日　本　数　学　会

２００６年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

２００６年3月

於　中央大学理工学部

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.
2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する.
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する.
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦.
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.
3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる.
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.
4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する.
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する.
5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする.
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974年10月12日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996年8月1日より施行する.

第1日　3月26日 (日)

第V会場　函数論

9:00～12:00

14:30～15:30

16:00～17:00　特別講演

小野　太幹　(福山大)　* 非線形ディリクレ問題

第2日　3月27日 (月)

第V会場　函数論

9:00~12:00

15	松崎　克彦	(お茶の水女大理)	* フックス群の発散型・収束型の判定法	15
16	E. Girondo (Univ. Autonoma de Madrid)		* 極値的円板を含む向き付け不可能な双曲型閉曲面	15
	中村　豪	(愛知工大)		
17	大市　牧人	(静岡大機器分析センター)	* Jørgensen numbers of Kleinian groups	10
	佐藤　宏樹	(静岡大理)		
18	小森　洋平	(阪市大理)	* クライン群の等角境界と凸核境界の距離	15
19	木坂　正史	(京大人間環境)	* Semi-hyperbolicity of entire functions	15
20	角　大輝	(阪大理)	* 臨界値集合が有界な多項式半群の力学系と後方自己相似系の相互作用コホモロジー	15
21	川上　裕	(名大多元数理)	* $\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面のガウス写像の値分布	15
22	小川　琢磨	(筑波大数理物質)	* A mathematical huge object ?	10
	鎌田　保雄	(筑波大数理物質)		
23	甲斐　千舟	(京大理)	* Cayley 変換像の凸性による対称 Siegel 領域の特徴付け	15
24	大沢　健夫	(名大多元数理)	On the complement of Lavi–flats in Kähler manifolds	20

13:30~14:30　特別講演

濱田　英隆　(九州産大工)　* Rational proper holomorphic maps between the Euclidean balls

1 双曲多様体に対するポアンカレ予想

大藪　卓

双曲多様体に対するポアンカレ予想。

双曲空間に対するポアンカレ予想。(KNOWN).

Γn=M::::::HOMOTOPY EQUIVALENT::THEN:::

Γn=M:HOMEOMORPHIC:::::

FIBRATION::::::

Γ ==========➔ Γn========➔ Γn/Γ

INDUCED BUNDLE::::::::

Γ ==========➔G===========➔M:::::

Γn/Γ =M:HOMOTOPY EQUIVALENT:THEN

Γn=G:HOMOTOPY EQUIVALENT::::::

THEN:::::

Γn=G:HOMEOMORPHIC:::::

HENCE:;:::::

Γn=M::::HOMEOMORPHIC:::::::::::

特に、n=2:3:4:::::双曲空間に対するポアンカレ予想。

実は、これでは不十分なのであるが、あえてここに述べた。

Ｓ３：Ｓ４－－－ＰＯＩＮＣＡＲＥ　予想。

HOPF FIBRATION:::::::

S1=========➔S3========➔S2::::

S3=========➔S7========➔S4::::::

S7=========➔S15========➔S8:::::

S1=========➔S3========➔S2:

INDUCED BUNDLE:::::

S1=========➔G=========➔M::::

G==S3:HOMOTOPY EQUIVALENT:::THEN::::

S2==M:HOMOTOPY EQUIVALENT:::::HENCE::::

M==S2::HOMEOMORPHIC:::::HENCE::::

G===S3:HOMEOMORPHIC::::::

S4::::の場合には、ＳＭＡＬＥのＳ７：：に対するポアンカレ様相を使う。

これらは、実は後に述べるポアンカレ予想の特別な場合に過ぎない。正しい。！！！！！

RIEMANN:-面に対するポアンカレ予想

大藪　卓

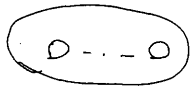
RIEMANN:面に対するポアンカレ予想。

R:::RIEMANN::-面。

R=====M:HOMOTOPY EQUIVALENT::::THEN

R=====M:HOMEOMORPHIC:::::

これは、RIEMANN:::面：：Ｒ：：：は、ＧＥＮＵＳ：：ｇ：：：：によって一意に定まると言う事から直ちに従う。



R====D/Γ :D:UNIT DISK::::::

FINRATION::::::

Γ========➔D=======➔D/Γ =R::

INDUCED BUNDLE::::

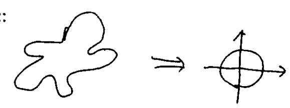
Γ========➔G=======➔M:

R==M:HOMOTOPY EQUIVALENT::::*THEN::::

D=G:HOMOTOPY EQUIVALENT::::::

RIEMANN'S MAPPING THEOREM::::

SIMPLY CONNECTED DOMAIN IN R2:::C::::IS CONFORMALLY EQUIVALENT TO THE UNIT DISK::::::



HENCE:::::::

D=G:HOLOMORPHICALLY EQUIVALENT:::

HENCE::::::::

D/Γ =R=====M:::HOMEOMORPHIC::::::

高次元の場合は、

CONNTRACTIBLE:::BLOUNDARY SIMPLY CONNECTED DOMAIN IN Rn:::IS ISOMORPHIC TO THE UNIT DISK::::

よって、この場合は、少しＭＯＤＩＦＹ：：：：しなければならないようである。

ポアンカレ予想

大藪　卓

POINCARE CONJECTURES::::::

STATEMENT OF THE RESULTS::::::

@@@@POINCARE CONJECTURE FOR LIE GROUPS::::::

コンパクト・実・リー群:::::G:::G'::::

G==G':HOMOTOPY EQUIVALENT:::THEN::::

G==G':ISOMORPHIC:::HOMEOMORPHIC::::

@@@@@POINCARE CONJECTURE FOR SYMMETRIC SPACE:::::

M==G/K:HOMOTOPY EQUIVALENT:::THEN::::

M===G/K:HOMEOMORPHIC::::::

特に球面:Sn=O(n+1)/O(n)=SO(n+1)/SO(n)

::::::SYMMETRIC SPACE****対称空間。

PRINCIPAL FIBRATION:::::::

K==============→G===============→G/K:::::

INDUCED BUNDLE::::

K==============→G'===============→M:::

M==G/K:HOMOTOPY EQUIVALENT::::

G==G':HOMOTOPY EQUIVALENT::::::

M==G'/K::::と考えられる。

DIFF(G):C^{∞}(G)==============→C^{∞}(G):::

DIFF(G/K):C^{∞}(G/K)===========→C^{∞}(G/K):

DIFF(G/Γ):C^{∞}(G/Γ)=========→C^{∞}(G/Γ)::::

RING IISOMORPHISMS:::::::

G:C^{∞}(M)===============→C^{∞}(M)::::::

基本思想。

DIFF(M)→O(C^{∞}(M))→DIFF(C^{∞}(M)):::::

表現論。HARMONIC ANALYSIS::::

その他、色々あります。

統一幾何学

大藪　卓

KLEIN::::::群があれば、幾何学がある。

我々::::ALGEBRA::::::環::::があれば幾何学がある。

R:ALGEBRA========→

AUT●:RING ISOMORPHISMS GROUP::::

X●:::微分の作るリー環。

AUT(X●)::LIE ALGEBRA ISOMORPHISM::::::

R==================→M●:::幾何学的対象。

R==================→SPEC●::::幾何学的対象。

R←==================→M●:SPEC●

DIFF●　　AUT●:G:G':G":---------

X●←==================→M●:SPEC●:::

AUT(X●):G:G':G":---------

特に、DIFF（M）:::の場合、

AUT●========DIFF(M●):::

AUT●========DIFF(SPEC●)::::

AUT●========AUT(X●)::::::::

AUT●========AUT(C^{∞}(M●)):

AUT●========AUT(C^{∞}(SPEC●)):

AUT●←==============→X●::::::

AUT(X●)←============→X●::::

K[X]←==================→Kn::::

AUT(K[X])::::AFFINE(n:K)::::

GL(n:K)XKn:::::

Kn:::TRANSLATION:::::::

X(K[X])←==============→Kn:

AUT(X(K[X])):

ALGEBRA::::環:::があれば、幾何学がある。

局所座標系の導入

大藪　卓

M●:SPEC●:::-MATHEMATICS:::::

R:X●:AUT●::-MATHEMATICS:::::::

R:ALGEBRA====================→M●:

R:ALGEBRA:====================→SPEC●:

これに座標系を入れる事を考える。

正則局所環。

正則助変数系。

正則パラメーター。

正則狭序変数系。

R　⊃　p::::極大イデアル。

P=x1R+x2R+x3R+-------------+xnR::::::

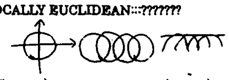
(x1,x2,x3,----------------,xn):

LOCAL COORDINATE:::::

LOCAL CHART:::::::

LOCAL NEIGHBORHOOD::::

LOCALLY EUCLIDEAN:::???????



微分::::@xi)==================→(∂/∂xi):

(x1,x2,------,xn)=====→(∂/∂x1:∂/∂x2:------:∂/∂xn)

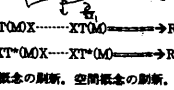
METRICS:::ds^2=gijdxidxj::::

Gp(u,v)=gp(∂/∂xi:∂/∂xj)=gij::::::

従来の数学、幾何学がそのまま展開出来る。

RIEMANNIAN GEOMETRY::::::::::

接空間。接平面。TANGENT SPACE::::::



T(M)XT(M)X--------XT(M)========→R::::::

T*(M)XT*(M)X-----XT*(M)=======→R::::::

多様体概念の刷新。空間概念の刷新。

時代と逆行しているかも知れないが、兎に角、———。

2 Beta Functions of Several Variables and N- Fractional Calculus of Some Elementary Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

The beta function of several variables (elements) (generalized beta functions) is defined as

$$_{n}B(\alpha_k) = B(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) := \frac{\prod_{k=1}^{n} \Gamma(\alpha_k)}{\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)}$$

(Beta function of $n (\in Z^+ \geq 2)$ elements)

where

$$\alpha_k \ , \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \notin Z_0^-$$

and

α_k ($k = 1, 2, \cdots, n \in Z^+ \geq 2$) are variables (constants for special case) with order number k .

In this article some theorems related to $_{n}B(\alpha_k)$ are reported.

Moreover some applications of generalized beta function to the N - fractional calculus of some elementary functions are presented.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some Identities, J. Frac Calc. Vol. 21, May (2002),1 - 6.

[7] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I , J. Frac Calc. Vol. 21, May (2002), 7 - 12.

[8] K. Nishimoto, Ming- Lai Lin, Chen- Te Yeri and Pin- Yu Wang ; N- Fractional Calculus of the Function $(z-c)^{-1}$ and Beta Functions, J. Frac Calc.Vol. 23, May (2003),55 - 66.
[9] Shih- Tong Tu, Shy- Der Lin, Pin- Yu Wan and K. Nishimoto ; Some Relationship Associated with the Beta Function and the Function $(z-c)^{-n}$ via N- Fractional Calculus, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003),55 - 66.
[10] K. Nishimoto, Shih- Tong Tu and Pin- Yu Wan ; N- Fractional Calculus of the Power Function $(z-c)^{-b}$ and Beta Functions, J. Frac. Calc.Vol. 23, May (2003), 89 - 102.
[11] Katsuyuki Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Function $\log(z-c)$ and Beta Functions, J. Frac Calc.Vol. 24, Nov. (2003),1 - 12.
[12] Shih- Tong Tu , Pin- Yu Wang and K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Function $\log(z-c)\cdot(z-c)$ and Beta Functions, J. Frac Calc.Vol. 25, May (2004),11 - 16.
[13] Pin- Yu Wang , Ming- Lai Lin, Tsu- Chen Wu and K. Nishimoto ; Theorems derived from the N- Fractional Calculus of some products which contain a logarithmic function, J. Frac Calc. Vol. 25, May (2004), 17 - 23.
[14] K. Nishimoto ; Multiply Elements Beta Functions and N- Fractional Calculus of Some Logarithmic Functions, J. Frac.Calc. Vol. 26, Nov. (2004), 61 - 72.
[15] K.Nishimoto ; Multiply Elements Beta Functions and N- Fractional Calculus of Some Power Functions, J. Frac Calc. Vol. 26, Nov. (2004), 73 - 79.
[16] T. Miyakoda and K. Nishimoto ; Some Identities Derived from The N- Fractional Calculus of A Power Function, J. Frac Calc. Vol. 27, May (2005), 21 - 30.
[17] B. C. Carlson ; Special Functions of Applied Mathematics, Academic Press (1977), 61 - 64.

Katsuyuki Nishimoto
Institute for Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan
Fax; +81 - 24 - 922 - 7596

3 Convolution properties of certain analytic functions

Junichi Nishiwaki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. S. Shams, S. R. Kulkarni and J. M. Jahangiri (Internat. J. Math. Math. Sci. 55(2004), 2959-2961) have considered the subclass $\mathcal{SD}(\alpha, \beta)$ of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha\,(\alpha \geqq 0)$ and for some $\beta\,(0 \leqq \beta < 1)$, and the subclass $\mathcal{KD}(\alpha, \beta)$ of $\mathcal{A}$ consisting of $f(z)$ satisfying $zf'(z) \in \mathcal{SD}(\alpha, \beta)$.

Let $\mathcal{MD}(\alpha, \beta)$ be the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha\,(\alpha \leqq 0)$ and for some $\beta\,(\beta > 1)$. Also, the class $\mathcal{ND}(\alpha, \beta)$ is defined as the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which satisfy $zf'(z) \in \mathcal{MD}(\alpha, \beta)$.

Remark If $f(z) \in \mathcal{MD}(\alpha, \beta)$ with $\alpha \leqq -1$, then $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = u + iv$ maps $\mathbb{U}$ on to the elliptic domain such that

$$\left(u - \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha^2 - 1}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}v^2 < \frac{\alpha^2(\beta - 1)^2}{(\alpha^2 - 1)^2}$$

for $\alpha < -1$, and on to the parabolic domain such that

$$u < -\frac{1}{2(\beta - 1)}v^2 + \frac{\beta + 1}{2}$$

for $\alpha = -1$.

For the classes $\mathcal{MD}(\alpha, \beta)$ and $\mathcal{ND}(\alpha, \beta)$, we have

Lemma 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$(1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \{|n-\beta+1|+|n-\beta-1|-2\alpha(n-1)\}\,|a_n| \leqq \beta-|2-\beta|$$

for some $\alpha\,(\alpha \leqq 0)$ and $\beta\,(\beta > 1)$, then $f(z) \in \mathcal{MD}(\alpha,\beta)$.

Lemma 2 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$(2) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} n\{|n-\beta+1|+|n-\beta-1|-2\alpha(n-1)\}\,|a_n| \leqq \beta-|2-\beta|$$

for some $\alpha\,(\alpha \leqq 0)$ and $\beta\,(\beta > 1)$, then $f(z) \in \mathcal{ND}(\alpha,\beta)$.

In view of the above lemmas, we introduce the subclass $\mathcal{MD}^*(\alpha,\beta)$ of $\mathcal{MD}(\alpha,\beta)$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy the coefficient inequality (1). Also the class $\mathcal{ND}^*(\alpha,\beta)$ is defined as the subclass of $\mathcal{ND}(\alpha,\beta)$ consisting of $f(z)$ which satisfy the coefficient inequality (2).

In the present talk, some convolution properties of $f(z)$ belonging to the classes $\mathcal{MD}^*(\alpha,\beta)$ and $\mathcal{ND}^*(\alpha,\beta)$ are discussed.

Let $f_j(z) \in \mathcal{A}$ be given by

$$f_j(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \quad (j = 1,2).$$

Then, the convolution $(f_1 * f_2)(z)$ of $f_1(z)$ and $f_2(z)$ is defined by

$$(f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,1}a_{n,2} z^n.$$

Theorem 1 *Let $f_1(z) \in \mathcal{MD}^*(\alpha,\beta_1)$ and $f_2(z) \in \mathcal{MD}^*(\alpha,\beta_2)$ with $\alpha \leqq 0$ and $1 < \beta_1, \beta_2 \leqq 2$. If $\alpha \leqq 0$ and $\beta_2 \leqq \dfrac{\beta_1+3}{2\beta_1-1}$, or, if $\alpha \leqq 2-\sqrt{\beta_1\beta_2+(\beta_1-1)(\beta_2-1)}$ and $\beta_2 > \dfrac{\beta_1+3}{2\beta_1-1}$, then $(f_1 * f_2)(z) \in \mathcal{MD}^*(\alpha,\beta)$, where*

$$\beta = 1 + \frac{(2-\alpha)(\beta_1-1)(\beta_2-1)}{(\beta_1-1)(\beta_2-1)+(2-\alpha-\beta_1)(2-\alpha-\beta_2)}.$$

Theorem 2 *Let $f_1(z) \in \mathcal{ND}^*(\alpha,\beta_1)$ and $f_2(z) \in \mathcal{ND}^*(\alpha,\beta_2)$ with $\alpha \leqq 0$ and $1 < \beta_1, \beta_2 \leqq 2$. If $\alpha \leqq 0$ and $\beta_2 \leqq \dfrac{3(5-\beta_1)}{\beta_1+3}$, or, if $\alpha \leqq \alpha_0$ and $1 < \beta_1, \beta_2 \leqq 2$, then $(f_1 * f_2)(z) \in \mathcal{ND}^*(\alpha,\beta)$, where*

$$\beta = 1 + \frac{(2-\alpha)(\beta_1-1)(\beta_2-1)}{(\beta_1-1)(\beta_2-1)+2(2-\alpha-\beta_1)(2-\alpha-\beta_2)}$$

and α_0 is the solution of

$$3\alpha^3 - 12\alpha^2 + 7\alpha + 1 = 0$$

such that $-0.1181995 \leqq \alpha_0 \leqq -0.118199$.

4 Sufficient conditions for Sakaguchi functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Tadayuki Sekine (Nihon University)
Rikuo Yamakawa (Shibaura Institute of Technology)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For $f(z) \in \mathcal{A}$, K. Sakaguchi (J. Math. Soc. Japan 11(1959), 72-75) has studied the class $\mathcal{STS}$ of functions $f(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Therefore, we call such a function Sakaguchi function. It is known that a function $f(z) \in \mathcal{STS}$ is starlike with respect two symmetric points z and $-z$.

In view of the class $\mathcal{STS}$, S. Owa, T. Sekine and R. Yamakawa have introduced the generalization class $\mathcal{S}(\alpha, t)$ of $\mathcal{STS}$ as the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ satisfying

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z) - f(tz)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

for some $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1)$ and for some $t\,(|t| \leqq 1, t \neq 1)$. Also, the class $\mathcal{T}(\alpha, t)$ is defined as the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ such that $zf'(z) \in \mathcal{S}(\alpha, t)$.

Let us define

$$h(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n$$

and

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_n}{n} z^n,$$

where

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} t^n.$$

For functions $f_j(z) \in \mathcal{A}$ given by

$$f_j(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \qquad (j = 1, 2),$$

the convolution $(f_1 * f_2)(z)$ of $f_1(z)$ and $f_2(z)$ is defined by

$$(f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,1} a_{n,2} z^n.$$

An application of the convolutions gives us that

Lemma 1 *A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is in the class $\mathcal{S}(\alpha, t)$, if and only if, it satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(f * h)(z)}{(f * h * g)(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1)$.

Lemma 2 *A function $f(z) \in \mathcal{A}$ is in the class $\mathcal{T}(\alpha, t)$, if and only if, it satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(f * h)'(z)}{(f * h * g)'(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1)$.

Using the above results, we discuss some sufficient conditions of $f(z)$ to be in the classes $\mathcal{S}(\alpha, t)$ and $\mathcal{T}(\alpha, t)$.

Theorem 1 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left|\frac{(f' * g')(z)}{(f * g)'(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} - 1\right| < \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1)$, then

$$\left|\frac{f'(z)}{(f * g)'(z)} - 1\right| < 1 - \alpha \quad (z \in \mathbb{U}),$$

therefore $f(z) \in \mathcal{S}(\alpha, t)$.

