日 本 数 学 会

２００５年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

２００５年9月

於 岡山大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．
2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．
3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．
4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．
5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9月21日(水)　第 VIII 会場

8:30 ～ 12:15

1	西本勝之 (デカルト出版)*	On the N-fractional calculus of some products of some power functions	15
2	S.-T. Tu (Chung Yuan Ch. Univ.)* P.-Y. Wang (Chung Yuan Ch. Univ.) 西本勝之 (デカルト出版)	N-fractional calculus of functions $\{\log^n(z-c)\cdot(z-c)^p\}_\alpha$	15
3	S.-D. Lin (Chung Yuan Ch. Univ.)* W.-C. Ling (Chung Yuan Ch. Univ.) 西本勝之 (デカルト出版) H. M. Srivastava (Univ. of Victoria)	A simple fractional-calculus approach to the solutions of the Bessel differential equation of general order and some of its applications	15
4	尾和重義 (近畿大理工)* 関根忠行 (日大薬) 山川陸夫 (芝浦工大工)	Notes on Sakaguchi functions 2	10
5	W.-C. Lin (Fujian Normal 大)* 森　正気 (山形大理) 藤解和也 (金沢大自然)	Uniqueness theorems in an angular domain	15
6	城崎　学 (阪府大工)	2点集合族が有理形関数に対する一意性を持つための条件について	15
7	戸田暢茂*	On the truncated defect relation for holomorphic curves	15
8	石崎克也 (日本工大)* 柳原二郎	Schröder の函数方程式と Nevanlinna の第2主要定理について	15
9	二村俊英 (大同工大)* 水田義弘 (広島大総合科)	弱単調ソボレフ関数の連続性について	15
10	二村俊英 (大同工大)* 水田義弘 (広島大総合科)	変動指数をもつ弱単調ソボレフ関数の連続性について	15
11	水田義弘 (広島大総合科)* 大野貴雄 (広島大理) 下村　哲 (広島大教育)	変動指数をもつ関数空間における極大作用素の可積分性について	15
12	水田義弘 (広島大総合科)* 下村　哲 (広島大教育)	変動指数をもつ関数のリースポテンシャルに対するソボレフの不等式について	15
13	北浦啓次 (広島大理)* 水田義弘 (広島大総合科)	優重調和関数の球面積分平均とリース分解定理について	15

14:15 ～ 16:30

14	前田文之*	右辺が一般測度の非線形楕円型方程式のディリクレ問題に対する再正規化解	15
15	宮本育子 (千葉大理)* 吉田英信 (千葉大自然)	コーン内の a-minimally thin な集合の特徴付け	15
16	鈴木紀明 (名大多元数理) 西尾昌治 (阪市大理)	Gleason problem for parabolic Bergman spaces	15
17	下村勝孝 (茨城大理)*	半ユークリッド空間の動径方向計量に関する caloric morphism	15
18	米田力生 (小樽商科大)*	Integration operators with closed range	10
19	斎藤三郎 (群馬大工)* 松浦　勉 (群馬大工)	Sampling theory, reproducing kernels and the Tikhonov regularization	15

20 中井三留 * ピカール次元の基本摂動 …… 15
多田俊政 (大同工大)

21 S. Kanas (Rzeszów Univ. of Tech.) * 楕円内部の等角表現について …… 15
須川敏幸 (広島大理)

16:45 ～ 17:45 特別講演

柳原 宏 (山口大工)* 微分が有界な解析函数の値の変化域

9 月 22 日 (木) 第 VIII 会場

8:45 ～ 12:15

22 松崎克彦 (お茶の水女大理)* An estimate on the Petersson series …… 15

23 藤川英華 (東工大情報理工)* 正則自己被覆をもつリーマン面のタイヒミュラー空間上の力学系 …… 15
谷口雅彦 (京大理)
松崎克彦 (お茶の水女大理)

24 中根静男 (東京工芸大)* Branner–Hubbard–Lavaurs deformation of parabolic cubic polynomials …… 15

25 木坂正史 (京大人間環境)* 無限遠点を metric global attractor にもつ超越整関数の様々な例について …… 15

26 荒木義明 (東大数理)* 3-dimensional extension of Maskit slice for once-punctured tori …… 15
糸 健太郎 (名大多元数理)
小森洋平 (阪市大理)

27 小森洋平 (阪市大理)* クライン群で一意化される代数曲線について …… 15

28 中西敏浩 (島根大総合理工)* 穴あき曲面群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現とトレミー型トレース恒等式 …… 15

29 今吉洋一 (阪市大)* ある種の小平曲面から定まる正則族の正則切断について …… 15
能城敏博 (阪市大)

30 青柳美輝 (上智大理工)* 階層型神経回路網における学習理論のゼータ関数と特異点解消 …… 15
渡辺澄夫 (東工大精密工学研)

31 奥間智弘 (群馬高専)* Universal abelian covers of certain surface singularities …… 15

32 足立幸信 * On a Kobayashi hyperbolic manifold N modulo a closed set Δ_N and its applications …… 15

33 児玉秋雄 (金沢大自然) An intrinsic characterization of the direct product of balls …… 20
清水 悟 (東北大理)

14:15 ～ 15:15

34 濱野佐知子 (奈良女大人間文化)* 筒状域における余零の問題 …… 15

35 古島幹雄 (熊本大理)* Non-projective compactifications of $\mathbb{C}^3$ (I) …… 15

36 牟田正憲 (九州産大工)* トロイダル群の基本群のコホモロジー …… 15
梅野高司 (九州産大工)

37 阿部幸隆 (富山大理)* kind k の準アーベル多様体について …… 15
梅野高司 (九州産大工)

15:30 ～ 16:30 特別講演

阿部幸隆 (富山大理)* Severi の意味の準アーベル関数と準アーベル多様体

16:45 ～ 17:45 特別講演

Y.-L. Shen (Suzhou Univ.)* Biholomorphic isomorphisms of fiber spaces over Teichmüller spaces

1 On The N-Fractional Calculus of Some Products of Some Power Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article, N- fractional calculus of products of power functions

$$((z-c)^{\alpha}\cdot(z-c)^{\beta})_{\gamma}\ ,\ ((z-c)^{\beta}\cdot(z-c)^{\alpha})_{\gamma}\ ,\ \text{and}\ \ ((z-c)^{\alpha+\beta})_{\gamma}$$

are discussed again. (In this article $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}$, for our convenience.)

A main theorem is shown asfollows, for example.

Theorem 1. *Let*

$$P = P(\alpha, \beta, \gamma) := \frac{\sin\pi\alpha \cdot \sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)}{\sin\pi(\alpha+\beta)\cdot\sin\pi(\gamma-\alpha)} \quad \left(|P(\alpha,\beta,\gamma)| = M < \infty\right) \tag{1}$$

and

$$Q = Q(\alpha,\beta,\gamma) := P(\beta,\alpha,\gamma) \qquad \left(|P(\beta,\alpha,\gamma)| = M < \infty\right) \tag{2}$$

When $\alpha, \beta, \gamma \notin \boldsymbol{Z}$, *we have* ;

(i) $$((z-c)^{\alpha}\cdot(z-c)^{\beta})_{\gamma} = e^{-i\pi\gamma}P(\alpha,\beta,\gamma)\,\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha-\beta)}(z-c)^{\alpha+\beta-\gamma}, \tag{3}$$

$$(\,\mathrm{Re}(\alpha+\beta+1) > 0,\ \ (1+\alpha-\gamma) \notin Z_0^-\ ),$$

(ii) $$((z-c)^{\beta}\cdot(z-c)^{\alpha})_{\gamma} = e^{-i\pi\gamma}Q(\alpha,\beta,\gamma)\,\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha-\beta)}(z-c)^{\alpha+\beta-\gamma}, \tag{4}$$

$$(\,\mathrm{Re}(\alpha+\beta+1) > 0,\ \ (1+\beta-\gamma) \notin Z_0^-\ )$$

(iii) $$((z-c)^{\alpha+\beta})_{\gamma} = e^{-i\pi\gamma}\,\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha-\beta)}(z-c)^{\alpha+\beta-\gamma}, \tag{5}$$

where

$$z-c \neq 0,\quad \left|\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha-\beta)}\right| < \infty\ .$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field Produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac Calc. Vol. 24, Nov. (2003),29 - 36.

[6] K. Nishimoto, Ding- Kuo Chyan, Shy- Der Lin and Shih- Tong Tu ; On some infinite suns derived by N- fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol.20 (2001), 91 - 97.

[7] Pin Yu Wang, Tsu- Chen Wu and Shih- Tong Tu; Some Infinite Sums via N- fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol.21, May (2002), 71 -77.

[8] Shy- Der Lin, Shih- Tong Tu , Tsai- Ming Hsieh and H.M. Srivastava ; Some Finite and Infinite Sums Associated with the Digamma and Related Functions, J. Frac.Calc.Vol.22, Nov. (2002), 103- 114.

[9] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions and Some Identities (Continue), J. Frac. Calc. Vol.22, Nov. (2002), 59 - 65.

[10] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus (1974), Academic Press.

[11] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[12] S. G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.

[13] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Diffetial Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[14] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No. 301, (1994), Longman.

[15] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.

[16] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

2 N-Fractional Calculus of Functions

$$\left\{\log^{n}(z-c)\cdot(z-c)^{p}\right\}_{\alpha}$$

Shih-Tong Tu, Pin-Yu Wang Chung Yuan Christian Univ., Taiwan

and

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In a five - volume work published recently, K. Nishimoto [1] has presented a systematic account of the theory and applications of fractional calculus in number of areas (such as ordinary and partial differential equations, special functions, and summation of series).

As for the fundamental formulas, recently, several workers demonstrated N - fractional calculus of the power and logarithmic functions (cf. [2] - [8]).

The object of the present paper is to show the simplest closed form for the functions

$$\left\{\log^{n}(z-c)\cdot(z-c)^{p}\right\}_{\alpha}, \quad (n\in \boldsymbol{Z}^{+}).$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991),Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the power and logarithmic functions and some identities, J. Frac. Calc., Vol.21, May, (2002), 1 - 6.

[3] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the power and logarithmic functions and some identities(continue), J. Frac. Calc., Vol.22, Nov., (2002), 59 - 65.

[4] Shih - Tong Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994), 35 - 43.

[5] Shih - Tong Tu , D. - K.Chyan and T. - C. Wu ; Method for finding $D_{z}^{-n}\log^{k}z$ via, fractional calculus and Psi functions, J. Frac. Calc. Vol. 11, May (1997), 67 - 73.

[6] K. Nishimoto and T.- C. Wu ; On $(z^{m}\log z)_{-n}$ and $(e^{mz}\log z)_{-n}$ where $m\in \boldsymbol{Z}_{0}^{+}$ and $n\in \boldsymbol{Z}^{+}$ (A serendipity in N- fractional calculus), J. Frac.Calc.Vol. 13, May, (1998), 29 - 36.

[7] K. Nishimoto, Shih - Tong Tu and Pin - Yu Wang ; N- fractional calculus of the power function$(z-c)^{-b}$ and Beta functions, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 89 - 102.

[8] Shih - Tong Tu , Pin - Yu Wang and K. Nishimoto ; N- fractional calculus of functions $\left\{\log^{p}(z-c)\right\}_{\alpha}$, J. Frac. Calc. Vol. 26, Nov., (2004), 81 - 90.

3 A Simple Fractional- Calculus Approach to the Solutions of the Bessel Differential Equation of General Order and Some of Its Applications

Shy - Der Lin, Wei-Chich Ling, Chung Yuan Christian Univ., Taiwan

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

and

H. M. Srivastava University of Victoria, B. C., Canada

Abstract

In many recent works, several authors demonstrated the usefulness of fractional calculus operators in the derivation of (explicit) particular solutions of a significantly large number of linear ordinary and partial differential equations of the second and higher orders. The main object of the present paper is to show how this simple fractional- calculus approach to the solutions of the classical Bessel differential equation of general order would lead naturally to several interesting consequences which include (for example) an alternative investigation of the power-series solutions obtainable usually by the Frobenius method. The methodology presented here is based largely upon some of the general theorems on (explicit) particular solutions of a certain family of linear ordinary fractional differintegral equations.

2000 Mathematics Subject Classification ; Primary 26 A 33 ; Secondary 33C10, 34A05.

Key Words and Phrases ; Fractional Calculus, Bessel differential equation, Fuchsian (and non- Fuchsian) equations, differintegral equations, (ordinary and partial) linear differential equations, index law, linearity property, generalized Leibniz rule, Frobenius method, Power -series solutions, Bessel functions, trigonometric functions.

4 Notes on Sakaguchi functions 2

尾和 重義 (近畿大学)
関根 忠行 (日本大学)
山川 陸夫 (芝浦工大)

2004 年度秋季分科会では，order α の坂口関数についていくつかの結果を報告したが，ここでは tz ($|t| \leqq 1$) に関しての order α 星型関数について同様の考察を若干試みる．

$\mathcal{A}$ を単位内領域 $\mathbb{U} = \{|z| < 1\}$ で正則な関数 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ の族とし，$\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}(\alpha, t)$ を次のように定める：

$$\mathcal{S}(\alpha, t) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \frac{(1-t)zf'(z)}{f(z) - f(tz)} \right\} > \alpha \quad 0 < \alpha < 1, |t| \leqq 1, t \neq 1.$$

$\mathcal{S}(0, -1)$ は $-z$ に関して星型な関数の族であるが，坂口先生 [2] により導入されたので坂口関数とも呼ばれている．ちなみに Goodman[1] により導入され Rønning 等によって調べられて来た一様星型関数の族は次である：

$$\mathcal{UST} = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \frac{(z-\zeta)f'(z)}{f(z) - f(\zeta)} \right\} > 0, \quad (z, \zeta) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}.$$

前回我々[2] は $\mathcal{S}(\alpha, -1)$ について調べた．今回は $\mathcal{S}(\alpha, t)$ についてである．

Theorem 1. *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{|n - u_n| + (1-\alpha)|u_n|\}|a_n| \leqq 1 - \alpha$$

then $f(z) \in \mathcal{S}(\alpha, t)$. Where

$$u_n = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}.$$

Theorem 2. *If $f(z) \in \mathcal{S}(\alpha, t)$, then*

$$|a_n| \leqq \frac{\beta}{|v_n|} \left\{ 1 + \beta \sum_{j=2}^{n-1} \frac{|u_j|}{|v_j|} + \beta^2 \sum_{j_2 > j_1}^{n-1} \sum_{j_1=2}^{n-2} \frac{|u_{j_1} u_{j_2}|}{|v_{j_1} v_{j_2}|} + \beta^3 \sum_{j_3 > j_2}^{n-1} \sum_{j_2 > j_1}^{n-2} \sum_{j_1=2}^{n-3} \frac{|u_{j_1} u_{j_2} u_{j_3}|}{|v_{j_1} v_{j_2} v_{j_3}|} + \cdots\cdots + \beta^{n-2} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{|u_j|}{|v_j|} \right\}$$

Where

$$\beta = 2(1-\alpha), \quad v_n = n - u_n .$$

等である．また

$$\mathcal{T}(\alpha, t) = \{f(z) \in \mathcal{A} : zf'(z) \in \mathcal{S}(\alpha, t)\}$$

と定めると，$\mathcal{T}(\alpha, t)$ に対しても類似の結果が得られる．

参考文献

[1] A. W. Goodman, *On Uniformly starlike functions*, J. Math. Anal. Appl. **155**(1991), 364–370.

[2] S. Owa, T. Sekine and R. Yamakawa, *Notes on Sakaguchi functions*, RIMS. 講究録, **1414**(2005), 76–82.

[3] K. Sakaguchi, *On a certain univalent mapping*, J. Math. Soc. Japan **11**(1959), 72 – 75.

5 Uniqueness theorems in an angular domain

Weichuan Lin	**Fujian Normal University**
Seiki Mori	**Yamagata University**
Kazuya Tohge	**Kanazawa University**

Since R. Nevanlinna proved his celebrated 'four-CM' and 'five-IM' theorems, there have been given a lot of results on the uniqueness of meromorphic functions in the plane $\mathbb{C}$ under a variety of value-sharing conditions. Although examples such as e^z and e^{-z} with values 0, ± 1 and ∞ show that 'four' and 'five' in those theorems cannot be replaced by any smaller number, the Weierstrass Product Theorem says that 'three-CM' is in general a sufficient condition to deduce the uniqueness of meromorphic functions in $\mathbb{C}$ with no *exceptional* values.

In connection to this fact, F. Gross proposed an idea of set-sharing conditions and asked about the minimum number or the smallest cardinality of the sets which imply the uniqueness of meromorphic functions sharing those sets.

Here we put $f_a(z) = f(z) - a$ for $a \in \mathbb{C}$ and $f_\infty(z) = 1/f(z)$. Given a domain $X \subset \mathbb{C}$, a discrete set $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and a meromorphic function f in $\mathbb{C}$, we define a 'set' $E_X(S, f) \subset \mathbb{C}$ by

$$E_X(S,f) \quad = \quad \bigcup_{a \in S} \{\, z \in \overline{X} \;\mid\; f_a(z) = 0, \;\text{CM}\,\},$$

where $\overline{X}$ is the closure of the domain X relative to $\mathbb{C}$ and 'CM' means that each of the roots $z \in \overline{X}$ is repeated so many times as its multiplicity.

Now we take *three* sets S_j $(j = 1, 2, 3)$ as follows: $S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{\infty\}$ and $S_3 = \{\, w \mid w^n(w + a) - b = 0\,\}$, where $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ such that the algebraic equation $w^n(w + a) - b = 0$ has no multiple roots.

In 1998 and 2004, H. X. Yi [Yi], Yi and W. C. Lin [WY] proved the following:

Theorem A. *1) Let $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. If f and g are two entire functions satisfying $E_{\mathbb{C}}(S_j, f) = E_{\mathbb{C}}(S_j, g)$ for $j = 1, 3$, then $f \equiv g$.*

2) Let $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. If f and g are two meromorphic functions in $\mathbb{C}$ satisfying $E_{\mathbb{C}}(S_j, f) = E_{\mathbb{C}}(S_j, g)$ for $j = 1, 2, 3$ and $\Theta(\infty, f) > 0$, then $f \equiv g$.

In this talk, we deal with a problem of uniqueness for meromorphic functions defined in $\mathbb{C}$ under some S_j-sharing conditions in a *sector* instead of the whole plane $\mathbb{C}$. We will consider actually the following question about a sectrical counterpart of Theorem A: *Does there exist an angular domain* $X = X(\alpha, \beta) := \{ z \,|\, \alpha < \arg z < \beta \}$ $(0 \le \alpha < \beta \le 2\pi)$ *such that* $f \equiv g$ *is always the case when* f *and* g *are two entire or meromorphic functions in* $\mathbb{C}$ *satisfying* $E_X(S_j, f) = E_X(S_j, g)$ *for* $j = 1, 2, 3$*?*

As a partial answer to this question, we prove the following:

Theorem 1. *Let* f *be a meromorphic function in* $\mathbb{C}$ *of order* λ *and lower order* $\mu \in (1/2, \infty)$.

1) Assume that f *is an entire function. Then for each* $\sigma < \infty$ *with* $\mu \le \sigma \le \lambda$, *there exists a sector* $X(\alpha, \beta)$ *whose opening* $\beta - \alpha$ *is larger than* π/σ *when* $\sigma \le 1$, *and* $2\pi - \pi/\sigma$ *when* $\sigma > 1$ *such that if the conditions* $E_{\mathbb{C}}(S_1, f) = E_{\mathbb{C}}(S_1, g)$ *and* $E_X(S_3, f) = E_X(S_3, g)$ $(n \ge 2)$ *hold for an entire function* g *of finite order or more generally with the growth satisfying either* $\log T(r, g) = O(\log T(r, f))$ *or* $\dfrac{\log\log T(r, g)}{\min\{\log r,\ \log T(r, f)\}} \to 0$ *holds as* $r \to \infty$ *possibly outside a set of finite linear measure, then* $f \equiv g$.

2) Assume that $\delta := \delta(\iota, f) > 0$ *for some* $\iota \ne 0, -a$. *Then for each* $\sigma < \infty$ *with* $\mu \le \sigma \le \lambda$ *there exists an angular domain* $X = X(\alpha, \beta)$ *with* $0 \le \alpha < \beta$ *and*

$$\beta - \alpha > \max\left\{ \frac{\pi}{\sigma},\ 2\pi - \frac{4}{\sigma} \arcsin \sqrt{\frac{\delta}{2}} \right\},$$

such that if the conditions $E_{\mathbb{C}}(S_1, f) = E_{\mathbb{C}}(S_1, g)$ *and* $E_X(S_j, f) = E_X(S_j, g)$ $(j = 2, 3)$ $(n \ge 3)$ *hold for a meromorphic function* g *in* $\mathbf{C}$ *with the growth mentioned above, then* $f \equiv g$.

We will illustrate the necessity of those assumptions in 1) and 2) of Theorem 1 with examples. If time permits, the infinite order case will be discussed, also.

References

[Yi] H. X. Yi, On a question of Gross concerning uniqueness of entire functions, Bull. Austral. Math. Soc., **57** (1998), 343–349.

[YW] H. X. Yi and W. C. Lin, Uniqueness theorems concerning a question of Gross, Proc. Japan Acad., **80**, Ser. A, no.7 (2004), 136–139.

6 2点集合族が有理形関数に対する一意性を持つための条件について

城崎　学　　　　　　大阪府立大学工学部

定義. $S_j\ (1 \leq j \leq q)$ を $\hat{C}$ の互いに交わらない有限集合とする. $\{S_1, \cdots, S_q\}$ が**有理形関数に対する一意性**をもつとは, C 上の非定数有理形関数 f, g に対して,

$$f^{-1}(S_j) = g^{-1}(S_j) \quad (CM) \quad (1 \leq j \leq q)$$

から $f = g$ が導かれるときにいう.

例えば Nevanlinna の 4 点定理より, 任意の順序で非調和比が -1 にならない 4 点 $a_1, \cdots, a_4$ をとれば, $\{\{a_1\}, \cdots, \{a_4\}\}$ は有理形関数に対する一意性をもつ.

2 点集合族については, 次の結果が知られていた.

定理 A. q は 6 以上の整数とし, $\xi_1, \eta_1, \cdots, \xi_q, \eta_q$ は相異なる点とする. 相異なる 3 つの j について ξ_j と η_j を交換する 1 次変換が存在しないと仮定する. このとき, $S_j = \{\xi_j, \eta_j\}$ とすれば, $\{S_1 \cdots, S_q\}$ は有理形関数に対する一意性をもつ.

今回は, これより弱い条件の下, 同様の結果が得られたことを報告する.

定義. $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を $\hat{C}$ の分割とする, i.e., S_α は互いに交わらない $\hat{C}$ の部分集合で, $\cup_{\alpha \in A} S_\alpha = \hat{C}$. このとき, 点 $z \in \hat{C}$ が 1 次変換 T

のこの分割に対する**渡り歩き点**とは，z と $T(z)$ が同じ S_α に入っていないときにいう．

定理． q は 6 以上の整数として，$S_1, \cdots, S_q$ は互いに交わらない 2 点集合とする．分割 $\{S_0, S_1, \cdots, S_q\}$ に対して，恒等変換以外の任意の 1 次変換が 3 個以上の渡り歩き点をもつならば，$\{S_1, \cdots, S_q\}$ は有理形関数に対する一意性をもつ．ただし，$S_0 = \hat{\boldsymbol{C}} \setminus \left(\cup_{j=1}^{q} S_j\right)$.

注意． 一般の族 $\{S_1, \cdots, S_q\}$ をとったとき，定理のように分割を考えて，それに対し渡り歩き点が 2 個以下の恒等変換でない 1 次変換 T が存在すれば，有理形関数 f を適当にとって $g = T(f)$ とすることにより，族 $\{S_1, \cdots, S_q\}$ が有理形関数に対する一意性を持たないことが分かる．

References

[N] R. Nevanlinna, *Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen*, Acta Math. **48** (1926), 367–391.

[OS] T. Okamoto and M. Shirosaki, *A characterization of collections of two-point sets with the uniqueness property, to appear.*

7 On the truncated defect relation for holomorphic curves

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. **(a)** Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, we put

$$(\boldsymbol{a}, f(z)) = a_1 f_1(z) + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}(z); \quad (\boldsymbol{a}, f) = a_1 f_1 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1};$$

for a positive integer k, let $\nu(c)$ be the order of zero of $(\boldsymbol{a}, f(z))$ at $z = c$;

$$n_k(r, \boldsymbol{a}, f) = \sum_{|c| \leq r} \min\{\nu(c), k\};$$

and for $r > 0$

$$N_k(r, \boldsymbol{a}, f) = \int_0^r \frac{n_k(t, \boldsymbol{a}, f) - n_k(0, \boldsymbol{a}, f)}{t} dt + n_k(0, \boldsymbol{a}, f) \log r.$$

We put

$$\delta_k(\boldsymbol{a}, f) = 1 - \limsup_{r \to \infty} N_k(r, \boldsymbol{a}, f)/T(r, f),$$

where $T(r, f)$ is the characteristic function of f.

When $(\boldsymbol{a}, f)$ has at least one zero, we say that $\boldsymbol{a}$ has multiplicity m if all the zeros of the function $(\boldsymbol{a}, f(z))$ have multiplicity at least m, while at least one zero has multiplicity m. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has no zero, we set $m = \infty$. We put

$$\mu_k(\boldsymbol{a}, f) = 1 - \frac{k}{\max(m, k)}.$$

Then, $0 \leq \mu_k(\boldsymbol{a}, f) \leq \delta_k(\boldsymbol{a}, f) \leq 1$ and $\mu_k(\boldsymbol{a}, f) = 1$ if and only if $m = \infty$.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$.

Defect Relation (see [1]($N = n$), [3]($N > n$)). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequality:

$$\sum_{j=1}^{q} \mu_n(\boldsymbol{a}_j, f) \leq \sum_{j=1}^{q} \delta_n(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1.$$

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in P\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

Let

$$\mathcal{O} = \{P \subset Q \mid 0 < \#P \leq N + 1\}$$

and

$$\lambda = \min_{P \in \mathcal{O}} d(P)/\#P.$$

Proposition. $\sum_{j=1}^{q} \delta_n(\boldsymbol{a}_j, f) \leq \dfrac{n+1}{\lambda}.$

2. Result.

Theorem 1. When $n \geq 2$, there exist f and X such that for any $1 \leq k \leq n-1$

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \mu_k(\boldsymbol{a}, f) = \infty, \quad \text{so that} \quad \sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta_k(\boldsymbol{a}, f) = \infty.$$

We apply the method used in [2] to obtain this theorem..

Theorem 2. Suppose that n is even and that $N > n$.
If $\lambda \geq (n+1)/(2N - n + 1)$, then

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_n(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1 - 1/2n.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica, 7(1933), 5-31.

[2] M. Hussain: The defects and deviations of entire curves. Teor. Funkcii. Funkcional. Anal. i Prilozen., 20(1974), 161-171.

[3] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic curvess. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 269-3(1983), 547-552.

8 Schröder の函数方程式と Nevanlinna の第 2 主要定理について

石崎　克也（日本工業大学）
柳原　二郎

本講演では, Schröder 函数を中心に, 函数方程式で定義される複素平面上超越的有理型函数の値分布についての研究成果を報告する. 特に, Nevanlinna の第 2 主要定理において等号が成り立つかどうかを調べたい. 有理型函数 $f(z)$ に対して

$$N_1(r)+m(r,\infty;f)+\sum_{j=1}^{M}m(r,c_j;f)\le 2T(r,f)+S(r),$$

ここで

$$N_1(r)=N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+2N(r,f)-N(r,f'),$$

$S(r)$ は 測度有限な除外区間の外で $O(\log rT(r,f))$, $r\to\infty$ を満たす量である. $f(z)$ が位数有限であれば $S(r)$ は $O(\log r)$ としてよく, 除外区間を考えなくて良い.

$R(w)$ を次数 2 以上の有理函数, s ($|s|>1$) を複素数とする. Schröder の函数方程式

$$f(sz)=R(f(z)), \tag{1}$$

において, $R(0)=0$, $R'(0)=s$ を仮定する. このとき, 有理型函数解 $f(z)$ が 条件 $f(0)=0$ and $f'(0)=1$ のもとに一意的に存在する. ここでは, この $f(z)$ を Schröder 函数と呼ぶことにする. Schröder 函数は超越的であって, その増大の位数は $\rho(f)=\log\deg R/\log|s|$ である. 更に, ある定数 $0<K_1<K_2$ に対して $K_1r^{\rho(f)}<T(r,f)<K_2r^{\rho(f)}$ が成り立つことが知られている.

不足値については, $R(w)$ の iteration による不足値の集合 $E(R)$ と $R(w)$ の m.f. value, m.f. pair の集合と $f(z)$ の Picard value の集合との 3 集合が一致することが知られている [1], [4], [6]. また, $R(w)$ の Julia 集合の原点における極限集合と $f(z)$ の Julia(Borel) 方向が一致することも得られている [3]. Nevanlinna の第 2 主要定理に関係して以下の結果を報告する.

Theorem [2] $E(R)=\emptyset$ または $E(R)=\{\infty\}$ の場合

$$N_1(r)+m(r,\infty;f)+\sum_{j=1}^{M}m(r,c_j;f)\ge 2T(r,f)(1+o(1)),$$

ここで, $c_j\in\mathbb{C}$, $j=1,2,\dots,M$, $M\ge 2$, は異なる複素定数である.

$E(R) = \{b, \infty\}$ の場合

$$N_1(r) + m(r, \infty; f) + \sum_{j=1}^{M} m(r, c_j; f) \geq 2T(r, f) + O(\log r),$$

ここで, $c_1 = b$ とし $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, M$, $M \geq 2$, は異なる複素定数である.

