日 本 数 学 会

２００５年度年会

函 数 論 分 科 会
講 演 ア ブ ス ト ラ ク ト

２００５年３月

於 日本大学理工学部

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.
2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する.
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する.
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦.
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.
3. 委員会の構成及び委員の選出 · 任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する. 必要に応じ追加，削減できる.
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする. 再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する. その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.
4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する.
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する. 必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.
   (d) 案件の議決は投票によってはならない. 決定できない時は懸案事項として次回に繰越す. 緊急事項については評議員に処置を一任する.
5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする.
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する.

3月29日

第VIII会場　函数論

9:30~12:00

14:30~15:30

15:50~16:50　特別講演

藤川　英華 (東工大情報理工) * 無限次元タイヒミュラー空間上に作用する擬等角写像類群の力学系

3月30日

第VIII会場　函数論

10:00~12:00

14 濱田　英隆	(九州産大工)	* Quasiconformal extension of quasiregular biholomorphic mappings in several complex variables	15
15 濱田　英隆	(九州産大工)	* A classification of rational proper holomorphic maps from B^n into B^{2n}	15
16 風間　英明	(九大数理)	* トロイダル群上の調和関数について	15
梅野　高司	(九州産大工)		
17 風間　英明	(九大数理)	* 非定数有理型関数が存在しないトロイダル群について	15
梅野　高司	(九州産大工)		
18 井上　克己	(金沢大医)	* Two-generator subgroups of $SO(3)$	15
19 J. Byun	(プロバンス大)	A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and a Euclidean space	15
児玉　秋雄	(金沢大自然)		
清水　悟	(東北大理)		
20 甲斐　千舟	(京大理)	* Cayley 変換像の凸性による準対称ジーゲル領域の対称性条件	15

14:30~15:15

21 古島　幹雄	(熊本大理)	* スタイン空間内の正則領域について	10
22 大沢　健夫	(名大多元数理)	L^2 正則関数の拡張について – 除去可能特異性	15
23 藤田　收		一般位数擬凸状函数の除去可能特異点	20

15:30~16:30　特別講演

古島　幹雄　(熊本大理)　* $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化について

1 N- fractional calculus of function $\varphi = \log z - \frac{1}{2z}$ $(z \neq 0)$

K. Nishimoto — Descartes Press

Susana S. de Romero

and

Josefina Matera

Universidad del Zulia
Maracaibo-Venezuela

Abstract

In this paper, N-fractional calculus of function φ in the title and some relationships for them are reported.

Acknowledgements

The second author is grateful to the CONDES, University of Zulia, for providing financial support.

References

[1] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol.4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21 st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus opertor N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto and Shih - Tong Tu; Fractional calculus of Psi functions (generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994). 27 - 34.

[6] K. Nishimoto; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 15 -26.

[7] H. M. Srivastava and K. Nishimoto; Some infinite sums derived by using fractional calculus of logarithmic functions, J. Frac. Calc. Vol. 8, Nov. (1995), 57 - 61.

[8] K. Nishimoto; N-Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some Identities, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 1-6.
[9] S. Monguchi, K. Udagawa and S. Hitotsumatsu; Mathematical Formulae, Vol. 2, Iwanami Zensho, (1957), pp. 37-39. Iwanami, Japan.
[10] A.P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O.I. Marichev; Integrals and Series, Vol. 1, (1986), pp. 651 - 718. Gordon and Breach.
[11] W. Magnus, F. Oberhettinger and R. P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Springer (1966), 42-43.
[12] K. B. Oldham and J. Spanier; The Fractional Calculus (1974). Academic Press.
[13] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev; Fractional integrals and derivatives and some their applications (1987), Nauka, USSR.
[14] K. S. Miller and B Ross; An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations (1993). John Wiley & Sons, Inc.
[15] V. Kiryakova; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No. 301, (1994), Longman.

2 Multiply Elements Beta Functions and N- Fractional Calculus of Some Logarithmic Functions

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article the generalized (multiply elements) Beta function is defined as

$$ {}_nB(\alpha_k) = B(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) := \frac{\prod_{k=1}^{n} \Gamma(\alpha_k)}{\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)} $$

where

$$ |\Gamma(\alpha_k)|, \quad \left|\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)\right| < \infty $$

and

α_k ($k = 1, 2, \cdots, n \in Z^+ \geq 2$) are variables (constants for special case) with order number k .

We have then the following identity, for example.

(i)
$$ \frac{\prod_{k=1}^{n} (\log(z-c))_{\alpha_k+1}}{(\log(z-c))_{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k+1}} = (z-c)^{1-n} \left(\frac{\prod_{k=1}^{n} \alpha_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right) \cdot {}_nB(\alpha_k) $$

where

$$ z - c \neq 0, 1, \quad n \in Z^+ \geq 2, $$

and

$$ |\Gamma(\alpha_k + 1)|, \quad \left|\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + 1\right)\right| < \infty. $$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Ring and Field produced from The Set of N- Fractional Calculus Operator, J. Frac. Calc. Vol.24, Nov. (2003), 29 - 36.

[6] K. Nishimoto ; N-Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some Identities, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 1 - 6.

[7] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 7 - 12.
[8] K. Nishimoto, Ming- Lai Lin, Chen- Te Yen and Pin- Yu Wang ; N fractional calculus of the Function $(z-c)^{-1}$ and Beta Functions, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 55 - 66.
[9] Shih- Tong Tu, Shy- Der Lin, Pin- Yu Wang and K. Nishimoto ; Some Relationship Associated with the Beta Function and the Function $(z-c)^{-n}$vis N- Fractional Calculus, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 75 - 80.
[10] K. Nishimoto, Shih- Tong Tu and Pin- Yu Wang ; N Fractional calculus of the Power Function $(z-c)^{-b}$ and Beta Functions, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 89 - 102.
[11] K. Nishimoto ; N-Fractional Calculus of the Function $\log(z-c)$ and Beta Functions, J. Frac. Calc. Vol. 24, Nov. (2003), 1 - 12.
[12] S.-T. Tu, Pin- Yu Wang and K. Nishimoto ; N-Fractional Calculus of the Function $\log(z-c)\cdot(z-c)$ and Beta Functions, J. Frac. Calc. Vol. 25, May (2004), 11 - 16.
[13] David Dummit and Richard M. Foote ; Abstract Algebra, Prentice Hall (1991).
[14] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).
[15] A.C. McBride ; Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.
[16] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.
[17] K. S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, (1993).
[18] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No.301, (1994), Longman.
[19] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.); Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.
[20] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.
[21] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

3 Notes on integral means of certain analytic functions

Tadayuki Sekine (Nihon Univ.), Shigeyoshi Owa (Kinki Univ.)
and Rikuo Yamakawa (Shibaura Inst. Tech.)

Let $\mathcal{A}_n$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For analytic functions $f(z)$ and $g(z)$ in $\mathbb{U}$, we say that the function $f(z)$ is subordinate to $g(z)$ in $\mathbb{U}$ if there exists an analytic function $w(z)$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ such that $f(z) = g(w(z))$. We denote this subordination by $f(z) \prec g(z)$.

Lemma 1 (J. E. Littlewood (1925)). *If $f(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{U}$ with $f(z) \prec g(z)\,(z \in \mathbb{U})$, then for $\mu > 0$ and $z = re^{i\theta}(0 < r < 1)$,*

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |g(z)|^{\mu} d\theta.$$

In the present talk, we consider the analytic function $p(z)$ in $\mathbb{U}$ defined by

$$p(z) = z + \sum_{s=1}^{m} b_{sj-s+1} z^{sj-s+1} \quad (j \geqq n+1).$$

Remark. H. Silverman (Houston J. Math. 23(1997)) has considered the integral means of $f(z)$ and $p(z)$ for analytic functions with negative coefficients in the case of $n = 1, m = 1, j = 2$. Recently, S. Owa and T. Sekine (J. Math. Anal. Appl. (in press)) have shown the integral means of $f(z) \in \mathcal{A}_n$ and $p(z)$ in the case of $m = 2, 3$.

Theorem 1. *Let the functions $f(z) \in \mathcal{A}_n$ and $p(z)$ satisfy*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leqq |b_{mj-m+1}| - \sum_{s=1}^{m-1} |b_{sj-s+1}|$$

with

$$|b_{mj-m+1}| > \sum_{s=1}^{m-1} |b_{sj-s+1}|.$$

If there exists an analytic function $w(z)$ in $\mathbb{U}$ defined by

$$\sum_{s=1}^{m} b_{sj-s+1}\{w(z)\}^{s(j-1)} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1} = 0,$$

then for $\mu > 0$ and $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |p(z)|^{\mu} d\theta.$$

Corollary 1. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ and $p(z)$ satisfies the conditions in Theorem 1, then for $0 < \mu \leqq 2$ and $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$,*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} d\theta &\leqq 2\pi r^{\mu}\left(1 + \sum_{s=1}^{m} |b_{sj-s+1}|^2 r^{2s(j-1)}\right)^{\frac{\mu}{2}} \\ &< 2\pi\left(1 + \sum_{s=1}^{m} |b_{sj-s+1}|^2\right)^{\frac{\mu}{2}}.\end{aligned}$$

Theorem 2. *Let the functions $f(z) \in \mathcal{A}_n$ and $p(z)$ satisfy*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| \leqq (mj - m + 1)|b_{mj-m+1}| - \sum_{s=1}^{m-1} (sj - s + 1)|b_{sj-s+1}|$$

with

$$(mj - m + 1)|b_{mj-m+1}| > \sum_{s=1}^{m-1} (sj - s + 1)|b_{sj-s+1}|.$$

If there exists an analytic function $w(z)$ in $\mathbb{U}$ defined by

$$\sum_{s=1}^{m} (sj - s + 1) b_{sj-s+1}\{w(z)\}^{s(j-1)} - \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = 0,$$

then for $\mu > 0$ and $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$,

$$\int_0^{2\pi} |f'(z)|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |p'(z)|^{\mu} d\theta.$$

Corollary 2. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ and $p(z)$ satisfies the conditions in Theorem 2, then for $0 < \mu \leqq 2$ and $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$,*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f'(z)|^{\mu} d\theta &\leqq 2\pi\left(1 + \sum_{s=1}^{m} (sj - s + 1)^2 |b_{sj-s+1}|^2 r^{2s(j-1)}\right)^{\frac{\mu}{2}} \\ &< 2\pi\left(1 + \sum_{s=1}^{m} (sj - s + 1)^2 |b_{sj-s+1}|^2\right)^{\frac{\mu}{2}}.\end{aligned}$$

4 Sets in subgeneral position and the defect relation

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. Let N and n be positive integers satisfying $N > n$ and X a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position:

(i) $\# X \geq 2N - n + 2$ and (ii) any $N+1$ elements of X generate $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

Let

$$\mathcal{O}_X = \{S \subset X \mid 0 < \# S \leq N+1\}$$

and let $d(S)$ be the dimension of the vector space spanned by vectors in S for $S \in \mathcal{O}_X$.

Definition 1. $\lambda_X = \min_{S \in \mathcal{O}_X} d(S)/\# S$.

Note that $\#\{d(S)/\# S \mid S \in \mathcal{O}_X\}$ is finite. We put

$$\mathcal{O}_X^1 = \{S \in \mathcal{O}_X \mid d(S)/\# S = \lambda_X\}.$$

Definition 2. $T_1 = \cup_{S \in \mathcal{O}_X^1} S$.

We put $\mathcal{U} = \{U \subset X \mid 2N - n + 1 < \# U < \infty\}$. Let $U \in \mathcal{U}$, $\# U = q$, $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$ and $U = \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$. For any subset P of Q, $V(P)$ is the vector space spanned by $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in P\}$ and $d(P) = \dim V(P)$. Further, we put

$$\mathcal{O}_U = \{P \subset Q \mid 0 < \# P \leq N+1\} \text{ and } \lambda_U = \min_{P \in \mathcal{O}_U} d(P)/\# P.$$

Lemma([2, p.68]). For $S \in \mathcal{O}_X$, we have the inequality

$$\# S - d(S) \leq N - n.$$

Proposition 1. $1/(N-n+1) \leq \lambda_X \leq \lambda_U \leq (n+1)/(N+1)$.

Definition 3. $\mathcal{W}_U = \{\tau : Q \to (0,1] \mid \sum_{j \in P} \tau(j) \leq d(P) \text{ for any } P \in \mathcal{O}_U\}$.

For example, the Nochka weight function ω_U for U is in $\mathcal{W}_U$ (see [1, 2]) and $\tau_U : Q \to (0,1]$ such that $\tau_U(j) = \lambda_U$ $(j \in Q)$ belongs to $\mathcal{W}_U$ ([3, Proposition 2]).

Definition 4. Let $\mathcal{D}$ be the set of $\delta : \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\} \to [0,1]$ satisfying

$$\sum_{j=1}^{q} \tau(j) \delta(\boldsymbol{a}_j) \leq n+1$$

for any $\tau \in \mathcal{W}_U$ and for any $U \in \mathcal{U}$.

Example . For transcendental holomorphic curves f, g from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$,
1) $\delta(\boldsymbol{a}, f)$, $\delta_n(\boldsymbol{a}, f)$, $\delta_0(\boldsymbol{a}, f) \in \mathcal{D}$.
2) Any $\delta : \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\} \to [0,1]$ is in $\mathcal{D}$ if it satisfies $\delta(\boldsymbol{a}) \leq \delta_n(\boldsymbol{a}, f)$.
3) $\delta(\boldsymbol{a}) = (\delta(\boldsymbol{a}, f) + \delta(\boldsymbol{a}, g))/2 \in \mathcal{D}, \cdots$.

2. Result.

Proposition 2(cf. [3, Corollary 2]) The set $Y = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta(\boldsymbol{a}) > 0\}$ is at most countable and

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}) \leq \min\{2N - n + 1, (n+1)/\lambda_X\}.$$

Definition 5. $\mathcal{E}(X) = \{\delta \in \mathcal{D} \mid \sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}) = 2N - n + 1\}$.

Theorem 1(cf. [4]). Suppose that n is even. $\mathcal{E}(X)$
[I] If $\lambda_X \geq (n+1)/(2N - n + 1)$, then $\mathcal{E}(X) = \phi$.
[II] If $\mathcal{E}(X) \neq \phi$, then $\delta(\boldsymbol{a}) = 1$ $(\boldsymbol{a} \in T_1)$ for any $\delta \in \mathcal{D}$, where T_1 satisfies the inequality

$$d(T_1)/\#T_1 < (n+1)/(2N - n + 1).$$

In particular, $\#T_1 = N - 1$ and $d(T_1) = 1$ when $n = 2$.

Theorem 2. Suppose that n is odd.
[I] If $\lambda_X > (n+1)/(2N - n + 1)$, then $\mathcal{E}(X) = \phi$.
[II] (a) If $\mathcal{E}(X) \neq \phi$ and $\lambda_X < (n+1)/(2N - n + 1)$, then $\delta(\boldsymbol{a}) = 1$ $(\boldsymbol{a} \in T_1)$ for any $\delta \in \cancel{\mathcal{D}.}$ $\mathcal{E}(X)$
(b) If $\mathcal{E}(X) \neq \phi$, $\lambda_X = (n+1)/(2N - n + 1)$ and $\#Y$ is finite, then for any $\delta \in \mathcal{D}$, $(2N - n + 1) | 2\#Y$ and any (n+1)/2 vectors in Y are linearly independent.
$\mathcal{E}(X)$

References

[1] W. Chen: Defect relations for degenerate meromorphic maps. Trans. Amer. Math. Soc., 319-2(1990), 499-515.

[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[3] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum. Kodai Math. J., 24-1(2001), 134-146.

[4] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, II. Progress in Analysis (Proceedings of the Third ISAAC Congress, edited by H. G. W. Begehr et al.), vol.1(2003), 287-300 (World Scientific).

5 端点対称貼付弧列と型問題

中井 三留（名工大・名誉教授）
瀬川 重男（大同工大）

複素平面$\mathbb{C}$内の単純弧γ_nの列$\Gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$($\mathbb{N}$は自然数全体)で，$\gamma_n \cap \gamma_{n+1} = \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$，かつγ_nの始点と終点をa_nとb_nとするとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$($\infty$は$\mathbb{C}$の無限遠点) となるものとする．更に複素球面$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$のレプリカの列$(\widehat{\mathbb{C}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$を用意する：$\widehat{\mathbb{C}}_n = \widehat{\mathbb{C}}$ $(n \in \mathbb{N})$. そこで$\widehat{\mathbb{C}}_n \setminus (\gamma_{n-1} \cup \gamma_n)$と$\widehat{\mathbb{C}}_{n+1} \setminus (\gamma_n \cup \gamma_{n+1})$を$\gamma_n$に沿って交差状に貼り合わせる事を全ての$n \in \mathbb{N}$で行って得られる単連結リーマン面を$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma$と記す，但し$\gamma_0 = \emptyset$とする：

$$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma := (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_1) \biguplus_{\gamma_1} (\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)) \biguplus_{\gamma_2} (\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\gamma_2 \cup \gamma_3)) \biguplus_{\gamma_3} (\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\gamma_3 \cup \gamma_4)) \cdots .$$

すると$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma$は$\mathbb{C}$の自然な射影$\pi$をもつ被覆リーマン面$(\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma, \mathbb{C}, \pi)$と考えられる．$\Gamma$は$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma$の**貼付弧列**と呼ぶ．我々は型問題 ([7], [9], [8] 等参照) を上の型の被覆面$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma$に限定して論ずる：被覆面$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma$は放物型$(\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma \in O_G$，即ちこの場合$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma = \mathbb{C})$であるか或は双曲型$(\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma \notin O_G$，即ちこの場合では$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma = \mathbb{D}$(単位円板)) の何れであるかを決定する問題を考える，特に前者が起こる条件をΓの言葉で求めたい．

非退化の連続体$K \subset \mathbb{C}$を全ての$\gamma_n \in \Gamma$に対し$K \cap \gamma_n = \emptyset$となるように取る．開集合$\mathbb{C} \setminus K$に関する$\mathbb{C} \setminus K$の各集合$X$の変分2-容量を$\mathrm{cap}(X, \mathbb{C} \setminus K)$と記す．$\Gamma$に対する条件

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{cap}(\gamma_n, \mathbb{C} \setminus K) = 0 \tag{1}$$

を考える．これはKの取り方に依存しない事が示される．この条件は$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma \in O_G$となる為の殆ど必要条件である：$\Gamma$を非常に歪に取ることでそうでなくすることも出来るが，Γがある程度整然とした分布，例えば各$\gamma_n \in \Gamma$が番号nの増加に応じて順に遠くなる (無限遠点に近くなる) ときΓは無限遠点に向かって単調に配置されていると言うが，そんな場合には (1) は確かに$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma = \mathbb{C}$の必要条件である．こんな状況を背景として我々はこの条件 (1) が$\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma = \mathbb{C}$の為の十分条件となるか否かを問題として来た ([4], [5] 参照, 又 [2] も).