Theorem 3 *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\left|\frac{z(f * g)''(z)}{(f * g)'(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < 1 - 2\alpha \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $\left(\frac{1}{4} \leqq \alpha < \frac{1}{2}\right)$, then

$$\left|\frac{(f * g)'(z)}{f'(z)} - 1\right| < \frac{1}{2\alpha} - 1 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

therefore $f(z) \in \mathcal{S}(\alpha, t)$.

5 Geometric function theory and Smale's mean value conjecture

Ege Fujikawa (Tokyo Institute of Technology)
Toshiyuki Sugawa (Hiroshima University)

Let $P(z)$ be a complex polynomial of degree $d \geq 2$, and $z_1, z_2, \cdots, z_{d-1}$ the critical points of $P(z)$. Smale [6] stated that, if z is not a critical point of P, then the following inequality holds:

$$\min_i \left| \frac{P(z) - P(z_i)}{z - z_i} \right| \leq 4\,|P'(z)|. \tag{1}$$

Furthermore, he also formulated the following conjecture, which is known as Smale's mean value conjecture.

Conjecture *Let $P(z)$ be a polynomial of degree $d \geq 2$ and $z_1, z_2, \cdots, z_{d-1}$ the critical points of $P(z)$. If z is not a critical point of P, then*

$$\min_i \left| \frac{P(z) - P(z_i)}{(z - z_i)P'(z)} \right| \leq \frac{d-1}{d}. \tag{2}$$

A weaker conclusion of the conjecture is the inequality replaced the constant $(d-1)/d$ with 1 in (2). Let $S(P, z)$ be the left-hand side of inequality (2), and $K(d)$ the smallest constant such that $S(P, z) \leq K(d)$ holds for all polynomials P of degree d and for all $z \neq z_i$. Inequality (1) shows that $K(d) \leq 4$ and Smale's mean value conjecture says that $K(d) = (d-1)/d$. If this conjecture is true, the constant $(d-1)/d$ is the best possible, since it is attained by $z^d - z$. This conjecture has been proved only for degrees $d = 2, 3, 4$ (see [5]) and $d = 5$ (see [3]). For $d \geq 6$, it has been proved in certain circumstances. In a general case, Beardon, Minda and Ng [1] proved that

$$K(d) \leq 4^{\frac{d-2}{d-1}} =: K_1(d)$$

and Conte, Fujikawa and Lakic [2] verified that

$$K(d) \leq 4 \cdot \frac{d-1}{d+1} =: K_2(d) \quad (< K_1(d)).$$

Furthermore, Schmeisser [4] showed that

$$K(d) \leq \frac{2^d - (d+1)}{d(d-1)} =: K_3(d).$$

In this talk, we improve these estimates.

Theorem *Let P be a polynomial of degree $d \geq 2$ with critical points $z_1, z_2, \cdots, z_{d-1}$. If z is not a critical point of P, then*

$$\min_i \left| \frac{P(z) - P(z_i)}{(z - z_i)P'(z)} \right| \leq 4 \cdot \frac{1 + (d-2)4^{\frac{1}{1-d}}}{d+1} =: K_0(d).$$

Remark. For $d \geq 7$, our constant $K_0(d)$ is the best of the other results. More precisely, (i) $K_0(d) < K_2(d) < K_3(d)$ for $d \geq 8$; (ii) $K_0(7) = 2.48425\ldots < K_3(7) < K_2(7)$; (iii) $K_3(d) < K_0(d) < K_2(d)$ for $d \leq 6$.

We prove our theorem by using the Bieberbach theorem for coefficients of univalent functions and an estimate of the hyperbolic density on a certain simply connected domain.

References

[1] A. F. Beardon, D. Minda and T. W. Ng, *Smale's mean value conjecture and the hyperbolic metric*, Math. Ann. **322** (2002), 623–632.

[2] A. Conte, E. Fujikawa and N. Lakic, *Smale's mean value conjecture and the coefficients of univalent functions*, preprint.

[3] E. Crane, *A computational proof of the degree 5 case of Smale's mean value conjecture*, to appear.

[4] G. Schmeisser, *The Conjecture of Sendov and Smale*, Approximation Theory (B. Bojanov, Ed), DARBA, Sofia, 2002, 353–369.

[5] T. Sheil-Small, *Complex polynomials*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **75**, Cambridge, 2002.

[6] S. Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **4** (1981), 1–36.

6 On Shared-value Properties of the First Painlevé Transcendents

Weichuan Lin   Fujian Normal University
Kazuya Tohge   Kanazawa University

R. Nevanlinna's 'five-IM' and 'four-CM' theorems are well known results concerning the uniqueness of meromorphic functions defined in the whole plane $\mathbb{C}$ under such value-sharing conditions. Both of the numbers 'five' and 'four' cannot be replaced by any smaller numbers in general. Counter-examples for 'four-IM' were given by G. G. Gundersen and M. Reinders by certain rational functions in e^z and in an elliptic function and its derivative, respectively. It is known that if two distinct meromorphic functions share 'three-CM' or 'four-IM' values, then some of the values would be ramified values of either of the two functions. Examples by Gundersen and Reinders illustrate this property clearly. In fact for 'four-IM', the followings were proved: *let $f(z)$ and $g(z)$ be two distinct non-constant meromorphic functions in $\mathbb{C}$ and share four distinct values a_j $(j = 1, 2, 3, 4)$. Then*

1) $T(r, f) = T(r, g) + S(r, f)$, $T(r, g) = T(r, f) + S(r, g)$;

2) $\sum_{j=1}^{4} \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_j}) = 2T(r, f) + S(r, f)$;

3) $N_0(r, 1/f') = S(r, f)$, $N_0(r, 1/g') = S(r, g)$, *where* $N_0(r, 1/h')$ *denotes the counting function of zeros of* h' *but not zeros of* $h - a_j (j = 1, 2, 3, 4)$.

4) $\sum_{j=1}^{4} N^*(r, a_j) = S(r, f)$. *Here* $N^*(r, a)$ *denotes the counting function of the multiple common zeros of* $f - a$ *and* $g - a$, *say, of multiplicities* k *and* ℓ *respectively, and counts those points* $\min\{k, \ell\} (\geq 2)$ *times.*

On the other hand, due to S. Shimomura, N. Steinmetz, A. Hinkkanen and I. Laine, almost full information on the value distribution of Painlevé transcendents is now available (see [GLS]). For example, the following properties of the first Painlevé transcendents ω were mainly proved by Shimomura (eg. [GLS]):

i) each has regular growth and the order is $5/2$;

ii) all the poles are double;

iii) $m(r, \omega) = O(\log r)$;

iv) $m\left(r, \frac{1}{\omega-a}\right) + m\left(r, \frac{1}{\omega'-a}\right) = O(\log r)$ and

$$N\left(r, \frac{1}{\omega-a}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{\omega-a}\right) \leq \frac{1}{6}T(r, \omega) + O(\log r) \text{ for any } a \in \mathbb{C}.$$

In this talk, we repeatedly use them as well as its differential equation, (P1) $w'' = 6w^2 + z$, to study their possible shared-value properties. The results given here are all concerned with the first Painlevé transcendents, but Theorem 1 on 'four-IM' can be proved also for the second and the fourth Painlevé transcendents.

The speaker, however, should say that this is still the first step for an attempt to know more about the value distribution of the Painlevé transcendents.

Theorem 1. *Let $\omega(z)$ be a first, second or fourth Painlevé transcendent and $f(z)$ be a non-constant meromorphic function which shares four distinct values a_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ IM with $\omega(z)$. Then $f(z) \equiv \omega(z)$.*

As a 'three-CM' theorem, we can prove

Theorem 2. *Let $\omega(z)$ be a solution of (P1) and $f(z)$ be a meromorphic function which shares two distinct values a_j $(j = 1, 2)$ CM with $\omega(z)$, and further $\omega(z)$ attains a_3 whenever $f(z) = a_3$, where $a_3(a_3 \neq a_1, a_2)$. Then $f(z) \equiv \omega(z)$.*

For the proof of this result, it essential that the order of $\omega(z)$ is not an integer, so the reasoning does not simply apply to the second and the fourth Painlevé transcendents.

As a uniqueness problem with treating two finite values, we often consider a pair of a given meromorphic function and its derivative. Of course, the Painlevé transcendents and its first derivative do not coincide identically, so that it may be natural to ask to what degree they share a finite value.

Theorem 3. *Let $\omega(z)$ be a solution of (P1). By $N(r, \omega' = a; \omega = a)$ we denote the counting function of the a-points of ω' where ω also attains the value a. Then for any finite subset $\mathcal{A}$ of $\mathbb{C}$, we have*

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} N(r, \omega' = a; \omega = a) \leq T(r, \omega') + O(\log r).$$

Remark. Especially when $a = 0$, as we mentioned above we have

$$N(r, \omega' = 0; \omega = 0) \leq N(r, 1/\omega) - \overline{N}(r, 1/\omega) \leq \frac{1}{9} T(r, \omega') + O(\log r),$$

so that they do not share the value 0.

In fact, we see that ω and ω' have no shared finite value at all, or slightly more generally

Theorem 4. *Let $\omega(z)$ be a solution of (P1). Then there exist no two finite values a, b such that $\overline{E}(a, \omega) \subseteq \overline{E}(b, \omega')$, where*

$$\overline{E}(c, h) = \{z \in \mathbb{C} \mid h(z) = c \text{ (ignoring multiplicity)}\}.$$

References

[GLS] V. Gromak, I. Laine and S. Shimomura, Painlevé Differential Equations in the Complex Plane, Walter de Gruyter, Berlin. New York, 2002.

7 An extension of Nochka's weight function and its application

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \;:\; \boldsymbol{C} \;\to\; \boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\},$$

where n is a positive integer. Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X = +\infty$, where $N > n$. For a finite subset P of X, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a} \in P\} \ \text{ and } \ d(P) = \dim V(P).$$

Further we put

$$\mathcal{O} = \{P \subset X \mid 0 < \#P \leq N+1\}$$

and

$$\lambda_X = \min_{P \in \mathcal{O}} d(P)/\#P.$$

Note that $\#\{d(P)/\#P \mid P \in \mathcal{O}\}$ is finite.

Theorem 1. Ther exist a function $\omega \;:\; X \to (0,1]$ and a constant θ satisfying the followings:

(a) $0 < \omega(\boldsymbol{a})\theta \leq 1 \quad (\forall \boldsymbol{a} \in X)$;

(b) for any finite set $Q \supset \{\boldsymbol{a} \mid \omega(\boldsymbol{a})\theta < 1\}$ satisfying $\#Q \geq 2N - n + 1$

$$\#Q - (2N - n + 1) = \theta(\sum_{\boldsymbol{a} \in Q} \omega(\boldsymbol{a}) - n - 1);$$

(c) $N/n \leq \theta \leq (2N - n + 1)/(n+1)$;

(d) $\forall P \in \mathcal{O}$, $\sum_{\boldsymbol{a} \in P} \omega(\boldsymbol{a}) \leq d(P)$.

(cf. [1, Theorem 0.3] and [2, Theorem 2.11.4].)

Remark 1. (a) If $\lambda_X < (n+1)/(2N - n + 1)$, then

$$\min_{\boldsymbol{a} \in X} \omega(\boldsymbol{a}) = \lambda_X < \theta^{-1} < (n+1)/(2N - n + 1).$$

(b) If $\lambda_X \geq (n+1)/(2N - n + 1)$, then

$$\omega(\boldsymbol{a}) = 1/\theta = (n+1)/(2N - n + 1) \ (\forall \boldsymbol{a} \in X).$$

2. Let $\sigma : X \to (0,1]$ be defined as follows:

$$\sigma(\boldsymbol{a}) = \lambda_X \quad (\forall \boldsymbol{a} \in X).$$

Proposition. (a) $1/(N-n+1) \leq \lambda_X \leq (n+1)/(N+1)$;
(b) $\forall P \in \mathcal{O}$, $\sum_{\boldsymbol{a} \in P} \sigma(\boldsymbol{a}) \leq d(P)$.

We put

$$\mathcal{W} = \{\tau : X \to (0,1] \mid \forall P \in \mathcal{O}, \sum_{\boldsymbol{a} \in P} \tau(\boldsymbol{a}) \leq d(P)\}.$$

For example, $\mathcal{W} \ni \omega, \sigma$.

Theorem 2(cf. [2, Theorem 3.3.8]). For any $\tau \in \mathcal{W}$, we have the inequality

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \tau(\boldsymbol{a}) \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq n+1.$$

Corollary. $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_n(\boldsymbol{a}, f) \leq (n+1)/\lambda_X$.

References

[1] W. Chen: Defect relations for degenerate meromorphic maps. Trans. Amer. Math. Soc., 319-2(1990), 499-515.

[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

8　2葉球面上の容量不等式

中井 三留（名工大・名誉教授）

A と B を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の互いに素な非極集合である完閉集合で，$\mathbb{C}\setminus A$ と $\mathbb{C}\setminus B$ の何れも連結であるとする．更に γ を $\mathbb{C}\setminus(A\cup B)$ 内の始点と終点が一致しない単純弧とする．$\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ を $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma$ の2枚の写しを γ に沿って交差状に貼り合せて自然な等角構造を与えて出来る複素球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の2葉被覆リーマン面 $(\widehat{\mathbb{C}}_\gamma,\pi,\widehat{\mathbb{C}})$，所謂2葉球面，とする：

$$\text{(1)}\qquad \widehat{\mathbb{C}}_\gamma := (\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma)\,\textstyle\bigcup\!\!\!\!\times_\gamma(\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma),$$

ここに γ を $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ の貼付弧と言う．さて元々は $\mathbb{C}$ 内にある A と B を π^{-1} により $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ に持ち上げて $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ に埋蔵する．このとき A と B が $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ の同一葉にあっても（即ち $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ を構成する $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma$ の2枚の写しの一方にのみ含まれている）別葉にあっても（即ち $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma$ の2枚の写しの夫々に別れて含まれている) 良いとする．$\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ 内の完閉集合 A のそれを含む $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ 内の開集合 $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B$ に関する変分2容量を $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B)$ と記し，同様に $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の完閉集合 A のそれを含む $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の開集合 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus B$ に関する変分2容量を $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}\setminus B)$ と記す (例えば [2] 等参照)．前者と後者の比較は応用上大変に重要である．同一の A と B に対し γ の取り方次第で前者が後者より大，又は，に等しい，又は，より小の何れも起こるが ([3], [4], [5] 等参照)，今回は写像 $\gamma\mapsto\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B)$ の値域を $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}\setminus B)$ の言葉で記述する事を試み次の結果を得た事を報告する ([6] 参照):

2葉球面上の容量不等式：　二つの互いに素な $\mathbb{C}$ 内の補集合連結非極完閉集合 A と B を，$\mathbb{C}$ 内の $A\cup B$ と素な貼付弧 γ による $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ の同一又は異なる葉に埋蔵するとき次の不等式が成立する：

$$\text{(2)}\qquad 0<\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B)<2\cdot\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}\setminus B).$$

ここで上記不等式の右辺の定数2は次の意味で最良である，即ち任意の $0<\tau<2$ に対して $\tau\cdot\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}\setminus B)<\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B)$ となる三つ揃え (A,B,γ) が存在する.

前半は $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus(A\cup B)$ の正則近似列を利用する方法，後半はタイヒミューラー極値領域 ([1] 等参照) を利用する方法で示す.

次に任意の整数 $n\geqq 2$ に対して $\gamma_{j-1}\cap\gamma_j=\emptyset$ $(2\leqq j\leqq n)$ の様に選んだ $\mathbb{C}$ 内の単純弧 γ_j $(1\leqq j\leqq n)$ の列 $\Gamma=\{\gamma_j\}_{1\leqq j\leqq n}$ を取り，$\widehat{\mathbb{C}}\setminus(\gamma_{j-1}\cup\gamma_j)$ を $\widehat{\mathbb{C}}\setminus(\gamma_j\cup\gamma_{j+1})$

に γ_j に沿って交差状に貼り合わせ $(1 \leqq j \leqq n, \gamma_0 = \gamma_{n+1} = \emptyset)$ て出来る n 葉球面 $\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma$ は (1) の一般化であり, $\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma$ 内に A と B を任意に埋蔵するとき (2) は

$$0 < \mathrm{cap}(A, \widehat{\mathbb{C}}_\Gamma \setminus B) < n \cdot \mathrm{cap}(A, \widehat{\mathbb{C}} \setminus B) \tag{3}$$

の如くに一般化出来るが, 不等式 (3) の右辺の定数 n の最良性は矢張り正しいと予想するものの $n = 2$ の場合と異なって全然証明の目途が立たず今の所完全な未解決問題である.

参 照 文 献

[1] L. V. AHLFORS: *Conformal Invariants: Topics in Complex Function Theory*, McGraw-Hill, 1973.

[2] J. HEINONEN, T. KILPELÄINEN, AND O. MARTIO: *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Oxford Univ. Press, 1993.

[3] M. NAKAI: *Dependance of Dirichlet integrals upon lumps of Riemann surfaces*, Proc. Japan Acad., Ser. A: Math. Sci., **81**(2005), 131-133.

[4] M. NAKAI: *Types of pasting arcs in two sheeted spheres* in *Potential Theory (Matsue 2004)*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2005 (To appear).

[5] M. NAKAI: *Existence of supercritical pasting arcs*, Kodai Math. Jour. (To appear).

[6] M. NAKAI: *Bounds in capacity inequalities for two sheeted spheres*, Preprint.

