日 本 数 学 会

2004年度秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会
講 演 アブストラクト

2004年9月

於 北 海 道 大 学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．
2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．
3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．
4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．
5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9月19日(日)　第 VIII 会場

9:00 ～ 12:00

1 西本勝之 (デカルト出版)* An extension of the theorem of de Moivre by means of N-fractional calculus and some identities ··· 15
S. S. de Romero (Zulia大)
M. Fuenmayor (Zulia大)
A. I. Prieto (Zulia大)

2 斎藤三郎 (群馬大工)* Numerical solutions of the Poisson equation ··· 15
松浦　勉 (群馬大工)
D. D. Trong (ホーチミン大)

3 二村俊英 (大同工大)* Maximal functions for Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1 ··· 15
水田義弘 (広島大総合科)

4 二村俊英 (大同工大)* Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent ··· 15
水田義弘 (広島大総合科)
下村　哲 (広島大教育)

5 二村俊英 (大同工大)* Liouville's theorem for monotone Sobolev functions ··· 15
水田義弘 (広島大総合科)

6 田島愼一 (新潟大工)* 一変数代数的局所コホモロジー類の満たす常微分方程式系と留数計算 ··· 15
加藤涼香
庄司卓夢 (新潟大自然)

7 尾和重義 (近畿大理工)* Notes on Sakaguchi functions ··· 15
山川陸夫 (芝浦工大工)
関根忠行 (日大薬)

8 米田力生 (愛知教育大)* Essential norms of integration operators and multipliers on Bergman spaces ··· 15

9 須川敏幸 (広島大理)* A maximal operator associated with Dieudonné's lemma ··· 15

10 戸田暢茂 * On a defect relation for holomorphic curves ··· 15

11 柳原二郎 * Schröder 函数の Julia 方向について ··· 15
石崎克也 (日本工大)

14:20 ～ 15:15

12 笹井理恵 (広島大理)* Generalized obstacle problem ··· 15

13 中井三留 * 二葉球面の貼付弧の分類 ··· 15

14 宮地秀樹 (東京電機大理工)* 漸近的タイヒミュラー空間の構造について ··· 15

15:30 ～ 16:30　特別講演

奥山裕介 (金沢大自然)* Complex dynamics and the Nevanlinna theories: forwards and upwards!

16:45 ～ 17:45　特別講演

増本　誠 (山口大理)* Extremal lengths of homology classes on Riemann surfaces

9 月 20 日 (月)　第 VIII 会場

9:00 ~ 12:00

15	川平友規	(名大多元数理)*	Topological structures of Lyubich-Minsky laminations associated with rabbits	15
16	松崎克彦	(お茶の水女大理)*	Stable points in infinite dimensional Teichmüller spaces	15
17	糸　健太郎	(名大多元数理)*	On continuous extension of grafting maps	15
18	陳　伯勇 神本　丈 大沢健夫	(同済大) (九大) (名大)	Behavior of the Bergman kernel at infinity	15
19	大沢健夫	(名大)	Levi-flats in complex tori of dimension two	15
20	K. Diederich 大沢健夫	(Wuppertal 大) (名大)	On the displacement rigidity of Levi flat hypersurfaces—the case of boundaries of disc bundles over compact Riemann surfaces	15
21	阿部幸隆	(富山大理)	代数的加法定理を許す有理型関数について	15
22	児玉秋雄 清水　悟	(金沢大理) (東北大理)	A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space, II	15
23	甲斐千舟 野村隆昭	(京大理)* (京大理)	Cayley 変換像の凸性による対称管状領域の特徴付け	15
24	濱野佐知子	(奈良女大人間文化)*	筒状域における Cousin 第 2 問題	15
25	N. Levenberg 山口博史	(Auckland 大)* (奈良女大)	複素多様体上の領域の変動に関する 2 階変分公式	15

13:00 ~ 14:00　特別講演

B.-Y. Chen（陳伯勇）(名大多元数理)　Bergman kernel and metric with applications to geometry

1 An extension of the theorem of De Moivre by means of N- fractional calculus and some identities

Katsuyuki Nishimoto , Descartes Press

S. S. de Romero, M. Fuenmayor Universidad del

and A. I. Prieto Zulia (Venezuela)

Abstract

In this article, an extension of the theorem of De Moievre by means of N- fractional calculus and some identities for the fractional differ-integrated trigonometric functions are reported.

Theorem 1. *We have the identity*

$$((\cos z + i\sin z)^a)_v = a^v \cos\{az + (\tfrac{\pi}{2} + 2m\pi)v\},$$

$$+\, i a^v \sin\{az + (\tfrac{\pi}{2} + 2m\pi)v\} \qquad (a \neq 0), \qquad (12)$$

where $v \in R$ *and* $m \in Z$ (a ; *const.*, $i = \sqrt{-1}$).

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^v (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(a-z)^\beta$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 3, May (1993), 19 - 27.

[6] K. Nishimoto and S.T. Tu ; On the fractional calculus $((z-a)^\beta \cdot (z-b)^\gamma)_\alpha$, J. Frac.Calc. Vol.4, Nov. (1993), 13 - 21.

[7] K. Nishimoto and S.T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994), 27 - 34.

[8] S.T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(cz-a)^\beta$ and $\log(cz-a)$, J. Frac.Calc. Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[9] K. Nishimoto ; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 15 - 26.
[10] H.M. Srivastava and K. Nishimoto ; Some infinite sums derived by using fractional calculus of logarithmic functions, J. Frac.Calc. Vol. 8, Nov.(1995),57 - 61.
[11] S. S. de Romero, S. Kalla and K. Nishimoto ; N- fractional calculus of of some functions, J. Frac.Calc. Vol. 9, May (1996),33 - 39.
[12] J. Matera, A. Prieto, S. S. de Romero and K. Nishimoto ; N- fractional calculus of some elementary functions I I , J. Frac.Calc. Vol. 12, Nov. (1997),37 - 46.
[13] J. Matera, A. Prieto, S. S. de Romero and K. Nishimoto ; N- fractional calculus of some elementary functions I I I, J. Frac.Calc. Vol. 13, May (1998),57 - 62
[14] J. Matera, A. Prieto, S. S. de Romero and K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of Some Elementary Functions , J. Frac.Calc. Vol. 17, May (2000),19 - 24.
[15] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of the power and logarithmic functions and some identities, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 1 - 6.
[16] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of the power and logarithmic functions and some identities (continue), J. Frac. Calc. Vol. 22, Nov. (2002), 59 - 65
[17] K. Nishimoto, Susana S. de Romero and Josefina Matera ; N- fractional calculus of function $\varphi = \log z - \frac{1}{2z}$ $(z \neq 0)$, J. Frac. Calc. Vol. 23, May (2003), 27 - 34.
[18] S. Moriguchi, K. Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulae, Vol.2 Iwanwmi Zensho, (1957), pp 37 - 39. Iwanami, Japan.
[19] K.B. Oldham and J. Spanier ; The fractional calculus (1974), Academic Press.
[20] S.G. Samko, A,A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional integrals and derivatives and some their applications (1987). Nauka, USSR.
[21] K.S. Miller and B. Ross ; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations (1993), John Wiley & Sons, Inc..
[22] V. Kiryakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No. 301, (1994), Longman.
[23] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.
[24] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.
[25] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

2 Numerical Solutions of the Poisson Equation

T. MATSUURA, S. SAITOH AND D. D. TRONG
群馬大工, National University of Ho Chi Minh City

Abstract

In this paper we shall give practical and numerical solutions of the Poisson equation on multidimensional spaces and show their numerical experiments by using computers.

Keywords: Poisson equation, inverse problem, approximation of functions, reproducing kernel, Tikhonov regularization, Sobolev space, generalized inverse, approximate inverse, error estimate, noise, weighted convolution inequality
(to appear in Applicable Analysis)

References

[1] M. Asaduzzaman, T. Matsuura, and S. Saitoh, *Constructions of approximate solutions for linear differential equations by reproducing kernels and inverse problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).

[2] D-W, Byun and S. Saitoh (1994), *Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces*, Proc. of the 2nd International Colloquium on Numerical Analysis, VSP-Holland, 55–61.

[3] S. Saitoh (1997), *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman Ltd, UK.

[4] S. Saitoh (2000), *Weighted L_p-norm inequalities in convolutions*, Survey on Classical Inequalities, 225-234, Kluwer Academic Publishers.

[5] S. Saitoh, *Approximate Real Inversion Formulas of the Gaussian Convolution*, Applicable Analysis, (to appear).

[6] S. Saitoh, *Applications of Reproducing Kernels to Best Approximations, Tikhonov Regularizations and Inverse Problems*, 4th ISAAC Toronto Congress Proceedings (to appear).

[7] S. Saitoh, *Best approximation, Tikhonov regularization and reproducing kernels*, Kodai. Math. J. (to appear).

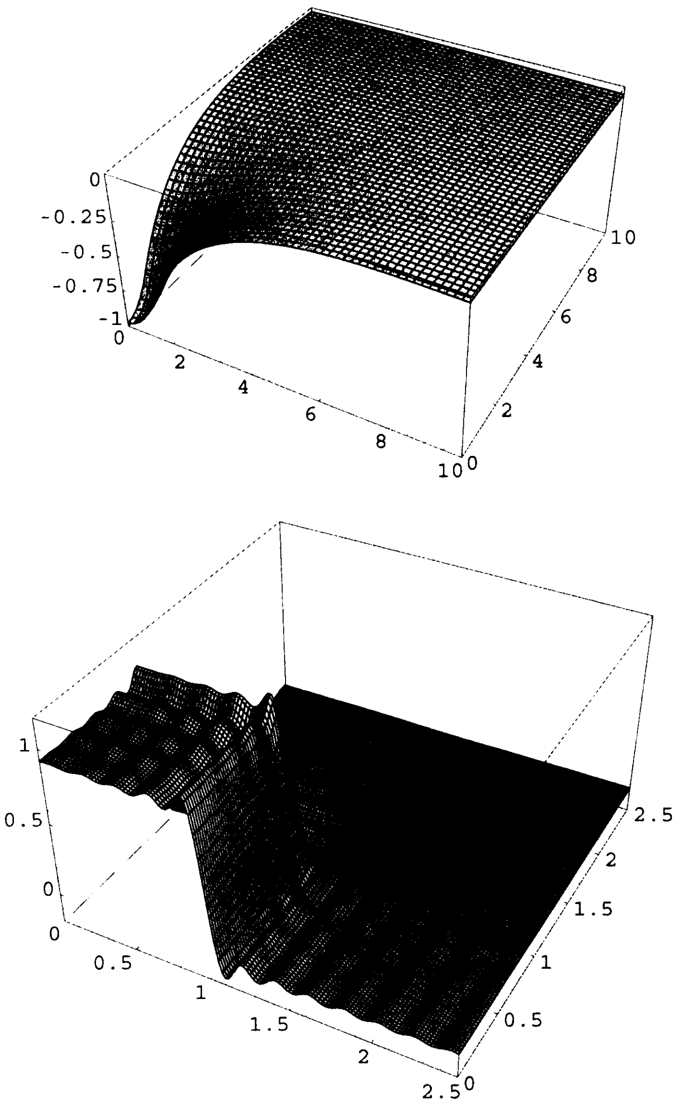


Figure 1: For $g(x_1, x_2) = \chi_{[-1,1]}(x_1) \times \chi_{[-1,1]}(x_2)$ on $\mathbf{R}^2$, the figures of $F^*_{\lambda,2,g}(x_1, x_2)$ and $\Delta F^*_{\lambda,2,g}(x_1, x_2)$ for $\lambda = 10^{-2}$.

3 Maximal functions for Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1

二村 俊英　大同工業大学
水田 義弘　広島大学・総合科学部

有界開集合 D 上の連続関数 $p(\cdot): D \to [1, \infty)$ に対して,

$$\int_D \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx < \infty \qquad (\exists\lambda > 0)$$

となる D 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(D)$ とし，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),D} = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \int_D \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}$$

で定める [2, Kováčik-Rákosník]．特に，$p(x) = p_0$ (一定) のとき，$L^{p(\cdot)}(D) = L^{p_0}(D)$.

局所可積分関数 f に対して，極大関数 $\mathcal{M}f$ を次で定める:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

次の事実はよく知られている．

定理 A[4].

(1) $1 < p_0 \le \infty$ のとき，$\mathcal{M}$ は $L^{p_0}(D)$ から $L^{p_0}(D)$ への有界作用素である．

(2) D が有界なとき，$\mathcal{M}$ は $L\log L(D)$ から $L^1(D)$ への有界作用素である．ここに，$L\log L(D)$ は Orlicz 空間とする．

文献 [1] で，L. Diening は，$1 < \inf_{x\in D} p(x) \le \sup_{x\in D} p(x) < \infty$ となる $p(\cdot)$ が

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c}{\log(1/|x-y|)}$$

を満たすとき，$\mathcal{M}$ が $L^{p(\cdot)}(D)$ から $L^{p(\cdot)}(D)$ への有界作用素であることを証明した．

本講演では，定理 A(2) と関連して，$\mathcal{M}$ が $L^{p(\cdot)}(D)$ から $L^1(D)$ への有界作用素となるための $p(\cdot)$ の条件を考察する．

$r > 0$ に対して，$D_r = \{x \in D : \delta(x) < r\}$ と定義する．ここに，$\delta(x)$ を x と境界 ∂D との距離とする．

定理. 有界開集合 D は,

$$|D_r| \le Cr$$

を満たす. $p(\cdot)$ は, $\delta(x)$ が十分小さいとき,

$$p(x) = 1 + \frac{\log(\log(1/\delta(x)))}{\log(1/\delta(x))} + \frac{b}{\log(1/\delta(x))} \qquad (b \in \mathbf{R})$$

を満たすとする. このとき, $\mathcal{M}$ は $L^{p(\cdot)}(D)$ から $L^1(D)$ への有界作用素である.

文献 [3] で, P. Hästö は,

$$p(x) = 1 + \frac{a\log(\log(1/\delta(x)))}{\log(1/\delta(x))} \qquad (a > 1)$$

のときについて論じており, この定理は P. Hästö の結果を含んでいる.

また, 次の命題から, 定理の $p(\cdot)$ の条件が最良であることがわかる:

命題. $p(\cdot)$ は, 単位球 $\mathbf{B}$ から $(1, \infty)$ への連続関数で, $1 - |x| < r_0$ のとき,

$$p(x) = 1 + \frac{\log(\log(1/(1-|x|)))}{\log(1/(1-|x|))} - \frac{\log(\log(\log(1/(1-|x|))))}{\log(1/(1-|x|))}$$

を満たすとする. このとき, $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbf{B})$ で,

$$\int_{\mathbf{B}} \mathcal{M}f(x)dx = \infty$$

となるものが存在する.

参考文献

[1] L. Diening, Maximal functions in generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. (to appear)

[2] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

[3] P. Hästö, The maximal operator in Lebesgue spaces with variable exponent approaching 1, preprint.

[4] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

4 Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent

二村 俊英　大同工業大学
水田 義弘　広島大学・総合科学部
下村 哲　　広島大学・教育学部

有界開集合 D 上の連続関数 $p(\cdot) : D \to [1,\infty)$ に対して,

$$\int_D \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx < \infty \qquad (\exists\lambda > 0)$$

となる D 上の可測関数 f からなる関数空間を $L^{p(\cdot)}(D)$ とし，そのノルムを

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot),D} = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \int_D \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}$$

で定める ([4, Kováčik-Rákosník]). 特に，$p(x) = p_0$ (一定) のとき，$L^{p(\cdot)}(D) = L^{p_0}(D)$.

局所可積分関数 f に対して，極大関数 $\mathcal{M}f$ を次で定める:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{D\cap B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

本講演では $p(\cdot)$ は,

$$\text{(p1)} \quad |p(x) - p(y)| \le \frac{a_1 \log(\log(1/|x-y|))}{\log(1/|x-y|)} + \frac{a_2}{\log(1/|x-y|)}$$
$$(x \in D,\, y \in D,\, |x-y| < 1/2\ )$$

を満たすとする $(a_1 \ge 0, a_2 \ge 0)$.

定理 1. $p(\cdot)$ は，$1 < \inf_{x\in D} p(x) \le \sup_{x\in D} p(x) < \infty$ かつ $(p1)$ を満たすとする. $a_1 > 0$ のとき $a > a_1$，$a_1 = 0$ のとき $a = 0$ として，$A(x) = an/p(x)^2$ とおく. このとき，$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ ならば,

$$\int_D \left(\mathcal{M}f(x)(\log(\mathcal{M}f(x) + 2))^{-A(x)}\right)^{p(x)} dx \le C$$

$a_1 = 0$ のとき, 定理 1 は，L. Diening [2] が証明した. 一般領域の場合には，さらなる条件をつけて，同様の結果を得る (Cruz-Uribe, Fiorenza and Neugebauer [1])

D 上の関数 f に対する α $(0<\alpha<n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_D |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

を考える.

$$1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/n$$

とする.

定理 2. $p(\cdot)$ は，$1 < \inf_{x\in D} p(x) \le \sup_{x\in D} p(x) < n/\alpha$ かつ (p1) を満たすとする．$a_1 > 0$ のとき $a > a_1$，$a_1 = 0$ のとき $a = 0$ として，$A(x) = an/p(x)^2$ とおく．このとき，$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ ならば,

$$\int_D \left(U_\alpha f(x)(\log(U_\alpha f(x)+2))^{-A(x)}\right)^{p^\sharp(x)} dx \le C$$

文献 [3] で，L. Diening は，$a_1 = 0$ のときについて論じている.