ここではΓの分布に関して図形的条件である同時端点対称性

$$-\overline{a_n} = b_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

を仮定すれば (1) が確かに十分条件となる ([6] の主結果) ことを報告する：

定理. **同時端点対称条件 (2) をみたす貼付弧列 Γ に対しては条件 (1) があると被覆リーマン面 $\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma$ は放物型である. 即ち $\widehat{\mathbb{C}}_\Gamma = \mathbb{C}$.**

これは [4] 及び [5] の夫々の結果を含む一般化を与える. [4] と [5] の結果はサリオ・能代の放物性のモジュラー判定定理 ([8] 参照) を使って示したが, 上記定理は貼付弧の劣臨界性判定定理 ([1], [3] 参照) を使って証明する. 端点対称性の果たす役割がより鮮明になったと考える.

参 照 文 献

[1] M. NAKAI (中井 三留): 二葉球面の貼付弧の分類, 日本数学会函数論分科会講演アブストラクト, 北海道大学, 2004 年 9 月, 25-26.

[2] M. NAKAI: *Types of complete infinitely sheeted planes*, Nagoya Math. Jour., **176**(2004), 1-15.

[3] M. NAKAI: *Types of pasting arcs in two sheeted spheres*, Preprint.

[4] M. NAKAI AND S. SEGAWA: *Parabolicity of Riemann surfaces*, Hokkaido University Technical Report in Mathematics, **73**(2003), 111-116.

[5] M. NAKAI AND S. SEGAWA: *The role of the completeness in the type problem for infinitely sheeted planes*, Complex Variables, **49**(2004), 229-240.

[6] M. NAKAI AND S. SEGAWA: *The role of symmetry for pasting arcs in the type problem*, Preprint.

[7] R. NEVANLINNA: *Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1970.

[8] L. SARIO AND M. NAKAI: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[9] M. TSUJI: *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzenn, Tokyo, 1959.

6 On the behavior at infinity for non-negative superharmonic functions in a cone

柳下　稔　千葉大学・自然科学研究科

この講演では, Aikawa [1] によって導入された, 半空間の無限遠点での a-minimal thinness ($0 \leq a \leq 1$) の概念 ($a = 1$ の場合が minimal thinness, $a = 0$ の場合が rarefiedness) をコーン領域の無限遠点に対して導入し, 正値優調和関数の無限遠点での極限に関する除外集合を特徴付け, [1] における結果を拡張する. また, Miyamoto-Yoshida [2] によってコーン領域において得られた結果の拡張を与えることも報告する.

$\mathbf{S}^{n-1}$($\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) 内の単位球面) 上の滑らかな境界をもつ領域 Ω に対して, $\mathbf{R}^n$ 内の点 P の極座標表示を (r, Θ) で表すとき,

$$C_n(\Omega) = \{P = (r, \Theta) \in \mathbf{R}^n; (1, \Theta) \in \Omega\}$$

をコーンと呼ぶ. $C_n(\Omega)$ の Martin 境界 Δ は集合 $\partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$ であり, $C_n(\Omega) \times (C_n(\Omega) \cup \Delta)$ 上の Martin type 核を $K(P, Q)$ で表すとする.

任意の $a (0 \leq a \leq 1)$ に対して, $g_a(P) = K(P, \infty)^a$ ($P \in C_n(\Omega)$) とする. 有界集合 $E \subset C_n(\Omega)$ に対して, 集合 E に関する g_a の regularized reduced function を $\hat{R}^E_{g_a}$ で表すとき, ある $C_n(\Omega) \cup (\partial C_n(\Omega) \setminus \{O\})$ 上の測度 λ^a_E で,

$$\hat{R}^E_{g_a}(P) = \int_{C_n(\Omega) \cup (\partial C_n(\Omega) \setminus \{O\})} K(P, Q) d\lambda^a_E(Q) \quad (P \in C_n(\Omega))$$

となるものが唯一存在する. そして, この集合 E の a-mass を

$$\lambda^a_\Omega(E) = \lambda^a_E(C_n(\Omega) \cup (\partial C_n(\Omega) \setminus \{O\}))$$

によって定める. ここに, O は $\mathbf{R}^n$ の原点とする.

集合 $E \subset C_n(\Omega)$ が無限遠点で a-minimally thin であるとは,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^a_\Omega(E_k) 2^{-k(a\alpha_\Omega + \beta_\Omega)} < +\infty$$

を満たすときをいう. ここに, $E_k = \{P \in E; 2^k \leq |P| < 2^{k+1}\}$ とし, 正数 α_Ω, β_Ω は 2 次方程式 $t^2 + (n-2)t - \tau_\Omega = 0$ の解 α_Ω, $-\beta_\Omega$ を表し, τ_Ω は Ω の境界で 0 となる関数に対するディリクレ問題の最小の正の固有値とする.

$(2-n)\frac{1}{\alpha_\Omega} - 1 < \eta \leq 1$ とする. $C_n(\Omega)$ 上で定義された正値優調和関数 u で, いま Martin type 核による u の表現測度を μ とするとき, 条件 $\mu(\{\infty\}) = 0$,

$$\int_D |Q|^{\{(2-n)\frac{1}{\alpha_\Omega} - 1 - \eta\}\alpha_\Omega} d\mu(Q) < +\infty$$

(ここで, $D=\{P\in C_n(\Omega)\cup\partial C_n(\Omega);\ |P|\geq 1\}$ とする) を満足するものの全体を $\mathcal{S}_\eta$ で表す.

$(2-n)\frac{1}{\alpha_\Omega}-1<\eta\leq 1$ とし, $C_n(\Omega)$ 上の関数 $g_{\eta,a}$ を

$$g_{\eta,a}(P)=K(P,\infty)^a|P|^{(\eta-a)\alpha_\Omega}\quad (P\in C_n(\Omega))$$

によって定める.

定理 1. $(2-n)\frac{1}{\alpha_\Omega}-1<\eta\leq 1$ とする. このとき, 以下の 3 条件は同値である.
(i) 集合 E は無限遠点で a-minimally thin.
(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{R}_{g_{\eta,a}}^{E_k}\in\mathcal{S}_\eta$.
(iii) $\hat{R}_{g_{\eta,a}}^{E}\in\mathcal{S}_\eta$.

定理 2. $(2-n)\frac{1}{\alpha_\Omega}-1<\eta\leq 1$ とする. $u(P)\in\mathcal{S}_\eta$ ならば, 無限遠点で a-minimally thin であるような集合 $E\subset C_n(\Omega)$ で

$$\lim_{|P|\to+\infty,\ P\in C_n(\Omega)\setminus E}\frac{u(P)}{g_{\eta,a}(P)}=0$$

となるものが存在する.

逆に, 集合 $E\subset C_n(\Omega)$ が非有界, 無限遠点で a-minimally thin ならば, ある $u(P)\in\mathcal{S}_\eta$ で

$$\lim_{|P|\to+\infty,\ P\in E}\frac{u(P)}{g_{\eta,a}(P)}=+\infty.$$

となるものが存在する.

参考文献

[1] H. Aikawa, *On the behavior at infinity of non-negative superharmonic functions in a half space,* Hiroshima Math. J. **11**(1981), 425-441.

[2] I. Miyamoto and H. Yoshida, *Two criteria of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cone,* J. Math. Soc. Japan, **54**(2002), 487-512.

7 ある種の被覆定理とその応用

宮本 育子 千葉大・理
吉田 英信 千葉大・自然科学

1. 被覆定理

m を $\mathbf{R}^n$ 上の正値測度とし、 $q > 0$ とする。 $B(P, \rho)$ によって、 $\mathbf{R}^n$ 内の、中心 P、半径 ρ の球を表す。 $\mathbf{R}^n$ 内の点 P の極座標表示を (r, Θ) で表すとき、

$$M(P; m, q) = \sup_{0<\rho\leq 2^{-1}r} \frac{m(B(P,\rho))}{\rho^q}$$

とおく。正数 ε に対して、集合

$$\{P = (r, \Theta) \in \mathbf{R}^n;\ M(P; m, q) r^q > \varepsilon\}$$

を $\mathcal{S}(\varepsilon; m, q)$ によって表す。

次の被覆定理は、本質的には、 Hayman [3], Azarin [1] による。

定理 1. $m(\mathbf{R}^n) < +\infty$ なる $\mathbf{R}^n$ 上の正値測度 m と、 $\forall\varepsilon > 0$, $\forall q > 0$ に対し、可算個の球の列 $\{B_j\}$ で
(1) $\mathcal{S}(\varepsilon; m, q) \subset \cup_j B_j$
(2) $\sum_j (\frac{r_j}{R_j})^q < +\infty$
となるものがとれる。ただし、 r_j は B_j の半径 、 R_j は原点と B_j の中心 との距離 。

2. 応用

Ω を $\mathbf{R}^n$ 内の単位球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ 上の、滑らかな境界をもつ領域 とする。このとき集合

$$C_n(\Omega) = \{P = (r, \Theta) \in \mathbf{R}^n;\ (1, \Theta) \in \Omega,\ 0 < r < \infty\}$$

をコーンと呼ぶ. $C_n(\Omega)$ のマルチン境界は $\partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$ で、 ∞ のマルチン関数を $K(P, \infty)$ $(P \in C_n(\Omega))$ で表す。

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E が ∞ で minimally thin であるとは、

$$\hat{R}^E_{K(\cdot,\infty)}(P) \neq K(P, \infty)$$

となる $P \in C_n(\Omega)$ が存在するときをいう。 ここで、 $\hat{R}^E_{K(\cdot,\infty)}(P)$ は E に関する $K(P, \infty)$ の regularized reduced function である。

次の定理は、 Essén, Jackson and Rippon ([2, Remark]) の半空間における結果のコーン版である。

定理 2. 集合 $E \subset C_n(\Omega)$ が ∞ で minimally thin ならば、この E は条件

$$\sum_j \left(\frac{r_j}{R_j}\right)^n < +\infty$$

を満たす可算個の球の列 $\{B_j\}$ (r_j は B_j の半径 、 R_j は原点と B_j の中心 との距離) で被覆される。

この定理 2 より次の系が得られる。

系 (Miyamoto, Yanagishita and Yoshida [4, Theorem 2]). ボレル集合 $E \subset C_n(\Omega)$ が ∞ で minimally thin ならば、

$$\int_E \frac{dP}{(1+|P|)^n} < +\infty.$$

参考文献

[1] V. S. Azarin: Generalization of a theorem of Hayman on subharmonic functions in an m-dimensional cone. Mat. Sb. **66**(108)(1965), 248-264 ; Amer. Math. Soc. Translation (2)**80** (1969), 119-138.

[2] M. Essén, H. L. Jackson and P. J. Rippon: On a-minimally thin sets in a half-space in $\mathbf{R}^p$, $p \geq 2$, MATHEMATICAL STRUCTURES-COMPUTATONAL MATHEMATICS- MATHEMATICAL MODELLING,2, Sofia, (1984),158-164 .

[3] W. K. Hayman: Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle, J. Math. Pure Appl. **35**(1956), 115-126.

[4] I. Miyamoto, M. Yanagishita and H. Yoshida: Beurling-Dahlberg-Sjögren type theorems for minimally thin sets in a cone, Canad.Math.Bull., **46(2)**(2003), 252-264.

8 Hölder continuity of p-harmonic extension operators in a metric measure space

相川弘明 (島根大学・総合理工学部)

任意の有界開集合 D とその境界 ∂D 上の関数 f に対して f の D への Dirichlet 問題の解 (Perron-Wiener-Brelot) を $P_D f$ で表す．任意の連続関数 f に対して，$\lim_{x\to\xi} P_D f(\xi) = f(x)$ となるならば，$\xi \in \partial D$ を正則境界点といい，すべての境界点が正則であるとき D を正則という．定義から，D が正則であれば，$C(\partial D)$ は P_D によって $\mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ へ写される．ただし，$\mathcal{H}(D)$ は D 上の調和関数の族である．そこで，次の問が自然に起こってくる．

問題 1. 境界関数 f が「良い連続性」をもてば，$P_D f$ も「良い連続性」をもつのではないか? また，それを保証する領域 D の条件は何か?

論文 [1] では，この問題を Euclid 空間上の通常の調和関数と Hölder 連続関数について考察した．この発表の目標は一般の距離測度空間 $X = (X, d, \mu)$ 上の p-調和関数に対して同様の問題を考えることである．以下，$X = (X, d, \mu)$ を完備連結距離空間で測度 μ は Ahlfors Q-regular

$$\mu(B(x,r)) \approx r^Q$$

とし ($Q > 1$)，$1 < p \le Q$ を固定して，X は $(1,p)$-Poincaré 不等式を満たすとする．すなわち任意の Borel 可測関数 u とその最小 upper gradient g_u に対して，

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| d\mu \le C_p r \Big(\fint_{B(x,\kappa r)} g_u^p \, d\mu \Big)^{1/p}$$

を仮定する．ただし，$\kappa \ge 1$ で $u_{B(x,r)}$ は平均 $\fint_{B(x,r)} u d\mu$ を表す．u が D で p-調和とは D の任意の相対コンパクト U と u の境界で消える関数 φ に対して，$\int_U g_u^p \, d\mu \le \int_U g_{u+\varphi}^p \, d\mu$ となる時をいう．さらに，p-Dirichlet 問題, p-Perron 解, p-正則性, p-capacity, p-調和測度等が定義される．∂D 上の境界関数 f に対する D 上の p-Perron 解も $P_D f$ で表す．

[1] と同じように Hölder 連続関数の範疇で問題 1 を考察しよう．$\alpha > 0$ に対して $\Lambda_\alpha(E)$ を E 上の有界 α-Hölder 連続関数 u の全体で，そのノルムを

$$\|u\|_{\Lambda_\alpha(E)} := \sup_{x\in E} |u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in E\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)^\alpha} < \infty$$

とする．我々の問題は作用素ノルム

$$\|P_D\|_{\alpha\to\beta} := \sup_{\substack{f\in\Lambda_\alpha(\partial D)\\ \|f\|_{\Lambda_\alpha(\partial D)}\neq 0}} \frac{\|P_D f\|_{\Lambda_\beta(D)}}{\|f\|_{\Lambda_\alpha(\partial D)}}$$

の有界性である．Euclid 領域に対しては Heinonen-Kilpeläinen-Martio [3, Theorem 6.44] に多少結果があるが，最も興味深い $\alpha = \beta$ の場合は調べられていない．ここでは，この場合も含めて距離測度空間での結果を報告する．特に，$\|P_D\|_{\alpha\to\alpha}$ についてはほぼ満足のいく結果が得られている．鍵となるのは p-調和測度の decay property であり，論文 [2] でも用いた p-劣調和関数の平均値の性質をさらに精密にして用いる．以上は Nageswari Shanmugalingam（Cincinnati 大学）との共同研究である．

参考文献

[1] H. Aikawa, *Hölder continuity of the Dirichlet solution for a general domain*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), no. 6, 691–702.

[2] H. Aikawa and N. Shanmugalingam, *Carleson type estimates for p-harmonic functions and the conformal Martin boundary of John domains in metric measure spaces*, Michigan Math. J. (to appear).

[3] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993, Oxford Science Publications.

9 Dirichlet's Principle by Using Computers

松浦　勉 and　斎藤　三郎
(群馬大工)
ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp

Abstract

In this paper we shall give practical and numerical solutions of the Laplace equation on multidimensional spaces and show their numerical experiments by using computers. Our method is based on the Dirichlet principle by combinations with generalized inverses, Tikhonov's regularization and the theory of reproducing kernels.

Keywords: Laplace equation, Dirichlet problem, inverse problem, approximation of functions, reproducing kernel, Tikhonov regularization, Sobolev space, generalized inverse, approximate inverse

Mathematics Subject Classification (2000): Primary 31A30, 31B10, 30C40, 35A35

References

[1] M. Asaduzzaman, T. Matsuura, and S. Saitoh, *Constructions of approximate solutions for linear differential equations by reproducing kernels and inverse problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).