9 2つの領域のMartin核たちの商に対する挙動

平田 賢太郎（北海道大学理学部）

$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の原点を $\mathbf{0}$ と書き，$x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ と書く．$\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ を $\phi(\mathbf{0}') = 0$ なる Lipschitz 関数とし，$\Omega_\phi = \{(x', x_n) : x_n > \phi(x')\}$ とする．点 $e = (\mathbf{0}', 1)$ に極をもつ Ω_ϕ の Green 関数 $G_{\Omega_\phi}(\cdot, e)$ の原点付近での振る舞いは，Ω_ϕ の原点付近での形状を表す 2 つの積分

$$I^+ = \int_{\{|x'|<1\}} \frac{\max\{\phi(x'), 0\}}{|x'|^n} dx', \qquad I^- = \int_{\{|x'|<1\}} \frac{\max\{-\phi(x'), 0\}}{|x'|^n} dx'$$

の収束・発散で次の様になることが Burdzy(1987), Gardiner(1991), Carroll(2002) により調べられた．

- $I^+ < +\infty$ & $I^- = +\infty$ ならば，$\lim\limits_{t \to 0+} t^{-1} G_{\Omega_\phi}(te, e) = +\infty$ である．
- $I^+ = +\infty$ & $I^- < +\infty$ ならば，$\lim\limits_{t \to 0+} t^{-1} G_{\Omega_\phi}(te, e) = 0$ である．
- $I^+ < +\infty$ & $I^- < +\infty$ ならば，$0 < \lim\limits_{t \to 0+} t^{-1} G_{\Omega_\phi}(te, e) < +\infty$ である．

原点に極をもつ Ω_ϕ の Martin 核に対して類似の結果が成り立つだろうか？

定理 1. $K_{\Omega_\phi}(\cdot, \mathbf{0})$ で原点に極をもつ Ω_ϕ の Martin 核を表す．

① $I^+ < +\infty$ & $I^- = +\infty$ ならば，$\lim\limits_{t \to 0+} t^{n-1} K_{\Omega_\phi}(te, \mathbf{0}) = 0$ である．
② $I^+ = +\infty$ & $I^- < +\infty$ ならば，$\lim\limits_{t \to 0+} t^{n-1} K_{\Omega_\phi}(te, \mathbf{0}) = +\infty$ である．
③ $I^+ < +\infty$ & $I^- < +\infty$ ならば，$0 < \lim\limits_{t \to 0+} t^{n-1} K_{\Omega_\phi}(te, \mathbf{0}) < +\infty$ である．

注意 1. $I^+ = +\infty$ & $I^- = +\infty$ のときは，$t^{n-1} K_{\Omega_\phi}(te, \mathbf{0})$ の極限がゼロ，有限，無限の何れであるかは決定できない．実際，$\phi(x') = ax_1$ on $\{x' : x_1 \geq 0\}$, $= bx_1$ on $\{x' : x_1 \leq 0\}$ としたとき，

- $a < b$ ならば，$\lim\limits_{t \to 0+} t^{n-1} K_{\Omega_\phi}(te, \mathbf{0}) = 0$ である．
- $a = b$ ならば，$0 < \lim\limits_{t \to 0+} t^{n-1} K_{\Omega_\phi}(te, \mathbf{0}) < +\infty$ である．
- $a > b$ ならば，$\lim\limits_{t \to 0+} t^{n-1} K_{\Omega_\phi}(te, \mathbf{0}) = +\infty$ である．

$K_{\Omega_\phi}(te,\mathbf{0})=t^{1-n}$ であること，積分 I^+,I^- の収束性が２つの差集合 $\Omega_\phi\setminus\{x_n>0\},\{x_n>0\}\setminus\Omega_\phi$ の極小尖細性と関係することを考慮すると，もっと一般に任意の２つの領域 Ω,D の Martin 核たちの商 $K_\Omega(\cdot,\eta)/K_D(\cdot,\xi)$ に対して極限を調べることは興味深いことである．$\Delta_1(\Omega)$ で Ω の極小 Martin 境界を表し，$\xi\in\Delta_1(\Omega)$ に対する Martin 核を $K_\Omega(\cdot,\xi)$ と書く．Ω の部分集合 E が $\xi\in\Delta_1(\Omega)$ で Ω-極小尖細であるとは，

$$ {}^{\Omega}\widehat{R}^{E}_{K_\Omega(\cdot,\xi)}\neq K_\Omega(\cdot,\xi) $$

であるときをいう．ここに，${}^{\Omega}\widehat{R}^{E}_{K_\Omega(\cdot,\xi)}$ は $K_\Omega(\cdot,\xi)$ の E への掃散である．極小尖細性により Martin コンパクト化 $\widehat{\Omega}$ に極小細位相がはいる．U を $\xi\in\Delta_1(\Omega)$ の極小細近傍とし，f を $U\cap\Omega$ 上の関数とする．f が ξ で Ω-極小細極限 l をもつとは，ξ で Ω-極小尖細な集合 E があって Martin 位相に関して

$$ \lim_{x\to\xi,\ x\in U\setminus E} f(x)=l $$

であるときをいう．このとき，$\mathrm{mf}_\Omega\text{-}\lim_{x\to\xi}f(x)=l$ と書く．$\mathrm{cl}_\Omega(E)$ で $\widehat{\Omega}$ における E の (Martin 位相に関する) 閉包を表す．

定理 2. Ω,D は $\Omega\cap D\neq\emptyset$ なる任意の領域とし，$\xi\in\Delta_1(\Omega)\cap\mathrm{cl}_\Omega(\Omega\cap D)$ と $\eta\in\Delta_1(D)\cap\mathrm{cl}_D(\Omega\cap D)$ とする．$\Omega\setminus D$ が ξ で Ω-極小尖細ならば，$K_D(\cdot,\eta)/K_\Omega(\cdot,\xi)$ は ξ で有限な Ω-極小細極限をもつ．更に，次が成り立つ．

① $D\setminus\Omega$ が η で D-非極小尖細ならば，$\underset{\Omega}{\mathrm{mf}}\text{-}\lim_{x\to\xi}K_D(x,\eta)/K_\Omega(x,\xi)=0$ である．

② $D\setminus\Omega$ が η で D-極小尖細で，η がある $\alpha>0$ に対して

$$ K_D(\cdot,\eta)-{}^{D}\widehat{R}^{D\setminus\Omega}_{K_D(\cdot,\eta)}=\alpha\bigl(K_\Omega(\cdot,\xi)-{}^{\Omega}\widehat{R}^{\Omega\setminus D}_{K_\Omega(\cdot,\xi)}\bigr)\quad \text{on }\Omega\cap D \tag{1} $$

を満たす点ならば，$0<\underset{\Omega}{\mathrm{mf}}\text{-}\lim_{x\to\xi}K_D(x,\eta)/K_\Omega(x,\xi)<+\infty$ である．

③ $D\setminus\Omega$ が η で D-極小尖細で，η が(1) を満たさない点ならば，$\underset{\Omega}{\mathrm{mf}}\text{-}\lim_{x\to\xi}K_D(x,\eta)/K_\Omega(x,\xi)=0$ である．

注意 2. $\Omega\setminus D$ が ξ で Ω-非極小尖細，$D\setminus\Omega$ が η で D-非極小尖細ならば，$K_D(\cdot,\eta)/K_\Omega(\cdot,\xi)$ の $\Omega\cap D$-極小細極限がゼロ，有限，無限の何れであるかは決定できない．注意 1 参照．

10 正値優調和関数の無限遠点での極限値について

柳下　稔　千葉大学・自然科学研究科

この講演では，シリンダー領域上の正値優調和な関数を取り上げ，無限遠点における挙動がある種の除外集合によって特徴付けられることを見る．具体的には，無限遠点で minimally thin な集合を考えることによって除外集合が特徴付けられることが，Martin space に対する Fatou bondary limit theorem によって知られており，更に，無限遠点で rarefied な集合を考えることによって，除外集合が特徴付けられることが宮本 [2] によって知られている．一方，半空間上の正値優調和な関数の無限遠点における振る舞いに関しては，相川 [1] によって，無限遠点での a-minimally thinness $(0 \leq a \leq 1)$ の概念 ($a = 1$ の場合が minimal thinness, $a = 0$ の場合が rarefiedness) が導入されて，除外集合が特徴付けられた．これらの結果を受け，この講演では，シリンダー領域に関して無限遠点で a-minimally thin $(0 \leq a \leq 1)$ な集合を定義し，シリンダー上の正値優調和な関数の無限遠点における挙動を a-minimally thin な集合によって特徴付け，これまでの結果，特に宮本 [2] によって得られた結果の拡張を与えることを報告する．

D を $\mathbf{R}^{n-1}$ $(n \geq 2)$ 上の滑らかな境界をもつ有界領域とし，

$$\Gamma_n(D) = \{(X, y) \in \mathbf{R}^n; X \in D, -\infty < y < +\infty\}$$

をシリンダーと呼ぶ．$\Gamma_n(D)$ の Martin 境界 Δ は集合 $\partial\Gamma_n(D) \cup \{+\infty, -\infty\}$ であり，$\Gamma_n(D) \times (\Gamma_n(D) \cup \Delta)$ 上の Martin type 核を $K(P, Q)$ で表すとする．

任意の $a(0 \leq a \leq 1)$ に対して，$g_a(P) = K(P, +\infty)^a$ $(P \in \Gamma_n(D))$ とする．有界集合 $E \subset \{P = (X, y) \in \Gamma_n(D);\ y \geq 0\}$ に対して，集合 E に関する g_a の regularized reduced function を $\hat{R}^E_{g_a}$ で表すとき，ある $\overline{\Gamma_n(D)}$ ($\Gamma_n(D)$ の閉包) 上の測度 λ^a_E で，

$$\hat{R}^E_{g_a}(P) = \int_{\overline{\Gamma_n(D)}} K(P, Q) d\lambda^a_E(Q) \quad (P \in \Gamma_n(D))$$

となるものが唯一存在する．

集合 $E \subset \Gamma_n(D)$ が無限遠点で a-minimally thin であるとは，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^a_{E_k}(\overline{\Gamma_n(D)}) e^{-k\sqrt{\tau_D}(a+1)} < +\infty$$

を満たすときをいう．ここに，$E_k = \{P = (X, y) \in E; k \leq y < k+1\}$ とし，τ_D は D の境界で 0 となる関数に対するディリクレ問題の最小の正の固有値とする．

$-1 < \eta \leq 1$ とする．$\Gamma_n(D)$ 上で定義された正値優調和関数 u で，いま Martin type 核による u の表現測度を μ とするとき，条件 $\mu(\{+\infty\}) = 0$,

$$\int_U e^{-\sqrt{\tau_D}(1+\eta)y'} d\mu(X', y') < +\infty$$

(ここで, $U = \{P = (X, y) \in \Gamma_n(D) \cup \partial\Gamma_n(D);\ y \geq 0\}$ とする) を満足するものの全体を $\mathcal{F}_\eta$ で表す.

$-1 < \eta \leq 1$ とし, $\Gamma_n(D)$ 上の関数 $h_{\eta,a}$ を

$$h_{\eta,a}(P) = K(P, +\infty)^a e^{\sqrt{\tau_D}(\eta - a)y} \quad (P = (X, y) \in \Gamma_n(D))$$

によって定める.

定理. $-1 < \eta \leq 1$ とする. $u(P) \in \mathcal{F}_\eta$ ならば, $+\infty$ で a-minimally thin であるような集合 $E \subset \Gamma_n(D)$ で

$$\lim_{|P| \to +\infty,\ P \in \Gamma_n(D) \setminus E} \frac{u(P)}{h_{\eta,a}(P)} = 0$$

となるものが存在する.

逆に, 集合 $E \subset \Gamma_n(D)$ が非有界, $+\infty$ で a-minimally thin ならば, ある $u(P) \in \mathcal{F}_\eta$ で

$$\lim_{|P| \to +\infty,\ P \in E} \frac{u(P)}{h_{\eta,a}(P)} = +\infty.$$

となるものが存在する.

上記定理を $\eta = 1$, $a = 0$ として用いることにより, 以下の結果を与える.

系 (宮本 [2, Theorem 3]). $u(P)$ をシリンダー上の正値優調和な関数とする. このとき, $+\infty$ で rarefied であるような集合 $E \subset \Gamma_n(D)$ で

$$\lim_{|P| \to +\infty,\ P \in \Gamma_n(D) \setminus E} \frac{u(P) - c_{+\infty}(u) K(P, +\infty)}{e^{\sqrt{\tau_D} y}} = 0$$

となるものが存在する. ここに, $c_{+\infty}(u) = \inf_{\Gamma_n(D)} u(P)/K(P, +\infty)$ とする.

参考文献

[1] H. Aikawa, *On the behavior at infinity of non-negative superharmonic functions in a half space,* Hiroshima Math. J. **11**(1981), 425-441.

[2] I. Miyamoto, *Two criteria of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cylinder,* preprint.

11 Linear relations for p-harmonic functions

Hisayasu KURATA (Yonago National College of Technology)

Let $1 < p < \infty$. First we consider p-harmonic functions in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$. We define the p-Laplacian by

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Let D be a domain in $\mathbb{R}^n$. If $\Delta_p u = 0$ in D, then we say that u is p-harmonic in D. If $p \neq 2$, then the p-harmonicity is non-linear, i.e., the linear combination of p-harmonic functions need not be p-harmonic.

Let $\{u_1, \ldots, u_m\}$ be an m-tuple of p-harmonic functions in D. To avoid the trivial linear combination, we assume that $\{1, u_1, \ldots, u_m\}$ is linearly independent. Here 1 stands for the constant function. We say that $\{u_1, \ldots, u_m\}$ has a linear relation in D if every linear combination $\sum_{j=1}^m t_j u_j$ is p-harmonic in D. Also we say that $\{u_1, \ldots, u_m\}$ has a partial linear relation in D if $\sum_{j=1}^m t_j u_j$ is p-harmonic in D for some $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Theorem 1. *Let $n \geq 3$.*

(i) *Let $a, b \in \mathbb{R}^n$ be distinct points. Then $u_a = \log|x - a|$ and $u_b = \log|x - b|$ are n-harmonic and $\{u_a, u_b\}$ has a partial linear relation in $\mathbb{R}^n \setminus \{a, b\}$. More precisely, for $s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a linear combination $su_a + tu_b$ is n-harmonic if and only if $s + t = 0$.*

(ii) *Let $u_j(x) = |x|^{-2}x_j$ for $j = 1, \ldots, n$, where $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Then u_j is n-harmonic in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and the n-tuple $\{u_j\}_{j=1}^n$ has a linear relation in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Second we consider p-harmonic functions on a tree. Let $\mathcal{T} = (V, E, r)$ be a locally finite connected tree with the resistance r. We define the discrete derivative du and the discrete p-Laplacian $\Delta_p u$ for a function u on V by

$$du(x,y) = r(x,y)^{-1}(u(y) - u(x)),$$
$$\Delta_p u(x) = \sum_{\substack{y \in V \\ y \sim x}} |du(x,y)|^{p-2} du(x,y).$$

Let $D \subset V$. If $\Delta_p u = 0$ in D, then we say that u is p-harmonic in D.

Theorem 2. *Let $D \subset V$ and let $\{u_1, \ldots, u_m\}$ be an m-tuple of p-harmonic functions in D. Suppose that, for each $(x, y) \in E$ with $x \in D$ or $y \in D$, there is at most one j such that $du_j(x, y) \neq 0$. Then $\{u_1, \ldots, u_m\}$ has a linear relation in D.*

Example 1. *Let $\mathcal{T}$ be a tree formed by seven half lines meeting at a vertex x_0, i.e., $V = \{x_0\} \cup \bigcup_{i=1}^7 \{x_{i,k}\}_{k=1}^\infty$ and $E = \bigcup_{i=1}^7 \{(x_{i,k-1}, x_{i,k}), (x_{i,k}, x_{i,k-1})\}_{k=1}^\infty$, where $x_{i,0} = x_0$ for $i = 1, \ldots, 7$. Let r be an arbitrary resistance on E. We define a function u_i on V by*

$$u_i(x_0) = 0, \quad u_i(x_{j,l}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^l r(x_{j,k-1}, x_{j,k}) & \text{if } j = i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for $i = 1, \ldots, m$. *Then* $v_{i,j} = u_i - u_j$ *is p-harmonic in* V *for each* (i, j) *and every* p. *Moreover:*

(i) *The triple* $\{v_{1,2}, v_{3,4}, v_{5,6}\}$ *has a linear relation in* V.

(ii) *The six-tuple* $\{v_{1,2}, v_{1,3}, \ldots, v_{1,7}\}$ *has a partial linear relation in* V.

Let $\rho(x, y)$ be the length of the path joining x to y. Let $\deg(x)$ be the number of neighbors of x. Let A be a subset of V. We say that A is connected if any two vertices of A are joined by a path whose vertices are still in A. By $\overline{A}$ we denote the minimal connected set including A.

Theorem 3. *Suppose that* $\deg(x) \geq 2$ *for every* $x \in V$. *For* $a \in V$ *we define a function* h_a *on* V *by*

$$h_a(a) = 0, \qquad h_a(x) = \sum_{k=0}^{l-1} r(x_k, x_{k+1}) \prod_{j=0}^{k} (\deg(x_j) - 1)^{1/(1-p)},$$

where $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l = x\}$ *is the path joining* a *to* x. *Then the function* h_a *is p-harmonic in* $V \setminus \{a\}$. *If* A *is a finite subset of* V, *then* $\{h_a\}_{a \in A}$ *has a linear relation in* $V \setminus \overline{A}$. *If* $a, b \in V$ *with* $\rho(a, b) = 2$, *then* $\{h_a, h_b\}$ *has a partial linear relation in* $V \setminus \{a, b\}$.

We define the Dirichlet sum $D_p[u]$ of order p by

$$D_p[u] = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} r(x, y) |du(x, y)|^p.$$

Denote by $\mathbf{D}^{(p)}(\mathcal{T})$ the set of functions on V with finite Dirichlet sum of order p. Then $\mathbf{D}^{(p)}(\mathcal{T})$ is a Banach space with the norm $\|u\|_p = (D_p[u] + |u(x_0)|)^{1/p}$, where x_0 is a fixed vertex. Let L_0 be the set of functions on V with finite support. Also let $\mathbf{D}_0^{(p)}(\mathcal{T})$ be the closure of L_0 in $\mathbf{D}^{(p)}(\mathcal{T})$ with respect to the norm $\|\cdot\|_p$. A tree $\mathcal{T}$ is said to be of hyperbolic type of order p if $1 \notin \mathbf{D}_0^{(p)}(\mathcal{T})$. For details see Yamasaki [1].

Now we consider the discrete boundary value problem

$$(1) \qquad \Delta_p u = -\delta_a, \qquad u \in \mathbf{D}_0^{(p)}(\mathcal{T}),$$

where δ_a is the characteristic function of $\{a\}$. Yamasaki [2] showed that a solution u to (1) uniquely exists if and only if the tree is of hyperbolic type of order p. We call the solution u the p-Green function with pole at a and denote it by g_a. We then have the following result.

Theorem 4. *Suppose that the tree* $\mathcal{T}$ *is of hyperbolic type of order* p. *Then the p-Green function* g_a *is p-harmonic in* $V \setminus \{a\}$. *If* A *is a finite subset of* V, *then* $\{g_a\}_{a \in A}$ *has a linear relation in* $V \setminus \overline{A}$.

References

1. Maretsugu Yamasaki, *Parabolic and hyperbolic infinite networks*, Hiroshima Math. J. **7** (1977), no. 1, 135–146. MR MR0429377 (55 #2395)
2. ———, *Nonlinear Poisson equations on an infinite network*, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **23** (1989), 1–9. MR MR1044713 (92e:35068)

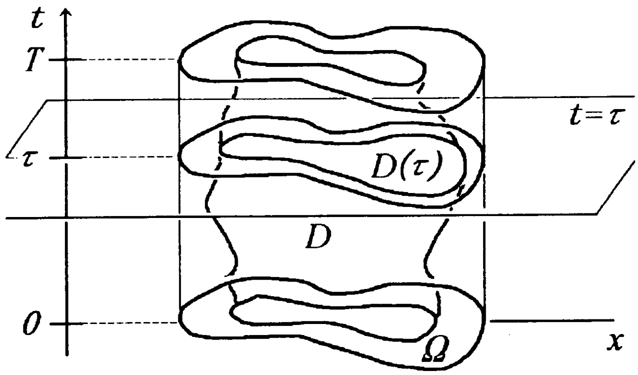
12 Reconstruction of Inclusion for the Inverse Boundary Value Problem of Non-stationary Heat Equation

大道 雄喜 (北大理院)
Hyeonbae Kang(ソウル大・数)
中村 玄 (北大理・数)

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ be a bounded domain. Γ which is boundary of Ω is C^2 if $n \geq 2$. Ω is considered as an isotropic heat conductive medium with heat conductivity:

$$\gamma(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega \setminus \overline{D(t)} \\ k & \text{in } D(t) \end{cases} \qquad i.e. \qquad \gamma(x,t) = 1 + (k-1)\chi_{D(t)}$$

for each $0 \leq t \leq T$ with $0 < T < \infty$. Here $k > 0$ is a constant such that $k \neq 1$, $D(t)$ is a bounded domain with C^2 boundary $\partial D(t)$ such that $\overline{D(t)} \subset \Omega$, $\Omega \setminus \overline{D(t)}$ is connected, the dependency of $\partial D(t)$ on $t \in [0,T]$ is C^1 and $\chi_{D(t)}$ is the characteristic function of $D(t)$. The two dimensional figure of Ω and $D := \bigcup_{0 \leq t \leq T} D(t) \times \{t\}$ is given below.



We will use the following notations in this note. For any $E \subset \mathbb{R}^n$ (or $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$) and $T > 0$, we denote $E_T := E \times (0,T)$.

We also use the standard notation $H^{p,q}(Q)$ for the Sobolev space when Q is either an open set in $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ or its lateral boundary $\partial_x Q := \partial Q \cap \mathbb{R}^n_x$, where $p \in \mathbb{R}$ and $q \in \mathbb{R}$ represent the L^2 regularity in x or $\sigma \in \partial_x Q$ and L^2 regularity in t, respectively. We also use the notation $H_0^{p,q}(Q) := \{u \in H^{p,q}(Q) : u|_{\partial_x Q} = 0\}$ and $W(\Omega_T) := \{u \in H^{1,0}(\Omega_T) : \partial_t u \in L^2((0,T) : (H^1(\Omega))^*)\}$ for the former case. Of course we have to be aware of some necessary conditions on Q, p, q.

