5] は，D が $\mathcal{O}(D^*)$-凸ならば，$\mathbb{C}^n$ 内の任意の複素直線 L に対し，$D \cap L$ は $D^* \cap L$ に関してホモロジー的に単連結であることを指摘し，この事実の逆は正しいかという問題を提出した．定理 9 と系 3 より，Bremermann [5] の問題（Ohsawa [11, p. 81]）は，$D^* = \mathbb{C}^n$ ($n \geqq 2$) の場合にすでに否定的である．なお，Joiţa [8] もこの問題に対する反例を与えた．

参考文献

[1] M. Abe, *Polynomial convexity and strong disk property*, J. Math. Anal. Appl. **321** (2006), 32–36.

[2] 阿部誠，**有理型近似性質をもつ領域について**，第 44 回多変数関数論サマーセミナー予稿集，湯沢，2005 年 7 月 30 日～8 月 2 日，pp. 15–19.

[3] M. Abe, M. Furushima and M. Tsuji, *Equicontinuity domains and disk property*, Complex Variables Theory Appl. **39** (1999), 19–25.

[4] M. Abe and S. Tabata, *Montel domains and equicontinuity domains*, Math. J. Toyama Univ **26** (2003), 25–34.

[5] H. J. Bremermann, *Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen*, Math. Ann. **136** (1958), 173–186.

[6] J. Duval, *Convexité rationelle des surfaces lagrangiennes*, Invent. Math. **104** (1991), 581–599.

[7] B. A. Fuks, *Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables*, Translations of Mathematical Monographs vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, 1965, Translated by A. Jeffrey and N. Mugibayashi.

[8] C. Joiţa, *On a problem of Bremermann concerning Runge domains*, preprint, arXiv:math.CV/0504243, 2005.

[9] T. Nishino, *Un exemple concernant la convexité par rapport aux polynômes*, J. Math. Kyoto Univ. **6** (1966), 85–90.

[10] 西野利雄，**単連結で有理凸状であるが多項式凸状ではない例**，日本数学会 2003 年度年会函数論分科会講演アブストラクト，東京大学大学院数理科学研究科，2003 年 3 月 23 ～ 26 日，pp. 67–68.

[11] T. Ohsawa, *Analysis of several complex variables*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 211, Amer. Math. Soc., Providence, 2002, Translated by S. G. Nakamura.

[12] M. Tsuji, *Equicontinuity domains and Runge domains*, Proceedings of the Ninth International Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, Bulgaria, August 18–23, 1998 (D. Bainov, ed.), VSP, Utrecht, 1999, pp. 439–442.

14

全正則曲線の最密充填問題

塚本真輝 (京都大学大学院理学研究科数学教室 M2)

全正則曲線とは複素平面 $\mathbb{C}$ から複素多様体への正則写像のことである．一方で最密充填問題とは，通常の意味では，Euclid 空間に剛体をいかに「密に」詰め込めるかを問う問題である．この講演では，全正則曲線に対して「詰め込み率」という量を定義し，それがいかなる性質を持つかを説明する．特に，この考え方によって，空間からある種の普遍定数が定義されるという点に注目していただきたい．

X を Hermite 多様体とする．正則写像 $f:\mathbb{C}\to X$ に対して，その微分 df のノルム $|df|$ を次で定義する．

$$|df|(z) := \sqrt{2}\,|df(\partial/\partial z)|.$$

X 内の全正則曲線の「モジュライ空間」$\mathcal{M}(X)$ を次で定義する．

$$\mathcal{M}(X) := \{f:\mathbb{C}\to X \,|\, f \text{ は正則であって，} |df|\leq 1\}.$$

全正則曲線 $f\in\mathcal{M}(X)$ に対して，その「詰め込み率」$\rho(f)$ を次で定義する．

$$\rho(f) := \limsup_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R^2}\int_{|z|\leq R}|df|^2(z)\,dxdy.$$

そして，「最密充填率」$\rho(X)$ を次で定義する．

$$\rho(X) := \sup_{f\in\mathcal{M}(X)}\rho(f).$$

定義から，$0\leq\rho(f)\leq 1$ であるため，次の自明な評価がある．

$$0\leq\rho(X)\leq 1.$$

以下，この $\rho(X)$ について分かったことを述べる．ただし，複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ とその部分多様体には，Fubini-Study 計量，もしくはその制限が入っているとする．

Theorem 1.

$$0\lneqq\rho(\mathbb{C}P^n)\lneqq 1.$$

この結果から，$\rho(\mathbb{C}P^n)$ は「非自明な」普遍定数であることが分かる． 特に $n=1$ の時には，より強く次が分かっている．

Theorem 2.

$$\rho(\mathbb{C}P^1)\leq 1-10^{-100}$$

個々のnについて具体的に値を求めることには成功していないが, $n \to \infty$での極限については次が示せる. この結果は, $n \to \infty$では, 最密充填問題が「自明化」することを示している.

Theorem 3.

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\mathbb{C}P^n) = 1.$$

この$\rho(\mathbb{C}P^n)$を使うと, 楕円曲線からの正則写像に対して, ある種の "gap theorem" が示せる. $\Lambda \subset \mathbb{C}$を格子として, 楕円曲線$\mathbb{C}/\Lambda$を考えよう. ただし簡単のため, $\mathrm{vol}(\mathbb{C}/\Lambda) = 1$と正規化されているとする.

正則写像$f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}P^n$に対しては, その次数$\deg f$は次のように表される.

$$\deg f = \int_{\mathbb{C}/\Lambda} |df|^2 dxdy.$$

これから, dfのL^∞-ノルム$\|df\|_\infty := \sup_z |df|(z)$が次の自然な評価を持つ.

$$\|df\|_\infty^2 \geq \deg f. \tag{1}$$

ところが, 次の定理は, この評価は最善ではないことを示している.

Theorem 4.

$$\|df\|_\infty^2 \geq \frac{\deg f}{\rho(\mathbb{C}P^n)}.$$

Theorem 1から, $1/\rho(\mathbb{C}P^n) \gneqq 1$であるため, 上の自然な評価(1)とこの定理の主張との間には "gap" がある.

次に, 超平面族の補集合に入っている全正則曲線を考えてみる. $\mathbb{C}P^n$内の$n+1$枚の超平面$H_0, H_1, \cdots, H_n$に対して, その定義方程式系が一次独立の時, $H_0, \cdots, H_n$は一次独立であると言うことにする. 次の定理はTheorem 1, Theorem 3と非常に好対照な結果を示している.

Theorem 5. $H_0, H_1, \cdots, H_n$を$\mathbb{C}P^n$内の一次独立な超平面族とする. この時, 次が成立する.

$$\rho(\mathbb{C}P^n \setminus (H_0 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_n)) = 0.$$

特に$n = 1$では次の系になる.

Corollary 6. w_1, w_2を$\mathbb{C}P^1$内の相異なる2点とすると,

$$\rho(\mathbb{C}P^1 \setminus \{w_1, w_2\}) = 0.$$

例えば, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}$に対しては, $\rho(\exp) = 0$.

参考文献

[T] M. Tsukamoto, A packing problem for holomorphic curves, preprint, arXiv: math.CV/0605353

15

Severiの意味の準アーベル関数と準アーベル多様体II, 閉リーマン面の退化

阿部 幸隆 (富山大学)

アーベル多様体とその上のアーベル関数体を合わせて考えたときの極限をSeveriの意味の準アーベル多様体と準アーベル関数体と呼ぶ. 昨年秋の総合分科会の特別講演で, そのモジュライ空間を構成したことを報告した. 種数gの閉リーマン面Rのヤコビ多様体$J(R)$が上のモジュライ空間の境界点に対応する点に移行したとき, 閉リーマン面Rがどのように退化するかを考察する. とくに$g = 1, 2$の場合の結果を報告する.

この場合には, Rは$\mathbb{P}^1$上の二重分岐被覆である. 分岐点の1つを∞とし, その他の分岐点はすべて動き得るようにする. このとき, 分岐点の差の比がテータ関数の半周期点における値を用いて表示できることがわかった. そして, $J(R)$が境界点に移行したとき, それらの値の極限値が計算できる. そのことにより分岐点の動く様子が観察され, 極限曲線が求まる. それらの中には安定曲線以外のものもあることがわかった.

参考文献

[1] *Y. Abe*, A statement of Weierstrass on meromorphic functions which admit an algebraic addition theorem, J. Math. Soc. Japan. **57** (2005), 709–723.

[2] *Y. Abe*, Quasi-abelian functions and varieties in the sense of Severi, I, Limits of abelian varieties, to appear in Far East J. Math. Sci..

[3] *Y. Abe*, Quasi-abelian functions and varieties in the sense of Severi, II, Degeneration of compact Riemann surfaces, preprint.

[4] *A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport and Y. Tai*, Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties, Math. Sci. Press, Brookline, 1975.

[5] *P. Deligne and D. Mumford*, The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. math. I.H.E.S. **36** (1969), 75–110.

[6] *A. Lebowitz,* Degeneration of a compact Riemann surface of genus 2, Israel J. Math. **12** (1972), 223–236.

[7] *A. Lebowitz,* Handle removal on a compact Riemann surface of genus 2, Israel J. Math. **15** (1973), 189–192.

[8] *A. Lebowitz,* A remark on degeneration of a compact Riemann surface of genus 2, Israel J. Math. **18** (1974), 349–351.

[9] *Y. Namikawa,* A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties, I, Math. Ann. **221** (1976), 97–141.

[10] *Y. Namikawa,* A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties, II, Math. Ann. **221** (1976), 201–241.

[11] *P. Painlevé,* Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition, Acta Math. **27** (1903), 1–54.

[12] *H. E. Rauch and H. M. Farkas,* Theta Functions with Applications to Riemann Surfaces, The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1974.

[13] *I. Satake,* On the compactification of the Siegel space, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 259–281.

[14] *F. Severi,* Fonctions et variétés quasi-abéliennes, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam 1954, Vol.III, pp.521–528.

[15] *F. Severi,* Funzioni Quasi Abeliane, Seconda Edizione Ampliata, Pont. Acad. Scient. Scripta Varia **20**, Vatican, 1961.

16

複素ユークリッド空間の自己同型群の部分群として与えられるリー群に関する２，３の注意

児玉 秋雄 (金沢大学大学院自然科学研究科)
清水　悟 (東北大学大学院理学研究科)

$\mathbf{C}^n$ の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ の構造，あるいはもっと一般に $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ の構造は，あまり分かっていないというのが現状である．その主因は，$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ が $k+\ell \geq 2$ のとき非常に大きな群であるという事実にあり，ある意味で言うと，$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ が無限次元の群であるということによっている．他方，$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ 自身は無限次元であるが，その部分群で有限次元であるもの，すなわち $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ の部分群で有限次元リー群の構造をもつものは，例えば，$\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ のその正則自己同型群による特徴付けの研究において非常に重要な役割を果たす（[2], [3]）．この見地から，次のような問題を調べることは，応用上の重要性からというだけではなく，$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ の構造を解明する試みの一環として興味ある課題と思われる．

問題　$k+\ell \geq 2$ のとき，$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ の（コンパクト・開位相に関する）位相部分群で有限次元リー群の構造をもつものを分類，決定せよ．

この講演では，この問題を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ の部分群に対して考えてみる．以下，$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ の位相部分群 G が有限次元リー群の構造をもつとき，G を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ 内のリー群と呼ぶことにする．

さて，G がコンパクトなとき，次の基本的結果が成り立つ．

定理１　G を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ 内のコンパクトな連結リー群とする．このとき G の階数は n 以下である．そして G の階数が n のとき，G はユニタリー群の直積と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ 内で共役になる，つまりある $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ が存在して，

$$\varphi G \varphi^{-1} = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s) \quad (n_1 + \cdots + n_s = n)$$

が成り立つ．

この定理は，トーラス作用の標準化に関する結果（[1]）とラインハルト領域の理論（[4]）から導かれる．

他方，G が非コンパクトなときは，まだ分からないことが多い．この講演では，$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ 内のある種の非コンパクトなリー群の非存在について報告する．

定理 2　G を $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ 内の連結リー群とする．このとき G は，n 次元単位球 B_n の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(B_n)$ とは同型になり得ない，すなわち $\mathrm{Aut}(B_n)$ から G の上へのリー群としての同型写像は存在しない．

参考文献

[1] D. E. Barrett, E. Bedford, and J. Dadok: *T^n-actions on holomorphically separable complex manifolds*, Math. Z. **202** (1989), 65–82.

[2] A. Kodama and S. Shimizu: *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space*, Osaka J. Math. **41** (2004), 85–95.

[3] A. Kodama and S. Shimizu: *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space, II*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[4] S. Shimizu: *Automorphisms of bounded Reinhardt domains*, Japan. J. Math. **15** (1989), 385–414.

17

Robin Functions for Complex Manifolds and Application to Flag Space

山口博史

これは Kang-Tae Kim 氏 (Postech) と Norman Levenberg 氏 (Indiana) との共同研究である。

M を複素多様体，ds^2 を M の Hermite 計量，Δ を付随する実ラプラシアン，$c \geq 0$ を M 上の C^∞ 関数とする．定点 $z_0 \in M$ での作用素 $\Delta - c$ に関する基本解の一つを $Q_0(z)$ とする．$B = \{|t| < \rho\}$ を円板として，点 z_0 を含む滑らかな境界で囲まれた領域 $D(t) \Subset M$ $(t \in B)$ の変動

$$\mathcal{D}: \ t \in B \mapsto D(t) \Subset M$$

が与えられたとする．変動 $\mathcal{D}$ を $B \times M$ の領域 $\mathcal{D} = \bigcup_{t \in B}(t, D(t))$ と同一視する．$g(t,z)$ を 極 $Q_0(z)$ を持つ $D(t)$ での $\Delta - c$ に関するグリーン関数として，

$$\lambda(t) = \lim_{z \to z_0}(g(t,z) - Q_0(z))$$

を $(D(t), z_0)$ に関する $c-$ ロバン定数と言う．

このとき，$\frac{\partial^2 \lambda(t)}{\partial t \partial \bar{t}}$ を t に関する $\partial \mathcal{D}$ の2階微分と $g(t,z)$ の一階微分を用いて表わす2階変分公式を見出せる．その変分公式は次を導く：

補題 1．計量 ds^2 の基本 $(1,1)$ 形式 ω が $\partial * \omega = 0$ (Köhler より弱い) を満たし，$\mathcal{D}$ が $B \times M$ での擬凸状域ならば

$$\frac{\partial^2 \lambda(t)}{\partial t \partial \bar{t}} \leq k_n \left\| \sqrt{c}\, \frac{\partial g}{\partial t} \right\|^2_{D(t)} \ (\leq 0), \qquad \forall t \in B.$$

ここに，$k_n > 0$ は次元定数である．従って，

(1) $-\lambda(t)$ は B での劣調和関数である;

(2) M 上で $c > 0$ の場合，もし $-\lambda(z)$ が或る点 $t_0 \in B$ で強劣調和でないならば，$D(t_0)$ 上で $\frac{\partial g}{\partial t}(t_0, z) \equiv 0$ である．

これを等質空間に応用して次を得る：

補題 2． M は，複素変換リー群 G が推移的に作用する等質空間とする．$\mathfrak{X}$ 及び e を G の正則左不変ベクトル場の全体及び単位元とする．$D \Subset M$ を滑らかな境界で囲まれた擬凸状域とする．各 $z \in D$ に対して，

$$D(z) := \{g \in G \mid g(z) \in D\} \text{ の } e \text{ を含む連結成分}$$

と定義し，G の領域の変動

$$\mathcal{D}:\ z \in D \mapsto D(z) \subset G$$

を考える．$\lambda(z)$ を $(D(z), e)$ の $c-$ ロバン定数とすれば，$\lambda(z)$ は D 上の C^∞ 関数を定める（これを D のロバン関数と呼ぶ）．このとき

(1) $-\lambda(z)$ は D での多重劣調和近似関数である;

(2) $-\lambda(z)$ がある点 z_0 で強劣多重調和でないならば，

$$\mathfrak{X}_0 := \Big\{ X \in \mathfrak{X} \mid \{\exp tX(z_0) \in M \mid t \in \mathbb{C}\} \Subset D \Big\}$$

は $\mathfrak{X}$ の空でない閉部分群であり，$X, Y \in \mathfrak{X}_0$ ならば $[X, Y] \in \mathfrak{X}_0$ であり，$\lambda(z)$ の定数面 $\lambda(z) = const.$ は局所的には，D での相対コンパクトな”解析集合”で slice されている．

この補題 2 は旗空間でのレビ問題に関する次の定理 1 を導く：

$\mathbb{C}^n$ での旗空間を $\mathcal{F}_n$ $(\dim \mathcal{F}_n = \frac{n(n-1)}{2})$ と書く．更に，μ 個の自然数の組 $\mathbf{m} := (m_1, \ldots, m_\mu)$, $m_1 + \cdots + m_\mu = n$ に対しての $\mathbf{m}-$(Euro) 旗空間を $\mathcal{F}_n^{(\mathbf{m})}$ と書く．即ち，$\mathcal{F}_n^{(\mathbf{m})}$ は次の「点 ζ」からなる $(m_1(m_2 + \cdots + m_\mu) + \cdots + m_{\mu-1}m_\mu)$ 次元のコンパクト多様体である：

$$\zeta:\ \ \{0\} \subset S_{m_1} \subset S_{m_1+m_2} \subset \cdots \subset S_{m_1+m_2+\cdots+m_{\mu-1}} \subset \mathbb{C}^n.$$

ここに，各 S_ν は $\mathbb{C}^n$ での原点を通る ν 次元平面である．各 $m_j = 1$ の場合が通常の旗空間 $\mathcal{F}_n$ であり，次の自然な射影 $\pi_{\mathbf{m}}$ が定まる：

$$\pi_{\mathbf{m}}:\ \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{F}_n^{(\mathbf{m})} \quad \text{such that} \quad \pi_{\mathbf{m}}^{-1}(\zeta) \ \approx\ \mathcal{F}_{m_1} \times \cdots \times \mathcal{F}_{m_\mu}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{F}_n^{(\mathbf{m})}.$$

定理 1． 旗空間 $\mathcal{F}_n$ の滑らかな境界で囲まれた擬凸状域 D で，Stein 領域でないものは次の形に限る：

或る $m_j \geq 2$ であるような $\mathbf{m}-$ 旗空間 $\mathcal{F}_n^{(\mathbf{m})}$，と $\mathcal{F}_n^{(\mathbf{m})}$ の滑らかな境界で囲まれた或る Stein 領域 D_0 があって，$D = \pi_{\mathbf{m}}^{-1}(D_0)$ である．

18

Erratum to "On the Levi-flats in Complex Tori of Dimension Two"

大沢健夫

名古屋大学・多元数理

論文 'On the Levi-flats in Complex Tori of Dimension Two' において、複素2次元トーラス内の実解析的なLevi平坦超曲面の分類を行なったが、その基礎として用いたY.-T. SiuのL^2評価式に重大な誤りがあることがM. Brunella氏によって指摘された。これに応じて次の命題を用いる部分を本文の主張から削除させて頂きたい。

命題（本文のProposition 0.1.）複素2次元トーラス内のC^5級Levi平坦超曲面は複素直線片をふくむ.