[2] T. Matsuura, S. Saitoh and D.D. Trong, *Numerical solutions of the Poisson equation*, Applicable Analysis, **83**(2004), 1037-1051.

[3] S. Saitoh (1997), *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman Ltd, UK.

[4] S. Saitoh, *Approximate Real Inversion Formulas of the Gaussian Convolution*, Applicable Analysis, 83(2004), 727-733.

[5] S. Saitoh, *Applications of Reproducing Kernels to Best Approximations, Tikhonov Regularizations and Inverse Problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).

[6] S. Saitoh, *Best approximation, Tikhonov regularization and reproducing kernels*, Kodai. Math. J. (to appear).

(in press in Applicable Analysis)

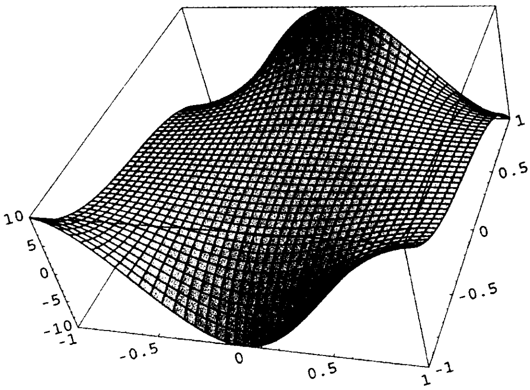

Figure 8: The exact graph of the function $u(x, y) = \cos(3x)\sinh(3y)$

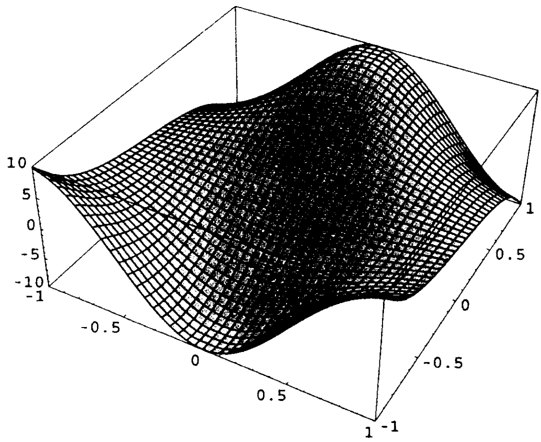

Figure 9: The similar graphs for $\lambda = 10^{-6}$ and $\lambda_j = 10$ and for $\lambda = 10^{-6}$ and $\lambda_j = 10^3$.

10 External rays for Chebyshev polynomials of $\mathbb{C}^2$

中根静男　　　東京工芸大学

Bedford-Jonsson [BJ] は external rays の概念を高次元の regular polynomial endomorphisms に拡張した。ここでは、Chebyshev polynomials に対し、external rays を計算し、着地点を調べる。$\mathbb{C}^2$ の regular polynomial F は $\mathbb{P}^2$ に正則に延長できる。$\Pi = \mathbb{P}^2 - \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{P}^1$ を無限遠平面、F_Π を F の Π への制限である 1 次元有理写像、$J_\Pi = J(F_\Pi)$ とする。External rays は saddle $a \in J_\Pi$ の local stable manifold $W^s_{loc}(a)$ 上の Green 関数の gradient lines として定義される。あるいは、

$$F \circ \Psi = \Psi \circ F_\Pi, \quad \Psi(u,v) = (u,v) + O(1)$$

を満たす逆 Böttcher 座標 $\Psi : W^s(J_\Pi, F_\Pi) \to W^s(J_\Pi, F)$ による ray の像としても表される。

例 1. $F(x,y) = (x^2 - 2y, y^2 - 2x)$. $(F_\Pi(z) = z^2, J_\Pi = \{|z| = 1\})$

$$\Psi(u,v) = (u + \frac{1}{v} + \frac{v}{u}, v + \frac{1}{u} + \frac{u}{v}).$$

は関数等式 $F \circ \Psi(u,v) = \Psi(u^2, v^2)$ を満たす逆 Böttcher 座標である。よって external ray $R(\phi,\theta)$, $(a = e^{2\pi i\phi} \in J_\Pi)$ は

$$(x,y) = (re^{2\pi i\theta} + \frac{1}{r}e^{-2\pi i(\phi+\theta)} + e^{2\pi i\phi}, re^{2\pi i(\phi+\theta)} + \frac{1}{r}e^{-2\pi i\theta} + e^{-2\pi i\phi}) \quad (r > 1).$$

と表されるので、その着地点は次のように書ける。

$$(x_0, y_0) = (e^{2\pi i\theta} + e^{-2\pi i(\phi+\theta)} + e^{2\pi i\phi}, e^{2\pi i(\phi+\theta)} + e^{-2\pi i\theta} + e^{-2\pi i\phi})$$

この parametrization は Uchimura, Withers [U, W] による $J(F) = K(F) \subset \{y = \overline{x}\}$ の parametrization と一致する。これから、$J(F)$ の内部の点には 6 本の external rays が着地することがわかる。

例 2. $B(x,y) = (x^2 - 2y - 4, y^2 - 2x^2 + 4y + 4)$. $(B_\Pi(z) = z^2 - 2,\ J_\Pi = \{-2 \le z \le 2\} \subset \mathbb{R})$

$$\Psi(u,v) = (u + \frac{1}{u} + \frac{v}{u}, v + \frac{v}{u^2}).$$

は関数等式 $B \circ \Psi(u,v) = \Psi(u^2, v^2 - 2u^2)$ を満たすので逆 Böttcher 座標である。よって external ray $R(\phi,\theta)$, $(a = 2\cos 2\pi\phi \in J(\Pi))$ は

$$(x,y) = \left(re^{2\pi i\theta} + \frac{1}{r}e^{-2\pi i\theta} + 2\cos 2\pi\phi, (re^{2\pi i\theta} + \frac{1}{r}e^{-2\pi i\theta})2\cos 2\pi\phi\right) \quad (r > 1)$$

で表され、その着地点は

$$(x_0, y_0) = (2\cos 2\pi\theta + 2\cos 2\pi\phi, 4\cos 2\pi\theta \cos 2\pi\phi)$$

で表される。これは Withers [W] による $J(B) = K(B) \subset \mathbb{R}^2$ の parametrization に一致する。$J(B)$ の内部の点には 4 本の rays が着地することがわかる。

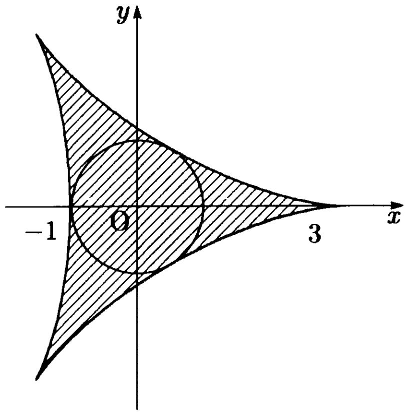

図 1: $K(F)$

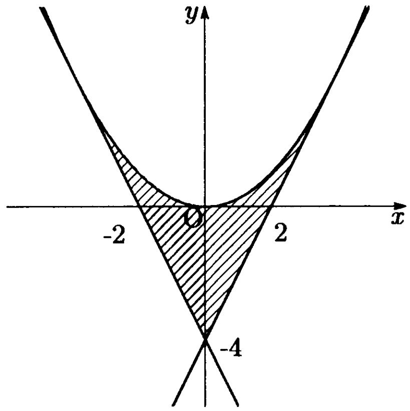

図 2: $K(B)$

$B(x,y)$ は 2 次関数 z^2-2 の対称積として得られる写像であることに注意すると、$p_c(z) = z^2 + c$ の対称積 $B_c(x,y) = (x^2-2y+2c, y^2+cx^2-2cy+c^2)$ に対しても同様の計算ができる $(B_{c,\Pi}(z) = p_c(z))$。p_c の逆 Böttcher 座標を ψ_c と書くと B_c の逆 Böttcher 座標は

$$\Psi_c(u,v) = (\psi_c(u) + \frac{v}{u}, \frac{v}{u}\psi_c(u))$$

と書けるので、B_c の external ray $R(a,\theta)$, $a \in J_\Pi = J(p_c)$ は

$$(x,y) = \left(\psi_c(re^{2\pi i\theta}) + a, a\psi_c(r^{2\pi i\theta})\right) \quad (r > 1)$$

と表され、その着地性は p_c の external rays の着地性から従う。

参考文献

[BJ] E. Bedford and M. Jonsson: Dynamics of regular polynomial endomorphisms of $\mathbb{C}^k$. Amer. J. Math. 122 (2000), pp. 153–212.

[U] K. Uchimura: The dynamical systems associated with Chebyshev polynomials in two variables. Int. J. Bif. Chaos 6 (1996), pp. 2611–2618.

[W] D. Withers: Folding polynomials and their dynamics. Amer. Math. Monthly 95 (1988), pp. 399–413.

11 Cyclic vectors in the Fock space

泉池　耕平
新潟大学大学院自然科学研究科

$\mathbb{C}$ を複素平面とし、$\mathcal{C}$ を多項式環とする。$Hol(\mathbb{C})$ によって整関数全体を表すこととする。X を $\mathbb{C}$ のある領域 Ω 上正則な関数からなる Banach 空間とする。そのとき $f\mathcal{C}$ が X で稠密ならば、関数 f を X の cyclic vector という。次の空間 $L^2_a(\mathbb{C})$ を Fock 空間と呼ぶ。

$$L^2_a(\mathbb{C}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}) : \|f\|^2_{L^2_a(\mathbb{C})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA(z) < \infty \right\}$$

定理 1 ([4]). $f \in L^2_a(\mathbb{C})$ とする。そのとき次は同値である。

(i) f は $L^2_a(\mathbb{C})$ の *cyclic vector* である。
(ii) f は $\mathbb{C}$ 上零点を持たない。

$\mathbb{C}$ の単位開円板 $\mathbb{D}$ 上正則な関数からなる Hardy 空間や Bergman 空間では、関数 f が cyclic vector であるならば、f は $\mathbb{D}$ 上零点を持たないが、この逆は成立しないことが知られている ([2],[3])。

参考文献

[1] X. Chen and K. Guo, *Analytic Hilbert Modules*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[2] P. Duren and A. Schuster, *Bergman spaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[3] J. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, Inc., 1981.

[4] K. H. Izuchi, *Cyclic vectors in the Fock space over the complex plane*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

12　超越整関数に対する Mañé の定理とその応用

木坂 正史 (京都大学大学院 人間・環境学研究科)

有理関数の複素力学系に対する「Mañé の定理」(の主張の一部) とは次のようなものである：

定理 (Mañé, 1993)　f を有理関数とし，$z_0 \in J(f)$ は放物型周期点ではなく，また

$$z_0 \notin \bigcup_{c \in \text{recurrent crit. pts}} \omega(c)$$

を満たすとする．このときある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在し，次が成立する：任意の $\varepsilon > 0$ に対して z_0 の近傍 U が存在し，任意の $n \in \mathbb{N}$ と $f^{-n}(U)$ の任意の連結成分 V について

$$\mathrm{diam}_{\mathrm{spherical}}(V) \leq \varepsilon, \quad \deg(f^n|_V) \leq N$$

が成立する．

本講演では f が超越整関数である場合に上記の定理がどのような形で成り立つかについて報告する．更にその応用として，超越整関数 f の定義する複素力学系の測度論的振る舞いについて述べる．特に次のような問題を考えたい：

問題　Lebesgue 測度に関して $\mathbb{C}$ 上ほとんど全ての点 z に対して $f^n(z) \to \infty$ となるような超越整関数 f は存在するか？

参考文献

[**M**]　Mañé, R.　On a theorem of Fatou. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* (N.S.) 24 (1993), no. 1, 1–11.

13 近放物型不動点を持つ複素力学系のくりこみ

宍倉光広　稲生啓行
(京都大学 大学院理学研究科)

正則関数 $f(z)$ の不動点 $(f(z_0) = z_0)$ は、その multiplier $\lambda = f'(z_0)$ が 1 のべき根のとき、**放物型 (parabolic)** であるという。ここでは特に、$\lambda = 1$ で、非退化すなわち $f''(z_0) \neq 0$ の場合を考える。リーマン球面上で座標変換をして不動点を無限遠点に持って行くことにより、無限遠点の近くで $\check{f}(z) = z+1+O(1/z)$ と書ける。ξ が十分大きいとき、正則関数 $\Phi_+ : \{z | Re\, z > \xi\} \to \mathbb{C}$, $\Phi_- : \{z | Re\, z < -\xi\} \to \mathbb{C}$ が存在し、これらは単射であって、関数方程式

$$\Phi_\pm(\check{f}(z)) = \Phi_\pm(z) + 1$$

が両辺が定義されるところで成立する。これらを **Fatou 座標**と呼ぶ。Fatou 座標は関数方程式を用いて定義域を拡張していくことが可能であり、ξ を大きく取り換えれば、$W_\pm = \{z | \pm Im\, z > |Re\, z| + \xi\}$ は両方の Fatou 座標の定義域に入る。$\Phi_-(W_\pm)$ で $E_f = \Phi_+ \circ \Phi_-^{-1}$ が定義されるが、これは $E_f(z+1) = E_f(z) + 1$ をみたすため、十分大きな η に対し、$\{z : |Im\, z| > \eta\}$ まで拡張される。これを **horn map** と呼ぶ。

もとの $f(z)$ に摂動を加えたとき、摂動の方向によっては再帰的軌道が突然増え、ジュリア集合が不連続に変化する。(特に、不動点の multiplier が単位円に接する方向で動く場合) Douady-Hubbard-Lavaurs によって、新しく生まれる再帰的軌道は、horn map を用いて記述できることが知られており、分岐の研究においては、horn map が重要な役割を果たす。特に、次のようなくりこみを考えることが必要になる。

$\Pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を $\Pi(z) = e^{2\pi i z}$ とすると、$\hat{E}_f : \{0 < |z| < e^{-2\pi\eta}\} \cup \{|z| > e^{2\pi\eta}\} \to \mathbb{C}^*$ を $\hat{E}_f \circ \Pi = \Pi \circ E_f$ をみたすように定義でき、それは 0 と ∞ でも正則に拡張できる。上述の再帰的軌道は (定数) $\times\, \hat{E}_f(z)$ の軌道と対応がつく。ただし、定数部分は摂動のしかたで大きく変化しうる。そこで、定数を調整して、0 が $\hat{E}_f$ が multiplier が 1 の不動点となるようにすることができるので、これを改めて $\mathcal{R}(f)$ と書くことにする。この対応 $f \rightsquigarrow \mathcal{R}(f)$ を**放物型くりこみ (parabolic renormalization)** と呼ぶ。これを繰り返したときに、列 $\{\mathcal{R}^n(f)\}$ が何らかの意味で有界にとどまるか、あるいは不動点に収束するかなどの問題が、放物型に近い力学系の性質を調べる上で重要な問題となる。(たとえば、不動点での線型化問題、測度正のジュリア集合の問題、衛星型くりこみの問題など)

くりこみを調べるには適切な関数空間の設定が必要になるが、

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ f : U_f \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \in U_f \text{ 開 } \subset \mathbb{C},\ f \text{ は } U_f \text{ で正則 },\ f(0)=0,\ f'(0)=1, \\ f : U_f \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^* \text{ は 1 を唯一の臨界値とする分岐被覆} \\ \text{臨界点は単純（局所次数が 2)、対数的分枝は持たない} \end{array} \right\}$$

と定義すると、$\mathcal{F}_0$ で前述の放物型くりこみ $\mathcal{R}$ が定義され、次が知られていた。

Theorem 1. $\mathcal{R}(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{F}_0$.

$f_{Koebe}(z) = z/(1-z)^2$ に対し、$f_\star = \mathcal{R}(f_{Koebe})$ とおくと、その定義域は単位円 $\mathbb{D}$ で、 $\mathcal{F}_0$ に属する。任意の $f \in \mathcal{R}(\mathcal{F}_0)$ は、ある等角写像 $\varphi : \mathbb{D} \to U_f$, $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$ により、$f = f_\star \circ \varphi^{-1}$ と書ける。

これにより、$\mathcal{R}(\mathcal{F}_0)$ は単葉関数の空間 $\mathcal{S} = \{\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 単葉正則 $f(0) = 0, f'(0) = 1\}$ と対応がつくので、適当な位相についてコンパクトになる。しかし、放物型不動点の摂動までも含めた写像の範囲まで拡げてくりこみを考えるとき、この空間では不十分であった。そこで、$\mathcal{F}_0$ のような完全な分岐被覆の条件をゆるめる必要が出てくる。そこで下記のような結果を得た。

Theorem 2. 3次多項式 $P(z) = z(1+z)^2$ とする。不動点 0 と臨界点 $-\frac{1}{3}$ を含むある領域 V で *quasidisk* になるものが存在し、次をみたす。

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ f = P \circ \varphi^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi : V \to \mathbb{C} \text{ は等角で、}\mathbb{C} \text{ 全体に擬等角拡張をもち、} \\ \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1 \end{array} \right\}$$

とするとき、$\mathcal{F}_0 \setminus \{\text{ 2次多項式 }\} \hookrightarrow \mathcal{F}_1$ であり、

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{F}_1.$$

さらに、真に大きい領域 $V' \supset \bar{V}$ が存在し、$\mathcal{R}(\mathcal{F}_1)$ に属する $f = P \circ \varphi^{-1}$ に対応する φ は V' まで等角に拡張される。

この証明には、一部、コンピュータによる数値計算を用いた評価を利用する。

Theorem 3. $\mathcal{F}_1$ は~~普遍~~タイヒミュラー空間 Punctured disk の

$$Teich(\mathbb{D}^*) = \{\psi : \mathbb{D}^* \to \mathbb{D}^* \text{ 擬等角},\ \psi(1) = 1,\ \psi(\pm i) = \pm i\}/\sim$$

（ただし、$\psi \sim \psi' \iff \psi|_{\partial\mathbb{D}} \sim \psi'|_{\partial\mathbb{D}}$）と 1 対 1 に対応し、$\mathcal{R}$ は正則になり、$\mathcal{R}(\mathcal{F}_1)$ はタイヒミュラー距離に関する有界集合になる。

Corollary 4. $\mathcal{R}$ は $\mathcal{F}_1$ で唯一の不動点（$\in \mathcal{F}_0$）を持ち、任意の $f \in \mathcal{R}(\mathcal{F}_1)$ から出発した反復合成 $\mathcal{R}^n(f)$ はこの不動点に指数的速さで収束する。

この定理を用いると、放物型不動点を摂動した近放物型不動点を持つ写像族についても、同様なくりこみを定義した場合、multiplier の偏角が係数の十分大きな連分数展開を持つ場合などに、無限回のくりこみが定義され、その列に関する一様な評価を得られることがわかる。

特別講演

無限次元タイヒミュラー空間上に作用する擬等角写像類群の力学系

藤川 英華

東京工業大学大学院情報理工学研究科

有限型リーマン面の場合とは異なり、無限型リーマン面に対するタイヒミュラー空間は無限次元になる。そしてリーマン面上の擬等角写像類群から導かれる、タイヒミュラー空間上の等距離自己写像群の力学系も複雑になる。この講演では、その力学系をリーマン面の双曲幾何学的観点から考察する。まず、一般的な定義を述べる.