Now, we consider the boundary value problem:

$$(MP) \quad \begin{cases} (P_D u)(x,t) := \partial_t u(x,t) - \mathrm{div}\big(\gamma(x,t)\nabla_x u(x,t)\big) = 0 & \text{in } \Omega_T \\ \partial_\nu u(x,t) = f(x,t) \quad \text{on } \Gamma_T, \quad u(x,0) = 0\,. \end{cases}$$

The physical meaning of u and f are the temperature and heat flux, respectively.

Theorem(Unique Solvability)
For given $f \in H^{-\frac{1}{2},0}(\Gamma_T)$, there exists a unique solution $u = u(f) \in W(\Omega_T)$ to (MP).

Next, we define the Neumann to Dirichlet map Λ_D as follow.

Definition(Neumann-to-Dirichlet map)
Let $u(f)$ be the solution to (MP). Define $\Lambda_D : H^{-\frac{1}{2},0}(\Gamma_T) \to H^{\frac{1}{2},0}(\Gamma_T)$ by

$$\Lambda_D(f) := u(f) \quad \text{on } \Gamma_T.$$

The measurement Λ_D is to measure the temperature induced from inputting current or heat flux infinitely many times.

Now, we consider the inverse problems:

(IP) **Suppose k, D are unknown. Reconstruct D from Λ_D.**

Our main theorem is the following.

Theorem
If $n = 1$, there is a reconstruction procedure for the inverse problem for (IP) under some additional condition. The details of the reconstruction procedure will be given in my talk.

The uniqueness and stability of the identification are known. See [1] and [2], respectively. However, the reconstruction has not been known. For the reconstruction, we tied to develop the analogue of probe method known for elliptic inverse problem. This is the first attempt to study the reconstruction for the inverse boundary value problem for non-stationary heat equation.

References

[1] A. Elayyan and V. Isakov, On uniqueness of recovery of the discontinuous conductivity coefficient of a parabolic equation, SIAM. J. Math. Anal. 28 No.1 49-59 (1997).

[2] M. Di Crist, L. Rondi and S. Vessella, oral communication.

13 The Bounded Integration Operators With Closed Range

米田　力生　　(小樽商科大学)

空間 $\mathcal{B}_\alpha$ は

$$\| f \|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z) < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする. $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ は the Bloch space と呼ばれる. $dA(z)$ は D 上の normalized area measure とする.

$\alpha > -1$ に対して, the weighted Dirichret space D_p^α は

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|^p(\alpha+1)dA(z) < +\infty$$

を満たす D 上の解析関数全体とする. $\alpha = 1$ かつ $p = 2$ のとき, $D_2^1 = H^2$ は the Hardy space になる. $\alpha = 2$ かつ $p = 2$ のとき, $D_2^2 = L_a^2$ は the Bergman space になる.

$\alpha > 0$ のとき, D の部分集合 Γ が *sampling set for* $\mathcal{B}_\alpha$ と呼ばれるのは, *there exists a positive constant* $C > 0$ *such that*

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| \leq C \sup_{z\in\Gamma}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|,$$

for all $f \in \mathcal{B}_\alpha$ を満たすときである.

一般に X を Banach spaces とし, T を linear operator from X into X とする. そのとき, T は 次を満たすならば, bounded below on X と呼ばれる : $\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$ and positive constants $C > 0$.

D 上の解析関数 g に対して, I_g は次のように定義される:

$$I_g(f)(z) = \int_0^z g(\zeta)f'(\zeta)d\zeta + f(0).$$

この研究では, この作用素がいつ L_a^2 上で bounded below になるのかに関する研究をし, 以下の結果が得られた :

Theorem 1. *Suppose that* $g \in H^\infty$. *Then there is a constant* $k > 0$ *such that*

$$\int_D |f'(z)|^2|g(z)|^2(1-|z|^2)^2 dA(z) \geq k \int_D |f'(z)|^2(1-|z|^2)^2 dA(z)$$

for all $f \in L_a^2$ *if and only if there exists a positive constant* $\epsilon > 0$ *such that* $\{z \in D, |g(z)| \geq \epsilon\}$ *is a sampling set for* $\mathcal{B}$.

References

[1] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.133,5(2004), 1371-1377.

[2] H.Hedenmalm and B.Korenblum and K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York.

[3] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[4] R.Yoneda, Multiplication Operators, Integration Operators And Companion Operators On Weighted Bloch Spaces, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[5] R.Yoneda, Pointwise multipliers from $BMOA^{\alpha}$ to the α-Bloch space, Complex Variables Vol.49,No.14, pp1045-1061.

[6] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.

[7] R.Yoneda, Essential norms of Integration operators and Multipliers on weighted Bloch spaces, in preprint.

14 Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces

鈴木 紀明　名古屋大・多元数理
西尾 昌治　大阪市大・理
山田 雅博　岐阜大・教育

We consider the parabolic Bergman space

$$\boldsymbol{b}^p_\alpha := \{u \in L^p(\mathbf{R}^{n+1}_+) | L^{(\alpha)}u = 0\},$$

where $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha \leq 1$ and

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^\alpha \quad \left(\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$$

is the parabolic operator on the upper half space $\mathbf{R}^{n+1}_+$ of order α. The orthogonal projection from $L^2(\mathbf{R}^{n+1}_+)$ to $\boldsymbol{b}^2_\alpha$ is an integral operator by a kernel R_α, called the α-parabolic Bergman kernel (see [2]). Then for a positive measure μ on the upper half space $\mathbf{R}^{n+1}_+$, we can discuss the Toeplitz operator defined by

$$(T_\mu u)(X) := \int R_\alpha(X,Y)u(Y)d\mu(Y).$$

In [3], authors treat the case where μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure V, and discuss the condition that T_μ be bounded on $\boldsymbol{b}^2_\alpha$, relating with the condition that μ be the Carleson type measure. In this paper, we generalize this result to consider a condition that T_μ be a bounded operator from $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ to $\boldsymbol{b}^q_\alpha$, where $1 \leq p \leq q < \infty$. B. R. Choe, H. Koo and H. Yi discuss the Toeplitz operators for the harmonic Bergman spaces on the upper half space. We remark that for $0 < \alpha < 1$, $L^{(\alpha)}$ is a non-local operator, which is the essential difference from the Laplacian Δ.

DEFINITION 1. Let μ be a positive Borel measure on $\mathbf{R}^{n+1}_+$ and p, q be positive numbers. Then μ is said to be a (p,q)-Carleson measure with respect to $L^{(\alpha)}$ if there exists a constant $C > 0$ such that

$$\left(\int |u(X)|^q d\mu(X)\right)^{1/q} \leq C\left(\int |u(X)|^p dV(X)\right)^{1/p}$$

for all $L^{(\alpha)}$-harmonic functions u on $\mathbf{R}^{n+1}_+$.

Theorem 1. *Let $1 \leq p \leq q < \infty$ and $\mu \geq 0$ be a Borel measure on $\mathbf{R}^{n+1}_+$. Then μ is a (p,q)-Carleson measure if and only if there exists a constant $C > 0$ such that the inequality*

$$\mu(Q^{(\alpha)}(x,t)) \leq Ct^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{q}{p}}$$

holds for all $(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}_+ = \boldsymbol{R}^n \times (0,\infty)$. Here

$$Q^{(\alpha)}(x,t) := \{(y_1, \cdots, y_n, t) | t \leq s \leq 2t, |y_j - x_j| \leq 2^{-1}t^{1/2\alpha}, j = 1, \cdots, n\}.$$

Remark 1. In this case, the condition in Theorem 1 depends only on the ratio p/q. Then we may call μ a τ-Carleson measure, simply, where $0 < \tau := p/q \leq 1$.

For an integer $m \geq 0$, putting $c_m = (-2)^m/m!$, we define a modified kernel by

$$R_\alpha^m(X, Y) = R_\alpha^m(x, t; y, s) := c_m s^m \frac{\partial^m}{\partial s^m} R_\alpha(x, t; y, s).$$

Here and we use the convention $R_\alpha^0 = R_\alpha$.

Definition 2. Let $m \geq 0$ be an integer and $\mu \geq 0$ be a Borel measure on $\mathbf{R}_+^{n+1}$. For $Y = (y, s) \in \mathbf{R}_+^{n+1}$, we put

$$\hat{\mu}_\alpha(Y) := \frac{\mu(Q^{(\alpha)}(Y))}{V(Q^{(\alpha)}(Y))} \quad \text{and} \quad \tilde{\mu}_{\alpha,m}(Y) := \frac{\int R_\alpha^m(X, Y)^2 d\mu(X)}{\int R_\alpha^m(X, Y)^2 dV(X)}.$$

Theorem 2. *For $1 < q < \infty$ and $1 \leq p \leq q$, put $\tau := \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-1} \leq 1$, let $m \geq 0$ be an integer such that $m > \left(\frac{n}{2\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right)$ and let $\mu \geq 0$ a Borel measure on $\mathbf{R}_+^{n+1}$ satisfying that*

$$\int (1 + t + |x|^{2\alpha})^{-\beta} d\mu(x, t) < \infty$$

for some $\beta \in \boldsymbol{R}$. Then the following statements are equivalent:

(1) *The Toeplitz operator $T_\mu : \boldsymbol{b}_\alpha^p \to \boldsymbol{b}_\alpha^q$ is bounded;*

(2) *μ is a τ-Carleson measure with respect to α-parabolic Bergman spaces;*

(3) *$\hat{\mu}_\alpha(x, t) \leq C t^{\left(\frac{n}{2\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ on $\mathbf{R}_+^{n+1}$ for some constant $C > 0$;*

(4) *$\tilde{\mu}_{\alpha,m}(x, t) \leq C t^{\left(\frac{n}{2\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ on $\mathbf{R}_+^{n+1}$ for some constant $C > 0$.*

References

[1] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, Positive Toeplitz operators between the harmonic Bergman spaces, Potential Analysis, 17 (2002), 307–335.

[2] M. Nishio K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., 42 (2005), 133–162.

[3] M. Nishio and M. Yamada, Carleson type measures on parabolic Bergman spaces, to appear in J. Math Soc. Japan.

特別講演

非線形ディリクレ問題

小野　太幹（福山大学）

§1. 序論

古典的なポテンシャル論はラプラスの方程式

$$-\mathrm{div}(\nabla u) = 0$$

の解に関する議論である．2 階楕円型線形偏微分方程式に対して、古典的なポテンシャル論と同様の理論が展開できることはよく知られている．1980 年代ごろから，2 階楕円型非線形偏微分方程式，いわゆる p-ラプラス方程式（$1 < p < \infty$）:

$$-\mathrm{div}(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)) = 0$$

それを一般化した方程式：

$$(\mathrm{E}_0) \qquad -\mathrm{div}\mathcal{A}(x, \nabla u(x)) = 0$$

に対するポテンシャル論的研究がフィンランド学派の人々を中心に進められてきた．ここで，$\mathcal{A}(x,\xi)$: $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ ($N \geq 2$) は重み $w(x)$ 付き増大条件 $\mathcal{A}(x,\xi)\cdot\xi \approx w(x)|\xi|^p$ を満たす写像である．また, 非負関数 $w(x)$ には, 解の滑らかさを得るために, ある条件を与える（[**HKM**] 参照）．p-ラプラス方程式は, $p=2$ のときラプラスの方程式である．さらに，p-ラプラス方程式は，p-ディリクレ積分

$$\int |\nabla u|^p dx$$

に対する変分問題のオイラー方程式である．もし u が p-ラプラス方程式の解で λ, τ が定数ならば，$\lambda u + \tau$ は p-ラプラス方程式の解となる．

方程式 (E_0) に，t について単調増加な関数 $\mathcal{B}(x,t)$: $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を加えた方程式

$$(\mathrm{E}) \qquad -\mathrm{div}\,\mathcal{A}(x,\, \nabla u(x)) + \mathcal{B}(x,\, u(x)) = 0$$

に対するポテンシャル論的研究が [**MO1**], [**MO2**], [**MO3**] などにある．次の方程式が例である．

$$-\mathrm{div}\,(w(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)) + b(x)|u(x)|^{p-2}u(x) = 0$$

ここで，$b(x)$ は，$b(x)/w(x)$ が局所有界であるような非負可測関数である．方程式 (E) に対しては，方程式 (E_0) の場合と異なり, 定数関数が方程式の解であることや，解の定数倍が解であることが保証されない．(上記の例では定数関数や解の定数倍が解であるが，[**MO1**], [**MO2**], [**MO3**] では定数関数や解の定数倍が解である保証がないという枠組みで議論している.)

一方，1990 年代後半から，測度付き距離空間上の非線形ポテンシャル論が盛んに研究されている．

§2. $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-調和関数

Ω を $\mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ の開部分集合とし、 $1 < p < \infty$ とする.

$\mathcal{A}(x,\xi)$ を次の 4 条件を満たす $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^N$ への写像とする：

(A1) 可測連続性：殆どすべての $x \in \mathbf{R}^N$ に対し $\mathcal{A}(x,\cdot)$ は $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^N$ への連続写像であり，又すべての $\xi \in \mathbf{R}^N$ に対し $\mathcal{A}(\cdot,\xi)$ は $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}^N$ への可測写像である；

(A2) 正定値性：ある正定数 α_1 があって，殆どすべての x とすべての ξ に対して

$$\mathcal{A}(x,\xi)\cdot\xi \geq \alpha_1 w(x)|\xi|^p;$$

(A3) 有界性：ある定数 $\alpha_2 \geq \alpha_1$ があって，殆どすべての x とすべての ξ に対して

$$|\mathcal{A}(x,\xi)| \leq \alpha_2 w(x)|\xi|^{p-1};$$

(A4) 強単調性：殆どすべての x とすべての $\xi_1 \neq \xi_2$ に対して

$$\big(\mathcal{A}(x,\xi_1) - \mathcal{A}(x,\xi_2)\big)\cdot\big(\xi_1 - \xi_2\big) > 0.$$

$\mathcal{B}(x,t)$ を次の 3 条件を満たす $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^N$ への写像とする：

(B1) 可測連続性：殆どすべての $x \in R^n$ に対し $\mathcal{B}(x,\cdot)$ は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への連続写像であり，又すべての $t \in \mathbf{R}$ に対し $\mathcal{B}(\cdot,t)$ は $\mathbf{R}^N$ から $\mathbf{R}$ への可測写像である；

(B2) 有界性：任意の有界開集合 G に対して，ある正定数 $\alpha_3(G)$ があって，殆どすべての x とすべての t に対して

$$|\mathcal{B}(x,t)| \leq \alpha_3(G)w(x)(|t|^{p-1}+1);$$

(B3) 単調性：殆どすべての x とすべての t に対して，$t \mapsto \mathcal{B}(x,t)$ は非減少である.

注意 2.1. [HKM] で扱われている方程式 (E_0) に対するポテンシャル論では,

(A5) 斉次性：殆どすべての x とすべての $t \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ に対して,

$$\mathcal{A}(x,\lambda\xi) = \lambda|\lambda|^{p-2}\mathcal{A}(x,\xi)$$

を仮定して議論している.

非負な測度 $\mu : d\mu(x) = w(x)dx$ と開集合 Ω に対し, 重み付きソボレフ空間 $H^{1,p}(\Omega;\mu)$, $H_0^{1,p}(\Omega;\mu)$, $H_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega;\mu)$ を考える (詳しくは [HKM] 参照).

上記の $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を使って，非線形楕円型方程式

$$(\mathrm{E}) \qquad -\operatorname{div}\mathcal{A}(x,\,\nabla u(x)) + \mathcal{B}(x,\,u(x)) = 0$$

を考え，関数 $u \in H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ が

$$\int_\Omega \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi dx + \int_\Omega \mathcal{B}(x,u)\varphi dx = 0 \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \tag{2.1}$$

を満たすとき，u は Ω で方程式 (E) の（弱）解であるという．また，関数 $u \in H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mu)$ が

$$\int_\Omega \mathcal{A}(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi dx + \int_\Omega \mathcal{B}(x,u)\varphi dx \geq 0 \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \geq 0) \tag{2.2}$$

を満たすとき，u は Ω で方程式 (E) の（弱）優解であるという．方程式 (E) の（弱）劣解も同様にして定義される．

命題 2.1. (Comparison principle I) [**O1**; Lemma 3.6]　Ω を有界な開集合とし，$u \in H^{1,p}(\Omega;\mu)$ を Ω で (E) の優解，$v \in H^{1,p}(\Omega;\mu)$ を Ω で (E) の劣解とする．もし $\min(u-v,0) \in H_0^{1,p}(\Omega;\mu)$ ならば, Ω 内殆どいたるところで $u \geq v$ が成り立つ．

方程式 (E) の連続な（弱）解を $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-調和関数と呼ぶ．

開集合 Ω が $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-正則であるとは，$\Omega$ が有開集合で，$\partial\Omega$ の各点で連続な任意の $\theta \in H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N;\mu)$ に対し，$\partial\Omega$ 上 $h=\theta$ で $h \in C(\overline{\Omega}) \cap H^{1,p}(\Omega;\mu)$ であるような Ω で $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-調和な関数 h が一意に存在することである．

命題 2.2. [**MO1**; Theorem 1.4], [**HKM**; Theorem 6.31]　すべての球とすべての多面体は $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-正則である．

§3. $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-優調和関数

$(\mathcal{A},\mathcal{B})$-優調和関数とは，次の 2 条件を満たす下半連続関数 $u:\Omega \to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ のことである．

(1) Ω 内の稠密な集合上で有限値をとる．
(2) 各開集合 $G \Subset \Omega$ と G 内 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-調和である各 $h \in C(\overline{G})$ に対して, ∂G 上 $u \geq h$ ならば G 内で $u \geq h$ が成り立つ．

$(\mathcal{A},\mathcal{B})$-劣調和関数も同様にして定義される．

注意 3.1. [**HKM**] で扱われている方程式 (E_0) に対するポテンシャル論では，上の (1) を

(1)'　Ω の各成分で $u \not\equiv \infty$

として $\mathcal{A}$-優調和関数を定義し，結果として上の (1) を得る．([**HKM**; Lemma 7.10] 参照.)

命題 3.1. (Comparison principle II) [**MO1**; Theorem 2.1]　u を Ω で $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-優調和，$v$ を Ω で $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-劣調和とする．もし，すべての $\xi \in \partial^a\Omega$ に対し

$$\liminf_{x\to\xi}\{u(x)-v(x)\} \geq 0$$

が成り立つならば, Ω 内 $u \geq v$ が成り立つ. ここで, $\partial^a\Omega$ は $\mathbf{R}^N$ の 1 点コンパクト化における Ω の境界である.

命題 3.2. 関数 u が Ω で $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-調和であることと u が Ω で $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和かつ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-劣調和であることは同値である.

命題 3.3. (Poisson modification) [**MO1**; Proposition 2.3] Ω を開集合とし, $G \Subset \Omega$ を $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-正則な開集合とする. Ω 上の $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和関数 u に対して,

$$u_G = \sup\{h \in C(\overline{G}) : \partial G \text{ 上で } h \leq u, \quad h \text{ は } G \text{ で } (\mathcal{A}, \mathcal{B})\text{-調和}\}$$

と定義する. このとき,

$$P(u, G)(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus G \\ u_G(x), & x \in G \end{cases}$$

は Ω で $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和, G で $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-調和, Ω で $P(u, G) \leq u$ である.

命題 3.4. [**MO1**; Corollary 4.1] (E) のすべての優解は $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和な代表元をもつ.

一般に, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和関数はいつも優解であるとは限らない. ([**HKM**; Example 7.47] 参照).

命題 3.5. Ω を開集合とし, u を Ω 上の $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和関数とする. もし Ω 内の殆どいたるところで $u \leq g$ を満たす $g \in H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mu)$ が存在すれば, u は Ω で (E) の優解である.