参考文献

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Math. **28** (2003), 223–238.

[2] L. Diening, Maximal functions in generalized $L^{p(\cdot)}$ spaces, Math. Inequal. Appl. (to appear)

[3] L. Diening, Riesz potentials and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$, Math. Nachr. **263**(1) (2004), 31–43.

[4] O. Kováčik and J. Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. **41** (1991), 592–618.

5 Liouville's theorem for monotone Sobolev functions

二村 俊英　大同工業大学
水田 義弘　広島大学・総合科学部

1. Monotone 関数の Liouville の定理

D を ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の開集合とする．D 上の連続関数 u が Lebesgue [4] の意味で **monotone** であるとは，$\overline{G} \subset D$ となる任意の開集合 G に対して，

$$\max_{\overline{G}} u = \max_{\partial G} u \qquad \text{かつ} \qquad \min_{\overline{G}} u = \min_{\partial G} u$$

が成り立つときをいう．D 上の monotone 関数 u がソボレフ空間 $W^{1,p}_{loc}(D)$ に属し，$p > n-1$，$\overline{B(x_0, R)} \subset D$, $0 < r < R$ に対して，

$$|u(x)-u(x')|^p \leq C_p \frac{n-p}{R^{n-p} - r^{n-p}} \int_{A(x_0;r,R)} |\nabla u(y)|^p \, dy \quad (\forall x, x' \in B(x_0, r)) \quad (1)$$

が成り立つ ($p = n$ のときは $(n-p)/(R^{n-p} - r^{n-p})$ の代わりに $(\log(R/r))^{-1}$). ここに，$A(x_0; r, R) = B(x_0, R) \setminus B(x_0, r)$ であり，C_p は次元 n と p のみに依存する正定数である．

定理 1. $p > n-1$ のとき，$\mathbf{R}^n$ 上の monotone 関数 u が

$$\liminf_{r \to \infty} r^{p-n} \int_{A(0;r/2,r)} |\nabla u(y)|^p \, dy = 0$$

を満たすならば，u は定数である．

系 1. $p > n-1$ のとき，$\mathbf{R}^n$ 上の monotone 関数 u が $\alpha \geq p - n$ となる α に対して，

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u(y)|^p (1 + |y|)^\alpha \, dy < \infty$$

を満たすならば，u は定数である．

系 2 (cf. [6]). $1 < q < p/(n-1)$ で，w を A_q-weight とする．$\mathbf{R}^n$ 上の monotone 関数 u が

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{r^p}{w(B(0,r))} \int_{A(0;r/2,r)} |\nabla u(y)|^p w(y) \, dy = 0$$

を満たすならば，u は定数である．

2. Weakly monotone 関数の連続性

ソボレフ関数 $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ が Manfredi [5] の意味で D 上 **weakly monotone** であるとは，$\overline{G} \subset D$ となる任意の開集合 G と $(k-u)^+ + (u-K)^+ \in W^{1,p}_0(G)$ となる定数の組 $k \le K$ に対して，

$$k \le u \le K \qquad \text{a.e. on } G$$

が成り立つときをいう．$p > n-1$ のとき，weakly monotone 関数 $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ は，不等式 (1) をほとんどすべての $x, x' \in B(x_0, r)$ に対して満たす．また，

$$u^*(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy$$

とおくと，D 上ほとんど至るところ $u = u^*$ であり，すべての $x, x' \in B(x_0, r)$ に対して，不等式 (1) を満たす．以下，u と u^* を同一視することにする．

(1) より，$p \ge n$ のとき，weakly monotone 関数は連続である．

定理 2. D 上の weakly monotone 関数 u が

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_D |\nabla u(y)|^{n-\varepsilon}\, dy = 0$$

を満たすならば，u は D 上で連続である．

参考文献

[1] N. Fusco, P. L. Lions and C. Sbordone, Sobolev imbedding theorems in borderline cases, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 561-565.

[2] J. Kauhanen, P. Koskela and J. Malý, Mappings of finite distortion, discreteness and openness, Arch. Ration. Mech. Anal. **160** (2001), 135-151.

[3] P. Koskela, J. J. Manfredi and E. Villamor, Regularity theory and traces of $\mathcal{A}$-harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 755-766.

[4] H. Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet, Rend. Cir. Mat. Palermo **24** (1907), 371-402.

[5] J. J. Manfredi, Weakly monotone functions, J. Geom. Anal. **4** (1994), 393-402.

[6] E. Villamor and B. Q. Li, Analytic properties of monotone Sobolev functions, Complex Variables Theory Appl. **46** (2001), 255-263.

6　一変数代数的局所コホモロジー類の満たす常微分方程式系と留数計算

田島慎一（新潟大学工学部情報工学科）
加藤涼香　庄司卓夢（新潟大学大学院自然科学研究科）

$K=\mathbb{Q}$ 係数の既約な一変数多項式 $f(x)\in K[x]$ に対し，$X=\mathbb{C}$ 上の有理関数 $\frac{1}{f(x)^\ell}$ の定める代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{f(x)^\ell}]\in H^1_{[Z]}(K[x])$ を σ で表す．ここで，Z は f の零点集合 $\{x\in X\mid f(x)=0\}$ である．

代数的局所コホモロジー類 σ の微分作用素環 $D_X=K[x,\frac{d}{dx}]$ における anihilator イデアルを $Ann_{D_X}(\sigma)$ とおく．微分作用素 P,Q を

$$P=f\frac{d}{dx}+\ell f'(x),\quad Q=f(x)^\ell$$

で定めると，$Ann_{D_X}(\sigma)$ は P,Q が D_X 上生成する左イデアル $D_X\langle P,Q\rangle$ と等しいことが分かる．

常微分方程式系 M,N をそれぞれ $M=D_X/Ann_{D_X}(\sigma),N=D_X/D_X\langle f\rangle$ で定める．

補題 次が成り立つ．

(i) $\dim_K Hom_{D_X}(M,N)=\deg f$.

(ii) $Hom_{D_X}(M,N)$ は右 $K[x]/\langle f\rangle$ 加群の構造を持つ．

いま $Hom_{D_X}(M,N)$ から零でない要素 ρ を取ると，$Hom_{D_X}(M,N)$ は $K[x]/\langle f\rangle$ 上 ρ により生成できることになる．

零階の微分作用素 g_i を $g_i=(f'(x))^i\ mod\langle f\rangle$ で定め，

$$B_0=1,B_1=(-\frac{d}{dx})g_1,..,B_{\ell-1}=(-\frac{d}{dx})^{\ell-1}g_{\ell-1}$$

とおく．常微分方程式系 L を $L=D_X/D_X\langle Q\rangle$ で定める．この時，$Hom_{D_X}(L,N)$ は右 $K[x]/\langle f\rangle$ 加群として $B_0,B_1,...,B_{\ell-1}$ で生成される．

$c_i(x)\in K[x]/\langle f\rangle$ なる c_i を零階の微分作用素 とみなし R を $R=\sum B_ic_i$ で定める．この時，作用素 R が $Hom_{D_X}(M,N)$ の要素を定める必用十分条件 $PR\in D_X\langle f\rangle$ を書き下すことで次の結果を得る．

補題 $c_i(x)\in K[x]/\langle f\rangle$ なる c_i を零階の微分作用素 とみなし R を $R=\sum B_ic_i$ で定める．この時，$Hom_{D_X}(M,N)$ の要素を定めるような作用素 R であり条件 $c_{\ell-1}=1$ を満たすものが唯一つ存在する．

零点集合 Z に台を持つデルタ関数 δ_Z を $[\frac{f'(x)}{f(x)}]$ で定める. 上記の補題にある作用素 R を用いることで, 常微分方程式系 M の代数的局所コホモロジー解を次のように記述することができる.

命題 次が成り立つ.

$$Hom_{D_X}(M, H^1_{[Z]}(K[x])) = \{Rb\delta_Z \mid b \in K[x]/\langle f \rangle\}$$

代数的局所コホモロジー類 σ は常微分方程式系 M の解であることから, 次が従う.

命題 条件 $(\ell-1)!(f'(x))^{2\ell-1}b(x) = 1\ mod\langle f \rangle$ をみたす $b(x) \in K[x]/\langle f \rangle$ を零階の微分作用素とみなし $S = Rb$ とおく. この時 $\sigma = S\delta_Z$ が成り立つ.

点 $\alpha \in Z$ における留数

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{h(x)}{f^\ell(x)}dx$$

に関し次を得る.

定理 $r(x)$ を

$$r(x) = b(x)\sum g_i(x)\frac{d^ih}{dx^i}(x)\ mod\langle f \rangle$$

で定める. この時, 点 $\alpha \in Z$ における有理関数 $\frac{h(x)}{f^\ell(x)}$ の留数値は $r(\alpha)$ と等しい.

参考文献

[1] 田島慎一, 確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解, 京都大学数理解析研究所講究録1336「双曲型方程式と非正則度」(2003), 121–132.

[2] 加藤涼香, 田島慎一, 有理関数のローラン展開アルゴリズムと代数的局所コホモロジー, 京都大学数理解析研究所講究録 「Computer Algebra-Design of Algorithms,Implementations and Applications」, 掲載予定.

7 Notes on Sakaguchi functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Rikuo Yamakawa (Shibaura Institute of Technology)
Tadayuki Sekine (Nihon University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ normalized by

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}(\alpha)$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)}\right) > \alpha$$

for some $\alpha\ (0 \leqq \alpha < 1/2)$ and for all $z \in \mathbb{U}$.

A function $f(z) \in \mathcal{S}(0)$ is said to be Sakaguchi function which was considered by K.Sakaguchi (1959). A function $f(z) \in \mathcal{S}(0)$ is starlike with respect to symmetrical points. Also let $\mathcal{T}(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which satisfy $zf'(z) \in \mathcal{S}(\alpha)$.

Theorem 1. *If $f(z) \in \mathcal{S}(\alpha)$, then*

$$|a_{2n}| \leqq \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(j - 2\alpha)}{n!n} \quad (n \geqq 1)$$

and

$$|a_{2n+1}| \leqq \frac{\prod_{j=1}^{n}(j - 2\alpha)}{n!} \quad (n \geqq 1).$$

Theorem 2. *If $f(z) \in \mathcal{T}(\alpha)$, then*

$$|a_{2n}| \leqq \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(j - 2\alpha)}{n!2n^2} \quad (n \geqq 1)$$

and

$$|a_{2n+1}| \leqq \frac{\prod_{j=1}^{n}(j - 2\alpha)}{n!(2n+1)} \quad (n \geqq 1).$$

N.E.Cho, O.S.Kwon and S.Owa (1993) have shown that if $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$(1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \{2(n-1)|a_{2n-2}| + (2n-1-2\alpha)|a_{2n-1}|\} \leqq 1-2\alpha$$

for some $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1/2)$, then $f(z) \in \mathcal{S}(\alpha)$ and satisfies

$$(2) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \{4(n-1)^2|a_{2n-2}| + (2n-1)(2n-1-2\alpha)|a_{2n-1}|\} \leqq 1-2\alpha$$

for some $\alpha\,(0 \leqq \alpha < 1/2)$, then $f(z) \in \mathcal{T}(\alpha)$.

Let us define the subclass $\mathcal{S}_0(\alpha)$ of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ satisfying the coefficient inequality (1) and the subclass $\mathcal{T}_0(\alpha)$ of $\mathcal{A}$ consisting of $f(z)$ satisfying the coefficient inequality (2).

Theorem 3. *If $f(z) \in \mathcal{S}_0(\alpha)$, then*

$$|z| - \sum_{n=2}^{j} |a_n||z|^n - A_j|z|^{j+1} \leqq |f(z)| \leqq |z| + \sum_{n=2}^{j} |a_n||z|^n + A_j|z|^{j+1},$$

where

$$A_j = \frac{(1-2\alpha) - \sum_{n=2}^{j} \{n - (1+(-1)^{n+1})\alpha\}\,|a_n|}{j+1-(1+(-1)^j)\alpha} \qquad (j \geqq 2)$$

and

$$1 - \sum_{n=2}^{2j-2} n|a_n||z|^{n-1} - B_j|z|^{2j-2} \leqq |f'(z)| \leqq 1 + \sum_{n=2}^{2j-2} n|a_n||z|^{n-1} + B_j|z|^{2j-2},$$

where

$$B_j = \frac{(2j-1)\left\{(1-2\alpha) - \sum_{n=2}^{2j-2} \{n-(1+(-1)^{n+1})\alpha\}\,|a_n|\right\}}{2j-1-2\alpha} \qquad (j \geqq 2).$$

Theorem 4. *If $f(z) \in \mathcal{T}_0(\alpha)$, then*

$$|z| - \sum_{n=2}^{j} |a_n||z|^n - C_j|z|^{j+1} \leqq |f(z)| \leqq |z| + \sum_{n=2}^{j} |a_n||z|^n + C_j|z|^{j+1},$$

where

$$C_j = \frac{(1-2\alpha) - \sum_{n=2}^{j} n\,\{n-(1+(-1)^{n+1})\alpha\}\,|a_n|}{(j+1)\{j+1-(1+(-1)^j)\alpha\}} \qquad (j \geqq 2)$$

and

$$1 - \sum_{n=2}^{j} n|a_n||z|^{n-1} - D_j|z|^j \leqq |f'(z)| \leqq 1 + \sum_{n=2}^{j} n|a_n||z|^{n-1} + D_j|z|^j,$$

where

$$D_j = \frac{(1-2\alpha) - \sum_{n=2}^{j} n\,\{n-(1+(-1)^{n+1})\alpha\}\,|a_n|}{j+1-(1+(-1)^j)\alpha} \qquad (j \geqq 2).$$

8 Essential Norms Of Integration Operators And Multipliers On Bergman Spaces

米田　力生　　(愛知教育大学)

この講演ではベルグマン空間上の積分作用素のエッセンシャルノルムに関する発表を行う。$1 \leq p < +\infty$, に対して, Lebesgue space $L^p(D, dA)$ は，次を満たす D 上のルベーグ可測関数からなるバナッハ空間とする：

$$\| f \|_{L^p(dA)} := \left(\int_D |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

ベルグマン空間 $L^p_a(D)$ は $L^p(D, dA)$ の閉部分空間で解析関数全体からなるものとする。D 上の解析関数 g に対して, 作用素 J_g , I_g, M_g は次のように定義する:

$$J_g(f)(z) := \int_0^z g'(\zeta) f(\zeta) d\zeta\,, \quad I_g(f)(z) := \int_0^z f'(\zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad M_g(f)(z) := g(z) f(z).$$

これらのエッセンシャルノルムに関する次のような結果を得た：

定理 1. $1 < p < \infty$ とする. そのとき，D 上の解析関数 g に関して, *the essential norm of the operator* J_g *on* L^p_a は次である：

$$\| J_g \|_e \sim \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} (1 - |z|^2) |g'(z)|$$

$$i.e.\ C_1 \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} (1 - |z|^2) |g'(z)| \leq \| J_g \|_e \leq C_2 \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} (1 - |z|^2) |g'(z)|,$$

for some constants $C_1, C_2 > 0$.

定理 2. $1 < p < \infty$ とする. そのとき，D 上の解析関数 g に関して, *the essential norm of the operator* I_g *on* L^p_a は次である：

$$\| I_g \|_e \sim \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)| (= \| g \|_\infty), \quad i.e.\ C \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)| \leq \| I_g \|_e \leq \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)|.$$

定理 3. $1 < p < \infty$ とする. そのとき，D 上の解析関数 g に関して, *the essential norm of the operator* M_g *on* L^p_a は次である：

$$\| M_g \|_e = \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)| (= \| g \|_\infty).$$

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149-158.

[2] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1997),337-356.

[3] P.L.Duren, Theory of H^p spaces (Academic Press, 1970).

[4] H.Hedenmalm, B.Korenblum, K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, in: Graduate Texts in Mathematics, vol. 199, Springer, New York, 2000.

[5] Ch.Pommerenke, Schlichte Funktionen und analytische Functionen von beschrankter mittlerer Oszillation, Comment.Math.Helv.52(1977),591-602.

[6] A.L.Shields, Cyclic vectors in Banach spaces of analytic functions, in: S.C.Power(Ed.), Operators and Function Theory, Reidel, 1985, pp.315-349.

[7] A.G.Siskakis and R.Zhao, A Volterra type operator on spaces of analytic functions, Contemporary Mathematics.232(1999),299-311.