微分方程式や函数方程式があたえられ, 解の存在が示されるとこれに引き続いて, 解の値分布（増大度・不足値・分岐値・漸近値）などを調べることはある意味自然と思われる. 第2主要定理で等号が成立するかどうかを調べることもそれらの研究の一環と考えられる. しかし, 微分方程式場合に有効な Clunie の補題（対数微分の定理）[5] などは, Schröder 函数を取り扱う際には有効ではなく, 証明には [1] のアイデアを応用した.

References

[1] Eremenko, A. E. and M. L. Sodin: Iteration of rational functions and the distribution of the values of the Poincaré functions. - J. Soviet Math. 58, 1992, 504–509.

[2] Ishizaki, K. and N. Yanagihara: Value disributions of the Schröder functions. - Preprint.

[3] Ishizaki, K. and N. Yanagihara: Borel and Julia directions of meromorphic Schröder functions. - Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 139(1), 2005, 139–147.

[4] Okuyama, Y.: Valiron, Nevanlinna and Picard exceptional sets of iterations of rational functions. - Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 81(2), 2005, 23–26.

[5] Wittich, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. - Ergebnisse Math. Grenzgeb. Heft 8, Springer–Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

[6] Yanagihara, N.: Exceptional values for meromorphic solutions of some difference equations. - J. Math. Soc. Japan 34, 1982, 489–499.

Email: ishi@nit.ac.jp, yanagihara-nm@icntv.ne.jp
HP: http://leo.nit.ac.jp/ ishi/ishi-top.htm

9 弱単調ソボレフ関数の連続性について

二村俊英　大同工大
水田 義弘　広島大学・総合科学部

ソボレフ関数 $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ が Manfredi の意味で弱単調関数であるとは, 任意の相対コンパクトな部分領域 G と 2 つの定数 $k \le K$ に対して,

$$(k-u)^+ \qquad \text{かつ} \qquad (u-K)^+ \in W^{1,p}_0(G)$$

ならば,

$$k \le u(x) \le K \qquad \text{for a.e. } x \in G$$

が成立するときをいう (cf. Manfredi [4]). ここに、$v^+(x) = \max\{v(x), 0\}$. もし, 弱単調関数が連続であれば, それは Lebesgue の意味で単調という (cf. Lebesgue [3]).

$p > n-1$ であれば, 弱単調関数 u は

$$|u(x) - u(y)|^p \le Cr^{p-n} \int_{2B} |\nabla u(z)|^p dz \tag{1}$$

を満たす. ここに, $x, y \in B$, $B = B(x_0, r_0)$ で $2B \subset D$ とする. (1) は $p \le n-1$ のときには成立しないことが知られている.

さて, $p = n-1 > 1$ として, 区間 $[0, \infty)$ 上の正値非減少関数 φ で

$(\varphi 1)$
$$\varphi(r^2) \le M\varphi(r) \qquad (r > 0)$$

$(\varphi 2)$
$$\int_0^1 \varphi(t^{-1})^{1/(2-n)} t^{-1} dt < \infty$$

となるものを考え,

$$\Phi(r) = \left(\int_0^r \varphi(t^{-1})^{1/(2-n)} t^{-1} dt \right)^{(n-2)/(n-1)}$$

かつ

$$\varphi_{n-1}(r) = r^{n-1}\varphi(r)$$

とおく.

主定理 弱単調ソボレフ関数 $u \in W^{1,n-1}_{loc}(D)$ $(n \geq 3)$ が

$$\int_D \varphi_{n-1}(|\nabla u(x)|)dx < \infty$$

を満たし, $B(x_0, 2r) \subset D$ とする. このとき, $x \in B(x_0, r)$ と $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$\begin{aligned}|u(x) - u(x_0)|^{n-1} &\leq Mr^{\varepsilon(n-1)} \\ &\quad + Mr^{-1}\Phi(r)^{n-1} \int_{B(x_0,2r)} \varphi_{n-1}(|\nabla u(z)|)dz\end{aligned}$$

Onninen ([7, Theorem 1.2, Example 1.3]) は $W^1L^{n-1,1}$ に属する弱単調関数を扱った.

参考文献

[1] T. Futamura and Y. Mizuta, Continuity of weakly monotone Sobolev functions, preprint.

[2] P. Koskela, J. J. Manfredi and E. Villamor, Regularity theory and traces of $\mathcal{A}$-harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 755-766.

[3] H. Lebesgue, Sur le probléme de Dirichlet, Rend. Cir. Mat. Palermo **24** (1907), 371–402.

[4] J. J. Manfredi, Weakly monotone functions, J. Geom. Anal. 4 (1994), 393–402.

[5] J. J. Manfredi and E. Villamor, Traces of monotone Sobolev functions, J. Geom. Anal. **6** (1996), 433–444.

[6] J. J. Manfredi and E. Villamor, Traces of monotone Sobolev functions in weighted Sobolev spaces, Illinois J. Math. **45** (2001), 403–422.

[7] J. Onninen, Differentiability of monotone Sobolev functions, Real Anal. Exchange **26** (2000/01), 761–772.

[8] M. Vuorinen, On functions with a finite or locally bounded Dirichlet integral, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **9** (1984), 177–193.

[9] M. Vuorinen, Conformal geometry and quasiregular mappings, Lectures Notes in Math. **1319**, Springer, 1988.

10 変動指数をもつ弱単調ソボレフ関数の連続性について

二村俊英　大同工大
水田 義弘　広島大学・総合科学部

$D \subset \mathbf{R}^n$ 上の連続関数 $p(\cdot) : D \to [1, \infty)$ に対して，

$$\int_D \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx < \infty \qquad (\exists \lambda > 0)$$

となる D 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(D)$ とし，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),D} = \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ \int_D \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \le 1 \right\}$$

で定める ([2, Kováčik-Rákosník])．さらに，$|\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(D)$ となる関数 $u \in L^{p(\cdot)}(D)$ からなる関数空間を $W^{1,p(\cdot)}(D)$ とする．

$\inf_{x \in D} p(x) \ge n$ のとき，弱単調関数 $u \in W^{1,p(\cdot)}(D)$ は連続である（すなわち，Lebesgue の意味 ([3]) で単調である）．

定理 1. $p(\cdot)$ は単位球 $\mathbf{B}$ 上の連続関数で

$$p(x) = n - \frac{a \log(e + \log(1/|x|))}{\log(e/|x|)}, \qquad p(0) = n$$

を満たす．$a \le 1$ のとき，弱単調関数 $u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbf{B})$ は原点で連続であり，

(i) $a < 1$ のとき，$\lim_{x \to 0} (\log(1/|x|))^{(1-a)/n} |u(x) - u(0)| = 0$.

(ii) $a = 1$ のとき，$\lim_{x \to 0} (\log(\log(1/|x|)))^{1/n} |u(x) - u(0)| = 0$.

単位球 $\mathbf{B}$ 上の連続関数 $p(\cdot)$ はその境界付近で

$$\left| p(x) - \left\{ n + \frac{a \log(e + \log(1/(1 - |x|)))}{\log(e/(1 - |x|))} \right\} \right| \le \frac{b}{\log(e/(1 - |x|))}$$

$(a \ge 0, b \ge 0)$ を満たし，$\mathbf{B}$ の内部では $p(x) > n$ とする．

定理 2. $\mathbf{B}$ 上の (弱) 単調関数 $u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbf{B})$ は $\||\nabla u|\|_{p(\cdot)} \le 1$ を満たす．このとき，$a > n - 1$ のとき，$|x - y| < 1/2$ となる $x, y \in \mathbf{B}$ に対し

$$|u(x) - u(y)| \le C(\log(1/|x - y|))^{(n-1-a)/n}.$$

定理 2 から $a > n-1$ のとき，$\mathbf{B}$ 上の弱単調関数 $u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbf{B})$ は，$\mathbf{B} \cup \partial\mathbf{B}$ 上に連続に拡張することができる．$0 \leq a \leq n-1$ のときには, Fatou の定理を示そう。

$\xi \in \mathbf{B}$，$\gamma \geq 1$ に対して

$$T_\gamma(\xi, c) = \{x \in \mathbf{B} : |x-\xi|^\gamma < c(1-|x|)\} \quad (c > 0)$$

とする．

定理 3　$\mathbf{B}$ 上の単調関数 $u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbf{B})$ に対して，次のような集合 $E \subset \mathbf{B}$ が存在する:

(i) $C_{p(\cdot)}(E; 2\mathbf{B}) = 0$.

(ii) 任意の $\xi \in \partial\mathbf{B} \subset E$ に対し，$\displaystyle\lim_{T_\gamma(\xi,c) \ni x \to \xi} u(x)$ が存在し，有限である．

参考文献

[1] P. Koskela, J. J. Manfredi and E. Villamor, Regularity theory and traces of $\mathcal{A}$-harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 755-766.

[2] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[3] H. Lebesgue, Sur le probléme de Dirichlet, Rend. Cir. Mat. Palermo **24** (1907), 371-402.

[4] J. J. Manfredi, Weakly monotone functions, J. Geom. Anal. **4** (1994), 393-402.

[5] J. J. Manfredi and E. Villamor, Traces of monotone Sobolev functions, J. Geom. Anal. **6** (1996), 433-444.

[6] J. J. Manfredi and E. Villamor, Traces of monotone Sobolev functions in weighted Sobolev spaces, Illinois J. Math. **45** (2001), 403-422.

[7] E. Villamor and B. Q. Li, Analytic properties of monotone Sobolev functions, Complex Variables Theory Appl. **46** (2001), 255-263.

[8] M. Vuorinen, Conformal geometry and quasiregular mappings, Lectures Notes in Math. **1319**, Springer, 1988.

11 変動指数をもつ関数空間における極大作用素の可積分性について

水田 義弘　広島大学・総合科学部
大野 貴雄　広島大学大学院・理学研究科
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

有界開集合 $G \subset \mathbf{R}^n$ 上の連続関数 $p(\cdot) : G \to [1, \infty)$ に対して,

$$\exists \lambda > 0 \text{ s.t.} \qquad \int_G \left| \frac{f(y)}{\lambda} \right|^{p(y)} dy < \infty$$

となる G 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(G)$ とし, そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),G} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_G \left| \frac{f(y)}{\lambda} \right|^{p(y)} dy \leq 1 \right\}$$

で定める (cf. Kováčik-Rákosník [4]). 特に, $p(x) = p_0$ (一定) のとき, $L^{p(\cdot)}(G) = L^{p_0}(G)$.

局所可積分関数 f に対して, 極大関数 Mf を次で定める:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

次の事実はよく知られている.

> **定理 A** (Stein [5]) (1) $1 < p_0 \leq \infty$ のとき, M は $L^{p_0}(G)$ から $L^{p_0}(G)$ への有界作用素である.
>
> (2) G が有界なとき, M は $L \log L(G)$ から $L^1(G)$ への有界作用素である. ここに, $L \log L(G)$ は Orlicz 空間である.

定理 A(1) に関連して, 変動指数 $p(\cdot)$ が

(p1) $1 < \inf_{x \in G} p(x) \leq \sup_{x \in G} p(x) < \infty$

(p2) $|p(x) - p(y)| \leq \dfrac{c}{\log(1/|x-y|)} \qquad (|x-y| < 1/e)$

を満たす時, L. Diening [1] は, M が $L^{p(\cdot)}(G)$ から $L^{p(\cdot)}(G)$ への有界作用素であることを証明した.

コンパクト集合 $K \subset G$ に対して, $K(r) = \{x \in G : \delta_K(x) < r\}$ とする. ここに, $\delta_K(x)$ は x と K の距離を表す. さらに、

(p3) $p(r) = 1 + \dfrac{a}{\log(1/r)} + \dfrac{b \log(\log(1/r))}{\log(1/r)}$

となるものに対して, $\delta_K(x)$ が十分小さいとき $p(x)=p(\delta_K(x))$ とする. 最近, 定理 A(2) と関連して, Hästö は, M が $L^{p(\cdot)}(G)$ から $L^1(G)$ への有界作用素となるための $p(\cdot)$ と K の条件を考察した.

定理 B (Hästö [3]). K は有界開集合 G 内のコンパクト集合とし, $n-1$ 次の Minkowski content が有限とする. このとき, M は $L^{p(\cdot)}(G)$ から $L^1(G)$ への有界作用素である.

二村・水田 [2] は $b=1$ の時について論じている.

この発表では、定理 B の拡張を行う. このために, 区間 $(0,\infty)$ 上連続かつ非増加な関数 k で, 次を満たすものを考える:

(k) $(\log(1/r))^{-\varepsilon_0}k(r)$ は $(0,r_0)$ 上単調増加

ここに、$\varepsilon_0>0, 0<r_0<1/e$. さらに、$\Phi_k$ は $[0,\infty)$ 上非負非減少関数かつ $\Phi_k(2t)\le C\Phi_k(t)$ で,

$$C^{-1}k(t^{-1})\le\int_1^t\frac{\Phi_k(s)}{s^2}ds\le Ck(t^{-1})\qquad({}^\forall t>2)$$

を満たす. $p(\cdot)$ は, $\delta_K(x)$ が十分小さいとき,

(p4) $p(x)=1+\dfrac{\log k(\delta_K(x))}{\alpha\log(1/\delta_K(x))}$

主定理. K は $n-\alpha$ 次の Minkowski content が有限である有界開集合 G 内のコンパクト集合とする. このとき, $\|f\|_{p(\cdot)}\le 1$ ならば,

$$\int_G\Phi_k(Mf(x))dx\le C.$$

参考文献

[1] L. Diening, Maximal functions in generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. **7**(2) (2004), 245–254.

[2] T. Futamura and Y. Mizuta, Maximal functions for Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1, preprint.

[3] P. Hästö, The maximal operator in Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1, to appear in Math Nachr.

[4] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[5] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

12 変動指数をもつ関数のリースポテンシャルに対するソボレフの不等式について

水田 義弘　広島大学・総合科学部
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

開集合 Ω 上の連続関数 $p(\cdot):\Omega \to (1,\infty)$ に対して，

$$\int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx < \infty \qquad (\exists\lambda > 0)$$

となる Ω 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ とし，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),\Omega} = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}$$

で定める ([5, Kováčik-Rákosník])．特に，$p(x) = p_0$ (一定) のとき，$L^{p(\cdot)}(\Omega) = L^{p_0}(\Omega)$.

局所可積分関数 f に対して，極大関数 Mf を次で定める:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{\Omega\cap B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

本講演では $p(\cdot)$ は,

(p1) $p_- = \inf_{x\in\mathbf{R}^n} p(x) > 1,\ p_\infty = \lim_{|x|\to\infty} p(x) > 1$;

(p2) $|p(x)-p(y)| \le \dfrac{C}{\log(e+1/|x-y|)} \qquad (x,y\in\mathbf{R}^n,\ |x-y|\le 1)$;

(p3) $|p(x)-p(y)| \le a_0\log(e+\log(e+|x|))/\log(e+|x|) + b_0/\log(e+|x|)$
$(|y| \ge |x|/2)$

を満たす $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数とする ($a_0 > 0,\ b_0 > 0$).

定理 1. $A > A_0 = a_0 n/p_\infty^2$ とする．$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ ならば,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left\{Mf(x)(\log(e+Mf(x)^{-1}))^{-A}\right\}^{p(x)} dx \le C$$

$a_0 = 0$ で Ω が有界領域のとき, 定理 1 は，L. Diening [2] が証明した．$a_0 = 0$ で一般領域のとき，Cruz-Uribe, Fiorenza and Neugebauer [1] が証明した.

$\mathbf{R}^n$ 上の関数 f に対する α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$I_\alpha f(x) = \int |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

を考える．次を仮定する．

(p4) $$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} p(x) < n/\alpha.$$

$$1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/n$$

とする．

定理 2. $A > A_0$ とする．$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ ならば，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left\{|I_\alpha f(x)|(\log(e + |I_\alpha f(x)|^{-1}))^{-A}\right\}^{p^\sharp(x)} dx \le C$$

Diening [3] は，$a_0 = 0$ のときについて論じている．
本報告の結果は [6] による．

参考文献

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Math. **28** (2003), 223–238.

[2] L. Diening, Maximal functions in generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. **7**(2) (2004), 245–254.

[3] L. Diening, Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. **263**(1) (2004), 31–43.

[4] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent, preprint.

[5] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[6] Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Riesz potentials with variable exponent satisfying a log-Hölder condition at infinity, to appear in J. Math. Anal. Appl.

13 優重調和関数の球面積分平均とリース分解定理について

水田 義弘　　広島大学・総合科学部
北浦 啓次　　広島大学大学院・理学研究科

ボレル可測関数 u の球面積分平均を

$$M(r,u) = \fint_{S(0,r)} u(x)\, dS(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(0,r)} u(x)\, dS(x)$$

で定める．ここで，σ_n は，単位球面 $S(0,1)$ の面積とする．

次の事実が知られている ([5])．

定理 A　$\mathbf{R}^2$ 上の優調和関数 u に対して，そのリース測度を $\mu = -(2\pi)^{-1}\Delta u$ とするとき，次は同値である：

(a) $u(x) = \int \log(1/|x-y|)\, d\mu(y) + h(x)$ となる $\mathbf{R}^2$ 上の調和関数 h が存在する．

(b) $\lim_{r\to\infty}(M(r,u) - \mu(B(0,r))\log r) = c$ となる $c \in \mathbf{R}$ が存在する．

(c) $\lim_{r\to\infty}(M(r^2,u) - 2M(r,u)) = c$ となる $c \in \mathbf{R}$ が存在する．

$\mathbf{R}^n$ 上の局所可積分関数 u が，

(a) u/c_n は, $\mathbf{R}^n$ 上，下半連続である;

(b) $\Delta^2 u$ は, $\mathbf{R}^n$ 上非負の測度である，つまり，

$$\int_{\mathbf{R}^n} u(x)\Delta^2\varphi(x)\, dx \geq 0 \qquad (\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),\ \varphi \geq 0\ )$$

を満たすとき，優重調和という．ここに

$$c_n^{-1} = \begin{cases} -4\sigma & (n=2) \\ 4\sigma_4 & (n=4) \\ 2(2-n)(4-n)\sigma_n & (n=1,3,n>4) \end{cases}$$

本講演では、定理 A の発展として，優重調和関数のリース分解可能性について論じる。そのために、次のリース核を用いる：

$$R_4(x) = \begin{cases} |x|^{4-n} & (n=3,n>4) \\ |x|^{4-n}\log(1/|x|) & (n=2,4) \end{cases}$$

また，

$\mathcal{H}^2(\mathbf{R}^n)=\{\mathbf{R}^n$上重調和関数全体$\}$，

$\mathcal{SH}^2(\mathbf{R}^n)=\{\mathbf{R}^n$上優重調和関数全体$\}$

と表記する．

定理 $u\in\mathcal{SH}^2(\mathbf{R}^n)$, $\mu=\Delta^2 u$ とする．

(a) $n\leq 4$ に対して，次は同値である．

(1) $r>1$ において，$M(2r,u)-4M(r,u)$ が有界

(2) $u\in\mathcal{H}^2(\mathbf{R}^n)$

(b) $n\geq 5$ に対して，次は同値である．

(1) $r>1$ において，$M(2r,u)-4M(r,u)$ が有界

(2) u は，次のようにリース分解表示される：

$$u(x)=c_n\int R_4(x-y)\,d\mu(y)+h(x)$$

ここに，$h\in\mathcal{H}^2(\mathbf{R}^n)$ かつ，

$$\int(1+|y|)^{4-n}\,d\mu(y)<\infty$$

参考文献

[1] N. Aronszajn, T. M. Creese and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon Press, 1983.

[2] T. Futamura and Y. Mizuta, Isolated singularities of super-polyharmonic functions, Hokkaido Math. J. **33** (2004), 1–21.

[3] W. K. Hayman and P. B. Kennedy, Subharmonic functions, Vol. 1, Academic Press, London, 1976.

[4] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosyo, Tokyo, 1996.

[5] Premalatha, Logarithmic potentials, Arab J. Math. Sci. **7** (2001), 47–52.

14 右辺が一般測度の非線形楕円型方程式のディリクレ問題に対する再正規化解

前 田 文 之

$\mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ の有界開集合 G において準線形楕円型偏微分作用素

$$Lu := -\mathrm{div}\,\mathcal{A}(x, \nabla u) + \mathcal{B}(x, u)$$

を考える。ここで，$\mathcal{A} : G \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $\mathcal{B} : G \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は $p > 1$ に対して p-許容なウエイト w に関する p-次の構造条件をみたし，$\mathcal{B}(x, \cdot)$ は非減少とする。一般符号の有限測度 ν と $\theta \in H^{1,p}(G; w)$ を与えたとき，u がディリクレ問題

$$\mathrm{DP}[\nu, \theta]: \quad Lu = \nu \text{ on } G, \quad u = \theta \text{ on } \partial G$$

の解であるとは，$u \in L^{p-1}(G; w)$, $T_k(u-\theta) := \max(\min(u-\theta, k), -k) \in H_0^{1,p}(G; w)$ $({}^\forall k > 0)$, $Du := \lim_{k \to \infty} \nabla T_k(u-\theta) + \nabla\theta \in L^{p-1}(G; w)$ で

$$\int_G \mathcal{A}(x, Du) \cdot \nabla f\, dx + \int_G \mathcal{B}(x, u) f\, dx = \int_G f\, d\nu \tag{1}$$

が任意の $f \in C_0^\infty(G)$ に対して成り立つことである。さらに，下記の条件 (L), (Ψ), (Φ), (O) をみたす l, ψ, φ によって $f = l(u - \theta + \psi)\varphi$ と表せる任意の f に対し，(1) の右辺を

$$\int_G f\, d\nu_a + l(\infty) \int_G \varphi\, d\nu_s^+ - l(-\infty) \int_G \varphi\, d\nu_s^-$$

で置き換えた式が成り立つとき，u を $\mathrm{DP}[\nu, \theta]$ の再正規化解（renormalized solution）という。ここで，ν_a, ν_s は (p, w)-容量に関する ν の絶対連続部分と特異部分を表す。

(L) $l : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ はリプシッツ連続関数で，ある $M > 0$ に対し，$t \geq M$ で $l(t) = l(\infty)$, $t \leq -M$ で $l(t) = l(-\infty)$.

(Ψ) $\psi \in H^{1,p}(G; w) \cap L^\infty(G)$.

(Φ) φ は G 上有界連続で $\nabla\varphi$ も有界.

(O) $l(0) = 0$ または $\varphi \in H_0^{1,p}(G; w)$.

定理 1. 上記の ν, θ に対し，DP$[\nu, \theta]$ は再正規解をもつ。

定理 2. u が DP$[\nu, \theta]$ の再正規化解なら，$E_k^+ = \{k < u - \theta \leq k+1\}$, $E_k^- = \{-k-1 \leq u - \theta < -k\}$ とすると (Φ) をみたす非負の φ に対し，

$$\alpha_2^{-1}\int_G \varphi\, d\nu_s^\pm \leq \liminf_{k\to\infty}\int_{E_k^\pm}|Du|^p\varphi w\, dx \leq \limsup_{k\to\infty}\int_{E_k^\pm}|Du|^p\varphi w\, dx \leq \alpha_1^{-1}\int_G \varphi\, d\nu_s^\pm.$$

定理 3. $\nu_s = 0$ なら DP$[\nu, \theta]$ の再正規化解は unique である。

参考文献

[1] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina and A. Prignet, Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28** (1999), 741–808.

[2] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, Clarendon Press, 1993.

15 コーン内の a-minimally thin な集合の特徴付け

宮本　育子　千葉大・理
吉田　英信　千葉大・自然科学

1．$\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の単位球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ 上の滑らかな境界をもつ領域 Ω に対して、$\mathbf{R}^n$ 内の点 P の極座標表示を (r, Θ) で表す時、$C_n(\Omega) = \{P = (r, \Theta) \in \mathbf{R}^n; (1, \Theta) \in \Omega\}$ をコーンと呼ぶ。半空間は、$\Omega = \mathbf{S}_+^{n-1}$（上半単位球面）の時の特別なコーンである。

ラプラシアン Δ_n の球面部分 Λ_n に関する、Ω でのディリクレ問題

$$\begin{aligned}(\Lambda_n + \lambda) f &= 0 \quad \text{on } \Omega \\ f &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega\end{aligned}$$

の最小な正の固有値と、正規化した固有関数を λ_Ω、$f_\Omega(\Theta)$ で表す。$t^2 + (n-2)t - \lambda_\Omega = 0$ の 2 根を $\alpha_\Omega, -\beta_\Omega (\alpha_\Omega, \beta_\Omega > 0)$ とする。

$C_n(\Omega)$ のマルチン境界は集合 $\partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$ であり、ある適当な基準点に関する点 ∞ でのマルチン関数は $K(P; \infty, \Omega) = r^{\alpha_\Omega} f_\Omega(\Theta)$ $(P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega))$ である。

a を $0 < a \leq 1$ を満たす実数とし、$C_n(\Omega)$ のグリーン関数を $G_\Omega(P, Q)$ で表す。E は $C_n(\Omega)$ 内の有界集合とする時、$C_n(\Omega)$ の境界 $\partial C_n(\Omega)$ 上で 0 となる $C_n(\Omega)$ 上の正値優調和関数 $K^a(P; \infty, \Omega)$ の掃散 $\hat{R}^E_{K^a(\cdot;\infty,\Omega)}(P)$ は有界なので、$C_n(\Omega)$ 上の正値測度 $\eta_{E,a}$ で、

$$\hat{R}^E_{K^a(\cdot;\infty,\Omega)}(P) = \int_{C_n(\Omega)} G_\Omega(P, Q) d\eta_{E,a}(Q) \quad (P \in C_n(\Omega))$$

となるものが一意的に存在する。$C_n(\Omega)$ 上の正値測度 $\lambda_{E,a}$ を

$$d\lambda_{E,a}(P) = K(P; \infty, \Omega) d\eta_{E,a}(P) \quad (P \in C_n(\Omega))$$

によって定める。

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E に対して、

$$E_k = E \cap \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega);\ 2^k \leq r < 2^{k+1}\}$$

とする時、Aikawa [1] による半空間の場合の定義を拡張して、E の ∞ での a-minimal thinness の定義を、次のウィナー型条件

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{E(k),a}(C_n(\Omega)) 2^{-k(a\alpha_\Omega + \beta_\Omega)} < +\infty$$

によって与える（Yanagishita [5] 参照）。1-minimal thinnness は minimal thinnness　に等しい。

2. 本講演では、次の結果を報告する。

定理 1. a を $0 < a \leq 1$ を満たす実数とする。$C_n(\Omega)$ の部分集合 E が ∞ で a-minimally thin であるための必要十分条件は

$$E \subset \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega);\ \int_{C_n(\Omega)} G_\Omega(P, Q) d\xi_{E,a}(Q) \geq r^{\alpha_\Omega} f_\Omega^a(\Theta)\}$$

となる、$C_n(\Omega)$ 上の正値測度 $\xi_{E,a}$ が存在することである。

次の定理 2 は、Essén, Jackson and Rippon [3] による半空間での結果が、コーンの場合もそのまま成立する事を示している。証明は彼らの方法とは異なり、上の定理 1 の下に、Hayman [4], Azarin [2] に基づく方法を用いる。

定理 2. a を $0 < a \leq 1$ を満たす実数とする。$C_n(\Omega)$ の部分集合 E が ∞ で a-minimally thin ならば、この E は

$$\sum_j \left(\frac{r_j}{R_j}\right)^{n-1+a} < +\infty$$

を満たす可算個の球の列 $\{B_j\}$ (r_j は B_j の半径 、 R_j は原点と B_j の中心 との距離) で被覆される。

注意 定理 2 の逆はもちろん真でない。

参考文献

[1] Aikawa, H.: On the behavior at infinity of non-negative superharmonic functions in a half space, Hiroshima Math. J. 11(1981), 425-441.

[2] Azarin, V.S.: Generalization of a theorem of Hayman on subharmonic functions in an m-dimensional cone, Mat. Sb.108(1965),248-264; Amer. Math. Soc. Translation 80(1969), 119-138.

[3] Essén, M., Jackson, H. L. and Rippon, P. J. : On a-minimally thin sets in a half-space in $\mathbf{R}^p, p \geq 2$, Mathematical Structures-Computational Mathematics-Mathematical Modelling, 2(1984), 158-164.

[4] Hayman, W.K.: Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle, Math. Pure Appl. 35(1956), 115-126.

[5] Yanagishita, M.: On the behavior at infinity for non-negative superharmonic functions in a cone, preprint.

16 Gleason problem for parabolic Bergman spaces

鈴木 紀明　名大・多元数理
西尾 昌治　阪市大・理

For an α $(0 < \alpha \leq 1)$, we consider a parabolic operator

$$L^{(\alpha)}u := \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^{\alpha}u$$

on the upper half space

$$H = \{(x,t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R} | t > 0\}.$$

We denote by $\boldsymbol{b}_{\alpha}^{p}$ the totality of L^p-solutions of $L^{(\alpha)}u = 0$ and call it an α-parabolic Bergman space, where $1 \leq p < \infty$.

It is an interesting problem on Bergman type spaces whether a function in the Bergman space, called a Bergman function, can be characterized by its suitable derivative norms. For harmonic Bergman spaces on the upper half space, there is a result by Ramey and Yi [7], who use the notion of harmonic conjugates. And as for Bergman spaces of holomorphic functions on the unit ball of $\boldsymbol{C}^n$, Zhu [10] gives a characterization by solving the Gleason problem.