§1 完備距離空間上の等長変換群の力学系

Xを距離dによる完備距離空間、$\mathrm{Isom}(X)$をX上の等長変換群とする。部分群$G \subset \mathrm{Isom}(X)$と点$x \in X$に対して

$$\Lambda(G,x) := \{y \in X \mid G\text{の相異なる元の列}\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\text{が存在して}\lim_{n\to\infty} d(g_n(x), y) = 0\}$$
$$\Lambda(G) := \bigcup_{x \in X} \Lambda(G,x)$$
$$Rec(G) := \{x \in X \mid x \in \Lambda(G,x)\}$$

と定義し、$\Lambda(G)$をGに対する極限集合という。さらに

$$Per(G) := \{x \in X \mid Stab_G(x) := \{g \in G \mid g(x) = x\}\text{が無限集合になる}\}$$

と定義する。このとき定義から$\Lambda(G) \supset Rec(G) \supset Per(G)$であり各々は$G$-不変であるが、実は$\Lambda(G) = Rec(G)$が成り立ち、これは閉集合である。よって$Rec(G) \supset \overline{Per(G)} \supset Per(G)$が常に成り立つ。極限集合の補集合$\Omega(G) := X - \Lambda(G)$は、$G$が真性不連続に作用する、$X$上の最大の開部分集合である。つまり任意の$x \in \Omega(G)$に対して$x$のある近傍$U$が存在して、$g(U) \cap U \neq \emptyset$を満たす$g \in G$は有限個である。このことから$\Omega(G)$を$G$に対する不連続領域という。

例えば X として

$$L^\infty(\mathbb{Z}) = \{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < \infty \}$$

を考える。両側シフト作用素 $\sigma: L^\infty(\mathbb{Z}) \to L^\infty(\mathbb{Z})$ $((x_n) \mapsto (x_{n+1}))$ は等距離線型作用素であり、上の G として $\langle \sigma \rangle$ をとる。このとき次が成り立つ

<u>定理1</u> ([11]) $L^\infty(\mathbb{Z}) \supsetneqq Rec(\sigma) \supsetneqq \overline{Per(\sigma)} \supsetneqq Per(\sigma)$

実際、次の2つの性質を満たす点 $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in L^\infty(\mathbb{Z})$ を構成することができる

(i) $\lim_{\ell\to\infty} \|\sigma^{3^\ell}(\xi) - \xi\|_\infty = 0$;

(ii) 任意の $m \in \mathbb{Z}-\{0\}$ に対してある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $\|\sigma^{km}(\xi) - \xi\|_\infty > \frac{1}{2}$。

このことより $\xi \in Rec(\sigma) - \overline{Per(\sigma)}$ が従う。この考察は次章以降の研究において重要な役割をはたす。

§2 タイヒミュラー空間上のタイヒミュラーモジュラー群の力学系

この講演では、リーマン面 R は双曲型で非可換な基本群をもつとする。R が解析的有限型であるとは、コンパクト面から高々有限個の点が抜けているときをいい、R が位相的有限型であるとは、解析的有限型面から高々有限個の円板が抜けているときを言う。また、R が (ε-) lower bound condition を満たすとは、R からカスプ近傍を除いたところの各点の単射半径がある定数以上 (ε 以上) であるときをいい、R が (M-) upper bound condition を満たすとは、R の部分領域 R^* が存在して、R^* の各点の単射半径は上から一様に有界 (M以下) で、基本群の間の準同型 $\pi_1(R^*) \to \pi_1(R)$ が全射であるときをいう。

タイヒミュラー空間とタイヒミュラーモジュラー群を定義する ([16] 参照)。リーマン面 R を固定する。このとき R 上の擬等角写像 f_1 と f_2 が同値であるとは、等角写像 $h: f_1(R) \to f_2(R)$ が存在して $f_2^{-1}\circ h\circ f_1$ が R の理想境界の各点を固定するホモトピーによって、恒等写像にホモトピックであることをいう。この同値類の集合を R のタイヒミュラー空間といい $T(R)$ で表す。$T(R)$ の2点 $[f_1], [f_2]$ に対してタイヒミュラー距離を $d_T([f_1],[f_2]) = \log K(f)$ で定める。ここで f は $f_2\circ f_1^{-1}$ のホモトピー類の中で最大歪曲率 $K(f)$ が最小

になるものである。d_T により、$T(R)$ は完備距離空間になる。

リーマン面 R 上の２つの自己擬等角写像 g_1, g_2 に対して、それらが同値であるとは、$g_2 \circ g_1^{-1}$ が R の理想境界の各点を固定するホモトピーによって恒等写像にホモトピックであるときをいう。この同値類の集合を R の擬等角写像類群といい、$MCG(R)$ で表す。各元 $[g] \in MCG(R)$ は $T(R)$ 上の等距離自己写像 $[g]_*$ ($[f] \mapsto [f \circ g^{-1}]$) を導く。つまり、$[g] \mapsto [g]_*$ により準同型 $\iota_T : MCG(R) \to \mathrm{Isom}(T(R))$ を得る。そこで、タイヒミュラーモジュラー群を $Mod(R) := \iota_T(MCG(R))$ で定める。ι_T はいくつかの例外を除いて単射である（[3][5]）。よって $Mod(R)$ と $MCG(R)$ は同一視できる。

リーマン面 R が解析的無限型の場合には、タイヒミュラー空間は無限次元で、各点 $p \in T(R)$ の、部分群 $G \subset Mod(R)$ の作用による軌道は離散的とは限らない。そこで $\Lambda(G)$ ($= Rec(G)$)、$Per(G)$ を考えることができる。これは無限次元特有の現象であり、解析的有限型面 R に対する有限次元タイヒミュラー空間上では常に $Mod(R)$ は真性不連続に作用する。つまり $T(R) = \Omega(Mod(R))$ である。また R が理想境界をもつときは常に $T(R) = \Lambda(Mod(R))$ である。R が第一種であるとはフックス群モデルが第一種（つまり R は理想境界をもたない）であるときをいう。まずはじめに次の特異現象がわかる.

<u>定理２</u>（[7]） R が lower bound condition を満たさなければ $T(R) = \Lambda(Mod(R))$.

この定理とは正反対な現象もおこる。R 上のコンパクト集合 C_1, C_2 に対して

$$G(R : C_1, C_2) := \{[g_0] \in MCG(R) \mid 任意の\ g \in [g_0]\ に対して\ g(C_1) \cap C_2 \neq \phi\}$$

とする。このとき次がわかる。

<u>定理３</u>（[8]） 第一種リーマン面 R が lower and upper bound conditions を満たすとする。このとき、任意の C_1, C_2 に対して $\Lambda(G(R : C_1, C_2)) = \phi$

R 上の単純閉測地線 c に対して

$$G(R : c) := \{[g] \in MCG(R) \mid g(c)\ は\ c\ にホモトピック\}$$

とする。このとき定理３から次が従う.

<u>系4</u>（[12]） 第一種リーマン面Rが lower and upper bound conditionsを満たすとする。このとき、任意の単純閉測地線cに対して $\Lambda(G(R:c))=\phi$.

<u>系5</u>（[12]） 第一種リーマン面Rが lower and upper bound conditionsを満たすとする。さらに、Rの種数、punctureの数のいずれかが正の有限であるとする。このとき、$\Lambda(Mod(R))=\phi$.

上では、$\Lambda(G)=\phi$ もしくは $\Omega(G)=\phi$ となるための十分条件を述べた。これらの中間の現象として次がある。

<u>定理6</u>（[7]） 第一種リーマン面Rが lower and upper bound conditionsを満たすとする。このとき、$\Omega(Mod(R))\neq\phi$ である.

Rが解析的有限型面の正規被覆面ならば、lower and upper bound conditionsは満たされるが、このときはさらに $\Lambda(Mod(R))\neq\phi$ もわかる。定理6は $\Omega(Mod(R))$の点の構成法を与える次の定理を用いて示される。

<u>定理7</u>（[8]） 第一種リーマン面Rは lower and upper bound conditionsを満たすとし、点$[f]\in T(R)$は次の性質をもつとする：$f(R)$上にある単純閉測地線cが存在して、その双曲的長さ$\ell(c)$は$f(R)$の length spectrum $LS(f(R))$ $(\subset\mathbb{R})$の重複度もこめた孤立点である。このとき $[f]\in\Omega(Mod(R))$である。

Rが解析的有限型面のときは $LS(R)\subset\mathbb{R}$ は離散的であるから、定理7より $T(R)=\Omega(Mod(R))$が従う。定理6に関連して、極限集合および不連続領域の形状について次が示されている.

<u>定理8</u>（[14]） 第一種リーマン面Rが lower and upper bound conditionsを満たすとする。このとき $\Omega(Mod(R))$は連結で $\Lambda(Mod(R))$は内点をもたない。

$Per(G)$の点を次の2つに分類する.

$$\Lambda^1_\infty(G)=\{p\in Per(G)\mid Stab_G(p)\text{ が無限位数の元をふくむ}\}$$
$$\Lambda^2_\infty(G)=Per(G)-\Lambda^1_\infty(G)$$

定理9 ([7]) リーマン面Rに対し、点$p\in T(R)$が部分群$G\subset Mod(R)$の極限集合$\Lambda(G)$の孤立点であるとする。このとき$p\in\Lambda^2_\infty(G)$である。

しかし、孤立点が存在するかどうかは分かっていない。$\Lambda^1_\infty(G)$に関しては次がある.

定理10 ([11][14]) リーマン面Rと部分群$G\subset Mod(R)$に対して、$\Lambda(G)\neq\phi$ならば、$\overline{\Lambda^1_\infty(G)}\subsetneqq\Lambda(G)$である。

定理10はR上のある単純閉測地線の列$\{C_n\}$に対して、その双曲的長さを、§1で述べた点$\xi=(\xi_n)\in L^\infty(\mathbb{Z})$を用いて変形することによって証明される。この定理はタイヒミュラーモジュラー群の力学系とクライン群の力学系の対比を与えている。

タイヒミュラー空間$T(R)$の基点oを固定するようなタイヒミュラーモジュラー群$Mod(R)$の元は、リーマン面R上の自己等角写像から導かれ、系4より特に任意の単純閉測地線cに対して$[g]\in Stab_{G(R:c)}(o)$の位数は有限である。つまりある$n\in\mathbb{N}$に対して$g^n=id$である。このnをRとcにのみ依る定数によって評価できる。

定理11 ([6]) リーマン面RはM-upper bound conditionを満たすとする。fをR上の自己等角写像で、ある単純閉測地線$c\subset R^*$に対して$f(c)=c$であるとする。このときfの位数$ord(f)$は

$$ord(f)<(e^M-1)\cosh\frac{\ell}{2}$$

を満たす。ここでℓはcの双曲的長さである。

実は次のことがわかる.

命題12 ([6]) リーマン面R上の自己等角写像fの位数が有限になるための必要十分条件はfが次のいずれかを固定することである：(i) R上のある単純閉測地線 (ii) Rのpuncture (iii) R上の一点.

RがM-upper bound conditionを満たし、上の(ii)の場合、$ord(f)<e^M-1$, (iii)の場合は$ord(f)<2\pi\cosh\frac{M}{2}$である.

また、$T(R)$ 上に固定点をもつとは限らない $G(R:c)$ の元に対しても、最大歪曲率が小さいときには周期的になることがわかる。$\ell(c)$ を c の双曲的長さとする。

<u>定理 13</u>（[9]）リーマン面 R は ε-lower and M-upper bound conditions を満たすとする。このとき、与えられた $\ell>0$ に対して、ある定数 $K_0 = K_0(\varepsilon, M, \ell) > 1$ が存在して次を満たす：c を R^* 上の単純閉測地線で $\ell(c) \leqq \ell$ を満たすものとし、$[f] \in G(R:c)$ は $K(f) < K_0$ を満たすものとする。このとき ある正の整数 $n \leqq N_0$ が存在して $[f^n] = [id]$ となる。ここで

$$N_0 = N_0(M, \ell) = -\frac{\ell}{\log(\tanh(D + 13.5))}$$

$$D = D(M, \ell) = \begin{cases} 2\,\mathrm{arccosh}\left(\dfrac{\sinh \frac{M}{2}}{\sinh \frac{\ell}{2}}\right) + M & (\ell \leqq M) \\ M & (\ell \geqq M) \end{cases}$$

§3 漸近的タイヒミュラー空間上の geometric automorphisms の力学系

まず、漸近的タイヒミュラー空間を定義する（[1][2][13] 参照）。リーマン面 R 上の擬等角写像 f が漸近的等角であるとは、任意の $\varepsilon>0$ に対して、あるコンパクト集合 $E \subset R$ が存在して、$R-E$ 上で $K(f) < 1+\varepsilon$ となることである。R 上の2つの擬等角写像 f_1, f_2 に対して、それらが漸近的同値であるとは、漸近的等角写像 $h: f_1(R) \to f_2(R)$ が存在して、$f_2 \circ h \circ f_1^{-1}$ が R の理想境界の各点を固定するホモトピーによって、恒等写像にホモトピックであることとする。このとき、この漸近的同値類の集合を R の漸近的タイヒミュラー空間といい、$AT(R)$ で表す。等角写像は漸近的等角であるので $T(R)$ から $AT(R)$ への自然な射影 $\pi: [f] \mapsto [[f]]$ が存在する。

リーマン面 R 上の擬等角写像 f に対して、その boundary dilatation $H^*(f)$ を次で定める：$H^*(f) = \inf\{K(f|_{R-E}) \mid E \subset R \text{ コンパクト}\}$。そして、$AT(R)$ の2点 $[[f_1]], [[f_2]]$ に対し、漸近的タイヒミュラー距離を $d_{AT}([[f_1]], [[f_2]]) = \inf\{\log H^*(g) \mid g \in [f_2 \circ f_1^{-1}]\}$ で

定める。このとき $AT(R)$ は完備距離空間になる。

タイヒミュラー空間の場合と同様に、各元 $[g] \in MCG(R)$ は $AT(R)$ 上の等距離自己写像 $[g]_*$ $([[f]] \mapsto [[f \circ g^{-1}]])$ を導く。つまり、$[g] \mapsto [g]_*$ により、準同型 $\iota_{AT}: MCG(R) \to \mathrm{Isom}(AT(R))$ を得る。しかし、ι_T とは異なり、ι_{AT} は、任意のリーマン面 R に対して、単射ではない。つまり、ある元 $[g] (\neq [id]) \in MCG(R)$ が存在して、任意の点 $[[f]] \in AT(R)$ に対して $[[f \circ g^{-1}]] = [[f]]$ となる。そこで、geometric automorphism group を $\mathcal{G}(R) = \iota_{AT}(MCG(R))$ で定義する。

この章では、まずはじめに $MCG(R)$ の $AT(R)$ への作用の非自明性について考察する。$MCG(R)$ の $AT(R)$ への作用が非自明であるとは、ある元 $[g] \in MCG(R)$ とある点 $[[f]] \in AT(R)$ が存在して $[g]_*([[f]]) \neq [[f]]$ となること、つまり $f \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ が $f(R)$ 上のどんな漸近的等角写像にもホモトピックでないことである。[15] では、$MCG(R)$ が $AT(R)$ に自明に作用する無限型リーマン面 R が構成された。そこで、$MCG(R)$ が $AT(R)$ に非自明に作用するための、リーマン面に対する十分条件を与える。

<u>定理14</u>（[10]） リーマン面 R 上に無限個の単純閉測地線が存在して、それらの双曲的長さは上から一様に有界であるとする。このとき $MCG(R)$ の $AT(R)$ への作用は非自明である。

この定理よりただちに次がわかる。

<u>系15</u> リーマン面 R は位相的無限型で、upper bound condition を満たすとする。このとき $MCG(R)$ の $AT(R)$ への作用は非自明である.

upper bound condition を満たすとは限らないリーマン面 R に対しても $MCG(R)$ の元が非自明な作用を導くための十分条件がある。単純閉曲線 c に対しては、$\ell(c)$ を c にホモトピックな測地線の双曲的長さとする。

定理16 ([4][10]) gをリーマン面R上の擬等角写像とする。ある$\delta>1$が存在して、任意のコンパクト集合$E\subset R$に対して$R-E$上に

$$\frac{\ell(g(c))}{\ell(c)} \leqq \frac{1}{\delta} \quad \text{または} \quad \frac{\ell(g(c))}{\ell(c)} \geqq \delta$$

を満たす単純閉測地線cが存在するとする。このときgにホモトピックな漸近的等角写像は存在しない。特に$[g]\in MCG(R)$の$AT(R)$への作用は、非自明である.