変更箇所は具体的には以下の通りである.

Theorem 0.1. ：削除

Theorem 0.2. ：'A real analytic Levi-flat' を 'A real analytic Levi-flat containing a complex line segment' に変更.

Theorem 0.3. ：変更なし.

参考文献

[1] M. Brunella : personal communication

[2] T. Ohsawa : On the Levi-flats in complex tori of dimension two, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 42 (2006), 361-377.

[3] Y.-T. Siu : $\bar\partial$-regularity for weakly pseudoconvex domains in compact Hermitian spaces with respect to invariant metrics, Ann. of Math. 156 (2002), 595-621.

19

Supplement to "On the complement of Levi-flats in Kähler manifolds of dimension ≥ 3"

大沢健夫

名古屋大学・多元数理

小論[1]において次の結果を示した

定理1. Mは3次元以上のコンパクトなケーラー多様体、Xは M内の実解析的なLevi平坦超曲面とする。このとき $M\setminus X$ 上には C^2 級の多重劣調和な皆既関数で、そのLevi形式の正固有値の個数があるコンパクト集合を除いていたるところ3以上であるものは存在しない。(特に、このとき $M\setminus X$ はスタイン多様体ではありえない)

これに関連した問題を扱った論文[2]の査読者に教示頂いた事実を利用して、複素部分多様体の補集合の擬凸性に関して定理1に類似する次の結果が得られた。

定理2([3]). Mは3次元以上のコンパクトなケーラー多様体、AはM内の余次元1の複素部分多様体で法束が位相的に自明なものとする。このとき $M\setminus A$ 上には C^2 級の多重劣調和関数で、そのLevi形式の正固有値の個数があるコンパクト集合を除いていたる所3以上であるものは存在しない。(とくにこのとき $M\setminus A$ はスタインではない)

$\dim M=2$ の場合、Aの法束が自明でも $M\setminus A$ がスタインになり得ることは、J.-P. Serreの例や上田哲生氏の理論により広く知られたことであるが、$\dim M\geq 3$ かつMがケーラーの場合、そのような例が存在するかどうかは未解決だった。

参考文献

[1] Ohsawa, T., On the complement of Levi-flats in Kähler manifolds of dimension ≥ 3, to appear.

[2] ———, On the existence of foliations with unitary holonomy along complex curves, unpublished.

[3] ———, Supplement to "On the complement of Levi-flats in Kähler manifolds of dimension ≥ 3", preprint.

[4] Ueda, T., On the neighbourhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ. 22 (1983), 583-607.

特別講演

Szegö 核の不変式論

平地 健吾 (東京大学大学院 数理科学研究科)

ベルグマン核は複素構造で決定される核関数であり, 複素幾何の様々な場面にあらわれる。一方, セゲー (Szegö) 核は (2 次元以上の場合) 複素構造のみで自然に定義することは困難であり, ベルグマン核にくらべれば複素幾何においての活躍の場は少ない. しかし, 最近, セゲー核の特異性と Q 曲率との関係が明らかになり [FH], CR 幾何の研究の対象として注目されるようになってきている. また Zelditch はセゲー核の漸近展開をもちいてコンパクト複素多様体上の正線束のベキのベルグマン核の漸近挙動が表示できることを示し, この結果は Donaldson により定スカラー曲率偏極代数多様体の安定性定理に応用されている. これもセゲー核をまじめに計算する動機になっている。

この講演では強擬凸領域のセゲー核を曲率をもちいて展開する方法を紹介する。題目の「セゲー核の不変式論」というのは Fefferman [F] によって提唱された「複素解析にあらわれる放物型不変式論」の一つの定式化である. 熱核の漸近展開はリーマン多様体上の不変量の研究の主要な道具であり, その計算には直交群に関する不変式論が利用される. これに類似する理論を多変数関数論において構築しようというのが放物型不変式論である. ベルグマン核については [H2] において十分な結果をえているが, セゲー核は双正則不変量ではないため, その結果が応用できるのは限られた場合だけである. ここでは一般のセゲー核に応用できる不変式論の構築の過程を球面の場合に限って説明する. 一般の強擬凸領域に拡張するには [H2] の理論と組み合わせればよいが, まだ論文は完成していない. しかし新しいアイディアは球面の場合にすべて登場している (と思っている).

一般化は?

1 セゲー核の定義と変換則

セゲー核の定義を復習する. 滑らかな境界をもつ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ とその境界 $\partial\Omega$ 上の体積要素 $d\sigma$ を与える. 関数空間

$$CH(\Omega) = \{ f \in C^\infty(\overline{\Omega}) : f \text{ は } \Omega \text{ 上で正則 } \}$$

に境界での積分 $(f_1, f_2) = \int_{\partial\Omega} f_1 \overline{f_2} d\sigma$ によりを内積を定め, この内積に関する $CH^2(\Omega)$ の完備化を $H^2(\Omega, d\sigma)$ とする (ハーディ空間とよばれる). 集合としての $H^2(\Omega, d\sigma)$ は $d\sigma$ に依存せずに定まるが内積は異なることに注意する.

ハーディ空間 $H^2(\Omega, d\sigma)$ の正規直交系 $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ を選び級数

$$K_{d\sigma}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(z)|^2$$

によってセゲー核を定義する．この級数は Ω 上で広義一様収束し Ω 上の（正規直交系の選び方によらない）実解析的な関数を定義する．

例：単位球 $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$ の境界 S^m, $m = 2n-1$, に通常の体積要素 $d\sigma_0$ をあたえれば $z_1, z_2, \ldots, z_n$ の単項式が $H^2(\Omega_0, d\sigma_0)$ の完全直交系になる．これらを正規化して足し合わせば

$$K_{d\sigma_0}(z) = c(1 - |z|^2)^{-n}$$

であることがわかる．ここで c は S^m の面積の逆数である．

このような計算が可能なのは領域と体積要素の対称性が高い場合だけであり，体積要素をすこし変形しただけでもセゲー核の計算は困難になる．有界強擬凸領域でセゲー核が閉じた形で書けるのは，私の知る限り，上の例のみである．

セゲー核の計算に不変式論を用いるには群作用による変換則が必要である．$K_{d\sigma}$ と $K'_{d\sigma'}$ を順に滑らかな境界をもつ強擬凸領域 $(\Omega, d\sigma)$ および $(\Omega', d\sigma')$ のセゲー核とする．$F\colon \Omega \to \Omega'$ を双正則写像とするとき F は境界まで滑らかに拡張される (Fefferman の拡張定理)．よって $F^*(d\sigma')$ は $\partial\Omega$ 上の体積要素を与える．$F^*(d\sigma') = e^f d\sigma$ となる $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ が Ω 上の多重列調和関数 $\widetilde{f}$ に拡張できるときには (このような f は CR 多重調和関数とよばれる)

$$K'_{d\sigma'}(F(z)) = e^{-\widetilde{f}(z)} K_{d\sigma}(z)$$

が成り立つ．f が CR 多重列調和でなければ変換則はなりたたない．

2 単位球のセゲー核

領域を単位球 Ω_0 に固定し，体積要素を取り替えたときのセゲー核の計算を試みる．球面 $S^m = S^{2n-1}$ 上の一般の体積要素を $d\sigma = e^f d\sigma_0$ とあらわし，$d\sigma$ に対応するセゲー核を $K_f(z)$ と書くことにする．$K_f(z)$ の境界での特異性は次の形であることが知られている：

$$K_f(z) = \Phi_f(z)(1 - |z|^2)^{-n} + \Psi_f(z) \log(1 - |z|^2),$$

ここで Φ_f, Ψ_f は球上の境界までこめて滑らかな関数である．上の例では $\Phi_0 = c$, $\Psi_0 = 0$ であり，対数項は現れない．実はこれは特殊な例であり，これ以外では必ず対数項が現れると予想されている (これは Ramadanov 予想とも呼ばれている)．漸近展開の計算は通常，特異性の高い部分から順に決定されるため，今の場合 Φ_f を計算しないと Ψ_f にはたどり着けない．しかし不変式論を用いれば Ψ_f を独立に分析することが可能になる．その手法を説明する．

2.1　対数項の主要部 $\Psi_f|_{S^m}$ の計算：線形項の決定

まず Ω_0 の正則自己同型は $G = SU(1,n)$ の作用であたえられることを思い出す．Ω_0 を

$$\Omega_0 \ni z \mapsto [1:z] = [\zeta_0 : \zeta_1 : \cdots : \zeta_n] \in \mathbb{CP}^n$$

により射影空間に埋め込めば，その定義方程式は

$$L(\zeta) = |\zeta_0|^2 - |\zeta_1|^2 - \cdots - |\zeta_n|^2 > 0$$

であり，二次形式 L を保つ ζ の一次変換が Ω_0 の全ての自己同型を与える．G の作用は境界 S^m にまで拡張され $S^m = G/P$ のように境界を等質空間と見なすことができる；ここで P は G の放物型部分群であり，以下の議論では P の表現論が用いられる．$\Psi[f] := \Psi_f|_{S^m} \cdot d\sigma$ とおけば，写像

$$\Psi \colon C^\infty(S^m) \to C^\infty(S^m, \wedge^m T^* S^m)$$

がえられる．セゲー核の変換則から，この写像が G 不変であることがわかる．また漸近展開の計算方法から $\Psi[f]$ は微分作用素であることもわかる．

定理 1． $C^\infty(S^m)$ から $C^\infty(S^m, \wedge^m T^* S^m)$ への G 不変線形微分作用素は定数倍をのぞいてただ一つ存在する．

この定理は表現論を用いて証明される．$C^\infty(S^m)$ と $C^\infty(S^m, \wedge^m T^* S^m)$ への G の作用は P の既約表現 (前者は自明な表現) の誘導表現である．このような空間の間の線形微分作用素は一般バーマ加群の間の準同型と対応し，これらの準同型はワイル群の作用を用いて記述することができる．いま考えている G/P の場合には完全な分類が得られているので，それを引用すればよい．

定理 1 を用いれば $\Psi[f]$ の f に関する線形部分を決定するには不変線形微分作用素を一つ構成すればよいことがわかる (普遍定数の決定の問題は残るが，その計算は難しくない)．

不変線形微分作用素の構成には L に対応するラプラシアン

$$\Delta = \partial_{\zeta_0}\partial_{\overline{\zeta}_0} - \partial_{\zeta_1}\partial_{\overline{\zeta}_1} - \cdots - \partial_{\zeta_n}\partial_{\overline{\zeta}_n}$$

が利用できる. $\mathcal{N} = \{L(\zeta) = 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ を S^m 上の $\mathbb{C}^*$ 束とみなし f を束上の $\mathbb{C}^*$ 不変な関数に持ち上げる (これも同じ f で表す).

定理2. f を $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の $\mathbb{C}^*$ 不変関数 $\widetilde{f}$ に拡張するとき

$$(\Delta^n \widetilde{f})|_{\mathcal{N}}$$

は拡張の選び方によらず f の微分作用素になる.

これがこの講演の一番重要な定理なので証明を与える. $\widetilde{f}|_{\mathcal{N}} = 0$ から $(\Delta^n \widetilde{f})|_{\mathcal{N}} = 0$ を導けばよい. そこで $\widetilde{f}(\zeta) = L(\zeta)h(\zeta)$ とおけば h は $(-1,-1)$ の同次性をもつ (すなわち $h(\lambda\zeta) = |\lambda|^{-2}h(\zeta)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$). $\Delta^n(Lh)$ を計算するには交換子

$$[\Delta, L^k] = kL^{k-1}(Z + \overline{Z} + n + k),$$
$$[\Delta^k, L] = k(Z + \overline{Z} + n + k)\Delta^{k-1},$$

ここで $Z = \sum_{j=0}^n \zeta_j \partial_{\zeta_j}$, を用いる.

$$\Delta^n(Lh) = L\Delta^n h + n(Z + \overline{Z} + 2n)\Delta^{n-1}h$$

において $\Delta^{n-1}h$ が $(-n,-n)$ の同次性をもつことに注目すれば第二項が消え, 右辺が L で割り切れることがわかる.

$\mathbb{C}^*$ 束の上で構成した微分作用素を

$$Q[f](z) := (\Delta^n \widetilde{f})(1, z)$$

により S^m 上の関数に引き戻せば $Q[f]d\sigma_0$ は $\wedge^m T^* S^m$ の断面をあたえる. Δ^n の G 不変性から $Q[f]d\sigma_0$ の G 不変性が導かれる. よって定理 1 により

$$\Psi[f] = c_n\, Q[f]d\sigma_0 + O(f^2) \tag{1}$$

が成り立つ (c_n は次元 n で決まる普遍定数である). $n = 2$ の場合は少しの考察で非線形項が現れないことがわかり $\Psi[f] = c_2 Q[f]d\sigma_0$ が導かれる ([H1], [FH]). $n \geq 3$ では実際に非線形項が現れる.

$Q[f]$ は Q-曲率とよばれ近年盛んに研究されている. Q 曲率は一般の非退化 CR 多様体 M 上で接触形式 θ によってきまる関数 Q_θ であるが, 積分

$$\int_M Q_\theta \theta \wedge (d\theta)^{n-1}$$

は θ の選び方によらない M の CR 不変量になる. $M = S^m$ または $n = 2$ のときにはこの積分が消えることが知られている. 一般の場合の不変量の意味を調べるのが現在の主要な問題の一つである.

2.2 対数項の主要部 $\Psi[f]$ の計算：二次以上の項の決定

非線形項 $O(f^2)$ を決定するにはもう少し工夫が必要であるが，f を $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ に持ち上げて G 不変式を構成するという方針には変わりがない．

$\mathcal{N}$ 上の f を任意に拡張するのではなく $\Delta\widetilde{f}=0$ を満たすように拡張することを考える．しかし，定理２によりこれは一般には不可能である ($\Delta^n\widetilde{f}|_{\mathcal{N}}$ が拡張の障害である)．そこで方程式を弱めて

$$\Delta\widetilde{f}=O(L^{n-1})$$

を満たす拡張を考える．これは交換子を用いれば簡単に解を構成でき，$\widetilde{f}$ は mod $O(L^n)$ で一意的に存在することもわかる．$\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 上の平坦なローレンツ・エルミート計量

$$\widetilde{g}=d\zeta_0 d\overline{\zeta}_0-d\zeta_1 d\overline{\zeta}_1-\cdots-d\zeta_n d\overline{\zeta}_n$$

を考える．$(\mathbb{C}^n\setminus\{0\},\widetilde{g})$ を S^m のアンビエント空間という．$\widetilde{g}$ できまる平坦な接続を $\nabla=\nabla^{1,0}+\nabla^{0,1}$ とし，∇^{p+q} のタイプ (p,q) 部分を $\nabla^{p,q}$ とおく．

$$f\mapsto F^{p,q}:=\nabla^{p,q}\widetilde{f}|_{\mathcal{N}}$$

はその構成方法により G 不変である．ただし，ここで $p+q<n$ をみたすものだけを考える (これ以上微分すると $\nabla^{p,q}\widetilde{f}|_{\mathcal{N}}$ の一意性が保証されない)．これらのテンソルから非線形不変微分作用素を構成する：

$$\widetilde{W}[f]:=\mathrm{contr}(F^{p_1,q_1}\otimes\cdots\otimes F^{p_r,q_r}) \tag{2}$$

ここで $p_j,q_j\geq 1$, $p_1+\cdots+p_r=q_1+\cdots+q_r=n$ である．contr は計量 $\widetilde{g}$ に関する完全縮約である (縮約の取り方には任意性があるので上の記号では不十分であるが今は気にしない)．この完全縮約は $\mathcal{N}$ の近傍で定義された $(-n,-n)$ 同次関数である．そこで

$$W[f]:=\widetilde{W}[f](1,z)$$

とおけば r の G 不変微分作用素があたえられる．このような微分作用素を $Q[f]$ も含めて f のウェイト $(-n,-n)$ のワイル不変量とよぶことにする．

定理３．$\Psi[f]$ はウェイト $(-n,-n)$ のワイル不変量の一次結合の $d\sigma_0$ 倍で与えられる．

例: (1) $n=2$ の場合，定理３から

$$\Psi[f]=(c_2Q[f]+c_2'\|F^{1,1}\|^2)d\sigma_0$$

が導かれる．ここで $\|F^{p,q}\|^2 = \mathrm{contr}(F^{p,q} \otimes F^{q,p})$．しかし，が第 2 項のワイル不変量は常に消えることが 2 次元の場合の特殊性を用いて簡単に証明できる．よって非線形項は現れない．