For parabolic Bergman spaces, Yamada [9] gives the notion of "harmonic conjugates" and discusses their existence and uniqueness.

Definition 1. (Yamada [9]). Let u be a solution of $L^{(\alpha)}u = 0$ on H. Then functions $(v_1, \cdots, v_n)$ is called an $L^{(\alpha)}$-harmonic conjugate of u if

1. $L^{(\alpha)}v_j = 0$ for $j = 1, \ldots, n$,
2. $\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial t}$ for $j, k = 1, \ldots, n$.

In this note, we consider the Gleason problem for parabolic Bergman spaces. Our main theorem is the following.

Theorem 1. *Let $(x_0, t_0) \in H$ be fixed and assume $p > \max\{n + 2\alpha, n/2\alpha + 1\}$. Then there exist unique bounded linear operators G_j $(j = 0, 1, \cdots, n)$ on $\boldsymbol{b}_{\alpha}^{p}$ such that for every $u \in \boldsymbol{b}_{\alpha}^{p}$*

$$u(x,t) - u(x_0,t_0) = (t - t_0)G_0u(x,t) + \sum_{j=1}^{n}(x - x_0)G_ju(x,t)$$

and $(G_1u, \ldots, G_nu)$ is an $L^{(\alpha)}$-harmonic conjugate of $\frac{1}{2\alpha}G_0u$.

We remark that for the case $\alpha = 1/2$, $\boldsymbol{b}_{1/2}^{p}$ coincides with the usual harmonic Bergman space b^p. The Gleason problem for b^p was discussed in [2].

References

[1] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, Gleason's Problem for harmonic Bergman and Bloch functions on half-spaces, Integr. Equ. Oper. Theory, 36 (2000), 269–287.

[3] A. M. Gleason, Finitely generated ideals in Banach algebras, J. Math. Mechanics 13 (1964), 125–132.

[4] G. M. Henkin, The approximation of functions in pseudoconvex domains and a theorem of A. L. Leibenson, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astron. Phys., 19 (1971), 37–42.

[5] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., 42 (2005), 133–162.

[6] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, L^p-boundedness of Bergman projections for α-parabolic operators, preprint.

[7] W. C. Ramey and H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 633–660.

[8] W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\boldsymbol{C}^n$, Springer, 1980.

[9] M. Yamada, Harmonic conjugates of parabolic Bergman functions, preprint.

[10] K. Zhu, The Bergman spaces, the Bloch space, and Gleason's problem, Trans. Amer. Math. Soc., 309 (1988), 253–268.

[11] K. Zhu, Operator theory in function spaces, Marcel Dekker, New York, 1990.

17 半ユークリッド空間の動径方向計量に関する caloric morphism

下村勝孝

茨城大学理学部

$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ に, 非退化実二次形式 $\gamma(x,y) = \sum_{ij=1}^{n} \gamma_{ij} x_i y_j$ で計量を入れた半ユークリッド空間を考える. $M = \{x \in \mathbb{R}^n; \gamma(x,x) > 0\}$ とすると, M 上では $\langle x \rangle = \sqrt{\gamma(x,x)}$ が原点からの距離を表す (但し γ は負定値でないとする). そこで ρ を $(0,\infty)$ 上の正値 C^∞ 級関数として, M に半リーマン計量 (ここではこの計量を動径方向計量と呼ぶ)

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \rho(\langle x \rangle) \gamma_{ij} dx_i dx_j$$

を入れて半リーマン多様体とする. この計量に関する gradient を ∇_g で, Laplacian を Δ_g で表す. $\mathbb{R} \times M$ 内の領域で定義された関数 u が, この計量に関する熱方程式

$$H_g u := \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_g = 0$$

を満たす時 **caloric function** と呼ぶ. ρ を用いて $H_g u$ を書き下せば次の様になる：

$$H_g u = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\rho(\langle x \rangle)} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{n-2}{2} \frac{\rho'(\langle x \rangle)}{\rho(\langle x \rangle)^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\langle x \rangle} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (\gamma^{-1} = (\gamma^{ij})).$$

D を $\mathbb{R} \times M$ 内の領域とし, $f(t,x) = (f_0(t,x), f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x))$ を D から $\mathbb{R} \times M$ への C^∞ 級写像, φ を D 上の正値 C^∞ 級関数とする. $f(D)$ の部分領域 E 上の任意の caloric function $u(\tau, y)$ に対して, $\varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$ が再び $f^{-1}(E)$ 上の caloric function になるとき, (f,φ) を **caloric morphism** と呼ぶ.

(f,φ) が caloric morphism であることと, 次の (1)〜(4) は同値である ([1]).

(1) $\quad H_g \varphi = 0,$

(2) $\quad H_g f_i = 2g(\nabla_g \log \varphi, \nabla_g f_i) - [(\Delta_g x_i) \circ f] \dfrac{df_0}{dt}, \quad i = 1, \ldots, n$

(3) $\quad \nabla_g f_0 = 0,$

(4) $\quad g(\nabla_g f_i, \nabla_g f_j) = (g^{ij} \circ f) \dfrac{df_0}{dt}, \quad i,j = 1, \ldots, n$

$O_\gamma(n) = \{R \in GL(n,\mathbb{R}); {}^t R \gamma R = \gamma\}$ とおく. 計量の形から, $\mathbb{R}$ の平行移動と O_γ の行列による変換を合成した

$$f(t,x) = (t+b, R_0 x), \quad \varphi(t,x) = C$$

($b \in \mathbb{R}$, $R_0 \in O_\gamma(n)$, $C > 0$) は, 任意の ρ に対して caloric morphism になる.

それ以外の, 言わば自明でないものには以下のものがある. 何れも 計量 ρ に強い制限が付く.

1. (Appell 型変換) $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ ($q \neq -2$), $\rho(r) = pr^q$ とする. その時

$$f(t,x) = (\frac{at+b}{ct+d}, \frac{R_0 x}{|ct+d|^{2/(q+2)}}),$$
$$\varphi(t,x) = \frac{C}{|ct+d|^{n/2}} \exp\left[\frac{-pa\langle x\rangle^{q+2}}{(q+2)^2|ct+d|}\right]$$

は caloric morphism である. 但し $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ($ad - bc = 1$), $C > 0$, $R_0 \in O_\gamma(n)$.

$q = -2$ の場合は, この形の変換は存在しない. 一方で, 以下の型の変換が存在する.

2. $p > 0$, $\rho(r) = pr^{-2}$ とする. その時

$$f(t,x) = (t+b, \nu_0 e^{\alpha t} R_0 x), \quad \varphi(t,x) = C\langle x\rangle^{\alpha p/2} \exp(\alpha^2 pt/4),$$

$$f(t,x) = (t+b, \nu_0 e^{\alpha t} \frac{R_0 x}{\langle x\rangle^2}), \quad \varphi(t,x) = C\frac{1}{\langle x\rangle^{\alpha p/2}} \exp(\alpha^2 pt/4)$$

は caloric morphism である. 但し $b, \alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \neq 0$), $\nu_0, C > 0$, $R_0 \in O_\gamma(n)$.

注意. **1** の変換の定数をうまく選んで $q \to -2$ とすれば **2** の変換が得られる.

$n = 2$ の場合は更に特別で, t につれて回転する型の変換が存在する.

3. $n = 2$, $p > 0$, $\rho(r) = pr^{-2}$ とする. その時

$$f(t,x) = (t+b, \nu_0 e^{\alpha t} R_0 \exp\sqrt{|\det\gamma|}\beta t\gamma^{-1} Jx),$$
$$\varphi(t,r,\theta) = Cr^{\alpha p/2} \exp\left(p(2\beta\theta + (\alpha^2 + \sigma\beta^2)t)/4\right)$$
$$f(t,x) = (t+b, \nu_0 e^{\alpha t} \frac{R_0 \exp\beta t\gamma^{-1} Jx}{\langle x\rangle^2}),$$
$$\varphi(t,r,\theta) = C\frac{1}{r^{\alpha p/2}} \exp\left(p(2\beta\theta + (\alpha^2 + \sigma\beta^2)t)/4\right)$$

は caloric morphism である. 但し $b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha \neq 0$), $\nu_0, C > 0$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma = \operatorname{sgn}\det\gamma$, $R_0 \in O_\gamma(n)$, (r, θ) は M の極座標.

References

[1] M. Nishio and K. Shimomura, *A characterization of caloric morphisms between manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 111–122.

[2] K. Shimomura, *Caloric morphisms with respect to radial metrics on* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, Math. J. Ibaraki Univ. **35** (2003), 35-53.

[3] K. Shimomura, *Caloric morphisms with respect to radial metrics on semi-euclidean spaces*, preprint.

18 Integration Operators With Closed Range

米田　力生　　小樽商科大学

Dを複素平面上の開単位円板を表示するものとする。ブロッホタイプ空間$\mathcal{B}^\alpha$は

$$\| f \| = |f(0)| + \| f \|_{B^\alpha} < +\infty \ ,$$

where $\| f \|_{B^\alpha} = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|$　を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。Dの部分集合Hが sampling set for B^α であるとは、すべての$f \in \mathcal{B}^\alpha$に対して

$$\sup_{z\in H}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| \geq C \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|$$

を満たすある定数$C > 0$が存在するときそう呼ばれる。積分作用素I_g,J_g,M_gを次のように定義する：

$$I_g(f)(z) = \int_0^z g(\zeta)f'(\zeta)d\zeta + f(0) \ , \ J_g(f)(z) = \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta + f(0)$$

$$M_g(f)(z) = g(z)f(z) \ .$$

今回はブロッホタイプ空間$\mathcal{B}^\alpha$上の Multiplication operator M_gや積分作用素I_g,J_gがいつbounded belowになるのかについて研究し次の結果を得た：

Theorem 1. *Let $\alpha > 0$. Let g be an analytic function on D and I_g is bounded on B^α. Then I_g is bounded below on B^α if and only if the set $\{z \in D : |g(z)| \geq \epsilon\}$ is sampling set for B^α.*

Theorem 2. *Let $\alpha > 1$. Let g be an analytic function on D and J_g is bounded on B^α. Then J_g is bounded below on B^α if and only if the set $\{z \in D : (1-|z|^2)|g'(z)| \geq \epsilon\}$ is sampling set for B^α.*

Theorem 3. *Let $\alpha > 1$. Let g be an analytic function on D and M_g is bounded on B^α. Then M_g is bounded below on B^α if and only if the set $\{z \in D : |g(z)| \geq \epsilon\}$ is sampling set for B^α.*

参考文献

[1] C.C.Cowen and B.D.MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] J.Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, New York, 1981.

[3] P. Ghatage and J.Yan and D.Zheng, Composition operators with closed range on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.129 ,7(2000), 2039-2044.

[4] K.Madigan and A.Matheson, Compact composition operators on the Bloch space, Trans.Amer.Math.Soc. 347 (1995), 2679-2687.

[5] J.H.Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] R.Yoneda, Multiplication Operators With Closed Range On The Bloch-type Spaces, in preprint.

[7] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.

19 Sampling theory, reproducing kernels and the Tikhonov regularization

群馬大工　斎藤三郎, 松浦勉

概 要

We shall discuss the relations among sampling theory (Sinc method), reproducing kernels and the Tikhonov regularization. Here, we will see the difference of the Sobolev Hilbert spaces and the Paley-Wiener spaces when we use their reproducing kernel Hibert spaces as approximate spaces in the Tikhonov regularization.

Keywords: Sampling theory, Tikhonov regularization, Gaussian convolution, Weierstrass transform, Approximation of functions, Reproducing kernel, Sobolev space, Generalized inverse, Approximate inverse

Mathematics Subject Classification (2000): Primary 44A15;35K05; 30C40

特に、熱伝導における逆問題は典型的な不適切問題で、難問とされている常識に対して、　この論文で、Tikhonov の正則化法、再生核の理論、そして解析関数の族である Paley-Wiener 空間を用いることによって、　難問題は計算機画面上で完全に解決できたことを、定理と数値実験を与えることによって示す。　すなわち、　熱伝導における逆問題は解決できたといっても良いと思われる。

参考文献

[1] M. Asaduzzaman, T. Matsuura, and S. Saitoh, *Constructions of approximate solutions for linear differential equations by reproducing kernels and inverse problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).

[2] D.-W. Byun and S. Saitoh, *Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces*, Proc. of the 2nd International Colloquium on Numerical Analysis, VSP-Holland (1994), 55–61.

[3] I.I. Hirschman and D.V. Widder, *The Convolution Transform*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1955).

[4] T. Matsuura, S. Saitoh and D.D. Trong, *Numerical solutions of the Poisson equation*, Applicable Analysis **83**(2004), 1037-1051.

[5] T. Matsuura and S. Saitoh, *Analytical and numerical solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients*, Journal Analysis and Applications **3**(2005), 1-17.

[6] T. Matsuura and S. Saitoh, *Numerical inversion formulas in the wave equation*, Journal of Computational Mathematics and Optimization, **1**(2005), 1-19.

[7] T. Matsuura, S. Saitoh and D.D. Trong, *Approximate and analytical inversion formulas in heat conduction on multidimensional spaces*, J. of Inverse and Ill-posed Problems (to appear).

[8] S. Saitoh, *The Weierstrass Transform and an Isometry in the Heat Equation*, Applicable Analysis, **16**(1983), 1-6.

[9] S. Saitoh, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**(1997), Addison Wesley Longman Ltd, UK. 「再生核の理論入門」（牧野書店）（２００２出版）。

[10] S. Saitoh, N. Hayashi and M. Yamamoto (eds.), *Analytic Extension Formulas and their Applications*, (2001), Kluwer Academic Publishers.

[11] S. Saitoh, *Approximate Real Inversion Formulas of the Gaussian Convolution*, Applicable Analysis, **83**(2004), 727-733.

[12] S. Saitoh, *Best approximation, Tikhonov regularization and reproducing kernels*, Kodai. Math. J. **28**(2005), 357-367..

[13] S. Saitoh, *Tikhonov regularization and the theory of reproducing kernels*, Proceedings of the 12th ICFIDCAA(to appear).

[14] F. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer Series in Computational Mathematics, 20, 1993.

[15] W. Ulmer and W. Kaissl, *The inverse problem of a Gaussian convolution and its application to the finite size of measurement chambers/detectors in photon and proton dosimetry*, Phys. Med. Biol. **48**(2003), 707-727.

Sampling theory and image processing (to appear)

E-mail: ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp

20 ピカール次元の基本攝動

中井三留 (名工大・名誉教授)
多田俊政 (大同工大)

d 次元 $(d \geqq 2)$ 穴空きユークリッド空間 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上のラドン測度 μ をポテンシャルに持つ定常シュレディンガー方程式 $(-\Delta+\mu)u=0$ の $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ の部分領域 X 上の連続超関数解を $\boldsymbol{\mu}$ **調和関数**と言い, 又 X が μ 調和グリーン関数を持つとき, μ は X 上**双曲型**であると言う. 穴空き単位球 $\mathbb{B}^d \setminus \{0\}$ 上 μ 調和で, 単位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上境界値零を持つ正規化極小関数全体の濃度を $\dim\mu$ と記し, μ の**ピカール次元**と呼んで μ の原点 0 での特異性の度合いを示すものと考える. 特に $\dim\mu=1$ となるとき, μ に対して 0 でピカール原理が成り立つと言う. 次に, 任意の直交行列 g と任意の $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ のボレル集合 E に対し $\mu(g\cdot E)=\mu(E)$ $(g\cdot x={}^t(g^t x))$ となるとき μ は**回転不変**と言う. その典型例のルベーグ測度を λ と記す: $d\lambda(x)=dx$. そこで $d\gamma(x)=C|x|^{-2}d\lambda(x)$ (C は非負定数) となる回転不変正値測度 γ 達を**基本攝動**と呼ぶとき, 次の結果を報告する.

攝動不変等式. ***μ* を双曲型回転不変ラドン測度, *γ* を基本攝動とするとき次の等式が成り立つ:**

$$\dim(\mu+\gamma)=\dim\mu. \tag{1}$$

これは μ が正値ならば, 我々がピカール原理の研究を開始した 1974 年頃からわかって居た基本定理の一つであり ([2]), 一般符号の μ へ拡張すべく, 色々の付帯条件下 (例えば μ が正値の一般化である正型のとき ([4]) 等) で試みたが ([7] 等) 長年出来なかった. 上の結果は次の様に言い換えることが出来る.

摂動不変定理. ***μ* と *ν* を双曲型回転不変ラドン測度, *γ* を基本摂動とするとき, *μ* と *ν* の違いが**

$$|\mu-\nu| \leqq \gamma \tag{2}$$

の程度に小さいならば, 次の不等式が成立する:

$$\dim\mu=\dim\nu. \tag{3}$$

上記結果の効用を示す応用を 3 例述べる. 以下 3 例のいずれに於いても μ は常に双曲型回転不変ラドン測度であるとする. 又 γ は基本摂動とする.

応用 1. $\mu \geqq -\gamma$ **なら** $\dim \mu^+ = \dim \mu$ **が成立する.**

この結論は $\mu \geqq 0$ のある一般化である強正型の仮定のもとで前に示した ([4]) が, 無仮定のもとでは成立せぬことがある ([8]).

応用 2. $\mu \geqq -\gamma$ **なら斉次等式** $\dim(c\mu) = \dim \mu$ $(0 < c \leqq 1)$ **が成立する.**

この等式は一般に成り立つ斉次不等式 $\dim(c\mu) \geqq \dim \mu$ $(0 < c \leqq 1)$ ([5]) の精密化で, 強正型のときに示した ([4]) が一般には成り立たぬ ([9]).

応用 3. 穴空き単位球及び上半単位球の μ **マルチン完閉化の境界点はすべて極小点で,** μ **の唯一の特異点である原点の上にのる部分は, 同時に夫々一点であるか, 又は同時に夫々球面及び縁付上半球面である.**

$\mu \geqq 0$ のとき得られた結果 ([6], 又 [1], [3], [4] も参照) の一般符号の μ の場合への拡張である.

参　照　文　献

[1] M. Murata: *Structure of positive solitions to* $(-\Delta + V)u = 0$ *in* $\mathbf{R}^n$, Duke Math. J., **53**(1986), 869–943.

[2] M. Nakai: *Martin boundary over an isolated singularity of rotation free density*, J. Math. Soc. Japan, **26**(1974), 483–507.

[3] 中井三留, 多田俊政: グリーン関数の具体的表示とその応用, 名古屋工業大学紀要, 第 **45** 巻 (1993 年), 163-196.

[4] 中井三留, 多田俊政: 正型ポテンシャルのピカール次元, 名古屋工業大学紀要, 第 **46** 巻 (1994 年), 139-173.

[5] M. Nakai and T. Tada: *Monotoneity and homogeneity of Picard dimensions for signed radial densities*, Hokkaido Math. J., **26**(1997), 253–296.

[6] T. Tada: *The Martin boundary of the half disk with rotation free densities*, Hiroshima Math. J., **16**(1986), 315–325.

[7] T. Tada: *Picard dimensions of close to rotationally invariant densities*, Proc. Amer. Math. Soc., **100**(1987), 467-473.

[8] 多田俊政: 密度の負値部分の Picard 原理への影響, ポテンシャル論研究集会 (於城崎), 1991 年 12 月.

[9] T. Tada: *Nonhomogeneity of Picard dimensions of rotation free hyperbolic densities*, Hiroshima Math. J., **25**(1995), 227-249.

21 楕円内部の等角表現について

Stanisława Kanas
Rzeszów University of Technology

須川 敏幸
広島大学大学院理学研究科

本講演では Stanisława Kanas 氏との共同研究 [1] についての解説を行う．正定数 ξ に対して楕円

$$\left(\frac{u}{\cosh \xi}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh \xi}\right)^2 = 1$$

の内部を D_ξ とし，単位円板 $\mathbb{D}$ から D_ξ への等角同相写像 f_ξ, g_ξ を条件

$$f_\xi(0) = 0,\ f'_\xi(0) > 0,\ g_\xi(0) = -1,\ g'_\xi(0) > 0$$

によって定める．ここで，上の楕円は ± 1 を焦点に持つことに注意する．D_ξ は原点に関する半回転や，実軸に関する鏡映に関して対称なので，$f_\xi(z) = -f_\xi(-z) = \overline{f_\xi(\bar{z})}$ であることが容易に分かる．特に

$$f_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1}$$

と展開され，a_n は実数である．

Schwarz は 1869 年の論文において f_ξ の逆写像（したがって本質的には f_ξ）の具体的な形を楕円函数（楕円積分）を用いて与えた：

$$f_\xi(z) = \sin\left[\frac{\pi}{2\mathbf{K}(s)}\mathbf{K}(z/\sqrt{s}, s)\right],$$

ただし，ここで

$$\mathbf{K}(z,t) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}}, \quad \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(1,t)$$

とし，$s > 0$ は $\mu(s) = 2\xi$ を満たすようにとる．ここに

$$\mu(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\mathbf{K}(t')}{\mathbf{K}(t)}, \quad t' = \sqrt{1-t^2}$$

は Grötzsch ring $\mathbb{D} \setminus [0,t]$ の modulus として知られている量である．

しかしながら，上の形からただちに係数 a_n の符号に関する情報が得られるわけではない．我々の主張は次のものである．

定理 1. **f_ξ に対して，つねに $a_n > 0$ が成り立つ．**

証明には，f_ξ が比較的簡単な 2 階の同次線形常微分方程式を満たすことを用いて，a_n が 3 項間の線形漸化式を満たすことを用いる．しかし，それだけで簡単にこの定理が証明できるわけではなく，我々は連分数の理論を用いて初めて証明に成功した．

次に，g_ξ について述べる．まず，簡単な考察から

$$g_\xi(z) = f_\xi\left(\frac{z-\sqrt{s}}{1-\sqrt{s}z}\right)$$

であることが分かるが，この式から $g_\xi(z)$ の展開係数について議論するのは容易ではない．そこで，次のような関係式に着目する．(ある種のモジュラー変換に対応する関係式だと考えられる.)

定理 2.

$$g_{2\xi}(z) = 2(f_\xi(\sqrt{z}))^2 - 1.$$

系 3. **$g_\xi(z)$ の原点における Taylor 係数は定数項を除き全て正である.**

最後の結果は，Kanas 氏が最近研究している函数族 k-UCV に対していくつかの応用を持つ．

REFERENCES

1. S. Kanas and T. Sugawa, *Conformal representations of the interior of an ellipse*, to appear in Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I Math.

特別講演

微分が有界な解析函数の値の変化域

柳原 宏
山口大学工学部共通講座

1 Covering Properties of Analytic Functions

標題の話に入る前に, 何故このような問題を考えるようになったのかを分野の宣伝も兼ねてまとめておこう. $\mathbb{C}$ で複素平面を, $\mathbb{D}(a,r)$ で中心 $a\in\mathbb{C}$ 半径 $r>0$ の開円板を表す. また特に $\mathbb{D}$ を単位円板, つまり $\mathbb{D}=\mathbb{D}(0,1)$ とする.

ことさら意識していたわけではないのだが, ここ 15 年ほど単位円板 $\mathbb{D}$ 上の解析函数の covering properties について研究を行ってきた. 解析函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ が与えられたとする. このとき複素平面内の領域 Ω が unramified である (または unramified に cover される) とは, ある領域 $\Omega_0\subset\mathbb{D}$ で f の Ω_0 への制限 $f|_{\Omega_0}:\Omega_0\to\Omega$ が conformal(つまり 1 対 1 かつ onto で analytic) となるものが存在するときを言う. ここでは考える領域 Ω は開円板とし, 与えられた解析函数 f が, どれくらいの大きさの unramified disk を持つのかを調べたいというのが, この講演を通じての主要な動機である. 特に様々な函数族について, その族に属する函数に共通な covering properties を考えたい.

例として古典的だが代表的な定理を挙げておこう. S を単位円板 $\mathbb{D}$ 上の単葉 (1 対 1) な解析函数 f で $f(0)=f'(0)-1=0$ を満たすもの全てよりなる族とする.

Theorem A (Koebe の 1/4 円定理) 任意の $f\in S$ について $\mathbb{D}(0,1/4)\subset f(\mathbb{D})$ が成り立つ. つまり f は原点中心, 半径 1/4 の開円板を *unramified* に *cover* する.

この定理は $f\in S$ について $|f''(0)|\leq 4$ が成り立つという事実から, 次の一連の評価式を経て導かれる.

Theorem B (Distortion and Growth Estimates) 各 $f\in S$ について

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},\quad\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

が成り立つ. 各 $z\in\mathbb{D}$ について等号は f が *Koebe* 函数 $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ の回転 $k_\theta(z)=e^{-i\theta}k(e^{i\theta}z)$ の時, またその時に限り起こる.

族 S の部分族としては starlike な函数の族である S^* や convex な函数の族である $\mathcal{K}$ などがあり, これらについても同様な定理が成り立つが, 後節で触れることにする.

さてこれらの定理, 特に Koebe の 1/4 円定理において単葉性という条件を省くとどうなるだろうか? $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ で $\mathbb{D}$ 上の解析函数の全体を表し, $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ で $f(0)=f'(0)-1=0$ と正規化された函数の全体がなす部分族を $\mathcal{H}_0(\mathbb{D})$ で表すこ

とにしよう. このとき函数族 $\mathcal{H}_0(\mathbb{D})$ については Koebe の 1/4 円定理に類似の定理が成り立たない. これは例えば函数列 $f_n(z) = \frac{e^{nz}-1}{n}$ を考えれば, 指数函数が零点を持たないことより $-1/n \notin f_n(\mathbb{D})$ が従い, 原点中心の円板で, すべての f_n により共通に cover されるものが存在しないことが分かる. ところが円板の中心を原点に限らず, f に依存して動いて良いとすれば次が成り立つ.

Theorem C (Bloch [1]) 任意の $\varepsilon > 0$ と $f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{D})$ について f は半径が $\frac{1}{72} - \varepsilon$ より大きな *unramified disc* を持つ.

勿論 $\frac{1}{72}$ は best possible な評価ではなく, もっと良い評価を行うことができる. 議論を正確にするために f の持つ unramified disc の半径の上限を $r(f)$ で表し,

$$B = \inf_{f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{D})} r(f)$$

とおこう. この絶対定数 B は Bloch 定数と呼ばれている.

Landau [8] は inf を取る際に $\mathcal{H}_0(\mathbb{D})$ のような大きな函数族ではなく

$$\mathfrak{B} = \left\{ f \in \mathcal{H}_0(\mathbb{D}) : \ (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 1 \right\}$$

という Bloch semi-norm が 1 以下の函数族に制限して inf を取れば良いことを示した. Landau は同じ論文で, unramified disc の半径の上限を, 単に $f(\mathbb{D})$ に含まれる disc の半径の上限に変更して同様に定義される定数 L や, 函数族を S に制限して定義される定数 $\mathfrak{A}$ を定義した. これらについても B と同じく, inf は Bloch semi-norm が 1 以下の函数族に制限して取っても良い. 一般に $|f'|$ に上からの bound があれば, 下からの bound を導くことができる. そこで Landau は $B, L, \mathfrak{A}$ の下からの評価を試みている.

2 Bloch 函数の歪曲と増大度評価

$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 1$ ならば, 特に $|f'(0)| \leq 1$ であるから各 $|\alpha| \leq 1$ について

$$\mathfrak{B}(\alpha) = \{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f(0) = f'(0) - \alpha = 0 \text{ and } (1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 1 \text{ in } \mathbb{D} \}$$

とおく. このとき考察する対象は variability region と呼ばれる 2 つの集合

$$V^0(\alpha, z_0) = \{ f(z_0) : \ f \in \mathfrak{B}(\alpha) \}, \quad V^1(\alpha, z_0) = \{ f'(z_0) : \ f \in \mathfrak{B}(\alpha) \}$$

である. ここに $z_0 \in \mathbb{D}$ は固定された点であり, $V^0(\alpha, z_0), V^1(\alpha, z_0)$ とは $f \in \mathfrak{B}(\alpha)$ と言う条件のもとで $f(z_0)$ や $f'(z_0)$ がどれくらいまで動き得るかを表す集合である. 例えば distortion estimate とは $\max\{|w| : \ w \in V^1(\alpha, z_0)\}$ の上からの評価式や $\min\{|w| : \ w \in V^1(\alpha, z_0)\}$ の下からの評価式であると言うことができるし, growth estimate についても同様である.

さて $V^j(\alpha, z_0)$ は, 簡単な考察を行うことにより compact, convex かつ内点をもつことが分かる. 従って $V^j(\alpha, z_0)$ は convex な Jordan 閉領域であり, その境界曲線が決定できれば, $V^j(\alpha, z_0)$ の決定ができたと言って良いであろう. $V^1(\alpha, z_0)$ の場合境界曲線を完全に決定できる ([2], [6]).