9 A MAXIMAL OPERATOR ASSOACIATED WITH DIEUDONNÉ'S LEMMA

須川 敏幸
広島大学大学院理学研究科

本講演では Yong Chan Kim 氏との共同研究 [3] の一部分について解説を行う．この論文の主結果は多分に技術的であるが，ここで述べるテクニックについては普遍的なアイデアも含まれていると期待される．

まず標題にある Dieudonné の補題 (cf. [2, p. 198]) とは次のように述べられる．

定理 1 (Dieudonné [1]). z_0, w_0 **を単位円板内の与えられた点で，** $|w_0| \leq |z_0| \neq 0$ **を満たすものとする．** $\mathcal{F}$ **を単位円板上の正則函数** ω **で，** $|\omega| < 1, \omega(0) = 0, \omega(z_0) = w_0$ **を満たすもの全体のなす集合とする．このとき，集合** $\{\omega'(z_0) : \omega \in \mathcal{F}\}$ **は** w_0/z_0 **を中心とし，** $(|z_0|^2 - |w_0|^2)/|z_0|(1-|z_0|^2)$ **を半径とする閉円板である．さらに，この円板の境界点には唯一の** $\mathcal{F}$ **の元が対応する．**

特に $\omega \in \mathcal{F}$ に対しては

$$|\omega'(z_0)| \leq \left|\frac{w_0}{z_0}\right| + \frac{|z_0|^2 - |w_0|^2}{|z_0|(1-|z_0|^2)} = K(|z_0|, |w_0|)$$

が成り立つ．ここで，$0 \leq s \leq r < 1$ に対して

$$K(r,s) = \frac{s}{r} + \frac{r^2 - s^2}{r(1-r^2)} = \frac{s(1-r^2) + r^2 - s^2}{r(1-r^2)}$$

と置いた．ただし，$K(r,r) = 1$ が常に成り立つことに注意して，$K(0,0) = 1$ としておく．

$C([0,1))$ を区間 $[0,1)$ 上の（複素数値）連続函数の全体とし，その元 F に対して

$$\hat{F}(r) = \max_{0 \leq s \leq r} K(r,s)|F(s)|, \quad 0 \leq r < 1,$$

と定義する．すると明らかに $\hat{F} \in C([0,1))$ である．$F \mapsto \hat{F}$ によって定義される写像 $C([0,1)) \to C([0,1))$ を K に付随する最大値作用素と呼ぶことにする．実はこの作用素は，$C([0,1))$ 上で定義される次の Bloch 型ノルムに関して著しい性質を持っていることが分かる：

$$\|F\| = \sup_{0 \leq r < 1} (1-r^2)|F(r)|.$$

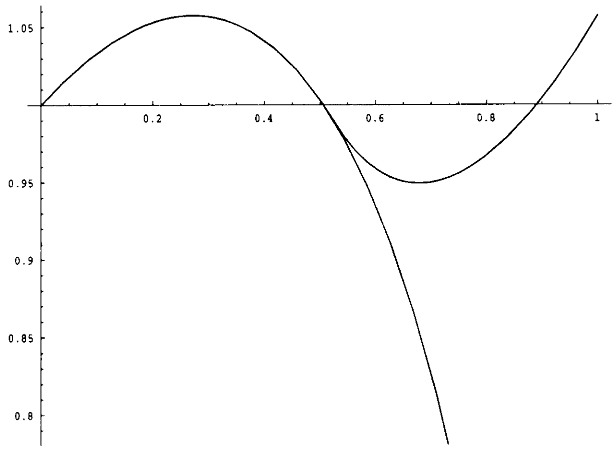
まず，

$$(1-r^2)|F(r)| \leq (1-r^2)\hat{F}(r) \leq \max_{0 \leq s \leq r}(1-s^2)|F(s)|$$

が $0 \leq r < 1$ について成り立つことが容易に分かる．従って，特に $\|\hat{F}\| = \|F\|$ である．

次にノルム $\|F\|$ の定義の上限が，ある $r_0 \in [0,1)$ において達成されると仮定しよう．すると，上の不等式から $(1-r_0^2)\hat{F}(r_0) = \|F\|$ であることが分かる．実は函数 $(1-r^2)\hat{F}(r)$ は $r \to 1$ のとき，もう一度この値 $\|F\|$ に近づくことが分かる．例として函数 $F(r) =$

$(1-Ar)/(1-Br)=\varphi_{A,B}(r), A=0.7, B=-0.3,$ に対する $(1-r^2)F(r)$ のグラフ（下）と $(1-r^2)\hat{F}(r)$ のグラフ（上）を図示した.



定理 2. 任意の $F \in C([0,1))$ **について次が成り立つ**：

$$\|F\| = \lim_{r\to 1-}(1-r^2)\hat{F}(r).$$

任意の $F, G \in C([0,1))$ に対して $(F+G)^\wedge \leq \hat{F}+\hat{G}$ が成り立つのは定義から明らかであるが，この定理から特に次の系を得る.

系 3.

$$\|F\|+\|G\| = \|\hat{F}|+\|\hat{G}\| = \|\hat{F}+\hat{G}\|.$$

この作用素の応用については，講演時に簡単に述べることにしたい.

References

1. J. Dieudonné, *Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornée d'une variable complexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **48** (1931), 247–358.
2. P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, 1983.
3. Y. C. Kim and T. Sugawa, *Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions*, Preprint (2004).

10 On a defect relation for holomorphic curves

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. **(a)** Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a don-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \rightarrow \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer. For $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$, we put

$$(\boldsymbol{a}, f(z)) = a_1 f_1(z) + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}(z), \quad (\boldsymbol{a}, f) = a_1 f_1 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}.$$

When $(\boldsymbol{a}, f)$ has at least one zero, we say that $\boldsymbol{a}$ has multiplicity m if all the zeros of the equation $(\boldsymbol{a}, f(z)) = 0$ have multiplicity at least m, while at least one zero has multiplicity m. When $(\boldsymbol{a}, f)$ has no zero, we set $m = \infty$. We put

$$\delta_0(\boldsymbol{a}, f) = 1 - \frac{n}{\max(m, n)}.$$

Then, $0 \leq \delta_0(\boldsymbol{a}, f) \leq \delta_0(\boldsymbol{a}, f) \leq 1$ and $\delta_0(\boldsymbol{a}, f) = 1$ if and only if $m = \infty$.
n

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$.

Defect Relation (see [1]($N = n$), [3]($N > n$)). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequality:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_0(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curve f extremal for the defect relation:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_0(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1. \tag{1}$$

Problem. $\delta_0(\boldsymbol{a}_j, f)$? when (1) holds.

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in P\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

2. Result. We put

$$M = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_0(\boldsymbol{a}, f) > 0\} \quad \text{and} \quad M_1 = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta_0(\boldsymbol{a}, f) = 1\}.$$

Proposition. (a) $\#M_1 \leq N + N/n$ ([2]).
(b) $\#M \leq (n+1)(2N - n + 1)$.

Let m be a positive integer.
Theorem. Suppose that $N > n$. If (1) holds, we have the followings:
(a) For any $\boldsymbol{a} \in X - M_1$, $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 0$.

(b) $d(M_1) \leq (n+1)/2$ and $\#M_1 \leq (2N - n + 1)/2$.

(c) When $n = 2m$, $\#M_1 > (2N - n + 1)/(n + 1)$.

(d) When $n = 2m - 1$, either (I) $\#M_1 > (2N - n + 1)/(n + 1)$ or

(II) q is divisible by $N - m + 1$ and for $p = q/(N - m + 1)$

$$Q = \bigcup_{j=1}^{p} P_j, \quad \#P_j = N - m + 1, \quad d(P_j) = m.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] J. Dufresnoy: Théorie nouvelles des familles complexes normales; applications à l'étude des fonctions algébroïdes. Ann. E. N. S., (3)61(1944), 1-44.

[3] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

11 Schröder 函数の Julia 方向について

柳原　二郎
石崎　克也（日本工業大学）

この講演では Schröder の函数方程式

$$(1) \qquad f(sz) = R(f(z)),$$

の有理型函数解 (Schröder 函数) $f(z)$ の Julia 方向と 有理関数 $R(z)$ の Julia 集合 $\mathcal{J}_R$ の関係について得られた結果を報告する [3]. Schröder 方程式 (1) において, s は複素数定数で $|s| > 1$ とし, $s = |s|e^{2\pi\lambda i}$, $\lambda \in [0,1)$ と書いておく. また, $R(z)$ は次数 2 以上の有理関数で $R(0) = 0$, $R'(0) = s$ を満たすものとしておく. 複素平面全体で有理型な解の存在については, たとえば Steinmezt [4], Valiron [6] などを参照されたい.

Julia 方向について述べておく. 複素平面上の半直線 $d_{\omega_0} = \{z\ ;\ \arg[z] = \omega_0\}$ と 正数 α に対して, 角領域

$$\Omega(\omega_0, \alpha) = \{z\ ;\ |\arg[z] - \omega_0| < \alpha\}$$

を定義しておく. 半直線 d_{ω_0} が $f(z)$ の Julia 方向, または Julia 直線であるとは, 任意の $\alpha > 0$ に対して, $f(z)$ が $\Omega(\omega_0, \alpha)$ において 高々2 個の除外値を除いて $a \in \hat{\mathbb{C}}$ を無限回とることである.

$\Omega(\omega_0, \alpha)$ における $f(z)$ の a 点 を $z_n(a, \omega_0, \alpha)$, $n = 0, 1, \cdots$, と書くことにする.

Schröder 函数についてはその増大の位数 $\rho := \log \deg R / \log |s| > 0$ であたえられることが知られている, たとえば [2], [6] など参照. 位数有限な有理型函数について d_{ω_0} が $f(z)$ の Borel 方向, または Borel 直線であるとは, 任意の $\alpha > 0$ に対して, $f(z)$ が $\Omega(\omega_0, \alpha)$ において 高々 2 個の除外値を除いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|z_n(a, \omega_0, \alpha)|^{\rho(f) - \epsilon}} = \infty \quad \text{for any } \epsilon > 0$$

を満たすことである. 勿論, d_{ω_0} が Borel 方向であれば Julia 方向である.

Theorem 1. λ が無理数とする. このとき, Schröder 函数 $f(z)$ は任意の方向を Borel 方向に持つ.

λ が有理数の場合は, 適当な変換を考えることによって s は正数と仮定してよい.

Theorem 2. $s > 1$ とする. このとき, d_{ω_0} が $f(z)$ の Julia 方向であることの必要十分条件は $f(d_{\omega_0}) \cap \mathcal{J}_R \neq \emptyset$ である.

実際に, $f(d_{\omega_0}) = \mathcal{J}_R$, $f(d_{\omega_0}) \supsetneq \mathcal{J}_R$, $f(d_{\omega_0}) \subsetneq \mathcal{J}_R$ なる例が存在する.

仮定より, 原点は $R(z)$ の Julia 集合に含まれる. 原点における極限集合を

$$\widehat{\mathcal{J}_R}(0) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{\{\arg[w]\ ;\ w \in \mathcal{J}_R,\ 0 < |w| < \epsilon\}}$$

で定義する.

Theorem 3. Schröder 函数 $f(z)$ は $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たすものとする. このとき, $\widehat{\mathcal{J}_R}(0)$ と $\mathbb{J}_f$ は一致する.

証明には角領域での値分布理論が必要になってくる. たとえば, 参考文献 [1], [7] に詳しい. ここでは, Tsuji [5] にある特性関数を応用した.

REFERENCES

[1] A. A. Gol'dberg and I.V. Ostrovskii: Value Distributions of Meromorphic Functions. Nauka, Moskva 1970 (Russian).

[2] G. Gundersen, J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo, and D. Yang: *Meromorphic solutions of generalized Schröder equations.* Aequations Math. 53 (2002), 110–135.

[3] K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Borel and Julia directions of meromorphic Schröder functions.* to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[4] N. Steinmetz: Rational Iteration. Walter de Gruyter, Berlin 1993.

[5] M. Tsuji: Potential Theory in Modern Function Theory. Maruzen, Tokyo 1959.

[6] G. Valiron: Fonctions Analytiques. Press. Univ. de France, Paris 1954.

[7] S.-P. Wang: *On the sectorial oscillation theory of* $f'' + A(z)f = 0$. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Dissertations 92 (1994), 1–66.

12 Generalized Obstacle Problem

広島大学大学院理学研究科　笹井理恵

閉 Riemann 面から有限個の点及び位相的閉球を除いた開 Riemann 面 S を finite topological Riemann 面と呼びます。S のコンパクト部分集合 E が Obstacle であるというのは、$S \setminus E$ が連結かつ E を含む S 上の位相的球が存在するときをいうものとします。

本講演では、Obstacle をもつ finite topological Riemann 面においてある極値問題を考えます。これは、Obstacle の成分が有限個の場合 ([3]) の一般化となります。さらに極値的元のある種の一意性及び系として、有限種数開 Riemann 面の conformal slit mapping theorem が得られることを示します。

S : finite topological Riemann surface、S^{d} : S の Schottky double、E : obstacle on S

$A(S) = \{\varphi(z)dz^2; S$ 上の可積分正則 2 次微分で S の理想境界上$\varphi(z)dz^2 > 0\}$

$\mathfrak{S}(S^{\mathrm{d}}) = \{S^{\mathrm{d}}$ 上の単純閉曲線で 0 及び puncture にホモトピックでない$\}$

$\mathfrak{S}[S^{\mathrm{d}}] = \{\mathfrak{S}(S^{\mathrm{d}})$ の homotopy class$\}$

$\varphi \in A(S) \setminus \{0\}$ を固定する。$\varphi^{\mathrm{d}} : \varphi$ の S^{d} への対称的拡張

$\forall \gamma \in \mathfrak{S}(S^{\mathrm{d}})$ に対して γ 及び $[\gamma]$ の φ^{d} に関する height が次で定義される。

$$\mathrm{height}_{\varphi^{\mathrm{d}}}(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{Im}\,(\sqrt{\varphi^{\mathrm{d}}(z)}dz), \quad \mathrm{height}_{\varphi^{\mathrm{d}}}[\gamma] = \inf_{\beta\sim\gamma \ \mathrm{in} S^{\mathrm{d}}} \mathrm{height}_{\varphi^{\mathrm{d}}}(\beta)$$

$\mathfrak{F}(S,E) := \{(g, S_g) : g$ は $S \setminus E$ から S と同じタイプのある Riemann 面 S_g への埋め込みで g は S の理想境界及び puncture をそれぞれ S_g のそれにうつす。$\}$

$\forall (g, S_g) \in \mathfrak{F}(S,E)$ は $(g)_* : \pi_1(S^{\mathrm{d}}) \to \pi_1(S_g^{\mathrm{d}})$ の同型を induce する。この同型によって、$\varphi_g \in A(S_g) \setminus \{0\}$ で

$$\forall [\gamma] \in \mathfrak{S}[S_g^{\mathrm{d}}] \ \ \mathrm{height}_{\varphi_g^{\mathrm{d}}}[\gamma] = \mathrm{height}_{\varphi^{\mathrm{d}}}(g)_*^{-1}(\gamma)$$

を満たすものが一意に存在することが知られている。このようにして得られる φ_g^{d} の L^1 ノルムの上限を考える。

定理 1(存在) S : finite topological Riemann 面、 $\varphi \in A(S) \setminus \{0\}$ $E \subset S$: Obstacle set

$\mathfrak{F}(S,E) = \{(g, S_g) : g$ は $S \setminus E$ から S と同じタイプのある Riemann 面 S_g への埋め込みで S の境界及び puncture をそれぞれ S_g のそれにうつす$\}$

このとき、$\exists (f, S_f) \in \mathfrak{F}(S,E)$ s.t. $\|\varphi_f^{\mathrm{d}}\|_{L^1(S_f^{\mathrm{d}})} = \sup\{\|\varphi_g^{\mathrm{d}}\|_{L^1(S_g^{\mathrm{d}})} : (g, S_g) \in \mathfrak{F}(S,E)\}$

$E_f := S_f \setminus f(S \setminus E)$ は測度零であり E_f の各成分は

(i) φ_f の horizontal arc, or

(ii) φ_f の horizontal arcs と critical points の連結和

この (f, S_f) を極値問題 (S, E, φ) の極値的元とよぶ。

定理 2(一意性) 定理 1 と同じ仮定のもとで、さらに $(g, S_g) \in \mathfrak{F}(S,E)$ も極値的元ならば、

$$\varphi_g \circ u (u')^2 = \varphi_f \quad \mathrm{in}\ f(S \setminus E)$$

ここで $u = g \circ f^{-1}$ である。

系 (conformal slit mapping theorem)

有限種数開 Riemann 面 R は同種数の閉 Riemann 面 $\tilde{R}$ に捕集合の測度が 0 かつ補集合の各成分が $\tilde{R}$ 上定義されたある正則 2 次微分の horizontal trajectory arc もしくは、horizontal trajectory arcs 及び critical points の連結和からなるように埋め込まれる。

References

[1] L. V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton, New Jersey Princeton University Press, 1960.

[2] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand Reinhold, Princeton, 1966.

[3] R. Fehlmann and F. P. Gardiner, *Extremal Problem for Quadratic Differentials*, Michigan Math. J. **42** (1995), 573-591.

[4] F. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and Quadratic differentials*, Wiley Interscience, 1987.

[5] F. P. Gardiner and N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller Theory*, Amer. Math. Soc., 2000.

[6] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An Introduction to Teichmüller Space*, Springer-Verlag, Tokyo, 1992.

[7] C. Maclachlan and W. J. Harvey, *On mapping-class groups and Teichmüller Spase*, Proc. London Math. Soc. (3) 30 (1975), 496-512.

[8] L. Sario and M. Nakai, *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1970.

[9] R. Sasai, *On uniqueness of obstacle problems on finite Riemann surface*, preprint.

[10] M. Shiba, *The Riemann-Hurwitz relation, parallel slit covering map, and continuation of an open Riemann surface of finite genus*, Hiroshima Math. J., **14**, (1984)

[11] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.