(2) $n = 3$ の場合

$$\Psi[f]/d\sigma_0 = c_3 Q[f] + c_3' \|F^{2,1}\|^2 + c_3'' \mathrm{contr}(F^{1,1} \otimes F^{1,1} \otimes F^{1,1})$$

がえられる．c_3' と c_3'' はまだまじめには計算していない (が c_3' は消えないようである)．

この定理の証明は難しい．実はワイル不変量がすべての G 不変微分作用素

$$\mathcal{L}\colon C^\infty(S^m) \to C^\infty(S^m, \wedge^m T^* S^m)$$

をすべて与えるわけではない．セゲー核の G 不変性以外の不変性が必要になる．上で述べた変換則を F が恒等写像である場合に適用すれば次がえられる：

命題 4．h が $\partial\Omega$ 上の CR 多重調和関数であれば

$$K_{e^h d\sigma}(z) = e^{-\widetilde{h}(z)} K_{d\sigma}(z)$$

がなりたつ．ここで $\widetilde{h}$ は h の Ω への多重列調和関数としての拡張である．とくに $\Psi[f+h] = \Psi[f]$ がなりたつ．

定理 5．G 不変微分作用素 $\mathcal{L} : C^\infty(S^m) \to C^\infty(S^m, \wedge^m T^* S^m)$ が

$$\mathcal{L}(f+h) = \mathcal{L}(f) \quad h \text{ は CR 多重列調和関数} \tag{3}$$

をみたせば $\mathcal{L}$ はワイル不変量の一次結合である．

仮定 (3) を満たさない不変作用素はワイル不変量で与えれるとは限らない．一方，ワイル不変量が (3) を満たすのは簡単に確認できる．f を h だけずらせば $\widetilde{f}$ は $\widetilde{h}$ だけずれる．ここで $\widetilde{h}$ は多重列調和関数であり $\nabla^{p,q}\widetilde{h} = 0, p, q, \geq 1,$ が成り立ちワイル不変量には寄与しない．

C^∞ 関数 (または CR 多重列調和関数) の $e_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^m$ でのテーラー級数全体のなす集合を $\mathcal{E}$ (または $\mathcal{P}$) とするとき (3) は $\mathcal{L}$ が商空間 $\mathcal{E}/\mathcal{P}$ で定義されていることを主張している．アンビエント空間に持ち上げれば P 加群 $\mathcal{E}/\mathcal{P}$ をテンソル空間に埋め込むことができる．実際 $f \in \mathcal{E}$ にたいして拡張 $\widetilde{f}$ をえらびテンソルのリスト

$$(\nabla^{p,q}\widetilde{f}(\widetilde{e}_0))_{p,q\geq 1} \in \mathbb{T} = \prod_{p,q\geq 1} \bigotimes^p V^* \otimes \bigotimes^q \overline{V}^*$$

を考える．ここで $V=\mathbb{C}^{n+1}$, $\tilde{e}_0=(1,1,0,\ldots,0)$ である．$\tilde{f}$ が動くときの $(\nabla^{p,q}\tilde{f}(\tilde{e}_0))_{p,q\geq 1}$ のなす集合を $\mathcal{H}_0$ とおけば $\mathcal{H}_0$ は $\mathbb{T}$ の P 不変部分空間になる．$(\nabla^{p,q}\tilde{f}(\tilde{e}_0))_{p,q\geq 1}$ は $\tilde{f}$ のテーラー展開の一部を取り出していることになり，これがちょうど $f \mod \mathcal{P}$ を決定する．したがって P 同変な全射

$$\pi\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{E}/\mathcal{P}$$

が定義される．$\mathcal{E}/\mathcal{P}$ の P 不変量を π で $\mathcal{H}_0$ に引き戻せばテンソル空間の部分空間上の P 不変量になり，商空間を扱うことを避けることができる；さらに $\mathcal{H}_0$ では完全縮約により簡単に不変量を構成できる，という二つの利点がある．ワイル不変量がすべての P 不変量をあたえることの証明は難しい (P は半単純でないので $\mathcal{H}_0$ の形を調べる必要がある) が幸いにも [BEG] によって解決されている．

2.3 Bernstein-Gelfand-Gelfand 複体との関係

スカラー関数のジェットの商空間 $\mathcal{E}/\mathcal{P}$ をテンソル空間 $\mathbb{T}$ に埋め込むのがなぜ自然なのか，という問には表現論の視点から答えることもできる．$\mathcal{E}/\mathcal{P}$ という商空間は $\overline{\partial}_b$ 複体の中に自然に現れる．CR 構造を用いれば複素化された接空間は $N\oplus T^{1,0}\oplus T^{0,1}$ と分解される．ここで N はランク 1, $T^{1,0}$ と $T^{0,1}$ は互いに共役である．$\mathcal{E}$ の複素化を $\mathcal{E}^{\mathbb{C}}$ とする．$f\in\mathcal{E}^{\mathbb{C}}$ の外微分 df の $T^{1,0}$ および $T^{0,1}$ への制限で $\partial_b f$ および $\overline{\partial}_b f$ を定義する．これはタイプ (p,q) の微分形式にも拡張される．タイプ (p,q) の微分形式の e_0 での ∞ ジェットのなす空間を $\mathcal{E}^{p,q}$ とおけば

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\partial_b}{\nearrow} & \mathcal{E}^{p+1,q} \\ \mathcal{E}^{p,q} & & \\ & \underset{\overline{\partial}_b}{\searrow} & \mathcal{E}^{p,q+1} \end{array}$$

となる．$p,q\geq 1$ の場合には $\mathcal{E}^{p,q}$ のレビ計量に関して trace-free である微分形式のジェットのなす部分空間を $\mathcal{E}_\circ^{p,q}$ であらわす．必要なところで trace-free 部分への射影 $\mathrm{tf}\colon \mathcal{E}^{p,q}\to\mathcal{E}_\circ^{p,q}$ を合成することにより

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \mathcal{E}^{2,0} \\ & & & & \mathcal{E}^{1,0} & \nearrow & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ 0\to\mathbb{C}\to\mathcal{E}^{\mathbb{C}} & & & & & & \mathcal{E}_\circ^{1,1} \\ & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & \mathcal{E}^{0,1} & & \\ & & & & & \searrow & \mathcal{E}^{0,2} \end{array}$$

という P 加群の図式がえられる．($n=2$ の場合は $\mathcal{E}^{2,0}=0$ なので修正が必要であるが，代わりの図式を作ることができる．) ここで重要なので $\mathcal{E}$ から

$\mathcal{E}_{\circ}^{1,1}$ への合成写像 $f \mapsto i\,\mathrm{tf}\,\partial_b\overline{\partial}_b f$ または $f \mapsto i\,\mathrm{tf}\,\overline{\partial}_b\partial_b f$ である．これらは符号を除いて一致するので一方を選んで $R\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0^{1,1}$ を書くことにする．このとき

$$0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0^{1,1}$$

は完全列になる．したがって商加群 $\mathcal{E}/\mathcal{P}$ は $\mathrm{image}\,R \subset \mathcal{E}_0^{1,1}$ としてテンソル空間に埋め込まれるのである．$\mathrm{image}\,R$ のアンビエント空間へのリフトを考えれば，先ほどと同じテンソルの空間 $\mathcal{H}_0$ がえられる．

ここで用いた複体は (一般化された)Bernstein-Gelfand-Gelfand 複体の始まりの部分であり完全性はその一般論から導くことができる．始点にある $\mathbb{C}$ (G の自明な表現) のかわりに G の実有限次元表現 $\mathbb{V}$ を選べば，P の既約表現に対応する S^m 上のバンドルのジェットの空間の複体が同じパターンで現れる．

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathcal{F}_{2,0} \\
 & & & \mathcal{F}_{1.0} \arrow[ur, "D_{1,0}"] \arrow[dr, "\overline{D}_{1,0}"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{V}^{\mathbb{C}} \arrow[r] & \mathcal{F}_{0.0}^{\mathbb{C}} \arrow[ur, "D_{0.0}"] \arrow[dr, "\overline{D}_{0,0}"'] & & \mathcal{F}_{1,1}^{\mathbb{C}} \\
 & & & \mathcal{F}_{0.1} \arrow[ur, "D_{0,1}"] \arrow[dr, "\overline{D}_{0,1}"'] & \\
 & & & & \mathcal{F}_{0,2}
\end{tikzcd}$$

$R = \overline{D}_{1,0} \circ D_{0.0}$ は実であり $R\colon \mathcal{F}_{0,0} \to \mathcal{F}_{1.1}$ が定義され $\mathcal{F}_{0.0}/\ker R$ は $\mathrm{image}\,F_{0.0}$ と同形になる．とくに $\mathbb{V}$ として G の随伴表現を選べば $\mathcal{F}_{0.0}/\ker R$ は $\mathbb{C}^n$ の超曲面の無限小変形の局所同形類を記述し，それが曲率 $\mathrm{image}\,R$ で代表されることを示している．この場合 R は 4 階の微分作用素である．これは $\mathcal{E}/\mathcal{P}$ の $\mathcal{E}_{\circ}^{1,1}$ への埋め込みと平行した議論である．$\mathrm{image}\,R$ のアンビエント空間へのリフトは [H2] において構成されている．

Moser の強擬凸超曲面の標準形の理論も $\mathcal{F}_{0.0}/\ker R$ の記述の一つの方法であり，商空間のスライスを与えている．

2.4 極型の特異性 Φ の計算

セゲー核の漸近展開を不変量を用いて書き表すには定義関数を境界の体積要素にあわせて取り直す必要がある．領域 Ω のベルグマン計量を g，そのラプラシアンを Δ_g とする (完備アインシュタイン計量と一致する)．体積要素は境界の接触形式 θ を用いて $d\sigma = \theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ と表すことができる．そこで

領域の定義関数を境界値問題

$$\begin{cases} \Delta_g \log r = n & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{Im}(\sqrt{-1}\partial r) = \theta & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

を用いて定義する．とくに $r = 1 - |z|^2$ のときには $\Delta_g \log r = n$ は明らかであり $\theta_0 = \operatorname{Im}(\sqrt{-1}\partial(1 - |z|^2))$ は通常の体積要素に対応する．ベルグマン計量は完備であるので Δ_g は境界で退化している．よって解の存在と一意性はわかるが境界での微分可能性は $C^{n+2-\varepsilon}(\overline{\Omega})$, $\varepsilon > 0$, までしかえられない．

命題6． 単位球において $r \in C^\infty(\overline{\Omega})$ となる必要十分条件は CR 多重調和関数 f にたいして $\theta = e^f\theta_0$ が成り立つことである．

この θ に関する条件は $n > 2$ の場合 θ が pseudo-Eisntein(田中-Webster リッチ曲率がレビ計量の関数倍になる) であることと同値になる．この形の主張は一般の強擬凸領域でもなりたつ．方程式 (4) によって定義関数を定める理由は次の変換則にある．

命題7． f が CR 多重列調和とするとき $\widehat{\theta} = e^u\theta$ がなりたてば対応する定義関数は $\widehat{r} = e^{\widetilde{u}}r$ をみたす．

r によってセゲー核を展開すれば，その係数も変換則を保つことになる．

定理8． f に対して $e^f d\sigma_0 = \theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ をみたす接触形式 θ を定め，(4) をみたす定義関数 r をとるとき

$$K_f = \sum_{k=0}^{n-1} I_k[f]\, r^{k-n} + I_n[f] \log r + O(r \log r)$$

という展開がなりたつ．ここで $I_k[f]$ はウェイト $(-k, -k)$ のワイル不変量の一次結合である．ここでウェイト $(-k, -k)$ のワイル不変量とは $p_1 + \cdots + p_r = q_1 + \cdots + q_r = k$ をみたす (2) の形の完全縮約である．

例:

(1) 初項 $I_0[f]$ は定数 (球の面積の逆数) である．

(2) $I_1[f] = 0$; ウェイト $(-1, -1)$ のワイル不変量は存在しない．

(3) $n > 2$ のとき $I_2[f] = c_1\|F^{(1,1)}\|^2$

(4) $n > 3$ のとき $I_3[f] = c_2\|F^{(2,1)}\|^2 + c_3 \operatorname{contr}(F^{(1,1)} \otimes F^{(1,1)} \otimes F^{(1,1)})$

2.5 対数項 Φ_f の展開

定理8で $O(r \log r)$ の部分を記述できなかったのには2つの理由がある．第一に $\widetilde{f}$ の定義に任意性が多すぎて大きな k にたいしてウェイト $(-k, -k)$ の

ワイル不変量を定義することができない；第二に定義関数 r が滑らかでないので，高次の展開には r の特異性が混ざってしまう (本質的にはこれらは同じ問題に帰着される)．これを回避するには

$$\Delta(\widetilde{f}^{(0)} + L^n \widetilde{f}^{(2)} \log L) = 0$$

という特異性をもった解をつくり，その滑らかな部分 $\widetilde{f}^{(0)}$ を取り出してワイル不変量を定義すればよい．定義関数の作り方についても同様で，r の（対数項）として現れる特異部分を捨てて滑らかにすればよい．これらの操作を行えば定理 8 の展開は

$$K_f \sim \sum_{k=0}^{n-1} I_k[f]\, r^{k-n} + \sum_{k=n}^{\infty} I_k[f] r^{k-n} \log r$$

にまで拡張できる．ここで I_k はウェイト $(-k, -k)$ のワイル不変量である。

参考文献

[BEG] T. N. Bailey, M. G. Eastwood and C. R. Graham, *Invariant theory for conformal and CR geometry,* Ann. of Math. **139** (1994), 491–552.

[F] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis,* Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[FH] C. Fefferman and K. Hirachi, *Ambient metric construction of Q-curvature in conformal and CR geometries,* Math. Res. Lett. **10** (2003), 819–832, `arXiv:math.DG/0303184`

[H1] K. Hirachi, Scalar pseudo-hermitian invariants and the Szegö kernel on three-dimensional CR manifolds, *in "Complex Geometry,"* Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **143**, pp 67–76, Dekker, 1992.

[H2] K. Hirachi, *Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel,* Ann. of Math. **151** (2000) 151–191

[H3] K. Hirachi, *Logarithmic singularity of the Szegö kernel and a global invariant of strictly pseudoconvex domains,* Ann. of Math. **163** (2006), 499–515

2 0　GALOIS GEOMETRY

大藪　卓

GALOIS::::理論。GALOIS::::の思想。代数方程式の根の置換群。之を、代数幾何学的に考えたいのである。即ち、

F(X)=0::::::代数方程式。　$\subset$ k[X]::::::

F(X)k[X]::::::イデアル IN k[X]:::::::::::!!!!!!

THEN::::we can consider::::

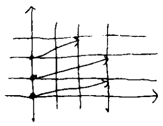
k[X]/F(X)k[X]::::::::::!!!!!HENCE::::we can consider:::::::

AUT(k[X]/F(X)k[X])::::::!!!!!::::::

GAL(K/k):::::!!!!!!!!!!

F(X)=0::::::代数的集合。!!!!!!!!::::::::::

有限幾何学。



之が、代数幾何学的に考える、と言う事である。!!!!!!!!!

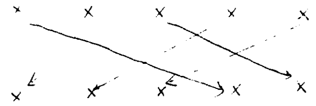
k[X]/F(X)k[X]←=========→SPEC(k[X]/F(X)k[X])::::

AUT(k[X]/F(X)k[X]):::G:G':G":-------

k[X]/F(X)k[X]←=========→F(X)=0::::

GAL(K/k):G:G':G":::::::

根の置換群。Sn $\supset$ An $\supset$ GAL(K/k) $\supset$ G $\supset$ G' ····



K[X] $\supset$ k[X]::::::

問題。

AUT(k[X]/F(X)k[X])=====GAL(K/k)::::::????????

AUT(K[X]/k[X])====?????????????????????