次に、$T(R)$上の$\mathrm{Mod}(R)$の力学系と同様に、$AT(R)$上のgeometric automorphism group $\mathcal{G}(R)$の力学系を考察する。$\mathcal{G}(R)$に対する$AT(R)$上の極限集合を$\Lambda_{AT}(\mathcal{G}(R))$で表す。$R$がlower bound conditionを満たさないときは、$\mathcal{G}(R)$の作用についても定理2と同様のことが成り立つ。

定理17 ([10]) リーマン面Rがlower bound conditionを満たさなければ$AT(R)=\Lambda_{AT}(\mathcal{G}(R))$が成り立つ。

一方、Rがlower and upper bound conditionsを満たすときは、$\mathrm{Mod}(R)$の$T(R)$上の力学系と、$\mathcal{G}(R)$の$AT(R)$上の力学系は異なる。

定理18 ([10]) あるリーマン面Rでlower and upper bound conditionsを満たすものが存在して、$\Lambda(\mathrm{Mod}(R))=\phi$, $\Lambda_{AT}(\mathcal{G}(R))\neq\phi$が成り立つ。

実際、R_0を解析的有限型面の正規被覆面で、被覆変換群がR_0の等角写像ϕから生成される巡回群$\langle\phi\rangle$であるものとし、$p\in R_0$とするとき、定理18は$R=R_0-\{p\}$に対して成り立つ。前半の主張は系5から従う。後半の主張は$\Lambda_{AT}(\mathcal{G}(R_0))\neq\phi$と同値であり、これは$\Lambda_{AT}(\mathcal{G}(R_0))$の点を次のように構成することによって示される。

R_0 上の単純閉測地線の列 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ で、$\phi(C_n)=C_{n+1}$ となるものをとる。R_0 上の擬等角写像 f を $\ell(f(C_n))=1+\xi_n$ を満たすものとする。ここで、$\xi=(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l^\infty(\mathbb{Z})$ は §1 で述べたものである。このとき定理1 (i) より $\tau=[f]\in T(R_0)$ に対して $\lim_{k\to\infty} d_T([\phi^{3^k}]_*(\tau),\tau)=0$ がわかる。よって $\hat{\tau}=[[f]]\in AT(R_0)$ に対して $\lim_{k\to\infty} d_{AT}([\phi^{3^k}]_*(\hat{\tau}),\hat{\tau})=0$ がわかる。

$\hat{\tau}\in\Lambda_{AT}(\mathcal{G}(R_0))$ を結論づけるためには、$[\phi^{3^k}]_*$ $(k=1,2,\cdots)$ が $\mathcal{G}(R_0)$ の相異なる元であることが必要であるが、実際 $[\phi^{3^k}]_*(\hat{\tau})\neq[\phi^{3^m}]_*(\hat{\tau})$ $(k\neq m)$ である。このことは $\psi_{m,k}:=f\circ\phi^{-(3^m-3^k)}\circ f^{-1}$ に定理16を適用することによって得られる。

参考文献

[1] C.J. Earle, F.P. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part I: The complex structure*, Contemp. Math. **256** (2000), 17-38

[2] C.J. Earle, F.P. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part II: The metric structure*, Contemp. Math. **355** (2004), 187-219

[3] C.J. Earle, F.P. Gardiner and N. Lakic, *Teichmüller spaces with asymptotic conformal equivalence*, preprint.

[4] C.J. Earle, V. Markovic and D. Saric, *Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller space*, Contemp. Math. **311** (2002), 87-105

[5] A. Epstein, *Effectiveness of Teichmüller modular groups*, Contemp. Math. **256** (2000), 69-74

[6] E. Fujikawa, *The order of conformal automorphisms of Riemann surfaces of infinite type*, Kodai Math. J. **26** (2003), 16-25 (— supplement, Perspectives of Hyperbolic Spaces, RIMS Kokyuroku 1329 (2003), 62-68.)

[7] E. Fujikawa, *Limit sets and regions of discontinuity of Teichmüller modular groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 117-126.

[8] E. Fujikawa, *Modular groups acting on infinite dimensional Teichmüller spaces*, Contemp. Math. **355** (2004), 239-253.

[9] E. Fujikawa, *The order of periodic elements of Teichmüller modular groups*, Tōhoku Math. J. **57** (2005) no.1, to appear.

[10] E. Fujikawa, *The action of geometric automorphisms of asymptotic Teichmüller spaces*, preprint.

[11] E. Fujikawa and K. Matsuzaki, *Recurrent and periodic points for isometries of L^∞ spaces*, Indiana Univ. Math. J., to appear.

[12] E. Fujikawa, H. Shiga and M. Taniguchi, *On the action of the mapping class group for Riemann surfaces of infinite type*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 1069-1086.

[13] F. P. Gardiner and N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller Theory*, Mathematical Surveys and Monographs **76**, AMS 2000.

[14] K. Matsuzaki, *Dynamics of Teichmüller modular groups and general topology of moduli spaces*, preprint

[15] K. Matsuzaki, *An example of the quasiconformal mapping class group acting trivially on the asymptotic Teichmüller space*, preprint.

[16] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, John Wiley & Sons, 1988.

14 Quasiconformal extension of quasiregular biholomorphic mappings in several complex variables

濱田　英隆（九州産業大学工学部）

Becker [1] showed that if a holomorphic function f on the unit disc U satisfies

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{c}{1-|z|^2} \quad (0 < c < 1),$$

then f is univalent on U and extends to a quasiconformal homeomorphism of $\mathbf{C}$ onto itself. Pfaltzgraff generalized the above result and showed that if a quasiregular locally biholomorphic mapping f on the Euclidean unit ball $\mathbf{B}^n$ in $\mathbf{C}^n$ satisfies

$$\|[Df(z)]^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| \leq \frac{c}{1-\|z\|^2} \quad (0 < c < 1),$$

then f is biholomorphic on $\mathbf{B}^n$ [11] and extends to a quasiconformal homeomorphism of $\mathbf{R}^{2n}$ onto itself [12]. Ren-Ma [13] generalized this result. Hamada-Kohr [9] gave a sufficient condition that the first element of a normalized univalent subordination chain on $\mathbf{B}^n$ which is quasiconformal can be extended to a quasiconformal homeomorphism of $\mathbf{R}^{2n}$ onto itself. This result contains the above result as a special case.

On the other hand, Becker-Pommerenke [2] gave a sufficient condition that the first element of a normalized subordination chain $f(z,t)$ for $t \in [0,\alpha]$, where $\alpha > 0$, on the unit disc U in $\mathbf{C}$ can be extended to a quasiconformal homeomorphism on a neighbourhood of $\overline{U}$. As an application, they showed that if f is a univalent holomorphic function on U such that $f(U)$ is a Jordan domain and satisfies

$$\limsup_{|z|\to 1-0}(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < 1,$$

then f can be extended to a quasiconformal homeomorphism on a neighbourhood of $\overline{U}$. Moreover, they showed that f can be extended to a quasiconformal homeomorphism of $\overline{\mathbf{C}}$ onto itself, where $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ is the extended complex plane.

In this talk, we will give a sufficient condition that a normalized quasiconformal biholomorphic mapping f on $\mathbf{B}^n$ which can be imbedded as the first element of a subordination chain for $[0,\alpha]$, where $\alpha > 0$, can be extended to a quasiconformal homeomorphism on a neighbourhood of $\overline{\mathbf{B}^n}$ ([10]). Moreover, we can show that f can be extended to a quasiconformal homeomorphism of $\overline{\mathbf{R}^{2n}}$ onto itself, where $\overline{\mathbf{R}^{2n}} = \mathbf{R}^{2n} \cup \{\infty\}$ is the one point compactification of $\mathbf{R}^{2n}$. As a corollary, we obtain the following theorem [10].

Theorem 1 *Let $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{C}^n$ be a normalized holomorphic mapping on $\mathbf{B}^n$ which is continuous and injective on $\overline{\mathbf{B}^n}$, quasiregular on $\mathbf{B}^n$ such that*

$$\limsup_{\|z\|\to 1-0} \|(1-\|z\|^2)[Df(z)]^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| < 1.$$

Then f extends to a quasiconformal homeomorphism of $\overline{\mathbf{R}^{2n}}$ onto itself.

For other results on quasiconformal extension in several complex variables, see [3], [4], [7] and [8]. For recent results on subordination chains in several complex variables, see also [5] and [6].

References

[1] J. Becker, *Löwnersche differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte funktionen,* J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.

[2] J. Becker and C. Pommerenke, *Über die quasikonforme Fortsetzung schlichter Funktionen*, Math. Z. **161** (1978), 69–80.

[3] A.A. Brodskii, *Quasiconformal extension of biholomorphic mappings,* in *Theory of Mappings and Approximation of Functions*, Naukova Dunka, Kiew, 1983, pp. 30–34.

[4] M. Chuaqui, *Applications of subordination chains to starlike mappings in* $\mathbf{C}^n$, Pacif. J. Math. **168** (1995), 33–48.

[5] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math. **54** (2002), 324–351.

[6] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and T. J. Suffridge, *Extension operators for locally univalent mappings,* Michigan Math. J. **50** (2002), 37–55.

[7] H. Hamada, *Starlike mappings on bounded balanced domains with C^1-plurisubharmonic defining functions*, Pacif. J. Math. **194** (2000), 359–371.

[8] H. Hamada and G. Kohr, *The growth theorem and quasiconformal extension of strongly spirallike mappings of type α*, Complex Variables **44** (2001), 281–297.

[9] H. Hamada and G. Kohr, *Loewner chains and quasiconformal extension of holomorphic mappings*, Ann. Polon. Math. **81** (2003), 85–100.

[10] H. Hamada and G. Kohr, *Quasiconformal extension of biholomorphic mappings in several complex variables*, to appear in Journal d'Analyse Mathematique.

[11] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in* $\mathbf{C}^n$, Math. Ann. **210** (1974), 55–68.

[12] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in* $\mathbf{C}^n$, Ann. Acad, Scie. Fenn. Ser. A I Math. **1** (1975), 13–25.

[13] F. Ren and J. Ma, *Quasiconformal extension of biholomorphic mappings of several complex variables*, J. Fudan Univ. Natur. Sci. **34** (1995), 545–556.

15 A classification of rational proper holomorphic maps from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$

濱田 英隆（九州産業大学工学部）

Let $n \geq 2$. Let $\mathbf{B}^n$ denote the Euclidean unit ball in $\mathbf{C}^n$. We will talk about the classification problem of rational proper holomorphic maps from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^N$, when $N \leq 2n$. Proper holomorphic maps f, g : $\mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^N$ are said to be equivalent, if there exist $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B}^n)$ and $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B}^N)$ such that $f = \tau \circ g \circ \sigma$.

There are no proper holomorphic maps from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^N$ for N less than n. Alexander [1] proved that a proper holomorphic map of $\mathbf{B}^n$ to itself is actually biholomorphic. Webster [11] has proved that a proper holomorphic map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{n+1}$ that is C^3 up to the boundary must be equivalent to a linear imbedding if $n \geq 3$. By the results of Faran [5] and Forstnerič [6], a proper holomorphic map which is C^{N-n+1} up to the boundary must be spherically equivalent to a linear imbedding when N is at most $2n-2$. Huang [9] showed the same result for a proper holomorphic map that is C^2 up to the boundary by using a totally different approach from all previous works.

When $n = 2$, $N = 3$, Faran [4] proved that a proper holomorphic map that is C^3 up to the boundary must be spherically equivalent to one of four monomial maps. Cima-Suffridge [2] showed the same result for a proper holomorphic map that is C^2 up to the boundary. When $n \geq 3$, $N = 2n-1$, the author determined monomial proper maps [7]. Huang-Ji [10] showed that any rational proper holomorphic map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n-1}$ with $n \geq 3$ is equivalent either to the standard linear map $L(z) = (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$ or to the Whitney map

$$W(z) = (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n z_1, z_n z_2, \ldots, z_n z_n).$$

When $n = 2$, $N = 4$, D'Angelo [3] and the author [7] determined monomial proper maps from $\mathbf{B}^2$ into $\mathbf{B}^4$. D'Angelo [3] showed that the proper holomorphic maps

$$F_\theta(z) = (z_1, \ldots, z_{n-1}, (\cos\theta) z_n, (\sin\theta) z_1 z_n, \ldots, (\sin\theta) z_n z_n)$$

from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$ are inequivalent for all θ with $0 \leq \theta \leq \pi/2$. When $n \geq 3$, $N = 2n$, the author determined monomial proper maps [7]. He showed that any monomial proper map from $\mathbf{B}^3$ into $\mathbf{B}^6$ is equivalent to one of the following maps.

(i) $F_\theta(z), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

(ii) $(z_1^2, z_2^2, z_3^2, \sqrt{2} z_1 z_2, \sqrt{2} z_2 z_3, \sqrt{2} z_1 z_3)$,

(iii) $(z_1^2, \sqrt{2} z_1 z_2, z_2^2, z_1 z_3, z_2 z_3, z_3)$.

He also showed that any monomial proper map from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$ with $n \geq 4$ is equivalent to F_θ for some θ with $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

In this talk, we will show the following theorem [8].

Theorem 1 *Any rational proper holomorphic map from* $\mathbf{B}^n$ *into* $\mathbf{B}^{2n}$ *with* $n \geq 4$ *is equivalent to* F_θ *for some* θ *with* $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Since any rational proper holomorphic map H from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$ induces naturally a holomorphic map F between the Heisenberg hypersurfaces $\partial\mathbf{H}_n$ and $\partial\mathbf{H}_{2n}$, it suffices for us to investigate such a map F. For the proof, we use the following normal form (Huang [9, Lemma 5.3]) which hold in arbitrary codimension $N-n$.

Lemma 1 *After composing* F *with automorphisms of the Siegel upper-half spaces* $\mathbf{H}_n$ *and* $\mathbf{H}_N$, *the map*

$$F = (\tilde{f}, g) = (f, \phi, g) = (f_1, \ldots, f_{n-1}, \phi_1, \ldots, \phi_{N-n}, g)$$

can be assumed to take the following normal form $(N > n > 1)$:

$$(1) \qquad f = z + \frac{\sqrt{-1}}{2} a^{(1)}(z) w + o_{wt}(3), \phi = \phi^{(2)}(z) + o_{wt}(2), g = w + o_{wt}(4),$$

with

$$(2) \qquad \left\langle \bar{z}, a^{(1)}(z) \right\rangle |z|^2 = |\phi^{(2)}|^2.$$

References

[1] H. Alexander, Proper holomorphic mappings in $\mathbf{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **26,** (1977) 137-146.

[2] J. Cima, T.J. Suffridge, Proper holomorphic mappings from the two-ball to the three-ball, Trans. Amer. Math. Soc. **311,** (1989) 227-239.

[3] J. P. D'Angelo, Proper holomorphic maps between balls of different dimensions, Mich. Math. J. **35,** (1988) 83–90.

[4] J. Faran, Maps from the two ball to the three ball, Invent. Math. **68,** (1982) 441–475.

[5] J. Faran, The linearity of proper holomorphic maps between balls in the low codimensional case, J. Diff. Geom. **24,** (1986) 15–17.

[6] F. Forstnerič, Proper holomorphic maps from balls, Duke Math. J. **53,** (1986) 427-441.

[7] H. Hamada, Monomial proper maps between balls of different dimensions, Bull. Kyushu Kyoritsu Univ. Fac. Engineer. **15,** (1991) 41-43.

[8] H. Hamada, Rational proper holomorphic maps from $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n}$, to appear in Mathematische Annalen.

[9] X. Huang, On a linearity problem of proper holomorphic maps between balls in complex spaces of different dimensions, J. Diff. Geom. **51,** (1999) 13–33.

[10] X. Huang, S. Ji, Mapping $\mathbf{B}^n$ into $\mathbf{B}^{2n-1}$, Invent. Math. **145,** (2001) 219–250.

[11] S. Webster, On mapping an n-ball into an $(n+1)$-ball in the complex space, Pac. J. Math. **81,** (1979) 267–272.