Ω を開集合とする. すべての $k > 0$ に対し $\min(u, k) \in H^{1,p}_{loc}(\Omega; \mu)$ であるような Ω 上の関数 u に対し,

$$Du = \lim_{k \to \infty} \nabla \min(u, k).$$

と定義する. 命題 3.5 によって, 任意の $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和関数 u に対し Du は定義される.

定理 3.1. [**O2**] Ω を開集合とし, u を Ω 上の $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和関数とする. このとき, すべての $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し次式を満たす Ω 上のラドン測度 ν が存在する.

$$\int_\Omega \mathcal{A}(x, Du) \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_\Omega \mathcal{B}(x, u)\varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \, d\nu$$

右辺に測度を含む次の方程式を考える.

$$(\mathrm{E}_\nu) \qquad -\operatorname{div} \mathcal{A}(x, \nabla u(x)) + \mathcal{B}(x, u(x)) = \nu$$

定理 3.2. [**O2**] Ω を有界開集合とし, ν を Ω 上の有限ラドン測度とする. このとき, 方程式 (E_ν) を満たし, すべての $k > 0$ に対し $\min(u, k) \in H_0^{1,p}(\Omega; \mu)$ であるような Ω 上の $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-優調和関数 u が存在する.

§4. $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-調和関数に対する PWB-法

ポテンシャル論の中心的な問題はディリクレ問題である．必ずしも滑らかでない境界をもつ領域に対するディリクレ問題の解法には，今日 Perron-Wiener-Brelot 法（PWB-法）と呼ばれる方法が有効である．

f を $\partial\Omega$ 上の実数値関数とし，

$$\mathcal{U}_f = \left\{ u : \begin{array}{l} \Omega\text{で } (\mathcal{A},\mathcal{B})\text{-優調和}, \\ \text{すべての } \xi \in \partial\Omega \text{に対し} \quad \liminf_{x\to\xi} u(x) \ge \psi(\xi) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{L}_f = \left\{ v : \begin{array}{l} \Omega\text{で } (\mathcal{A},\mathcal{B})\text{-劣調和}, \\ \text{すべての } \xi \in \partial\Omega \text{に対し} \quad \limsup_{x\to\xi} v(x) \le \psi(\xi) \end{array} \right\}$$

とする．もし，$\mathcal{U}_f$ と $\mathcal{L}_f$ がともに空集合ではないならば，$\overline{P}_f = \inf \mathcal{U}_f$ と $\underline{P}_f = \sup \mathcal{L}_f$ は Ω 内 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-調和で $\underline{P}_f \le \overline{P}_f$ である．もし，$\mathcal{U}_f$ と $\mathcal{L}_f$ がともに空集合ではなく，$\underline{P}_f = \overline{P}_f$ ならば，f は $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-可解であるという．このとき，$P_f = \underline{P}_f = \overline{P}_f$ とかく．

問題 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-可解関数を特徴付けよ．

方程式 (E_0) に対する PWB-法についての議論は，**[LM]**, **[K]**, **[KM1]**, **[HKM]**, **[KM2]** などで扱われている．また，ロイデン境界上に連続関数を与えディリクレ問題を PWB-法によって議論することが，p-ラプラス方程式及び方程式 (E_0) に対しては **[T1]**, **[T2]**, **[N]**（これらはリーマン多様体上での議論）で，方程式 (E) に対しては **[MO1]**, **[MO2]** で扱われている．

§5. 距離空間上の非線形ディリクレ問題

$1 < p < \infty$ を固定する．$X = (X, d, \mu)$ を距離 d と正のボレル正則測度 μ を備える完備な距離空間とする．

X 上の非負ボレル可測関数 g が X 上の実数値関数 u の upper gradient であるとは，X 内の x と y を結ぶ長さ有限なすべての path に対して，

$$|u(x) - u(y)| \le \int_\gamma g \, ds \tag{5.1}$$

が成り立つことである．X 内の path の族 Γ の p-modulus を

$$\inf_\rho \int_X \rho^p \, d\mu$$

で定義する．ここで，下限は，Γ に属するすべての長さ有限な path γ に対し，

$$\int_\gamma \rho \, ds \ge 1$$

を満たすすべての非負ボレル可測関数 ρ 上でとる．ある性質が p-殆どすべての path に対して成り立つとは，その性質が成り立たないような path の集合の p-modulus が零であることをいう．もし，(5.1) が p-殆どすべての path γ に対して成り立つとき，g を u の p-weak upper gradient とよぶ．

$$\widetilde{N}^{1,p}(X)=\left\{u\in L^p(X)\ :\ \begin{array}{l} g\in L^p(X) \text{ である } u \text{ の } p\text{-weak upper gradient } g \\ \text{が存在する}\end{array}\right\}$$

と定義し，$u\in \widetilde{N}^{1,p}(X)$ に対し，

$$||u||_{\widetilde{N}^{1,p}(X)}=||u||_{L^p(X)}+\inf_g ||g||_{L^p(X)}$$

と定義する．ここで，下限は，u の すべての p-weak upper gradient 上でとる．$u\sim v$ を $||u-v||_{\widetilde{N}^{1,p}(X)}=0$ によって定義し，$N^{1,p}(X)=\widetilde{N}^{1,p}(X)/\sim$ とする．すべての $u\in N^{1,p}(X)$ は最小の p-weak upper gradient $g_u\in L^p(\Omega)$ をもつ（u のすべての p-weak upper gradient g に対し，μ-殆どいたるところ $g_u\leq g$ ）．p-容量を

$$C_p(E)=\inf_u ||u||_{N^{1,p}(X)}$$

によって定義する．ここで，下限は E 上 $u=1$ であるすべての $u\in N^{1,p}(X)$ 上でとる．ある性質が p-容量零の集合を除いて成り立つとき，" p-q.e. " とかく．$E\subset X$ に対し，

$$N_0^{1,p}(E)=\{u\in N^{1,p}(X)\ :\ C_p(\{x\in X\setminus E\ :\ u(x)\neq 0\})=0\}$$

と定義する．$\Omega\subset X$ を開集合とするとき，すべての $E\Subset\Omega$ に対し，$u\in N^{1,p}(E)$ ならば，$u\in N^{1,p}_{\mathrm{loc}}(E)$ とかく．($N^{1,p}(X)$ 等の性質は **[S1]** 参照.)

以下の 2 つの仮定を考える．

(I). 測度 μ は doubling property をもつとする： X 内の任意の開球 $B=B(x_0,r)=\{x\in X\,|\,d(x,x_0)<r\}$ に対して，

$$0<\mu(2B)\leq C\,\mu(B)$$

を満たす正定数 C が存在する．ここで，$2B=B(x_0,2r)$ である．

(II). X は弱 $(1,p)$-Poincaré 不等式を満たすとする：X 内のすべての開球 B, X 上のすべての可測関数 f，f のすべての upper gradient g に対して，

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f-f_B|\,d\mu\leq C(\text{dima B})\left(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\lambda B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

を満たす正定数 C と $\lambda\geq 1$ が存在する． ここで，$f_B=\frac{1}{\mu(B)}\int_B f\,d\mu$, $\lambda B=B(x_0,\lambda r)$ である．

関数 $u\in N^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が Ω で p-調和であるとは，u が Ω 内連続で, すべての開集合 $G\Subset\Omega$ とすべての $\varphi\in N_0^{1,p}(G)$ に対し，

$$\int_G g_u^p\,d\mu\leq \int_G g_{u+\varphi}^p\,d\mu$$

を満たすことである．もし u が p-調和で λ,τ が定数ならば，$\lambda u+\tau$ はp-調和となる．

$f \in N^{1,p}(X)$ とし, V を $C_p(X \setminus V) > 0$ である有界領域とするとき, V 内で p-調和で, $X \setminus V$ 上 $H_V f = f$ である $H_V f \in N^{1,p}(X)$ を f の V への p-調和拡張という. $f_1, f_2 \in N^{1,p}(X)$ が ∂V 上 $f_1 \leq f_2$ p-q.e. ならば, V 内 $H_V f_1 \leq H_V f_2$ が成り立つ（[S2] 参照）.

以上の設定の下での距離空間上のポテンシャル論が [S2], [BMS], [KiM1], [B1], [KiS], [BBS1], [BBS2] 等において展開されている. PWB-法によるディリクレ問題の可解性についての議論は [BBS2] で扱われている.

References

[B1] J. Björn, Boundary continuity for quasiminimizers on metric spaces, Illinois Math. J. **46**(2002), 383-403.

[B2] J. Björn, Approximation by regular sets in metric spaces, preprint.

[BBS1] A. Björn, J. Björn and N. Shanmugalingam, The Dirichlet problem for p-harmonic functions on metric measure spaces, J. Reine Angew. Math. (Crelle) **556** (2003), 173–203.

[BBS2] A. Björn, J. Björn and N. Shanmugalingam, The Perron method for p-harmonic functions in metric spaces, J. Differential Equations **195** (2003), 398–429.

[BMS] J. Björn, P. MacManus and N. Shanmugalingam, Fat sets and pointwise boundary estimates for p-harmonic functions in metric spaces, J. Anal. Math. **85** (2001), 339–369.

[C] J. Cheeger, Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 428-517.

[HKM] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, Clarendon Press, 1993.

[K] T. Kilpeläinen, Potential theory for supersolutions of degenerate elliptic equations, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 253–275.

[KM1] T. Kilpeläinen and J. Malý, Generalized Dirichlet problem in nonlinear potential theory, Manuscripta Math. **66** (1989), 25–44.

[KM2] T. Kilpeläinen and J. Malý, The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations, Acta Math. **172** (1994), 137-161.

[KiM1] J. Kinnunen and O. Martio, Nonlinear potential theory on metric spaces, Illinois Math. J. **46** (2002), 857-883.

[KiM2] J. Kinnunen and O. Martio, Potential theory of quasiminimizers, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 459-490.

[KiS] J. Kinnunen and N. Shanmugalingam, Regularity of quasi-minimizers on metric spaces, Manuscripta Math., **105** (2001) 401–423.

[KZ] S. Keith and X. Zhong, The Poincaré inequality is an open ended condition, preprint.

[LM] P. Lindqvist and O. Martio, Two theorems of N. Wiener for solutions of quasi-linear elliptic equations, Acta Math. **155** (1985), 153–171.

[MO1] F-Y. Maeda and T. Ono, Resolutivity of ideal boundary for nonlinear Dirichlet problems, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 561-581.

[MO2] F-Y. Maeda and T. Ono, Properties of harmonic boundary in nonlinear potential theory, Hiroshima Math. J. **30** (2000), 513-523.

[MO3] F-Y. Maeda and T. Ono, Perturbation theory for nonlinear Dirichlet problems, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 207-222.

[N] M. Nakai, Potential theory on Royden compactifications (Japanese), Bull. Nagoya Inst. Tech. **47** (1995), 171-191.

[O1] T. Ono, On solutions of quasi-linear partial differential equations $-\mathrm{div}\mathcal{A}(x,\nabla u)+\mathcal{B}(x,u)=0$, RIMS Kōkyūroku 1016 (1997), 146–165.

[O2] T. Ono, Superharmonic functions and differential equations involving measures for quasilinear elliptic operators with lower order terms, preprint.

[O3] T. Ono, Hölder continuity of solutions to quasilinear elliptic equations with measure data, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[T1] H. Tanaka, Harmonic boundaries of Riemannian manifolds, Nonlinear Analysis **14** (1990), 55–67.

[T2] H. Tanaka, Kuramochi boundaries of Riemannian manifolds, Potential Theory: proceedings of ICPT 90, 321–329, de Gruyter, 1992.

[S1] N. Shanmugalingam, Newtonian spaces: An extension of Sobolev spaces to metric measure spaces, Rev. Mat. Iberoam. **16** (2000), 243-279.

[S2] N. Shanmugalingam, Harmonic functions on metric spaces, Illinois J. Math. **45** (2001), 1021-1050.

15 フックス群の発散型・収束型の判定法

松崎克彦（お茶の水女子大学理学部）

A Fuchsian group Γ is a discrete group of orientation-preserving isometric automorphisms of the hyperbolic plane $(\mathbb{H}^2, \rho)$. We always assume that Γ is torsion-free. Then it acts on $\mathbb{H}^2$ properly discontinuously and freely. The unit disk $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$ with a conformal metric $2|dz|/(1-|z|^2)$ is a model of the hyperbolic plane and Γ acts on $\mathbb{B}^2$ as a group of Möbius transformations. The boundary S^1 of the model $\mathbb{B}^2$ is located at infinity of the hyperbolic plane and the action of Γ extends to S^1.

The Poincaré series of dimension s for a Fuchsian group Γ with respect to the origin $0 \in \mathbb{B}^2$ is defined by

$$P_s(\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s\rho(0, \gamma(0)))$$

and the *critical exponent of convergence* for Γ is defined by

$$\delta(\Gamma) = \inf \{s \geq 0 \mid P_s(\Gamma) < \infty\}.$$

We say that Γ is of *divergence type* if $P_{\delta(\Gamma)}(\Gamma) = \infty$ and of *convergence type* if $P_{\delta(\Gamma)}(\Gamma) < \infty$. For a Fuchsian group Γ, a probability measure μ on S^1 is said to be a Γ-invariant *conformal measure* of dimension s if $\mu(\gamma E) = \int_E |\gamma'|^s d\mu$ for any Borel measurable set E on S^1 and for any $\gamma \in \Gamma$.

For $s > \delta(\Gamma)$, consider the sum of the weighted Dirac measures $\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-s\rho(0, \gamma(0)))\delta_{\gamma(0)}$. Dividing it by the total mass, we have a probability measure on $\overline{\mathbb{B}^2}$. Then, taking $s \downarrow \delta(\Gamma)$, we have a weak limit of a subsequence of the measures. If Γ is of divergence type, this limit is a Γ-invariant conformal measure of dimension $\delta(\Gamma)$ and has the support on the limit set $\Lambda(\Gamma)$.

On the other hand, if Γ is of convergence type, we have to modify the weight $\exp(-s\rho(0, \gamma(0)))$ by using a continuous, non-decreasing function $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ that satisfies the following:

(1) The h-modified Poincaré series

$$P_s^h(\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h(\rho(0, \gamma(0))) \exp(-s\rho(0, \gamma(0)))$$

converges for $s > \delta(\Gamma)$ and diverges for $s \leq \delta(\Gamma)$;

(2) For every $\varepsilon > 0$, there exists r_0 such that $h(t + r) \leq e^{\varepsilon t} h(r)$ for all $r \geq r_0$ and $t > 0$;

(3) $h(r + t) \leq h(r)h(t)$ for all $r > 0$ and $t > 0$.

A function h satisfying these properties is called a *Patterson function* for Γ. It is known that a Patterson function exists for any Fuchsian group Γ and hence there is a Γ-invariant conformal measure of dimension $\delta(\Gamma)$ that has the support on the limit set $\Lambda(\Gamma)$ even if Γ is of convergence type. This is called the Patterson-Sullivan measure. See [4].

Fuchsian groups of divergence type are characterized as follows. See [4] and [5].

Proposition 1. *The following conditions are equivalent for a Fuchsian group Γ with $\delta(\Gamma) \geq 1/2$:*

(1) *Γ is of divergence type;*

(2) *Any Γ-invariant conformal measure of dimension $\delta(\Gamma)$ has full measure on the conical limit set of Γ;*

(3) *The λ-Green function does not exist on $R = \mathbb{H}^2/\Gamma$ for $\lambda = \delta(\Gamma)(1 - \delta(\Gamma))$.*

However, these properties are not described in terms of the hyperbolic geometric structure of $R=\mathbb{H}^2/\Gamma$. Our first theorem states a characterization given by the convergence of the Poincaré series for a subgroup Γ_E associated with an end E of R. Here an end is a connected component of the complement of a compact subsurface of R that is not relatively compact. The end subgroup Γ_E for E is the image of the fundamental group of E under a homomorphism $\pi_1(E)\to\pi_1(R)\cong\Gamma$ induced by the inclusion map.

Theorem 2. *A non-elementary Fuchsian group Γ is of divergence type if and only if, for every end E of $R=\mathbb{H}^2/\Gamma$ such that $\Gamma_E \subsetneqq \Gamma$, there exists a Patterson function h for Γ such that $P^h_{\delta(\Gamma)}(\Gamma_E)$ converges.*

This theorem is a consequence from known results: the necessary condition for Γ to be of divergence type is given in [3]; the sufficient condition is given in [1].

Let $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a canonical exhaustion of the Riemann surface R. Then each connected component of the complement of R_n is an end for every n. The corresponding sequence $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of finitely generated Fuchsian subgroups with $R_n=\mathbb{H}^2/\Gamma_n$ gives a strictly increasing sequence

$$\delta(\Gamma_1)<\delta(\Gamma_2)<\cdots<\delta(\Gamma_n)\nearrow\delta(\Gamma).$$

Hence we have a corollary to Thoerem 2.

Corollary 3. *If there exists $n\in\mathbb{N}$ such that, for every connected component E of $R-R_n$, the end subgroup Γ_E satisfies $\delta(\Gamma_E)\le\delta(\Gamma_n)$, then Γ is of divergence type. Equivalently, if Γ is of convergence type, then, for every $n\in\mathbb{N}$, there exists a connected component E of $R-R_n$ such that $\delta(\Gamma_E)>\delta(\Gamma_n)$.*

As an application of Theorem 2, we consider quasiconformally invariance for divergence and convergence types. It is known that they are quasiconformally invariant if $\delta(\Gamma)=1$. Actually, the invariance of divergence type is seen from the invariance of a property that $R=\mathbb{H}^2/\Gamma$ has no Green function. The invariance of $\delta(\Gamma)=1$ is proved in [2].

Proposition 4. *Let Γ be a Fuchsian groups such that $\delta(\Gamma)=1$ and Γ' is another Fuchsian group that is quasiconformally conjugate to Γ. If Γ is of divergence type then so is Γ', and if Γ is of convergence type then so is Γ'.*

Our second theorem asserts that there is no quasiconformally invariance for divergence and convergence types in general. To see this, the following sufficient condition for Γ to be of convergence type is useful, which is also a corollary to Theorem 2.

Lemma 5. *If there exists an end E of $R=\mathbb{H}^2/\Gamma$ such that the end subgroup Γ_E is properly contained in Γ but it is conformally conjugate to Γ, then Γ is of convergence type. More generally, if there exists a subgroup Γ' such that $\Lambda(\Gamma')\subsetneqq\Lambda(\Gamma)$ but $\Gamma'\cong\Gamma$, then Γ is of convergence type.*

By deforming this Fuchsian group Γ, we have the result mentioned above.

Theorem 6. *There exists an example of Fuchsian groups Γ of convergence type and Γ' of divergence type such that they are quasiconformally conjugate.*

References

1. K. Falk and P. Tukia, *A note on Patterson measures*, http://mathstat.helsinki.fi/reports/Preprint420.pdf.
2. J. Fernández and J. Rodríguez, *The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **15** (1990), 165–183.
3. K. Matsuzaki, *A remark on the critical exponent of Kleinian groups*, RIMS Kokyuroku **1065** (1998), 106-107.
4. P. Nicholls, *The ergodic theory of discrete groups*, LMS Lecture Note Series 143, Cambridge University Press, 1989.
5. D. Sullivan, *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*, J. Differential Geom. **25** (1987), 327–351.