これらの事は、GALOIS GEOMETRY:::とでも言うべき、何か『有限幾何学』の可能性を示唆している。F(X)=0:

変換群

大藪　卓

KLEIN::::::群があれば、幾何学がある。

ALGEBRA::::::環::::::があれば、幾何学がある。

R:::ALGEBRA←===============→M®:SPEC®:::::

DIFF®　　AUT®:G:G':G":·········

X®←====================→M®:SPEC®:::::

AUT(X®):G:G':G":··········

KLEIN:::幾何学:::::⊗S:G):::::変換群:G:::::作用。ACTION:::::

HOMOMORPHISM　ρ:G===============→DIFF(M)::::

HOMOMORPHISM　ρ:G===============→AUT®::::

HOMOMORPHISM　ρ:G===============→SUT(X®)):::::

DIFF(M) $\supset$ G $\supset$ G' $\supset$ G" $\supset$ G"' $\supset$ ·················

$\mathfrak{X}^{(\omega)}$(M) $\supset$ g $\supset$ g' $\supset$ g" $\supset$ g"' $\supset$ ·················

AUT® $\supset$ G $\supset$ G' $\supset$ g" $\supset$ G"' $\supset$ ·················

X® $\supset$ g $\supset$ g $\supset$ G" $\supset$ g"' $\supset$ ·················

AUT(X®) $\supset$ G $\supset$ G' $\supset$ G" $\supset$ G"' $\supset$ ··············

DIFF(M):::C^{ω}(M)=========→C^{ω}(M):::

DIFF(G)::C^{ω}(G)===========→C^{ω}(G)::::

DIFF(G/K)::C^{ω}(G/K)=======→C^{ω}(G/K):::::

DIFF(G/Γ):::C^{ω}(G/Γ)=====→C^{ω}(G/Γ):::::::

::::::::::::RING ISOMORPHISMS::::::

G::C^{ω}(G)======================→C^{ω}(G):::::

G:C^{ω}(G/K)======================→C^{ω}(G/K)::::

G:C^{ω}(G/Γ)====================→C^{ω}(G/Γ)::::::

::::::::::RING ISOMORPHISMS::::::::

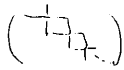
REPRESENTATION::::::

DIFF(M) $\ni$ f::::

$$F^* \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \\ \vdots \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} H_O \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

● ${}^tO$=I:::::無限次元・実・直交行列。

定理。G:::::Hi===============→Hi::::::即ち、



G:G===============→G::::::

G:G/K======================→G/K:::::

G:G/Γ ====================→G/Γ

微分・積分・微分方程式=========→DIFFEOMORPHISM::::

=============→DIFF(M)::::::DIFF(M):::::の概念。

群・多様体。リー群。代数群。=======→変換群。　$\subset$　DIFF(M):::

微分方程式の全体。微分方程式の作用。============→DIFF(M):

DIFFEOMORPHISM:::の全体・作用。=============→DIFF(M):::::::

KLEIN::LIE::::GALOIS:::::の思想の合体。=====リー群。変換群。

微分方程式の作用=========→変換群。DIFFEOMORPHISM::::::

有限次元リー群。有限次元リー環。微分←=========→積分。

無限次元リー群。無限次元リー環。微分←=========→積分。

ACTION:::::作用。変換群。

HOMOMORPHISM　ρ:G============→DIFF(M)::::::

このように変換群と言う概念は、DIFF(M):::::と切っても切り離せない。

=======DIFFEOMORPHISM========DIFF(M)::::::!!!!!!

代数幾何学では、:::::????????

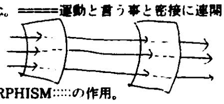
HOMOMORPHISM　ρ:G========→BIR(V)::???????

群・多様体

大藪　卓

群の概念=======GALOIS:::::1840::::::年頃。
多様体の概念=========RIEMANN:::::1853;::::::年頃。
リー群の概念=========LIE::::::19::::::世紀後半。群・多様体。
KLEIN'S ERLANGEN PROGRAMME::::::KLEIN::幾何学。変換群。
微分方程式=======DIFFEOMORPHISM::::::::::
微分方程式の全体==================➔DIFF(M)::::::
DIFFEOMORPHISM の全体==========➔DIFF(M)::::::::
RIEMANN::::の思想。
多様体概念。
計量幾何学。RIEMANN::::幾何学。リーマン空間。

リーマンの多様体概念==========➔:::1936::WHITNEY:::：現代的定義。
リーマンの多様体概念==========➔SMALE::::::の:::::MORSE::::理論。
このような見方が出来る、と言うのが、私の考えである。
リーマンの多様体概念。=====運動と言う事と密接に連関していた。

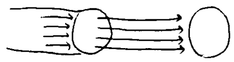


=====DIFFEOMORPHISM:::::の作用。
=====微分方程式の作用=====DIFFEOMORPHISM::::

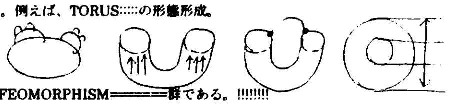
こうして見ると、DIFF(M):::::概念の成立が如何に重要であるか、と言う事がよく分かる。即ち、
微分・積分・微分方程式の思想===========➔DIFF(M):::!!!!!
DIFF(M):::MATHEMATICS:::::
DIFF(M):::·SCIENCE::::::

DIFF(・・・・)::·・・・・・・・・・・
之は、我々の数学である。微分・積分・微分方程式の思想の自然な継承である。

MORSE:::::理論。
臨界点が無い=======DIFFEOMORPHIC:::DIFFEOMORPHIC DEFORMATION::::::::



臨界点。MORSE::::関数。NICE FUNCTION:::指数。N—HANDLE::をくっつける。例えば、TORUS:::::の形態形成。



DIFFEOMORPHISM======群である。!!!!!!!!
DIFFEOMORPHISM======多様体である。????????
DIFF(M)::::::無限次元リー群。無限次元多様体。
R=================➔AUT®::::::!!!!!!!!
R=================➔X®:::::!!!!!!!
R=================➔AUT(X®)):::::!!!!!!!!!!
いずれにしても、
微分・積分・微分方程式の思想=========➔リー群。
微分・積分・微分方程式の思想=========➔DIFF(M).
微分・積分・微分方程式の思想=========➔MORSE::::::理論。
多様体概念。LOCALLY EUCLIDEAN:::::!!!!!!!!::::::::
近年の数理物理学の動き、多様体概念の刷新、空間概念の刷新、－－－－、これらは、EUCLID::::::空間の概念の刷新、－－－－－－何かを狙っているが、果たして、どのように成っていくのであろうか。??????????
兎も角、私の考えでは、DIFFEOMORPHISM:::::DIFF(M):::::の概念の成立が非常に重要である、と言う事である。
微分方程式========➔DIFFEOMORPHISM=======➔DIFF(M):::
EUCLID::::空間======➔多様体概念===➔リー群=群・多様体=➔DIFF(M)
多様体上の微分・積分学=微分幾何学。多様体上の解析学=GLOBAL ANALYSIS::::。======大域解析学。これらも全て、DIFF(M)::::::の概念の下に包摂される。初めに、R:::::AUT®:::::X®:::::AUT(X®)):::::ありき。?????????
群・多様体===リー群==========➔DIFF(M)::::!!!!!!

ポアンカレ予想

大藪　卓

ポアンカレ予想というものがある。即ち、
M====Sn::::HOMOTOPY EQUIVALENT::::THEN:
M==Sn::::HOMEOMORPHIC:::??????
SMALE::::n>=5::::::1960::::::
FREEDMANN:::n=4::::1980:::年代。
N====3::::::STILL OPEN:::!!!!!!!!!!
FIBER BUNDLE:::::FIBRATION:::::
F==========➔E========➔B:::::
X:B'=======➔B::::連続写像。
誘導束。INDUCED BUNDLE::::
F==========➔E'========➔B'::::
特に、B=====B':HOMOTOPY EQUIVALENT:::
F==========➔E'========➔B'::::::
E==E':HOMOTOPY EQUIVALENT:::???????

PRINCIPAL FIBRATION:::::主束。
K============➔G==========➔G/K::::
INDUCED BUNDLE:::::
K============➔G'=========➔M:::::
MAIN OBSERVATION::::
M==G/K:::*HOMOTOPY EQUIVALENT:::THEN:
M==G/K::::HOMOTOPY EQUIVALENT::::

O(n)=========➔O(n+1)=====➔Sn=O(n+1)/O(n)
INDUCED BUNDLE:::::
O(n)=========➔G=========➔M::::
MAIN OBSERVATION:::::
M==Sn:HOMOTOPY EQUIVALENT::::THEN:::::
G=O(n+1):::::HOMOTOPY EQUIVALENT::::

MAIN PROBLEM:::::
G==O(n):HOMOTOPY EQUIVALENT:::THEN:::
G==O(n):::???????:::ISOMORPHIC::?????

INDUCED　BUNDLE の方法

大薮　卓

トポロジーには、標準コースとして、誘導束::::INDUCED BUNDLE:::::と言う事が存在する。簡単な事であるが、ただ、コノ概念が存在している、と言う事を強調したいのである。

FIBRATION::::::FIBER BUNDLE::::::

F=========➔E========➔B:::::::

X:B'==========➔B::::連続写像。

INDUCED BUNDLE:::::誘導束。

F=========➔E'=========➔B'::::::::

B===B':HOMOTOPY EQUIVALENT::::の時は、???????

PRINCIPAL FIBRATION:::::主束。

K==========➔G=========➔G/K:::::::

G/K====M::::HOMOTOPY EQUIVALENT::::::

INDUCED BUNDLE:::::誘導束。

K==========➔G'=========➔M:::::

MAIN OBSERVATION:::::::

M===G/K:::HOMOTOPY EQUIVALENT::::THEN::::::

G===G':LIE GROUPS:::::AND:::::

G===G':HOMOTOPY EQUIVALENT::::::!!!!!!

HOPF FIBRATION::::::

S1==========➔S3========➔S2::::

S3==========➔S7========➔S4::::::

S7==========➔S15=======➔S8::::::

S3:::S4:::-POINCARE CONJECTURES:::::

POINCARE CONJECTURE FOR LIE GROUPS::::

POINCARE CINJECTURE FOR SYMMETRIC SPACE:::

球面に対する POINCARE CONJECTURE::::

FIBRATION::::

O(n)=======➔O(n+1)=====➔Sn=O(n+1)/O(n)::::

等質空間。リー群。代数群。主束。

K==========➔G=========➔G/K::::::

21

An application of Hölder inequality for certain analytic functions

Junichi Nishiwaki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}_p(n)$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k \qquad (p, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\})$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}_p(n, \alpha)$ be the subclass of $\mathcal{A}_p(n)$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha (0 \leqq \alpha < p)$. Also, let $\mathcal{T}_p(n, \alpha)$ be the subclass of $\mathcal{A}_p(n)$ consisting of all functions $f(z)$ satisfying $zf'(z) \in \mathcal{S}_p(n, \alpha)$. It is well-known that

(i) If $f(z) \in \mathcal{A}_p(n)$ satisfies

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} (k - \alpha)|a_k| \leqq p - \alpha,$$

then $f(z) \in \mathcal{S}_p(n, \alpha)$.

(ii) If $f(z) \in \mathcal{A}_p(n)$ satisfies

$$\sum_{k=p+n}^{\infty} k(k - \alpha)|a_k| \leqq p(p - \alpha),$$

then $f(z) \in \mathcal{T}_p(n, \alpha)$.

In view of the above coefficient inequalities, we introduce the subclass $\mathcal{S}_p^*(n, \alpha)$ of $\mathcal{S}_p(n, \alpha)$ and the subclass $\mathcal{T}_p^*(n, \alpha)$ of $\mathcal{T}_P(n, \alpha)$.

For $f_j(z) \in \mathcal{A}_p(n)$ given by

$$f_j(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_{k,j} z^k \qquad (j \in \mathbb{N}),$$

we define

$$G_m(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{k,j}\right) z^k$$

and

$$H_m(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{k,j}{}^{p_j} \right) z^k \qquad (p_j > 0).$$

Then $G_m(z)$ denotes the convolution of $f_j(z)(j = 1,2,3,\dots,m)$. Therefore, $H_m(z)$ is the generalization of the convolutions.

In the present talk, we discuss an application of Hölder inequality for $H_m(z)$ to be in the classes $\mathcal{S}_p^*(n,\beta)$ and $\mathcal{T}_p(n,\beta)$.

Theorem 1 *If $f_j(z) \in \mathcal{S}_p^*(n,\alpha_j)$ for each $j = 1,2,3,\dots,m$, then $H_m(z) \in \mathcal{S}_p^*(n,\beta)$ with*

$$\beta = \inf_{k \geqq p+n} \left\{ p - \frac{(k-p)\prod_{j=1}^m (p-\alpha_j)^{p_j}}{\prod_{j=1}^m (k-\alpha_j)^{p_j} - \prod_{j=1}^m (p-\alpha_j)^{p_j}} \right\},$$

where $p_j \geqq 1/q_j, q_j > 1$, and $\sum_{j=1}^m 1/q_j = 1$.

Corollary 1 *If $f_j(z) \in \mathcal{S}_p^*(n,\alpha_j)$ for each $j = 1,2,3,\dots,m$, then $G_m(z) \in \mathcal{S}_p^*(n,\beta)$ with*

$$\beta = p - \frac{n\prod_{j=1}^m (p-\alpha_j)}{\prod_{j=1}^m (p+n-\alpha_j) - \prod_{j=1}^m (p-\alpha_j)}.$$

Theorem 3 *If $f_j(z) \in \mathcal{T}_p^*(n,\alpha_j)$ for each $j = 1,2,3,\dots,m$, then $H_m(z) \in \mathcal{T}_p^*(n,\beta)$ with*

$$\beta = \inf_{k \geqq p+n} \left\{ p - \frac{k(k-p)\prod_{j=1}^m p^{p_j}(p-\alpha_j)^{p_j}}{p\prod_{j=1}^m k^{p_j}(k-\alpha_j)^{p_j} - k\prod_{j=1}^m p^{p_j}(p-\alpha_j)^{p_j}} \right\},$$

where $p_j \geqq 1/q_j, q_j > 1$, and $\sum_{j=1}^m 1/q_j = 1$.

Corollary 3 *If $f_j(z) \in \mathcal{T}_p^*(n,\alpha_j)$ for each $j = 1,2,3,\dots,m$, then $G_m(z) \in \mathcal{T}_p^*(n,\beta)$ with*

$$\beta = p - \frac{np^{m-1}\prod_{j=1}^m (p-\alpha_j)}{(p+n)^{m-1}\prod_{j=1}^m (p+n-\alpha_j) - p^{m-1}\prod_{j=1}^m (p-\alpha_j)}.$$

2 2

Some properties of certain analytic functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Toshio Hayami (Kinki University)
Kazuo Kuroki (Kinki University)

Let $\mathcal{A}_p$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A function $f(z) \in \mathcal{A}_p$ is said to be a member of the subclass $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma; j)$ of $\mathcal{A}_p$ if it satisfies

$$\operatorname{Re}\left(\alpha \frac{f^{(j)}(z)}{z^{p-j}} + \beta \frac{f^{(j+1)}(z)}{z^{p-j-1}}\right) > \gamma \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha (\alpha > 0), \beta (\beta > 0)$, and $\gamma\, (0 \leqq \gamma < p!\,(\alpha + (p-j)\beta)\,/(p-j)!)$, where $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Remark If $p = 1$ and $j = 0$, then $f(z) \in \mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma; 0)$ satisfies

$$\operatorname{Re}\left(\alpha \frac{f(z)}{z} + \beta f'(z)\right) > \gamma \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha(\alpha > 0), \beta(\beta > 0)$, and $\gamma(0 \leqq \gamma < \alpha + \beta)$.

In view of the definition for the class $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma; j)$, we see that this class is convex. In the present talk, we consider some properties for functions $f(z)$ belonging to the class $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma; j)$.

Theorem 1 *A function $f(z) \in \mathcal{A}_p$ is in the class $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma; j)$ if and only if*

$$f(z) = z^p + 2(\delta - \gamma) \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(k-j)!}{k!\,(\alpha + (k-j)\beta)} x^{k-p} z^k \right) d\mu(x)$$

where $\mu(x)$ is the probability measure on $X = \{x \in \mathbb{C} | |x| = 1\}$ and $\delta = p!\,(\alpha + (p-j)\beta)\,/(p-j)!$.

Taking $p=1$ and $j=0$ in Theorem 1, we have

Corollary 1 *A function $f(z) \in \mathcal{A}_1$ is in the class $\mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma; 0)$ if and only if*

$$f(z) = z + 2(\alpha+\beta-\gamma) \int_{|x|=1} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha + k\beta} x^{k-1} z^k \right) d\mu(x)$$

where $\mu(x)$ is the probability measure on $X = \{x \in \mathbb{C} \| x| = 1\}$.

Corollary 2 *If $f(z)$ is in the class $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma; j)$, then*

$$|a_k| \leqq \frac{(k-j)!2(\delta-\gamma)}{k!\,(\alpha+(k-j)\beta)} \qquad (k \geqq p+1).$$

where $\delta = p!\,(\alpha+(p-j)\beta)\,/(p-j)!$. Equality holds for the function $f(z)$ given by

$$f(z) \;=\; z^p + 2(\delta-\gamma) \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(k-j)!}{k!\,(\alpha+(k-j)\beta)} z^k \right).$$

Theorem 2 *A function $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma; j)$ satisfies*

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| < p - \mu$$

for

$$|z| < \inf_{k \geqq p+1} \left(\frac{(k-2)jp(p-\mu)\,(\alpha+(k-j)\beta)}{(k-j)!2(\delta-\gamma)(k-\mu)} \right)^{\frac{1}{k-p}}$$

where $0 \leqq \mu < p$ and $0 \leqq \delta < p!\,(\alpha+(p-j)\beta)\,/(p-j)!$.

Theorem 3 *If $f(z)$ belongs to the class $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma; j+1)$ for $j = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, then*

$$f(z) \in \mathcal{A}_p \left(\alpha - \beta, \beta, \frac{1+4\gamma}{4(p-j)}; j \right),$$

where $0 < \beta < \alpha$ and $0 \leqq \gamma < p!\,(\alpha+(p-j-1)\beta)\,/(p-j-1)!$.

Letting $p=1$ and $j=0$ in Theorem 3, we see

Corollary 4 *If $f(z)$ belongs to the class $\mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma; 1)$, then*

$$f(z) \in \mathcal{A}_1 \left(\alpha - \beta, \beta, \frac{1+4\gamma}{4}; 0 \right),$$

where $0 < \beta < \alpha$ and $0 \leqq \gamma < \alpha$.