16 トロイダル群上の調和関数について

風間英明　(九州大学大学院数理学研究院)

梅野高司　(九州産業大学工学部)

連結な複素リー群 X が非定数正則関数をもたないときにトロイダル群という．定義より X は複素可換リー群であり，複素次元を n とすると，$\mathbb{C}^n$ の離散的部分加群 $\Gamma = \mathbb{Z}\{e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_q\}$ が存在して，$X \cong \mathbb{C}^n/\Gamma$ となる．ここで $e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_q \in \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}$-線形独立，$1 \leq q \leq n$ である．この場合 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を type q と呼ぶ．

$v_i = \sqrt{-1}e_i,\ \ q+1 \leq i \leq n,\ \ \beta_i = \operatorname{Im} v_i,\ \ 1 \leq i \leq n$ とおくと $\beta_1, \cdots \beta_n$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立．そこで $z \in \mathbb{C}^n$ に対し，二つの座標を

$$(1)\quad z = z_1\beta_1 + \cdots + z_n\beta_n$$
$$= t_1e_1 + \cdots + t_ne_n + t_{n+1}v_1 + \cdots + t_{2n}v_n.$$

と定義すると

$$(2)\quad t_i = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(-\sum_{j=1}^{n}\overline{v}_{ij}z_j + \sum_{j=1}^{n}v_{ij}\overline{z}_j),$$
$$t_{n+i} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(z_i - \overline{z}_i).$$

$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^{n+q}} f^m(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^{n+q}} a^m(t^{2''})\exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >$ を トロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の C^∞-関数とする．ここで

$t = {}^t(t_1, \ldots, t_{2n}),\ \ \tilde{t} = {}^t(t_1, \ldots, t_{n+q}),\ \ t^{2''} = {}^t(t_{n+q+1}, \ldots, t_{2n})$ である．すると

$$(3)\quad \frac{\partial f^m(t)}{\partial z_i} = \pi(-\sum_{j=1}^{n}\overline{v}_{ji}m_j + m_{n+i})a^m(t^{2''})\exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >)\ \ (1 \leq i \leq q),$$
$$= \sqrt{-1}(\pi m_i a^m(t^{2''}) - \frac{1}{2}\frac{\partial a^m(t^{2''})}{\partial t_{n+i}})\exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >)\ \ (q+1 \leq i \leq n),$$

$$(4)\quad \frac{\partial f^m(t)}{\partial \overline{z}_i} = \pi(\sum_{j=1}^{n}v_{ji}m_j - m_{n+i})a^m(t^{2''})\exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >)\ \ (1 \leq i \leq q),$$
$$= \sqrt{-1}(\pi m_i a^m(t^{2''}) + \frac{1}{2}\frac{\partial a^m(t^{2''})}{\partial t_{n+i}})\exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >)$$
$$(q+1 \leq i \leq n).$$

したがって

$$(5)\quad \frac{\partial^2 f^m(t)}{\partial z_i \partial \overline{z}_i} = -\pi^2|K_{m,i}|^2 a^m(t^{2''})\exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >)\ \ (1 \leq i \leq q),$$
$$= (\pi^2 m_i^2 - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial t_{n+i}^2})a^m(t^{2''})\exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >)\ \ (q+1 \leq i \leq n),$$

ここで $K_{m,i} = \sum_{j=1}^{n} v_{ji}m_j - m_{n+i}\ \ (1 \leq i \leq q)$.

Proposition 1

複素可換リー群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ がトロイダル群 $\Longleftrightarrow$

任意の $m \neq 0$ に対し, $\exists i$ $(1 \leq i \leq q)$ satisfying $K_{m,i} \neq 0$.

Definition 2

C^∞-関数 f on $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が pluriharmonic if

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} = 0, \text{ for any } 1 \leq i, j \leq n.$$

Theorem 3

トロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の pluriharmonic 関数は $\mathbb{R}\{t_{n+q+1}, \dots, t_{2n}\}$ 上の linear polynomial である.

Definition 4

トロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の C^∞ 関数 $f(z)$ が β-harmonic if

$$\Delta_\beta f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_i} = 0.$$

$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n+q}} f^m(t)$ が β-harmonic とすると (5) より

$$\Delta_\beta f^m(t) = (-\pi^2(\sum_{i=1}^{q} |K_{m,i}|^2 + \sum_{i=q+1}^{n} m_i^2) a^m(t^{2''})$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{i=q+1}^{n} \frac{\partial^2 a^m(t^{2''})}{\partial t_{n+i}^2}) \exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >) = 0$$

したがって

$$\Delta a^m = \sum_{i=q+1}^{n} \frac{\partial^2 a^m}{\partial t_{n+i}^2} = 4\pi^2(\sum_{i=1}^{q} |K_{m,i}|^2 + \sum_{i=q+1}^{n} m_i^2) a^m$$

とくに $\Delta a^0(t^{2''}) = 0$.

すなわち $a^0(t^{2''})$ は $\mathbb{R}\{t_{n+q+1}, \dots, t_{2n}\}$ 上の調和関数である.

$$\tilde{m} = {}^t\left(\dots, \sqrt{\frac{1}{n-q}\sum_{i=1}^{q} |K_{m,i}|^2 + m_{q+j}^2}, \dots\right), \ (j = 1, \dots, n-q), \text{ とおき}$$

$a^m(t^{2''}) = \exp(2\pi < \tilde{m}, t^{2''} >)$ とすると

$$\Delta a^m = 4\pi^2(\sum_{i=1}^{q} |K_{m,i}|^2 + \sum_{i=q+1}^{n} m_i^2) a^m.$$

そこで

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n+q}} \frac{1}{\exp(||m||)} a^m(t^{2''}) \exp(2\pi\sqrt{-1} < m, \tilde{t} >),$$

$||m|| = \max\{|m_i|; i = 1, \dots, n+q\}$ とすると

$f(t)$ はトロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の β-harmonic 関数.

17 非定数有理型関数が存在しないトロイダル群について

風間英明　（九州大学大学院数理学研究院）

梅野高司　（九州産業大学工学部）

トロイダル群の $\bar{\partial}$-cohomology 群に関して次の定理がある.

Theorem 1 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ を type q のトロイダル群とすると次の 2 条件は同値である.

(1) $\exists a > 0$ s.t. $\displaystyle\sup_{m\in\mathbb{Z}^{n+q}\setminus\{0\}} \exp(-a\|m^*\|)/K_m < \infty$,

ここで, $\|m^*\| = \max\{|m_i|; 1 \le i \le n\}$, $K_m := \max\{|K_{mi}|; 1 \le i \le q\}$.

(2) $$H^p(X,\mathcal{O}) \cong \bigwedge^p \mathbb{C}\{d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_q\} \ (1 \le p \le q)$$
$$= 0 \ (p > q).$$

Definition 2 Theorem 1 の条件 (1) または (2) を満たすトロイダル群をコホモロジー有限型のトロイダル群という.

$X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ を type q のトロイダル群, $f(z)$ を X 上の有理型関数とする. すると $f(z)$ は $\Gamma \subset G(f)$ を満たす周期群 $G(f)$ をもつ $\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数である.

Theorem 2 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ をコホモロジー有限型のトロイダル群, $f(z)$ を $\Gamma \subset G(f)$ を周期群にもつ $\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数とする. すると

$$\exists h, k \in H^0(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \text{ with } (h,k) = 1 \text{ かつ } f(z) = \frac{h(z)}{k(z)}.$$

さらに $\exists L_\lambda(z)(\lambda \in \Gamma)$: linear exponent systems s.t.

(1) $h(z+\lambda) = h(z)\exp(L_\lambda(z))$ and

(2) $k(z+\lambda) = k(z)\exp(L_\lambda(z))$,

for all $z \in \mathbb{C}^n$ and $\lambda \in \Gamma$.

すなわち $h(z)$, $k(z)$ は linear exponent systems $\{L_\lambda(z)\}$ で定義される line bundle の正則切断である.

次の完全系列を考える.

$$\to H^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota} H^2(X,\mathcal{O}) \to$$

Definition 3 $\mathrm{NS}\,(X) := c_1 H^1(X,\mathcal{O}^*)$ を Néron-Severi 群と呼ぶ.

$E \in \mathrm{NS}\,(X)$ とすると $\iota(E) = 0$ in $H^2(X,\mathcal{O})$.

$E \in H^2(X,\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$-valued skew-symmetric $(n+q)\times(n+q)$-行列だから,

$$E = [E_{ij}; 1 \le i,j \le n+q] = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ -{}^tE_2 & E_3 \end{bmatrix}, \ E_1 \in \mathbb{Z}^{n\times n}, E_3 \in \mathbb{Z}^{q\times q} \text{ と書ける.}$$

次の定理はトロイダル群上の Néron-Severi 群を特徴付けるものである.

Theorem 4 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ を $P = [I_n, V]$ を周期行列とするトロイダル群とする..

$E \in H^2(X, \mathbb{Z})$ belongs to $\mathrm{NS}(X) \iff {}^tVE_1V + {}^tE_2V - {}^tVE_2 + E_3 = 0$

Lemma 5 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ をコホモロジー有限型のトロイダル群, L を位相的に自明な X 上の line bundle とする.

$\exists s \neq 0 \in H^0(X, \mathcal{O}(L)), \implies L$ は解析的に自明.

すると次の定理を得る.

Theorem 6 $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ をコホモロジー有限型のトロイダル群とする.

Néron-Severi 群 $\mathrm{NS}\,(X) = 0, \implies X$ 上に非定数有理型関数は存在しない.

Definition 7 α と β を二つの代数的数とする.

$\mathbb{Q}(\alpha)$ と $\mathbb{Q}(\beta)$ が linearly disjoint over $\mathbb{Q}$ if

環準同型 $\mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}(\beta) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ が同型.

$$x \otimes y \quad \longrightarrow \quad xy$$

Theorem 8

$X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ を $P = [I_n, V]$ を周期行列とする複素可換リー群で次の条件を満たしているとする.

(i) $V = [v_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q] = [\sqrt{-1}\beta_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q, \beta_{ij} \in \mathbb{R}]$

(ii) $q \geq 2$ であり, β_{ij} は $[\mathbb{Q}(\beta_{ij} : \mathbb{Q}] \geq 2$ を満たす代数的数.

(iii) $\mathbb{Q}(\beta_{ij})$ と $\mathbb{Q}(\beta_{kl})$ は linearly disjoint for each $(i,j) \neq (k,l)$.

すると X は次の性質を満たすトロイダル群である.

(1) X はコホモロジー有限型.

(2) $NS(X) = 0$

従って X は非定数有理型関数をもたないトロイダル群である.

Theorem 9

各 $n \geq 2$ に対し, n 次元の, 非定数有理型関数をもたないトロイダル群が存在する.

Example 10(Siegel)

$$X = \mathbb{C}^2/\Gamma,$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-2} & \sqrt{-5} \\ 0 & 1 & \sqrt{-3} & \sqrt{-7} \end{bmatrix}$$

Example 11

$$X = \mathbb{C}^3/\Gamma,$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{-2} & \sqrt{-7} \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{-3} & \sqrt{-11} \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{-5} & \sqrt{-13} \end{bmatrix}$$

18 Two-generator subgroups of $SO(3)$

井上克己(金沢大・医)

Gを$SO(3)$の部分群とする。Gの固定点集合$F_G = \{\xi \in S^2 \mid g(\xi) = \xi, \exists g \in G - \{id\}\}$と、その部分集合$F_G^k = \{\xi \in F_G \mid g(\xi) = \xi, \# g = k\}$ ($k = 2,3,\ldots,+\infty$)を考える。S^2の北極、南極、赤道をそれぞれN,S,Eとおく。$SO(3)$の非離散部分群Gに対し次の3つのクラスを考える。

$G \in C_I \Leftrightarrow \exists h \in SO(3)\ s.t.\ F_{hGh^{-1}} = h(F_G) = \{N,S\}.$

$G \in C_{II} \Leftrightarrow \exists h \in SO(3)\ s.t.\ cl(h(F_G)) = \{N,S\} \cup E,\ h(F_G) \cap E \subset h(F_G^2),$
$h(F_G^k) \cap E = \phi\ for\ k \geq 3.$

$G \in C_{III} \Leftrightarrow cl(F_G^\infty) = S^2.$

命題 1. *$SO(3)$の非離散部分群はC_IかC_{II}かC_{III}に属する。*

非自明な要素$f,g \in SO(3)$に対しfの axis とgの axis のなす角を$\theta(f,g)$ ($\theta(f,g) \in [0,\pi/2]$)で表す。$SO(3)$の 2 元生成部分群$\langle f,g \rangle$ ($\# f \geq \# g$)は$\theta(f,g)$および$\# f, \# g$により次のように分類される。

命題 2. *f,g を$SO(3)$の非自明な要素とすると以下がなりたつ。*

[I] *離散群となる場合*

(1) $\theta(f,g) = 0$ *で*$\# f < \infty$ *ならば*$\langle f,g \rangle$ *は有限巡回群をなす。*

(2) (a) $\theta(f,g) = \pi/2$ *で*$\# f < \infty, \# g = 2$ *あるいは*

(b) $\theta(f,g)/2\pi \in Q - \{0\}$ *で*$\# f = \# g = 2$ *ならば*$\langle f,g \rangle$ *は正二面体群をなす。*

(3) (a) $\theta(f,g) = \arctan 2\sqrt{2}$ *で*$\# f = \# g = 3$ *あるいは*

(b) $\theta(f,g)=\arctan\sqrt{2}$ で$\#f=3,\#g=2$ ならば$\langle f,g\rangle$ は正四面体群をなす。

(4) (a) $\theta(f,g)=\pi/2$ で$\#f=\#g=4$ あるいは

(b) $\theta(f,g)=\arctan\sqrt{2}$ で$\#f=4,\#g=3$ あるいは

(c) $\theta(f,g)=\pi/4$ で$\#f=4,\#g=2$ あるいは

(d) $\theta(f,g)=\arctan 1/\sqrt{2}$ で$\#f=3,\#g=2$ ならば$\langle f,g\rangle$ は正六面体群をなす。

(5) (a) $\theta(f,g)=\arctan 2$ で$\#f=\#g=5$ あるいは

(b) $\theta(f,g)=\arctan(3-\sqrt{5})$ で$\#f=5,\#g=3$ あるいは

(c) $\theta(f,g)=\arctan(3+\sqrt{5})$ で$\#f=5,\#g=3$ あるいは

(d) $\theta(f,g)=\arctan(\sqrt{5}-1)/2$ で$\#f=5,\#g=2$ あるいは

(e) $\theta(f,g)=\arctan(\sqrt{5}+1)/2$ で$\#f=5,\#g=2$ あるいは

(f) $\theta(f,g)=\arctan 2/\sqrt{5}$ で$\#f=\#g=3$ あるいは

(g) $\theta(f,g)=\arctan(3-\sqrt{5})/2$ で$\#f=3,\#g=2$ あるいは

(h) $\theta(f,g)=\arctan(3+\sqrt{5})/2$ で$\#f=3,\#g=2$ ならば$\langle f,g\rangle$ は正十二面体群をなす。

[II] 非離散群となる場合

(1) $\theta(f,g)=0$ で$\#f=\infty$ ならば$\langle f,g\rangle\in C_I$ となる。

(2) (a) $\theta(f,g)=\pi/2$ で$\#f=\infty,\#g=2$ あるいは

(b) $\theta(f,g)/2\pi\notin Q$ で$\#f=\#g=2$ ならば$\langle f,g\rangle\in C_{II}$ となる。

(3) [I](1),…,[II](2)のいずれでもないならば$\langle f,g\rangle\in C_{III}$ となる。

19 A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and a Euclidean space

Jisoo Byun (Univ. de Provence, Marseille)
Akio Kodama (Kanazawa Univ.)
Satoru Shimizu (Tohoku Univ.)

Let M be a connected complex manifold and let $\mathrm{Aut}(M)$ be the group of all holomorphic automorphisms of M equipped with the compact-open topology. Then one of the fundamental problems in complex geometric analysis is to determine the complex analytic structure of M by its holomorphic automorphism group $\mathrm{Aut}(M)$. Of course, in many cases, this is a very difficult problem. One reason may be that $\mathrm{Aut}(M)$ cannot have the structure of a Lie group, in general. However, even when $\mathrm{Aut}(M)$ is not a Lie group, one can sometimes use techniques developed in the Lie group theory. For instance, consider the space $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$. Then $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ is terribly big when $k + \ell \geq 2$, and cannot have the structure of a Lie group with respect to the compact-open topology. In the previous paper [1], by looking at some topological subgroups with Lie group structures of $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$, we obtained an interesting theorem on characterization of $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ by its holomorphic automorphism group. And, as an application of the method used in the proof of this, we proved that *if a connected Stein manifold M of dimension $n \geq 2$ admits an effective continuous action of $U(n)$ by holomorphic automorphisms, then M is biholomorphically equivalent to either B^n or $\mathbf{C}^n$*, where $U(n)$ denotes the unitary group of degree n and B^n stands for the open unit ball in $\mathbf{C}^n$. In view of this, it would be natural to ask *what happens when M admits an effective continuous action of the direct prod-*

uct $U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ *of unitary groups by holomorphic automorphisms*, where $n_1 + \cdots + n_s = \dim M$. As a typical example of such a manifold M, we have the product space $B^{n_1} \times \cdots \times B^{n_{s-1}} \times \mathbf{C}^{n_s}$. Notice that the holomorphic automorphism group of this model space does not have the structure of a Lie group with respect to the compact-open topology in the case where $n_s \geq 2$ or $n_s \geq 1$ and $n_1 + \cdots + n_{s-1} \geq 1$.

In this talk, we would like to announce the following group-theoretic characterization of the product space $B^k \times \mathbf{C}^\ell$ in connection with the question above. The details can be found in [2]:

Theorem. *Let M be a connected Stein manifold of dimension n. Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(B^k \times \mathbf{C}^{n-k})$ *as topological groups for some integer k with $0 \leq k \leq n$. Then M itself is biholomorphically equivalent to $B^k \times \mathbf{C}^{n-k}$.*

As a consequence of this theorem, we can obtain the following fundamental result on the topological group structure of $\mathrm{Aut}(B^k \times \mathbf{C}^\ell)$.