話を簡単にするために $0 \leq \alpha \leq 1$ と仮定しよう．そして

$$M(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} t(1-t^2), \quad 0 \leq t \leq 1$$

とおくと, $M(t)$ は $0 \leq t \leq 1/\sqrt{3}$ で狭義増加で, $M(0)=0$, $M(1/\sqrt{3})=1$ である．また $1/\sqrt{3} \leq t \leq 1$ で狭義減少で $M(1)=0$. よって特に M は $t=1/\sqrt{3}$ のとき最大値 1 を取る．函数 M を $[0,1/\sqrt{3}]$ へ制限し, これの逆函数を $m=(M|_{[0,1/\sqrt{3}]})^{-1}$ とし, $a=m(\alpha)$ とおけば, $0 \leq m(\alpha) \leq 1/\sqrt{3}$ が成り立つ．ここで

$$B_\alpha(z) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left\{ m(\alpha)^2 - \left(\frac{z-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z}\right)^2 \right\}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{1}$$

とおけば $\mathbb{D}$ 上で解析的で $B_\alpha(0)=0$, $B'_\alpha(0)=M(m(\alpha))=\alpha$ が成り立つ．さらに

$$(1-|z|^2)|B'_\alpha(z)| = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{(1-|z|^2)(1-m(\alpha)^2)}{|1-m(\alpha)z|^2}\left|\frac{z-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z}\right| = M\left(\left|\frac{z-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z}\right|\right) \leq 1$$

が成り立つので, $B_\alpha \in \mathfrak{B}(\alpha)$ であり,

$$(1-|z|^2)|B'_\alpha(z)| = 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{z-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

が成り立つ．この B_α がこれから考える極値問題の極値函数であり, 重要な役目を演ずる．

さて函数族 $\mathfrak{B}(\alpha)$ に関する distortion estimate を得るには $f \in \mathfrak{B}(\alpha)$ について

$$F(w) = f\left(\frac{w+m(\alpha)}{1+m(\alpha)w}\right), \quad z = \frac{w+m(\alpha)}{1+m(\alpha)w} \left(\text{or } w = \frac{z-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z}\right)$$

とおく．このとき

$$F'(w) = \frac{1-|m(\alpha)|^2}{(1+\overline{m(\alpha)}w)^2} f'\left(\frac{w+m(\alpha)}{1+\overline{m(\alpha)}w}\right)$$

と公式

$$1-\left|\frac{w+a}{1+\bar{a}w}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|w|^2)}{|1+\bar{a}w|^2}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
|F'(w)| &= \frac{1-|m(\alpha)|^2}{|1+m(\alpha)w|^2}\left|f'\left(\frac{w+m(\alpha)}{1+m(\alpha)w}\right)\right| \\
&= \frac{1}{1-|w|^2}\left(1-\left|\frac{w+m(\alpha)}{1+m(\alpha)w}\right|^2\right)\left|f'\left(\frac{w+m(\alpha)}{1+m(\alpha)w}\right)\right| \\
&= \frac{1}{1-|w|^2} \leq \frac{3}{2} \quad \text{for } |w| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

また
$$F'(-m(\alpha)) = \frac{f'(0)}{1-m(\alpha)^2} = \frac{\alpha}{1-m(\alpha)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}m(\alpha)$$
である. そこで
$$G(\zeta) = -\frac{2}{3}F'\left(\frac{\zeta}{\sqrt{3}}\right) \tag{2}$$
と置けば, $|\zeta|<1$ について $|G(\zeta)|<1$ であり, $G(-\sqrt{3}m(\alpha)) = -\sqrt{3}m(\alpha)$ ゆえ Schwarz's lemma を適用して
$$\left|\frac{G(\zeta)+\sqrt{3}m(\alpha)}{1+\sqrt{3}m(\alpha)G(\zeta)}\right| \le \left|\frac{\zeta+\sqrt{3}m(\alpha)}{1+\sqrt{3}m(\alpha)\zeta}\right|$$
を得る. これを式変形すれば
$$\left|G(\zeta)+\frac{\sqrt{3}m(\alpha)\left(1-\left|\frac{\zeta+\sqrt{3}m(\alpha)}{1+\sqrt{3}m(\alpha)\zeta}\right|^2\right)}{1-3m(\alpha)^2\left|\frac{\zeta+\sqrt{3}m(\alpha)}{1+\sqrt{3}m(\alpha)\zeta}\right|^2}\right| \le \frac{(1-3m(\alpha)^2)\left|\frac{\zeta+\sqrt{3}m(\alpha)}{1+\sqrt{3}m(\alpha)\zeta}\right|}{1-3m(\alpha)^2\left|\frac{\zeta+\sqrt{3}m(\alpha)}{1+\sqrt{3}m(\alpha)\zeta}\right|}.$$
この不等式に
$$G(\zeta) = -\frac{2}{3}F'\left(\frac{\zeta}{\sqrt{3}}\right), \quad F'(w) = \frac{1-|m(\alpha)|^2}{(1+m(\alpha)w)^2}f'\left(\frac{w+m(\alpha)}{1+m(\alpha)w}\right)$$
を代入して, $f'(z)$ の式に直せば, 結局
$$|f'(z)-c(\alpha,z)| \le r(\alpha,z) \quad \text{for} \quad \left|\frac{z-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
の形の評価式を得る. ここで $f \in \mathfrak{B}(\alpha)$ は任意ゆえ
$$V^1(\alpha,z_0) = \{f'(z_0), f\in\mathfrak{B}(\alpha)\} \subset \overline{\mathbb{D}}(c(\alpha,z_0,),r(\alpha,z_0)) \quad \text{for} \quad \left|\frac{z_0-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z_0}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
が分かる. $f = B_\alpha \in \mathfrak{B}(\alpha)$ の場合は, 簡単な計算により, $G = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ となることが分かり, この不等式において等号 $|f'(z)-c(\alpha,z)| = r(\alpha,z)$ が起こる. 従って
$$B_\alpha(z_0) \in \partial\mathbb{D}(c(\alpha,z_0,),r(\alpha,z_0)) \cap V^1(\alpha,z_0)$$
となり, 結局 $B_\alpha(z_0) \in \partial V^1(\alpha,z_0)$ が分かる. $\alpha=1$ の場合は Schwarz's lemma を用いることができないが, この場合は境界点における Schwarz's lemma とでも云うべき Julia's lemma を用いると同様な評価を行うことができて,
$$B_\alpha(z_0) \in \partial V^1(\alpha,z_0) \quad \text{for} \quad \left|\frac{z_0-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z_0}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
が成り立つことが分かる.

ここで $f \in \mathfrak{B}(\alpha)$ についてその回転 $f_\theta(z) = e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$ もまた $f_\theta \in \mathfrak{B}(\alpha)$ を満たすことを利用すれば, $V^1(\alpha,z_0) = V^1(\alpha,e^{i\theta}z_0)$ が成り立つことは容易に分かる. 実は集合 $\partial V^1(\alpha,z_0)$ を決定するには, これらの事実に加えて別種の極値函数の構成法についての知識があれば十分である.

Theorem 2.1 各 $\alpha \in [0,1]$ と $r \in (0,1)$ について $V^1(\alpha, r)$ は, *convex* な閉 *Jordan* 領域であり, その境界曲線 $\partial V(\alpha, r)$ は次で与えられる.

(i) $0 \le r < \frac{1-\sqrt{3}m(\alpha)}{\sqrt{3}-m(\alpha)}$ のとき $[-\pi, \pi) \ni \theta \mapsto B'_\alpha(re^{i\theta})$.

(ii) $\frac{1-\sqrt{3}m(\alpha)}{\sqrt{3}-m(\alpha)} \le r < \frac{1+\sqrt{3}m(\alpha)}{\sqrt{3}+m(\alpha)}$ のとき $[-\theta_0, \theta_0) \ni \theta \mapsto B'_\alpha(re^{i\theta})$ と原点中心で $B'_\alpha(re^{i\theta_0})$ と $B'_\alpha(re^{-i\theta_0})$ を結ぶ円弧 (左側で半径は $(1-r^2)^{-1}$). ここに $\theta_0 = \cos^{-1}\{r^2(3-m(\alpha)^2) + 3m(\alpha)^2 - 1\}/4m(\alpha)$.

(iii) $\frac{1+\sqrt{3}m(\alpha)}{\sqrt{3}+m(\alpha)} \le r < 1$ の時は円周 $\partial\mathbb{D}(0, (1-r^2)^{-1})$.

$V^1(\alpha, z_0)$ は以上のように求めることができるが, $f(z_0)$ の variability region である $V^0(\alpha, z_0)$ の方はより難しい問題となる. ともあれ問題は $f \in \mathfrak{B}(\alpha)$ について $F(w) = f((w+m(\alpha))/(1+m(\alpha)w)$ とおいて $|F'(w)| \le 3/2$ for $|w| \le 1/\sqrt{3}$ と $F'(-m(\alpha)) = 3\sqrt{3}m(\alpha)/2$ という条件下で $F(w)$ がどれくらいの範囲を動くのかという問題になる. 適当に変数を取り替えて, 問題を還元すれば与えられた a, $|a| \le 1$ と $z_0 \in \mathbb{D}$ について解析函数 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ が $|f'| \le 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = a$ を満たしながら動く時, $f(z_0)$ がどのような範囲を動きうるのかという問題になる. この問題が分かれば上の定理と同様にして $V^0(\alpha, z_0)$ の境界の一部が決定できる ([15]).

3 微分が有界な解析函数族の値の変化域

この節では $\mathbb{D}$ で $|f'(z)| \le 1$ を満たし, $f(0) = 0$, $f'(0) = \alpha$ である解析函数の与えられた点 z_0 で取り得る値についての variability region を求めよう. そこで $|\alpha| \le 1$ について

$$\mathcal{B}(\alpha) = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) :\ |f'(z)| \le 1 \text{ in } \mathbb{D} \text{ and } f(0) = f'(0) - \alpha = 0\}$$

とおき $z_0 \in \mathbb{D}$ について

$$V_\mathcal{B}(\alpha, z_0) = \{f(z_0) :\ f \in \mathcal{B}(\alpha)\}$$

とおく. このとき

Theorem 3.1 $z_0 = 0$ または $|\alpha| = 1$ ならば $V_\mathcal{B}(\alpha, z_0) = \{\alpha z_0\}$ であり, $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ *and* $|\alpha| < 1$ ならば $V_\mathcal{B}(\alpha, z_0)$ は以下で与えられる曲線 $C(\alpha, z_0)$ を境界に持つ凸な *Jordan* 閉領域である. $C(\alpha, z_0) : \partial\mathbb{D} \ni c \mapsto f_c(z_0)$, ここに

$$f_c(z) = \int_0^z \frac{c\zeta + \alpha}{1 + \overline{\alpha}c\zeta}\, d\zeta = \frac{z}{\overline{\alpha}} - \frac{1-|\alpha|^2}{\overline{\alpha}^2 c}\log(1 + \overline{\alpha}cz), \quad z \in \mathbb{D}.$$

である. またさらに $f(z_0) = f_c(z_0)$ が $f \in \mathcal{B}(\alpha)$ と $c \in \partial\mathbb{D}$ について成り立てば $f = f_c$.

上記の定理の簡単な帰結として growth estimate が得られる.

Corollary 3.2 $\alpha, z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ と $f \in \mathcal{B}(\alpha)$ について

$$|f(z_0)| \leq |f_{c_0}(z_0)| = \frac{|z_0|}{|\alpha|} - \frac{(1-|\alpha|^2)}{|\alpha|^2}\log(1+|\alpha||z_0|),$$

が成り立つ．ここで $c_0 = \alpha\overline{z_0}/(|\alpha||z_0|)$ であり，等号が成り立つのは $f = f_{c_0}$ の時、またその時のみに限る．

それでは Theorem 3.1 の 証明の概略を述べよう．

Proof of Theorem 3.1. まず $z_0 = 0$ のときは $f(z_0) = 0$ ゆえ $V_{\mathcal{B}}(\alpha, 0) = \{0\} = \{\alpha \cdot 0\}$ が成り立つ．また $|\alpha| = 1$ ならば$|f'|$ は, 原点で最大値を取るので, $f' = \alpha$ が最大絶対値の原理より成り立つ．よって $f(z_0) = \alpha z_0$ であり, やはり $V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0) = \{\alpha z_0\}$ が成り立つ．

以下では $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, $|\alpha| < 1$ と仮定して話を進めよう．$\mathcal{H}(\mathbb{D})$ の局所一様収束の位相のもとで $\mathcal{B}(\alpha)$ は compact である．従って連続写像 $\mathcal{B}(\alpha) \ni f \mapsto f(z_0) \in \mathbb{C}$ の像である $V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ も compact である．また $\mathcal{B}(\alpha)$ は convex ゆえ $V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ も convex である．次に $V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ が内点を持つことを示そう．これには $|c| \leq 1$ と $z \in \mathbb{D}$ について

$$f_c(z) = \int_0^z \frac{c\zeta + \alpha}{1 + \overline{\alpha}c\zeta}\, d\zeta = \frac{z}{\overline{\alpha}} - \frac{1-|\alpha|^2}{\overline{\alpha}^2 c}\log(1+\overline{\alpha}cz). \tag{3}$$

とおく．このとき $f_c \in \mathcal{B}(\alpha)$ となることは容易に分かる．また $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ を固定したとき, 函数 $\mathbb{D} \ni c \mapsto f_c(z_0)$ は nonconstant analytic であるから開写像である．従って $V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ は開集合 $\{f_c(z_0) : |c| < 1\}$ を含む．

さて $V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ の内点を 1 つ取り固定する．一般性を失うことなく, 内点が原点であるとして良い．このとき各 $0 \leq \theta < 2\pi$ について $\max\{|w| : w \in V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0) \ \arg w = \theta\}$ を与える点がただ 1 つ存在するので, w_θ とおけば対応 $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto w_\theta$ は Jordan curve であり, $V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ は, この Jordan 曲線に囲まれた閉領域である．

以上より $V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ を決定するという問題はその境界 $\partial V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ を決定すると言う問題に還元された．そこで

Proposition 3.3 任意の $c \in \partial\mathbb{D}$ について $f_c(z_0) \in \partial V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ が成り立つ．

を示そう．これには Schwarz's lemma を極力注意深く適用することに尽きる．

$f \in \mathcal{B}(\alpha)$ について $|f'| \leq 1$ と $f'(0) = \alpha$ より, f' に Schwarz's lemma を適用して

$$\left|\frac{f'(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}f'(z)}\right| \leq |z|.$$

これは両辺を自乗して分母を払い計算すれば

$$\left|f'(z) - \frac{\alpha(1-|z|^2)}{1-|\alpha|^2|z|^2}\right| \leq \frac{(1-|\alpha|^2)|z|}{1-|\alpha|^2|z|^2} \tag{4}$$

と同値である．この不等式を C^1 曲線に沿って積分しよう．$\gamma : z = z(t), 0 \le t \le 1$, を $z(0)=0$, $z(1)=z_0$ を満たす C^1 曲線とすれば $f(0)=0$ と (4) より

$$\begin{aligned}
&\left| f(z_0) - \int_0^1 \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} z'(t)\,dt \right| \\
= &\left| \int_0^1 \left\{ f'(z(t)) - \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} \right\} z'(t)\,dt \right| \\
\le &\int_0^1 \left| f'(z(t)) - \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} \right| |z'(t)|\,dt \\
\le &\int_0^1 \frac{(1-|\alpha|^2)|z(t)|}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} |z'(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

この不等式は $f \in \mathcal{B}(\alpha)$ の任意性より

$$f(z_0) \in V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0) \subset \overline{\mathbb{D}}(C(\alpha,\gamma), R(\alpha,\gamma)) = \{z \in \mathbb{C} : |z - C(\alpha,\gamma)| \le R(\alpha,\gamma)\},$$

が成り立つことを意味する．ただし

$$C(\alpha,\gamma) = \int_0^1 \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} z'(t)\,dt, \tag{5}$$

$$R(\alpha,\gamma) = \int_0^1 \frac{(1-|\alpha|^2)|z(t)|}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} |z'(t)|\,dt. \tag{6}$$

である．

一方 $|c|=1$ について

$$\begin{aligned}
&f_c'(z) - \frac{\alpha(1-|z|^2)}{1-|\alpha|^2|z|^2} \qquad (7)\\
= &\frac{cz+\alpha}{1+\overline{\alpha}cz} - \frac{\alpha(1-|z|^2)}{1-|\alpha|^2|z|^2} \\
= &\frac{(1-|\alpha|^2)z(c+\alpha\overline{z})}{(1-|\alpha|^2|z|^2)(1+\overline{\alpha}cz)} = \frac{c(1-|\alpha|^2)}{1-|\alpha|^2|z|^2}\frac{|z|g(z)}{|g(z)|},
\end{aligned}$$

ただし

$$g(z) = \frac{z}{(1+\overline{\alpha}cz)^2}. \tag{8}$$

である．ここで

Proposition 3.4 ある *starlike univalent function* $G_0 \in S^*$ で $G_0(z)^2 = G(z) = 2\int_0^z g(\zeta)\,d\zeta$ を満たすものが存在する．

この Proposition は後ほど示すことにして，証明を先に進めよう．G_0 は原点に関して starlike であるから 0 と $G_0(z_0)$ を結ぶ線分は $G_0(\mathbb{D})$ に含まれるので $\gamma_0 : z = z(t) = G_0^{-1}(t^{1/2}G_0(z_0))$, $0 \le t \le 1$ は well-defined であり，0 と z_0 を結ぶ $\mathbb{D}$ 内の曲線になる．そして $G(z(t)) = tG(z_0)$ が成り立つので，両辺を微分して $2g(z(t))z'(t) = G'(z(t))z'(t) = G(z_0)$ が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}
\left(f_c'(z(t)) - \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} \right) z'(t) &= \frac{c(1-|\alpha|^2)}{1-|\alpha|^2|z|^2}\frac{|z|g(z)}{|g(z)|} z'(t) \qquad (9)\\
&= \frac{cG(z_0)}{|G(z_0)|}\frac{(1-|\alpha|^2)|z(t)|}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2}|z'(t)|.
\end{aligned}$$

よってこの γ_0 に沿って線積分を行えば

$$f_c(z_0) - C(\alpha, \gamma_0) = \frac{cG(z_0)}{|G(z_0)|} \int_0^1 \frac{(1-|\alpha|^2)|z(t)|}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} |z'(t)|\, dt = \frac{cG(z_0)}{|G(z_0)|} R(\alpha, \gamma_0) \quad (10)$$

が成り立つ．よって $f_c(z_0) \in \partial\mathbb{D}(C(\alpha,\gamma_0), R(\alpha,\gamma_0))$ である．また $f_c(z_0) \in V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0) \subset \overline{\mathbb{D}}(C(\alpha,\gamma_0), R(\alpha,\gamma_0))$ であるから $f_c(z_0) \in \partial V_{\mathcal{B}}(\alpha, z_0)$ が成り立つ．

次に一意性を示し，そしてそれを利用して閉曲線 $\partial\mathbb{D} \ni c \mapsto f_c(z_0)$ が単純であることを示そう．$f(z_0) = f_c(z_0)$ がある $f \in \mathcal{B}(\alpha)$ と $c \in \partial\mathbb{D}$ について成り立つと仮定する．

$$k(t) = \frac{|G(z_0)|}{cG(z_0)} \left(f'(z(t)) - \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} \right) z'(t).$$

とおけば $k(t)$ は $[0,1]$ 上の連続函数であり，(9) より

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} k(t) \le |k(t)| &\le \frac{(1-|\alpha|^2)|z(t)|}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} |z'(t)| \\ &= \frac{|G(z_0)|}{cG(z_0)} \left(f_c'(z(t)) - \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} \right) z'(t) \end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} R(\alpha,\gamma_0) &= \operatorname{Re}\left\{ \frac{|G(z_0)|}{cG(z_0)} (f_c(z_0) - C(\alpha,\gamma_0)) \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ \frac{|G(z_0)|}{cG(z_0)} (f(z_0) - C(\alpha,\gamma_0)) \right\} \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} k(t)\, dt \\ &\le \int_0^1 \frac{|G(z_0)|}{cG(z_0)} \left(f_c'(z(t)) - \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} \right) z'(t)\, dt \\ &= R(\alpha,\gamma_0) \end{aligned}$$

を得る．これより

$$\begin{aligned} &\frac{|G(z_0)|}{cG(z_0)} \left(f'(z(t)) - \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} \right) z'(t) \\ = \;\; & k(t) = \frac{|G(z_0)|}{cG(z_0)} \left(f_c'(z(t)) - \frac{\alpha(1-|z(t)|^2)}{1-|\alpha|^2|z(t)|^2} \right) z'(t) \end{aligned}$$

がすべての $t \in [0,1]$ について成り立つので γ_0 上で $f' = f_c'$ である．よって一致の定理より $f' = f_c'$ となり，両辺を積分して $f_c(0) = f(0) = 0$ より $f = f_c$ が成り立つ．

最後に $\partial\mathbb{D} \ni c \mapsto f_c(z_0)$ が単純であることを背理法で示そう．そうでないと仮定すると $c_1, c_2 \in \partial\mathbb{D}$ で $c_1 \neq c_2$ かつ $f_{c_1}(z_0) = f_{c_2}(z_0)$ を満たすものが存在する．$f_{c_1}, f_{c_2} \in \mathcal{B}(\alpha)$ であるから先ほど示した一意性より $f_{c_1} = f_{c_2}$．これは $c_1 \neq c_2$ に矛盾する．

さて単純閉曲線 $\partial V_{\mathcal{B}}(z_0, \alpha)$ は単純閉曲線 $\partial\mathbb{D} \ni c \mapsto f_c(z_0)$ を含むことが示されたが, 単純閉曲線は自分自身以外の単純閉曲線を含むことはないので両者は一致する.

以上で Theorem 3.1 の証明は終わったが, 途中で用いた Proposition 3.4 の証明が残されている. これは次の lemma から簡単に導ける.

Lemma 3.5 $g(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \cdots \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ が

$$Re\left(z\frac{g'(z)}{g(z)}\right) > -1, \quad z \in \mathbb{D}$$

を満たせば, ある $G_0 \in S^*$ が存在し $p\int_0^z g(\zeta)\,d\zeta = G_0(z)^p$.

この lemma は古くから知られていると思うのだが, 何故か証明が載っている文献が見つからない. この型の定理としては殆ど究極の精密化が MacGregor [11] により得られているが, Thoerem 3.1 の証明に使用するには上の Lemma の形で十分である.

さて 3.1 の証明の中の g は $g(z) = z/(1+\overline{\alpha}cz)^2$ であるがこの場合は

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{g'(z)}{g(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\alpha cz}{1+\alpha cz}\right) > 0,$$

より Lemma 3.5 が適用可能である.

今までの議論は殆どそのまま $\mathrm{Re}f' > 0$ を満たす $\mathbb{D}$ 上の解析函数族についても行うことができる [17]. また $f(0) = 0$, $f'(0) = \alpha$ という条件のもとで考えたが, これにさらに条件 $f''(0) = \beta$ を追加しても, 計算はかなり面倒になるが variability region を決定することは可能である.

4 Convex functions への応用

前節の手法はもともと Bloch functions の与えられた点 z_0 での値 $f(z_0)$ に関する variability region の研究を行っているうちに考えついたが, 同じ手法を適用できる問題は他にもある. この節では応用例の 1 つとして

$$\mathcal{K} = \{f \in S :\ f(\mathbb{D}) \text{ is convex }\}$$

とおいて, $\log f'(z_0)$ の $f \in \mathcal{K}$ という条件下での variability region を求めてみよう. といっても単なる variability region $\{\log f'(z_0) : f \in \mathcal{K}\}$ を求めるのは, 殆ど演習問題レベルであり. 既に $\{\log f'(z_0) : f \in \mathcal{K}\} = \{-2\log(1-az_0) : |a| \leq 1\}$ となることが知られている. そこでここでは $|\lambda| \leq 1$ について $\mathcal{K}(\lambda) = \{f \in \mathcal{K} : f''(0) = 2\lambda\}$ とおいて variability region

$$V(\lambda, z_0) = \{\log f'(z_0) :\ f \in \mathcal{K}(\lambda)\}$$

を求めてみよう ([16]).

まず $V(\lambda, z_0)$ が内点を持つ convex and compact set であることは容易に分かる. 従って 凸閉 Jordan 領域であり, 境界曲線を決定すれば十分である. また $V(e^{i\theta}\lambda, z_0) = V(\lambda, e^{i\theta}z_0)$ が成り立つので, $0 \leq \lambda \leq 1$ の場合のみ考えれば良い.

このとき極値函数は

$$P_f(z) = z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1, \quad \omega_f(z) = \frac{P_f(z) - 1}{P_f(z) + 1}$$

とおけば $f \in \mathcal{K}$ より $\operatorname{Re} P_f(z) > 0$, $|\omega_f(z)| < 1$ が成り立つことと, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2\lambda$ より $\omega_f(0) = 0$ かつ $\omega'_f(0) = f''(0)/2 = \lambda$ が成り立つことを考え合わせれば

$$\frac{\frac{\omega_f(z)}{z} - \lambda}{1 - \overline{\lambda}\frac{\omega_f(z)}{z}} \equiv cz$$

を満たす f が, その候補となることは容易に推測できる. 但し c は $|c| = 1$ を満たす定数である. そこでこれを逆に解いてできる函数を $F_{\lambda,c} \in \mathcal{K}(\lambda)$ とおこう. 実際には

$$F_{\lambda,c}(z) = \int_0^z \exp\left[\int_0^{\zeta_2} \frac{2\delta(c\zeta_1, \lambda)\, d\zeta_1}{1 - \zeta(c\zeta_1, \lambda)}\right] d\zeta_2, \quad 但し\ \delta(z, \lambda) = \frac{z + \lambda}{1 + \overline{\lambda}z} \tag{11}$$

である.

$f \in \mathcal{K}(\lambda)$ について

$$\left|\frac{\frac{\omega_f(z)}{z} - \lambda}{1 - \overline{\lambda}\frac{\omega_f(z)}{z}}\right| \leq |z|$$

が成り立つが, この不等式は結構長い計算を行うと

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\{\lambda(1 - |z|^2) + \overline{z}(|z|^2 - \lambda^2)\}}{(1 - |z|^2)(1 - \lambda(z + \overline{z}) + |z|^2)}\right| \leq \frac{2(1 - \lambda^2)|z|}{(1 - |z|^2)(1 - \lambda(z + \overline{z}) + |z|^2)} \tag{12}$$

$f = F_{\lambda,c}$ の時には, これも長い計算により

$$\frac{F''_{\lambda,c}(z)}{F'_{\lambda,c}(z)} - \frac{2\{\lambda(1 - |z|^2) + \overline{z}(|z|^2 - \lambda^2)\}}{(1 - |z|^2)(1 - \lambda(z + \overline{z}) + |z|^2)} = \frac{2c(1 - \lambda^2)|z|}{(1 - |z|^2)(1 - \lambda(z + \overline{z}) + |z|^2)}\frac{g(z)}{|g(z)|}, \tag{13}$$

但し

$$g(z) = \frac{z}{\{1 + \lambda(e^{i\theta} - 1)z - e^{i\theta}z^2\}^2} \tag{14}$$

である. このとき

Theorem 4.1 $|\lambda| < 1$ と $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ について $V(\lambda, z_0)$ は凸な *Jordan* 閉領域であり, その境界は曲線 $\partial\mathbb{D} \ni c \mapsto \log F'_{\lambda,c}(z_0)$ により与えられる.

が成り立つかどうかは, 上の g について Lemma 3.5 が適用可能であるかどうかにかかっている. これは $1 + \lambda(e^{i\theta} - 1)z - e^{i\theta}z^2 = (1 - \overline{\zeta_1}z)(1 - \overline{\zeta_2}z)$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\mathbb{D}$ と因数分解できることに注意すれば

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{g'(z)}{g(z)}\right) + 1 = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + \overline{\zeta_1}z}{1 - \overline{\zeta_1}z}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{1 + \overline{\zeta_2}z}{1 - \overline{\zeta_2}z}\right) > 0$$

となることより従う.

References

[1] A. Bloch, Les théorèmes de M. Valiron sur les functions entières et la théorie de l'uniformisation, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **17**(1925), 1-25.

[2] M. Bonk, Extremal probleme bei Bloch-Funktionen, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1988, 54pp.

[3] M. Bonk, On Bloch's constant, Proc. Amer. Math. Soc. **378**(1990), 889-894.

[4] M. Bonk, Distortion estimates for Bloch functions, Bull. London Math. Soc. **23**(1991), 454-456.

[5] M. Bonk, D. Minda, and H. Yanagihara, Distortion theorems for locally univalent Bloch functions, J. Anal. Math. **69**(1996), 73-95 .

[6] M. Bonk, D. Minda, and H. Yanagihara, Distortion theorems for Bloch functions, Pac. J. Math. **179**(1997), 241-262.

[7] A. Eremenko, Geometric theory of meromorphic functions, preprint.

[8] E. Landau, Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten, Math. Z. **30**(1929), 608-634.

[9] X. Liu and D. Minda, Distortion theorems for Bloch functions, Trans. Amer. Math. Soc. **333**(1992), 325-338.

[10] R. J. Libera, Some classes of regular univalent functions, Proc. of the Amer. Math. Soc., **16**(1965), 755-758.

[11] T.H. MacGregor, A subordination for convex functions of order alpha, J. London Math. Soc.(2) **9**(1975), 530-536.

[12] K. Sakaguchi, On a certain univalent mapping, J. Math. Soc. Japan **11**, 72-75.

[13] H. Yanagihara, Sharp distortion estimate for locally schlicht Bloch functions. Bull. Lond. Math. Soc. **26**(1994), 539-542.

[14] H. Yanagihara, On the locally univalent Bloch constant. J. Anal. Math. **65**(1995), 1-17.

[15] H. Yanagihara, On the growth of Bloch functions, Complex Variables, Theory Appl. **44**(2001), 103-115.

[16] H. Yanagihara, Regions of variablity of convex functions, to appear in Math. Nach.

[17] H. Yanagihara, Regions of variablity for functions of bounded derivatives, to appear in Kodai Math. J.