23

一様局所単葉函数の係数評価について

須川敏幸 (広島大学大学院理学研究科)
寺田貴雄 (広島大学大学院理学研究科)

$f(0)=0, f'(0)=1$ の正規化条件を満たす単位円板 $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ 上正則で単葉な函数 f のクラスを S とする。すなわち $f\in S$ は

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots, \qquad |z|<1$$

のテイラー展開をもつ。この $f\in S$ に対して歪曲定理、増大度定理、係数問題などが研究されてきた。係数問題について 1916 年には Bieberbach が $f\in S$ に対して $|a_2|\leq 2$ であることを示した (Bieberbach の定理)。また Bieberbach は $|a_n|\leq n$ が全ての n に対して成り立ち、さらにある $n\geq 2$ に対して $|a_n|=n$ であるとき、$f(z)$ は Koebe 函数の回転に限ると予想した。これは Bieberbach 予想と呼ばれるものである。尚、この予想は 1984 年に de Branges によって証明された。この Bieberbach 予想が単葉函数論の発展をもたらしたわけだが係数問題は他にもたくさんあり、この講演では一般の単葉函数ではなく、前 Schwarz 微分 $T_f=\frac{f''}{f'}$ のノルムが一定値以下の一様局所単葉函数に対する係数問題を考えた。ここで一様局所単葉函数とは、単位円板 $\mathbb{D}$ 上の正則函数で、ある正定数 ρ があって任意の $a\in\mathbb{D}$ を中心として半径 ρ の双曲円板 $D(a,\rho)=\{z\in\mathbb{D};|(z-a)/(1-\bar{a}z)|<\tanh\rho\}$ において単葉であることをいう。また T_f のノルム $\|T_f\|$ を次のように定義する。

$$\|T_f\|=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|$$

このとき

$$\|T_f\|<\infty \Leftrightarrow f \text{ が一様局所単葉}$$

であることが知られている。そこで実数 $\lambda\geq 0$ に対して

$$\mathscr{A}=\left\{f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}: f \text{ は一様局所単葉正則}; f(0)=0, f'(0)=1\right\}$$

$$\mathscr{A}(\lambda)=\{f\in\mathscr{A}:\|T_f\|\leq\lambda\}$$

としたときの $f\in\mathscr{A}(\lambda)$ に対する係数問題を考えた。

この前 Schwarz 微分に関しては

$$f \in S \Rightarrow \|T_f\| \leq 6$$

$$\|T_f\| \leq 1 \Rightarrow f \in S$$

であることが知られており、このことから $\mathscr{A}(1) \subset S, S \subset \mathscr{A}(6)$ であることがわかる。$f \in \mathscr{A}$ に対しても歪曲定理、増大度定理、a_n の漸近的評価が得られている [2]。しかし $n \geq 3$ に対しての正確な係数評価は得られていなかった。。この講演では以下の定理について報告したい。

定理 1 $\mathscr{A}(\lambda)$ の元 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ に対する $|a_2|, |a_3|$ の最良の評価は

- $|a_2| \leq \dfrac{1}{2}\lambda$
- $|a_3| \leq \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}\lambda^3+3\lambda^2\sqrt{3\lambda^2+4}+\sqrt{3\lambda^2+4}+1}{36\sqrt{3}\lambda} & (\lambda \geq \frac{8\sqrt{3}}{9}) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda \quad (0 < \lambda < \frac{8\sqrt{3}}{9}) \end{cases}$

である。

証明には、[1] における Bloch 函数の係数領域に関する結果を用いる。

参考文献

[1] M. Bonk, *Dissertation*, 1988

[2] Y. C. Kim and T. Sugawa, *Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk*, Rocky Mountain J. Math 32,(2002)179-200

2 4

HAUSDORFF MOMENT PROBLEM AND POLYLOGARITHM

須川 敏幸（広島大学大学院理学研究科）

Hausdorffモーメント問題とは，与えられた非負数列 a_n $(n=1,2,\ldots)$ に対して，区間 $[0,1]$ 上の正値Borel測度 μ で，

$$a_n=\int_0^1 t^n d\mu(t) \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

を満たすものが存在するかどうかを問う，あるいは具体的に μ を求める問題である．本講演では，簡単のためつねに $a_0=1$ と正規化しておく．したがって，μ は確率測度である．差分作用素 Δ を $(\Delta a)_n=a_n-a_{n+1}$ によって定めれば，上記の積分で表される数列に対しては，容易に分かるように

$$(\Delta^k a)_n=\int_0^1 (1-t)^k t^n d\mu(t)\geq 0 \qquad (k=1,2,\ldots,n=0,1,\ldots)$$

である．Hausdorffはこれが十分条件でもあることを証明した（1921）．詳しくは，たとえば[2]を参照のこと．この条件は十分簡明に思えるが，それでも実際に与えられた数列がこの条件を満たすかどうか確かめるのは意外に難しい．

数列 (a_n) の母函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

は，確率測度 μ を用いれば

$$f(z)=\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}, \qquad (|z|<1)$$

と表現されるが，この形から f は領域 $\mathbb{C}\setminus[\cancel{0}1,+\infty)$ に解析接続されることがわかる．本講演では，このような形で表される函数の特徴付けを与える．

これを位数 α の多重対数函数

$$f_\alpha(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^\alpha}, \quad |z|<1,$$

あるいはその変形

$$g_\alpha(z)=\frac{f_\alpha(z)}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(1+n)^\alpha}, \quad |z|<1$$

について応用し，たとえば次の結果を得る．

定理 1. $\alpha \geq 1$ **とすると，多重対数函数** $f_\alpha(z)$ **は位数** $1/2$ **の凸状函数である，すなわち** $\mathrm{Re}\,(1 + zf''_\alpha(z)/f'_\alpha(z)) > 1/2$ **が単位円板上で成り立つ．**

J. Lewis [1] は，f_α が（位数 0 の）凸状であるためには $\alpha \geq 0$ であることが必要かつ十分であることを証明している．上の結果は，α の範囲は狭くなるものの，別証明と同時に主張の改良を与えるものである．(なお，Lewis の証明は極めて技巧的かつ難解であるが，我々の証明は明快であると信ずる．)

References

[1] Lewis, J. L. Convexity of a certain series, *J. London Math. Soc.*, **27** (1983), 435–446.

[2] Wall, H. S. *Analytic Theory of Continued Fractions*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y. (1948).

25

CARDIOID AND ONE-DIMENSIONAL TEICHMÜLLER SPACES

須川 敏幸（広島大学大学院理学研究科）

心臓形曲線 (cardioid) とは，

$$z(\theta) = e^{i\theta} - \frac{e^{2i\theta}}{2}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

によって表される曲線に相似な曲線である．このような曲線で囲まれた Jordan 領域をここでは心臓形領域と呼ぶことにする．心臓形領域が，Mandelbrot 集合の内部の成分の一つとして現れることはよく知られている．一方，普遍タイヒミュラー空間の切断面にも心臓形領域が現れることが，Kalme [1] によって指摘されている．ちょうど，タイヒミュラー空間の内半径，外半径を達成する点がこの切断面から得られるということもあり，多くの日本人研究者によって陰に陽にこの考察が一般のリーマン面のタイヒミュラー空間の内半径・外半径の研究に用いられてきた（たとえば，[2] を参照のこと）．

本講演では，同様の考察を通して，(適当な付加的条件の下で）1 次元タイヒミュラー空間の Bers 埋め込みの形状が，基点となるリーマン面をその moduli 空間の境界に近づければ，少なくともカラテオドリの意味で，心臓形領域に近づいていくことを報告したい．

REFERENCES

[1] KALME, C. I. Remarks on a paper by Lipman Bers, *Ann. of Math. (2)*, **91** (1970), 601–606.

[2] NAKANISHI, T. A theorem on the outradii of Teichmüller spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **40** (1988), 1–8.

2 6

Action of pure mapping class groups on Teichmüller spaces

Ege Fujikawa (Sophia University)

Let MCG(R) denote the quasiconformal mapping class group of a topologically infinite Riemann surface R, which is the group of all homotopy classes $[g]$ of quasiconformal automorphisms g of R. In this talk, we consider the following subgroups of MCG(R).

Definition 1 The *pure mapping class group* $P(R)$ is the group of all $[g] \in$ MCG(R) such that g fixes all non-cuspidal ends of R. The *eventually trivial mapping class group* $E(R)$ is the group of all eventually trivial mapping classes. Here $[g] \in$ MCG(R) is said to be *eventually trivial* if there exists a compact subsurface V_g of R such that, for each connected component W of $R - V_g$ that is not a cusp neighborhood, the restriction $g|_W : W \to R$ is homotopic to the inclusion map $id|_W : W \hookrightarrow R$.

The asymptotic Teichmüller space $AT(R)$ is a certain quotient space of Teichmüller space $T(R)$ with the projection $\pi : T(R) \to AT(R)$, which is defined by using asymptotically conformal homeomorphisms. Every element of MCG(R) induces a biholomorphic automorphism of $AT(R)$ as well as a biholomorphic automorphism of $T(R)$. Then we have homomorphisms ι : MCG$(R) \to$ Aut$(T(R))$ and ι_A : MCG$(R) \to$ Aut$(AT(R))$. The image Mod(R) of ι is called the Teichmüller modular group and the image Mod$_A(R)$ of ι_A is called the asymptotic Teichmüller modular group. While ι is injective, the homomorphism ι_A is not injective, namely Ker $\iota_A \neq \{[id]\}$.

Theorem 1 *The inclusion relation* $E(R) \subset \mathrm{Ker}\,\iota_A \subset P(R)$ *holds.*

Each inclusion in Theorem 1 is proper, in general. However, under the bounded geometry condition, we have the following characterization of Ker ι_A.

Theorem 2 *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then* $E(R) = \mathrm{Ker}\,\iota_A$.

Next, we consider discontinuity of the action of these subgroups. Gardiner and Lakic [1] proved the discontinuity of the pure mapping class group for a special planer Riemann surface. We generalize their result in the following form.

Theorem 3 *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition and having more than two non-cuspidal ends. Then $P(R)$ acts on $T(R)$ discontinuously.*

For Riemann surfaces the number of whose non-cuspidal ends are at most two, Theorem 3 is not true. However, concerning the action of $E(R)$, we always have the following.

Theorem 4 *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then $E(R)$ acts on $T(R)$ discontinuously.*

The bounded geometry condition consists of the lower and the upper bound conditions. If R does not satisfy the lower bound condition, then Theorems 2 and 4 are not true. However, we conjecture that these theorems should be true if R satisfies only the lower bound condition.

For the Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}(R)$, we define the limit set $\Lambda(\mathrm{Mod}(R))$ on $T(R)$ as the set of points $p \in T(R)$ such that $\gamma_n(p) \to p$ $(n \to \infty)$ for a sequence of distinct elements $\gamma_n \in \mathrm{Mod}(R)$. Also, for the asymptotic Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}_A(R)$, we define the limit set $\Lambda(\mathrm{Mod}_A(R))$ on $AT(R)$ in the same way. By Theorems 2 and 4, we have the following relation between these limit sets.

Corollary 1 *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then $\pi(\Lambda(\mathrm{Mod}(R))) \subset \Lambda(\mathrm{Mod}_A(R))$.*

We also conjecture that Corollary 1 is true for all Riemann surfaces without assuming the bounded geometry condition. In fact, Corollary 1 is true even if R does not satisfy the lower bound condition, since $\Lambda(\mathrm{Mod}(R)) = T(R)$ and $\Lambda(\mathrm{Mod}_A(R)) = AT(R)$ in this case. Thus, to prove this conjecture, we will prove the aforementioned conjecture concerning the statements in Theorems 2 and 4.

By similar arguments proving Theorem 2, we also obtain the following.

Corollary 2 *Let R be a Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then $\Lambda(\mathrm{Mod}_A(R)) \subsetneqq AT(R)$.*

References

[1] F. P. Gardiner and N. Lakic, *A vector field approach to mapping class actions*, Proc. London Math. Soc. **92** (2006), 403–427.

27

ON THE SHAPE OF BERS-MASKIT SLICES

YOHEI KOMORI (OSAKA) AND JOUNI PARKKONEN (JYVÄSKYLÄ)

1. ABSTRACT

The space $\mathcal{D}$ of punctured torus groups is the set of PSL$(2,\mathbb{C})$-conjugacy classes of discrete and faithful type-preserving PSL$(2,\mathbb{C})$-representations of the fundamental group $\pi_1 S$ of a once-punctured torus S. To each punctured torus group $\rho \in \mathcal{D}$ Minsky [5] associated the pair of end invariants (ν_+, ν_-) which describe the asymptotic geometry of the two noncompact ends of the associated hyperbolic 3-manifold $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1 S)$, and defined a map which is the extension of the well-known map from the quasifuchsian space $\mathcal{QF}$ of punctured tori to $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$:

$$\nu : \mathcal{D} \to \overline{\mathbb{H}} \times \overline{\mathbb{H}} \setminus \Delta \tag{1.1}$$

where $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ and Δ is the boundary diagonal $\{(r,r) | r \in \overline{\mathbb{R}}\}$. He proved that the map ν is bijective, but not continuous, while the inverse map ν^{-1} is continuous. It means that the topology of $\mathcal{D}$, in particular that of the boundary of $\mathcal{D}$ seems be highly non-trivial.

On the other hand, Minsky also showed that the boundaries of the Bers slices and the Maskit slices, which are holomorphic slices of $\mathcal{D}$, are Jordan curves, which implies that the total space $\mathcal{D}$ might be complicated, but if we restricts to its holomorphic sections, they are not so wild.

In this talk we consider another holomorphic slice $\mathcal{BM}_c$ called the Bers-Maskit slice, parametrized by the positive real parameter c defined as follows: For $\rho \in \mathcal{QF}$, the boundary of the hyperbolic convex hull $\partial\mathcal{C}_\rho$ of the limit set $\Lambda(G_\rho)$ in $\mathbf{H}^3$. consists of two components $\partial\mathcal{C}_\rho^\pm$ facing the ordinary set $\Omega(G_\rho)^\pm$. The two boundary components $\partial\mathcal{C}^\pm/G_\rho$ are pleated surfaces whose pleating loci we denote by $pl^\pm(\rho)$. Let α be one of free generators of $\pi_1 S$ and suppose that α is the bending locus of $\partial\mathcal{C}^\pm/G_\rho$. We denote the hyperbolic length of $pl^\pm(\rho) = \alpha$ in $\partial\mathcal{C}_\rho^\pm/G_\rho$ by $l_\alpha(\partial\mathcal{C}^\pm/G_\rho)$. Then we define

$$\mathcal{BM}_c^\pm = \{\rho \in \mathcal{QF} : pl^\pm(\rho) = \alpha \text{ and } l_\alpha(\partial\mathcal{C}^\pm/G_\rho) = c\}.$$

In practice $\mathcal{BM}_c$ consists of the closure of $\mathcal{BM}_c^\pm$ in $\mathcal{QF}$, and we can see its figure in Figure 1. We will show that (see Figure 1):

(i) The boundary of the Bers-Maskit slice are Jordan arcs.
(ii) At the p/q-cusp boundary point of the Bers-Maskit slice, the complex length function of p/q-word is conformal.
(iii) Any cusp boundary point of the Bers-Maskit slice is a inward-pointing cusp.
(iv) The Maskit slice and the Bers-Maskit slice are not vertically convex.

For the case of the Maskit slice, the first claim was proved by Minsky [5], the second claim was shown by Miyachi [7] and Parkkonen [8], and the

third claim was proved by Miyachi [6, 7]. The forth claim was observed numerically for the Maskit slice in [9] and for the Bers-Maskit slices in [1].

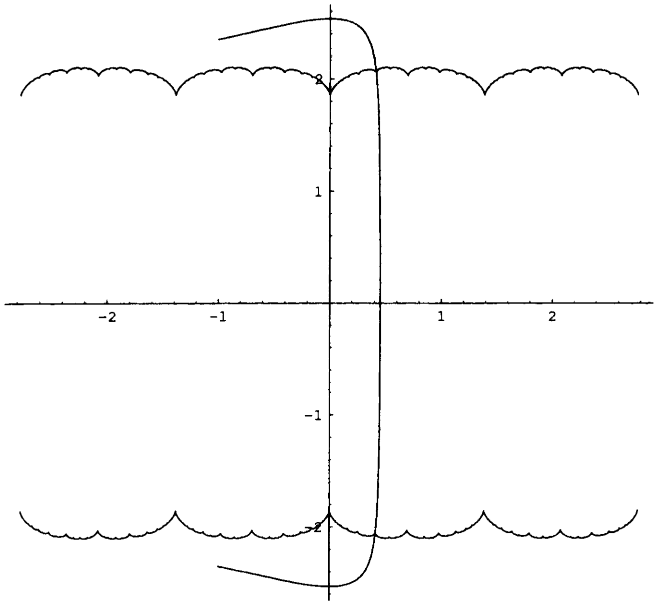


FIGURE 1. The Bers-Maskit slice $\mathcal{BM}_c$ for $c = 2\operatorname{arcosh}(5/4)$ ($\operatorname{tr} B = 5/2$) and the real locus of the trace of the word $W_{1/3}$.

REFERENCES

[1] D. B. A. Epstein, A. Marden and V. Markovic, *Quasiconformal homeomorphisms and the convex hull boundary*, Ann. of Math. 159 (2004), 305-336.

[2] L. Keen and C. Series, *Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori*, Topology 32 (1993), 719-749.

[3] Y. Komori and J. Parkkonen, *On the shape of Bers-Maskit slices*, to appear in Ann. Acad. Sci. Fenn.

[4] C. McMullen, *Complex earthquakes and Teichmüller theory*, J. Amer. Math. Soc. 11 (1998), 283-320.

[5] Y. Minsky, *The classification of punctured torus groups*, Ann. of Math. 149 (1999), 559-626.

[6] H. Miyachi, *On the horocyclic coordinate for the Teichmüller space of once-punctured tori*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 1019-1029.

[7] H. Miyachi, *Cusps in complex boundaries of one-dimensional Teichmüller space*, Conform. Geom. Dyn. 7 (2003), 103–151.

[8] J. Parkkonen, *The outside of the Teichmüller space of punctured tori in Maskit's embedding*, Ann. Acad. Sci. Fenn. 24 (1999), 305-342.

[9] D. J. Wright, *The shape of the boundary of Maskit's embedding of the Teichmüller space of punctured tori*, preprint, 1990.