Corollary. *If two pairs (k, ℓ) and (k', ℓ') of nonnegative integers do not coincide, then the groups* $\mathrm{Aut}(B^k \times \mathbf{C}^\ell)$ *and* $\mathrm{Aut}(B^{k'} \times \mathbf{C}^{\ell'})$ *are not isomorphic as topological groups.*

References

[1] A. Kodama and S. Shimizu; *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space*, Osaka J. Math. **41** (2004), 85–95.

[2] J. Byun, A. Kodama and S. Shimizu; *A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and a Euclidean space*, preprint.

問題 $\mathrm{Aut}(D)$ acts transitively on D

$\mathrm{Aut}(D) \cong \mathrm{Aut}(M) \Longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ acts transitively on M ?

20　Cayley 変換像の凸性による準対称ジーゲル領域の対称性条件

甲斐 千舟　　(京大・理)

以前の講演で管状領域 (第 1 種等質ジーゲル領域) の場合に, Cayley 変換像の凸性によって対称領域が特徴付けられることを報告した ([2] を参照). 本講演では, 準対称ジーゲル領域のクラスの中で対称ジーゲル領域に対して同様の特徴付けを行う.

U, V をそれぞれ複素, 実の有限次元ベクトル空間とし, 等質錐 $\Omega \subset V$ が与えられたとする. V の複素化ベクトル空間を W とおく. Ω-positive, Hermitian sesquilinear map $Q : U \times U \to W$ によって定義される等質ジーゲル領域を D とする:

$$D := \{(u, w) \in U \times W \mid \mathrm{Re}\, w - \tfrac{1}{2}Q(u, u) \in \Omega\}. \qquad (*)$$

D の Bergman 核を κ で表す. 領域 $\Omega + iV \subset W$ 上の正則関数 η と正の定数 c が存在して, κ は次のように書かれる:

$$\kappa(z_1, z_2) = c\,\eta(w_1 + w_2^* - Q(u_1, u_2)) \qquad (z_j = (u_j, w_j) \in D).$$

任意に $E \in \Omega$ を固定する. η を用いて次のように V 上の正定値内積が定義される:

$$\langle x|y\rangle_\eta := D_x D_y \log \eta(E) \qquad (x, y \in V).$$

ただし V 上の C^∞ 関数 f と $x, v \in V$ に対して $D_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x + tv)\big|_{t=0}$ とおく. 等質ジーゲル領域 D が**準対称 (quasisymmetric)** であるとは, この特定の内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_\eta$ に関して Ω が自己双対, すなわち

$$\Omega = \{x \in V \mid \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \langle x|y\rangle_\eta > 0\}$$

が成立することをいう. 準対称ジーゲル領域の概念は Satake, Dorfmeister によって導入された. 既約なものの分類も得られている. 代数的には, 後述の準対称ジーゲル領域に付随して定義される Jordan 代数とその表現を用いて記述される領域と考えることができる.

Cayley 変換について説明しよう. 複素一変数の Cayley 変換

$$w \mapsto (w - 1)(w + 1)^{-1}$$

は右半平面を単位円板に写す. とくにこの Cayley 変換の像である単位円板は凸集合である. 右半平面の多変数への一般化である等質ジーゲル領域に対しても, 領域が対称な場合にはこれと似たような状況が起こっている. 対称ジーゲル領域は非コンパクト型対称エルミート空間である. よって標準的な有界領域実現である Harish-Chandra 実現をもつ. Korányi と Wolf は対称ジーゲル領域をその Harish-Chandra 実現に写す Cayley 変換 (正確にはその逆変換) を与えた. そ

してこの Cayley 変換の像である Harish-Chandra 実現は, あるノルムに関する開単位球であることが証明されている. よって像は凸集合である.

Dorfmeister は [1] において準対称ジーゲル領域の Cayley 変換に言及した. この Cayley 変換は, 領域が対称な場合には前述の Korányi, Wolf によるものと一致する. それは以下のように定義される. D を$(*)$ で定義される準対称ジーゲル領域とする. このとき V に可換な積 $(x,y) \mapsto xy$ を

$$\langle xy|z\rangle_\eta = -\tfrac{1}{2} D_x D_y D_z \log \eta(E) \qquad (x,y,z \in V)$$

で導入すると, $x^2(xy) = x(x^2y)\,(x, y \in V)$ が成立し, V は E を単位元とする Jordan 代数となる. V の複素化として自然に W は複素 Jordan 代数となる. U 上の sesquilinear form $(\cdot|\cdot)$ を

$$(u_1|u_2) := \langle Q(u_1,u_2)|E\rangle_\eta \qquad (u_1,u_2 \in U)$$

で定義すると, これは U の正定値エルミート内積を定める. $w \in W$ に対して U 上の線型作用素 $\varphi(w)$ を

$$(\varphi(w)u_1|u_2) = \langle Q(u_1,u_2)|w\rangle_\eta \qquad (u_1,u_2 \in U)$$

によって定義する. φ は複素 Jordan 代数 W の $*$ 表現になっている. すなわち, U 上の線型作用素 A の $(\cdot|\cdot)$ に関する共役作用素を A^* で表すことにすれば,

$$\varphi(w^*) = \varphi(w)^* \qquad (w \in W),$$
$$\varphi(w_1w_2) = \tfrac{1}{2}(\varphi(w_1)\varphi(w_2) + \varphi(w_2)\varphi(w_1)) \qquad (w_1,w_2 \in W)$$

が成立する. Jordan 代数 W における $w \in W$ の逆元を w^{-1} で表すことにし, 準対称ジーゲル領域 D の**Cayley 変換**を

$$\mathcal{C}(u,w) := (\varphi((w+E)^{-1})u, (w-E)(w+E)^{-1}) \qquad ((u,w) \in D)$$

で定義する. 実際に $\mathcal{C}(D)$ が有界領域であることが証明される. 本講演の主定理を述べよう.

定理. D を準対称ジーゲル領域とする. このとき $\mathcal{C}(D)$ が凸集合であることと D が対称であることとは同値である.

参考文献

[1] J. Dorfmeister, *Quasisymmetric Siegel domains and the automorphisms of homogeneous Siegel domains*, Amer. J. Math., **102** (1980), 537–563.

[2] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric tube domains by convexity of Cayley transform images*, To appear in Diff. Geom. Appl.

[3] C. Kai, *Symmetry characterization of quasisymmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images*, preprint.

21 スタイン空間内の正則領域について

古島　幹雄
(熊本大学・理学部)

1 2-dimensional domain of holomorphy

We prove that a domain of holomorphy Ω in a two-dimensional normal Stein space X is Stein if Ω is "locally simply connected near the singularities on the boundary", that is, for every $p \in \partial\Omega \cap \mathrm{Sing}\, X$ there exist a sufficiently small neighborhood U_ϵ of p such that $U_\epsilon \cap \Omega$ is simply connected.

2 Domain of holomorphy in a Stein cone

Let $\pi : L_M \longrightarrow M$ be a negative line bundle over an n-dimensional projective algebraic manifold M and X_M the normal Stein variety obtained by the blowing down of its zero section. We call the Stein variety X_M the Stein cone over M. Assume that the universal covering of M is a Stein manifold. Then we prove that any simply connected domain of holomorphy Ω in X_M is Stein.

22 L^2 正則関数の拡張について
—— 除去可能特異性

大沢健夫

名古屋大学多元数理科学研究科

1. Levi 問題が解ける複素多様体上では、より具体的な問題が課題となる。たとえば多様体上の関数空間の構造と多様体の曲率等の幾何学的構造の対応などである。そのためには L^2 評価式の方法が有用であり、J. J. Kohn や L. Hörmander らの仕事を発端として多様体上の Bergman 空間の構造が解明されて来た。L^2 正則関数の拡張理論はその一部である。

2. X を n 次元の（連結かつパラコンパクトな）複素多様体とし、dV を X 上の体積要素、K_X を X の標準直線束、S を X の純余次元 1 の（被約な）解析的部分集合、E を X 上の正則ベクトル束、h を E のファイバー計量とする。L^2 拡張定理とは、S 上の $E\otimes K_X$ の正則断面で、ファイバー計量 $h\otimes(dV)^{-1}$ および dV により一定の手続きで誘導された S 上の測度に関して L^2 条件をみたすものが、X 上に $E\otimes K_X$ の正則断面として、$h\otimes(dV)^{-1}$ および dV に関する L^2 ノルムの評価つきで拡張できるためのある種の曲率条件を与えるものである。

3. 新しい結果を述べるために記号を用意する。$[S]$ を S に付随する X 上の直線束、$\underline{S}$ を $[S]$ の正則断面で局所的に S の定義イデアル層を生成するものの集合とする。$\underline{S}$ の元 s と $[S]$ のファイバー計量 b に対し、U_t $(t\in\mathbb{R})$ で $|s|_b^2 < e^{-t}$ をみたす X の点の集合を表し、S 上の測度 dV_S を次で定義する。

$$\int_S \rho\, dV_S = \lim_{t\to\infty}\int_{U_t\setminus U_{t+1}} \rho\,|s|_b^{-2}\,dV$$

ただし ρ は台がコンパクトな X 上の C^∞ 級関数を動くものとする。

4. 主結果は次の通り.

定理　Xはn次元Kähler多様体で、C^∞級の多重劣調和な皆既関数φを持つとする。(E, h)はX上の正則Hermite束、$S \subset X$は純余次元1の解析的部分集合とし、ψをX上の多重劣調和関数で$\psi^{-1}(-\infty)$以外でC^∞級なものとする。Sの元sと$[S]$のファイバー計量bを$|s|_b$が有界になるようにとる。dV_Sは上記の通りとし、$d\mu$をS上の測度で$d\mu \geq dV_S$がSのあるコンパクト集合Kの補集合上で成立するものとする。これらについて以下の条件を仮定する。

1) 正数εが存在して、中野の意味で

$$\Theta_h - (1+\tau)\, Id_E \otimes \Theta_b \geq 0$$

が区間$[0, \varepsilon]$内のすべてのτに対して成立する。

2) Kを含むXの相対コンパクトな開集合Wと実数cが存在して、$\partial\bar{\partial}\psi$は$W \setminus \psi^{-1}(-\infty)$の各点で少なくとも$(3 + \dim \mathrm{Sing}\, S)$個の$c$以上の固有値をもつ.

3) 実数γが存在して、K上では$\varphi < \gamma$であり、$\{x \mid \varphi(x) < \gamma\} \cap W$の各点において$\partial\bar{\partial}\varphi$は少なくとも$(n - 1 - \dim \mathrm{Sing}\, S)$個の正固有値を持つ.

このとき正数Cが存在して、$E \otimes K_X | S$の正則断面fで

$$\int_S e^{-\psi} |f|^2 d\mu < \infty$$

をみたすものに対し、fの$E \otimes K_X$のX上の正則断面としての拡張$\tilde{f}$で

$$\int_X e^{-\psi} |\tilde{f}|^2 dV \leq C \int_S e^{-\psi} |f|^2 d\mu$$

をみたすものが存在する。

23 一般位数擬凸状函数の除去可能特異点

藤田 收

H. Grauert と R. Remmert は, 論文 [3] において, 多重劣調和函数に対して複素解析関数についての Riemann の除去可能特異点定理のアナロジーが成立する事を示し, 論文 [4] において, これを通常の擬凸状領域の研究に応用している. 本講演において, これらの結果の或るものが, 一般位数の擬凸状函数および一般位数の擬凸状領域の場合に拡張されることを報告する. また, 解析集合上の正則域の研究への応用についても述べる. (一般位数の擬凸状函数と擬凸状領域については [1] と [2] 参照.)

D を C^n の開集合とし, l を $1 \leqq l \leqq n$ をみたす整数とする. D の閉集合 E が E の各点の近傍で $n-l$ 次元の解析集合に含まれるとき E は D における位数 l の thin set であるという.

定理 1. D を C^n の開集合, k $(0 \leqq k \leqq n-1)$ を整数, E を D における位数 $n-k$ の thin set とする. 函数 $\varphi: (D-E) \to [-\infty, \infty)$ が位数 k の擬凸状函数であり, E の任意の点の近傍で φ が上に有界ならば

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad for\ x \in (D-E),$$
$$\hat{\varphi}(x) = \overline{\lim}_{x' \to x, x' \in (D-E)} \varphi(x') \quad for\ x \in E$$

で定義される函数 $\hat{\varphi}$ は D で位数 k の擬凸状である. ($k = n-1$ の場合が Grauert-Remmert [3] p. 183 Satz 6 に対応する.)

D を C^n の開集合, E を D の閉部分集合, l を $1 \leqq l \leqq n$ をみたす整数とする. E の点 a の或る近傍 U において $E \cap U$ が U における $n-l$ 次元解析集合に含まれるとき, a は E の位数 l の removable point であるという. E の位数 l の removable でない点の全体を E' とすると E' はまた D の閉部分集合である.

定理 2. D を C^n の開集合, E を D の閉部分集合, k を $1 \leqq k \leqq n-1$ をみたす整数とする. E の位数 $n-k$ の removable でない点の全体を E' で表す. F を E' の閉部分集合で, D における位数 $n-k$ の thin set とする. このとき, もし E が $E-F$ の各点で位数 k の擬凹状ならば, E は D における位数 k の擬凹状集合である. ($k = n-1$ の場合が Grauert-Remmert [4] p. 164 Satz 4 に対応する.)

定理 3. Ω を C^m の領域, Σ を Ω における既約かつ各点で局所既約な n 次元解析集合とし, $2 \leqq n < m$ とする. D が Σ 上の (単葉な) 正則域ならば $\Sigma - D$ は Ω における位数 $n-1$ の擬凹状集合である.

G を C^n の開集合 k を $0 \leqq k \leqq n-1$ をみたす整数とする. C^{n-k} の原点を中心とする単位球を B_{n-k} で表す. B_{n-k} から G への写像 f は, それが B_{n-k} の或る近傍から G への正則写像の制限であるとき正則であるという. このとき, [1] により, G が位数 k の擬凸状であるためには, 次の条件 (D_k) をみたすことが必要十分である.

(D_k) $\{f_\nu\}$ $\nu = 1, 2, \ldots$ が, B_{n-k} から G への $\cup_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(\partial B_{n-k}) \Subset G$ をみたす正則写像列ならば, $\cup_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(B_{n-k}) \Subset G$ である. ここで, ∂B_{n-k} は B_{n-k} の境界を表す. (この条件 (D_k) は G が解析集合上の開集合である場合にも意味を持つ.)

定理 3 系 定理 3 の条件の下で, 更に Ω が位数 $n-1$ の擬凸状であり, $2n - m - 1 \geqq 0$ ならば, 正則域 D は $G = D$ として上の条件 (D_{2n-m-1}) をみたす. Grauert-Remmert [4] p. 175-178 の例の正則域 D の場合, $m = 2n-2$, $n \geqq 3$ であり, D は, C^n の位数が丁度 1 の領域に解析的に同値である. $2n - m - 1 = 1$ であるから, 上の系の示す限界が最良である一例を与えている.

参考文献

[1] O. Fujita, Domaines pseudoconvexes d'ordre général et fonctions pseudoconvexes d'ordre général, J. Math. Kyoto Univ., **30** (1990), 637-649.

[2] O. Fujita, On the equivalence of the q-plurisubharmonic functions and the pseudoconvex functions of general order, Annual Reports of Graduate School of Human Culture (Nara Women's Univ.) **7** (1992), 77-81.

[3] H. Grauert und R. Remmert, Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen, Math. Zeitschr., **65** (1956), 175-194.

[4] H.Grauert und R. Remmert, Konvexität in der komplexen Analysis, Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie, Comment. Math. Helv. **31** (1956), 152-183.

特別講演

$\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化について

古島　幹雄
(熊本大学・理学部)

1　序

複素アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化 (analytic compactification) とは n 次元コンパクト複素多様体 X および解析的閉部分集合 $Y \subset X$ の組 (X, Y) で補集合 $X - Y$ が $\mathbb{C}^n$ と双正則同型なるものをいう．このとき，Y を $\mathbb{C}^n$ の境界と呼ぶ．二つの $\mathbb{C}^n$ のコンパクト化 (X, Y) および (X', Y') が**同型**であるとは $Y' = \varphi(Y)$ なる双正則写像 $^\exists\varphi : X \longrightarrow X'$ が存在する時をいう．この時 $(X, Y) \cong (X', Y')$ と書く．ハルトーグスの定理より境界 Y は X 内の**因子 (divisor)** であることが分かる．その時，次の問題が Hirzebruch 氏によって提起された．

問題 1. (**Hirzebruch[18]; 1954**) **第２ベッチ数１なる $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化を全て決定せよ．**

この問題に関しては次の事実が知られている．

定理 1. *(1)* $n = 1 \Longrightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{P}^1, \infty)$.

(2) $n = 2 \Longrightarrow (\mathbb{P}^2, \ell)$, 但し $\ell \cong \mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^2$ の直線 (**Remmert-Van de Ven [30] ;1960**).

次元 $n \geq 4$ については問題は未解決である ($n = 4$ の場合，**Prokhorov 氏 [28];1992**) による部分的な結果はあるが，解決には遠いように思える)．本講演では $n = 3$ の場合についてこれまで得られている結果を中心に報告する．

2　一般的性質および関連問題

命題 1. (X, Y) を $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化とする．その時，

(1) $\mathrm{H}^i(X;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^i(Y;\mathbb{Z})$ $(i < 2n-1)$，特に，$\mathrm{H}^1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^1(Y;\mathbb{Z}) = 0$.