ちょうふこ

13 二葉球面の貼付弧の分類

中井 三留（名工大・名誉教授）

複素球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 内に単純弧 γ をとり, $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma$ の 2 枚の写しを γ に沿って交差状に貼り合わせて得られる 2 葉球面（$\widehat{\mathbb{C}}$ の 2 葉被覆リーマン面）$\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ を次の様に記すと便利である ([4]):

$$\widehat{\mathbb{C}}_\gamma := (\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma)\biguplus{}_\gamma(\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma).$$

γ を $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ 生成の貼付弧と呼ぶ. この限りではどの様に γ をとっても $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ は等角的には同一の $\widehat{\mathbb{C}}$ そのもののままである. 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の正則領域の閉被である連続体 A, B で互いに素なものをとる. 特に γ を $\widehat{\mathbb{C}}\setminus(A\cup B)$ 内にとって $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ を生成するときの γ を (A,B) に関する**貼付弧**と言う. 元来 A と B は同一の $\widehat{\mathbb{C}}$ の 2 集合であるが, それらを $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ へ埋め込んで考えるときは A はその一つの葉 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma$ に入り B はいまひとつの別の葉 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\gamma$ に入っているものと理解する：

$$\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus(A\cup B)=\Big(\widehat{\mathbb{C}}\setminus(A\cup\gamma)\Big)\biguplus{}_\gamma\Big(\widehat{\mathbb{C}}\setminus(B\cup\gamma)\Big).$$

連続体 A を含む $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ 内の開集合 $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B$ に関する $\widehat{\mathbb{C}}_\gamma$ の等角構造での A の変分 2-**容量**を $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B)$ と記し, 同様に, A を含む $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus B$ に関する $\widehat{\mathbb{C}}$ の等角構造での A の変分 2-容量を $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}\setminus B)$ と記す. 2 量 $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B)$ と $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}\setminus B)$ の比較は型問題等色々な応用上の見地からも重要である（[2], [4], [5], [6], [7] 等参照). $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}_\gamma\setminus B)$ が $\mathrm{cap}(A,\widehat{\mathbb{C}}\setminus B)$ ‘より小’(又は‘に等しい’, 又は‘より大’）なる時, (A,B) に関する貼付弧 γ は**劣臨界的**（又は**臨界的**, 又は**優臨界的**）と呼ぶことにする. これについて以下の結果（[3]）が得られたことを報告する.

定理 1.　任意の (A,B) を取る. $\widehat{\mathbb{C}}\setminus(A\cup B)$ の任意の点に対し, それ中心の円板があって, この円板に入る任意の (A,B) に関する貼付弧 γ は劣臨界的である.

定理 2.　任意の (A,B) を取る. $\widehat{\mathbb{C}}\setminus(A\cup B)$ 上の ∂A の調和測度 ω の任意の等高線の任意の部分弧 α の両端点を a,b とするとき, 夫々 a と b 中心の円板 U と V があって次の性質を持つ : (A,B) に関する貼付弧 γ が, γ の両端点を a', b' とするとき, $\overline{a'a}$ と $\overline{bb'}$ が夫々 U と V の半径の部分線分となっていて, γ が $\overline{a'a}+\alpha+\overline{bb'}$ に $\widehat{\mathbb{C}}\setminus(A\cup B)$ 内でホモトープなら, γ は劣臨界的である.

与えられた貼付弧 γ が劣臨界的であることは応用上の観点からは非常に望ましい状況であり, 全ての貼付弧が劣臨界的にならぬかと言う期待があっても可笑しくない. 上記の 2 定理は, 劣臨界的な貼付弧が, 殆どの貼付弧がそうかと思えるほど, 沢山あることを示し上記の期待を支持する方向のものと言える. 本報告の

真の目的は，しかしながら，実は上記の期待に反して劣臨界的でない貼付弧が存在している事を指摘することにある．

連続体の組 (A, B) に対して次の (技術的な) 付帯条件を考える．(A, B) が**同時対称条件**をみたすとは，$\mathbb{C}$ 上のある直線 l があって，A と B 夫々が同時に同一の直線 l に関して対称となることであるとする．A と B が互いに素な閉円板の場合がこの条件がみたされる典型例である．A と B 夫々の中心を結ぶ直線を l にとればよい．

定理 3. **組 (A, B) が同時対称条件を満たすとする．(A, B) に関する貼付弧 γ で優臨界的なものが常に存在する．(一般に無条件の (A, B) に対しても，優臨界的な貼付弧 γ があれば，γ の部分弧の中に必ず臨界的なものが存在するので）上同様 (A, B) が同時対称条件を満たすと，(A, B) に関する貼付弧で臨界的なものが常に存在する．**

この定理は (A, B) に対する上述のような付帯条件など一切なしで一般に成立すること確実と思うが，それを示す為には容量の分岐点に関する変分公式 ([1]) の消滅点 (貼付弧の両端点上の 2 分岐点の一致）での挙動に関する結果を用意しなければならぬので，それはほぼ完成しているものの，今回は初等的扱いで済ます為上記条件を付した．

参 照 文 献

[1] M. Nakai (中井 三留): 動く分岐点に依る容量の変動公式, 函数論分科会 (於筑波大学) 講演アブストラクト, 2004 年 3 月, 13-14.

[2] M. Nakai: *Types of complete infinitely sheeted planes*, Nagoya Math. Jour., To appear.

[3] M. Nakai: *Types of pasting arcs in two sheeted spheres*, Preprint.

[4] M. Nakai and S. Segawa: *A role of the completeness in the type problem for infinitely sheeted planes*, Complex Variables, To appear.

[5] R. Nevannlinna: *Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1970.

[6] L. Sario and M. Nakai: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[7] M. Tsuji: *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzenn, Tokyo, 1959.

14　漸近的タイヒミュラー空間の構造について

宮地 秀樹 (東京電機大学理工学部)

漸近的タイヒミュラー空間は、その定義からリーマン面の『端』の変形空間と見なすことができる。さらに自然な射影が定義できて、漸近的タイヒミュラー空間はタイヒミュラー空間の『下』の空間となる。C.Earle, F.Gardiner, N.Lakic は論文 [1] において漸近的タイヒミュラー空間にはタイヒミュラー空間との関係に対して自然な複素バナッハ多様体の構造が入ることを示した。

この講演では、漸近的タイヒミュラー空間には起点のリーマン面の端の構造から自然に得られる（複素解析的な）積構造を持つことを報告する。さらに漸近的タイヒミュラー空間上の不変距離（Carathéodory 距離、小林距離など）が完備になることを報告する。

参考文献

[1] C.Earle, F.Gardiner, N.Lakic, Asymptotic Teichmüller space, Part I, The complex structure, Comtemp. Math. **256** (2000), 17–38.

特別講演

Complex dynamics and the Nevanlinna theories – forwards and upwards!

奥山裕介
金沢大学理学部数学科
email; okuyama@kenroku.kanazawa-u.ac.jp

1 Picard の定理の複素力学系における一般化

$\hat{\mathbb{C}}$ の自己正則写像 f を有理函数と呼ぶ. その (被覆, 代数) 次数を d で表し, その反復合成を $f^k := f \circ f^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$, $f^0 := \mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ と表す.

f は, $\hat{\mathbb{C}}$ 上の $\mathbb{C}$ 値連続函数全体のなす, 上限ノルムを有する Banach 空間 $\mathcal{D}_0(\hat{\mathbb{C}})$ に送り出し作用素として作用する.

$$(f_*(\phi))(z) := \sum_{w \in f^{-1}(z)} \phi(w) \ (\phi \in \mathcal{D}_0(\hat{\mathbb{C}})). \tag{1}$$

ここで和は f の $w \in f^{-1}(z)$ における局所的次数を込めて取る. f_* の転置 f^* は双対 $\mathcal{D}_0(\hat{\mathbb{C}})'$ に引き戻し作用素として作用し, Riesz の表現定理より双対 $\mathcal{D}_0(\hat{\mathbb{C}})'$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の $\mathbb{C}$ 値正則測度全体に弱位相を入れたものと同一視される. 以下測度の収束はこの位相で考え, 測度は正則測度のみを考える. とても重要な定理は次である.

定理 1.1 (同等分布定理). $\hat{\mathbb{C}}$ 上にある確率測度 μ_f が存在して次を満たす. 任意の $\hat{\mathbb{C}}$ 上の確率測度 μ に対し, $\mu(E(f)) = 0$ であるとき

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(f^k)^* \mu}{d^k} = \mu_f. \tag{2}$$

ここで $E(f)$ は f の例外集合と呼ばれ, 次のように定義される.

$$E(f) := \{z \in \hat{\mathbb{C}}; \#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(z)) < \infty\}. \tag{3}$$

定義 1.1 (値分布). $\hat{\mathbb{C}}$ 上の測度 μ に対し, その引き戻し $f^*\mu$ を f の μ 上の値分布と呼ぶ.

定理 1.1 は, $\hat{\mathbb{C}}$ の大抵の確率測度に対し, f の反復合成による値分布は同じリスケーリング極限を持つことを言っている. このような現象を見出すことは幾何解析および非線型解析で重要な役割を果たすが, 例えば [5] などを見よ.

定理 1.1 はまず f が多項式の場合に Brolin [1] によって示され, その後 Lyubich [8] と Freire, Lopes と Mañé [6] が独立に有理函数の場合に示した. その後 Eremenko と Sodin [3], Hubbard と Papadopol [7], Fornaess と Sibony [4] が別証明を発表している. 筆者 [16] は f の $\mathbb{C}^2$ への持ち上げ (d 次斉次多項式自己写像) の充填 Julia 集合の対数容量の評価を得 (多項式の場合は持ち上げる必要は無く, Brolin は充填 Julia 集合の対数容量をその Green 函数の Robin 定数から求めたが, 有理函数の持ち上げでは (多重)Green 函数はあるものの Robin 定数が無いので別の方法を必要とする), それに基づき有理函数の場合にも Brolin の論法で定理 1.1 を示した.

さて, Nevanlinna 理論は有理型函数の値分布に関する Picard の定理の精密化であった. この節では, 定理 1.1(同等分布定理) が複素力学系の立場からの Picard の定理の精密化と見做せることを解説する.

$\hat{\mathbb{C}}$ の点 ζ が f の反発的固定点, すなわち $f'(\zeta) =: \lambda$ の絶対値が 1 より大であるとする.

注意 1.1 (非反発的サイクルの存在). 次数 > 1 より f は無限個のサイクル (f のある反復合成の固定点) を持ち, そのうち非反発的サイクルは Fatou の有限性定理より高々有限個である. つまり f の適当な反復合成は反発固定点を持つ.

このとき, 次を満たす $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 h が存在し, f の ζ に関する Poincaré 函数と呼ばれる : $h(0) = \zeta$, $h'(0) \neq 0$ かつ $\mathbb{C}$ 上

$$f \circ h = h \circ \lambda. \tag{4}$$

ここで複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ の自己線型写像 $w \mapsto \lambda w$ と同一視する.

Nevanlinna 理論において $E_V(h)$, $E_P(h)$ はそれぞれ有理型函数 h の Valiron または Picard の例外集合, $E_V(\{f^k\})$ は f(の反復合成列) の Valiron の例外集合を表す. 以上の記号のもとで,

主定理 1 (例外集合の同一性, Ok [18]).

$$E(f) = E_V(\{f^k\}) = E_V(h) = E_P(h). \tag{5}$$

主定理 1 の (5) の最初の等号から定理 1.1(同等分布定理) の (2) はすぐに従う. 2 節では, 逆に (2) から (5) の最初の等号を示すことも可能であること, (2) を公理論的ポテンシャル論の観点から取扱うことを解説する.

歴史とともに, Nevanlinna 理論の説明をしながら主定理 1 の証明の概略を解説する.

記号 1.1. σ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の $\sigma(\hat{\mathbb{C}}) = 1$ である球面体積要素, $[z, w]$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の 2 点 z, w 間の弦距離で z, w が互いに対心点の時は 1 である. $\mathbb{D}_t := \{z \in \mathbb{C}; |z| < t\}$ とおく. $\hat{\mathbb{C}}$ の点 w での Dirac 測度を δ_w とかく.

$\mathbb{C}$ 上の有理型函数 g に対して, 清水・Ahlfors の特性 (位数) 函数とは,

$$T(r, g) := \int_0^r \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{\mathbb{D}_t} g^* \mathrm{d}\sigma \quad (r \geq 0). \tag{6}$$

$\hat{\mathbb{C}}$ の点 a に対し, 半径 t, 原点中心の閉円盤内の g の a 点の個数を数える函数は,

$$n(t,a,g) := \int_{\{z\in\mathbb{C};|z|\le t\}} g^*\delta_a \quad (t \ge 0). \tag{7}$$

このとき g の, $\hat{\mathbb{C}}$ の点 a に対する近接函数と個数函数とはそれぞれ,

$$m(r,a,g) := \int_0^{2\pi} \log\frac{1}{[a, g(re^{i\theta})]}\frac{d\theta}{2\pi}, \tag{8}$$

$$N(r,a,g) := \int_0^r \frac{n(t,a,g) - n(0,a,g)}{t}dt + n(0,a,g)\log r \quad (r \ge 0). \tag{9}$$

Nevanlinna の第 1 主要定理は, 多変数化が進んだせいか最近では (6), (8) と (9) の間の $r \to \infty$ での漸近関係式のみを指すことが多く, 次の大域的な形は最近の本には見られない.

定理 1.2 (清水・Ahlfors 型第 1 主要定理). $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 g, $a \in \hat{\mathbb{C}}$ と $r \ge 0$ に対し,

$$m(r,a,g) + N(r,a,g) - T(r,g) = C_a := \lim_{z\to 0}\log\frac{|z|^{n(0,a,g)}}{[g(z),a]} < \infty. \tag{10}$$

力学系では大域的な形が必要なので筆者は自分で考えたが, 実は **Nevanlinna の**本 [12] に書いてあった! (広島大学・須川先生の示唆によります. 原典は大切ですね.)

Valiron または Picard の例外集合とはそれぞれ

$$E_V(g) := \{a \in \hat{\mathbb{C}}; \limsup_{r\to\infty}\frac{m(r,a,g)}{T(r,g)} > 0\}, \tag{11}$$

$$E_P(g) := \hat{\mathbb{C}} - g(\mathbb{C}). \tag{12}$$

(11) の右辺に現れる a から定まる量を g に対する a の Valiron Defekt という.

第 1 主要定理から次が直ちに従う.

系 1.1.

$$E_P(g) \subset E_V(g). \tag{13}$$

そしてここでは省略するが Nevanlinna の第 2 主要定理は, 特に $E_V(g)$ の大きさを与える. Nevanlinna 理論が Picard の定理の精密化と言われる所以である.

ここから力学系に戻ると, まず次は非常に古典的である.

補題 1.1 (Picard の小定理). 有理函数 f と Poincaŕe 函数 h を上述の通りとすると,

$$E(f) = E_P(h). \tag{14}$$

Picard の小定理はさらに, $E(f)$ は高々 2 点からなることも意味する.

Poincaré 函数 h の値分布と同等分布定理を関連付けて論じたのは Eremenko と Sodin [3] が最初である. h に Nevanlinna の第 2 主要定理を適用して次を得る.

定理 1.3 (Eremenko と Sodin [3]).

$$E_V(h) \subset E(f). \text{ 特に } E_P(h) \subset E_V(h) \subset E(f) = E_P(h). \tag{15}$$

しかしながら Eremenko-Sodin [3] では測度の h による $\mathbb{C}$ への持ち上げが考察されている.

有理函数に対してはむしろ有理函数列の値分布を考えるのが自然である (cf. [13], [2], [21], [10]). 次の有理函数列の Nevanlinna 理論は Sodin [20] による.

次数 $d > 1$ の有理函数 f の Valiron 例外集合とは,

$$E_V(\{f^k\}) := \{a \in \hat{\mathbb{C}}; \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{d^k} \int_{\hat{\mathbb{C}}} \log \frac{1}{[f^k, a]} \mathrm{d}\sigma > 0\}. \tag{16}$$

(16) の右辺に現れる a から定まる量を $\{f^k\}$ に対する a の Valiron Defekt という. すると,

$$E(f) \subset E_V(\{f^k\}) \tag{17}$$

は $E(f)$ の各点の $\{f^k\}$ に対する Valiron Defekt の直接計算により示される. 筆者は清水・Ahlfors 型 Nevanlinna の第 1 主要定理を h に適用して次を得た.

定理 1.4 ([18]).

$$E_V(\{f^k\}) \subset E_V(h). \text{ 特に } E(f) \subset E_V(\{f^k\}) \subset E_V(h) = E(f). \tag{18}$$

というわけで, Poincaré 函数に対する Nevanlinna の第 1・第 2 主要定理と複素力学系における同等分布定理は共に, Poincaré 函数に対する Picard の小定理の一般化として同じものと見做せる. 結局, 同等分布定理の証明は Nevanlinna 理論における種々の Defekt の計算に帰着した.

ちなみに μ_f は f の一意的最大エントロピー測度でもある. このことと相俟って同等分布定理を様々なクラスの多変数複素力学系へ拡張しようと試みることがまだはやっている. その源泉となった定理 1.1 自体にもまだまだ解明の余地があるようである.