22 An estimate on the Petersson series

by

KATSUHIKO MATSUZAKI
Department of Mathematics, Ochanomizu University

Let $R = \mathbf{H}/\Gamma$ be an arbitrary hyperbolic Riemann surface represented by a Fuchsian group Γ acting on the upper half-plane $\mathbf{H}$. Let c be a simple closed geodesic on R whose hyperbolic length is $\ell(c)$ and γ_c the corresponding hyperbolic element of Γ, which can be normalized as $\gamma_c(z) = e^{\ell(c)}z$. The Petersson series with respect to c is the relative Poincaré series

$$\sum_{[\gamma]\in\langle\gamma_c\rangle\backslash\Gamma} \frac{\gamma'(z)^2}{\gamma(z)^2},$$

which projects on R as an integrable holomorphic quadratic differential $\varphi_c(z)dz^2$. For the hyperbolic metric $\rho(z)|dz|$ on R, we estimate the function $\rho(z)^{-2}|\varphi_c(z)|$ on R.

Theorem. *Let R be a hyperbolic Riemann surface and let c be a simple closed geodesic on it. The hyperbolic distance between $z \in R$ and c is denoted by $d(z,c)$. Then there exist an absolute constant $A > 0$ that satisfies*

$$\rho(z)^{-2}|\varphi_c(z)| \leq A\,\ell(c)\cdot\exp(-d(z,c)/3)$$

for every $z \in R$ with $d(z,c)$ sufficiently large. In particular, the holomorphic quadratic differential φ_c is bounded and vanishes at infinity.

For a Beltrami differential $\mu(z)d\bar{z}/dz$ on R, consider a quasiconformal deformation R_μ of R given by μ and denote the geodesic length of the free homopoly class of c on R_μ by $\ell_\mu(c)$. Then a variational formula due to Gardiner asserts that

$$\left.\frac{d\ell_{t\mu}(c)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_R \mu(z)\varphi_c(z)\,dxdy.$$

The above theorem can be applied to an estimate of the derivative $d\ell_{t\mu}(c)/dt|_{t=0}$ through this formula.

23 正則自己被覆をもつリーマン面のタイヒミュラー空間上の力学系

藤川 英華（東京工業大学大学院情報理工学研究科）
谷口 雅彦（京都大学大学院理学研究科）
松崎 克彦（お茶の水女子大学理学部）

基本群が巡回群ではない双曲型リーマン面 $R = \Delta/\Gamma$（Δ は単位円板，Γ はねじれなしの非初等的フックス群）が単射ではない（不分岐）正則自己被覆写像 $f : R \to R$ をもつという設定を考える．R の双曲計量に関して f は局所的に等長写像である．

点 $x \in R$ の f による大軌道 (grand orbit) とは，ある整数 $n, m \geq 0$ により $f^n(x) = f^m(y)$ となるような点 $y \in R$ の集合と定義する．また，点 $x \in R$ の f による小軌道 (small orbit) とは，ある整数 $n \geq 0$ により $f^n(x) = f^n(y)$ となるような点 $y \in R$ の集合と定義する．大軌道から定まる同値関係による商空間を R/f, 小軌道から定まる同値関係による商空間を $R/(f)$ で表す．このとき，次が成り立っている．

1. 任意の点 $x \in R$ の大軌道は離散的であり，商空間 R/f は，商写像 $\pi_f : R \to R/f$ が正則被覆写像となるような双曲型リーマン面 Δ/Γ_f である．

2. 商空間 $R_\infty := R/(f)$ も双曲型リーマン面 Δ/Γ_∞ であり，正則被覆写像 $\pi_\infty : R \to R_\infty$ に対して，次の図式を可換にするような無限位数の双正則自己同型写像 $g_\infty : R_\infty \to R_\infty$ をもつ．

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R \\ {\scriptstyle \pi_\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\infty} \\ R_\infty & \xrightarrow[g_\infty]{} & R_\infty \end{array}$$

3. g_∞ による商空間 R_∞/g_∞ は R/f と一致し，$\pi_\infty : R \to R_\infty$ と商写像 $R_\infty \to R/g_\infty$ の合成が π_f に等しい．

4. 対応するフックス群は包含関係 $\Gamma \subset \Gamma_\infty \subset \Gamma_f$ をみたす．普遍被覆 $\Delta \to R$ に関する $f : R \to R$ の持ち上げを $g : \Delta \to \Delta$ とすると，$\Gamma_f = \langle \Gamma, g \rangle$, $\Gamma_\infty = \bigcup_n g^{-n} \Gamma g^n$ となる．

単射ではない正則自己被覆写像 $f: R \to R$ の典型的な例は，有理函数によるリーマン球面上の複素力学系のファトウ成分から与えることができる．しかし，次の主張は，このような状況がより一般的に存在することを表している．

命題 1 基本群が巡回群ではない任意の双曲型リーマン面 $\hat{R}$ に対して，単射ではない正則自己被覆写像 $f: R \to R$ をもつ双曲型リーマン面 R で，$R/f = \hat{R}$ となるものが存在する．

一般にリーマン面の正則被覆写像 $f: R_1 \to R_2$ に対して，タイヒミュラー空間の正則写像 $f^*: T(R_2) \to T(R_1)$ が，R_2 の擬等角変形の f による引き戻しで定義される．f^* は単射であり，タイヒミュラー空間の原点を保つ．したがって，正則自己被覆写像 $f: R \to R$ からはタイヒミュラー空間の単射自己正則写像 $f^*: T(R) \to T(R)$ が定まる．f が単射でないという条件は f^* が全射でないことと同値である．$T(R)$ のタイヒミュラー計量に関して f^* は非拡大的である．さらに正則被覆 $R \to R_\infty \to R/f$ からはタイヒミュラー空間の正則埋め込み $T(R/f) \hookrightarrow T(R_\infty) \hookrightarrow T(R)$ が与えられる．

力学系 $f^*: T(R) \to T(R)$ について，$T(R_\infty)$ はその不変集合であり，$T(R/f)$ は固定点集合に一致する．また極限集合 $\Lambda(f^*) \subset T(R)$ が定義できるが，それに関して次のことがわかる．

命題 2 (1) 極限集合は真の包含関係 $T(R/f) \subset \Lambda(f^*) \subset T(R_\infty)$ をみたす．(2) 極限集合の点 $p \in \Lambda(f^*)$ の方向が定める $T(R)$ の原点における接ベクトル v_p に対して，f^* は等長的である．すなわち $\|df^*(v_p)\| = \|v_p\|$.

参考文献

[1] E. Fujikawa and K. Matsuzaki, *Recurrent sets and periodic points for isometries of L^∞ spaces*, Indiana Univ. Math. J. , to appear.

[2] C. McMullen and D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system*, Adv. Math. **135** (1998), 351–395.

24 Branner-Hubbard-Lavaurs deformation of parabolic cubic polynomials

中根静男　　　東京工芸大学

Stretching deformation (Branner-Hubbard deformation) は充填ジュリア集合上何も変形しないので、ジュリア集合が連結な多項式は stretching で不変である。しかし、放物的周期点を持つ場合は Lavaurs map を用いて、その basin 内も変形することができる。本講演では、固有値が 1 の放物的不動点を持つような実 3 次多項式に対してそのような変形を行い、実際に多項式が変形されること、その変形空間がある stretching ray の集積点集合に一致することを報告する。

1 Stretching rays

実 3 次多項式族を $\mathcal{P}_3 = \{P(z) = z^3 - 3Az + \sqrt{B}; A, B > 0\}$ とおく。$P \in \mathcal{P}_3$ に対し φ_P をその Böttcher coordinate と書く。$s \in \mathbb{R}_+$ に対し $\ell_s(z) = z|z|^{s-1}$ とおいて P-不変な複素構造 σ_s を

$$\sigma_s = \begin{cases} (\ell_s \circ \varphi_P)^* \sigma_0 \text{ in a nbd of } \infty\ , \\ \sigma_0 \text{ on } K(P). \end{cases}$$

とおくと Measurable Riemann Mapping Theorem より $\sigma_s = F_s^* \sigma_0$ かつ $P_s := F_s \circ P \circ F_s^{-1} \in \mathcal{P}_3$ を満たす qc-map F_s が存在する。この擬等角変形を *stretching* または *Branner-Hubbard deformation* と呼ぶ。$P_s \sim_{hb} P$ 故 $P \in \mathcal{C}_3$ (connectedness locus) なら $P_s \equiv P$ が成り立つ。$P \in \mathcal{P}_3 - \mathcal{C}_3$ を通る *stretching ray* を $R(P) = \{P_s; s \in \mathbb{R}_+\}$ と定義する。Shift locus 上 *Böttcher vector* を

$$\eta(P) = \frac{1}{\log 3} \log\log \varphi_P(-\sqrt{A}) - \frac{1}{\log 3} \log\log \varphi_P(\sqrt{A})$$

と定義する。

補題 1. *Shift locus* 内の *stretching ray* 上 *Böttcher vector* は一定である。

2 Branner-Hubbard-Lavaurs deformation

固有値 1 の放物的不動点を持つような $\mathcal{P}_3$ の写像全体は $Per_1(1) = \{B = 4(A + 1/3)^3\}$ と表される。$Q \in Per_1(1)$ の放物的不動点 β_Q の attracting 及び repelling Fatou coordinates を $\phi_{Q,-}$ 及び $\phi_{Q,+}$ と書いて lifted phase $\sigma \in \mathbb{R}$ の

Lavaurs map $g_{Q,\sigma}:\mathcal{B}_Q\to\mathbb{C}$ を $g_{Q,\sigma}(z)=\phi_{Q,+}^{-1}\circ T_\sigma\circ\phi_{Q,-}$ と定義する。ここで $\mathcal{B}_Q$ は β_Q の basin、$T_\sigma(z)=z+\sigma$ である。また、$\phi_{Q,\pm}$ は実軸に関し対称になるように正規化しておく。$Q\in Per_1(1)$ と $\sigma\in\mathbb{R}$ に対し $<Q,g_{Q,\sigma}>$-不変な複素構造 σ_s を

$$\sigma_s=\begin{cases}(\ell_s\circ\varphi_Q)^*\sigma_0 \text{ in a nbd of } \infty\ ,\\ g_{Q,\sigma}^*\sigma_s \text{ in } \mathcal{B}_Q.\end{cases}$$

と定義すると、上と同様に $\sigma_s=\chi_s^*\sigma_0$, $Q_{s,\sigma}=\chi_s\circ Q\circ\chi_s^{-1}\in Per_1(1)$ を満たす qc-map $\chi_s=\chi_{s,\sigma}$ が存在する。$Q_{s,\sigma}$ を Q の *Branner-Hubbard-Lavaurs deformation* と呼ぶことにする。このとき $\chi_s\circ g_{Q,\sigma}\circ\chi_s^{-1}$ は $Q_{s,\sigma}$ の Lavaurs map であり、その lifted phase を $\sigma(s)$ とかく。また、$L(Q,\sigma)=\{(Q_{s,\sigma},\sigma(s))\in Per_1(1)\times\mathbb{R}; s\in\mathbb{R}_+\}$ を (Q,σ) を通る *BHL-ray* と呼ぶ。$(Q,\sigma)\in(Per_1(1)\cap\mathcal{C}_3)\times\mathbb{R}$ の Böttcher-Lavaurs vector を次で定義する。

$$\eta(Q,\sigma)=\frac{1}{\log 3}\log\log\varphi_Q(g_{Q,\sigma}(-\sqrt{A}))-\frac{1}{\log 3}\log\log\varphi_Q(g_{Q,\sigma}(\sqrt{A}))$$

補題 2. *BHL-ray* 上 $\eta(Q,\sigma)$ は一定である。

定理 1. $Q\in Per_1(1)\cap\mathcal{C}_3$ の *Fatou vector* $\tau(Q):=\phi_{Q,-}(-\sqrt{A})-\phi_{Q,-}(\sqrt{A})$ とおく。$\tau(Q)\notin\mathbb{Z}$ ならば、すべての σ に対し $s\mapsto Q_{s,\sigma}$ は定数関数ではない。

そのような写像は Willumsen [W] ではじめて構成された。

定理 2. $\tau(Q)\notin\mathbb{Z}$、$\eta(Q,\sigma)=\eta_0$ とすると、$\{Q_{s,\sigma}; s>0\}$ は $R(\eta_0)$ の集積点集合に一致する。

領域 $\mathcal{R}_0=\{B>4(A+1/3)^3\}$ は Shift locus に含まれ、その点を通る streching ray は Böttcher vector map の level curve になる。$R(\eta_0)$ は $\mathcal{R}_0$ 内の level η_0 の stretching ray を表す。BHL-ray も Böttcher-Lavaurs vector map の level curve と一致する。

参考文献

[KN] Y. Komori and S. Nakane: Landing property of stretching rays for real cubic polynomials. Conformal Geometry and Dynamics 8 (2004), pp. 87–114.

[PT] C. L. Petersen and Tan Lei: Branner-Hubbard motions and attracting dynamics. Preprint (2004).

[W] P. Willumsen: Holomorphic dynamics : On accumulation of stretching rays. Ph.D. thesis Tech. Univ. Denmark, 1997.

25 無限遠点をmetric global attractorにもつ超越整関数の様々な例について

木坂 正史 (京都大学大学院 人間・環境学研究科)

Definition f を（超越）整関数とする．Lebesgue 測度に関して $\mathbb{C}$ 上ほとんど全ての点 z に対して $f^n(z) \to \infty$ $(n \to \infty)$ となるとき，∞ は f の **metric global attractor** であるという．

f が超越的でない場合，即ち多項式の場合は，条件 $f^n(z) \to \infty$ $(n \to \infty)$ は z が超吸引不動点である無限遠点 ∞ の吸引領域 $A(\infty)$ に含まれることと同値であるから，次が成り立つことが簡単にわかる：

Proposition f を多項式とするとき，次は同値である．

(1) ∞ は f の metric global attractor である．

(2) $\mathrm{Leb}(K_f) = 0$.

(3) $F_f = A(\infty)$ かつ $\mathrm{Leb}(J_f) = 0$.

ただし $K_f = \{z \in \mathbb{C} \mid f^n(z) \to \infty\ (n \to \infty)$ とならない$\}$ は f の充填ジュリア集合，F_f は f のファトウ集合，J_f はジュリア集合である．

ちなみに $\mathrm{Leb}(J_f) > 0$ となるような多項式はいまだに見つかっていない．

以下では f が超越整関数の場合を考える．前回の学会では超越整関数の複素力学系に対する「Mañé の定理」と，その応用として超越整関数が無限遠点を metric global attractor にもつための１つの十分条件について報告した．今回は以下のように，無限遠点を metric global attractor にもつ超越整関数の様々な例について報告する．

f が超越的であるときは多項式の場合と異なり，$f^n(z) \to \infty$ $(n \to \infty)$ となる z については次の３つの可能性がある：

(1) ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^n(z) \in {}^{\exists}$ Baker domain $(\subset F_f)$.

(2) $z \in {}^{\exists}$ wandering domain $(\subset F_f)$.

(3) $z \in J_f$.

ここで上記の (1), (2), (3) に属する点全体の集合をそれぞれ B, W, J とする．この３つの各々がそれぞれ測度正か０かによって計８通りの可能性が考えられるが，無限遠点が metric global attractor になっている状況を考えると計７通りの可能性があることになる．これらの可能性に対して，それぞれが実際に起こりえるかどうかについて考えたい．

26 3-dimensional extension of Maskit slice for once-punctured tori

荒木 義明（東大数理）
糸 健太郎（名大多元数理）
小森 洋平（阪市大理）

Introduction $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ とする．$\mathbb{S}^n$ の向きを保つ等角自己同型群を $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^n)$ と書き，$\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^n)$ の離散部分群をクライン群と呼ぶ．特に $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^2) \cong \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ である．いま，$G \subset \mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^2)$ を $(1,1)$-型と $(0,3)$-型の曲面を一意化する b-group とすると，G の $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^2)$ における変形空間は $(1,1)$-型の Maskit slice としてよく知られている．ここでは G を $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^3)$ の部分群とみて，この群の $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^3)$ における変形空間を考察する．

Maskit slices $(1,1)$-型と $(0,3)$-型の曲面を一意化する b-group $G \subset \mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^2)$ を 1 つ固定する．このような群は次の形に正規化される．ただし $\mu \in \mathbb{C}$ はパラメータである：

$$G_\mu = \langle A_\mu, B\rangle; \quad A_\mu(\tau) = \frac{1}{\tau} + \mu, \; B(\tau) = \tau + 2.$$

ここで G の変形空間 $\mathcal{M}_{1,1} = \{\mu \in \mathbb{C} \,|\, \exists\rho_\mu : G \to G_\mu : \text{faithful, discrete}\}$ を $(1,1)$-型の Maskit slice と呼ぶ．同様に，$(0,4)$-型と 2 つの $(0,3)$-型の曲面を一意化する b-group $H \subset \mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^2)$ は次の形に正規化される（$\mu \in \mathbb{C}$ はパラメータ）：

$$H_\mu = \langle B, C, D_\mu\rangle; \quad B(\tau) = \tau + 2, \; C(\tau) = \frac{1}{2\tau + 1}, \; D_\mu(\tau) = C(\tau - \mu) + \mu.$$

ここで H の変形空間 $\mathcal{M}_{0,4} = \{\mu \in \mathbb{C} \,|\, \exists\eta_\mu : H \to H_\mu : \text{faithful, discrete}\}$ を $(0,4)$-型の Maskit slice と呼ぶ．いま，任意の $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $A_\mu^{-1} B A_\mu = C$ と $A_\mu B A_\mu^{-1} = D_\mu$ が成り立つので，常に $G_\mu > H_\mu$ であることに注意する．さらに次が知られている．

Theorem 1 (Kra, 1990, J. Amer. Math. Soc). $\mathcal{M}_{0,4} = \frac{1}{2}\mathcal{M}_{1,1}$.

Poincaré extension of G $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ を次の対応で同一視する：$\tau = x + iy \leftrightarrow \boldsymbol{x} = (x, y, 0)$, $\mu = p + iq \leftrightarrow \boldsymbol{p} = (p, q, 0)$．ここで $G_\mu \subset \mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^2)$ の各元を Poincaré extension により $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^3)$ の元とみなし，さらにパラメータ $\boldsymbol{p} = (p, q, 0) \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{p} = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ に拡張することで，G の $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^3)$ における変形

$$G_{\boldsymbol{p}} = \langle A_{\boldsymbol{p}}, B\rangle; \quad A_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = I \circ J(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}, \; B(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + (2, 0, 0) \tag{1}$$

を得る．ここで $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $I(x, y, z) = (x, -y, z)$, $J(x, y, z) = \dfrac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$ である．逆に G の $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^3)$ における変形はこの形に正規化される：

Proposition 2. *$A, B \in \mathrm{Conf}(\mathbb{S}^3)$, A: loxodromic, B:parabolic without rotation, $[A, B]$: parabolic,* かつ A と B が共通の固定点を持たないとき，群 $\langle A, B\rangle$ は式 (1) の形に正規化される．ここでパラメータ $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ は ± 1 を除いて一意的に定まる．

Deformation space of G in $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^3)$ G の $\mathrm{Conf}(\mathbb{S}^3)$ における変形空間を

$$\widehat{\mathcal{M}} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \rho_{\boldsymbol{p}} : G \to G_{\boldsymbol{p}} : \text{faithful, discrete}\}$$

と書く．このとき，定義から $\widehat{\mathcal{M}} \cap (r = 0 \text{ plane}) = \mathcal{M}_{1,1}$ が成り立つ．以下では，$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ の x-軸に関する回転角を θ として $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times [0, \pi)$ という座標も用いる．このとき，以下の結果を得た．

Proposition 3. $\mathcal{M}_{0,4} \times [0, \pi) \subset \widehat{\mathcal{M}} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2\} \times [0, \pi)$.

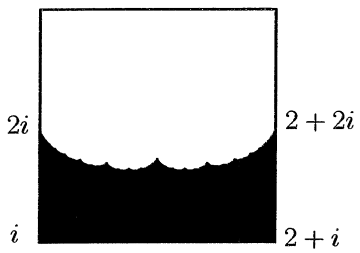
Theorem 4. ある $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ が存在して，

$$\widehat{\mathcal{M}} \cap \left(\mathbb{R}^2 \times \left[\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \theta_0\right]\right) = \mathcal{M}_{0,4} \times \left[\frac{\pi}{2} - \theta_0, \frac{\pi}{2} + \theta_0\right].$$

が成り立つ．特に $\widehat{\mathcal{M}} \cap (q = 0 \text{ plane}) = \mathcal{M}_{0,4} \times \{\frac{\pi}{2}\}$ が成り立つ．

Theorem 5. *$\boldsymbol{p} = (0, q, r) \in (p = 0$ plane$)$* に対して，$\boldsymbol{p} \in \widehat{\mathcal{M}}$ となる必要十分条件は，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_{\boldsymbol{p}}^n$ の *isometric sphere* の半径が 1 以下となることである．さらに $A_{\boldsymbol{p}}^n$ の *isometric sphere* の半径が 1 $\Leftrightarrow$ $[A_{\boldsymbol{p}}^n, B]$: *parabolic* が成り立つ．

$(p = 0 \text{ plane})$ において，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_{\boldsymbol{p}}^n$ の isometric sphere の半径が 1 以下となる領域をコンピュータで描いたものが図 1 の右側である．$\widehat{\mathcal{M}} \cap (p = 0 \text{ plane})$ の境界は，$[A_{\boldsymbol{p}}^n, B]$ が accidental parabolic となる滑らかな曲線たちによって構成されている．



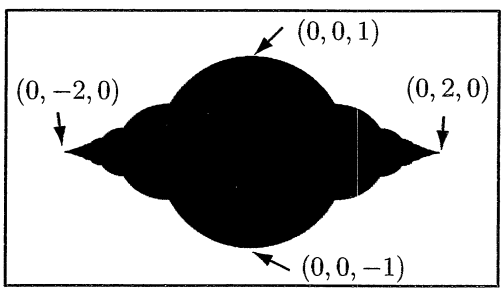


図 1: $\mathcal{M}_{1,1}$ の一部 (左の白い領域) と $\widehat{\mathcal{M}} \cap (p = 0 \text{ plane})$ (右の白い領域)

27 クライン群で一意化される代数曲線について

小森洋平（阪市大・理）

終端正則 b-群というクライン群 G の群の表示から、G が一意化するリーマン面 Ω_0/G の代数曲線としての表示を求める問題を考える。ここで Ω_0 は G の不変成分とする。例えば次の結果は 1 点穴空きトーラスの場合である。

定理 1. $G_\mu = \langle S, T_\mu \rangle$ を $(1,1)$ 型の終端正則 b-群の表示とする。ここで $S(z) = z + 2$, $T(z) = \frac{1}{z} + \mu$、μ は複素パラメータとする。このとき、次のような G_μ に関する自明でない相対ポアンカレ級数の比の形をした関数

$$h(z) = \frac{\sum_{g \in \langle B \rangle \backslash G_\mu} (Ag)'(z)^2}{\sum_{g \in \langle S \rangle \backslash G_\mu} g'(z)^2}$$

は 1 点穴空きトーラス Ω_0/G からリーマン球面 $\hat{\mathbf{C}}$ への 2 重分岐被覆を与える。ここで $g'(z)$ は $g(z)$ の z に関する微分、$A(z) = \frac{1}{1-z}$, $B(z) = [S, T^{-1}] = \frac{3z-2}{2z-1}$ とする。特に Ω_0/G の楕円曲線としての表示は次のようになる。

$$y^2 = (x - h(\frac{\mu}{2}))(x - h(\frac{\mu}{2} + 1))(x - h(i))$$

つまり関数 $h(z)$ は楕円関数論におけるワイエルシュトラスの $\wp$ 関数に対応している。さらにこの代数曲線としての表示は、複素パラメータ μ に関して正則に動くことにも注意する。講演では種数 2 のリーマン面などその他の代数曲線についても考察する。

28 穴あき曲面群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現とトレミー型トレース恒等式

島根大学総合理工学部 中西敏浩 (Toshihiro Nakanishi)

一つの向き付け可能なコンパクト曲面の基本群

$$G = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g, c_1, ..., c_m : (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) \cdots (a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) c_1 \cdots c_m = 1 \rangle$$

から $SL(2,\mathbb{C})$ への表現を考える。以下 $2g-2+m>0$ $m \geq 1$ を仮定する。

$\mathcal{R}$ で忠実な表現 $\rho : G \to SL(2,\mathbb{C})$ で $\rho(c_k)$ $(k=1,2,...,m)$ は放物型かつ $\mathrm{tr}\rho(c_k) = -2$ をみたすものの同値類全体の空間とする。G の元 g が定める $\mathcal{R}$ 上のトレース関数

$$\chi_g : \mathcal{R} \to \mathbb{C} \qquad \chi_g(\rho) = \mathrm{tr}\rho(g)$$

の間に成立する恒等式がいろいろ知られている。例えば [1, 3.4] 参照。この講演では穴あき曲面群に特有のトレース恒等式を紹介する。

F を向き付け可能な種数 g の閉曲面とし、$P = \{x_1, ..., x_m\} \subset F$ を m 点集合とする。$F' = F - P$ とおくと G は F' の基本群である。単純弧

$$c : I^\circ = (0,1) \to F'$$

で、 $c(0), c(1) \in P$ をみたすような曲線 $c : I = [0,1] \to F$ に拡張できるものを F' 上の ideal arc と呼ぶ。F' 上の ideal arc c のイソトピー類 $[c]$ に付随する $\mathcal{R}$ 上の関数 (λ length) $\lambda_c : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ を次のように定める:

(i) c の端点が P の同じの点 x_i であるとき：c を含む F' の $(0,3)$ 型部分領域 (a pair of pants) を x_i と 2 つの単純閉曲線 c', c'' を境界成分にもつように選び、

$$\lambda_c(\rho) = -\mathrm{tr}\rho(c') - \mathrm{tr}\rho(c'')$$

と定める。($\mathrm{tr}\rho$ は F' 上の閉曲線の自由ホモトピー類の空間で定義できることに注意)

(ii) c の端点が P の異なる 2 点 x_i, x_j であるとき：c を含む F' の $(0,3)$ 型部分領域を x_i, x_j と 1 つの単純閉曲線 c' を境界成分にもつように選び、

$$\lambda_c(\rho)^2 = 2 - \mathrm{tr}\rho(c')$$

と定める。このときは $\lambda_c(\rho)$ は $\{-1, 1\}$ に属する乗法因子の差を除いて定まる。

単位正方形 $D=\{(x,y):0\leq x,y\leq 1\}$ の $p_1=(0,0)$ と $p_2=(1,0)$ を結ぶ辺を a, p_2 と $p_3=(1,1)$ を結ぶ辺を b, p_3 と $p_4=(0,1)$ を結ぶ辺を c, p_4 と p_1 を結ぶ辺を d, p_1 と p_3 を結ぶ対角線を e, p_2 と p_4 を結ぶ対角線を f とおく。$D'=D-\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ から F' への埋め込み φ で、連続写像 $\varphi:D\to F$ に拡張され $\varphi(\{p_1,p_2,p_3,p_4\})\subset P$ となるものを考える。φ による a,b,c,d の像はそれぞれ ideal arc を定めるが、これらを改めて a,b,c,d で表わすことにする。以上の設定のもとで次が成り立つ。

定理. λ_a, λ_b, λ_c, λ_d, λ_e, λ_f をそれぞれ a,b,c,d,e,f に付随して定まる λ-length とするとき $\epsilon_1,\epsilon_2\in\{-1,1\}$ を適当に選べば

$$\epsilon_1\lambda_a\lambda_c+\epsilon_1\lambda_b\lambda_d=\lambda_e\lambda_f.$$

この定理の応用として、$\mathcal{R}$ に作用する写像類群 $\mathcal{MC}_{g,m}$ (G の外部自己同型群) の作用が有理写像で表わされることがあるが、今のところ符号の選び方の問題があるので $\mathcal{MC}_{g,m}$ の作用で不変な単連結領域 (たとえば $\mathcal{R}$ の部分領域としての（いろんな意味での）Teichmüller 空間) に制限して扱うのが安全である。上の定理の特別な場合は [2] で証明されている。

参考文献

[1] Maclachlan, C. and A. W. Reid, *The Arithmetic of Hyperbolic 3-manifolds*, Springer, GTM 219, Springer Verlag, 2003.