(2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(X; \mathcal{O}_X(mK_X)) = 0 \ \ (m >> 0)$

$Y = \bigcup_i^N Y_i$（各 Y_i は既約因子）を既約分解とする．その時，X の第 2 ベッチ数 $\mathrm{b}_2(X) := \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{H}^2(X; \mathbb{R}) = N =$（$Y$ の既約成分の数）より，$\mathrm{b}_2(X) = 1 \Longleftrightarrow Y$ は既約因子（但し，滑らかな因子とは限らない）．これに関しては，次の Van de Ven 予想 がある．

予想 1. (**Van de Ven [31]; 1962**)
(X, Y) を $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化とする．Y が滑らかならば，$(X, Y) \cong (\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{P}^n)$.

定理 2. (**Van de Ven, Fujita;[31];1962,[3];1980**) X が *Kähler* 多様体なら予想は $n \leq 6$ までは正しい．

また $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化の Kähler 性については次が知られている．

命題 2. (**Brenton-Morrow,[2];1978**) (X, Y) を第 2 ベッチ数 $\mathrm{b}_2(X) = 1$ なる $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化とする．この時，X は *Kähler* 的 $\Longleftrightarrow X$ は射影的.

次の問題は $n \geq 3$ に対しては未解決のようである.

問題 2. $\mathbb{C}^n$ の任意の解析的コンパクト化は *Moishezon* 多様体か？

特に，$\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化については次が知られている．

命題 3. (**Brenton[1];1977,Peternell-Schneider[26][24][25];1988-89**) 境界因子 Y が正規ならば X は射影的である．

定理 3. (**Peternell-Schneider[27]; 1988–1990**) 第 2 ベッチ数 $\mathrm{b}_2(X) = 1$ なる $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化は *Moishezon* である．

定理 4. (**Furushima[9][14];1994,1998, Nakamura[23]; 1996**) 第 2 ベッチ数 $\mathrm{b}_2(X) = 1$ なる $\mathbb{C}^3$ の解析的（*Moishezon*）コンパクト化で非射影的（非 *Kähler* 的）なるものが可算無限個存在する．

3 $\mathbb{C}^3$ の Kähler（或いは射影的）コンパクト化

3.1 一般的事実

(X, Y) を第 2 ベッチ数 $\mathrm{b}_2(X) = 1$ を持つ $\mathbb{C}^3$ の Kähler コンパクト化とする．その時，

命題 4. *(1)* Y は豊富な既約因子で $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_X(Y)$.

(2) $K_X = -rY$ $(0 < r \leq 4, r \in \mathbb{Z})$. 特に, X は3次元 *Fano* 多様体

整数 $r = r(X, Y)$ を (X, Y) の"index"と呼ぶ. これは, Fano 多様体の Fano index と同じものである. 3次 Fano 多様体の分類と同じく, 各 index r に応じてコンパクト化 (X, Y) の構造を決定してゆく.

3.2 $r = 4$ の場合

この場合は3次元 Fano 多様体の分類 (Iskovskih,[19],[20]) から $(X, Y) \cong (\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2)$ である. 特に, (X, Y) は同型を除き一意的である.

3.3 $r = 3$ の場合

3次元 Fano 多様体の分類から $X \cong \mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{P}^4$ (非特異2次超曲面) で Y はその超平面切断である. Y が非特異ならば, $\mathrm{b}_2(Y) = 2$ となり, $\mathrm{b}_2(X) = \mathrm{b}_2(Y) = 1$ に反する. こうして, Y の既約性から Y は2次錐 (quadric cone)$Y = \mathbb{Q}_0^2$ であることが分かる. よって $(X, Y) \cong (\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2)$, この場合も (X, Y) は同型を除き一意的である.

3.4 $r = 2$ の場合

この場合も分類を用いれば X の候補は絞り込める. 面倒なのは $\mathbb{C}^3$ から index $r = 2$ の3次元 Fano 多様体 X への埋め込み $f : \mathbb{C}^3 \hookrightarrow X$ の存在である. 得られた結果は以下の通り.

定理 5. *(1)* **(Furushima [4];1986, Furushima-Nakayama[15][16];1989-90)**

境界 Y が正規 *(normal)* のとき, $X \cong V_5$ (但し, $V_5 := G(2,5) \cap \mathbb{P}^6 \subset \mathbb{P}^6$ は5次の3次元 *Fano* 多様体). Y は $\mathrm{Sing}\, H_5^0$={one rational double point of A_5-type } なる V_5 の (正規) 超平面切断 $Y \cong H_5^0$ である. 特に, (V_5, H_5^0) は同型を除き一意的. 即ち, もし, 他に V_5 の正規超平面切断 H_5 があって, $V_5 - H_5 \cong \mathbb{C}^3$ ならば, 自己同型 $\alpha \in \mathrm{Aut}(V_5)$ があって $\alpha(H_5) = H_5^0$ とできる.

(2) **(Petenell-Schneider [26]1987, Furushima-Nakayama [15][16] 1989-90, Furushima-Tada [17]1992)**

境界 Y が非正規 (non-normal) のとき, $X \cong V_5$, Y はその非正規超平面切断 H_5^∞ であり, $\ell := \mathrm{Sing}\, Y \cong \mathbb{P}^1$ は V_5 の直線. さらに, ℓ の X に於ける法束 は $N_{\ell|X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ である. この場合も (V_5, H_5^∞) は同型を除き一意的.

$z := (z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5 : z_6)$ を $\mathbb{P}^6$ の同次座標とする．この時，V_5，H_5^0，H_5^∞ の $\mathbb{P}^6$ に於ける定義方程式は次式で与えられる (cf.**Mukai-Umemura; [22]**)：

$$V_5 \ : \ \begin{cases} z_0z_4 - 4z_1z_3 + 3z_2^2 = 0 \\ z_0z_5 - 3z_1z_4 + 2z_2z_3 = 0 \\ z_0z_6 - 9z_2z_4 + 8z_3 = 0 \\ z_1z_6 - 3z_2z_5 + 2z_3z_4 = 0 \\ z_2z_6 - 4z_3z_5 + 3z_4^2 = 0 \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} H_5^0 = \{z_5 = 0\} \\ H_5^\infty = \{z_6 = 0\} \end{cases}$$

3.5 $r = 1$ の場合

$g := \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$ （X の種数と呼ばれる）とおく．このとき，$3 \geq g \geq 12$，$g \neq 11$ である．境界 Y の特異点の詳細な解析により $g = 12$ を得る．

定理 6. (Furushima [5],[6][7][8];1990-94)

(1) Y は *non-normal.*

(2) $X \cong V_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$，$Y$ はその”非正規”超平面切断 H_{22}，$C := \mathrm{Sing}\, H_{22} \cong \mathbb{P}^1$ は V_{22} の直線でその法束は $N_{C|V_{22}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ である．

(3) $\mathrm{mult}_C\, H_{22} \leq 3$,

(4) それぞれ $\mathrm{mult}_C\, H_{22}^0 = 2$ $(\mathrm{mult}_C\, H_{22}^\infty = 3)$ なる V_{22} の非正規超平面切断があって (V_{22}, H_{22}^0) および (V_{22}, H_{22}^∞) はともに $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化．これらは *family* を持つ *(cf. citeMu,[29]).*

[結論](cf.[13]) 第 2 ベッチ数 $\mathrm{b}_2 = 1$ なる $\mathbb{C}^3$ の Kähler コンパクト化は次の 6 種類である．

$$(\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2),\ (\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2),\ (V_5, H_5^0),\ (V_5, H_5^\infty),\ (V_{22}, H_{22}^0),\ (V_{22}, H_{22}^\infty)$$

4 $\mathbb{C}^3$ の非 Kähler 的（或いは非射影的）コンパクト化

定理 3 から X は 3 次元 Moishezon 多様体である．命題 3 から Y は”非正規”である．

命題 5. *(1)* $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ $(i > 0)$

(2) $K_X = -rY$, $(r \leq 2)$ *(***Furushima [12];1999***)*

4.1 Y が "nef" の場合

命題 5 より，$K_X = -2Y$ または $K_X = -Y$ である．X は Moishezon 多様体で Y は "big" (ie. $Y^3 > 0$) である．固定点自由性 $\mathrm{Bs}\,|mY| = \emptyset$ $(m >> 0)$ より，線形系 $|mY|$ は正則写像を $\varphi : X \dashrightarrow V^*$ を定める．この時，

定理 7. **(Peternell-Schneider[27]; 1991, Furushima [10];1996)**

(1) V^* は *small Gorenstein* 特異点 p を持つ *index* $r \leq 2$ なる *Fano 3* 様体で $\varphi : X \longrightarrow V^*$ は *small birational contraction.*

(2) $C := \mathrm{Exc}(\varphi) = \cup_i C_i = \varphi^{-1}(p)$ を例外集合とすると，$C \subset Y$ であり，各既約成分 C_i は非特異有理曲線でその法束は $N_{C_i|X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ または $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$.

(3) $D := \varphi_* Y \in \mathrm{Pic}\, V^*$ は豊富な因子で $p \in D$, $V^* - D \cong X - Y \cong \mathbb{C}^3$. 特に，$\mathrm{Pic}\, X \cong \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_{V^*}(D)$, $K_{V^*} = -rD$ $(r \leq 2)$ となる．

定理 7 から境界因子 Y が "nef" の場合の (X, Y) の分類問題は次の問に含まれる．

問 1. 第 2 ベッチ数 $b_2 = 1$ なる *small Gorenstein* 特異点をもつ *Fano* 3 葉体 V^* で $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化となるものを全て決定せよ．

問 1 は index $r \geq 2$ については分類済み (**Furushima [14];2004**).

定理 8. *(Furushima [10][11][14];1994-1996)* (V^*, D) を定理 7 における $\mathbb{C}^3$ の特異 *Fano* コンパクト化とする．

(1) $r = 2$ の時，$b_4 \leq 2$.

(i) $b_2 = b_4 = 1 \implies (V^*, D) \cong (V_4^*, H_4^*)$, 但し，$V_4^* \subset \mathbb{P}^5$ は A_1 型の *small Gorenstein* 特異点をもつ 2 次超曲面の完全交差として得られるなる 4 次の *Fano* 3 様体で,H_4^* はその非正規超平面切断である．実際，$z = (z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5)$ を $\mathbb{P}^5$ の同次座標とすれば定義方程式は次で与えられる：

$$V_4^* \; : \; \begin{cases} z_0 z_1 + z_2 z_3 + z_4 z_5 = 0 \\ z_0 z_2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0 \end{cases} , \quad H_4^* = \{z_0 = 0\} \cap V_4^*$$

(ii) $b_2 = 1, b_4 = 2 \implies (V^*, D) \cong (V_5^*, H_5^*)$. 但し，$V_5^* \subset \mathbb{P}^6$ は A_1 型の *small Gorenstein* 特異点をもつ 5 次の *Fano* 3 様体で，H_5^* はその非正規超平面切断である．

(2) $r=1 \Longrightarrow A_1$ 型の *small Gorenstein* 特異点をもつ $b_2=b_4=1$ なる次数 *18* の *Fano* 3 様体 $V_{18}^* \subset \mathbb{P}^{10}$ および非特異超平面切断 H_{18}^* で $V_{18}^*-H_{18}^* \cong \mathbb{C}^3$ なるものが存在する.

残問 1. $r=1$ の場合, $(V^*,A) \cong (V_{18}^*, H_{18}^*)$ か? $b_2=1, b_4=2$ なるコンパクト化は存在するか?

4.2 Y が "not-nef" の場合

この場合の (X,Y) の構造は現段階では決定できていない. Y は非射影的であるが, その正規化 $\overline{Y} \xrightarrow{\nu} Y$ は射影代数的である. Y が "not-nef" の時の $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化の存在に関しては:

定理 9. 次を満たす $b_2=1$ なる $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化が可算無限個存在する.

(1) (**Furushima [11];1998**) $r=1 \Longrightarrow {}^\exists(X_m,Y_m)\ (m \geq 2)$, analytic compactification of $\mathbb{C}^3$ s.t.

   (i) Y_m は "not-nef" (実際, ${}^\exists C_m \cong \mathbb{P}^1$ s.t. $(Y_m \cdot C_m) = 2-2m < 0$, $N_{C_m|X_m} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1-m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1-m)$) .

   (ii) $Y_m^3 = -8m+26$

(2) (**Nakamura [23]**) $r=2 \Longrightarrow {}^\exists(X_n,Y_n)\ (n \geq 1)$, analytic compactification of $\mathbb{C}^3$ s.t.

   (i) Y_n は "not-nef" (実際, ${}^\exists \ell_n \cong \mathbb{P}^1$ s.t. $(Y_n \cdot \ell_n) = -n < 0$, $N_{\ell_n|X_n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2-n)$) .

   (ii) $Y_n^3 = -n+4$.

残問 2. Y が *not-nef* の場合, 上記の例以外に $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化は存在するか?$(X.Y)$ のさらなる詳細な構造を調べよ.

References

[1] L. Brenton, *Some algebraicity criteria for singular surfaces*, Invent. Math.**41**(1977), 129–147.

[2] L. Brenton and J. Morrow, *Compactifications of* $\mathbb{C}^n$, Trans. Am. Math. Soc.**246**(1978), 139–153.

[3] T. Fujita, *On topological characterizations of complex projective spaces and affine linear spaces*, Proc. Japan Acad. **56**(1980), 231–234.

[4] M.Furushima, *Singular del Pezzo surfaces and analytic compactifications of 3-dimensional complex affine space* $\mathbb{C}^3$, Nagoya Math. J. **104**(1986), 1–28.

[5] M.Furushima, *Complex analytic compactifications of* $\mathbb{C}^3$, Compositio Math. **76**(1990), 163–193.

[6] M. Furushima *Mukai-Umemura's example of the Fano threefold with genus 12 as a compactification of* $\mathbb{C}^3$, Nagoya Math. J **127**(1982), 145–165.

[7] M. Furushima *A new example of a compactification of* $\mathbb{C}^3$, Math. Z. **212**(1993), 395–399.

[8] M. Furushima, *The complete classification of compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *which are projective manifolds with second Betti number one*, Math. Ann.**297**(1993), 627–662.

[9] M. Furushima, *An example of a non-projective smooth compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *with second Betti number equal to one*, Math. Ann.**300**(1994), 89–96.

[10] M. Furushima, *Non-projective compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *(I)*, Kyushu J. Math.**50**(1996), 221-239.

[11] M. Furushima, *Non-projective compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *(II) (New Examples)*, Kyushu J. Math.**52**(1998), 149–162.

[12] M. Furushima, *Non-projective compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *III: A remark on indeces*, Hiroshima Math. J.**29**(1999), 295–298.

[13] M. Furushima, *Birational construction of projective compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *with second Betti number equal to one*, Ann. Math. pura appl.**178**(2000), 115–128.

[14] M. Furushima, *Singular Fano compactifications of* $\mathbb{C}^3$ *(I)*, Math. Z.**248**(2004), 709–723.

[15] M. Furushima and N. Nakayama, *The family of lines on the Fano threefold* V_5, Nagoya. Math. J.**116**(1989), 111-122

[16] M. Furushima and N. Nakayama, *A new construction of a compactification of* $\mathbb{C}^3$, Tohoku Math. J.**41**(1989), 543–560.

[17] M. Furushima and M. Tada, *Non-normal del Pezzo surfaces and Fano threefolds of first kind*, J. reine angew. Math. **429**(1992), 183–190.

[18] F. Hirzebruch, *Some problems on differentiable and complex manifolds*, Ann. Math.**60**(1954), 213–236.

[19] V.A. Iskovskih, *Fano 3-folds I, II*, Math. USSR. Izv. **11**(1977), 485-527, **12**(1978), 469-506.

[20] V.A. Iskovskih, *Algebraic Geometry V*, Ency. Math. **47**(1999),Springer Verlag.

[21] S. Mukai, *Fano 3-folds*, Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989), 255–263, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **179**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[22] S. Mukai and H. Umemura,*Minimal rational threefolds*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, **1016**(1983), 490–518.

[23] I. Nakamura, *Moishezon 3-folds homeomorphic to a cubic hypersurface in* $\mathbb{P}^4$, J. Algebraic Geometry **5**(1996), 537–569.

[24] T. Peternell, *Compactifications of* $\mathbb{C}^3$*, II*, Math. Ann.**283**(1989), 121–137.

[25] T. Peternell, *Compactifications of* $\mathbb{C}^3$*, III*, Math. Z.**205**(1990), 213–222.

[26] T. Peternell and M. Schneider, *Compactifications of* $\mathbb{C}^3$*, I*, Math. Ann.**280**(1988), 129–146.

[27] T. Peternell and M. Schneider, *Compactifications of* $\mathbb{C}^n$*: A Survey*, Several Complex Variables, Proc. Sympo. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI,**51**(1991), 455-461.

[28] Yu. G. Prokhorov, *Compactifications of* $\mathbb{C}^4$ *of index* 3, Aspect Math. Vieweg, **25**(1992), 159–169.

[29] Yu. G. Prokhorov, *Fano threefolds of genus* 12 *and compactifications of* $\mathbb{C}^3$, St. Petersburg Math. J. 3(1992), 855-864.

[30] R. Remmert and A. Van de Ven *Zwei Sätze über die komplex-projektive Ebene*, Nieuw. Arch. Wisk. **8**(1960), 147–157.

[31] A. Van de Ven, *Analytic compactifications of complex homology cells*, Math. Ann.**147**(1962), 189–204.