28 Convergence and divergence of Kleinian punctured torus groups

糸 健太郎 (名大多元数理)

ここでは離散的な1点穴あきトーラス群の列の収束・発散に関する必要十分条件を与える.

Sを1点穴あきトーラスとする. Sのタイヒミュラー空間$T(S)$は上半平面$\mathbf{H}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}\,z>0\}$と同一視出来る. このとき$T(S)$のサーストンのコンパクト化$\overline{T(S)}$は$\overline{\mathbf{H}}=\mathbf{H}\cup\hat{\mathbb{R}}$と一致する. ここでサーストン境界$\partial T(S)=\mathcal{PL}(S)$は$\hat{\mathbb{R}}$に, S上の単純閉曲線集合は$\hat{\mathbb{Q}}$に対応する.

$\mathcal{R}(S)$を表現$\rho:\pi_1(S)\to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$の共役類集合とし, 代数収束の位相を入れる. $\mathcal{D}(S)\subset\mathcal{R}(S)$を忠実な離散表現から成る部分集合とすると, $\mathcal{D}(S)$は$\mathcal{R}(S)$の非コンパクトな閉集合である. 各$\rho\in\mathcal{D}(S)$に対して, 商多様体$\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$のエンド不変量$\nu(\rho)\in(\overline{\mathbf{H}}\times\overline{\mathbf{H}})\setminus\Delta$が定まる. ここで$\Delta=\{(x,x)\,|\,x\in\partial\mathbf{H}\}$である. 逆に任意の$(x,y)\in(\overline{\mathbf{H}}\times\overline{\mathbf{H}})\setminus\Delta$に対して, エンド不変量$(x,y)$を持つ表現$\rho(x,y)\in\mathcal{D}(S)$が一意的に定まり, さらに次が知られている:

Theorem 1 (Minsky [2]).

$$\nu^{-1}=\rho:(\overline{\mathbf{H}}\times\overline{\mathbf{H}})\setminus\Delta\to\mathcal{D}(S)$$

は連続全単射である.

いま収束列$(\overline{\mathbf{H}}\times\overline{\mathbf{H}})\setminus\Delta\ni(x_n,y_n)\to(x_\infty,y_\infty)\in\overline{\mathbf{H}}\times\overline{\mathbf{H}}$が与えられたとき, 表現列$\rho(x_n,y_n)$がいつ収束していつ発散するかを考える.

まず$(x_\infty,y_\infty)\notin\Delta$であるときはTheorem 1より$\rho(x_n,y_n)$は$\rho(x_\infty,y_\infty)$に収束する. 次に$(x_\infty,y_\infty)\in\Delta$の場合は次の2つの定理が知られている:

Theorem 2 (Ohshika [3]). $x_\infty\in\hat{\mathbb{R}}\setminus\hat{\mathbb{Q}}$とし, $(\overline{\mathbf{H}}\times\overline{\mathbf{H}})\setminus\Delta\ni(x_n,y_n)\to(x_\infty,x_\infty)\in\Delta$とする. このとき$\rho(x_n,y_n)\to\infty$である.

Theorem 3 (Anderson-Canary [1]). S上の単純閉曲線$c\in\hat{\mathbb{Q}}$に関するデーン・ツイストをτで表す. 任意の$x,y\in\mathbf{H}$と任意の$p\in\mathbb{Z}$に対して$(\tau^{pn}x,\tau^{(p+1)n}y)\to(c,c)\in\Delta$であり, かつ$\rho(\tau^{pn}x,\tau^{(p+1)n}y)$は収束列である.

以下では$c\in\hat{\mathbb{Q}}$, $(x_n,y_n)\to(c,c)\in\Delta$である場合に, $\rho(x_n,y_n)$が収束するのは本質的に上のAnderson-Canaryの例で尽きていることを示す. ここで一般性を失わず$c=\infty\in\hat{\mathbb{Q}}$と仮定してよい. 単純閉曲線$c=\infty$に関するデーン・ツイストを$\tau$とすると, その$T(S)=\mathbf{H}$への作用は$\tau(z)=z+1$である. また$\infty$に収束する点列$x_n\in\overline{\mathbf{H}}\setminus\{\infty\}$に対して, $x_n\to\infty$が**holocyclic**であるとは$\mathrm{Im}\,x_n\to\infty$のときをいい, $x_n\to\infty$が**tangential**であるとは$\mathrm{Im}\,x_n$が有界のときをいう. このとき, 次の2つの結果を得た:

Theorem 4. $(\overline{\mathbf{H}}\times\overline{\mathbf{H}})\setminus\Delta\ni(x_n,y_n)\to(\infty,\infty)\in\Delta$ とする．このとき，$x_n\to\infty$ または $y_n\to\infty$ が *horocyclic* ならば $\rho(x_n,y_n)\to\infty$ が成り立つ．

Theorem 5. $(\overline{\mathbf{H}}\times\overline{\mathbf{H}})\setminus\Delta\ni(x_n,y_n)\to(\infty,\infty)\in\Delta$ とし，$x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$ が共に *tangential* であるとする．さらに，(必要ならば部分列を取ることで) ある整数列 k_n, l_n が存在して $\tau^{k_n}x_n$, $\tau^{l_n}y_n$ がそれぞれ x'_∞, $y'_\infty\in\overline{\mathbf{H}}\setminus\{\infty\}$ に収束すると仮定する．このとき，$\rho(x_n,y_n)$ が収束する必要十分条件はある整数 p, q が存在して

$$(p+1)\,k_n-p\,l_n+q\equiv 0\quad(n\gg 0)$$

が成り立つことである．

次に Theorem 5 で得た表現列の極限を，マスキット・スライスのパラメータを用いて具体的に表す．いま $\mu\in\mathbb{C}$ に対して表現 $\boldsymbol{\rho}_\mu:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ を

$$\boldsymbol{\rho}_\mu(\alpha)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\rho}_\mu(\beta)=\begin{pmatrix}i\mu&i\\i&0\end{pmatrix}$$

と定める．ここで

$$\mathcal{M}=\{\mu\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Im}\,\mu>0,\ \boldsymbol{\rho}_\mu:\text{discrete, faithful}\}$$

をマスキット・スライスという．また $\mathcal{M}^*=\{\bar{\mu}\mid\mu\in\mathcal{M}\}$ をその複素共役とすると

$$\mathcal{M}\sqcup\mathcal{M}^*=\{\mu\in\mathbb{C}\mid\boldsymbol{\rho}_\mu:\text{discrete, faithful}\}$$

が成り立つ．さらに，自然な同一視 $m:\overline{\mathbf{H}}\setminus\{\infty\}\to\mathcal{M}$ が存在する．

Theorem 6. *Theorem 5* と同じ記号の元に $\rho(x_n,y_n)$ が収束するとする．ここで $\mu=m(x'_\infty)$, $\nu=m(y'_\infty)$ とおくと

$$\rho(x_n,y_n)\to\boldsymbol{\rho}_\xi,\quad\xi=(p+1)\mu-p\bar{\nu}+2q\in\mathcal{M}\sqcup\mathcal{M}^*$$

が成り立つ．

参考文献

[1] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book*, Invent. Math. **126** (1996), 205–214.

[2] Y. Minsky, *The classification of punctured-torus groups*, Ann. of Math. **149** (1999), 559–626.

[3] K. Ohshika, *Divergent sequences of Kleinian groups*, The Epstein birthday schrift, 419–450, Geom. Topol. Monogr., 1, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.

29

Proper conjugation for Kleinian groups of divergence type

Katsuhiko Matsuzaki
Department of Mathematics, Okayama University

The Hopf problem on an abstract group G asks whether any injective homomorphism of G into itself should be surjective or not. As a variation of this problem, we consider conditions under which there is no proper conjugation for Kleinian groups.

A Kleinian group G is a discrete group of orientation-preserving isometric automorphisms of the $(n+1)$-dimensional hyperbolic space $(\mathbb{H}^{n+1}, \rho)$ for $n \geq 1$. We always assume that G is non-elementary and torsion-free. It acts on $\mathbb{H}^{n+1}$ properly discontinuously and freely. The unit ball $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ with the metric $2|dx|/(1-|x|^2)$ is a model of the hyperbolic space and the group $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{n+1})$ of all orientation-preserving isometric automorphisms of $\mathbb{H}^{n+1}$ is identified with the group $\mathrm{Conf}(\mathbb{B}^{n+1})$ of all conformal transformations preserving $\mathbb{B}^{n+1}$. The boundary S^n of the model $\mathbb{B}^{n+1}$ is located at infinity of the hyperbolic space and the action of G extends to S^n.

We say that a Kleinian group $G \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{n+1})$ has *proper conjugation* if there exists $\alpha \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{n+1})$ such that the conjugate $\Gamma = \alpha G \alpha^{-1}$ is a proper subgroup of G. For $n = 1$, namely, when G is a Fuchsian group, Heins [2] proved that, if G uniformizes a Riemann surface that does not admit the Green function, then G has no proper conjugation. On the other hand, Jorgensen-Marden-Pommerenke [3] gave a systematic construction of Fuchsian groups having proper conjugation. For higher dimensional Kleinian groups, there are related works by Wang-Zhou [6] and Ohshika-Potyagailo [5] among others.

For a Kleinian group G, the Poincaré series of dimension s with respect to the base point $z \in \mathbb{B}^{n+1}$ and to the orbit point $x \in \mathbb{B}^{n+1}$ is defined by

$$\Sigma_{G(x)}(z, s) = \sum_{w \in G(x)} \exp(-s\rho(w, z)).$$

The *critical exponent of convergence* for G is defined by

$$\delta(G) = \inf\{s \geq 0 \mid \Sigma_{G(x)}(z, s) < \infty\},$$

which is independent of the choices of z and x. We say that G is of *divergence type* (at the critical exponent $\delta(G)$) if $\Sigma_{G(x)}(z, \delta(G)) = \infty$ and of *convergence type* if $\Sigma_{G(x)}(z, \delta(G)) < \infty$. It is know that the hyperbolic manifold $\mathbb{H}^{n+1}/G$ does not admit the Green function if and only if $\delta(G) = n$ and G is of divergence type.

The main result of this paper is the following, which asserts that the possibility for a Kleinian group of divergence type to have proper conjugation is limited. Actually we expect that this should be a step for showing that there is no proper conjugation for any Kleinian group of divergence type.

Theorem. *Let $G \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{n+1})$ be a Kleinian group of divergence type at the critical exponent $\delta = \delta(G)$. Suppose that, for $\alpha \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{n+1})$ of translation length $\ell(\alpha)$, the conjugate $\Gamma = \alpha G \alpha^{-1}$ is contained in G. Then the index $k = [G : \Gamma]$ is estimated by*

$$k \leq \exp\{2\delta\ell(\alpha)\} < \infty.$$

In particular, if α is parabolic for which $\ell(\alpha) = 0$, then $\Gamma = G$.

To prove this theorem, we use the Patterson-Sullivan measure for the Kleinian group G of divergence type. The uniqueness of this measure is crucial to our arguments. According to Culler-Shalen [1], we decompose the Patterson-Sullivan measure corresponding to the coset decomposition of G modulo $\Gamma = \alpha G \alpha^{-1}$. Then the ratio of the decomposed measures gives the estimate of the index $[G : \Gamma]$.

An s-dimensional *conformal measure* on S^n is a family of finite Borel measures $\{\mu_z\}_{z \in \mathbb{B}^{n+1}}$ such that $\mu_z = |h_z'|^s \mu_0$, where $|h_z'|$ is the linear stretch factor of $h_z \in \mathrm{Conf}(\mathbb{B}^{n+1})$ sending z to 0. For a Kleinian group G, the s-dimensional conformal measure $\{\mu_z\}$ is said to be G-invariant if $g^*\mu_{g(z)} = \mu_z$ for every $z \in \mathbb{B}^{n+1}$ and for every $g \in G$, where $g^*\mu$ is the pull-back of the measure μ by g.

For $s > \delta(G)$, take the sum of the weighted Dirac measures

$$\mu_{G(x),z,s} = \frac{1}{\Sigma_{G(x)}(z,s)} \sum_{w \in G(x)} \exp(-s\rho(w,z))D_w,$$

which is a probability measure on $\overline{\mathbb{B}^{n+1}}$. Then there is a weak limit μ_z of some sequence $\mu_{G(x),z,s_i}$ for $s_i \to \delta(\Gamma)$. If G is of divergence type, the family $\{\mu_z\}$ becomes a unique G-invariant conformal measure of dimension $\delta(G)$, which has the support on the limit set $\Lambda(G)$. This is called the *Patterson-Sullivan measure* for G.

Since a geometrically finite Kleinian group is of divergence type, the following result is easily obtained from the main theorem.

Corollary 1. *A geometrically finite Kleinian group has no proper conjugation* [6].

If G has proper conjugation, then iteration of the conjugation by α^{-1} gives an ascending sequence of the conjugated groups to G and its geometric limit. Note that this system has appeared in some arguments by McMullen-Sullivan [4]. For a Fuchsian group G, quasiconformal deformation of the totality of this system can make the translation length $\ell(\alpha)$ arbitrarily small keeping the algebraic structure and the divergence type of G invariant. Hence, applying the main theorem to this deformed Fuchsian groups, we have an alternative proof of the following fact mentioned above.

Corollary 2. *A Fuchsian group G of divergence type with $\delta(G) = 1$ has no proper conjugation* [2].

References

1. M. Culler and P. Shalen, *Paradoxical decompositions, 2-generator Kleinian groups, and volumes of hyperbolic 3-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 231–288.
2. M. Heins, *On a problem of Heinz Hopf*, J. Math. pures et appl. **37** (1958), 153–160.
3. T. Jorgensen, A. Marden and C. Pommerenke, *Two examples of covering surfaces*, Riemann surfaces and related topics, Ann. Math. Studies, vol. 97, Princeton Univ. Press, 1978, pp. 305–319.
4. C. McMullen and D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system*. Adv. Math. **135** (1998), 351–395.
5. K. Ohshika and L. Potyagailo, *Self-embeddings of Kleinian groups*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **31** (1998), 329-343.
6. S. Wang and Q. Zhou, *On the proper conjugation of Kleinian groups*, Geom. Dedicata **56** (1995), 145–154.

3 0
A proof of simultaneous linearization with a polylog estimate

川平　友規（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

Let f be an analytic map defined on a neighborhood of 0 in $\bar{\mathbb{C}}$ which is tangent to the identity at 0. That is, f near 0 is of the form

$$f(w) = w(1 + Aw^m + O(w^{m+1}))$$

where $A \neq 0$ and $m \in \mathbb{N}$. We normalize f so that $A = 1$ by taking a linear coordinate change $w \to A^{1/m}w$. In the theory of complex dynamics such a germ appears when we consider iteration of local dynamics near the parabolic periodic points, and plays very important roles. (See [Mi] for example.) Now we consider a perturbation $f_\epsilon \to f$ of the form

$$f_\epsilon(w) = \Lambda_\epsilon w(1 + w^m + O(w^{m+1}))$$

with $\Lambda_\epsilon \to 1$ as $\epsilon \to 0$. By taking branched coordinate changes $z = -\Lambda_\epsilon^m/(mw^m)$ and setting $\tau_\epsilon := \Lambda_\epsilon^{-m}$, we have an almost-Möbius expression

$$f_\epsilon(z) = \tau_\epsilon z + 1 + O(|z|^{-1/m})$$

near $w = \infty$ on the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$. When $\tau_\epsilon = 1$, it is well known that there exist holomorphic maps on $\{\mathrm{Re}\, z \gg 0\}$ that conjugate (or *linearize*) f_ϵ to $z \to z+1$. Such maps are called the *Fatou coordinate* and also play very important roles in the theory of complex dynamics. Recently, T.Ueda showed that when $\tau_\epsilon \to 1$ radially and $m = 1$, there exist holomorphic maps that linearize f_ϵ to $z \to \tau_\epsilon z + 1$ near ∞ and depend analytically on f_ϵ.

In this talk we give an alternative proof of this result and mildly generalize it for $m > 1$. In the proof we use an estimate on the behavior of the polylogarithm function $\mathrm{Li}_s(z) = \sum z^n/n^s$ with $0 < \sigma = \mathrm{Re}\, s \leq 1$ as z tends to 1 within the unit disk: *There exists a uniform constant C independent of s such that*

$$|\mathrm{Li}_s(z)| \leq C(1 - |z|)^{-\frac{1}{1+\sigma}}$$

as $z \to 1$ with $|z| < 1$.

References

[Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable (3rd edition)*. Annals of Math Studies 160, Princeton University Press, 2006.