2 公理論的ポテンシャル論と, 有理半群の同等分布定理

同等分布定理を公理論的ポテンシャル論の観点からさらに見てみよう. $\hat{\mathbb{C}}$ 上の測度 μ に対し, その (球面) ポテンシャルを次のように定める.

$$V_\mu := \int_{\hat{\mathbb{C}}} \log \frac{1}{[\cdot, w]} \mathrm{d}\mu(w) : \hat{\mathbb{C}} \to [-\infty, \infty]. \tag{19}$$

(公理論的) ポテンシャル論の意図するところから, 正測度列 $\{\mu_k\}$ が μ に収束するならば,

$$\liminf_{k\to\infty} V_{\mu_k} = V_\mu \tag{20}$$

が $\hat{\mathbb{C}}$ 上ある極集合を除いたところで成り立つ. Dirac 測度上のリスケーリングされた値分布のポテンシャル列の漸近挙動については, (20) は自明な除外集合を除いて常に成り立つ.

主定理 2 (ポテンシャルの下極限の収束定理, Ok [17]). 次数 $d > 1$ の有理函数 f に対し，点 $p \in \hat{\mathbb{C}} - E(f)$ が f の固定点でなければ，$\mu = \delta_p$ に対し $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で

$$\liminf_{k\to\infty} V_{(f^k)^*\delta_p/d^k} = V_{\mu_f}. \tag{21}$$

固定点のときは $\bigcup_{k\geq 0} f^{-k}(p)$ を除いたところで成り立つ.

今の場合は下極限だけでなくさらにポテンシャルが実際に収束するための除外集合も分かる.

主定理 3 (ポテンシャルの収束定理と各点挙動). 上の f, 点 $p \in \hat{\mathbb{C}} - E(f)$ と点 $q \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し次の 2 式は同値.

$$\lim_{k\to\infty} V_{(f^k)^*\delta_p/d^k}(q) = V_{\mu_f}(q), \tag{22}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{d^k} \log \frac{1}{[p, f^k(q)]} = 0. \tag{23}$$

(22) または (23) が成り立たないための必要条件も数え上げられる. p が周期点で $q \in \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}(p)$ である自明な場合, p, q が共に Julia 集合に含まれる場合, 自明な場合を除き p が回転領域に含まれかつ q が p に葉層同値な場合である. 最後の場合を詳しく見よう.

定義 2.1 (回転領域). f 不変な領域 D が f の回転領域であるとは, 開円板または同心開円環 D_0 から D への等角写像 h とある $\lambda_\alpha = \exp(2i\pi\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ が存在して D_0 上

$$f \circ h = h \circ \lambda_\alpha \tag{24}$$

を満たすことである. D は前者の場合 Siegel 円盤, 後者の場合 Arnold-Herman 円環という. より一般に, 領域が f のある反復合成の回転領域であるときも f の回転領域と呼ぶ.

さらに p の全軌道, 葉層同値類 (cf. [11]) をそれぞれ,

$$\mathrm{GO}_f(p) := \{q \in \hat{\mathbb{C}}; \text{ある } k, l \in \mathbb{N} \text{ で } f^k(p) = f^l(q)\}, \tag{25}$$

$$\mathrm{Fol}_f(p) := \{q \in \hat{\mathbb{C}}; \overline{\mathrm{GO}_f(p)} = \overline{\mathrm{GO}_f(q)}\} \tag{26}$$

とおくと次が成り立つ.

主定理 4 (ポテンシャルの収束と回転領域). 上の f に対し, p は周期点でなく回転領域に含まれ, $q \in \mathrm{GO}_f(p)$ とする. このとき (22) と (23) は成り立つ.

しかしながら次が未解決のまま残った.

問題 1 (回転領域上のポテンシャルの収束). 上の f と p に対し, ある $q \in \mathrm{Fol}_f(p) - \mathrm{GO}_f(p)$ で (22) または (23) が成り立たないということがあるか?

この答えが否定的なら, 自明な例外集合を除いて, ポテンシャルの収束 (22) が Fatou 集合上常に成り立つという, 綺麗な結果が得られる.

さて, 次の Mañé [9] の定理が上記の証明の鍵である.

補題 2.1 (Mañé [9]). V_{μ_f} は $\hat{\mathbb{C}}$ 上連続函数.

Mañé の元々の証明は定理 1.1(同等分布定理) を仮定した上で反復合成に限定された大変テクニカルな補題に基づいている. 筆者は [17] で, 同等分布定理を使わず, 有理半群にも適用できる多重ポテンシャル論を用いた短い証明を考えてみた.

同等分布定理を用いずに, 補題 2.1 から次も示せる.

主定理 5 (例外集合と収束・極限集合, Ok [17]).

$$E(f) \subset E_N(f) = \hat{\mathbb{C}} - L(f) \subset E_V(f) = \hat{\mathbb{C}} - \mathrm{Conv}(f). \tag{27}$$

ここで, f の Nevanlinna の例外集合, 極限集合, 収束集合とはそれぞれ,

$$E_N(\{f^k\}) := \{a \in \hat{\mathbb{C}}; \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{d^k} \int_{\hat{\mathbb{C}}} \log \frac{1}{[f^k, a]} \mathrm{d}\sigma > 0\}, \tag{28}$$

$$L(f) := \{p \in \hat{\mathbb{C}}; \mu_f \text{ は } \left\{\frac{(f^k)^*\delta_p}{d^k}\right\} \text{ の極限点 }\} \tag{29}$$

$$\mathrm{Conv}(f) := \{p \in \hat{\mathbb{C}}; \lim_{k\to\infty} \frac{(f^k)^*\delta_p}{d^k} = \mu_f\}. \tag{30}$$

この道筋は有理半群に対してもそのまま通用し, 同等分布定理は反復合成から有理半群へと完全に一般化される：有限個の次数 > 1 の有理函数で生成された半群 (有理半群)：

$$G = \langle h_1, \ldots, h_m;\ h_j : \text{有理函数},\ \deg h_j > 1\ (j = 1, \ldots, m)\rangle \tag{31}$$

に対し, 語 $x = x_1 x_2 \cdots \in \Sigma_m := \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ 毎に逐次合成を考える.

$$\langle x\rangle^k := h_{x_n} \circ \cdots \circ h_{x_1}, \tag{32}$$

$$d\langle x\rangle^k := \deg\langle x\rangle^k. \tag{33}$$

主定理 6 (有理半群に対する同等分布定理). 各 $x \in \Sigma_m$ に対し $\hat{\mathbb{C}}$ 上にある確率測度 $\mu\langle x\rangle$ が存在して次を満たす. 任意の $\hat{\mathbb{C}}$ 上の確率測度 μ に対して, $\mu(E(G)) = 0$ であるとき

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\langle x\rangle^k)^*\mu}{d\langle x\rangle^k} = \mu\langle x\rangle. \tag{34}$$

ここで $E(G)$ は G の例外集合と呼ばれ, 次のように定義される.

$$E(G) := E_V(G) := \{p \in \hat{\mathbb{C}}; \sup_{x\in\Sigma_m} \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{d\langle x\rangle^k} \int_{\hat{\mathbb{C}}} \log \frac{1}{[p, \langle x\rangle^k]} \mathrm{d}\sigma > 0\}. \tag{35}$$

逆に, $E(G)$ の点 z での Dirac 測度 $\mu = \delta_z$ に対し, ある語 $x \in \Sigma_m$ が存在して (34) は成り立たない.

$\mathbb{C}^2$ に持ち上げて, Brolin のやり方で主定理 6 を示すことも出来る. すると $E(G)$ の値分布を用いない特徴付けも得られる. しかしながら, $E(G)$ がどの程度の大きさかは未解決である.

3 値分布は函数の声 – 複素力学系と数論

引続き f を次数 $d > 1$ の有理函数とする.

定義 3.1 (回転領域 (再掲)). f 不変な領域 D が f の回転領域であるとは, 開円板または同心開円環 D_0 から D への等角写像 h とある $\lambda_\alpha = \exp(2i\pi\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q})$ が存在して D_0 上

$$f \circ h = h \circ \lambda_\alpha \tag{36}$$

を満たすことである. D は前者の場合 Siegel 円盤, 後者の場合 Arnold-Herman 円環という. より一般に, 領域が f のある反復合成の回転領域であるときも f の回転領域と呼ぶ.

次の問題は複素力学系研究のラスト・フロンティアの一画を占める.

問題 2 (回転数の数論的性質). 函数方程式 (36) に解析的解 h が存在するような回転数 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ はどのような数論的性質を持つかを決定せよ.

筆者は [19] でこの問題を値分布と関連付けて研究した. 簡単のため回転領域は f 不変とする.

主定理 7 (Diophantus meets Nevanlinna.). 函数方程式 (36) に解析的解 h が存在するような回転数 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ は次を満たす.

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{d^k} \log \frac{1}{|(\lambda_\alpha)^k - 1|} = \delta_V(\mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{C}}}; \{f^k\}). \tag{37}$$

ここで有理函数 g(すなわち動標的) に対し $\delta_V(g; \{f^k\})$ は $\{f^k\}$ に対する g の Valiron Defekt を表す.

回転領域は f の Fatou 集合の連結成分である. 一般に次を得る.

主定理 8 (消滅定理). f の Fatou 集合が空でなければ, 非定数有理函数 g に対し

$$\delta_V(g; \{f^k\}) = 0. \tag{38}$$

注意 3.1. 以前書いてしまった Diophantine meets Nevanlinna. は滑稽であると名古屋大の大沢先生と東京大の野口先生に指摘されてしまいました. 消滅定理 (Vanishing theorem) という素敵な名前は京都大学の宇敷先生から頂いた, ある集会での研究発表後のコメントによります.

主定理 7 と 8 から, 1932 年の Cremer の定理の改良を直ちに得る.

主定理 9 (線型化不可能性条件). $\hat{\mathbb{C}}$ の点 ζ が f の無理中立的固定点, すなわち, ある $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ で $f'(\zeta) = \lambda_\alpha$ と表せるとき,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{d^k} \log \frac{1}{|(\lambda_\alpha)^k - 1|} > 0 \tag{39}$$

ならば ζ は f の Cremer 点である, すなわち函数方程式 (36) が解析的解を持つような, ζ 中心の回転領域 (Siegel 円盤) は存在しない.

注意 3.2. 主定理 7 と 8 は 2 種の回転領域 (Siegel 円盤と Arnold-Herman 円環) を同時に扱っている. これまでは Arnold-Herman 円環は擬等角手術によって切り開かれ, 円盤を穴に継ぎ足されて Siegel 円盤へと解消されてしまうおしんな運命であった (今の場合も擬等角手術を組み合わせるとより良い評価が得られるが).

筆者は以前, 幾何学的有限性 (双曲性) を仮定してくりこみと擬等角手術を用いて回転数の数論的性質を調べた.

主定理 10 ([15]). n-劣双曲的な多項式が連結な充填 Julia 集合を持ち, その Siegel 円盤のサイクルが自身に関して区分的 1-劣双曲的ならば, Siegel 円盤のサイクルの回転数は次の Brjuno 条件を満たす.

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty. \tag{40}$$

ここで $\{p_n/q_n\}$ は回転数 α の連分数展開の定める α の近似分数列である.

主定理 11 ([14]). (p,q) $(p \geq 1)$ 型の 1-双曲的な構造有限整函数の Siegel 不変円盤の回転数は Brjuno 条件 (40) を満たす.

主定理 10 と 11 は共に, 2 次多項式の無理中立的固定点の場合に最弱の線型化不可能性条件が

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} = \infty. \tag{41}$$

(これは (39) より弱い) であることを示した Yoccoz の定理の, それぞれサイクルと整函数への一般化である.

幾何学的有限性や双曲性を強制された函数は, イタイイタイと痛がっているような気がしないでもない. 函数をくりこみや擬等角手術するのも函数愛護協会から函数愛護の訴えが来そうだ. おっと函数愛護協会は今のところ無かったね. 多様体愛護協会はあるみたいでいいね.

複素力学系だからといって, 後ろを振り返ってばかりでなく, 前を向いて, 時には函数を上から眺めれば, 個々の函数の発する様々な声が聞こえてくる, そんな感じがするわけです.

参考文献

[1] Brolin, H. Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.*, **6** (1965), 103–144 (1965).

[2] Brownawell, W. D. and Masser, D. W. Vanishing sums in function fields, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **100**, 3 (1986), 427–434.

[3] Erëmenko, A. E. and Sodin, M. L. Iterations of rational functions and the distribution of the values of Poincaré functions, *Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 53 (1990), 18–25.

[4] Fornaess, J. E. and Sibony, N. Complex dynamics in higher dimension. II, Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992), Vol. 137 of *Ann. of Math. Stud.*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1995), 135–182.

[5] Freed, D. S. and Uhlenbeck, K. K. *Instantons and four-manifolds*, Vol. 1 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, Springer-Verlag, New York (1984).

[6] Freire, A., Lopes, A. and Mañé, R. An invariant measure for rational maps, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **14**, 1 (1983), 45–62.

[7] Hubbard, J. H. and Papadopol, P. Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$, *Indiana Univ. Math. J.*, **43**, 1 (1994), 321–365.

[8] Ljubich, M. J. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **3**, 3 (1983), 351–385.

[9] Mañé, R. The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps, Dynamical systems, Valparaiso 1986, Vol. 1331 of *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin (1988), 86–117.

[10] Mason, R. C. Norm form equations. I, *J. Number Theory*, **22**, 2 (1986), 190–207.

[11] McMullen, C. and Sullivan, D. Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics III : The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system, *Adv. Math.*, **135** (1998), 351–395.

[12] Nevanlinna, R. *Analytic functions*, Translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 162, Springer-Verlag, New York (1970).

[13] Noguchi, J. Nevanlinna-Cartan theory over function fields and a Diophantine equation, *J. Reine Angew. Math.*, **487** (1997), 61–83.

[14] Okuyama, Y. Linearization problem on structurally finite entire functions, preprint.

[15] Okuyama, Y. Non-linearizability of n-subhyperbolic polynomials at irrationally indifferent fixed points, *J. Math. Soc. Japan*, **53**, 4 (2001), 847–874.

[16] Okuyama, Y. Brolin, revisited (preprint).

[17] Okuyama, Y. Complex dynamics, value distributions, and the potential theory (preprint).

[18] Okuyama, Y. The Nevanlinna theory and the Brolin, Lyubich, and Freire-Lopes-Mañé equidistribution theorem (preprint).

[19] Okuyama, Y. Nevanlinna, Siegel, and Cremer, *Indiana Univ. Math. J.* (to appear), put in http://www.kurims.kyoto–u.ac.jp/home_page/preprint/PS/RIMS1417.ps.gz.

[20] Sodin, M. Value distribution of sequences of rational functions, Entire and subharmonic functions, Vol. 11 of *Adv. Soviet Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992), 7–20.

[21] Voloch, J. F. Diagonal equations over function fields, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **16**, 2 (1985), 29–39.

特別講演

Extremal lengths of homology classes on Riemann surfaces

増本　誠

(山口大学理学部)

1. Introduction

R を種数 1 の閉 Riemann 面とし, $\{a, b\}$ を R の標準ホモロジー基とする. ホモロジー類 a, b, $a-b$ の極値的長さをそれぞれ α, β, γ とするとき

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-4 \tag{1}$$

が成立することを [6] で見出した. 種数がより高い場合へのこの関係式の拡張 (定理 2.4, 系 2.5) および関連する結果について報告する. 第 2 ~ 6 節で述べる定理等は, 特に言及がない限り, すべて [7], [8], [9] からの引用である. また, 読者の便宜のために, 極値的長さの定義と基本的な性質を最後の節 (第 7 節) にまとめた. 極値的長さに関するより詳しい情報については, [2], [5], [13] 等を参照せよ.

2. Volumes of subgroups of the homology group

R を Riemann 面とする. R はコンパクトであってもなくてもよい. R の整係数一次特異ホモロジー群を $H_1(R)$ と表し, 分離的サイクルで代表される $H_1(R)$ の元全体のなす部分群を $D_1(R)$ と表す. 商群 $H_1(R)/D_1(R)$ を R の**弱ホモロジー群**といい, $H_1^w(R)$ と書く. R がコンパクトな面から高々 1 点を除いた面に同相であるならば, $D_1(R)=\{0\}$ だから, $H_1^w(R)=H_1(R)$ である.

$H_1(R)$ と $H_1^w(R)$ は共通の性質を数多く持っている. そこで, そのような共通の性質を論じる際には, これらの群を表すために, 記号 $\mathcal{H}_1(R)$ を用いる: $\mathcal{H}_1(R)=H_1(R)$ または $H_1^w(R)$.

$\mathcal{H}_1(R)$ の元 c の極値的長さを $\lambda(c)$ で表す. $G\neq\{0\}$ を $\mathcal{H}_1(R)$ の有限生成部分群とするとき, 次の命題が成り立つ.

命題 2.1. G の基 $\{c_1,\dots,c_r\}$ に対し $\mathbb{R}^r$ の点 $\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r$ で

$$\|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_j\|=\sqrt{\lambda(c_k-c_j)},\qquad j,k=0,1,\dots,r,$$

を満たすものが存在する. ここで, $c_0=0$ であり, $\|\boldsymbol{a}\|$ は $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^r$ の Euclid ノルムを表す.

そこで, 次の定義を設ける.

定義 2.2. 集合 $\{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r\}$ の凸包の r 次元体積を $\mathfrak{V}[G]$ と書き, これを G の**体積**と呼ぶ. $G=\{0\}$ のときは, $\mathfrak{V}[G]=1$ とおく.