16 極値的円板を含む向き付け不可能な双曲型閉曲面

Ernesto Girondo (Universidad Autónoma de Madrid)
中村 豪 (愛知工業大学)

S は種数 g の双曲型閉曲面とする。S が向き付け可能のとき g はハンドルの個数 $(g \geqq 2)$ であり, 向き付け不可能のとき g は叉帽の個数 $(g \geqq 3)$ である。S は単位円板 $\mathbb{D}$ を普遍被覆面にもつので, 計量が $\mathbb{D}$ 上の双曲計量から導かれる。

g を固定したとき, 種数 g の双曲型閉曲面に等長的に埋め込まれる円板の半径 R について C. Bavard は 次の不等式を得ている ([1]):

$$\cosh R \leqq \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{6-6\chi}}, \tag{1}$$

ここで χ は Euler の標数, すなわち, $\chi = 2-2g$ (向き付け可能のとき), $\chi = 2-g$ (向き付け不可能のとき) である。

S が (1) において等号の成り立つ半径の円板をもつとき, S を極値的と呼び, S に埋め込まれたこの円板を極値的円板と呼ぶ。向き付け可能の場合については, 各 $g \geqq 2$ に対して S が取り得る極値的円板の個数及び埋め込み位置等は求められている ($g \geqq 4$ のとき [2], $g=2$ のとき [3],[4], $g=3$ のとき [5])。本講演では向き付け不可能な場合について得られた結果を述べる。

主結果 1. 種数 $g \geqq \cancel{4}\,7$ の向き付け不可能な極値的閉曲面はただ一つの極値的円板をもつ。

主結果 2. 種数 $g=3$ の向き付け不可能な極値的閉曲面は, 同型を除いて 10 種類存在する。これらは高々 2 つの極値的円板をもち, その埋め込み位置が得られた。また, 自己同型群 $\mathrm{Aut}^{\pm}(S)$ が得られた。

曲面	極値的円板の中心	Aut$^{\pm}$
S_1	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{1}{4}\sqrt{-1+\sqrt{3}}\,(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))\right)$	$D_3\times\mathbb{Z}_2$
S_2	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{\sqrt{-1+\sqrt{3}}}{10-4\sqrt{3}}(\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3}))\right)$	$\mathbb{Z}_2$
S_3	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{1}{4}\sqrt{-1+\sqrt{3}}\,(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))\right)$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
S_4	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{1}{4}\sqrt{-1+\sqrt{3}}\,(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))\right)$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
S_5	$\pi(0)$	$\mathbb{Z}_2$
S_6	$\pi(0)$, $\pi\left(-\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}\right)$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
S_7	$\pi(0)$, $\pi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
S_8	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
S_9	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{1}{4}\sqrt{-1+\sqrt{3}}\,(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))\right)$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
S_{10}	$\pi(0)$, $\pi\left(\frac{1}{4}\sqrt{-1+\sqrt{3}}\,(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}))\right)$	$D_3\times\mathbb{Z}_2$

ここで π は $\mathbb{D}$ から各曲面の上への自然な射影である。また, 基本領域である双曲正12角形は, 中心を原点, 頂点の偏角を $(2n-1)\pi/12$ $(n=1,\cdots,12)$ としている。

参考文献

[1] C. Bavard, *Disques extrémaux et surfaces modulaires*, Ann. de la Fac. des Sciences de Toulouse V (1996), No. 2, 191-202.

[2] E. Girondo and G. González-Diez, *On extremal discs inside compact hyperbolic surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I (1999), 57-60.

[3] E. Girondo and G. González-Diez, *Genus two extremal surfaces: extremal discs, isometries and Weierstrass points*, Israel J. Math. 132 (2002), 221-238.

[4] G. Nakamura, *The number of extremal disks embedded in compact Riemann surfaces of genus two*, Sci. Math. Japon 56 (2002), no. 3, 481-492.

[5] G. Nakamura, *Extremal disks and extremal surfaces of genus three*, Kodai Math. J. 28 (2005), no. 1, 111-130.

17 Jørgensen numbers of Kleinian groups

Makito Oichi (Shizuoka University)
Hiroki Sato (Shizuoka University)

In 1976 Jørgensen gave the following important theorem called Jørgensen's inequality theorem.

THEOREM A (**Jørgensen [1]**). Suppose that the Möbius transformations A and B generate a non-elementary discrete group. Then

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1.$$

The lower bound 1 is best possible.

DEFINITION 1. Let A and B be Möbius transformations. The *Jørgensen number* $J(A,B)$ of the ordered pair (A,B) is defined by

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|.$$

DEFINITION 2. Let G be a non-elementary two-generator subgroup of Möb. The *Jørgensen number* $J(G)$ of G is defined by

$$J(G) := \inf\{J(A,B) \mid A \text{ and } B \text{ generate } G\}.$$

Now we have the following problem:

PROBLEM. Let r be a real number with $r \geq 1$. When is there a discrete group whose Jørgensen number is equal to r?

EXAMPLES.

(1) $r = 1$: The modular group, the Picard group (**Sato [6]**), the figure-eight knot group (**Sato [6]**), Jørgensen groups (**Li-Oichi-Sato [2], [3], [4]**).

(2) $r = 2$: The Whitehead link group (**Sato [7]**).

THEOREM 1. For every positive integer r, there is a non-elememtary Kleinian group G such that $J(G) = r$.

TEOREM 2. For every $r > 4$, there is a classical Schottky group G such that $J(G) = r$.

This theorem is proved by considering the shape of the classical Schottky space of real type and its fundamental region (cf. **Sato** [**5**]).

References

[1] T. Jørgensen, On discrete groups of Möbius transformations, Amer. J. Math. **98** (1976), 739–749.

[2] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type* I (*Finite case*), CMFT (2006) 1-22, to appear.

[3] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type* II (*Countable infinite case*), Osaka J. Math. (2004) 491-506.

[4] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type* III (*Uncountable infinite case*), Kodai Math. J. (2005) 248-264.

[5] H. Sato, *Classical Schottky groups of real type of genus two,* I, Tôhoku Math. J. **40** (1988), 51-75.

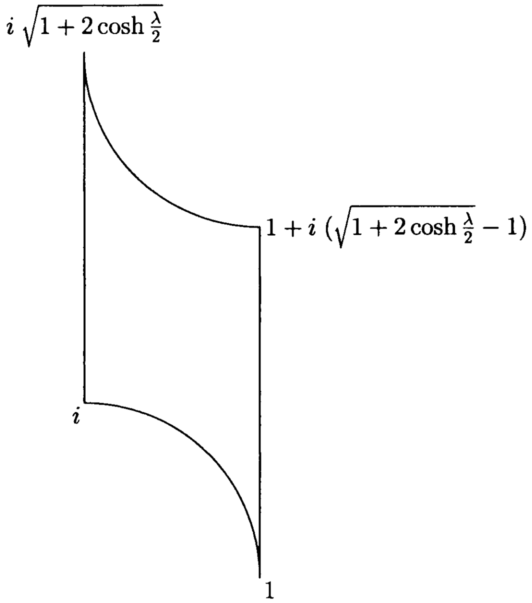
[6] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality,* Contemporary Math. **256** (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, (2000), 271–287.

[7] H. Sato, *Jørgensen number of the Whitehead link group,* Bol. Soc. Math. Mexicana (2005), to appear.

18 クライン群の等角境界と凸核境界の距離

小森洋平（阪市大・理）

$(1,1)$ 型の終端正則 b-群の等角境界と凸核境界がそれぞれ一意化する 1 点穴空きトーラスの違いを測る。つまりそれぞれのトーラスの周期の差を、上半平面におけるポアンカレ距離で評価したい。特に凸核境界が一意化する 1 点穴空きトーラスのフェンチェル・ニールセン座標が $(\lambda, \lambda/2)$、つまり半ツイストの場合、等角境界が一意化する 1 点穴空きトーラスの周期は $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau i$ となることが分かる。ここで τ は下図の四辺形の極値的長さである。極値的長さはこの四辺形上のディリクレ・ノイマン問題の解である調和関数のディリクレ積分で表される（Ahlfors, Conformal Invarinats, p. 65)。調和関数は調和多項式で、積分は有限要素法を用いて数値計算を行う（Buser and Silhol, Duke Math. Journal, Vol 108 (2001)）。この方法から等角境界と凸核境界の距離が評価でき、ポアンカレ距離が 2 以上になるというサーストンの同変 $K=2$ 予想の反例が、系統的に構成できると期待される。



19 Semi-hyperbolicity of entire functions

木坂 正史 (京都大学大学院 人間・環境学研究科)

Definition 0.1. f is *semi-hyperbolic at* $x \in J_f$ if there exists a neighborhood U of x and an $N \in \mathbb{N}$ such that for any connected component V of $f^{-n}(U)$ ($^\forall n$), $f^n|_V : V \to U$ satisfies

$$\deg(f^n|_V : V \to U) \leq N.$$

In the case that f is transcendental, we add the following property:

$$f^n|_V : V \to U \text{ is proper for every } V.$$

Recall that a map $f : X \to Y$ is called *proper* if $f^{-1}(K) \subset X$ is compact for every compact subset $K \subset Y$. Note that this property is automatically satisfied when f is rational or a polynomial.

Next theorem is (a part of) the Mañé's Theorem for rational functions.

Theorem 0.2 (Mañé, [Ma]). *Let f be a rational function and $x \in J_f$. Suppose that*

$$x \notin \bigcup_{c \in \mathrm{Rec} \cap J_f} \omega(c) \cup \{\text{parabolic periodic points}\},$$

where Rec $=$ {recurrent critical points}. *Then f is semi-hyperbolic at $x \in J_f$.*

Actually the converse of the above theorem is also true. Thus we have

$$\begin{aligned} & f \text{ is semi-hyperbolic at } x \in J_f \\ \iff \quad & x \notin \bigcup_{c \in \mathrm{Rec} \cap J_f} \omega(c) \cup \{\text{parabolic periodic points}\}. \end{aligned}$$

One year ago I proved Mañé's theorem for entire functions but it gave only a sufficient condition for semi-hyperbolicity. This time I improved the result and obtained necesarry and sufficient condition as follows:

Theorem A (Mañé's Theorem for entire functions (revised)). *Let f be a (transcendental) entire function and $z_0 \in J_f$. Then f is semi-hyperbolic at z_0 if and only if $z_0 \notin Z$, where the set Z is defined as follows:*

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \overline{\{p \mid p \text{ is a parabolic periodic point of } f\}} \\
X_2 &= \text{derived set of } \{p \mid p \text{ is a attracting periodic point of } f\} \\
X_3 &= \{p \mid f^{n_i}|_W \to p \ (n_i \to \infty) \text{ for some wandering domain } W\} \\
Y_1 &= \overline{\bigcup_{c \in \mathrm{Rec} \cap J_f}} \ \omega(c), \text{ where } \mathrm{Rec} = \{c \mid c \text{ is a recurrent critical point of } f\} \\
Y_2 &= \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}} f^n(\mathrm{AV}) \cap J_f, \text{ where } \mathrm{AV} = \{c \mid c \text{ is an asymptotic value of } f\} \\
Y_3 &= \{p \mid p = \lim_{i \to \infty} f^{n_i}(c_i),\ c_i \ (i \in \mathbb{N}) \text{ are mutually different non-recurrent} \\
&\qquad \text{critical points, order of } c_i \to \infty \ (i \to \infty)\} \\
Y_4 &= \Big\{p \mid p = \lim_{i \to \infty} f^{n_i}(c_i),\ c_i \ (i \in \mathbb{N}) \text{ are mutually different non-recurrent} \\
&\qquad \text{critical points such that } \sup_i \ (\text{order of } c_i) < \infty \text{ and for any} \\
&\qquad \varepsilon > 0 \text{ let } N_i(\varepsilon) := {}^{\#}\{c \mid c : \text{critical point}, O^+(c_i) \cap U_\varepsilon(c) \neq \emptyset\} \\
&\qquad \text{then } \sup_i N_i(\varepsilon) = \infty\Big\} \\
Y_5 &= \Big\{p \mid p = \lim_{i \to \infty} f^{n_i}(c_i),\ c_i \ (i \in \mathbb{N}) \text{ are mutually different non-recurrent} \\
&\qquad \text{critical points such that } \sup_i \ (\text{order of } c_i) < \infty \text{ and let } \delta_i(n) \\
&\qquad := \sup\{\delta \mid {}^{\#}\{O^+(c_i) \cap U_\delta(c_i)\} \leq n\} \text{ then } \inf_i \delta_i(n) = 0 \text{ for } {}^{\forall}n\Big\} \\
Z &= \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{3} X_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{5} Y_j\right)}.
\end{aligned}
$$

Remark. In the case of rational functions, $X_i = \emptyset$ for $i = 2,\ 3$ and $Y_j = \emptyset$ for $j = 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

参考文献

[**Ma**] R. Mañé, *On a theorem of Fatou*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **24** No.1 (1993), 1–11.

20 臨界値集合が有界な多項式半群の力学系と後方自己相似系の相互作用コホモロジー

角　大輝 (Sumi Hiroki)
大阪大学理学部数学教室　E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp

まず以下の一般的なことを考え、それを多項式半群の力学系に応用する。
定義 1. (X,d) を距離空間とし、$h_j : X \to X$ $(j=1,\cdots,m)$ を連続写像とする。L を X のコンパクト集合とする。$(L, \{h_1,\cdots,h_m\})$ が**後方自己相似系**とは、次のときをいう。

1. $L = h_1^{-1}(L) \cup \cdots \cup h_m^{-1}(L)$, かつ
2. 任意の $j=1,\cdots,m$ と任意の $z \in L$ に対し $h_j^{-1}(z) \neq \emptyset$.

記号: 上のとき、以下の記号を使う:

1. L の被覆 $\mathcal{U}$ に対し、$N(\mathcal{U})$ で $\mathcal{U}$ の脈体をあらわす。つまり、$N(\mathcal{U})$ は抽象単体複体で、$\mathcal{U} = \{A_1,\cdots,A_r\}$ のときには、vertex は A_j たちで、$A_{i_0} \cap \cdots \cap A_{i_j} \neq \emptyset$ のときに $(A_{i_0},\cdots,A_{i_j})$ は j 単体を張る。
2. G を $\{h_j : X \to X\}_{j=1}^m$ で生成された写像の合成を積とする半群として、
$\mathrm{Cov}(L,G) :=$
$\{\mathcal{U} : L$ の有限被覆 $\mid \mathcal{U} = \{g_1^{-1}(L),\cdots,g_n^{-1}(L)\},\ g_1,\cdots,g_n \in G,\ n \in \mathbb{N}\}$ とおく。これは、細分に関して inverse system をなす。
3. 任意の $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $\mathbb{Z}$ 加群 R に対し、
$$\check{H}^p(L,G,R) := \varinjlim_{\mathcal{U}\in \mathrm{Cov}(L,G)} H^p(N(\mathcal{U}),\ R)$$
とおく。これを、 **p-th interaction cohomology for (L,G) with coefficient R** と呼ぶことにする。
4. $\check{H}^p(L,G,R)$ から $\check{H}^p(L,R)$ (p-th Čech cohomology of L with coefficient R) に自然な射がある。これを $\Psi : \check{H}^p(L,G,R) \to \check{H}^p(L,R)$. とかく。
5. 一般の抽象単体複体 Y に対し、$|Y|$ でその「幾何的実現」とする。
6. 一般の位相空間 Z に対し、$\mathcal{C}(Z)$ で、Z の連結成分全体の集合、とする。

設定: X を $\hat{\mathbb{C}}$ (リーマン球面)、$h_j : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ $(j=1,\cdots,m)$ を非定数多項式、G を $\{h_j\}_{j=1}^m$ で生成された写像の合成を積とする半群、$J(G)$ を、G のジュリア集合、つまり、その任意近傍で G が同程度連続ではないような $z \in \hat{\mathbb{C}}$ の集合、とおく。(このとき $(J(G),\{h_1,\cdots,h_m\})$ は後方自己相似系であることがわかる。) さらに $P(G) := \overline{\bigcup_{g\in G}\{g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{の臨界値}\}}$ $(\subset \hat{\mathbb{C}})$ とおく。

以上のもとで、

定理 A. 上でさらに $P(G)\setminus\{\infty\}$ が $\mathbb{C}$ で有界であり、任意の $j=1,\cdots,m$ について $\deg(h_j)\geq 2$ と仮定する。このとき、後方自己相似系 $(J(G),\{h_1,\cdots,h_m\})$ について、次が成り立つ。

1. $\varprojlim_{\mathcal{U}\in\mathrm{Cov}(J(G),G)}\mathcal{C}(|N(\mathcal{U})|)\cong\mathcal{C}(J(G))$.
2. 「$J(G)$ は連結」 $\Longleftrightarrow$ 「任意の $i,j\in\{1,\cdots,m\}$ に対し、ある列 $(i_t)_{t=1}^{s}\subset\{1,\cdots,m\}$ が存在し、$i_1=i,\ i_s=j,\ h_{i_t}^{-1}(J(G))\cap h_{i_{t+1}}^{-1}(J(G))\neq\emptyset\ \ (t=1,\cdots,s-1)$ となる」
3. $m=2$ で $J(G)$ が非連結ならば、$\mathcal{C}(J(G))\cong\{1,2\}^{\mathbf{N}}$.
   よって $\sharp(\mathcal{C}(J(G)))>\aleph_0$.
4. $m=3$ で $J(G)$ が非連結ならば、$\sharp(\mathcal{C}(J(G)))\geq\aleph_0$.
5. R を体として、「$\dim_R\check{H}^0(J(G),G,R)<\infty\iff\sharp(\mathcal{C}(J(G)))<\infty$」である。また、これらが成り立つとき、$\dim_R\check{H}^0(J(G),G,R)=\sharp(\mathcal{C}(J(G)))$ となる。

定理 B. $G=\langle h_1,\cdots,h_m\rangle$ について定理 A の仮定のもと、$m\geq 3$ とする。さらに以下の全てを仮定する。

1. $J(G)$ は連結。
2. $(h_1^2)^{-1}(J(G))\cap(\cup_{i:i\neq 1}h_i^{-1}(J(G)))=\emptyset$.
3. 互いに異なるある $j_1,j_2,j_3\in\{1,\cdots,m\}$ があり、
   $j_1=1,\ h_{j_k}^{-1}(J(G))\cap h_{j_{k+1}}^{-1}(J(G))\neq\emptyset\ (k=1,2,3,\ j_4=j_1)$ となる。
4. 任意の $s,t\in\{1,\cdots,m\}$ に対し、
   「$s,t,1$ が互いに異なれば、$h_1^{-1}(J(G))\cap h_s^{-1}(J(G))\cap h_t^{-1}(J(G))=\emptyset$」となる。

このとき、R を体として次が成り立つ:

(a)$\dim_R\check{H}^1(J(G),G,R)=\dim_R\Psi(\check{H}^1(J(G),G,R))=\infty$,
 $\Psi:\check{H}^1(J(G),G,R)\to\check{H}^1(J(G),R)$ は単射

(b)$F(G):=\overline{\mathbb{C}}\setminus J(G)$ とおくと、$F(G)$ は無限個の連結成分を持つ。

命題. (1) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し、ある $G_n=\langle h_1,\cdots,h_{2n}\rangle$ があり、定理 A の仮定を満たしてかつ $\sharp(\mathcal{C}(J(G_n)))=n$ となる。(2) ある $G=\langle h_1,h_2,h_3\rangle$ があり、定理 A の仮定を満たしてかつ $\sharp(\mathcal{C}(J(G)))=\aleph_0$ となる。(3) ある $G=\langle h_1,h_2,h_3,h_4\rangle$ で、定理 B の仮定を満たすものがある。とくにこの G について $\dim_R\check{H}^1(J(G),G,R)=\infty$ (R は体).

参考文献: *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups and interaction cohomology*, H.Sumi, 数理解析研究所講究録 1447, pp227-238.