[Ue] T. Ueda. Schröder equation and Abel equation. *Manuscript.*

特別講演

有理半群、ランダムな複素力学系と 複素平面上の特異関数

角　大輝 (Sumi, Hiroki)
大阪大学理学部数学教室
E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/welcomeou-e.html

2006年9月

1　導入

リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ 上の非定数有理写像の族で生成された、写像の合成を積とする半群を**有理半群**とよぶ。また、非定数多項式写像で生成された写像の合成を積とする半群を**多項式半群**とよぶ。本講演では $\hat{\mathbb{C}}$ 上での多項式半群の力学系とランダムな多項式力学系を同時に考察し、かつ、両者が互いに密接に関係していることを示す。特に、ある仮定のもとで、$\hat{\mathbb{C}}$ 上で定義された、「∞ に収束する確率の関数」が、「悪魔の階段」(あるいはカントール関数) といわれる関数に類似の性質を持つことや、その関数を確率パラメータで偏微分した関数が、高木関数の複素平面上版と思えるものになることを示す。

有理半群あるいは多項式半群のリーマン球面上における力学系は、Hinkkanen and Martin ([HM1]) と Ren のグループ ([GR]) によって独立に導入された。前者はタイヒミュラー空間が一次元になる場合のそのパラメータ付けへの応用を目論み、後者はランダムな複素力学系の観点から研究を行った。有理半群の力学系の研究としては、そのほか、[HM2], [St1]–[St3], [SY], [SSS], [SS], [SU1],[SU2],[S1]–[S8] などがある。なお、「ランダムな複素力学系」の研究としては、Fornaess and Sibony によるもの ([FS]) が最初であり、それに続いて、[Br],[Bu1],[Bu2], [Bu2], [BBR] などがある。

従来の一元生成半群の複素力学系については [M] が良い入門書である。

定義 1.1. G を有理半群とする。このとき、
$F(G) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z$ のある近傍 U において G が同程度連続、つまり、
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.t. $x, y \in U,\ d(x,y) < \delta \Rightarrow \forall g \in G, d(g(x), g(y)) < \epsilon\}$
とおく。ただし、d は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の球面距離とする。これを、G の**ファトウ集合**という。また、$J(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus J(G)$ とおいて、G の**ジュリア集合**という。

定義 1.2. 半群 G が $\{h_1, h_2, \dots\}$ で生成されているとき、$G = \langle h_1, h_2, \dots \rangle$ とかく。また、有理写像 $h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ の n 回合成写像は h^n とかく。また、$J(g) := J(\langle g \rangle)$ とおく。

補題 1.3. G を有理半群とする。

1. 任意の $h \in G$ について、$h(F(G)) \subset F(G)$ かつ $h^{-1}(J(G)) \subset J(G)$. しかし、等号は一般には成り立たない。
2. G が（半群として）有限生成で、$G = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ のとき、

$$J(G) = h_1^{-1}(J(G)) \cup \cdots \cup h_m^{-1}(J(G))$$

となる。この性質を、**後方自己相似性**という。

例 1.4. $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$ とし、この 3 点は正三角形をなすとする。$h_j(z) = 2(z - p_j) + p_j, j = 1, 2, 3$ とおく。$G = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ とおくと、$J(G)$ はシルピンスキーガスケットになる。

2 臨界値集合が有界な多項式半群

本節では多項式半群について考察する。この節の結果を後のランダムな多項式力学系に応用する。両者の理論は互いに密接に関係していることがわかる。

定義 2.1. （有限生成とは限らない）有理半群 G について、

$$P(G) := \overline{\bigcup_{g \in G} \{g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{の臨界値}\}} \ (\subset \hat{\mathbb{C}})$$

とおき、G の **postcritical set** という。さらに、G が多項式半群のとき、

$$P^*(G) := P(G) \setminus \{\infty\}$$

とおき、G の **planar postcritical set** という。

注意 1. G が有理写像の集合 Γ で生成されているとき、
$P(G) = \overline{\bigcup_{g \in G} g(\bigcup_{h \in \Gamma} \{h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{の臨界値}\})}$ となる。このことから、$P(G)$ の様子をさぐることができる。

定義 2.2. $\mathcal{G}$ を、次の二つの条件のいずれをも満たす多項式半群 G の集合とする:

- 任意の $g \in G$ について、$\deg(g) \geq 2$.
- $P^*(G)$ は $\mathbb{C}$ 上有界。

$\mathcal{G}$ の元 G は、**postcritically bounded** であるという。
また、$\mathcal{G}_{dis} := \{G \in \mathcal{G} \mid J(G) \text{は非連結}\}$ とおく。

注意 2. g が多項式で $\deg(g) \geq 2$ ならば、「$\langle g \rangle \in \mathcal{G}$」 $\Longleftrightarrow$ 「$J(\langle g \rangle)$ は連結」となる。([M].) しかし、一般の多項式半群では、$G \in \mathcal{G}$ かつ $J(G)$ が非連結、となる場合がある。(例: $G = \langle z^3, \frac{z^2}{4} \rangle$.)

問題 1. $G \in \mathcal{G}_{dis}$ のとき、何が起こるのか？

定義 2.3. K_1, K_2 を $\mathbb{C}$ の有界な連結部分集合とする。

- $K_1 \leq K_2$ とは、次のときを言う：「$K_1 = K_2$ または K_1 が $\mathbb{C} \setminus K_2$ のある有界な連結成分に含まれる」
- $K_1 < K_2$ とは、$K_1 \leq K_2$ かつ $K_1 \neq K_2$ のときを言う。

注意 3. $\mathbb{C}$ の空でない連結コンパクト集合の空間では "$\leq$"は半順序。この "$\leq$" を、**surrounding order** という。

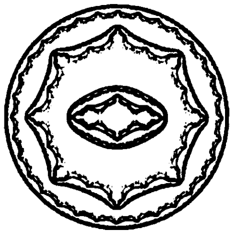
定義 2.4. 多項式半群 G に対し $\hat{K}(G) := \{z \in \mathbb{C} \mid \{g(z) \mid g \in G\}$ が $\mathbb{C}$ で有界$\}$ とおく。

定義 2.5. 位相空間 X に対し、$\mathrm{Con}(X)$ で X の連結成分全体を表す。

定理 2.6 ([S6],[S8]). *(定理 **A**)* (有限生成とは限らない) 多項式半群 G が $\mathcal{G}_{dis}$ に属するとき、次の全てが成り立つ。

1. $J(G) \subset \mathbb{C}$.
2. $(\mathrm{Con}(J(G)), \leq)$ は全順序。
3. $(\mathrm{Con}(J(G)), \leq)$ には最大元 $J_{\max}$ と最小元 $J_{\min}$ がある。
4. $F(G)$ の各連結成分は単連結か二重連結。(注：領域 $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ が二重連結とは、A が円環領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$ に双正則同値であることをいうものとする。)
5. $\mathcal{A} := \{U \mid U$ は $F(G)$ の二重連結成分$\}$ とおくと、$(\mathcal{A}, \leq)$ は全順序。
6. $\mathrm{int}(\hat{K}(G)) \neq \emptyset$. ただし、$\mathrm{int}(\cdot)$ は内点集合をあらわす。

図 1: The Julia set of $G = \langle h_1, h_2 \rangle$, where $g_1 := z^2 - 1, g_2 := \frac{z^2}{4}, h_1 := g_1^2, h_2 := g_2^2$. The semigroup G belongs to $\mathcal{G}_{dis}$. Moreover, G is hyperbolic, i.e. $P(G) \subset F(G)$.



定理 2.7. (有限生成とは限らない) $G \in \mathcal{G}$ が2次多項式の族で生成されているとする。このとき、$J(G)$ は連結である。

G が一つの2次以上の有理写像で生成されているときや、非初等的クライン群のときは、$J(G)$ は連結であるか、そうでなければ非可算個の連結成分を持つ。しかし一般の有理半群では、$\mathcal{G}$ のなかの有限生成のものに限っても、次の例がある。

命題 2.8. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について、ある $G = \langle h_1, \dots, h_{2n} \rangle \in \mathcal{G}$ があり、$\sharp(\mathrm{Con}(J(G))) = n$ となる。また、ある $G = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle \in \mathcal{G}$ があり、$\sharp(\mathrm{Con}(J(G))) = \aleph_0$ となる。

注意 4. 有限生成多項式半群 $G \in \mathcal{G}$ についての $\mathrm{Con}(J(G))$ の個数は、[S7] の「相互作用コホモロジー」に関係する。

3 ランダムな多項式力学系

前節の多項式半群の話を応用して、ランダムな多項式力学系を考察する。以下の記号と設定を用いる。

1. $\mathcal{Y} := \{g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \mid g$ は多項式、$\deg(g) \geq 2\}$ とおく。これに、$\hat{\mathbb{C}}$ 上の一様収束による位相を入れる。
2. τ を $\mathcal{Y}$ 上のボレル確率測度とする。以下、毎回、同じ分布 τ に従って多項式を選択する、「$\hat{\mathbb{C}}$ 上の(独立同分布の)ランダムな複素力学系」を考えていく。(これは $\hat{\mathbb{C}}$ 上のマルコフ過程である。)
3. $X_\tau := (\mathrm{supp}\ \tau)^{\mathbb{N}}$ とおく。ただし、$\mathrm{supp}\ \tau$ は τ の台を表す。
4. $\tilde{\tau} := \otimes_{j=1}^{\infty} \tau$ とおく。これは X_τ 上のボレル確率測度。シリンダー集合 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \mathrm{supp}\ \tau \times \mathrm{supp}\ \tau \times \cdots \subset X_\tau$, ただし $A_j \subset \mathrm{supp}\ \tau$, のときは $\tilde{\tau}(A) = \tau(A_1) \times \cdots \times \tau(A_n)$ となる。
5. G_τ を、$\mathrm{supp}\ \tau$ で生成された多項式半群、とする。
6. 任意の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、

$$T_{\tau,\infty}(z) := \tilde{\tau}(\{h = (h_1, h_2, \dots) \in X_\tau \mid h_n \cdots h_1(z) \to \infty, \text{as } n \to \infty\})$$

とおく。これは、独立同分布で毎回分布 τ に従って多項式を選択するようなランダムな複素力学系の、「初期値 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して、∞ に行く確率」(注:これは $F(G_\tau)$ の各連結成分上で定数関数(その定数は成分による)。
7. $C(\hat{\mathbb{C}}) := \{\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R} \mid \varphi$ は連続$\}$ とおき、作用素 $M_\tau : C(\hat{\mathbb{C}}) \to C(\hat{\mathbb{C}})$ を、

$$M_\tau(\varphi)(z) := \int_{\mathrm{supp}\ \tau} \varphi(g(z))\, d\tau(g)$$

で定義する。

定理 3.1. *(定理 B)* 上の記号と設定のもとで supp τ は $\mathcal{Y}$ でコンパクト、かつ $G_\tau \in \mathcal{G}_{dis}$ とする。このとき、次の *1* から *6* の全てが成り立つ。

1. $F(G_\tau)$ の任意の連結成分 U に対し、ある $C_U \in [0,1]$ があり、$T_{\tau,\infty}|_U \equiv C_U$.

2. *(連続性)*$T_{\tau,\infty} : \hat{\mathbb{C}} \to [0,1]$ は連続関数で、$M_\tau(T_{\tau,\infty}) = T_{\tau,\infty}$.

3. *(単調性)* $\mathcal{A} := \{U \mid U$ は $F(G)$ の二重連結成分 $\}$ とおく。

(a) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 < A_2$ のとき、$C_{A_1} < C_{A_2}$. 特に、$\{C_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ は全て互いに異なる。

(b) $J_1, J_2 \in \mathrm{Con}(J(G_\tau))$, $J_1 < J_2 \Rightarrow \max_{z \in J_1} T_{\tau,\infty}(z) \leq \min_{z \in J_2} T_{\tau,\infty}(z)$.

4. 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し、$T_{\tau,\infty}|_{\hat{K}(G_\tau)} \equiv 0 < C_A < 1 \equiv C_{F_\infty(G_\tau)}$. ただし $F_\infty(G_\tau)$ は ∞ を含む $F(G_\tau)$ の連結成分とする。

5. Q を $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合とする。このとき、

$$Q \cap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \partial A \bigcup \partial(F_\infty(G_\tau)) \bigcup \partial(\hat{K}(G_\tau)) \right) \neq \emptyset$$

ならば、$T_{\tau,\infty}|_Q$ は定数関数ではない。(以上の *1,...,5* から、$T_{\tau,\infty}$ は「悪魔の階段」に似ている。このような関数を**悪魔のコロシアム**と呼ぶ。)

6. *(***No Julia set of** $\{(M_\tau^n)_*\}_n$*)*
$\hat{K}(G_\tau)$ 上の $(M_\tau)_*$ 不変なある確率測度 μ で次を満たすものが唯一つ存在する : 任意の $\varphi \in C(\hat{\mathbb{C}})$ に対して、$\hat{\mathbb{C}}$ 上一様に

$$M_\tau^n(\varphi)(z) \to T_{\tau,\infty}(z) \cdot \varphi(\infty) + (1 - T_{\tau,\infty}(z)) \cdot (\int_{\hat{\mathbb{C}}} \varphi \, d\mu), \ \ as\ n \to \infty$$

となる。よって、$\mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ を $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度の空間としたとき、その上で一様に $(M_\tau^n)_*(\nu) \to (\int_{\hat{\mathbb{C}}} T_{\tau,\infty}\, d\nu) \cdot \delta_\infty + (\int_{\hat{\mathbb{C}}} (1 - T_{\tau,\infty})\, d\nu) \cdot \mu$, $as\ n \to \infty$ となる。*(*この結果より、半群 G_τ のジュリア集合 $J(G_\tau)$ は空でない (内点もありうる) のに、$\{(M_\tau^n)_* : \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})\}_{n \in \mathbb{N}}$ の「ジュリア集合」はない。*)* また、$C(\hat{\mathbb{C}})$ の M_τ 不変部分空間は定数と $T_{\tau,\infty}$ で張られた *2* 次元空間。さらに、$(M_\tau)_*$ 不変確率測度のなかのエルゴード成分は δ_∞ と μ の 2 つ。

注意 5.

- 多項式半群 G が $\mathcal{Y}$ のコンパクトな族 Λ で生成されているとする。このとき、$\mathcal{Y}$ のあるボレル確率測度 τ によって、supp $\tau = \Lambda$ となるので、$G = G_\tau$ である。よって、$G \in \mathcal{G}_{dis}$ ならば上の話の $T_{\tau,\infty} : \hat{\mathbb{C}} \to [0,1]$ が考えられる。

- 定理 B の 2，3 より、$A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \neq A_2$ のとき、$\partial A_1 \cap \partial A_2 = \emptyset$.

4　2元生成多項式半群の空間

この節では、2元生成の多項式半群に限って詳しく考察する。特に、2元生成の、臨界値集合が有界な(双曲的)多項式半群の空間を考え、ジュリア集合が非連結なパラメータの集合(disconnectedness locus という)の閉包の近傍において、「∞ に収束する確率の関数」が悪魔の階段(カントール関数)に似た性質を複素平面上で持つことを示す。さらに、disconnectedness locus の閉包において、「∞ に収束する確率の関数」を確率パラメータで偏微分することができることを示し、偏導関数は初期値 z の関数として高木関数の複素平面上版とみなせることを示す。

定義 4.1. 次の記号を使う。

- $\mathcal{Y} := \{g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \mid g$ は多項式$, \deg(g) \geq 2\}$. これに、$\hat{\mathbb{C}}$ 上の一様収束による位相を入れる。さらに、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathcal{Y}^m := \mathcal{Y} \times \cdots \times \mathcal{Y}$ (m factors) とおき、積位相を入れる。
- $\mathcal{B} := \{(h_1, h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid P^*(\langle h_1, h_2 \rangle)$ is bounded in $\mathbb{C}\}$ とおく。
- $\mathcal{C} := \{(h_1, h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid J(\langle h_1, h_2 \rangle)$ is connected$\}$ とおく。
- $\mathcal{D} := \{(h_1, h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid J(\langle h_1, h_2 \rangle)$ is disconnected$\}$ とおく。
- $\mathcal{H} := \{(h_1, h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid \langle h_1, h_2 \rangle$ is hyperbolic$\}$ とおく。
- $\mathcal{I} := \{(h_1, h_2) \in \mathcal{Y}^2 \mid J(h_1) \cap J(h_2) \neq \emptyset\}$ とおく。
- $\mathcal{Q} := \{(h_1, h_2 \in \mathcal{Y}^2 \mid J(h_1) = J(h_2)$, and $J(h_1)$ and $J(h_2)$ are quasicircles$\}$ とおく。

補題 4.2. 集合 $\mathcal{H}, \mathcal{H} \cap \mathcal{B}, \mathcal{H} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{D}$ は、$\mathcal{Y}^2$ の空でない開部分集合である。

定義 4.3. $m \in \mathbb{N}$, $(h_1, \dots, h_m) \in \mathcal{Y}^m$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$ とするとき、以下の記号を使う。

- $S(h_1, \dots, h_m, z) :=$
$$\inf \left\{ t \geq 0 \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{(w_1, \dots, w_n) \in \{1, \dots, m\}^n} \sum_{h_{w_n} \cdots h_{w_1}(y) = z} |(h_{w_n} \cdots h_{w_1})'(y)|^{-t} < \infty \right\}$$
$\in [0, \infty]$ とおく。
- 任意の $p \in (0,1)$ に対し、$T(h_1, h_2, p, z)$ を、「$\hat{\mathbb{C}}$ 上で、毎回、h_1 を確率 p で、h_2 を確率 $1-p$ で選択するランダムな力学系における、無限遠点 $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ に収束する確率」とおく。より正確には、$\tau_{h_1, h_2, p} := p\delta_{h_1} + (1-p)\delta_{h_2}$, とおいて ($\delta_h$ は一点 h のディラック測度)、$T(h_1, h_2, p, z) := T_{\tau_{h_1, h_2, p}, \infty}(z)$. とおく。(注:$z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は $F(\langle h_1, h_2 \rangle)$ 上、局所定数関数である。)

- $\hat{\mathbb{C}}$ の任意の部分集合 A に対し、$\dim_H(A)$ を A の球面距離に対するハウスドルフ次元とする。

定理 4.4. *(定理 C)* 次の *1* から *14* の全てが成り立つ。

1. $(h_1,h_2)\in\mathcal{B}\cap\mathcal{D}$ かつ $G=\langle h_1,h_2\rangle$ とする。このとき、$h_1^{-1}(J(G))\cap h_2^{-1}(J(G))=\emptyset$ となる。

2. $\mathcal{H}\cap\overline{\mathrm{int}(\mathcal{H}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{C})}=\mathcal{H}\cap\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ となる。