[2] Nakanishi, T. and M. Näätänen, complexification of lambda length as parameter for $SL(2,\mathbb{C})$ representation space of punctured surface groups, J. London. Math. Soc., **70** (2004), 383-404

29 ある種の小平曲面から定まる正則族の正則切断について

今吉 洋一（大阪市立大学大学院理学研究科）
能城 敏博（大阪市立大学大学院理学研究科）

本講演では，ある種の小平曲面で，Riera が構成したものから定まる，種数 2 の閉リーマン面の正則族 $(\mathcal{M}, \pi, R)$ を，楕円函数を用いて表示し，それから得られる結果を述べる．

まず Riera の構成方法を簡単に述べる．種数 1 の閉リーマン面，すなわちトーラスを $\hat{T}$ とする．$\hat{T}$ の点 p_0 をとり，$T = \hat{T} \setminus \{p_0\}$ とおく．任意の点 $p \in T$ に対し， p_0 から p へ単純曲線に沿って切り口を入れる．その切り口が入った $\hat{T}$ のコピーを 2 つ用意する．2 つの切り口を交差的に貼り合わせれば，種数 2 の閉リーマン面 S_p で，$\hat{T}$ の p_0 と p で分岐する $\hat{T}$ 上の分岐 2 葉被覆面が得られる．

このとき S_p の複素構造は，点 p だけでなく，p_0 から p への切り口の取り方にも依ることに注意する．S_p の複素構造は，端点 p_0, p を固定したとき，本質的には 4 通りの切り口に依って決まる．そこで，T の 4 葉不分岐被覆 $\rho : R \to T$ を構成する．R はトーラスから 4 点を除いたリーマン面である．すると任意の点 $t \in R$ に対し，分岐点 $\rho(t)$ と p_0 から $\rho(t)$ への切り口も指定され，種数 2 の閉リーマン面 S_t が一意的に定まる．このとき，

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in R} \{t\} \times S_t, \quad \pi : \mathcal{M} \to R,\ (t, q) \mapsto t$$

とおく．Riera は $\mathcal{M}$ に自然に 2 次元複素多様体の構造が入り，種数 2 の閉リーマン面の正則族 $(\mathcal{M}, \pi, R)$ が得られることを示した．この 3 つ組 $(\mathcal{M}, \pi, R)$ を Riera の例と呼ぶことにする．

Riera の例の，楕円函数を用いた第 1 の表示は，種数 2 の閉リーマン面をトーラス $\hat{T} = \mathbf{C}/\Gamma$ 上の有理型函数で表すものである．任意の点 $q \in \hat{T} \setminus \{[0]\}$ に対して，点 $p \in \hat{T}$ で $p = 2q$ を満たすものとする．このような p のとり方は 4 通りあることに注意する．そこで $\hat{T} \setminus \{[0]\}$ の 4 葉不分岐被覆 $\rho : R \to \hat{T} \setminus \{[0]\}$ をとると，任意の点 $t \in R$ に対して，点 $\rho(t)$ で $\rho(t) = 2q$ を満たすものが一意的に定まる．$\hat{T}$ 上の有理型函数で $[0]$ と $\rho(t)$ で 1 位の零点，$q = \rho(t)/2$ で 2 位の極をも

つものを f_t と書く．正規化条件 $(df_t/dz)([0])=1$ のもとで f_t は一意的に決まる．そこで，

$$\mathcal{M}_E=\{(t,p,w)\in R\times\hat{T}\times\hat{\mathbf{C}}\mid w^2=f_t(p)\},\quad \pi_E:\mathcal{M}_E\to R,\ (t,p,w)\mapsto t$$

とおけば，３つ組 $(\mathcal{M}_E,\pi_E,R)$ は種数２の閉リーマン面の正則族になることが分かる．さらに $(\mathcal{M}_E,\pi_E,R)$ は Riera の例 $(\mathcal{M},\pi,R)$ と正則族として同型になる．このとき，次の結果が得られる．

定理 1. リーマン面の正則族 $(\mathcal{M},\pi,R)$ を Riera の例とすれば，$\mathcal{M}$ には正則切断が丁度２つある．それらは，任意の $t\in R$ に対して，$s_1(t)=(t,[0])$ と $s_2(t)=(t,\rho(t))$ で表される正則切断 s_1 と s_2 である．

Riera の例の第２の表示は，種数２の閉リーマン面を $\hat{T}$ 上の f_t を用いて，$\hat{\mathbf{C}}$ 上の２葉の分岐被覆面（超楕円曲線）で表すものである．f_t は $\hat{T}$ 上に４つの分岐点を持つ．それらを $q=\rho(t)/2, b_j(t)$ $(j=1,2,3)$ と書き，$a_j(t)=f_t(b_j(t))$ とおく．x の６次の多項式 $P_t(x)$ を

$$P_t(x)=(x^2-a_1(t))(x^2-a_2(t))(x^2-a_3(t))$$

で定義する．このとき

$$\mathcal{M}_{HE}=\{(t,x,y)\in R\times\hat{\mathbf{C}}^2\mid y^2=P_t(x)\},\quad \pi_{HE}:\mathcal{M}_{HE}\to R,\quad (t,x,y)\mapsto t$$

とすれば，３つ組 $(\mathcal{M}_{HE},\pi_{HE},R)$ は種数２の閉リーマン面の正則族になることが分かる．さらに $(\mathcal{M}_{HE},\pi_{HE},R)$ は Riera の例 $(\mathcal{M},\pi,R)$ と正則族として同型となる．このことから，種数２の閉リーマン面のモジュライ空間を M_2 で表せば，次の結果が得られる．

定理 2. 写像 $\Phi:R\to M_2,\ t\mapsto[S_t]$ は大域的に単射な正則写像である．

参考文献

[1] K. Kodaira, *A certain type of irregular algebraic surfaces*, J. Analyse Math. **19**(1967), 207-215.

[2] G. Riera, *Semi-direct products of fuchsian groups and uniformization*, Duke Math. J **44**(1977), 291-304.

30 階層型神経回路網における学習理論のゼータ関数と特異点解消

青柳 美輝（上智大学理工学部）
渡辺 澄夫（東京工業大学精密工学研究所）

概 要

階層型神経回路網，縮小ランク回帰モデルのように，入力からも出力からも直接には働きを定められていない隠れた部分を持つ学習モデルは，パラメータが特定不能になり，フィッシャー計量が縮退するという特徴をもつ．このようなモデルを特異モデルと呼ぶ．近年，論文 [5, 6] において，学習モデルのゼータ関数の極が，特異モデルのベイズ推測に関する確率的複雑さの漸近形を与えることが示されている．ここで学習モデルのゼータ関数は，カルバック情報量と事前分布より定まる 1 変数複素関数である．

しかし，今まで，計算が複雑なため，数例において，その漸近形の主要項の上限は得られていたが，値は求められていなかった．この講演では，階層型ニューラルネットワークにおいての主要項を与え，確率的複雑さの厳密な漸近展開を与える．

$w=(a_1^{(w)},\cdots,a_p^{(w)},b_1^{(w)},\cdots,b_p^{(w)})$ を $2p$ 次元の変数とし，自然数 Q に対し，一変数 z の複素関数 $J_Q^*(z)$ を次で定義する．

$$J_Q^*(z)=\int_{U^*}\{\sum_{n=1}^{P}(\sum_{m=1}^{p}a_m^{(w)}{b_m^{(w)}}^{Q(n-1)+1}-\sum_{m=1}^{p}{a^*}_m{b_m^*}^{Q(n-1)+1})^2\}^z\prod_{m=1}^{p}\mathrm{d}a_m^{(w)}\mathrm{d}b_m^{(w)} \tag{1}$$

ここで，$w^*=(a_1^*,\cdots,a_p^*,b_1^*,\cdots,b_p^*)$ は定数で，$U^*=U_{a_1^*,\cdots,a_p^*,b_1^*,\cdots,b_p^*}$ は，$(a_1^*,\cdots,a_p^*,b_1^*,\cdots,b_p^*)$ の十分小さな近傍である．定数 $\{b_i^{*Q}\mid b_i^{*Q}\neq 0\}$ の中で，互いに異なるものを $b_1^{**Q},\ldots,b_r^{**Q}$ とする．また，${a^{**}}_i$ を

${a^{**}}_i=-(\sum_{\{m\ \mid\ {b^*}_m^Q={b^{**}}_i^Q,1\leq m\leq p\}}{a^*}_m{b^*}_m)/{b^{**}}_i$ で定義し，さらに $a_0^{**}=0, b_0^{**}=0$ としておく．$\tilde{r}$ $(\tilde{r}\leq r)$ を ${a^{**}}_\tau\neq 0$ となるものの総数とし，順番を並べ替えて $a_1^{**}\neq 0,\cdots,a_{\tilde{r}}^{**}\neq 0$, $a_{\tilde{r}+1}^{**}=0,\cdots,a_r^{**}=0$ であると仮定しておく．この $\tilde{r}$ を用いて $P=p+\tilde{r}$ とする．

集合 B の個数を $\#B$ で表し，

$$B_\tau^{(w)}=\{b_i^{(w)}\mid b_i^*=b_\tau^{**}\},\quad s_\tau=\#B_\tau^{(w)},\quad 1\leq\tau\leq r,$$
$$B_0^{(w)}=\{b_i^{(w)}\mid b_i^*=0\},\qquad s_0=\#B_0^{(w)},$$

と定義する．$H_\tau=\sum_{b_m\in B_\tau^{(w)}}a_m^{(w)}{b_m^{(w)}}^{Q(n-1)+1}+a_\tau^{**}{b_\tau^{**}}^{Q(n-1)+1}$ に対して，

$$J_\tau(z)=\int_{U^*\cap\mathbb{R}^{s_\tau}}\{\sum_{n=1}^{P}H_\tau^2\}^z\prod_{b_m\in B_\tau^{(w)}}\mathrm{d}a_m^{(w)}\mathrm{d}b_m^{(w)}.$$

とおく．$-\lambda_*$, $-\lambda_\tau$ をそれぞれ $J_Q^*(z)$ および $J_\tau(z)$ の最大の極とする．

主定理 1

(1) $\lambda_* = \sum_{\tau=0}^{r} \lambda_\tau$.

(2) $\tilde{n}_0 = \max\{i \in \mathbb{N} \mid Q(i^2 - i) + 2i \leq 2s_0\}$, $1 \leq \tau_1 \leq \tilde{r}$ に対して，$n_{\tau_1} = \max\{i \in \mathbb{N} \mid i^2 + i \leq 2s_{\tau_1}\}$ および，$\tilde{r} < \tau_2 \leq r$ に対して，$n_{\tau_2} = \max\{i \in \mathbb{N} \mid i^2 + i \leq 2(s_{\tau_2} - 1)\}$ とする．この時，

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{Q(\tilde{n}_0^2 + \tilde{n}_0) + 2s_0}{4Q\tilde{n}_0 + 4}, \\
\lambda_{\tau_1} &= \frac{n_{\tau_1} + n_{\tau_1}^2 + 2s_{\tau_1}}{4n_{\tau_1}}, && \text{for } 1 \leq \tau_1 \leq \tilde{r}, \\
\lambda_{\tau_2} &= \frac{n_{\tau_2} + n_{\tau_2}^2 + 2(s_{\tau_2} - 1)}{4n_{\tau_2}}, && \text{for } \tilde{r} + 1 \leq \tau_2 \leq r, n_{\tau_2} \geq 1, \\
\lambda_{\tau_2} &= \frac{1}{2}, && \text{for } \tilde{r} + 1 \leq \tau_2 \leq r, n_{\tau_2} = 0.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\Theta = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2 \quad | \quad & Q(\tilde{n}_0^2 - \tilde{n}_0) + 2\tilde{n}_0 = 2s_{\tau_0}, \tau_0 = 0, s_{\tau_0} \geq 1, \\
& n_{\tau_1}^2 + n_{\tau_1} = 2s_{\tau_1}, s_{\tau_1} > 1, 1 \leq \tau_1 \leq \tilde{r}, \qquad \text{に対して}, \\
& n_{\tau_2}^2 + n_{\tau_2} = 2(s_{\tau_2} - 1), s_{\tau_2} > 1, \tilde{r} < \tau_2 \leq r\}.
\end{aligned}
$$

極の最大の位数は $\theta = \#\Theta + 1$.

主定理 2 3層神経回路網の汎化誤差，確率的複雑さの主要項は，主定理1の $Q = 2$ の場合の λ_* で与えられる．

参考文献

[1] 渡辺澄夫, 萩原克幸, 赤穂昭太郎, 本村陽一, 福水健次, 岡田真人, 青柳美輝, 学習システムの理論と実現, 森北出版,（印刷中）

[2] M. Aoyagi and S. Watanabe, [チュートリアル講演] Resolution of singularities and its application to learning theory, Technical report of IEICE, NC2003-26, (2003) No. 26, pp.25-30.

[3] M. Aoyagi and S. Watanabe, Stochastic Complexities of Reduced Rank Regression in Bayesian Estimation, Neural Network, (to appear).

[4] M. Aoyagi and S. Watanabe, 特異点解消とニューラルネットワークのベイズ推定における汎化誤差, 電子情報通信学会和文論文誌 DII, (to appear).

[5] S. Watanabe, Algebraic analysis for nonidentifiable learning machines, Neural Computation, 13 (4), pp. 899-933, 2001.

[6] S. Watanabe, Algebraic geometrical methods for hierarchical learning machines, Neural Networks, 14 (8), pp. 1049-1060, 2001.

31 UNIVERSAL ABELIAN COVERS OF CERTAIN SURFACE SINGULARITIES

奥間 智弘　(群馬高専)

(X,o) を2次元正規特異点，S をそのリンクとし，X は S 上の錘に同相であるとする．さらに，S は $\mathbb{Q}$ ホモロジー球面であると仮定する．そのとき，$G := H_1(S,\mathbb{Z})$ は有限である．2次元正規特異点の有限被覆 $(Y,o) \to (X,o)$ は $Y \setminus \{o\} \to X \setminus \{o\}$ が G を被覆変換群とする不分岐被覆であるとき *universal abelian covering* (UAC) といわれる．仮定により， UAC $(Y,o) \to (X,o)$ は存在する．

Neumann と Wahl は (X,o) の双対グラフ Γ が "semigroup condition" を満たすとき，*splice diagram equations* という Γ のデータから得られる方程式系を導入し，次を示した．

Theorem 1 ([2]). *$(\widetilde{Y},o)$ を splice diagram equations で定義される特異点とすると，(1) $(\widetilde{Y},o)$ は2次元孤立 complete intersection 特異点であり，(2) Γ が "congruence condition" を満たすなら G は $\widetilde{Y}$ に作用し，$\widetilde{Y}/G$ (splice-quotient singularity といわれる) は X と同相な2次元正規特異点になり，$\widetilde{Y} \to \widetilde{Y}/G$ は UAC である．*

Neumann と Wahl は次を予想した

Conjecture 2 ([1], [2]). 有理型特異点と最小楕円型特異点の双対グラフはsemigroup condition と congruence condition を満たし，これらの特異点は splice-quotient singularities である．

(当初は，X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein なら，それは splice-quotient singularity であろうと予想していたが，Némethi が反例を発見した．)

Theorem 3 ([4]). *Conjecture 2 は正しい．*

概略について述べる．

$\pi\colon M \to X$ を最小良特異点解消，$A = \bigcup_i A_i$ を例外集合の既約分解とする．Γ の端点に対応する A_i を end-curve という．$A_{\mathbb{Z}} = \sum \mathbb{Z}A_i$,　$A_{\mathbb{Q}} = A_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ とおき，$\bar{A}_i \in A_{\mathbb{Q}}$ を $\bar{A}_i \cdot A_j = -\delta_{ij}$ を満たすものとする．$\bar{A}_{\mathbb{Z}} := \sum \mathbb{Z}\bar{A}_i \subset A_{\mathbb{Q}}$ とおくと，G は $\bar{A}_{\mathbb{Z}}/A_{\mathbb{Z}}$ に同型である．$\bar{A}_{\mathbb{Z}}/A_{\mathbb{Z}}$ の元に自然に対応する M 上の因子 D_g,

$g \in G$, をとって，$\mathcal{A} := \bigoplus_{g\in G} \pi_* \mathcal{O}_M(D_g)$ に自然な $\mathcal{O}_X$-algebra の構造を入れれば，$Y = \mathrm{Specan}_X \mathcal{A}$ となる．

ここで，次の条件を考える．

Condition 4. end-curve でない任意の A_i と $A - A_i$ の任意の連結成分 C に対して，C 上の基本サイクル Z_C が $Z_C \cdot A_i = 1$ を満たす．

Condition 5. $n_i \in \mathbb{N}$ を $n_i \bar{A}_i \in A_{\mathbb{Z}}$ を満たすものとする．任意の end-curve A_i に対して，D_g を $\bar{A}_i \mod A_{\mathbb{Z}}$ に対応する因子とすると，ある $y_i \in H^0(\mathcal{O}_M(D_g))$ があって 次を満たす：どの A_i も含まない M 上の因子 $H > 0$ で $A \cdot H = A_i \cdot H = 1$ を満たすものにより，$\mathrm{div}(y_i^{n_i}) = n_i(\bar{A}_i + H)$ と表せる ($y_i^{n_i} \in H^0(\mathcal{O}_X)$ である)．

Theorem 6 ([2]). *Condition 4 は semigroup condition と congruence condition を導く．*

Lemma 7 ([4]). *(X, o) が有理型特異点または最小楕円型特異点ならば，Condition 4, 5 は満たされる．*

$S = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_m\}$ を収束冪級数環とする．

Theorem 8 ([4]). *Condition 4, 5 が満たされると仮定する．このとき，$\psi(x_i) = y_i$ によって定義される準同型写像 ψ: $S \to \mathcal{O}_{Y,o}$ は全射であり，$\mathrm{Ker}\psi$ は G-homogeneous な splice diagram equations で生成される．したがって，(X, o) は splice-quotient singularity である．*

References

[1] W. D. Neumann and J. Wahl, *Universal abelian covers of surface singularities*, Trends in singularities, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2002, pp. 181–190.

[2] ———, *Complete intersection singularities of splice type as universal abelian covers*, Geom. Topol. **9** (2005), 699–755.

[3] ———, *Complex surface singularities with integral homology sphere links*, Geom. Topol. **9** (2005), 757–811.

[4] T. Okuma, *Universal abelian covers of certain surface singularities*, arXiv:math.AG/0503733.

32 On a Kobayashi hyperbolic manifold N modulo a closed subset Δ_N and its applications

足立幸信

N を n 次元（$n \geq 1$）連結複素多様体、d_N を N 上に定義された小林擬距離とする。

定義 1　$\Delta_N = \{p \in N; d_N(p,q) = 0, \exists q \neq p\}$, $p \in \Delta_N$ に対し　$\Delta_N(p) = \{q \in N; d_N(p,q) = 0\}$

定義 2　N の閉集合 E がオーダー 1 の擬凹状集合とは、任意の N の近傍　$U : |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1$ と任意の正数 $r, s(0 < r, s < 1)$ に対して、$U^* \cap E = \emptyset$ なら $U \cap E = \emptyset$ となることである。ただし $U^* = \{p \in U; |z_1(p)| \leq r\} \bigcup \{p \in U; s \leq \max_{2 \leq i \leq n} |z_i(p)|\}$.

[A-S] と同じ方法で次がいえる。

定理 3　$\Delta_N, \Delta_N(p)$ はオーダー 1 の擬凹状集合である。

系 4　$\Delta_N \ni p$ に対し、p の N の座標閉近傍 $\bar{U}$ を取ると $\exists q \in \partial U$　$s.t.$　$d_N(p,q) = 0$. $\Delta_N(p) \ni q$ に対し、q の N の座標閉近傍 $\bar{U}$ を取ると $\exists r \in \partial U$　$s.t.$　$d_N(p,r) = 0$.

定理 5　M, N を 2 次元多様体、Δ_N は解析的曲線（純 1 次元解析的集合）、$\Phi : M \to N$ は正則写像で Φ のヤコビアン $J\Phi \not\equiv 0$ とすると、Δ_M は M の解析的曲線である。

定理 6　$\pi : \tilde{N} \to N$ は被覆多様体、N の次元 $n(n \geq 1)$ とすると $\Delta_{\tilde{N}} = \pi^{-1}(\Delta_N)$ であるが、$n = 2$ とすると $\Delta_{\tilde{N}}$ が解析的曲線なら Δ_N もそうである。

$P(x,y)$ を非定数多項式とする。P の定数面の既約成分を (g,n) タイプ（g : 種数、n:境界点）とする。有限個の定数面を除き、タイプ一定、非特異であることはよく知られている。そこで一般の定数面が (g,n) タイプのとき、P を (g,n) タイプの多項式という。例外面のタイプを (g',n') とすると $g' \leq g, g'+n' \leq g+n$ が成立する。一般型の多項式とは、(g,n) タイプとしたとき $2g-2+n > 0$ であることである。原始的多項式とは有限個の定数面を除き、定数面が既約であることをいう。

定理 7　$P(x,y)$ を一般型多項式とし $N = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 ; P(x,y) \neq a, b\}$ とすると、$\Delta_N \subset S$ である。S は $P(x,y)$ の N 内の例外面全体。

命題 8　N を 2 次元の多様体で $d_N \equiv 0$ とする。$F : N \to \mathbf{C}^2$ で、ある多項式 $P(x,y)$ に対し、$P \circ F \neq a, b$ なら F は退化する。（像が P の一つの定数面に含まれる。）

定理 9　N を 2 次元多様体、Δ_N は空でなく、解析的曲線でもないとする。$F : N \to \mathbf{C}^2$

である一般型多項式 $P(x,y)$ に対し、$P\circ F\neq a,b$ なら F は退化する。(像が開集合を含まない。)

注意１０　上の定理で $P(x,y)$ が一般型であるという条件は落とせない。たとえば $N=\mathbf{C}\times(\mathbf{C}-\{a,b\})$ とし $P(x,y)=y, F=id.$ とすると $N=\{P\circ F\neq a,b\}$.

問題１１　２次元スタイン多様体 N で $d_N\equiv 0$ となるものを列挙すること。$N=\mathbf{C}^2,\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\mathbf{C}^*\times\mathbf{C}^*,\mathbf{P}^2-C$($C$ は $\mathbf{P}^2$ の２次曲線）などの例があるが $\cdots$ 。

参考文献

[A-S] Y.Adachi and M.Suzuki, Proc.Symp. Pure Math.,52(19991),Several Complex Variables and Complex Geometry,Part2,41-51.

[F] O.Fujita, J. Math. Kyoto Univ.,30(1990),637-649.

[G] P.A.Griffiths, ann. of Math.,94(1971),21-51.

[K] S.Kobayashi, Springer(1998).

[T] M.Tadokoro, J. Math. Soc. Japan,17(1965),281-290.

33 An intrinsic characterization of the direct product of balls

Akio Kodama (Kanazawa Univ.)
Satoru Shimizu (Tohoku Univ.)

The well-known Riemann mapping theorem may be viewed as a kind of an intrinsic characterization of the unit disk in the complex plane. In fact, the Riemann mapping theorem asserts that the unit disk in the complex plane is characterized intrinsically as a simply connected domain in the complex plane that is hyperbolic in the sense of Kobayashi. Generalizing this fact to the higher-dimensional case, for example, characterizing intrinsically a single ball of dimension ≥ 2 or more generally the direct product of balls, is an interesting problem in several complex variables. It should be noted here that, as was shown by Poincaré, the direct product of balls can not be characterized by only topological conditions and hyperbolicity. So we need another approaches to the study of an intrinsic characterization of the direct product of balls. In this talk, directing our attention to holomorphic automorphism groups, let us consider the following problem:

Let M be a connected complex manifold of dimension n and let $\mathbf{B}$ be a domain in $\mathbf{C}^n$ given as the direct product of balls. If the holomorphic automorphism group of M is isomorphic to that of $\mathbf{B}$ as topological groups, then is M itself biholomorphically equivalent to $\mathbf{B}$?

This is the problem of characterizing the direct product of balls intrinsically by using its holomorphic automorphism group. The purpose of this talk is to give some answer to this problem.

Theorem. *Let M be a connected Stein manifold of dimension $n \geq 2$ and let $\mathbf{B}$ be a domain in $\mathbf{C}^n$ given as the direct product $\mathbf{B} = B_{n_1} \times \cdots \times B_{n_s}$ of balls, where each B_{n_j} is the unit ball in $\mathbf{C}^{n_j}$ with $n_j > 1$ and $\sum_{j=1}^{s} n_j = n$. Assume that $\mathrm{Aut}(M)$ is isomorphic to $\mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ as topological groups, where the groups $\mathrm{Aut}(M)$ and $\mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ are equipped with the compact-open topology. Then M itself is biholomorphically equivalent to $\mathbf{B}$.*

Note that, in this theorem, when $s = 1$, that is, for the case of a characterization of a single ball of dimension ≥ 2, the same result as ours was obtained independently on us in the paper of Isaev [2] without the Steinness assumption.

The proof of our theorem is based on the methods developed in Kodama and Shimizu [3], [4]. One consequence of them is a fact about actions on complex manifolds by groups given as the direct product of unitary groups, which plays a fundamental role in our study.

Generalized Standardization Theorem. *Let M be a connected Stein manifold of dimension n and let K be a compact Lie group of rank n. Suppose that an injective continuous group homomorphism ρ of K into* $\mathrm{Aut}(M)$ *is given. Then there exists a biholomorphic mapping F of M onto a Reinhardt domain D in $\mathbf{C}^n$ such that*

$$F\rho(K)F^{-1} = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s) \subset \mathrm{Aut}(D),$$

where each $U(n_j)$ is the unitary group of degree n_j and $\sum_{j=1}^{s} n_j = n$. In particular, if $K = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ and $\sum_{j=1}^{s} n_j = n$, then F can be so chosen that $F\rho(K)F^{-1} = K$.

In the study of n-dimensional compact torus actions on n-dimensional complex manifolds, a result of Barrett, Bedford and Dadok [1, Theorem 1] plays a fundamental role. The Generalized Standardization Theorem above plays a similar role in the study of compact group actions on n-dimensional complex manifolds for which compact groups are of rank n and given as the direct product of unitary groups.

References

[1] D. E. Barrett, E. Bedford, and J. Dadok: *T^n-actions on holomorphically separable complex manifolds*, Math. Z. **202** (1989), 65–82.

[2] A. V. Isaev: *Characterization of the unit ball in $\mathbf{C}^n$ among complex manifolds of dimension n*, J. Geom. Anal. **14** (2004), 697–700.

[3] A. Kodama and S. Shimizu: *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space*, Osaka J. Math. **41** (2004), 85–95.

[4] A. Kodama and S. Shimizu: *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space, II*, submitted

34 筒状域における余零の問題

濱野佐知子 (奈良女大・人間文化)

次を**余零の問題**と呼ぶ.

問題 (岡潔 [2]). $\mathbf{C}^n$ の領域 D に Cousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ が与えられているとき, D における正則函数を, 与えた零 $(\mathfrak{z})$ を含み, 余分な零が $(\mathfrak{z})$ と交わらないように求めよ.

このような正則函数が求まれば, それを $(\mathfrak{z})$ に対する余零の問題の解という. もちろん Cousin 第2問題が解けない零 $(\mathfrak{z})$ に対してこの問題は意味をもつ.
今回の講演ではこの問題に関し次の2つの結果を述べる: $\mathbf{C}^n$ の筒状域[1]に対し,

1. $n=2$ ならば余零の問題は常に解を持つ.

2. $n \geq 3$ では一般には解けない.

その証明には, 以前講演した, $\mathbf{C}^n$ の筒状域における Cousin 第2問題が解を持つための必要十分条件 (以下に述べる定理1) の際に, [3] で導入された交点数を用いた特徴づけが鍵となる:
$\mathbf{C}^n$ における筒状域 $D=D_1\times\cdots\times D_n$ に Cousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ が与えられているとする. i,j $(i,j=1,\ldots,n)$ を任意に取り, D_i および D_j 内にそれぞれ単純閉曲線 γ_i および γ_j を描き, D_i と D_j を除いた筒状域 $D^{(ij)}$ 内に点 p を適当に取って, D における実2次元の閉曲面 $\Gamma_{ij} := \gamma_i\times\gamma_j\times p$ を描く. このとき $(\mathfrak{z})$ に対し一般の位置にある Γ_{ij} に対して, Γ_{ij} と $(\mathfrak{z})$ との交点数が定義される.

定理 1. $\mathbf{C}^n$ の筒状域 D に Cousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ が与えられているとき, $(\mathfrak{z})$ が D で解を持つための必要十分条件は, 一般の位置にある任意の Γ_{ij} に対し, Γ_{ij} と $(\mathfrak{z})$ との交点数が 0 になることである.

1. 岡は第3論文で掃散可能な零という概念を導入し次を示した:
領域 $D\subset\mathbf{C}^n$ に零 $(\mathfrak{z})$ が与えられたとき, D の各点 p に対して p を中心とした超球 δ_p と, 実 $2n+1$ 次元集合 $\delta_p\times I$ $(I=\{0\leq t\leq 1\})$ における連続函数 $f_p(z,t)$ で, 解析面 $f_p(\cdot,0)=0$ は $(\mathfrak{z})|\delta_p$ であり, 集合 $f_p(z,t)=0$ は $\delta_p\times I$ で内点を持たず, δ_p 上 $f_p(\cdot,1)\neq 0$, 更に $\delta_p\cap\delta_q\neq\emptyset$ のとき $f_p(\cdot,t)$ と $f_q(\cdot,t)$ は同じ零を持つものが存在するとき, $(\mathfrak{z})$ は D で掃散可能であるという.

[1] 各座標平面 $\mathbf{C}_{z_i}$ $(i=1,\ldots,n)$ に描いた領域 D_i の直積集合 $D_1\times\cdots\times D_n$.

定理 2 (岡潔 [1]). 正則域 $G \subset \mathbf{C}^n$ に与えられた Cousin 第 2 分布が掃散可能ならば, この零に対し Cousin 第 2 問題は解ける. 逆も正しい.

一方 2 次元の場合には, 次の補題が成立することを示す.

補題. 領域 $D \subset \mathbf{C}^2$ に Cousin 第 2 分布 $(\mathfrak{z})$ が与えられたとする. このとき, 任意の領域 $D_0 \Subset D$ に対して, $(\mathfrak{z})|D_0$ はそのある近傍で掃散可能である.

証明は, $\mathbf{C}^2$ を複素 2 変数 z, w の空間とするとき, 零面 $(\mathfrak{z})$ の z-平面への射影の定める被覆リーマン面の分岐点は一般に孤立していることと, 解析面は点の近傍で w に関する特殊擬多項式として表現されることから, 零を掃散する連続函数を具体的に作ることによる.

この補題と定理 2, そして定理 1 の十分条件を用いて, $\mathbf{C}^2$ の筒状域における余零の問題は常に解を持つことが示される.