注意. G の体積は, G の基の取り方に依らず G のみで定まる量である. $\mathfrak{V}[G]=0$ となることもある. $\mathfrak{V}[G]>0$ であるための十分条件を系 3.3 で与える.

次の命題は, 定義から直ちに従う.

命題 2.3. $\{c_1,\ldots,c_r\}$ が G の基ならば, 平方 $\mathfrak{V}[G]^2$ は $\lambda(c_k-c_j)$ $(0\leqq j<k\leqq r)$ の斉 r 次多項式である. この多項式は r のみで定まり, G には依存しない.

種数 g $(0<g<\infty)$ の Riemann 面の全体を $\mathscr{R}_g$ と書く. $\mathscr{R}_g$ はコンパクトな Riemann 面もそうでない Riemann 面も含む. $R\in\mathscr{R}_g$ に対し, 弱ホモロジー群 $H_1^w(R)$ は有限生成なので, 体積 $\mathfrak{V}[H_1^w(R)]$ が定義される. こうして, $\mathscr{R}_g$ 上の実数値関数 $V_g: R\mapsto\mathfrak{V}[H_1^w(R)]$ が得られる. 関数 V_g は興味深い性質を持っている. 例えば, 閉 Riemann 面の全体がなす部分族上では定数である:

定理 2.4. $R\in\mathscr{R}_g$ がコンパクトならば, $V_g(R)=\dfrac{1}{(2g)!}$.

この定理と命題 2.3 から次の系を得る.

系 2.5. $g(2g+1)$ 個の変数 x_{jk} $(0\leqq j<k\leqq 2g)$ の斉 $2g$ 次多項式 $p_g(\ldots,x_{jk},\ldots)$ で次の性質を持つものが存在する: 種数 g の任意の閉 Riemann 面 R とそのホモロジー群 $H_1(R)$ の任意の基 $\{c_1,\ldots,c_{2g}\}$ に対し,

$$p_g\big(\ldots,\lambda(c_k-c_j),\ldots\big)=1$$

が成立する. ただし, $c_0=0$ である.

注意. (i) $p_1(x_{01},x_{02},x_{12})=\dfrac{1}{2}(x_{01}x_{02}+x_{01}x_{12}+x_{02}x_{12})-\dfrac{1}{4}(x_{01}^2+x_{02}^2+x_{12}^2)$ である (第 1 節の (1) 式参照).

(ii) 系 2.5 は, 例 7.3, 例 7.4 で述べた関係式 $\lambda(\Gamma_1)\lambda(\Gamma_2)=1$ の拡張とも考えられる.

極値的長さの単調性 (命題 7.2 (ii)) から次の定理が成立することは容易に想像できよう.

定理 2.6. V_g は単調減少である. すなわち, $R_1\in\mathscr{R}_g$ が $R_2\in\mathscr{R}_g$ の中に等角に埋め込まれれば, $V_g(R_1)\geqq V_g(R_2)$ が成り立つ.

種数有限な開 Riemann 面は, 同種数のある閉 Riemann 面の中に等角に埋め込まれる. 従って, 定理 2.4 と定理 2.6 より, 不等式 $V_g(R)\geqq\dfrac{1}{(2g)!}$ $(R\in\mathscr{R}_g)$ が得られるが, より精密に値域 $V_g(\mathscr{R}_g)$ について次の定理が成り立つ.

定理 2.7. $V_g(\mathscr{R}_g)=\left[\dfrac{1}{(2g)!},+\infty\right)$.

そして, V_g が最小値を取る Riemann 面は次のように特徴付けられる.

定理 2.8. $V_g(R)=\dfrac{1}{(2g)!}\iff R\in O_{AD}$.

これらの定理より $\log\{(2g)!V_g(R)\}$ は $R\in\mathscr{R}_g$ の理想境界の大きさを表す指標の一つであることが見て取れるであろう.

3. Reproducing differentials

この節では, 定理 2.4 の証明において重要な役割を果たすいくつかの結果を紹介する. R 上の 2 乗可積分な複素調和微分全体のなす複素 Hilbert 空間を $\Gamma_{\mathrm{h}}(R)$ と書く. $\Gamma_{\mathrm{h}}(R)$ の内積は

$$(\omega_1, \omega_2)_R = \iint_R \omega_1 \wedge *\bar{\omega}_2, \qquad \omega_1, \omega_2 \in \Gamma_{\mathrm{h}}(R),$$

で与えられる. $\omega \in \Gamma_{\mathrm{h}}(R)$ のノルムを $\|\omega\|_R$ と表す. $H_1(R)$ の各元 c に対し,

$$\big(\omega, \sigma_{\mathrm{h}}(c)\big)_R = \int_c \omega, \qquad \omega \in \Gamma_{\mathrm{h}}(R),$$

を満たす $\Gamma_{\mathrm{h}}(R)$ の元 $\sigma_{\mathrm{h}}(c)$ が一意的に存在する. これを $\Gamma_{\mathrm{h}}(R)$ における c の周期再生微分と称する.

次に, R 上の半完全調和微分全体のなす部分空間を $\Gamma_{\mathrm{hse}}(R)$ と表す. これは

$$\int_c \omega = 0, \qquad c \in D_1(R),$$

を満たす $\omega \in \Gamma_{\mathrm{h}}(R)$ の全体である. 定義より, $\Gamma_{\mathrm{hse}}(R)$ の元に対しては, $H_1^w(R)$ の元 c に沿う線積分が意味を持つ. 前と同様に, $\Gamma_{\mathrm{hse}}(R)$ における c の周期再生微分を $\sigma_{\mathrm{hse}}(c)$ と表す. すなわち, $\sigma_{\mathrm{hse}}(c)$ は

$$\big(\omega, \sigma_{\mathrm{hse}}(c)\big)_R = \int_c \omega, \qquad \omega \in \Gamma_{\mathrm{hse}}(R),$$

を満たす $\Gamma_{\mathrm{hse}}(R)$ の元である.

$c \in \mathcal{H}_1(R)$ のとき, $\sigma(c)$ は $\sigma_{\mathrm{h}}(c)$, $\sigma_{\mathrm{hse}}(c)$ のいずれかを表すものとする. すなわち, $\mathcal{H}_1(R) = H_1(R)$ ならば $\sigma(c) = \sigma_{\mathrm{h}}(c)$ であり, $\mathcal{H}_1(R) = H_1^w(R)$ ならば $\sigma(c) = \sigma_{\mathrm{hse}}(c)$ である.

周期再生微分 $\sigma(c)$ と極値的長さ $\lambda(c)$ との関係を与える次の著しい結果は, 我々の議論で基本的な役割を果たしている.

定理 3.1 (Accola [1], Blatter [3, 4], Rodin [12]). 任意の $c \in \mathcal{H}_1(R)$ に対して

$$\lambda(c) = \|\sigma(c)\|_R^2.$$

$\Gamma_{\mathrm{h}}(R)$ に属する実調和微分全体のなす実 Hilbert 空間を $\Gamma_{\mathrm{h}}(R)_{\mathbb{R}}$ と書く. 周期再生微分は実微分なので, 写像 $\sigma : c \mapsto \sigma(c)$ は $\mathcal{H}_1(R)$ から $\Gamma_{\mathrm{h}}(R)_{\mathbb{R}}$ の中への加群準同型写像である. $\mathcal{H}_1(R)$ の有限生成部分群 G に対し, 写像 σ による G の像 $\sigma(G)$ を含む最小の実 Hilbert 部分空間を $\tilde{\sigma}(G)$ と表す. $\chi = \{c_1, \ldots, c_r\}$ が G の基ならば, $\tilde{\sigma}(G)$ は $\sigma(\chi) = \{\sigma(c_1), \ldots, \sigma(c_r)\}$ で張られる高々 r 次元の部分空間である. 従って, これを $\mathbb{R}^r$ の中に等距離かつ線型に埋め込むことができる. 各 $\sigma(c_j)$ に対応する $\mathbb{R}^r$ の点を $\boldsymbol{a}_j$ と書き, $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{0}$ とおく. すると, 定理 3.1 より, $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が命題 2.1 の条件を満たすことは明らかである. よって, 内積 $\big(\sigma(c_j), \sigma(c_k)\big)_R$ を (j,k)-成分とする r 次正方行列を $W[G, \chi]$ と表せば,

$$\mathfrak{V}[G] = \frac{1}{r!}\sqrt{\det W[G, \chi]}, \qquad r = \operatorname{rank} G, \tag{2}$$

が成立する．次に，c_j と c_k の交点数 $c_j \times c_k$ を (j,k)-成分とする r 次正方行列を $U[G,\chi]$ と書き，

$$\mathfrak{C}[G] = \sqrt{|\det U[G,\chi]|} \tag{3}$$

とおく．$\mathfrak{C}[G]$ は χ によらず G のみで定まる整数である．最後に，$\Gamma_{\mathrm{h}}(R)_{\mathbb{R}}$ から $\tilde{\sigma}(G)$ の上への正射影を $P[G]$ と表し，さらに $\sigma(\chi)$ が $\tilde{\sigma}(G)$ の基底をなしている場合には，$\tilde{\sigma}(G)$ の線型変換

$$P[G]* : \tilde{\sigma}(G) \ni \omega \mapsto P[G](*\omega) \in \tilde{\sigma}(G)$$

の基底 $\sigma(\chi)$ に関する表現行列を $T[G,\chi]$ と書く．これらの 3 行列の間には次の関係式が成り立つ．

定理 3.2. G を $\mathcal{H}_1(R)$ の有限生成部分群とし，χ を G の基とする．$\sigma(\chi)$ が $\tilde{\sigma}(G)$ の基底をなしていれば，

$$-U[G,\chi] = W[G,\chi]T[G,\chi] \tag{4}$$

が成立する．

注意. G が $H_1^w(R)$ の有限生成部分群ならば，G の任意の基 χ に対し $\sigma(\chi)$ は $\tilde{\sigma}(G)$ の基底をなすことが示される．

等式 (4) の両辺の行列式をとり，(2), (3) と $|\det T[G,\chi]| \leqq 1$ を用いれば，次の系が得られる．

系 3.3. $r = \operatorname{rank} G$ とおくと $\mathfrak{V}[G] \geqq \dfrac{\mathfrak{C}[G]}{r!}$. 特に，$\mathfrak{C}[G] \neq 0$ ならば，$\mathfrak{V}[G] \geqq \dfrac{1}{r!}$.

また，$G = H_1^w(R)$ のとき，$|\det T[G,\chi]| = |\det U[G,\chi]| = 1$ となるので，前と同様，(4), (2) を使って定理 2.4 を導くことができる．

4. Continuations of open Riemann surfaces of finite genus

$R \in \mathscr{R}_g$ と $H_1^w(R)$ の標準基 χ の組 (R,χ) を種数 g の**印付き Riemann 面**と呼ぶ．R がコンパクトであるか否かに応じて，(R,χ) は印付き閉 Riemann 面である，あるいは，印付き開 Riemann 面であると言う．Teichmüller 空間論で定義される印付き Riemann 面との類似性は明らかであるが，R が開である場合，その境界成分に対応する閉曲線は考慮されていないことに注意しよう．

(R_1,χ_1), (R_2,χ_2) を種数 g の印付き Riemann 面とし，$\chi_k = \{a_{kj}, b_{kj}\}_{j=1}^{g}$ $(k = 1,2)$ とする．等角写像 (単射正則写像) $f : R_1 \to R_2$ は，各 j に対し a_{1j}, b_{1j} をそれぞれ a_{2j}, b_{2j} に写すとき，(R_1,χ_1) から (R_2,χ_2) の**中への等角写像**である，または，**等角的埋め込み**であると言う．そして，記法 $f : (R_1,\chi_1) \to (R_2,\chi_2)$ を用いる．さらに $f(R_1) = R_2$ ならば，$f : (R_1,\chi_1) \to (R_2,\chi_2)$ は**上への**等角写像であると言う．(R_1,χ_1) から (R_2,χ_2) の上への等角写像が存在するとき，(R_1,χ_1) と (R_2,χ_2) は互いに**等角同値**であると言う．

種数 g の印付き Riemann 面 (R,χ) に対し，(R,χ) を等角に埋め込ませる種数 g の印付き閉 Riemann 面の全体を $C(R,\chi)$ と表す．柴は，[15], [16] を始めとす

る一連の研究において, Riemann の周期行列を通して空間 $C(R,\chi)$ を調べた. その成果の一部を紹介するために, 周期行列の定義を思い出しておこう.

(R',χ') を種数 g の印付き閉 Riemann 面とし, $\chi'=\{a'_j,b'_j\}_{j=1}^g$ とする. R' 上には

$$\int_{a'_j}\varphi'_k=\delta_{jk},\qquad j,k=1,\ldots,g,$$

を満たす正則微分 $\varphi'_1,\ldots,\varphi'_g$ が一意的に存在する. このとき,

$$\pi_{jk}(R',\chi') := \int_{b'_j}\varphi'_k \tag{5}$$

を (j,k)-成分とする g 次正方行列 $\Pi[R',\chi'] = \bigl(\pi_{jk}(R',\chi')\bigr)$ を (R',χ') の **(正規化された) 周期行列**と言う. この行列は Siegel の上半空間に属する. すなわち, $\Pi[R',\chi']$ は対称行列で, その虚部 $\operatorname{Im}\Pi[R',\chi']$ は正定値である. 特に, 対角成分 $\pi_{kk}(R',\chi')$ は上半平面 $\mathbb{H}$ の点である.

周期行列は閉 Riemann 面の等角構造を決定する (Torelli の定理) ので, 集合 $\{\Pi(R',\chi') \mid (R',\chi')\in C(R,\chi)\}$ は R を等角に埋め込ませる同種数の閉 Riemann 面の全体と見なされる. その対角成分上への射影

$$M_k(R,\chi)=\{\pi_{kk}(R',\chi') \mid (R',\chi')\in C(R,\chi)\},\qquad k=1,\ldots,g,$$

について, 次の定理が成立する.

定理 4.1 (Schmieder-柴 [14], M [7]). $M_k(R,\chi)$ は, $\mathbb{H}$ 内の閉円板または一点である.

注意. (i) $\Delta_k(R,\chi)$, $k=1,\ldots,g$, は同時に閉円板となるか一点となるかのいずれかである.

(ii) $\mathbb{H}^g$ の部分集合 $\bigl\{\bigl(\pi_{11}(R',\chi'),\ldots,\pi_{gg}(R',\chi')\bigr) \mid (R',\chi')\in C(R,\chi)\bigr\}$ は, 一般に, $M_1(R,\chi)\times\cdots\times M_g(R,\chi)$ の<u>真</u>部分集合である.

Schmieder-柴 [14] は定理 4.1 を R が有限個の境界成分を持つ場合に証明した. 彼らの証明のアイディアを述べよう. 及川の定理 [11] より, $M_k(R,\chi)$ が $\mathbb{H}$ の連結なコンパクト部分集合であることはすぐに分かる. 柴 [16] は, より詳しく, $\mathbb{H}$ 内の閉円板または一点 $\Delta_k(R,\chi)$ で

$$\partial\Delta_k(R,\chi)\subset M_k(R,\chi)\subset\Delta_k(R,\chi) \tag{6}$$

を満たすものが存在することを示した. 定理 4.1 は, 実際 $M_k(R,\chi)=\Delta_k(R,\chi)$ が成立することを主張している. その証明のポイントは, 種数 g の印付き Riemann 面の族 $\{(R_t,\chi_t)\}_{0\leqq t\leqq 1}$ で次の 4 条件を満足するものを構成する点にある:

(a) (R_0,χ_0) は (R,χ) と等角同値;
(b) R_1 はコンパクト;
(c) $0\leqq s\leqq t\leqq 1$ ならば (R_s,χ_s) は (R_t,χ_t) の中に等角に埋め込まれる;
(d) 各 k に対し, $\Delta_k(R_t,\chi_t)$ は t について連続的に動く.

今, そのような族が構成されたとしよう. すると, (a), (b) より

$$\Delta_k(R_0,\chi_0)=\Delta_k(R,\chi),\qquad \Delta_k(R_1,\chi_1)=\{\pi_{kk}(R_1,\chi_1)\}$$

が得られ, (c) より

$$0\leqq s\leqq t\leqq 1\quad\Rightarrow\quad \Delta_k(R_s,\chi_s)\supset\Delta_k(R_t,\chi_t)$$

が得られる. 従って, (d) より

$$\bigcup_{0\leqq t\leqq 1}\partial\Delta_k(R_t,\chi_t)=\Delta_k(R,\chi)$$

の成り立つことが分かる. (6) から

$$\partial\Delta_k(R_t,\chi_t)\subset M_k(R_t,\chi_t)\subset M_k(R_0,\chi_0)=M_k(R,\chi)\subset\Delta_k(R,\chi)$$

なので, $\Delta_k(R,\chi)=M_k(R,\chi)$ を得る.

[14] が用いた族 $\{(R_t,\chi_t)\}$ の構成法では, R の境界成分が有限個であることを仮定する必要があった. 一般の場合にも通用する方法を次節で述べよう.