21 $\mathbb{R}^3$ 内の完備極小曲面のガウス写像の値分布

カワカミ　ユウ
川上　裕　（名古屋大学多元数理科学研究科）

本講演内容は名古屋大学の小林亮一先生，九州大学の宮岡礼子先生との共同研究に基づいている．$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面のガウス写像は開リーマン面上の有理型関数とみなすことができるので，複素解析で研究されている有理型関数に対する値分布論との対応が生じる．実際，極小曲面論で知られているベルンシュタインの定理（複素平面全体で定義されたグラフ型極小曲面は平面のみである.）は，ガウス写像の視点で見ればリュービルの定理から容易に示すことができる．この対応から生じた問題として「ガウス写像の除外値問題」がある．これは,「平面でない完備極小曲面のガウス写像の除外値数の上限はいくつか？」という問題で，1988 年に藤本坦孝先生 [1] によって，ガウス写像の除外値数は高々4 であることが示された．実際，シャーク曲面など除外値数が 4 の平面でない完備極小曲面の存在が知られているのでこの定理は最良である．ロス先生の論文 [9] では正規族と値分布論との対応を表す「ブロック原理」の視点から上の定理を証明している．

一方，オッサーマン先生 [7], [8] は，平面でない代数的極小曲面（＝有限全曲率完備極小曲面）のガウス写像の除外値数は高々3 であることを示した．しかし，この結果が最良であるかどうかは未解決である．実際，除外値数が 3 の代数的極小曲面の例は発見されていない．カテノイドが除外値数が 2 の代数的極小曲面であることより，多くの研究者が除外値数は高々2 であると予想している．

我々はこれまで知られている結果とこの予想を値分布論の立場から改めて見直ことによって，幾つかの結果を得ることができた．その中の重要なものとして代数的極小曲面のガウス写像の完全分岐値数に関する結果がある．ネバンリンナ理論では，除外値数を一般化した完全分岐値数（または欠除指数）が評価される([6] 参照)．実際，複素平面 $\mathbb{C}$ 上の非定数有理型関数に対して，完全分岐値数（欠除指数）は 2 以下で除外値数の評価と一致する．また，藤本先生 [2] によって，一般の平面でない完備極小曲面のガウス写像の完全分岐値数に関しては 4 以下であることが示され，この場合においても除外値数の評価と一致することが示された．この２つの事実から，これまで代数的極小曲面に対しても除外値数が高々2 という予想から完全分岐値数に関しても 2 以下で評価できると考えられてきた．しかし，我々は論文 [5] の例の完全分岐値数を調べた結果，予想を覆す次の結果を得た．

[主定理 1] ([3])
ガウス写像の完全分岐値数が 2.5 の代数的極小曲面が存在する．

除外値はあるのか？

また，この完全分岐値数という視点から除外値数に関する証明 [7] を見直すことで，代数的極小曲面の他にシャーク曲面など特殊な無限全曲率の場合を含む「擬代数的極小曲面」という対象に対して次のような評価式を得ることができた．

[主定理 2] ([4])
g を種数 G のコンパクトリーマン面 $\overline{M}_G$ から k 個の点を除いた開リーマン面，もしくはその被覆面上で定義される平面でない擬代数的極小曲面のガウス写像とし，D_g をその除外値数，ν_g をその完全分岐値数とする．d を $\overline{M}_G$ 上の g の次数とするとき，次の不等式が成り立つ．

$$D_g \leq \nu_g \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad R = \frac{d}{G - 1 + k/2} \geq 1$$

特に $D_g \leq \nu_g \leq 4$ が成り立つ．また，代数的極小曲面に対しては $R > 1$ となり，除外値数は高々3 である．

R は幾何学的意味をもつ（[4] 参照）ので，この結果は除外値数の上限 “4” の幾何学的な意味を表している．

参考文献

[1] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 312 - 321.

[2] H. Fujimoto, On the Gauss curvature of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan, **44** (1992), 427–439.

[3] Y. Kawakami, On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces, preprint.

[4] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, The Gauss map of pseudo algebraic minimal surfaces, preprint, math.DG/0511543.

[5] R. Miyaoka, K. Sato, On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions, Arch. Math., **63** (1994), 565–576

[6] R. Nevanlinna, *Analytic Function*, Springer-Verlag, 1953

[7] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, Ann. of Math., **80** (1964), 340–364.

[8] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover, 1986.

[9] A. Ros, The Gauss map of minimal surface, preprint.

22 A MATHEMATICAL HUGE OBJECT ?

小川　琢磨　筑波大学　数学系
鎌田　保雄　筑波大学　数学系

(発表の目的)　数学と潮流の中にある塊 … という認識（あるいは事実）を伝えたい …

2004.03.28、関数論分科会において（筑波大学にて）次の結果を発表した。

(定理)　[1, 2, 3]

自然数 n に依存する平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ として次のようなものを考える。($c>0$:実数)

$$(*)\qquad \prod_{k=1}^{n}\Big(x^2+y^2-2c\big(x\cos\frac{2k\pi}{n}+y\sin\frac{2k\pi}{n}\big)+c^2\Big)-c^{2n}=0.$$

この時、この平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ の弧長全体の長さは、次のように与えられる。

$$\sqrt[n]{2}cB\Big(\frac{1}{2n},\frac{1}{2}\Big).$$

但し、$B(p,q)$ は Beta-function

$$B(p,q):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (p,q>0).$$

(①構成法)

上記 $(*)$ の平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ は、以下の考え方によって構成されたものです。

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P:=(x,y)$、焦点 $F_{ij}:=(a_{ij},b_{ij})$（固定で F_{ij} は自然数の i,j に依存する。)、自然数から、実数への関数 ϕ ($\phi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$)、を用意して以下のようなものを考える。

$$f_n(x,y)=0\begin{cases} f_1(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{11}|=\phi(1),\\ f_2(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{21}||PF_{22}|=\phi(2),\\ f_3(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{31}||PF_{32}||PF_{33}|=\phi(3),\\ \cdots, & \\ f_k(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{k1}||PF_{k2}||PF_{k3}|\cdots|PF_{kk}|=\phi(k),\\ \cdots. & \end{cases}\qquad \Big(|PF_{ij}|:=\sqrt{(x-a_{ij})^2+(y-b_{ij})^2}\Big)$$

このような考え方に対して $c>0$ 実数（定数）を用意して、具体的に焦点 F_{nk} と関数 ϕ を以下のように定めたもの

$$\begin{aligned} F_{nk}:=&\Big(c\cos\frac{2k\pi}{n},c\sin\frac{2k\pi}{n}\Big),\quad (k=1,2,\cdots,n,\quad n\in\mathbb{N});\\ \phi(n):=&c^n. \end{aligned}$$

これが、上記の代数曲線（$*$）となります。

(②背景) 詳細については [2, 5]。

上記定理の主張は、一連の代数曲線達（円、lemniscate、三様模様、…）が同じ曲線と見え、さらに **これらの曲線達の弧長が全て Beta-function で描けている**という事実です。元々の視点は**三角関数と lemniscate 関数は同じ関数だ !!!** という視点に基づき、改めて双方の関数の構成法に焦点を当てて、素の曲線（円と lem niscate) に何らかの繋がりが在るのでは？それを明らかにした結果です。

第一著者連絡先:（住所）埼玉県北葛飾郡庄和町永沼１５９－３、（郵便番号）３４４－０１２３.

小川　琢磨　筑波大学　数学系　　　　　鎌田　保雄　筑波大学　数学系

(③問題設定と結果)

先の定理の代数曲線達 $(*)$ の計算結果は、

n	$f_n(x,y)=0$
1	$x^2+y^2-2cx=0$
2	$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0$
3	$(x^2+y^2)^3-2c^3(x^3-3xy^2)=0$
4	$(x^2+y^2)^4-2c^4(x^4-6x^2y^2+y^4)=0$
5	$(x^2+y^2)^5-2c^5(x^5-10x^3y^2+5xy^4)=0$
6	$(x^2+y^2)^6-2c^6(x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6)=0$

となります。この計算結果を見ると、(x,y) の多項式が、**自然数の n に依存して決定している２つの部分に分かれている**事に気付きます。そこで、新たに、$g_n(x,y)$ （但し $g_n(r\cos\theta, r\sin\theta)=r^n\cos n\theta$ を満たす。）という多項式を用意して、次のような**問題とその結果**を得るに至りました。

(新たな問題とその結果) [3]

自然数の m,n に依存する平面代数曲線

$$(x^2+y^2)^m=2c^n g_n(x,y) \tag{$**$}$$

を与えます。(但し c は定数) ここで、$l:=2m-n$ と置きます。$l>0$ のとき、この曲線の弧長全体は次のように与えられる。

$$\sqrt[l]{2c^n}\,\frac{n}{l}\,\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2l}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2l}+\frac{1}{2}\Big)}\,F\Big(\frac{1}{2l},-\frac{1}{2},\frac{1}{2l}+\frac{1}{2};1-\Big(\frac{l}{n}\Big)^2\Big),$$

但し $\Gamma(s)$ は Γ-function で、$F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ は Gauss の hypergeometric-function を表す。

代数曲線達 $(**)$ は、代数曲線達 $(*)$ を含んでいます。$l=m=n$ のとき、双方の代数曲線達は一致します。今日は

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$
$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt$$

という Γ-function と Beta-function の関係式、それから、Gauss の hypergeometric-function の積分表示を持っているので、ここに、**曲線の拡張（あるいは一般化）のみならず、それに対応するように弧長全体も秩序を保ちつつ拡張（あるいは一般化）されている**という一例を見る事ができます。

今回、発表している内容の背景 [2, 5] も含めて、ここに**数学と潮流の中にある塊が在る**と主張する根拠をここに提示致します。

References

[1] T.Ogawa: *The connection between the trigonometric function and the lemniscate function from some plane algebraic curves*, a meeting of mathematical society of Japan in Tsukuba, 関数論分科会アブストラクト (2004.3).

[2] 小川　琢磨:「三角関数　ｖｓ（対）lemniscate 関数　～懐かしさを感じた場所から、見えた景色～」第１５回　数学史シンポジウム (2004.10.16),　津田塾大学　数学・計算機科学研究所報 **No.26** (2005.4), 44–77.

[3] T. Ogawa and Y. Kamata: *A connection between the trigonometric function and the lemniscate function from some plane algebraic curves*, submitted for publication.

[4] 渡邊　公夫、宮川　幸隆『初等超越関数の世界』(現在、宮川　幸隆氏とともに執筆中 !?)

[5] 高瀬　正仁　論説　『Gauss「整数論」と Hilbert の第１２問題』、数学（日本数学会編集）、岩波書店、第５４巻、第４号、２００２年１０月　秋季号.

23 Cayley 変換像の凸性による対称 Siegel 領域の特徴付け

甲斐 千舟　　(京大・理)

等質 Siegel 領域は右半平面 (あるいは上半平面) の高次元への一般化であり, Cayley 変換によって有界領域に正則同相である. また任意の等質有界領域は等質 Siegel 領域として実現される. 以前の講演で, 第 1 種等質 Siegel 領域 (等質管状領域) や準対称 Siegel 領域などのクラスに限定して, その中での対称領域の特徴付けについて述べた. 本講演ではこのような特徴付けを一般の等質 Siegel 領域のクラスにおいて行う.

複素一変数では, Cayley 変換 $w \mapsto (w-1)(w+1)^{-1} = 1-2(w+1)^{-1}$ $(w \in \mathbb{C})$ によって右半平面が開単位円板に写される. 明らかにこの Cayley 変換像は凸集合であるが, 高次元においても対称 Siegel 領域の場合には, これと似た, 次のような状況が起こっている. 対称 Siegel 領域は非コンパクト型の Hermite 対称空間なので, Harish-Chandra 実現と呼ばれる標準的な有界領域実現をもつ. Korányi と Wolf は, 対称 Siegel 領域をその Harish-Chandra 実現に写す Cayley 変換 (正確にはこの逆変換) を Lie 群論を用いて定義した. Harish-Chandra 実現はあるノルムに関する開単位球であることが知られているので, この Cayley 変換の像は凸集合になっている. ちなみに Mok と Tsai による結果 [5] から, 対称 Siegel 領域の有界領域実現の中で, Cayley 変換だけが本質的に唯一の凸な実現であることがわかっている.

Korányi, Wolf による対称 Siegel 領域の Cayley 変換を一般化するものとして, Dorfmeister による準対称 Siegel 領域の Cayley 変換があり ([1] を参照), また等質 Siegel 領域に対しては, Penney による Cayley 変換, Bergman 核や Szegö 核に付随する Cayley 変換 (by Nomura) がある. もし領域が対称ならば, これらの Cayley 変換はすべて Korányi, Wolf のものに一致する. 本講演で扱うのは, これらの Cayley 変換をすべて含む, パラメタ付けされた Cayley 変換の族 (by Nomura) である.

定義をしよう. U, V をそれぞれ複素, 実の有限次元ベクトル空間とし, 直線を含まない開凸錐 $\Omega \subset V$ が与えられたとする. V の複素化ベクトル空間を W とおく. Ω-positive な Hermitian sesquilinear map $Q : U \times U \to W$ が与えられたとき, これによって次のように **Siegel 領域**が定義される:

$$D := \{(u, w) \in U \times W \mid \operatorname{Re} w - \tfrac{1}{2}Q(u, u) \in \Omega\}.$$

本講演では D は等質であるとする. このとき Ω も等質である. すなわち

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V) \mid g(\Omega) = \Omega\}$$

が Ω に推移的に作用している. $G(\Omega)$ の分裂可解部分群 H で Ω に単純推移的に作用するものが存在することが知られている. 任意に $E \in \Omega$ をとり, 固定する. このとき $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ は微分同相を与える. 関数 $\Delta : \Omega \to \mathbb{R}$ が**相対不変**で

あるとは, ある H の一次元表現 $\chi : H \to \mathbb{R}$ が存在して $\Delta(hx) = \chi(h)\Delta(x)$ $(h \in H, x \in \Omega)$ を満たすことをいう. $\Delta : \Omega \to \mathbb{R}$ を相対不変関数とする. V 上の双線型形式を

$$\langle x|y\rangle_\Delta = D_x D_y \log \Delta(E) \qquad (x, y \in V)$$

で定義する. ただし D_v は v 方向の方向微分を表す. $\langle\cdot|\cdot\rangle_\Delta$ が V 上の正定値内積を定めるとき, Δ は**認容的**であると言うことにする. 認容的な相対不変関数の1つは, $\Delta_{\det}(hE) := \det h^{-1}$ $(h \in H)$ で与えられる.

$\Delta : \Omega \to \mathbb{R}$ を認容的な相対不変関数とする. $x \in \Omega$ に対し, x の**擬逆元** $\mathcal{I}_\Delta(x) \in V$ を

$$\langle \mathcal{I}_\Delta(x)|y\rangle_\Delta = -D_y \log \Delta(x) \qquad (y \in V)$$

によって定義する. まず $\mathcal{I}_\Delta(E) = E$ であることがわかり, Lie 群 H の複素化を $H_{\mathbb{C}}$ とすると, $\mathcal{I}_\Delta$ は $H_{\mathbb{C}}$ 同変である: $\mathcal{I}_\Delta(hx) = {}^\Delta h^{-1}\mathcal{I}_\Delta(x)$ $(h \in H_{\mathbb{C}})$. ただし, $\langle\cdot|\cdot\rangle_\Delta$ を W 上の複素双線型形式に拡張しておいて, $\langle\cdot|\cdot\rangle_\Delta$ に関する h の転置作用素を ${}^\Delta h$ で表す.

U 上の正定値 Hermite 内積を次のように定義する:

$$(u|u')_\Delta := \langle Q(u, u')|E\rangle_\Delta \qquad (u, u' \in U).$$

$w \in W$ に対して U 上の複素線型作用素 $\varphi(w)$ を

$$(\varphi(w)u|u')_\Delta = \langle Q(u, u')|w\rangle_\Delta \qquad (u, u' \in U)$$

によって定める. $\varphi(E) = I$ であり, $w \mapsto \varphi(w)$ も線型である.

等質 Siegel 領域 D の **Cayley 変換**を次のように定義する:

$$\mathcal{C}_\Delta(u, w) := (2\varphi(\mathcal{I}_\Delta(w + E))u, E - 2\mathcal{I}_\Delta(w + E)) \qquad ((u, w) \in U \times W).$$

$\mathcal{C}_\Delta$ は D を $\mathcal{C}_\Delta(D)$ に双正則に写し, 像 $\mathcal{C}_\Delta(D)$ は有界である. もし D が対称で, かつ $\Delta = \Delta_{\det}^p$ $(p > 0)$ ならば, $\mathcal{C}_\Delta$ は Korányi-Wolf の Cayley 変換 (の逆変換) に一致する. 本講演の主定理を述べよう.

定理. D を既約な等質 Siegel 領域とし, $\Delta : \Omega \to \mathbb{R}$ を認容的な相対不変関数とする. このとき, $\mathcal{C}_\Delta(D)$ が凸集合であるための必要十分条件は D が対称であり, ある $p > 0$ に対して $\Delta = \Delta_{\det}^p$ となっていることである.

参考文献

[1] C. Kai, *A symmetry characterization of quasisymmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images*, J. Lie Theory **16** (2006), 47–56.

[2] C. Kai, *A characterization of symmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images*, preprint.

[3] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric tube domains by convexity of Cayley transform images*, Diff. Geom. Appl. **23** (2005), 38–54.

[4] A. Korányi and J. A. Wolf, *Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes*, Ann. of Math. **81** (1965), 265–288.

[5] N. Mok and I-H. Tsai, *Rigidity of convex realizations of irreducible bounded symmetric domains of rank* ≥ 2, J. Reine Angew. Math. **431** (1992), 91–122.

24 On the complement of Levi-flats in Kähler manifolds of dimension ≥ 3

大沢健夫（名大多元数理）

Abstract : Applying the L^2 method of solving the $\bar{\partial}$-equation, it is shown that compact Kähler manifolds of dimension ≥ 3 admit no Levi flat real analytic hypersurfaces whose complements are Stein.

Mをコンパクトな複素多様体、XをM内の滑らかな閉じた実超曲面とする。Xがレビ平坦面であるとは、Xが局所的にMを二つのスタイン開連結集合に分けることをいう。（Xは両面擬凸である、ともいう。）n次元複素射影空間はC^8級のレビ平坦面をふくまない（ただし$n \geq 2$であるとする）。一方、複素トーラスなど、他の複素多様体は種々のレビ平坦面をふくみうる。その中でも$M \setminus X$がスタインであるものが、関数論の立場からは興味深い。S. Nemirovski ('99) はこのような(M, X)が任意次元で存在することを（implicitにだが）示している。しかし彼の作り方だと、$n \geq 3$のときにはMはnon-Kählerになってしまう。3次元以上のKähler多様体Mは、$M \setminus X$がスタインであるようなレビ平坦面Xをふくまないのではないか。ここから出発して以下の結果を得たので報告したい。

定理 0.1.　Mは3次元以上のコンパクトなKähler多様体、XはM内の実解析的なレビ平坦面とする。このとき、$M \setminus X$上には次の条件を満足するC^2級の多重劣調和な皆既関数φは存在しない。

(条件1)　φのレビ形式は$M \setminus X$のあるコンパクト集合の補集合上でいたるところ3個以上の正固有値をもつ.

特に、このとき$M \setminus X$はスタイン多様体ではない,

証明には、L^2評価式の方法により得られたハルトークスの拡張定理の精密化(大沢'81, '82)が用いられる。

XがC^∞級の場合にも同様であると思われるが、その証明に使える形の精密な拡張定理は知られていない。上と同様な方法で示せるのは以下の部分的結果のみである。

命題 0.2.　Mは定理0.1と同様、XはM内のC^∞級レビ平坦面とする。このとき$M \setminus X$上には(条件1)および以下の2つの条件をすべて満足するC^2級の多重劣調和な皆既関数φは存在しない。

(条件2)　φはXまでの距離に関して対数的増大度をもつ.

(条件3)　φのレビ形式は$M \setminus X$上いたるところ2個以上の正固有値をもつ.

References

Nemirovski, S., Stein domains with Levi-flat boundaries on compact complex surfaces, Math. Notes, 66 (1999), 522-525.

Ohsawa, T., A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q convex Kähler manifolds, Invent. Math. 63 (1981), 335-354. Addendum: Invent. Math. 66 (1982), 391-393.

特別講演

Rational proper holomorphic maps between the Euclidean balls

濱田 英隆 九州産業大学工学部

1 Introduction

Let $n \geq 2$. Let $\mathbf{B}^n$ denote the Euclidean unit ball in $\mathbb{C}^n$. Let f be a proper holomorphic map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^N$, where $N \geq n \geq 2$. In this talk, we are concerned with the rationality problem for f and also the classification problem of rational proper maps between the Euclidean balls. About the first problem, it is known that there exist proper holomorphic maps from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{n+1}$ which are continuous up to the boundary, but not rational ([Do90],[Fo92]). This gives a problem to clarify the minimal boundary regularity required for proper holomorphic maps between balls to be rational maps.