2. 2. については反例を具体的に構成した. $n=3$ のときに述べるが, 一般の場合も同様である：

反例. 複素変数 x, y, z の空間 $\mathbf{C}^3$ において筒状域

$$\Delta \ : \ r_1 < |x| < 1, \quad r_2 < |y| < 1, \quad |z| < 1 \quad (r_1 + r_2 > 1)$$

を考え, Δ の $\Im x \geqq 0$ のある近傍を Δ^+, $\Im x \leqq 0$ の近傍を Δ^- とする. このとき, 解析面 $\sigma : x - y - 1 = 0$ の Δ 内の部分は二つの連結成分に分かれ, その一つは Δ^+ に, 他の一つは Δ^- に含まれている. そこで

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= (x - y - 1) \cdot z && \text{in } \Delta^+, \\ f_2(x, y, z) &= z && \text{in } \Delta^- \end{aligned}$$

によって与えられる Cousin 第 2 分布 $(\mathfrak{z}) = \{(f_1, \Delta^+), (f_2, \Delta^-)\}$ を考えると, これは Δ における余零の問題の解をもたない.

証明は定理 1 の必要条件による.

参考文献

[1] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, III: Deuxième problème de Cousin, J. of Sci. Hiroshima Univ. A9 (1939), 7-19.

[2] K. Oka, Oka's posthumous works No.2, Edited by T. Nishino and A. Takeuchi, Kyoto, 1981. (Japanese)

[3] K. Oka, Oka's posthumous works No.5, Edited by T. Nishino and A. Takeuchi, Kyoto, 1982. (Japanese)

[4] S. Hamano, Extra zero problems in cylindrical domains, in preparation.

35 Non-projective compatifications of $\mathbb{C}^3$ (I)

古島幹雄（熊大・理）

(X, Y) を 第2ベッチ数 $\mathrm{b}_2(X) = 1$ をもつ $\mathbb{C}^3$ の 非射影的 モイシェゾンコンパクト化 とする．その時，$\mathrm{Pic}\, X \cong \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(Y)$ で，標準因子は $K_X \sim -rY$, $(1 \leq r \leq 2)$ であった．境界因子 Y が nef のときは，(X, Y) の分類の見通しはついているが（2種類！），Y が not-nef の時は，可算無限個の例が存在し，分類する積極的意義はあまり感じない．かといって，(X, Y) の構造は分かっているかと云えばそうでもない．この場合，何を目標に構造解明すれば良いのであろうか？　一つの（「ありきたり」かもしれないが）方向は X の有理性の問題であろう．しかし，残念ながら，これも，今のところ雲を掴むような話で殆ど何も分かっていない．では，境界因子 Y（これは既約な非正規・非射影的・Moishezon 曲面）の有理性についてはどうだろうか？これに関し，最近，進展があったので紹介する．勿論，まだ本丸まではほど遠い．

36 トロイダル群の基本群のコホモロジー

牟田正憲　(九州産業大学工学部)

梅野高司　(九州産業大学工学部)

連結な複素リー群 X が非定数正則関数をもたないときにトロイダル群という. 定義より X は複素可換リー群であり, 複素次元を n とすると, $\mathbb{C}^n$ の離散的部分加群 $\Gamma = \mathbb{Z}\{e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_q\}$ が存在して, $X \cong \mathbb{C}^n/\Gamma$ となる. ここで $e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_q \in \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}$-線形独立, $1 \le q \le n$ である. この場合 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を type q と呼ぶ.

$v_i = \sqrt{-1}e_i,\ \ q+1 \le i \le n,\ \ \beta_i = \operatorname{Im} v_i,\ \ 1 \le i \le n$ とおくと $\beta_1, \cdots \beta_n$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立. そこで $z \in \mathbb{C}^n$ に対し, 二つの座標を

$$\begin{aligned}(1)\quad z &= z_1\beta_1 + \cdots + z_n\beta_n \\ &= t_1e_1 + \cdots + t_ne_n + t_{n+1}v_1 + \cdots + t_{2n}v_n.\end{aligned}$$

と定義する.

各開集合 $U \subset \mathbb{C}^n/\Gamma$ に対し

$$\mathcal{F}(U) := \{f \,|\, f : C^\infty \text{ in } U \text{ and } \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} = 0, \text{ for } i = q+1, \cdots, n\},$$

$\mathcal{F}$ を準層 $\{\mathcal{F}(U)\}$ で定義された層とする. $f \in H^0(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F})$ は C^∞ で各ファイバー上で正則な関数である.

$\mathcal{F}^{r,p}$ を $\mathcal{F}$ に係数をもつ (r,p)-forms の層とすると

$$H^p(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{O}) \cong \frac{Z_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{0,p})}{B_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{0,p})} \text{ (Dolbeault 同型)}.$$

次に $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の基本群 Γ の $H = H^0(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ に値をもつコホモロジーを考える.
$C^p(\Gamma, H) := \{f : \Gamma^p \longrightarrow H\}$ とする. coboundary $\delta : C^p(\Gamma, H) \longrightarrow C^{p+1}(\Gamma, H)$ は

$$\begin{aligned}\delta f(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)(z) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)(z+\lambda_0) + \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{i+1} f(\lambda_0, \ldots, \lambda_i + \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_p)(z) \\ +(-1)^{p+1} f(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})(z),\end{aligned}$$

$Z^p(\Gamma, H) = \operatorname{Ker}(\delta),\ \ B^p(\Gamma, H) = \operatorname{Im}(\delta),\ \ H^p(\Gamma, H) = Z^p(\Gamma, H)/B^p(\Gamma, H).$

Mumford: Abelian Varieties に $H^p(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{O})$ と $H^p(\Gamma, H)$ の同型対応が一般的な形で示されているが、ここでは $Z_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{0,p})$ と $Z^p(\Gamma, H)$ の間の具体的な対応を求め、そのことで得られる $H^p(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{O})$ の性質を示したい.

$$\varphi = \frac{1}{p!} \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_p \le q} \varphi_{i_1 \cdots i_p} d\overline{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{i_p} \in Z_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{0,p})$$

とすると, $\exists \psi^1 \in H^0(\mathbb{C}^n, \mathcal{F}^{0,p-1})$ s.t. $\varphi = \overline{\partial}\psi^1$ であり

$\varphi^1(\lambda)(z) := (\delta\psi^1)(\lambda)(z) \in Z_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n, \mathcal{F}^{0,p-1})$. したがってまた,

$\exists\psi^2(\lambda)(z) \in C^1(\Gamma, F^{0,p-1})$ s.t. $\varphi^1(\lambda)(z) = \overline{\partial}\psi^2(\lambda)(z)$, $F^{0,p-1} = H^0(\mathbb{C}^n, \mathcal{F}^{0,p-1})$.
$\varphi^2(\lambda_1, \lambda_2)(z) := (\delta\psi^2)(\lambda_1, \lambda_2)(z) \in Z_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n, \mathcal{F}^{0,p-2})$, これを続けると,
$\varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) := (\delta\psi^p)(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) \in Z_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n, \mathcal{F}^{0,0})$ が得られる. これは
$\varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) \in Z^p(\Gamma, H)$ を意味する.

Theorem 1 $\varphi \longrightarrow \varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z)$ の対応は同型

$$H^p(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{O}) \cong H^p(\Gamma, H), \ \ p \geq 1$$

を与える.

Lemma 2 $\varphi \longrightarrow \varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z)$ とすると

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_i} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z_i}\varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z),\ 1 \leq i \leq q$$

Lemma 3 $\varphi \in Z_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{0,p})$ とすると $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_i} \in B_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{0,p})$. したがって

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) \in B^p(\Gamma, H),\ 1 \leq i \leq q.$$

Theorem 4 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ をトロイダル群, $\varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) \in Z^p(\Gamma, H)$ とする.

(1) X がコホモロジー有限型

$$\Longrightarrow \varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) \sim c(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) \text{ (定数)}$$

(2) X が non-Hausdorff 型

$$\Longrightarrow \exists a(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) = a(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(0, \ldots, 0, z_{q+1}, \ldots, z_n) \text{ s.t.}$$
$$\varphi^p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z) \sim a(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)(z)$$

37 kind k の準アーベル多様体について

阿部 幸隆 (富山大学 理学部)
梅野 高司 (九州産業大学 工学部)

$X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ をトロイダル群とする．Γ の生成する実線型部分空間を $\mathbb{R}_\Gamma$ とし，$\mathbb{C}_\Gamma := \mathbb{R}_\Gamma \cap i\mathbb{R}_\Gamma$ とおく．rank $\Gamma = n + m$ としたら，$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\Gamma = m$ である．$\mathbb{C}_\Gamma$ は $\mathbb{R}_\Gamma$ に含まれる最大の複素線型部分空間であり，X に対して一意的に定まる．このようなトロイダル群 X を次元 (n, m) のトロイダル群という．

Gherardelli-Andreotti は，次をみたすエルミート形式 $\mathcal{H}$ が存在するときに，X を準アーベル多様体と呼んだ：
(1) $\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}_\Gamma$ 上正定値である，
(2) $\mathcal{H}$ の虚部 $\mathcal{A} := \mathrm{Im}\ \mathcal{H}$ は $\Gamma \times \Gamma$ 上整数値をとる．
上の (1), (2) をみたすエルミート形式 $\mathcal{H}$ をアンプル Riemann 形式と呼ぶ．$\mathcal{A}_\Gamma := \mathcal{A}|_{\mathbb{R}_\Gamma \times \mathbb{R}_\Gamma}$ とする．さらに，彼らは準アーベル多様体の kind を次のように定義した．

定義　次元 (n, m) の準アーベル多様体 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ が *kind* k であるとは，

$$\mathrm{rank}\ \mathcal{A}_\Gamma = 2(m + k)$$

となるアンプル *Riemann* 形式 $\mathcal{H}$ をもつときをいう．

しかし，上の定義では X に対して kind が一つには定まらない．Gherardelli-Andreotti の意味での kind は，X だけの性質ではなく，むしろ，そのアンプル Riemann 形式 $\mathcal{H}$ の性質である．そこで，次のようにいうことにする．

定義　次元 (n, m) の準アーベル多様体 X に対するアンプル *Riemann* 形式 $\mathcal{H}$ が

$$\mathrm{rank}\ \mathcal{A}_\Gamma = 2(m + k)$$

であるとき，$\mathcal{H}$ は *kind* k であるという．

まず，kind k (> 0) のアンプル Riemann 形式をもつが kind 0 のものはもたない例を与える．そして，次を示す．

定理　$X=\mathbb{C}^n/\Gamma$ を次元 (n,m) の準アーベル多様体とする．もし X が *kind* k $(0 \leqq 2k \leqq n-m)$ のアンプル *Riemann* 形式をもてば，$2k \leqq 2k' \leqq n-m$ なるすべての k' に対して *kind* k' のアンプル *Riemann* 形式が存在する．

したがって，kind を次のように定義すれば X に対してただ一つに定まる．

定義　次元 (n,m) の準アーベル多様体 $X=\mathbb{C}^n/\Gamma$ に対して，*kind* k のアンプル *Riemann* 形式が存在する最小の k $(0 \leqq 2k \leqq n-m)$ を X の *kind* という．

$X=\mathbb{C}^n/\Gamma$ を次元 (n,m) の準アーベル多様体とし，その上の正の直線束 L を考える．L からアンプル Riemann 形式 $\mathcal{H}$ が定まる．$\mathcal{H}$ の kind を k とする．このとき，(X,L) を kind k の偏極準アーベル多様体と呼ぶ．$\mathcal{H}$ から X のファイバー束の構造

$$\tau : X \longrightarrow A$$

が定まる．ここで，A は $(m+k)$ 次元アーベル多様体であり，ファイバーは $(\mathbb{C}^*)^{n-m-2k}\times\mathbb{C}^k$ である．ファイバーを $(\mathbb{P}^1)^{n-m-k}$ にすることで，それに付随するファイバー束

$$\overline{\tau} : \overline{X} \longrightarrow A$$

が得られる．いかなる場合に L が $\overline{X}$ に拡張されるかを考察した．結果は次の定理である．

定理　(X,L) を *kind* k の偏極準アーベル多様体とし，X の次元を (n,m) とする．$\tau : X \longrightarrow A$，$\overline{\tau} : \overline{X} \longrightarrow A$ は上の通りとする．このとき，L が $\overline{X}$ 上に正則に拡張されるのは，A 上のテータ束 $L_\theta \longrightarrow A$ が存在し，$L \cong \tau^* L_\theta$ となるときであり，またそのときに限る．

特別講演

Severi の意味の準アーベル関数と準アーベル多様体

阿部 幸隆 (富山大学 理学部)

1 はじめに

アーベル多様体の極限は「アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化」として代数幾何学的には考察されてきた．そこでは，付加する点に幾何学的に意味のある対象が対応していることやコンパクト化されたモジュライ空間自身が代数幾何学的に”良い性質”を持つことが要求されている．佐武コンパクト化から始まっていままでにいくつかのコンパクト化が構成されてきた（[10], [5], [7], [8], [6] など）．それぞれの視点からはそれぞれが自然なコンパクト化なのであろう．一般に視点が変われば別のモジュライ空間があって良いのだと思う．

筆者は Severi の著作 [12]，もっと古くは Cousin の論文 [4] に述べてあることから生ずる素朴な問いかけから出発する．

Severi[12], p.7

我々の研究の対象となる函数は $\mu < 2\pi$ なる有理型周期函数で加法定理を持つものである．此の函数を quasi abel 函数（或いは degenerate abel 函数）と言う．何故なら，此の函数は abel 函数の，幾つかの周期を限りなく大きくした時の極限と考える事が出来るからである [n.36, n.57]．此れは楕円函数の極限として三角函数を見る事を十分一般化したものである．

（訳：有馬 哲，Severi の Quasi Abel 函数，数学の歩み 7-2，1959，数学の歩み刊行会・SSS 編集）

Cousin[4], p.106

La seconde Partie est consacrée tout entière *à* des classes spéciales de fonctions triplement périodiques que nous appelons *semi-rationnelles.* Ces fonctions ont les propriétés des fonctions abéliennes avec quelques modifications qui rappelent tout *à* fait la dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions trigonométriques.

これらを読んだとき，筆者の頭の中に次の２つの素朴な疑問が生じた：

1. 有理型周期関数で加法定理を持つものは何か．

2.　幾つかの周期を限りなく大きくした時の極限をどう考えたらよいのか.

1 の問題を追いかけていくと最終的には Weierstrass の主張にたどり着いた.

筆者の観点からの極限移行は，アーベル多様体とその上のアーベル関数体を合わせて考えてのものである．すなわち，アーベル多様体の極限の多様体はアーベル関数体の極限の関数体をもつべきである，と考えるのである．アーベル関数体の極限の関数体を代数的加法定理を許す関数体と考えることは，極めて自然であると思われる.

2　Weierstrass の主張

Weierstrass の主張は Painlevé の論文 [9] の中で次のように表現されている：

Tout système de n fonctions (indépendantes) *à* n variables qui admet un théorème d'addition est une combinaison algébrique de n fonctions abéliennes (ou dégénérescences) *à* n arguments et aux mêmes périodes.

この内容を明確に表現する．$\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数体を $\mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$ とし，その部分体 K を考える．K は $\mathbb{C}$ 上有限生成で超越次数 n であるとする．このような体 K を $\mathbb{C}$ 上の n 変数代数関数体という.

定義 2.1 $\mathbb{C}$ 上の n 変数代数関数体 K が代数的加法定理を許すとは，どの $j = 0, 1, \ldots, n$ に対しても有理関数 R_j があって

$$f_j(x+y) = R_j(f_0(x), \ldots, f_n(x), f_0(y), \ldots, f_n(y)), \quad x, y \in \mathbb{C}^n$$

をみたす K の生成元 $f_0, \ldots, f_n$ が存在するときをいう.

有理型関数 $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$ は，ある線型変換 $L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ により，実際に依存する変数の個数が $r < n$ となるときに退化するといわれる．退化しない関数を非退化という.

定義 2.2 $\mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$ の部分体 K が非退化であるとは，K が非退化な関数を元にもつときをいう.

定理 2.3 ([1]) K を $\mathbb{C}$ 上の n 変数代数関数体とする．K が非退化で代数的加法定理を許すならば，適当な座標変換を行うことにより K は

$\mathbb{C}(z_1,\ldots,z_p,w_1,\ldots,w_q,g_0,\ldots,g_r)$ の部分体とみなせる．ここで，$(z_1,\ldots,z$ $(w_1,\ldots,w_q)$ はそれぞれ $\mathbb{C}^p$, $(\mathbb{C}^*)^q$ の座標関数，$g_0,\ldots,g_r$ は r 次元アーベル関数体の生成元である．ただし，$p+q+r=n$ とする．

3 Severi の意味の準アーベル関数と準アーベル多様体

連結な複素可換 Lie 群

$$G=\mathbb{C}^p\times(\mathbb{C}^*)^q\times A$$

のコンパクト化

$$\overline{G}=(\mathbb{P}^1)^{p+q}\times A$$

を考える．ここで $A=\mathbb{C}^r/\Gamma$ は r 次元アーベル多様体である．前節の定理 2.3 は，K は $\overline{G}$ 上の有理型関数体 $\mathfrak{M}(\overline{G})$ の部分体とみなされることを意味している．G を次のように書き換える

$$G=\mathbb{C}^n/\Gamma^*,\quad \Gamma^*=\{0\}\oplus\mathbb{Z}^q\oplus\Gamma.$$

Γ^* の周期行列は

$$P^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&I_q&0\\0&0&P\end{pmatrix}$$

となる．ここで，P は Γ の周期行列である．

Severi は [12] や [11] の中で，quasi abel 函数体の周期行列の標準形を決定する問題を提出していた．上の周期行列がその解答である．

定義 3.1 n 次元連結複素可換 *Lie* 群 G は

$$G\cong\mathbb{C}^n/\Gamma^*=\mathbb{C}^p\times(\mathbb{C}^*)^q\times A$$

のときに *Severi* の意味の準アーベル多様体と呼ばれる．このとき，上の同型により

$$K(G)\cong\mathbb{C}(z_1,\ldots,z_p,w_1,\ldots,w_q,g_0,\ldots,g_r)$$

となる $\mathfrak{M}(G)$ の部分体 $K(G)$ が定まる．この $K(G)$ を *Severi* の意味の準アーベル関数体という．

2つの連結複素可換 Lie 群 $\mathbb{C}^n/\Lambda$, $\mathbb{C}^n/\Lambda'$ の周期行列をそれぞれ P, P' とする．このとき，$\mathbb{C}^n/\Lambda \cong \mathbb{C}^n/\Lambda'$ であるのは，$\mathrm{rank}\ \Lambda = \mathrm{rank}\ \Lambda' = r$ であって，

$$P = MP'U$$

となる $M \in GL(n, \mathbb{C})$, $U \in GL(r, \mathbb{Z})$ が存在するときであり，また，そのときに限る．

4　1 次元の場合

$\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Omega$ を 1 次元複素トーラス，その格子 Ω の基本周期を (ω_1, ω_2) とする．$\tau := \omega_2/\omega_1$ は上半平面 $\mathcal{H}$ の元であり，$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ が 1 次元複素トーラスのモジュライ空間である．基本周期 (ω_1, ω_2) に対して，$\wp$-関数 $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$ が定義される．Ω に対応する楕円関数体は $K = \mathbb{C}\left(\wp(z; \omega_1, \omega_2), \wp'(z; \omega_1, \omega_2)\right)$ である．基本周期の列 $\{(\omega_{1,k}, \omega_{2,k})\}_{k=1}^{\infty}$ を考え，

$$\begin{aligned}
&\Omega_k := \{a\omega_{1,k} + b\omega_{2,k}\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\},\\
&\tau_k := \omega_{2,k}/\omega_{1,k},\\
&\wp_k(z) := \wp(z; \omega_{2,k}, \omega_{1,k}),\\
&K_k := \mathbb{C}(\wp_k, \wp_k')
\end{aligned}$$

とする．

「幾つかの周期を限りなく大きくした時の極限」は次の 2 つの場合になる：

(1) $\omega_{1,k}$ は有限で $\omega_{2,k} \to \infty$

(2) $\omega_{1,k} \to \infty$ かつ $\omega_{2,k} \to \infty$

(1) の場合：$\mathbb{C}/\Omega_k \longrightarrow \mathbb{C}^*$,　$K_k \longrightarrow \mathbb{C}(e^z)$

(2) の場合：$\mathbb{C}/\Omega_k \longrightarrow \mathbb{C}$,　$K_k \longrightarrow \mathbb{C}(z)$

モジュライ空間 $\mathcal{H}^* \cong \mathbb{C}$ のコンパクト化は $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ である．∞ に対応する準アーベル多様体が $\mathbb{C}^*$ で準アーベル関数体が $\mathbb{C}(e^z)$ である．(2) の場合はここには現れない．基本周期を

$$(\omega_{1,k}, \omega_{2,k}) = \omega_{1,k}(1, \tau_k)$$

と表せば，「$\omega_{1,k} \to \infty$ かつ $\omega_{2,k} \to \infty$」は「$\tau_k \to \infty$ かつ $\omega_{1,k} \to \infty$」となる．このような極限も現れるようなモジュライ空間のコンパクト化を考えたい．

Severi の意味の準アーベル多様体のすべてが現れるようなモジュライ空間を一般の次元で構成する ([2]). 時間が許せば，それに対応する閉リーマン面の退化についても言及したい ([3]).

参考文献

[1] *Y. Abe*, A statement of Weierstrass on meromorphic functions which admit an algebraic addition theorem, to appear in J. Math. Soc. Japan **57** (2005), No. 3.

[2] *Y. Abe*, Quasi-abelian functions and varieties in the sense of Severi, I. Limits of abelian varieties, preprint.

[3] *Y. Abe*, Quasi-abelian functions and varieties in the sense of Severi, II. Degeneration of compact Riemann surfaces, in preparation.

[4] *P. Cousin*, Sur les fonctions triplement périodiques de deux variables, Acta Math. **33** (1910), 105–232.

[5] *J. Igusa*, A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions, Math. Ann. **168** (1967), 228–260.

[6] *I. Nakamura*, A compactification of the moduli scheme of abelian varieties, preprint.

[7] *Y. Namikawa*, A new compactification of the Siegel space and degenerations of abelian varieties, I, Math. Ann. **221** (1976), 97–141.

[8] *Y. Namikawa*, A new compactification of the Siegel space and degenerations of abelian varieties, II, Math. Ann. **221** (1976), 201–241.

[9] *P. Painlevé*, Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition, Acta Math. **27** (1903), 1–54.

[10] *I. Satake*, On the compactification of the Siegel space, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 259–281.

[11] *F. Severi*, Fonctions et variété quasi-abéliennes, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam 1954, Vol. III, pp. 521–528.

[12] *F. Severi,* Funzioni Quasi Abeliane, Seconda Edizione Ampliata, Pont. Acad. Scient. Scripta Varia **20**. Vatican, 1961.

特別講演

BIHOLOMORPHIC ISOMORPHISMS OF FIBER SPACES OVER TEICHMÜLLER SPACES

SHEN YULIANG

(Department of Mathematics, Suzhou University)

INTRODUCTION

Let Γ be a Fuchsian group acting on the upper half plane $\mathbb{H}$ in the complex plane $\mathbb{C}$, and $\mathbb{H}_\Gamma$ be $\mathbb{H}$ with all of the fixed points of elliptic elements of Γ removed. Let $M(\Gamma)$ be the set of all Beltrami coefficients μ for Γ on the upper half plane $\mathbb{H}$. Then the Teichmüller space $T(\Gamma)$ is the set of all the equivalence classes $[\mu]$ of the Beltrami coefficients μ in $M(\Gamma)$. It is well known that the Teichmüller space $T(\Gamma)$ has a unique complex manifold structure so that the natural projection of $M(\Gamma)$ onto $T(\Gamma)$ is holomorphic with local holomorphic sections, which implies that $M(\Gamma)$ is a holomorphic fiber space over $T(\Gamma)$. A theorem of Bers and Greenberg [BG] (see also [EK1], [EM], [Ga2], [Ma]) says that a conformal mapping from $\mathbb{H}_{\Gamma_1}/\Gamma_1$ onto $\mathbb{H}_{\Gamma_2}/\Gamma_2$ induces a biholomorphic isomorphism from $T(\Gamma_1)$ onto $T(\Gamma_2)$, which implies that the structure of $T(\Gamma)$ depends only on the topological type of Γ (or of $\mathbb{H}_\Gamma/\Gamma$) when Γ is finitely generated and of the first kind.

For any Fuchsian group Γ, there are some other important holomorphic fiber spaces over the Teichmüller space $T(\Gamma)$, the Bers fiber space $F(\Gamma)$, the "punctured" fiber space $F_0(\Gamma)$, the Teichmüller curve $V(\Gamma)$ and the "punctured" Teichmüller curve $V_0(\Gamma)$. Because of their great importance in the study of moduli theory of Riemann surfaces and of their universal properties in the theory of holomorphic families of Riemann surfaces, these fiber spaces have been much investigated by many mathematicians such as Bers, Grothendieck, Earle, Kra (see the papers [Be2], [EF], [EK1], [EK2], [Gr]).

An important question in the theory of several complex variables is to determine the biholomorphic isomorphisms between two complex manifolds, in

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32G15; Secondary 30C60, 30F60

Key words and phrases: Teichmüller space, Bers fiber space, Teichmüller curve, biholomorphic isomorphism.

Research supported by the National Natural Science Foundation of China.

particular, the biholomorphic automorphisms of a complex manifold. This question has been completely solved for Teichmüller spaces in a series of papers (see [EG], [EK1], [La], [Mar], [Ro]). Some partial results of this question have also been obtained for Bers fiber spaces and Teichmüller curves (see [EK1], [Kr1], [Zh]).

In this paper, we will report some recent results on these fiber spaces obtained in the papers [CS], [HS] and [Sh], partly joint with Cai and Hu.

1 Teichmüller spaces

Let Γ be a Fuchsian group acting on the upper half plane $\mathbb{H}$ and also on the lower half plane $\mathbb{L}$ in the complex plane $\mathbb{C}$, and $\mathbb{H}_\Gamma$ be $\mathbb{H}$ with all of the fixed points of elliptic elements of Γ removed. Let $L^\infty(\Gamma)$ denote the set of all Beltrami differentials for Γ on the upper half plane $\mathbb{H}$, namely,

$$L^\infty(\Gamma) = \{\mu \in L^\infty(\mathbb{H}) : (\mu \circ \gamma)\overline{\gamma'}/\gamma' = \mu, \quad \text{for all} \quad \gamma \in \Gamma\}. \tag{1.1}$$

The open unit ball $M(\Gamma)$ of $L^\infty(\Gamma)$ is the set of all Beltrami coefficients for Γ.

For any $\mu \in M(\Gamma)$, let w^μ denote the unique quasiconformal mapping of the plane $\mathbb{C}$ onto itself which fixes zero and one, is conformal in $\mathbb{L}$, and satisfies the Beltrami equation $\partial_{\bar{z}} w = \mu \partial_z w$ in $\mathbb{H}$. Two elements μ and ν in $M(\Gamma)$ are said to be equivalent if w^μ and w^{ν^*}coincide on the real axis $\mathbb{R}$. $[\mu]$ will denote the equivalence class of μ. Let $M_0(\Gamma)$ denote the set of all elements in $M(\Gamma)$ which are equivalent to zero, and $\Sigma_0(\Gamma)$ the set of all quasiconformal self-mappings of $\mathbb{H}$ which fixes zero, one and the point at infinity, with Beltrami coefficients in $M_0(\Gamma)$. Then μ is equivalent to ν if and only if there exists some w in $\Sigma_0(\Gamma)$ such that $w^\mu = w^\nu \circ w$ in $\mathbb{H}$.

The Teichmüller space $T(\Gamma)$ is the set of all the equivalence classes $[\mu]$ of the Beltrami coefficients μ in $M(\Gamma)$. We let Φ denote the natural projection of $M(\Gamma)$ onto $T(\Gamma)$, so that $\Phi(\mu)$ is the equivalence class of μ. Since Φ depends on the group Γ, we shall occasionally denote it by Φ_Γ to avoid ambiguity.

Since it is an open set in the complex Banach space $L^\infty(\Gamma)$, $M(\Gamma)$ is a complex manifold. Fundamental work of Ahlfors and Bers shows that $T(\Gamma)$ is also a complex manifold.

Theorem A. *$T(\Gamma)$ has a unique complex manifold structure so that the natural projection $\Phi : M(\Gamma) \to T(\Gamma)$ is holomorphic with local holomorphic sections.*

The following important theorem due to Bers and Greenberg [BG] (see also [EK1], [EM], [Ga2], [Ma]) implies that the structure of $T(\Gamma)$ depends only on the topological type of Γ (or of $\mathbb{H}_\Gamma/\Gamma$) when Γ is finitely generated and of the first kind.

Theorem B. *A conformal mapping from $\mathbb{H}_{\Gamma_1}/\Gamma_1$ onto $\mathbb{H}_{\Gamma_2}/\Gamma_2$ induces a biholomorphic isomorphism from $T(\Gamma_1)$ onto $T(\Gamma_2)$.*

2 Bers fiber spaces and Teichmüller curves

For each $\mu \in M(\Gamma)$, the domain $w^\mu(\mathbb{L})$, hence also $w^\mu(\mathbb{H})$, depends only on $\Phi(\mu)$. We may form the Bers fiber space

$$F(\Gamma) = \{(\Phi(\mu), \zeta) \in T(\Gamma) \times \mathbb{C} : \mu \in M(\Gamma), \zeta \in w^\mu(\mathbb{H})\}.$$

It is known that $F(\Gamma)$ is a complex manifold, and the natural projection $\pi_\Gamma : F(\Gamma) \to T(\Gamma)$ defined by $\pi_\Gamma(\Phi(\mu), z) = \Phi(\mu)$ is holomorphic with local holomorphic sections (see [Be2]).