3. 任意の $(h_1,h_2)\in\mathcal{H}\cap\overline{\mathcal{B}\cap\mathcal{D}}$ に対し、$\dim_H(J(\langle h_1,h_2\rangle))<2$ となり、$J(\langle h_1,h_2\rangle)$ は *porous* である。

4. $(h_1,h_2)\in(\mathcal{H}\cap\overline{\mathcal{B}\cap\mathcal{D}})\setminus\mathcal{Q}$ とする。このとき、任意の $z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus P(\langle h_1,h_2\rangle)$ に対して、$\dim_H(J(\langle h_1,h_2\rangle))=S(h_1,h_2,z)$ となる。さらに、ある $\epsilon>0$ と、$(h_1,h_2)\in\mathcal{H}\cap\mathcal{B}$ のある近傍 V によって、「任意の $(g_1,g_2)\in V$ と 任意の $z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus P(\langle g_1,g_2\rangle)$ に対し、$\dim_H(J(\langle g_1,g_2\rangle))\le S(g_1,g_2,z)\le 2-\epsilon$」となる。

5. $\mathcal{D}\cap\mathcal{Q}=\emptyset$ となる。

6. $\mathcal{Y}^2$ の任意の連結成分 $\mathcal{V}$ に対し、$\mathcal{Q}\cap\mathcal{V}$ は $\mathcal{V}$ の真部分 variety に含まれる。

7. $(\mathcal{H}\cap\partial(\mathcal{B}\cap\mathcal{C}))\setminus\mathcal{Q}$ は $\mathcal{H}\cap\partial(\mathcal{B}\cap\mathcal{C})$ で稠密である。

8. 任意の $(h_1,h_2)\in(\mathcal{B}\cap\mathcal{D})\cup(\mathcal{H}\cap\partial(\mathcal{B}\cap\mathcal{C}))$ と任意の $0<p<1$ に対し、
$J(\langle h_1,h_2\rangle)=$
$\{z_0\in\hat{\mathbb{C}}\mid z_0$の任意の近傍$U$に対し、$z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ はU上定数でない$\}$
となる。

9. $(h_1,h_2)\in\mathcal{H}\cap\partial(\mathcal{B}\cap\mathcal{C})$, $0<p<1$ とする。このとき、
「$z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続」 $\Longleftrightarrow$ 「$J(h_1)\cap J(h_2)=\emptyset$」。

10. $(h_1,h_2)\in(\mathcal{H}\cap\partial(\mathcal{B}\cap\mathcal{C}))\setminus\mathcal{I}$ とする。このとき、(h_1,h_2) の $\mathcal{H}\cap\mathcal{B}$ におけるある近傍 V があって、任意の $(g_1,g_2)\in V$ と任意の $0<p<1$ に対し、$z\mapsto T(g_1,g_2,p,z)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続となる。

11. $(h_1,h_2)\in(\mathcal{B}\cap\mathcal{D})\cup((\mathcal{H}\cap\partial(\mathcal{B}\cap\mathcal{C}))\setminus\mathcal{I})$ とする。このとき、任意の $z\in\hat{\mathbb{C}}$ に対して、関数 $p\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は $(0,1)$ 上、実解析的である。さらに、任意の $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して, 関数 $(p,z)\mapsto\frac{\partial^n T}{\partial p^n}(h_1,h_2,p,z)$ は $(0,1)\times\hat{\mathbb{C}}$ 上連続である。

12. *(全微分不可能性)* $(h_1,h_2)\in\mathcal{B}\cap\mathcal{D}$, $G=\langle h_1,h_2\rangle$, $0<p<1$ とする。このとき、ある「重要な」確率測度 ν_p が $J(G)$ にあって、次のいずれをも満たす。

  - $\mathrm{supp}\ \nu_p=J(G)$.
  - ν_p に関するほとんど全ての点 $z_0\in J(G)$ において、

$$\limsup_{z\to z_0}\frac{|T(h_1,h_2,p,z)-T(h_1,h_2,p,z_0)|}{|z-z_0|}=\infty$$

  となり、z_0 で $z\mapsto T(h_1,h_2,p,z)$ は全微分が不可能である。

特に、$J(G)$ の非可算稠密部分集合 B があり、B の各点で $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は全微分不可能である。(ν_p を詳しく述べると、まず、$\Gamma := \{h_1, h_2\}$ とおき、連続写像 $f : \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ を $((\gamma_1, \gamma_2, \dots), y) \mapsto ((\gamma_2, \gamma_3, \dots), \gamma_1(y))$ で定義する。$\tau_{h_1,h_2,p} := \otimes_{j=1}^{\infty}(p\delta_{h_1} + (1-p)\delta_{h_2})$ とおく。これは $\Gamma^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度である。$\sigma : \Gamma^{\mathbb{N}} \to \Gamma^{\mathbb{N}}$ をシフト写像、つまり $\sigma(\gamma_1, \gamma_2, \dots) = (\gamma_2, \gamma_3, \dots)$ なるものとする。$f : \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ の $(\sigma, \tau_{h_1,h_2,p})$ に対する相対エントロピーを最大にさせる $\Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ 上の f 不変確率測度を $\tilde{\nu}_p$ とおく（*[S3]*)。ν_p は射影 $\pi_{\hat{\mathbb{C}}} : \Gamma^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ により $\nu_p := (\pi_{\hat{\mathbb{C}}})_*(\tilde{\nu}_p)$ と定義したものである。)

13. *(***双曲性を持つときのヘルダー連続性***)* $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{D}$, $0 < p < 1$ とする。このとき、$z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上ヘルダー連続である。
14. $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{D}$, $G = \langle h_1, h_2 \rangle$, $0 < p < 1$ とする。$\delta = \dim_H(J(G))$ とし、H^δ を δ 次元のハウスドルフ測度とする。(注：このとき、*[S5]* より、$0 < H^\delta(J(G)) < \infty$ である。) このとき、ある「不変量」$\alpha(h_1, h_2, p)$ があって、次の *(a)(b)* を満たす。

(a) $\alpha(h_1, h_2, p) < 1$ ならば、H^δ に関するほとんど全ての $z_0 \in J(G)$ に対し、

$$\limsup_{z \to z_0} \frac{|T(h_1, h_2, p, z) - T(h_1, h_2, p, z_0)|}{|z - z_0|} = \infty$$

となり、z_0 で $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は全微分が不可能。

(b) $\alpha(h_1, h_2, p) > 1$ ならば、H^δ に関するほとんど全ての $z_0 \in J(G)$ に対し、

$$\limsup_{z \to z_0} \frac{|T(h_1, h_2, p, z) - T(h_1, h_2, p, z_0)|}{|z - z_0|} = 0$$

となり、z_0 で $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は全微分可能。

注意 6. 定理 4.4 の 12,14 より、任意の $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{D}$ に対して、ある $0 < p < 1$ があり、ν_p に関するほとんどすべての $z_0 \in J(\langle h_1, h_2 \rangle)$ では $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は全微分不可能だが、H^δ に関するほとんど全ての $z_0 \in J(\langle h_1, h_2 \rangle)$ では $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は全微分が可能になる。

注意 7. 上の $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ は悪魔の階段（カントール関数）やルベーグの特異関数の複素平面上版だと思え、また、$z \mapsto \frac{\partial T}{\partial p}(h_1, h_2, p, z)$ は、高木関数の複素平面上版だと思える。このことを以下に説明する。

$\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とおく。$h_1(x) = 3x$, $h_2(x) = 3(x-1) + 1$ とおき、$\hat{\mathbb{R}}$ 上で、毎回、確率 $\frac{1}{2}$ ずつで h_i を選択するランダムな力学系を考える。このとき、$T_{+\infty}(x)$ を、「$+\infty$ に収束する確率」とおくと、$T_{+\infty}|_{[0,1]}$ が、「悪魔の階段」(あるいはカントール関数) として知られているものに一致する。

また、$h_1(x) = 2x, h_2(x) = 2(x-1) + 1$ とおき、$\hat{\mathbb{R}}$ 上で、毎回、h_1 を確率 p で、h_2 を確率 $1-p$ で選択するランダムな力学系を考えたときの、「$+\infty$ に収束する確率」を $U(x,p)$ とおくと、$x \mapsto U(x,p)$ を $[0,1]$ 上で考えるとル

ベーグの特異関数に一致する。（注：悪魔の階段やルベーグの特異関数を、ランダムな力学系を用いて解釈するこのような視点は今までにはなかったように思われる。）

また、$[0,1]$ 上の $x \mapsto \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial p}(x, \frac{1}{2})$ は高木関数と一致する。（このことは以前から知られている。畑–山口の研究 ([HY]) を参照。）

これらのことを踏まえて、さきの定理 4.4 の $z \mapsto T(h_1, h_2, p, z)$ が悪魔の階段やルベーグ特異関数の複素平面上版と思え、また $z \mapsto \frac{\partial T}{\partial p}(h_1, h_2, p, z)$ が高木関数の複素平面上版と思えるのである。

図 2: $g_1(z) := z^2 - 1, g_2 := \frac{z^2}{4}, h_1 := g_1^2, h_2 := g_2^2$. $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{D}$. The graph of $z \mapsto T(h_1, h_2, \frac{1}{2}, z)$ (a devil's coliseum: a complex analogue of the Cantor function or Lebesgue's singular functions).

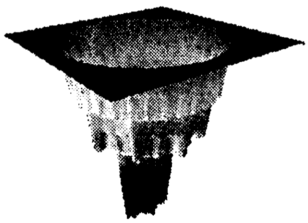


図 3: The graph of $z \mapsto 1 - T(h_1, h_2, \frac{1}{2}, z)$.

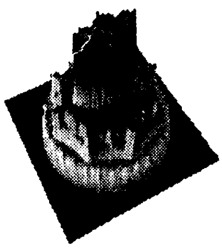
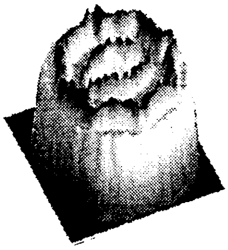


図 4: The graph of $z \mapsto \frac{\partial T}{\partial p}(h_1, h_2, \frac{1}{2}, z)$ (a complex analogue of the Takagi function).



5 証明の方針

1. 定理 2.6 の証明には、$J(G) = \overline{\cup_{g\in G} J(g)}$ ([HM1],[GR]) と、「$P^*(\langle g\rangle)$ が有界 $\iff$ $J(g)$ が連結」を用いる。また、∞ を極とするグリーン関数の話を用いて $\infty \in F(G)$ などを示す。
2. (定理 3.1 の証明の方針) $J_{ker}(G) := \cap_{h\in G} h^{-1}(J(G))$ とおいて、G の**核ジュリア集合**とよぶ。補題「supp τ が $\mathcal{Y}$ でコンパクトかつ、$J_{ker}(G_\tau) = \emptyset$ ならば、$\{(M_\tau^n)_* : \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathcal{M}_1(\hat{\mathbb{C}})\}_{n\in\mathbb{N}}$ のジュリア集合は空になる」ことを示す。また、「$G_\tau \in \mathcal{G}_{dis} \Rightarrow J_{ker}(G_\tau) = \emptyset$」を示す。これらのことから、$T_{\tau,\infty}$ が $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続になる。
3. (定理 4.4 の証明の方針)
   (a) 定理 4.4-1 の証明には、$\{h^{-1}(J(G))\}_{h\in G}$ の重なり具合を見る。([S7] の「相互作用コホモロジー」に関係する。)
   (b) 上のことを用いて、$(h_1, h_2) \in (\mathcal{H}\cap\overline{\mathcal{B}\cap\mathcal{D}})\setminus\mathcal{Q}$ においては、$\hat{\mathbb{C}}$ のある空でない開集合 U によって、$h_1^{-1}(U)\cup h_2^{-1}(U) \subset U$ かつ $h_1^{-1}(U)\cap h_2^{-1}(U) = \emptyset$ となることを示す。(このような U が存在するとき、**開集合条件**が成り立つ、という。)
   (c) 定理 4.4-1 を用いると、「任意の $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \cap \partial(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ において、$h_1^{-1}(J(h_2)) \cap h_2^{-1}(J(h_1)) \neq \emptyset$」となることがわかる。このことから、定理 4.4-2 を示すことができる。
   (d) $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}$, $z \in \hat{\mathbb{C}}\setminus P(\langle h_1, h_2\rangle)$ とする。[S5] により、$\dim_H(J(\langle h_1, h_2\rangle)) \leq S(h_1, h_2, z)$ であり、さらに開集合条件が成り立つときは、上記の不等号が等号になる。また、$\mathcal{Y}^2$ 上の関数 $(g_1, g_2) \mapsto S(g_1, g_2, z)$ は (h_1, h_2) で連続である。これらのことと証明の方針 3b より、定理 4.4-3, 定理 4.4-4 を示すことができる。
   (e) [Be] より、定理 4.4-6 が従う。定理 4.4-6 と定理 4.4-2 を組み合わせ

て、定理 4.4-7 を得る。

(f) 証明の方針 3b より、定理 4.4-8 を得る。また、定理 3.1 の証明の方針のなかの補題を用いて、定理 4.4-9, 定理 4.4-10 を得る。

(g) 証明の方針 3b を用いて、定理 4.4-11 を得る。

(h) エルゴード定理、グリーン関数の話、ポテンシャル論、ケーベの歪曲定理などをを用いて、定理 4.4-12 を示すことが出来る。

(i) ケーベの歪曲定理などを用いて、定理 4.4-13 を示すことが出来る。

(j) エルゴード定理、[S5]、ケーベの歪曲定理などを用いて、定理 4.4-14 を示すことが出来る。

参考文献

[Be] A.F.Beardon, *Symmetries of Julia sets*, Bull. London Math. Soc. 22 (1990) 576-582.

[Br] R. Brück, *Geometric properties of Julia sets of the composition of polynomials of the form* z^2+c_n, Pacific J. Math., **198** (2001), no. 2, 347-372.

[Bu1] M. Büger, *Self-similarity of Julia sets of the composition of polynomials*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **17** (1997), 1289-1297.

[Bu2] M. Büger, *On the composition of polynomials of the form* $z^2 + c_n$, Math. Ann. 310 (1998), no. 4, 661-683.

[BBR] R. Brück, M. Büger and S. Reitz, *Random iterations of polynomials of the form* $z^2 + c_n$*: Connectedness of Julia sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **19**, (1999), No.5, 1221-1231.

[FS] J. E. Fornaess and N. Sibony, *Random iterations of rational functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **11**(1991), 687-708.

[G] R. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Vol. III: Homological Theory*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

[GR] Z. Gong and F. Ren, A random dynamical system formed by infinitely many functions, Journal of Fudan University, **35**, 1996, 387-392.

[HM1] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *The Dynamics of Semigroups of Rational Functions I*, Proc.London Math.Soc. (3)**73**(1996), 358-384.

[HM2] A. Hinkkanen, G. J. Martin, *Julia Sets of Rational Semigroups* , Math. Z. **222**, 1996, no.2, 161-169.

[HY] M. Hata and M. Yamaguti, *Takagi function and its generalization*, Japan J. Appl. Math., **1**, pp. 183-199 (1984).

[J] M. Jonsson, *Ergodic properties of fibered rational maps* , Ark.Mat., 38 (2000), pp 281-317.

[M] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable* (Third Edition), Annals of Mathematical Studies, Number 160, Princeton University Press, 2006.

[N] S. B. Nadler, *Continuum Theory: An introduction*, Marcel Dekker, 1992.

[Sp] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[S1] H. Sumi, *Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2001), **21**, 563-603.

[S2] H. Sumi, *A correction to the proof of a lemma in 'Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products'*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2001), **21**, 1275-1276.

[S3] H. Sumi, *Skew product maps related to finitely generated rational semigroups,* Nonlinearity, **13**, (2000), 995-1019.

[S4] H. Sumi, *Semi-hyperbolic fibered rational maps and rational semigroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2006), **26**, 893–922. (See also http://arxiv.org/abs/math.DS/0509719.)

[S5] H. Sumi, *Dimensions of Julia sets of expanding rational semigroups*, Kodai Mathematical Journal (2005), Vol. 28, No.2, pp390-422. (See also http://arxiv.org/abs/math.DS/0405522.)

[S6] H. Sumi, *Dynamics of polynomial semigroups with bounded postcritical set in the plane*, RIMS Kokyuroku 1447, 198–215.

[S7] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups and interaction cohomology*, RIMS Kokyuroku 1447, 227–238.

[S8] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups*, preprint.

[St1] R. Stankewitz, *Completely invariant Julia sets of polynomial semigroups,* Proc. Amer. Math. Soc., **127**, (1999), No. 10, 2889-2898.

[St2] R. Stankewitz, *Completely invariant sets of normality for rational semigroups*, Complex Variables Theory Appl., Vol 40.(2000), 199-210.

[St3] R. Stankewitz, *Uniformly perfect sets, rational semigroups, Kleinian groups and IFS's* , Proc.Amer.Math.Soc. **128**, (2000), No.9, 2569-2575.

[SS] R. Stankewitz and H. Sumi, *Structure of Julia sets of polynomial semigroups with bounded finite postcritical set*, in preparation.

[SSS] R. Stankewitz, T. Sugawa, and H. Sumi, *Some counterexamples in dynamics of rational semigroups*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica Vol. 29, 2004, 357-366.

[SU1] H. Sumi and M. Urbanski, *Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding rational semigroups*, preprint.

[SU2] H. Sumi and M. Urbanski, *The equilibrium states for semigroups of rational functions*, preprint.

[SY] Y. Sun and C-C. Yang. *On the connectivity of the Julia set of a finitely generated rational semigroup*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.130, No.1, 49-52, 2001.

[TP] Tan Lei and K. Pilgrim, *Rational maps with disconnected Julia set*, Asterisque 261, (2000).

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務

   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出 · 任期

   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決

   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務

   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．