Every proper holomorphic map from the unit disc in $\mathbb{C}$ to itself is a finite Blascheke product (see [DA93, p.152]). For $n \geq 2$, Alexander [Al77] proved that a proper holomorphic map of $\mathbf{B}^n$ to itself is actually biholomorphic. The first result in the case of positive codimension was obtained by Webster [We79]. Faran [Fa82], [Fa86], Cima-Suffridge [CS83], [CS89], Forstnerič [Fo86], [Fo89], D'Angelo [DA88], Dor [Do90] and others obtained several results in this direction (see the survey [Fo92] or the book [DA93]). By using a totally different approach from all previous works originally due to Huang [Hu99], Huang [Hu99], [Hu01], [Hu03], Huang-Ji [HJ01], Hamada [Ha05], Huang-Ji-Xu [HJX05], [HJX] obtained further results.

2 Preliminaries

Let $\mathbb{C}^n$ denote the space of n complex variables $z = (z_1, \dots, z_n)$ with the Euclidean norm $|z|$. For $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, let $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j w_j$. Let $\mathbf{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$. Proper holomorphic maps $f, g : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^N$ are said to be equivalent, if there exist $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B}^n)$ and $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B}^N)$ such that $f = \tau \circ g \circ \sigma$. Let

$$\mathbf{H}_n = \{(\tilde{z}, w) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : \Im(w) > |\tilde{z}|^2\}$$

be the Siegel upper-half space, where $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Then the ball $\mathbf{B}^n$ is holomorphically equivalent to $\mathbf{H}_n$ and the sphere $\partial\mathbf{B}^n$ is equivalent to the Heisenberg hypersurface $\partial\mathbf{H}_n$.

We assign the weight of $\tilde{z}$ to be 1 and w to be 2, and use the notation $(\cdot)^{(k)}$ for a holomorphic polynomial of weighted degree k. For a function h defined over $\partial\mathbf{H}_n$, we say that $h \in o_{wt}(k)$ if

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(t\tilde{z},t^2w)}{t^k}=0$$

uniformly on $(\tilde{z},w)$ over any compact subset of $\partial\mathbf{H}_n$.

Let $M \subset \partial\mathbf{H}_n$ be a connected open piece of the Heisenberg hypersurface in $\mathbb{C}^n$ which contains the origin. Let

$$G=(f,\phi,g)=(\tilde{f},g)=(f_1,\dots,f_{n-1},\phi_1,\dots,\phi_{N-n},g)$$

be a non-constant C^2-smooth CR map from M into $\partial\mathbf{H}_N$ with $G(0)=0$. Then Huang [Hu99, Lemma 5.3] showed the following lemma.

Lemma 2.1 *After composing G with automorphisms of the Siegel upper-half spaces, the map*

$$G=(f,\phi,g)=(f_1,\dots,f_{n-1},\phi_1,\dots,\phi_{N-n},g)$$

can be assumed to take the following normal form $(N>n>1)$:

$$(1)\qquad f=\tilde{z}+\frac{\sqrt{-1}}{2}a^{(1)}(\tilde{z})w+o_{wt}(3),\phi=\phi^{(2)}(\tilde{z})+o_{wt}(2),g=w+o_{wt}(4),$$

with

$$(2)\qquad \left\langle \overline{\tilde{z}},a^{(1)}(\tilde{z})\right\rangle|\tilde{z}|^2=|\phi^{(2)}|^2.$$

For each $p\in M$, we have an associated CR map G_p from a small neighborhood U of $0\in\partial\mathbf{H}_n$ to $\partial\mathbf{H}_N$ with $G_p(0)=0$, defined by

$$(3)\qquad G_p=\tau_p^G\circ G\circ\sigma_p^0=(f_p,\phi_p,g_p),$$

where for each $p=(\tilde{z}_0,w_0)\in M$, we define $\sigma_p^0\in \mathrm{Aut}(\mathbf{H}_n)$ by

$$\sigma_p^0(\tilde{z},w)=(\tilde{z}+\tilde{z}_0,w+w_0+2i\langle\tilde{z},\overline{\tilde{z}_0}\rangle)$$

and $\tau_p^G\in\mathrm{Aut}(\mathbf{H}_N)$ by

$$\tau_p^G(\tilde{z^*},w^*)=(\tilde{z^*}-\tilde{f}(\tilde{z}_0,w_0),w^*-\overline{g(\tilde{z}_0,w_0)}-2i\langle\tilde{z^*},\overline{\tilde{f}(\tilde{z}_0,w_0)}\rangle).$$

The map G_p does not satisfy (1) in general. By further composing G_p with suitable automorphisms of $\mathbf{H}_n$ and $\mathbf{H}_N$, we obtain $G_p^{**}=(f_p^{**},\phi_p^{**},g_p^{**})$ for which (1) and (2) holds (see [Hu99], [HJ01]). From (2), we obtain that $a_p^{**(1)}(\tilde{z})=\tilde{z}A(p)$ and that $A(p)$ is an $(n-1)\times(n-1)$ semi-positive Hermitian matrix.

The rank of $A(p)$, which is denoted by $Rk_G(p)$, is called the geometric rank of G at p. By [Hu03], $Rk_G(p)$ is a well-defined integer depending only on G and p. We define the geometric rank of G to be $\kappa_0(G) = \max_{p\in\partial\mathbf{H}_n} Rk_G(p)$. Then $0 \le \kappa_0(G) \le n-1$. Also, G is linear fractional if and only if $\kappa_0(G) = 0$ [Hu99, Theorem 4.2]. We define the geometric rank of $F \in \mathrm{Prop}_2(\mathbf{B}^n, \mathbf{B}^N)$ to be the one for the map $\Psi_N^{-1} \circ F \circ \Psi_n \in \mathrm{Prop}_2(\mathbf{H}_n, \mathbf{H}_N)$, where Ψ_k is a biholomorphic map from $\mathbf{H}_k$ onto $\mathbf{B}^k$.

The following normalization lemma was obtained by Huang [Hu03, Lemma 3.2].

Lemma 2.2 *Let G be a C^2-smooth CR map from an open piece $M \subset \partial\mathbf{H}_n$ into $\partial\mathbf{H}_N$ with $Rk_G(0) = \kappa_0$. Let $P(n,\kappa_0) = \kappa_0(2n-\kappa_0-1)/2$. Then $N \ge n+P(n,\kappa_0)$ and there are $\sigma \in \mathrm{Aut}_0(\mathbf{H}_n)$ and $\tau \in \mathrm{Aut}_0(\mathbf{H}_N)$ such that $G_p^{***} = \tau \circ G_p \circ \sigma = (f,\phi,g)$ satisfy the following normalization condition:*

$$\begin{aligned}
f_j &= z_j + \frac{i\mu_j}{2} z_j w + o_{wt}(3), \quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial w^2}(0) = 0, \quad j = 1,\dots,\kappa_0, \quad \mu_j > 0,\\
f_j &= z_j + o_{wt}(3), \quad j = \kappa_0+1,\dots,n-1,\\
g &= w + o_{wt}(4),\\
\phi_{jl} &= \mu_{jl} z_j z_l + o_{wt}(2), \ \textit{where } \mu_{jl} > 0 \textit{ for } (j,l) \in \mathcal{S}_0\\
\phi_{jl} &= o_{wt}(2), \quad (j,l) \in \mathcal{S}\setminus\mathcal{S}_0
\end{aligned}$$

Moreover, $\mu_j \ge \mu_1 = 1$, $\mu_{jl} = \sqrt{\mu_j+\mu_l}$ for $j,l \le \kappa_0$, $j \ne l$; and $\mu_{jl} = \sqrt{\mu_j}$ if $j \le \kappa_0$ and $l > \kappa_0$ or if $j = l \le \kappa_0$. Here

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &= \{(j,l) : 1 \le j \le \kappa_0, 1 \le l \le n-1, j \le l\},\\
\mathcal{S} &= \{(j,l) : (j,l) \in \mathcal{S}_0, \ or\ j = \kappa_0+1,\\
&\qquad l \in \{\kappa_0+1,\dots,\kappa_0+N-n-\frac{(2n-\kappa_0-1)\kappa_0}{2}\}\}.
\end{aligned}$$

3 Rationality of proper holomorphic maps

In this section, we are concerned with finding the boundary regularity required for proper holomorphic maps F from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^N$ to be rational maps, when $N > n \ge 2$.

(i) the case of codimension 1

Webster [We79] showed the following theorem.

Theorem 3.1 ([We79]) *If $n \ge 3$, $N = n+1$ and F is C^3 up to the boundary, then F is linear fractional.*

Faran [Fa82] classified proper holomorphic maps from $\mathbf{B}^2$ into $\mathbf{B}^3$ which are C^3 up to the boundary.

Theorem 3.2 (**[Fa82]**) *If $n = 2$, $N = 3$ and F is C^3 up to the boundary, then F is equivalent to one of 4 monomial maps.*

Cima-Suffridge [CS89] showed that Theorem 3.2 holds if F is C^2 up to the boundary. They [CS83] also showed the following theorem.

Theorem 3.3 (**[CS83]**) *If $n \geq 2$, $N = n + 1$ and F is C^2 up to the boundary, then F is rational.*

They also conjectured that any proper holomorphic map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^N$ with $N \leq 2n - 2$ which is C^2 up to the boundary must be linear fractional.

(ii) the low codimensional case

The above conjecture [CS83] was verified by Faran [Fa86] when the maps are holomorphic up to the boundary.

Theorem 3.4 (**[Fa86]**) *If $n \geq 2$, $N \leq 2n - 2$ and F is holomorphic up to the boundary, then F is linear fractional.*

Forstnerič [Fo86] showed the following theorem.

Theorem 3.5 (**[Fo86]**) *If $n \geq 2$, $N \leq 2n - 1$ and F is C^{N-n+1} up to the boundary, then F is rational.*

Huang [Hu99], [Hu01] showed the following results by using a totally different approach from all previous works.

Theorem 3.6 (**[Hu99]**) *If $n \geq 2$, $N \leq 2n - 2$ and F is C^2 up to the boundary, then F is linear fractional.*

This result solves the above conjecture due to Cima-Suffridge [CS83].

Theorem 3.7 (**[Hu01]**) *If $n \geq 2$, $N = 2n - 1$ and F is C^2 up to the boundary, then F is rational.*

Huang-Ji-Xu [HJX05] showed the following theorem.

Theorem 3.8 (**[HJX05]**) *If $n \geq 2$, $N \leq n(n + 1)/2$ and F is C^3 up to the boundary, then F is rational.*

(iii) the case of arbitrary codimension.

Forstnerič [Fo89] showed the following theorem.

Theorem 3.9 (**[Fo89]**) *If $n \geq 2$ and F is C^{N-n+1} up to the boundary, then F is rational.*

Huang-Ji-Xu [HJX05] obtained a sufficient condition to be rational maps by using the geometric rank κ_0.

Theorem 3.10 ([**HJX05**]) *If $n \geq 2$, F is C^3 up to the boundary and $\kappa_0 \leq n-2$, then F is rational.*

We also have the following theorem.

Theorem 3.11 (Hamada) *Let $n \geq 2$, $N \geq 2n$ and F is C^{N-2n+3} up to the boundary, then F is rational.*

For $n \geq 3$, our result improves the above result due to Forstnerič [Fo89].

4 Classification of rational proper holomorphic maps

In this section, we are concerned with a classification of rational proper holomorphic maps F from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^N$, when $N > n \geq 2$. First, we remark that every proper rational map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{N'}$ is holomorphic up to the boundary (Cima-Suffridge [CS90]).

(i) the case $N \leq 2n-2$

Webster [We79] has proved the following theorem.

Theorem 4.1 ([**We79**]) *If $n \geq 3$, $N = n+1$ and F is C^3 up to the boundary, then F is equivalent to a linear imbedding.*

By Faran [Fa86], a rational proper map must be equivalent to a linear imbedding when $N \leq 2n-2$.

Theorem 4.2 ([**Fa86**]) *If $n \geq 2$, $N \leq 2n-2$ and F is holomorphic up to the boundary, then F is equivalent to a linear imbedding.*

(ii) the case $N = 2n-1$

When $n = 2$, $N = 3$, Faran [Fa82] proved that a proper holomorphic map that is C^3 up to the boundary must be spherically equivalent to one of 4 monomial maps.

Theorem 4.3 ([**Fa82**]) *If $n = 2$, $N = 3$ and F is C^3 up to the boundary, then F is equivalent to one of 4 monomial maps.*

When $n \geq 3$, $N = 2n-1$, the author [Ha91] determined monomial proper maps. Huang-Ji [HJ01] showed the following theorem.

Theorem 4.4 (**[HJ01]**) *When $n \geq 3$, $N = 2n - 1$, any rational proper holomorphic map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n-1}$ is equivalent either to the standard linear map $L(z) = (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$ or to the Whitney map*

$$W(z) = (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n z_1, z_n z_2, \ldots, z_n z_n).$$

(iii) the case $N = 2n$

When $n = 2$, $N = 4$, D'Angelo [DA88], [DA93] and the author [Ha91] determined monomial proper maps from $\mathbf{B}^2$ into $\mathbf{B}^4$. D'Angelo [DA88] showed the following theorem.

Theorem 4.5 (**[DA88]**) *The proper holomorphic maps*

$$F_\theta(z) = (z_1, \ldots, z_{n-1}, (\cos\theta) z_n, (\sin\theta) z_1 z_n, \ldots, (\sin\theta) z_n z_n)$$

from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$ are inequivalent for all θ with $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

When $n \geq 3$, $N = 2n$, the author [Ha91] determined monomial proper maps. He showed that any monomial proper map from $\mathbf{B}^3$ into $\mathbf{B}^6$ is equivalent to one of the following maps.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & F_\theta(z), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \text{(ii)} & (z_1^2, z_2^2, z_3^2, \sqrt{2} z_1 z_2, \sqrt{2} z_2 z_3, \sqrt{2} z_1 z_3), \\ \text{(iii)} & (z_1^2, \sqrt{2} z_1 z_2, z_2^2, z_1 z_3, z_2 z_3, z_3). \end{array}$$

He also showed that any monomial proper map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$ with $n \geq 4$ is equivalent to F_θ for some θ with $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Then, it is natural to conjecture that any rational proper holomorphic map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$ with $n \geq 4$ is equivalent to F_θ for some θ with $0 \leq \theta \leq \pi/2$. The author [Ha05] gave an affirmative answer to the conjecture.

Theorem 4.6 (**[Ha05]**) *Let $n \geq 4$ and $N = 2n$. Then any rational proper holomorphic map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$ is equivalent to F_θ for some θ with $0 \leq \theta \leq \pi/2$.*

We remark that F_θ is a linear map when $\theta = 0$.

For rational proper maps from $\mathbf{B}^3$ into $\mathbf{B}^6$, the following partial results are known.

Theorem 4.7 (**[HJX05]**) *Let F be a rational proper map from $\mathbf{B}^3$ into $\mathbf{B}^6$.*

(i) *If $\kappa_0 = 2$, then* $\deg(F) \leq 4$;

(ii) *If* $\kappa_0 = 2$ *and* $\deg(F) = 2$, *then* F *is equivalent either to the generalized Whitney map*

$$(z_1 w, z_2 w, z_1^2, \sqrt{2} z_1 z_2, z_2^2, w)$$

or to the map

$$(\sqrt{2} z_1 w, \sqrt{2} z_2 w, z_1^2, \sqrt{2} z_1 z_2, , z_2^2, w^2).$$

Theorem 4.8 (**[HJX]**) *Let* F *be a rational proper map from* $\mathbf{B}^3$ *into* $\mathbf{B}^6$. *If* $\kappa_0 = 1$, *then* F *is equivalent to* F_θ *for some* θ *with* $0 < \theta \le \pi/2$.

(iv) the case $N > 2n$.

Huang-Ji-Xu [HJX] obtained the following theorem.

Theorem 4.9 (**[HJX]**) *Let* F *be a rational proper map from* $\mathbf{B}^n$ *into* $\mathbf{B}^N$.

(i) *If* $n \ge 4$ *and* $N \le 3n - 4$, *then* F *is equivalent to* F'_θ *for some* θ *with* $0 \le \theta \le \pi/2$, *where* $F'_\theta = (F_\theta, 0)$.

(ii) *If* $n \ge 3$, $N \le 3n - 3$ *and* $\kappa_0 = 1$, *then* F *is equivalent to* F'_θ *for some* θ *with* $0 < \theta \le \pi/2$.

(iii) *If* $n \ge 3$ *and* $\kappa_0 = 1$, *then* $\deg(F) \le (N-1)/(n-1)$.

References

[Al77] H. Alexander, *Proper holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **26,** (1977) 137-146.

[CS83] J. Cima, T.J. Suffridge, *A reflection principle with applications to proper holomorphic mappings*, Math. Ann. **265,** (1983) 489–500.

[CS89] J. Cima, T.J. Suffridge, *Proper holomorphic mappings from the two-ball to the three-ball,* Trans. Amer. Math. Soc. **311,** (1989) 227-239.

[CS90] J. Cima, T.J. Suffridge, *Boundary behavior of rational proper maps,* Duke Math. J. **60,** (1990) 135-138.

[DA88] J. P. D'Angelo, *Proper holomorphic maps between balls of different dimensions*, Mich. Math. J. **35,** (1988) 83–90.

[DA93] J. P. D'Angelo, *Several complex variables and the geometry of real hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

[Do90] A. Dor, *Proper holomorphic maps between balls in one co-dimension*, Ark. Mat. **28,** (1990), 49–100.

[Fa82] J. Faran, *Maps from the two ball to the three ball,* Invent. Math. **68,** (1982) 441–475.

[Fa86] J. Faran, *The linearity of proper holomorphic maps between balls in the low codimensional case*, J. Diff. Geom. **24,** (1986) 15–17.

[Fo86] F. Forstnerič, *Proper holomorphic maps from balls,* Duke Math. J. **53,** (1986) 427-441.

[Fo89] F. Forstnerič, *Extending proper holomorphic mappings of positive codimension*, Invent. Math. **95**, (1989), 31–62.

[Fo92] F. Forstnerič, *Proper holomorphic mappings: A survey, Several complex variables: proceedings of the Mittag-Leffler Institute, Mathematical notes* **38** (1992), 297–363.

[Ha91] H. Hamada, *Monomial proper maps between balls of different dimensions,* Bull. Kyushu Kyoritsu Univ. Fac. Engineer. **15**, (1991) 41-43.

[Ha05] H. Hamada, *Rational proper holomorphic maps from* $\mathbf{B}^n$ *into* $\mathbf{B}^{2n}$, Math. Ann., **331**, (2005) 693–711.

[Hu99] X. Huang, *On a linearity problem of proper holomorphic maps between balls in complex spaces of different dimensions*, J. Diff. Geom. **51**, (1999) 13–33.

[Hu01] X. Huang, *On some problems in several complex variables and CR geometry,* Studies in Advanced Mathematics, Volume 20, American Mathematical Society and International Press, 2001.

[Hu03] X. Huang, *On a semi-rigidity property for holomorphic maps,* Asian J. Math. **7**, (2003), 463–492.

[HJ01] X. Huang, S. Ji, *Mapping* $\mathbf{B}^n$ *into* $\mathbf{B}^{2n-1}$, Invent. Math. **145**, (2001) 219–250.

[HJX05] X. Huang, S. Ji and D. Xu, *Several results for holomorphic mappings from* $\mathbf{B}^n$ *into* $\mathbf{B}^N$, Contemporary Mathematics **368**, (2005), 267–292.

[HJX] X. Huang, S. Ji and D. Xu, *Proper holomorphic mappings from* $\mathbf{B}^n$ *into* $\mathbf{B}^N$ *with geometric rank one*, preprint.

[We79] S. Webster, *On mapping an* n*-ball into an* $(n+1)$*-ball in the complex space*, Pac. J. Math. **81**, (1979) 267–272.