5. Peano curve method

我々は, 円 $\Delta_k(R,\chi)$ を $H_1^w(R)$ の適当な部分群の体積を用いて記述することから始める:

定理 5.1. R を種数 g の開 Riemann 面とし, $\chi=\{a_j,b_j\}_{j=1}^g$ を $H_1^w(R)$ の標準基とする. 各 $k=1,\dots,g$ に対し, $a_1,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_g$ で生成される $H_1^w(R)$ の部分群を G_k とし, G_k と $c\in H_1^w(R)$ とで生成される部分群を $G_k(c)$ とする. ただし, $g=1$ のときは $G_k=\{0\}$ とする. そして,

$$U_k=\left\{z\in\mathbb{H}\,\middle|\,\operatorname{Im}z\geqq\left(\frac{\mathfrak{V}[G_k]}{g\mathfrak{V}[G_k(a_k)]}\right)^2\right\},$$

$$V_k=\left\{z\in\mathbb{H}\,\middle|\,\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{z}\right)\geqq\left(\frac{\mathfrak{V}[G_k]}{g\mathfrak{V}[G_k(b_k)]}\right)^2\right\},$$

$$W_k=\left\{z\in\mathbb{H}\,\middle|\,\operatorname{Im}\frac{1}{1-z}\geqq\left(\frac{\mathfrak{V}[G_k]}{g\mathfrak{V}[G_k(a_k-b_k)]}\right)^2\right\}$$

とおく.

(i) $\partial U_k\cap\partial V_k\cap\partial W_k\neq\varnothing$ ならば, $\Delta_k(R,\chi)$ は一点からなり, $\partial U_k\cap\partial V_k\cap\partial W_k$ に一致する.

(ii) $\partial U_k\cap\partial V_k\cap\partial W_k=\varnothing$ ならば, $U_k\cap V_k\cap W_k$ は (退化しない) 円弧三角形で, $\Delta_k(R,\chi)$ はそれの内接円である.

注意. $\mathfrak{V}[G_k]$, $\mathfrak{V}[G_k(a_k)]$, $\mathfrak{V}[G_k(b_k)]$, $\mathfrak{V}[G_k(a_k-b_k)]$ はすべて正の数である.

このように, 円 $\Delta_k(R,\chi)$ は弱ホモロジー類の極値的長さの有理関数で記述されるので, これらの極値的長さが連続的に変化するように族 $\{(R_t,\chi_t)\}$ を構成すればよいことが分かる. そのような族を構成するために, あらかじめ R を同種数 g の閉 Riemann 面 R' の中に等角に埋め込んでおく. $E'=R'\setminus R$ とおき, $\gamma([0,1])=R'$ と $\gamma(1)\in R$ を満たす連続写像 (Peano 曲線) $\gamma:[0,1]\to R'$ をとる. 各 $t\in[0,1]$ に対し, $R'_t=R'\setminus\{\gamma([t,1])\cap E'\}$ とおくと,

$$R=R'\setminus E'\subset R'_t\subset R'$$

であり, しかも R と R' の種数はいずれも g なので, R'_t の連結成分 R_t で種数が g に等しいものがただ一つ存在する. $\{R_t\}$ は t とともに単調に増大する Riemann 面の族で, $R_0=R$ かつ $R_1=R'$ となっている. $H_1^w(R_t)$ の標準基 $\chi_t=\{a_{tj},b_{tj}\}_{j=1}^g$ を, R から R_t への包含写像が (R,χ) から (R_t,χ_t) の中への等角写像となるように選ぶことができる. このとき, 命題 7.2 と例 7.4 を援用して, $\lambda(a_{tj})$, $\lambda(b_{tj})$ は t の連続関数であることが簡単に示される.

注意. このような Peano 曲線の活用法は, [6] に遡ることができる. より一般的な定式化を [10] に見出すことができる.

6. Compact Riemann surfaces of genus two

この節では, 種数 2 の閉 Riemann 面 R が持つ対称性について論じる. 定義から始めよう. ホモロジー群 $H_1(R)$ の直和分解

$$H_1(R)=G_1\oplus G_2,\qquad \operatorname{rank}G_j=2\quad(j=1,2), \tag{7}$$

を考える. $\chi_j=\{a_j,b_j\}$ が G_j の基ならば, $\chi_1\cup\chi_2:=\{a_1,b_1,a_2,b_2\}$ は $H_1(R)$ の基である. $\chi_1\cup\chi_2$ が $H_1(R)$ の標準基をなすように基 χ_1, χ_2 を選ぶことができるとき, (7) を $H_1(R)$ の**標準直和分解**と呼ぶ.

標準直和分解 (7) に対し, 次の定理が成り立つ.

定理 6.1. $\mathfrak{V}[G_1]=\mathfrak{V}[G_2]$.

注意. よく知られているように, R は, 超楕円的であるので, 位数 2 の自己等角写像を持つ. この意味で R は強い対称性を持つが, 定理 6.1 は別の対称性を表しているように思われる.

定理 6.1 を別の形で表現する. 標準基 $\chi_1\cup\chi_2$ に対応する周期行列 $\Pi[R,\chi_1\cup\chi_2]$ の対角成分 $\pi_{kk}(R,\chi_1\cup\chi_2)$ $(k=1,2)$ に注目する (第 4 節 (5) 式参照). $\chi_1\cup\chi_2$ が標準基となるような基 χ_1, χ_2 の選び方は無限に多く存在する. $\mathbb{H}$ の部分集合

$$\{\pi_{kk}(R,\chi_1\cup\chi_2)\mid \chi_j \text{ は } G_j \text{ の基で}, \chi_1\cup\chi_2 \text{ は標準基}\}$$

の $\mathbb{H}$ における閉包を Π_k と表す $(k=1,2)$.

命題 6.2. $\mathbb{H}$ の円 C_k が存在して, $\Pi_k=\displaystyle\bigcup_{T\in PSL(2,\mathbb{Z})}T(C_k)$ が成り立つ.

$\mathbb{H}$ には双曲計量 $\dfrac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$ が導入され, C_k はこの計量に関しても円である. C_k の双曲半径を $\rho(C_k)$ と書く. すると, 次の定理が成り立つ.

定理 6.3. $\rho(C_1) = \rho(C_2)$.

定理 6.1 と定理 6.3 は互いに同値である. それは, 次の定理によって知られる:

定理 6.4. $\rho(C_k) = \log(2\mathfrak{W}[G_k])$.

定理 3.2 を $G = H_1(R)$ の場合に適用することにより, R のホモロジー類の極値的長さの間に成立する代数的関係式が得られる. (これは, 系 2.5 よりも原始的な関係式である.) この関係式から定理 6.1 が導かれる. 定理 6.4 は直接計算することにより確かめられる. 定理 6.3 はこれら二つの定理の系である.

7. Appendix: Extremal length

この節では, 極値的長さの定義と基本的な性質をまとめておく. Riemann 面 R 上の **1 次密度**とは, R の各局所座標 z に非負値 Borel 関数 ρ を対応させるもので, 表現 $\rho(z)|dz|$ が局所座標の取り替えに対して不変となるようなものである. Γ を R の曲線族とする. 曲線族と書いたが, Γ の元として (連続) 曲線の可算個の和も許している.

定義 7.1. Γ の**極値的長さ** $\lambda(\Gamma)$ とは,

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{\left(\inf_{\gamma\in\Gamma} \displaystyle\int_{\gamma} \rho(z)\,|dz|\right)^2}{\displaystyle\iint_R \rho(z)^2\,dx\,dy}$$

で定義される量である. ここで, 上限は $0 < \displaystyle\iint_R \rho(z)^2\,dx\,dy < +\infty$ を満たす R 上の 1 次密度 $\rho = \rho(z)|dz|$ 全体に関してとる.

極値的長さの基本的な性質を述べる.

命題 7.2. (i) 単射正則写像 f に対し $\lambda\big(f(\Gamma)\big) = \lambda(\Gamma)$.
(ii) $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ ならば $\lambda(\Gamma_1) \geqq \lambda(\Gamma_2)$.
(iii) $\dfrac{1}{\lambda(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} \leqq \dfrac{1}{\lambda(\Gamma_1)} + \dfrac{1}{\lambda(\Gamma_2)}$.

例 7.3. R を複素数平面 $\mathbb{C}$ 内の 4 点 $0, a, a+ib, ib$ $(a,b>0)$ を頂点とする長方形の内部とする. 辺 $[0,ib]$ と $[a,a+ib]$ を R 内で結ぶ曲線の全体を Γ_1 とし, 辺 $[0,a]$ と $[ib,a+ib]$ を R 内で結ぶ曲線の全体を Γ_2 とする. このとき, $\lambda(\Gamma_1) = \dfrac{a}{b}$, $\lambda(\Gamma_2) = \dfrac{b}{a}$ である. 特に, $\lambda(\Gamma_1)\lambda(\Gamma_2) = 1$ が成り立つ.

例 7.4. R を $\mathbb{C}$ 内の円環領域 $1 < |z| < \rho$ とする. R の境界を分離する R 内の曲線の全体を Γ_1 とし, R の境界成分を結ぶ R 内の曲線の全体を Γ_2 とすると, $\lambda(\Gamma_1) = \dfrac{2\pi}{\log \rho}$, $\lambda(\Gamma_2) = \dfrac{\log \rho}{2\pi}$ である. この場合も $\lambda(\Gamma_1)\lambda(\Gamma_2) = 1$ が成り立っている.

例 7.5. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \dfrac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ とし, 4 点 $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$ を頂点とする平行四辺形の対辺を同一視して得られる種数 1 の閉 Riemann 面を R とする. 辺 $[0, \omega_1]$ が誘導する R 上の閉曲線が代表するホモロジー類の極値的長さは, $\left(\operatorname{Im} \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-1}$ である.

References

[1] R. D. M. Accola, Differentials and extremal length on Riemann surfaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **46** (1960), 540–543.

[2] L. V. Ahlfors, Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand, Princeton, 1966. (Reprint: Wadsworth, Belmont, 1987.)

[3] C. Blatter, Une inégalité de géométrie différentielle, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **250** (1960), 1167.

[4] C. Blatter, Über Extremallängen auf geschlossenen Flächen, Comment. Math. Helv. **35** (1961), 153–168.

[5] O. Lehto and K. I. Virtanen, Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[6] M. Masumoto, On the moduli set of continuations of an open Riemann surface of genus one, J. Anal. Math. **63** (1994), 287–301.

[7] M. Masumoto, Extremal lengths of homology classes on Riemann surfaces, J. Reine Angew. Math. **508** (1999), 17–45.

[8] M. Masumoto, Extremal lengths of homology classes on compact Riemann surfaces, Nonlinear Anal. **47** (2001), 5491–5500.

[9] M. Masumoto, Algebraic relations among extremal lengths of homology classes on compact Riemann surfaces, Math. Nachr. **239-240** (2002), 157–169 and **248-249** (2003), 211–211.

[10] M. Masumoto, Intermediate value theorem for functions on classes of Riemann surfaces, preprint.

[11] K. Oikawa, On the prolongation of an open Riemann surface of finite genus, Kodai Math. Sem. Rep. **9** (1957), 34–41.

[12] B. Rodin, Extremal length of weak homology classes on Riemann surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 369–372.

[13] L. Sario and K. Oikawa, Capacity Functions, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[14] G. Schmieder and M. Shiba, One-parameter variations of the ideal boundary and compact continuations of a Riemann surface, Analysis **18** (1998), 125–130.

[15] M. Shiba, The period matrices of compact continuations of an open Riemann surface of finite genus, Holomorphic Functions and Moduli I ed. by D. Drasin et al., Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg (1988), 237–246.

[16] M. Shiba, Conformal embeddings of an open Riemann surface into closed surfaces of the same genus, in "Analytic Function Theory of One Complex Variable" ed. by Y. Komatu et al., Longman Scientific & Technical, 1989, pp.287–298.

Department of Mathematics, Yamaguchi Unviersity, Yamaguchi 753-8512, Japan.
e-mail: `masumoto@yamaguchi-u.ac.jp`

15 Topological structures of Lyubich-Minsky laminations associated with rabbits

川平　友規（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

As an analogy to hyperbolic 3-orbifolds associated with Kleinian groups, Lyubich and Minsky[4] introduced hyperbolic orbifold 3-laminations associated with rational maps. They applied analogous arguments of rigidity theorems of hyperbolic 3-orbifolds to hyperbolic 3-laminations, and showed a rigidity result of rational maps as following: *Let f and g be rational maps which have no reccurent critical points or parabolic points. If f and g are topologically conjugate, then they are quasiconformally conjugate. Moreover, if the conjugacy is equivariantly homotopic to conformal on their Fatou sets, then f and g are conformally conjugate.*

It is also shown that the condition "no reccurent critical points or parabolic points" of f above corresponds to "convex cocompactness" (compactness of the convex core of a 3-manifold) of a Kleinian group. A Kleinian group is called "geometrically finite" if its convex core minus cusp-neighbourhoods is compact. Thus we may expect that the "geometric finiteness" of rational maps is just "no reccurent critical points", which is wider than usual definition of geometric finiteness of rational maps (critical points in the Julia set are all preperiodic).

To deal with this 3-lamination-based geometric finiteness of rational maps, our first step is to investigate the structures of "cusps" of Lyubich-Minsky lamination. However, even for the simplest cusp which appears for $z^2 + 1/4$, its 3-lamination had not been precisely known. In this talk I will give a method to describe the topological structures of cusps which come from parabolic cycles of quadratic polynomials. In particular, the method will also give us the topological structures of 3-laminations with superattracting cycles, like Douady's rabbit, $z^2 - 1$, etc.

References

[1] T. Kawahira. On the regular leaf space of the cauliflower. *Kodai Math. J.* **26**(2003) 167–178

[2] T. Kawahira. Semiconjugacies in complex dynamics with parabolic cycles. *Thesis.*

[3] T. Kawahira. Laminatios associated with parabolic quadratic polynomials. *Preprint,* 2003.

[4] M. Lyubich and Y. Minsky. Laminations in holomorphic dynamics. *J. Diff. Geom.* **47**(1997) 17–94.

16 Stable points in infinite dimensional Teichmüller spaces

Katsuhiko Matsuzaki

Department of Mathematics, Ochanomizu University

In general, let $X = (X, d)$ be a complete metric space with a distance d, and $\mathrm{Isom}(X)$ the group of all isometric automorphisms of X. For a subgroup $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(X)$, the orbit of $x \in X$ under Γ is denoted by $\Gamma(x)$ and the isotropy (stabilizer) subgroup of $x \in X$ in Γ is denoted by $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$.

Definition. We say that $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(X)$ acts at $x \in X$ *stably* if $\Gamma(x)$ is closed and $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$ is finite. The set of points $x \in X$ where Γ acts stably is denoted by $\Phi(\Gamma)$ and called the *region of stability* for Γ.

First we give a condition in which $\Phi(\Gamma)$ is an open subset of X.

Theorem 1. *If $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(X)$ contains a subgroup G such that G acts on X stably and the coset Γ/G is countable, then the region of stability $\Phi(\Gamma)$ is open. In particular, this claim is always satisfied if Γ itself is countable.*

For an arbitrary subgroup Γ of $\mathrm{Isom}(X)$, two points x and y in X are defined to be equivalent ($x \sim y$) if there exists a sequence of elements γ_n of Γ not necessarily distinct such that $\gamma_n(x)$ converge to y. In particular, all points in the orbit of Γ are mutually equivalent. It is easy to check that this satisfies the axiom of equivalence relation, which we call *closure equivalence*. In particular, the conditions $\overline{\Gamma(x_1)} \cap \overline{\Gamma(x_2)} \neq \emptyset$ and $\overline{\Gamma(x_1)} = \overline{\Gamma(x_2)}$ are both equivalent to $x_1 \sim x_2$.

The closure equivalence is stronger than the ordinary equivalence under the group action of Γ. The ordinary quotient space by Γ is denoted by X/Γ and the quotient space by the closure equivalence is denoted by $X//\Gamma$. The projections are denoted by $\pi_1 : X \to X/\Gamma$ and $\pi_2 : X \to X//\Gamma$ respectively. There is also a projection $\bar{\pi} : X/\Gamma \to X//\Gamma$ defined by $\pi_2 \circ (\pi_1)^{-1}$.

The pseudo-distance d induces pseudo-distances d_1 on X/Γ and d_2 on $X//\Gamma$ as

$$d_1(\pi_1(x), \pi_1(y)) := \inf\{d(x', y') \mid x' \in \Gamma(x),\ y' \in \Gamma(y)\};$$
$$d_2(\pi_2(x), \pi_2(y)) := \inf\{d(x', y') \mid x' \in \overline{\Gamma(x)},\ y' \in \overline{\Gamma(y)}\}.$$

Here d_2 always becomes a distance in virtue of the way of defining the closure equivalence. Hence $(X//\Gamma, d_2)$ is a complete metric space.

For an analytically finite Riemann surface R, the Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}(R)$ acts on $T(R)$ discontinuously. Although $\mathrm{Mod}(R)$ has fixed points on $T(R)$, each orbit is discrete and each isotropy subgroup is finite. Hence an orbifold structure on the moduli space $M(R)$ is induced from $T(R)$ as the quotient space by $\mathrm{Mod}(R)$. However, this is not always satisfied for analytically infinite Riemann surfaces.

Hereafter, we mainly deal with an analytically infinite Riemann surface R and and apply the above results to the Teichmüller space $X = T(R)$ with the Teichmüller distance $d = d_T$ and the Teichmüller modular group $\Gamma = \mathrm{Mod}(R) \subset \mathrm{Isom}(X)$. No matter how the action of Γ is far from discontinuity, the moduli space $M(R) = T(R)/\Gamma$ is a topological space by the quotient topology induced by the projection $\pi_1 = \pi_M : T(R) \to M(R)$. Moreover a pseudo-distance $d_1 = d_M$ on $M(R)$ is induced from the Teichmüller distance $d = d_T$ on $T(R)$.