The group Γ acts discontinuously on $F(\Gamma)$ as a group of biholomorphic mappings by

$$\gamma(\Phi(\mu), \zeta) = (\Phi(\mu), \gamma^\mu(\zeta)), \tag{2.1}$$

where $\mu \in M(\Gamma)$,$\zeta \in w^\mu(\mathbb{H})$, $\gamma \in \Gamma$, and

$$\gamma^\mu \circ w^\mu = w^\mu \circ \gamma. \tag{2.2}$$

Due to an important result of Cartan [Ca], we can obtain a quotient normal complex space $V(\Gamma) = F(\Gamma)/\Gamma$, known as the Teichmüller curve of Γ, with possible singularities only along the fixed-point loci of the elliptic elements of Γ. The natural projections $\pi_\Gamma : F(\Gamma) \to T(\Gamma)$ and $\pi_{1\Gamma} : F(\Gamma) \to V(\Gamma)$ induce the projection $\pi_{2\Gamma} : V(\Gamma) \to T(\Gamma)$.

Suppose at the moment that Γ is torsion free. Then the action of Γ is free and the Teichmüller curve $V(\Gamma)$ is a complex manifold. In this case, $\pi_{1\Gamma} : F(\Gamma) \to V(\Gamma)$ is a holomorphic universal covering mapping, and $\pi_{2\Gamma} : V(\Gamma) \to T(\Gamma)$ is holomorphic with local holomorphic sections.

When Γ possesses elliptic elements, Earle and Kra [EK2] observed, by a theorem of Gottschling [Go], that $V(\Gamma)$ is actually singularity free and thus a complex manifold when Γ is finitely generated and of the first kind, and showed that the structure of $V(\Gamma)$ depends only on the topological type of Γ (or of $\mathbb{H}_\Gamma/\Gamma$) and not on the orders of the elliptic elements of Γ when $\mathbb{H}/\Gamma$ is a compact hyperbolic Riemann surface. In a recent paper by Cai and the author [CS], we extended these results to a general Fuchsian group Γ and proved the following theorems.

Theorem 1 [CS]. *For any Fuchsian group Γ such that $\mathbb{H}/\Gamma$ is a hyperbolic Riemann surface the Teichmüller curve $V(\Gamma)$ has a unique complex manifold structure so that the natural projection of the Bers fiber space $F(\Gamma)$ onto $V(\Gamma)$ is holomorphic with local holomorphic sections. Under this complex structure, the natural projection from $V(\Gamma)$ onto $T(\Gamma)$ is also holomorphic with local holomorphic sections.*

Theorem 2 [CS]. *Let Γ_1 and Γ_2 be two Fuchsian groups such that $\mathbb{H}/\Gamma_1$ and $\mathbb{H}/\Gamma_2$ are two conformally equivalent hyperbolic Riemann surfaces. Then a conformal mapping from $\mathbb{H}_{\Gamma_1}/\Gamma_1$ onto $\mathbb{H}_{\Gamma_2}/\Gamma_2$ induces a biholomorphic isomorphism from $V(\Gamma_1)$ onto $V(\Gamma_2)$.*

Remark 1. The biholomorphic isomorphism from $V(\Gamma_1)$ onto $V(\Gamma_2)$ induced by a conformal mapping from $\mathbb{H}_{\Gamma_1}/\Gamma_1$ onto $\mathbb{H}_{\Gamma_2}/\Gamma_2$ is fiber-preserving, namely, it maps each fiber of $\pi_{2\Gamma_1}$ onto the corresponding fiber of $\pi_{2\Gamma_2}$. Actually, it covers the Bers-Greenberg isomorphism from $T(\Gamma_1)$ to $T(\Gamma_2)$.

Remark 2. Contrary to Theorem 2, the corresponding result for Bers fiber spaces is not true. Bers' isomorphism theorem (see [Be2] or section 4) says that the Bers fiber space $F(\Gamma)$ is biholomorphic to a Teichmüller space when Γ is torsion free. On the other hand, when Γ contains elliptic elements and is finitely generated and of the first kind, Earle -Kra [EK1] proved that $F(\Gamma)$ can not be biholomorphic to a Teichmüller space except in some special cases.

3 "Punctured" fiber space and "punctured" Teichmüller curve

Now we consider the "punctured" fiber space

$$F_0(\Gamma) = \{(\Phi(\mu), \zeta) \in T(\Gamma) \times \mathbb{C} : \mu \in M(\Gamma), \zeta \in w^{\mu}(\mathbb{H}_\Gamma)\}.$$

$F_0(\Gamma)$ is open and dense in $F(\Gamma)$ but is equal to $F(\Gamma)$ only if Γ has no elliptic elements. Since the group Γ acts freely and properly discontinuously as fiber-preserving biholomorphic automorphisms of $F_0(\Gamma)$, Cartan's [Ca] theorem now implies that the quotient space $V_0(\Gamma) = F_0(\Gamma)/\Gamma$, known as the "punctured" Teichmüller curve for Γ, is a complex manifold. The natural projections $F_0(\Gamma) \to T(\Gamma)$, $F_0(\Gamma) \to V_0(\Gamma)$, $V_0(\Gamma) \to T(\Gamma)$, which will also be denoted by π_Γ, $\pi_{1\Gamma}$, $\pi_{2\Gamma}$, respectively, are all holomorphic with local holomorphic sections ($\pi_{1\Gamma} : F_0(\Gamma) \to V_0(\Gamma)$ is actually a covering in this case).

The following theorem implies that the structure of $V_0(\Gamma)$ depends only on the topological type of Γ (or of $\mathbb{H}_\Gamma/\Gamma$) when Γ is finitely generated and of the first kind.

Theroem 3 [HS]. *A conformal mapping from $\mathbb{H}_{\Gamma_1}/\Gamma_1$ onto $\mathbb{H}_{\Gamma_2}/\Gamma_2$ induces a biholomorphic isomorphism from $V_0(\Gamma_1)$ onto $V_0(\Gamma_2)$.*

Remark 3. The biholomorphic isomorphism from $V_0(\Gamma_1)$ onto $V_0(\Gamma_2)$ induced by a conformal mapping from $\mathbb{H}_{\Gamma_1}/\Gamma_1$ onto $\mathbb{H}_{\Gamma_2}/\Gamma_2$ is fiber-preserving, namely, it maps each fiber of $\pi_{2\Gamma_1}$ onto the corresponding fiber of $\pi_{2\Gamma_2}$. Contrary to this, the corresponding result for "punctured" fiber spaces is not true. Actually, let Γ be an arbitrary Fuchsian group, which contains at least an elliptic element, and Γ' be a torsion free Fuchsian group so that $\mathbb{H}_{\Gamma'}/\Gamma' = \mathbb{H}/\Gamma' = \mathbb{H}_\Gamma/\Gamma$. Then $F_0(\Gamma') = F(\Gamma') \to F_0(\Gamma)$ is a non-injective holomorphic fiber-preserving universal covering.

4 Allowable mappings, modular groups and Bers' isomorphism

In this section, we shall recall some basic definitions, notations and some fundamental results on allowable mappings and modular groups. We will follow the discussion in the paper [Be2].

4.1 Allowable mappings and modular groups For any Fuchsian group Γ, let $Q(\Gamma)$ denote the set of all quasiconformal mappings w of $\mathbb{H}$ onto itself such that $w\Gamma w^{-1}$ is again a Fuchsian group. Two elements w_1 and w_2 are said to be equivalent if they coincide on the real line $\mathbb{R}$. The equivalence class of w will be denoted by $[w]$.

For any $\mu \in M(\Gamma)$, let w_μ denote the unique quasiconformal mapping of $\mathbb{H}$ onto itself which fixes zero, one, and the point at infinity, and satisfies the Beltrami equation $\partial_{\bar{z}} w = \mu \partial_z w$. Then w_μ and w_ν are equivalent if and only if $[\mu] = [\nu]$. The point $[\mu]$ will also be denoted by $[w_\mu]$ later.

Let $w \in Q(\Gamma)$ be given. We consider the mapping

$$w_*(w_\mu) = \alpha \circ w_\mu \circ w^{-1}, \tag{4.1}$$

where $\mu \in M(\Gamma)$, α is a Möbius transformation of $\mathbb{H}$ onto itself such that $\alpha \circ w_\mu \circ w^{-1}$ fixes 0, 1 and ∞. Since $[w_*(w_\mu)]$ depends only on $[w]$ and $[w_\mu]$, w_* may be considered as an biholomorphic isomorphism $\chi([w])$ between $T(\Gamma)$ and $T(w\Gamma w^{-1})$. Now the biholomorphic isomorphism $\chi([w])$ between $T(\Gamma)$ and $T(w\Gamma w^{-1})$ can be extended to an action between the fiber spaces $F(\Gamma)$ and $F(w\Gamma w^{-1})$:

$$\rho([w])([w_\mu], z) = ([w_\nu], \hat{z}), \tag{4.2}$$

where

$$\nu \in M(w\Gamma w^{-1}) \quad \text{with} \quad w_*(w_\mu) = w_\nu \tag{4.3}$$

and

$$\hat{z} = w^\nu \circ w \circ (w^\mu)^{-1}(z). \tag{4.4}$$

Note that $\rho([w]) : F(\Gamma) \to F(w\Gamma w^{-1})$ satisfies $\chi([w]) \circ \pi_\Gamma = \pi_{w\Gamma w^{-1}} \circ \rho([w])$ and thus is fiber-preserving, namely, it maps each fiber of π_Γ conformally onto the corresponding fiber of $\pi_{w\Gamma w^{-1}}$. Note also that $\rho([w]) : F(\Gamma) \to F(w\Gamma w^{-1})$ can be projected to a biholomorphic isomorphism $\lambda([w]) : V(\Gamma) \to V(w\Gamma w^{-1})$ which satisfies $\chi([w]) \circ \pi_{2\Gamma} = \pi_{2w\Gamma w^{-1}} \circ \lambda([w])$ and thus is also fiber-preserving in the sense that it maps each fiber of $\pi_{2\Gamma}$ conformally onto the corresponding fiber of $\pi_{2w\Gamma w^{-1}}$. The mappings $\chi([w]) : T(\Gamma) \to T(w\Gamma w^{-1})$, $\lambda([w]) : V(\Gamma) \to V(w\Gamma w^{-1})$ and $\rho([w]) : F(\Gamma) \to F(w\Gamma w^{-1})$ are called allowable mappings.

Now let $\Sigma(\Gamma)$ denote the set of all mappings w in $Q(\Gamma)$ such that $w\Gamma w^{-1} = w$. The extended modular group for Γ, which is denoted by $\mathrm{mod}(\Gamma)$, is the set of all equivalence classes $[w]$ of all elements w in $\Sigma(\Gamma)$. Then each element $[w]$ in $\mathrm{mod}(\Gamma)$ acts on $F(\Gamma)$ by $\rho([w])$ as a biholomorphic fiber-preserving automorphism, and the action of $\mathrm{mod}(\Gamma)$ on $F(\Gamma)$ is always effective. The subgroup Γ of $\Sigma(\Gamma)$ can be considered as a subgroup of $\mathrm{mod}(\Gamma)$, and the action (4.2-4.4) on $F(\Gamma)$ by these elements are reduced to (2.1) and (2.2). On the other hand, for each $\gamma \in \Gamma$, the action $\chi([\gamma])$ on $T(\Gamma)$ is trivial. So we define naturally the modular group for Γ, which is denoted by $\mathrm{Mod}(\Gamma)$, as $\mathrm{mod}(\Gamma)/\Gamma$. The element of $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ induced by $w \in \Sigma(\Gamma)$ will be denoted by $\langle w \rangle$. Then each element $\langle w \rangle$ of $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ acts on $T(\Gamma)$ by $\chi(\langle w \rangle)$ as a biholomorphic automorphism. The automorphisms $\rho([w])$ and $\chi(\langle w \rangle)$ induced by the same $w \in \Sigma(\Gamma)$ satisfy $\pi_\Gamma \circ \rho([w]) = \chi(\langle w \rangle) \circ \pi_\Gamma$. However, the action of $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ on $T(\Gamma)$ is not always effective. Recall that a Riemann surface X is said to have type (g, n) if it is a compact surface of genus g with n points removed, X is said to be exceptional if it has type (g, n) with $2g + n \leq 4$. A Fuchsian group Γ is said to have type (g, n) if the surface $\mathbb{H}_\Gamma/\Gamma$ has type (g, n), exceptional if $\mathbb{H}_\Gamma/\Gamma$ is exceptional. Then, when Γ is torsion free, $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ acts on $T(\Gamma)$ non-effectively if and only if Γ is exceptional (see [EGL], [Ep], [Mat]). The action of $\mathrm{mod}(\Gamma)$ on $F(\Gamma)$ induces an action of $\mathrm{mod}(\Gamma)$ on $V(\Gamma)$. Since Γ acts on $V(\Gamma)$ trivially, we have actually an action of $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ on $V(\Gamma)$. This action is always effective. The biholomorphic fiber-preserving automorphism of $V(\Gamma)$ induced by $\langle w \rangle$ will be denoted by $\lambda(\langle w \rangle)$.

We need the following important result in our discussion. It is a combination of a series of papers (see [EG], [EK1], [La], [Mar], [Ro]).

Theorem C. *Let Γ and Γ' be two Fuchsian groups, each of which is torsion free and not exceptional, and let $F : T(\Gamma) \to T(\Gamma')$ be a biholomorphic isomorphism. Then there exists some $w \in Q(\Gamma)$ such that $\Gamma' = w\Gamma w^{-1}$ and $F = \chi([w])$. Particularly, each biholomorphic automorphism of $T(\Gamma)$ is induced by an element of the modular group.*

4.2 Bers' isomorphism theorem We use in an essential way an isomorphism theorem of Bers [Be2] between Bers fiber spaces and Teichmüller spaces for torsion free Fuchsian groups. The theorem can be described precisely as follows. Let Γ be a torsion free Fuchsian group, $a \in \mathbb{H}$ be a fixed point, and $\hat{a} = \pi(a)$, where $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$ is the natural projection. Set $A = \{\gamma(a) : \gamma \in \Gamma\}$. Choose a universal covering mapping $v : \mathbb{H} \to \mathbb{H} - A$. Then there exists a torsion free Fuchsian group $\dot{\Gamma}$ such that $\mathbb{H}/\dot{\Gamma}$ is conformally equivalent to $\mathbb{H}/\Gamma - \{\hat{a}\}$. v induces a surjective homomorphism $\vartheta : \dot{\Gamma} \to \Gamma$ by

$$v \circ \dot{\gamma} = \vartheta(\dot{\gamma}) \circ v \qquad \text{for all} \quad \dot{\gamma} \in \dot{\Gamma} \tag{4.5}$$

and also a norm-preserving isomorphism $v^* : M(\dot{\Gamma}) \to M(\Gamma)$ by

$$(v^*\mu) \circ v = \mu v'/\overline{v'}, \qquad \mu \in M(\dot{\Gamma}). \tag{4.6}$$

It is easy to see that $\nu = v^*\mu$ if and only if there exists some universal covering $v_\mu : \mathbb{H} \to \mathbb{H} - w_\nu(A)$ such that

$$v_\mu \circ w_\mu = w_\nu \circ v. \tag{4.7}$$

Now $v^* : M(\dot{\Gamma}) \to M(\Gamma)$ projects to a holomorphic map sending $\Phi_{\dot{\Gamma}}(\mu)$ to $\Phi_\Gamma(v^*\mu)$ from $T(\dot{\Gamma})$ onto $T(\Gamma)$ with local holomorphic sections, known as the "puncture-forgetting mapping". By means of a homotopy theorem of Epstein [Ep], Bers proved that $v^* : M(\dot{\Gamma}) \to M(\Gamma)$ induces a holomorphic map sending μ to $(\Phi_\Gamma(v^*\mu), w^{v^*\mu}(a))$ from $M(\dot{\Gamma})$ onto $F(\Gamma)$ with local holomorphic sections, which projects to a biholomorphic isomorphism sending $\Phi_{\dot{\Gamma}}(\mu)$ to $(\Phi_\Gamma(v^*\mu), w^{v^*\mu}(a))$ between $T(\dot{\Gamma})$ and $F(\Gamma)$, known as the Bers' isomorphism.

5 Isomorphisms of fiber spaces

In this section, we will discuss the fiber-preserving biholomorphic isomorphisms of fiber spaces $F(\Gamma)$ and $F_0(\Gamma)$ for a general Fuchsian group Γ. In general, for any complex manifold X, we denote by $\mathrm{Aut}X$ the group of all biholomorphic automorphisms of X. We have the natural homomorphisms $\rho : \mathrm{mod}\,\Gamma \to \mathrm{Aut}(F(\Gamma))$, $\lambda : \mathrm{Mod}(\Gamma) \to \mathrm{Aut}(V(\Gamma))$ and $\chi : \mathrm{Mod}(\Gamma) \to \mathrm{Aut}(T(\Gamma))$. We also know that ρ and λ are one-to-one, while χ is one-to-one if and only if Γ is not exceptional, and it is also surjective if Γ is not of type $(0,4)$, $(1,1)$ or $(1,2)$. We denote by $\rho(\Gamma)$ and $\rho(\mathrm{mod}(\Gamma))$ the images of Γ and $\mathrm{mod}(\Gamma)$ under $\rho : \mathrm{mod}\,\Gamma \to \mathrm{Aut}(F(\Gamma))$, respectively. Then $\rho(\Gamma)$ is a normal subgroup of $\rho(\mathrm{mod}(\Gamma))$. We also denote by $\lambda(\mathrm{Mod}(\Gamma))$ the image of $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ under $\lambda : \mathrm{Mod}(\Gamma) \to \mathrm{Aut}(V(\Gamma))$.

Theorem 4 [HS]. *Let Γ_1 and Γ_2 be two torsion free Fuchsian groups not of type $(0,3)$ or $(1,1)$, and F be a biholomorphic fiber-preserving isomorphism from $F(\Gamma_1)$ onto $F(\Gamma_2)$. Then there exists some $w \in Q(\Gamma_1)$ such that $\Gamma_2 = w\Gamma_1 w^{-1}$ and $F = \rho([w])$.*

Corollary 1. *Let Γ be a torsion free Fuchsian group not of type $(0,3)$ or $(1,1)$. Then any biholomorphic fiber-preserving automorphism of $F(\Gamma)$ is induced by an element $[w]$ of $\mathrm{mod}(\Gamma)$.*

Remark 4. Except in some special cases, Zhang [Zh] showed that both Theorem 4 and Corollary 1 still hold for finitely generated Fuchsian groups of the first kind which may contain elliptic elements. However, it is still an open question whether the corresponding results hold for a general Fuchsian group which may contain elliptic elements.

Corollary 2. *Let Γ_1 and Γ_2 be two torsion free Fuchsian groups not of type $(0,3)$ or $(1,1)$, and F be a biholomorphic fiber-preserving isomorphism from $V(\Gamma_1)$ onto $V(\Gamma_2)$. Then there exists some $w \in Q(\Gamma_1)$ such that $\Gamma_2 = w\Gamma_1 w^{-1}$ and $F = \lambda([w])$.*

Corollary 3. *Let Γ be a torsion free Fuchsian group not of type $(0,3)$ or $(1,1)$. Then any biholomorphic fiber-preserving automorphism of $V(\Gamma)$ is induced by an element $\langle w \rangle$ of* $\mathrm{Mod}(\Gamma)$.

Remark 5. Unlike Corollary 2, Theorem 2 implies that the corresponding result does not hold for Fuchsian groups with elliptic elements. On the other hand, Corollaries 2 and 3 will be strengthened in the next section.

Theorem 5 [HS]. *Let Γ_1 and Γ_2 be two Fuchsian groups not of type $(0,3)$ or $(1,1)$, and F be a biholomorphic fiber-preserving isomorphism from $F_0(\Gamma_1)$ onto $F_0(\Gamma_2)$. Then there exists some $w \in Q(\Gamma_1)$ such that $\Gamma_2 = w\Gamma_1 w^{-1}$ and $F = \rho([w])$.*

Corollary 4. *Let Γ be a Fuchsian group not of type $(0,3)$ or $(1,1)$. Then any biholomorphic fiber-preserving automorphism of $F_0(\Gamma)$ is induced by an element $[w]$ of* $\mathrm{mod}(\Gamma)$.

Remark 6. Unlike Theorem 5, Theorem 3 implies that the corresponding result for "punctured" Teichmüller curves $V_0(\Gamma)$ is not true for Fuchsian groups with elliptic elements.

6 Isomorphisms of Teichmüller curves

In this section, we give a complete characterization of the biholomorphic isomorphisms between Teichmüller curves $V(\Gamma)$ for torsion free Fuchsian groups Γ. We first note

Theorem 6 [Sh]. *Let Γ_1 and Γ_2 be two torsion free Fuchsian groups such that each of $\mathbb{H}/\Gamma_1$ and $\mathbb{H}/\Gamma_2$ is not a once-punctured torus, and $F : F(\Gamma_1) \to F(\Gamma_2)$ be a biholomorphic isomorphism. Then the following holds:*

(1) If $\mathbb{H}/\Gamma_1$ is a twice-punctured plane, then $\mathbb{H}/\Gamma_2$ is also a twice-punctured plane, and $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

(2) If $\mathbb{H}/\Gamma_1$ is a once-punctured disk, then $\mathbb{H}/\Gamma_2$ is also a one-punctured disk, and $F\rho(\Gamma_1)F^{-1} = \rho(\Gamma_2)$.

(3) If $\mathbb{H}/\Gamma_1$ is different from a twice-punctured plane or a once-punctured disk, then $F\rho(\Gamma_1)F^{-1} = \rho(\Gamma_2)$ if and only if there exists some $w \in Q(\Gamma_1)$ such that $\Gamma_2 = w\Gamma_1 w^{-1}$ and $F = \rho([w])$.

Theorem 7 [Sh]. *Let Γ be a torsion free Fuchsian group. Then the following holds*:

(1) *If $\mathbb{H}/\Gamma$ is a twice-punctured plane, then the normalizer in* $\mathrm{Aut}(F(\Gamma))$ *of* $\rho(\Gamma)$ *is* $\Sigma(\Gamma) \cap \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

(2) *If $\mathbb{H}/\Gamma$ is a once-punctured disk, then $\rho(\Gamma)$ is a normal subgroup of* $\mathrm{Aut}(F(\Gamma))$.

(3) *If $\mathbb{H}/\Gamma$ is not a twice-punctured plane or a once-punctured disk, then the normalizer of $\rho(\Gamma)$ in* $\mathrm{Aut}(F(\Gamma))$ *is* $\rho(\mathrm{mod}(\Gamma))$.

The following results give a complete characterization of the biholomorphic isomorphisms between Teichmüller curves for torsion free Fuchsian groups. They follow immediately from Theorems 6 and 7.

Theorem 8 [Sh]. *Let Γ_1 and Γ_2 be two torsion free Fuchsian groups so that each of $\mathbb{H}/\Gamma_1$ and $\mathbb{H}/\Gamma_2$ is not a once-punctured torus or a once-punctured disk, and F be a biholomorphic isomorphism from $V(\Gamma_1)$ onto $V(\Gamma_2)$. Then there exists some $w \in Q(\Gamma_1)$ such that $\Gamma_2 = w\Gamma_1 w^{-1}$ and $F = \lambda([w])$.*

Theorem 9 [Sh]. *Let Γ be a torsion free Fuchsian group such that $\mathbb{H}/\Gamma$ is not a once-punctured disk. Then any biholomorphic automorphism of $V(\Gamma)$ is induced by an element $\langle w\rangle$ of* $\mathrm{Mod}(\Gamma)$, *namely*, $\lambda : \mathrm{Mod}(\Gamma) \to \mathrm{Aut}(V(\Gamma))$ *is a surjective isomorphism.*

Remark 7. When $\mathbb{H}/\Gamma$ is a once-punctured disk, Theorem 7 implies that each element of $\mathrm{Aut}(F(\Gamma)) = \mathrm{Aut}(T(\dot{\Gamma})) = \chi(\mathrm{Mod}(\dot{\Gamma}))$ can be projected to an element of $\mathrm{Aut}(V(\Gamma))$, which contains $\lambda(\mathrm{Mod}(\Gamma))$ as a subgroup of index two.

References

[Ah] L. V. Ahlfors, *On quasiconformal mappings*, J. Anal. Math. **3** (1953/4), 1-58.

[Be1] L. Bers, *Uniformization, moduli, and Kleinian groups*, Bull. London Math. Soc. **4** (1972), 257-300.

[Be2] L. Bers, *Fiber spaces over Teichmüller spaces*, Acta Math. **130** (1973), 89-126.

[Be3] L. Bers, *Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations*, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), 131-172.

[BG] L. Bers and L. Greenberg, *Isomorphisms between Teichmüller spaces*, Ann. Math. Stud. **66** (1970), 53-79.

[Bi] J. S. Birman, *The algebric structure of surface mapping class group*, in Discrete Groups and Automorphic Functions. Edited by W. J. harvey, Academic Press, London, 1977, 163-198.

[Ca] H. Cartan, *Quotient d'un espace analytique par un group d'automorphismes*, *In* Algebric geometry and algebric topology, 90-102, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

[CS] Y. Cai and Y. Shen, *An isomorphism theorem for Teichmüller curves*, preprint.

[EF] C. J. Earle and R. S. Fowler, *Holomorphic families of open Riemann surfaces*, Math. Ann. **270** (1985), 249-273.

[EG] C. J. Earle and F. P. Gardiner, *Geometric isomorphisms between infinite dimensional Teichmüller spaces*, Tran. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 1163-1190.

[EGL] C. J. Earle, F. P. Gardiner and N. Lakic, *Teichmüller spaces with asymptotic conformal equivalence*, I.H.E.S. preprint 1995.

[EK1] C. J. Earle and I. Kra, *On holomorphic mappings between Teichmüller spaces*, *In* Contribution to Analysis, 107-124, Academic Press, New York, 1974.

[EK2] C. J. Earle and I. Kra, *On sections of some holomorphic families of closed Riemann surfaces*, Acta Math. **137** (1976), 49-79.

[EL] C. J. Earle & N. Lakic, *Variablity sets on Riemann surfaces and forgetful maps between Teichmüller spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math. **27** (2002), 307-324.

[EM] C. J. Earle and C. T. McMullen, *Quasiconformal isotopies*, *In* Holomorphic Functions and Moduli, Volume I, 143-154, Springer-Verlag, 1988.

[Ep] A. Epstein, *Effectiveness of Teichmüller modular groups*, In the tradition of Ahlfors and Bers, Contemp. Math. **256** (2000), 69-74.

[Eps] D. B. A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83-107.

[Ga1] F. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*, Wiley-Interscience, New York, 1987.

[Ga2] F. P. Gardiner, *A theorem of Bers and Greenberg for infinite dimensional Teichmüller spaces*, *In* Holomorphic Functions and Moduli, Volume I, 195-205, Springer-Verlag, 1988.

[Go] E. Gottschling, *Invarianten endlicher Gruppen und biholomorphe Abbildungen*, Invent. Math. **6** (1969), 315-326.

[Gr] A. Grothendieck, *Techniques de construction en geometrie analytique*, Sem. Cartan (1960/61), expose 17.

[HS] Y. Hu and Y. Shen, *Isomorphisms of fiber spaces over Teichmüller spaces*, preprint.

[Ko] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Dekker, New York, 1970.

[Kr1] I. Kra, *Canonical mappings between Teichmüller spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1981), 143-179.

[Kr2] I. Kra, *On the Nielsen-Thurston-Bers type of some self-maps of Riemann surfaces*, Acta Math. **146** (1981), 231-270.

[La] N. Lakic, *An isometry theorem for quadratic differentials on Riemann surfaces of finite genus*, Tran. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2951-2967.

[Le] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1987.

[Ma] A. Marden, *On homotopic mappings of Riemann surfaces*, Ann. Math. **90** (1969), 1-8.

[Mar] V. Markovic, *Biholomorphic maps between Teichmüller spaces*, Duke Math. J. **120** (2003), 403-431.

[Mat] K. Matsuzaki, *Inclusion relations between the Bers embeddings of Teichmüller spaces*, Israel J. Math. **140** (2004), 113-123.

[Na] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Wiley-Interscience, 1988.

[Ri] G. Riera, *Semi-direct products of Fuchsian groups and uniformization*, Duke Math. J. **44** (1977), 291-304.

[Ro] H. L. Royden, *Automorphisms and Teichmüller space*, Ann. Math. Stud. **66** (1970), 369-384.

[Sh] Y. Shen, *Biholomorphic isomorphisms between Teichmüller curves*, preprint.

[Zh] C. Zhang, *On isomorphisms of Bers fiber spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **22** (1997), 255-274.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SUZHOU UNIVERSITY, SUZHOU 215006, P. R. CHINA
ylshen@suda.edu.cn

函数論分科会委員会委員
投票用紙

以下の委員候補者（２００６年４月から２００８年３月まで任期２年）のうち適任と思われる者に ◯，不適任と思われる者に × を付して下さい．一括信任（不信任）の場合は該当欄に御記入下さい．

	一　括　信　任

	神谷　茂保
	志賀　啓成
	須川　敏幸
	諸澤　俊介

任期中の委員は，阿部誠，下村勝孝，松崎克彦，齋藤三郎，西尾昌治，児玉秋雄，神直人，藤解和也，平地健吾，松本和子 です．他に適任と思われる方がいましたら，２名以内ご推薦下さい．ただし，規則により，奥村善英，清水悟，柳原宏 は被推薦者になれません．

なお，投票は学会開催中に函数論分科会会場，それ以降は９月３０日必着で

〒９２０－１１９２　金沢市角間町
金沢大学理学部数学教室
児玉秋雄
(函数論分科会連絡責任評議員)

宛に郵送してください．