The *contracted* moduli space $M_*(R)$ is a complete metric space, which is the quotient by the closure equivalence with the projection

$$\pi_2 = \pi_{M_*} : T(R) \to M_*(R) = T(R)//\Gamma.$$

The distance $d_2 = d_{M_*}$ is induced from $d = d_T$. Let $\bar{\pi} : M(R) \to M_*(R)$ be the canonical projection. The inverse image $\bar{\pi}^{-1}(s)$ for $s \in M_*(R)$ is the closure $\overline{\{\sigma\}} \subset M(R)$ for any point $\sigma \in \bar{\pi}^{-1}(s)$. If Γ acts on $T(R)$ stably, then the contracted moduli space $M_*(R)$ is nothing but the moduli space $M(R)$ and the pseudo-distance d_M is coincident with the distance d_{M_*} under the homeomorphism $\bar{\pi}$.

We set $M_\Phi(R) = \Phi(\Gamma)/\Gamma$ and consider the metric completion $\overline{M_\Phi(R)}^d$ of $M_\Phi(R)$ with a distance d. Here d is the path metric on $M_\Phi(R)$ induced by the pseudo-distance d_M on $M(R)$. The restriction of the projection $\bar{\pi} : M(R) \to M_*(R)$ to $M_\Phi(R)$ is injective and it extends to a continuous map $\phi : \overline{M_\Phi(R)}^d \to M_*(R)$.

Theorem 2. *The region of stability $\Phi(\Gamma)$ is an open, dense, connected subset in $T(R)$ for $\Gamma = \mathrm{Mod}(R)$. Moreover, there exists a locally uniform constant K such that, any two points p and q in $\Phi(\Gamma)$ can be connected by a path in $\Phi(\Gamma)$ whose length less than $Kd_T(p,q)$.*

Corollary 3. *The map $\phi : \overline{M_\Phi(R)}^d \to M_*(R)$ is a bijective isometry.*

17 On continuous extension of grafting maps

糸 健太郎 （名古屋大学 多元数理科学研究科）

擬フックス群空間　S は向き付けられた閉曲面（種数 ≥ 2）とする．表現空間 $R(S) = \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の中で，擬フックス群空間

$$\mathcal{QF} = \mathcal{QF}(S) = \{[\rho] \in R(S) \mid \rho : \text{injective, } \rho(\pi_1(S)) : \text{quasi-fuchsian group}\}$$

を考える．ここで $T(S)$ を S の Teichmüller space, $\bar{S}$ を S の向きを逆にしたものとするとき，Bers の同時一意化定理より同相写像 $B : T(S) \times T(\bar{S}) \to \mathcal{QF}$ が存在し，$B_X := B(\{X\} \times T(\bar{S}))$ や $B_{\bar{Y}} := B(T(S) \times \{\bar{Y}\})$ をベアス・スライスと呼ぶ．$\mathcal{QF}$ は $R(S)$ の中で可縮な開多様体であるが，$\overline{\mathcal{QF}}$ は境界付き多様体とはならない (McMullen [Mc]).

射影構造　S 上の射影構造とは (G, X)-構造で $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, $X = \hat{\mathbb{C}}$ であるものをいう．S 上の marking 込みの射影構造空間を $P(S)$ とし，射影構造 $\Sigma \in P(S)$ にそのホロノミー表現 $[\rho_\Sigma] \in R(S)$ を対応させる写像を $hol : P(S) \to R(S)$ と書く．ここで写像 hol は局所同相だが被覆写像ではない (Hejhal) が，$Q(S) := hol^{-1}(QF)$ の各連結成分 $\mathcal{Q}$ への制限 $hol|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \to \mathcal{QF}$ は同相写像となる．また Golman によって，これらの連結成分の集合は $\mathcal{ML}_{\mathbb{N}}(S)$ と $1:1$ 対応がつくことが知られている．ここで $\mathcal{ML}_{\mathbb{N}}(S) = \{\sum k_i c_i \mid k_i \in \mathbb{N}, c_i : \text{s.c.c. on } S, c_i \cap c_j = \emptyset\}$ である．この対応によって $Q(S)$ の連結成分分解 $Q(S) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbb{N}}(S)} \mathcal{Q}_\lambda$ を得て，$\Psi_\lambda := (hol|_{\mathcal{Q}_\lambda})^{-1} : \mathcal{QF} \to \mathcal{Q}_\lambda$ を grafting map と呼ぶ．(通常は $\mathrm{Gr}_\lambda := \Psi_\lambda \circ \Psi_0^{-1} : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q}_\lambda$ のことを grafting map と呼ぶ.)

$$\begin{tikzcd}
P(S) \arrow[d, "hol"'] & \supset & \mathcal{Q}_0 \arrow[r, "\mathrm{Gr}_\lambda"] & \mathcal{Q}_\lambda \\
R(S) & \supset & \mathcal{QF} \arrow[u, "\Psi_0"] \arrow[ur, "\Psi_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

収束列　代数的収束 $\mathcal{QF} \ni B(X_n, \bar{Y}_n) = \rho_n \to \rho_\infty \in \partial\mathcal{QF}$ がスタンダードであるとは，(i) あるコンパクト集合 $K \subset T(S)$ が存在して $\{X_n\} \subset K$, または (ii) あるコンパクト集合 $K' \subset T(\bar{S})$ が存在して $\{\bar{Y}_n\} \subset K'$, が成り立つときをいい，そうでないときエキゾチックであるという．(i), (ii) のタイプのスタンダード収束の極限集合をそれぞれ $\partial^+\mathcal{QF}$, $\partial^-\mathcal{QF}$ と表すことにすると $\partial^+\mathcal{QF} = \bigsqcup_{X \in T(S)} \partial B_X$ と $\partial^-\mathcal{QF} = \bigsqcup_{\bar{Y} \in T(\bar{S})} \partial B_{\bar{Y}}$ が成り立つ．ここで，$\partial\mathcal{QF} - \partial^{\pm}\mathcal{QF} \neq \emptyset$ であることに注意する．また，エキゾチックな収束列 $\mathcal{QF} \ni \rho_n \to \rho_\infty \in \partial^{\pm}\mathcal{QF}$ の例も存在する．

連続性・不連続性　さて，Grafting map $\Psi_\lambda : \mathcal{QF} \to \mathcal{Q}_\lambda$ は $\partial^\pm\mathcal{QF}$ にまで「自然に」拡張される．($\partial^-\mathcal{QF}$ の場合は Bromberg [Br] による．) 定義出来ないときは $\Psi_\lambda(\rho) = \infty$ とし，$P(S)$ の 1 点コンパクト化 $\hat{P}(S) = P(S) \cup \{\infty\}$ の点とみなす．このとき，$\Psi_\lambda : \mathcal{QF} \cup \partial^\pm\mathcal{QF} \to \hat{P}(S)$ は連続であろうと期待するのは一見自然である．しかし，$\rho \in \partial^\pm\mathcal{QF}$ とその適当な近傍 U に対して $U \cap \mathcal{QF}$ が連結とは限らないので，連続性は自明ではない．実際，エキゾチック収束列を用いて，任意の近傍 U に対して $U \cap \mathcal{QF}$ が連結とならない $\rho \in \partial^\pm\mathcal{QF}$ の存在が言えて，さらに次が成り立つ．

Theorem 1 ([Mc], [It1], [It2]). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbb{N}}(S)$ に対して，ある $\rho_\infty \in \partial^\pm\mathcal{QF}$ *s.t.* $\Psi_\lambda(\rho_\infty) \neq \infty$ とエキゾチックな収束列 $\mathcal{QF} \ni \rho_n \to \rho_\infty \in \partial^\pm\mathcal{QF}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} \Psi_\lambda(\rho_n) \neq \Psi_\lambda(\rho_\infty)$ が成り立つ．さらに $\lambda \neq 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} \Psi_\lambda(\rho_n) \neq \infty$ とできる．

主結果　ここでは逆に，スタンダード収束が連続性を保つことを示した．

Theorem 2 ([It3]). $\mathcal{QF} \ni \rho_n \to \rho_\infty \in \partial^\pm\mathcal{QF}$ がスタンダード収束であれば，$\hat{P}(S)$ において $\Psi_\lambda(\rho_n) \to \Psi_\lambda(\rho_\infty)$ が成り立つ．特に $\Psi_\lambda(\rho_\infty) \neq \infty$ のとき，$\Psi_\lambda : \mathcal{QF} \to \mathcal{Q}_\lambda$ は ρ_∞ のある近傍にまで解析接続される．

Goldman's grafting theorem より，任意の $\rho \in \partial^\pm\mathcal{QF}$ に対して $hol^{-1}(\rho) = \{\Psi_\lambda(\rho) \mid \lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbb{N}}(S)\}$ が成り立つ．ここでは Theorem 2 の応用として，これを $\partial^\pm\mathcal{QF}$ に拡張したものを得る．

Theorem 3 ([?]). 任意の $\rho \in \partial^\pm\mathcal{QF}$ に対して次が成り立つ：

$$hol^{-1}(\rho) = \{\Psi_\lambda(\rho) \mid \lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbb{N}}(S),\ \Psi_\lambda(\rho) \neq \infty\}.$$

参考文献

[Br] K. Bromberg, *Projective structures with degenerate holonomy and the Bers' density conjecture*, preprint 2002.

[It1] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-Fuchsian space*, Duke Math. J. **105** (2000), 185–209.

[It2] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-fuchsian spaces II*, preprint 2003.

[It3] K. Ito, *On continuous extension of grafting maps*, in preparation.

[Mc] C. T. McMullen, *Complex earthquakes and Teichmuller theory*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283–320.

18 Behavior of the Bergman kernel at infinity

陳伯勇（同済大学） 神本丈（九州大学） 大沢健夫（名古屋大学）

Ω を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の領域とする．K_Ω で Ω の Bergman 核を表し，ds^2_Ω で Bergman 計量を表す．Ω がとくに $\mathbb{C}^n$ 上の多重劣調和関数 ρ によって

$$\left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \mathrm{Im}\, w > \rho(z) \right\}$$

で与えられるとき，K_Ω や ds^2_Ω の境界挙動を詳しく調べたい．代表例である超球に同値な $\mathrm{Im}\, w > |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ については良く知られているし，容易である．神本は最近，ρ が $|z_1|, \cdots, |z_n|$ の多項式の場合，その Newton 図形が K_Ω の原点における挙動を支配することに注目し，一般的な漸近評価式を導いた．ここでは $\rho(z) = f(|z_1|, \cdots, |z_n|)$ であり，

$$f = \sum c_\alpha x^\alpha = \sum c_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad c_\alpha, \alpha_j \geq 0$$

である場合に，$\mathrm{Im}\, w \to +\infty$ のときの K_Ω と ds^2_Ω の挙動を問題にしたい．

まず話を次の一般的な存在定理から始めよう．

定理 1. $\Omega = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \mathrm{Im}\, w > \rho(z) \right\}$ であり，ρ は $\mathbb{C}^n$ 上の非負多重劣調和関数で $\lim_{|z| \to \infty} \rho(z) = +\infty$ をみたすものとする．このとき

（i） $K_\Omega > 0$ であり，T_R を w 軸の管状近傍 $\left\{ (z, w) \in \Omega \;\middle|\; |z| < R \right\}$ $(0 < R < +\infty)$ とするとき，T_R 内で $\mathrm{Im}\, w \to +\infty$ のとき

$$K_\Omega((z, w)) = o\left((\mathrm{Im}\, w)^{-2} \right)$$

である．

（ii） Ω は完備な Bergman 計量をもつ．

詳しい漸近評価は次の通り.

定理2. $\rho(z) = f(|z_1|, \cdots, |z_n|)$ であり,

$$f = \sum c_{\alpha_1\cdots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad (\text{有限和}) \quad c_\alpha, \alpha_j \geq 0$$

かつ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であるとする. このとき上の T_R 内で

$$K_\Omega((z,w)) \approx (\mathrm{Im}\, w)^{-2-\frac{2}{d_f}} (\log \mathrm{Im}\, w)^{1-m_f}$$

$$ds_\Omega^2((z,w);X) \approx \frac{|X_{n+1}|^2}{(\mathrm{Im}\, w)^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{|X_j|^2}{(\mathrm{Im}\, w)^{2/d_f^{(j)} - 2/d_f} (\log \mathrm{Im}\, w)^{m_f^{(j)} - m_f}}$$

が $\mathrm{Im}\, w \to +\infty$ のとき成立する. ただし $X = (X_1, \cdots, X_{n+1})$ であり, $\approx$ はその両辺の比が有界であることを意味する. また d_f, m_f, $d_f^{(j)}$, $m_f^{(j)}$ については以下の通り.

$d_f, d_f^{(j)}$: $\overbrace{S_f = \{\alpha \mid c_\alpha \neq 0\}}^{\cup\{0\}}$ とし, $\Gamma(f)$ を S_f の $\mathbb{R}^n$ における凸包とする. $\tilde{\Gamma}(f)$ を $\Gamma(f)$ の境界とし, $\tilde{\Gamma}(f)$ と直線 $\mathbb{R}\cdot(1,\cdots,1)$ との交点 A の成分(すべて等しい)を d_f とし, $\mathbb{R}\cdot(1,\cdots,\underset{j}{2},\cdots,1)$ との交点 A_j の成分の小さい方を $d_f^{(j)}$ とする.

$m_f, m_f^{(j)}$: A に集まる $\tilde{\Gamma}(f)$ の $n-1$ 次元の面の個数を $\tilde{m}_f$, A_j に集まる面の個数を $\tilde{m}_f^{(j)}$ とするとき,

$$m_f = \min\{\tilde{m}_f, n\}$$

$$m_f^{(j)} = \min\{\tilde{m}_f^{(j)}, n\}$$

発表予定稿: Chen, B.-Y., Kamimoto, J. and Ohsawa, T., *Behavior of the Bergman kernel at infinity*, to appear in Math. Zeit.

19 Levi-flats in complex tori of dimension two

大沢健夫（名古屋大学）

複素葉層構造論における C. Camacho, A. LinsNeto, D. Cerveau らの仕事の影響で、複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 2$) 内に滑らかな Levi 平坦超曲面が存在するか否かに多数の関心が及び、LinsNeto [LN], Siu [S-1, 2], Iordan [I] によって非存在定理が得られた。就中 [S-2] において L^2 評価式の方法が実質的に改良され、それと並行して Bergman 核や Hartogs 現象に関わる新しい L^2 評価式が Berndtsson-Charpentier [B-C] や Henkin-Iordan [H-I] により発見されたことは、多変数複素解析における大きな進歩である。非存在定理における滑らかさの仮定を Lipschitz 級にまで緩和できるかどうかは今後の問題であるが、~~最近 Cao-Shaw-Wang [C-S-W] は [H-I] の L^2 評価式に基礎を置く新しいアプローチを提起している。~~

そこでこのような技法上の進歩を利用して、複素多様体内のコンパクトな Levi 平坦超曲面（これを以後 Levi フラットと呼ぶ）について、新たな知見を捕獲しようと企てた。K3 曲面内の Levi フラットが分類できればとのすごく面白そうだが（藤木明氏、吉川謙一氏による（独立の）コメント）、とりあえず手が届きそうな n 次元複素トーラス $\mathbb{T}^n$ に話を限ることにする。$\mathbb{P}^n$ の場合と異なり $\mathbb{T}^n$ は多くの平坦な閉実超曲面を含み、それらはすべて Levi フラットである。「それ以外にはないのではないか」という素朴な期待（≒トーラスの場合には面白い現象には出会えないだろうという諦観）から [M-O] で示したことは、「$\mathbb{T}^2$ 内の非平坦な Levi フラット S に対し、$\mathbb{T}^2 \setminus S$ は Stein である」であった。次の定理はその続きだが、同時に素朴な予想を裏切るものである。

定理. S を $\mathbb{T}^2$ 内の（連結な）C^8 級の Levi フラットとする。この時

1) S は複素線分を含む.

2) S にふくまれる複素線分の合併集合は S 全体であるか、または

有限個の楕円曲線 $E_1, \cdots, E_m$ から成る。

3) 2) の後者が起るのは、$\mathbb{T}^2$ からある楕円曲線 E への解析的なファイバー束写像 $\pi : \mathbb{T}^2 \longrightarrow E$ が存在し、$\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ ($p \in E$) が ~~$\tau \in \mathbb{Q}+\sqrt{-1}\mathbb{R}$~~ $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ をみたす場合であり、またそのときに限る。

4) さらにこのとき S からある楕円曲線への全射CR写像で、$E_1, \cdots, E_m$ をその臨界集合内にふくむものが存在する。

5) この臨界集合は S が実解析的ならば $\bigcup_{j=1}^{m} E_j$ に等しい。

証明の筋書： C^8 級の Levi フラットで複素線分を含まないものがあったとすると、それを境界にもつ領域上で Henkin-Iordan 型の L^2 評価式が成立し、よって Siu [S-2] の議論をあてはめることができる。次に複素線分を含むような Levi フラット S がそれらで埋めつくせないとすると、S は楕円曲線 $E_1, \cdots, E_m, \cdots$ を含むが、その個数が有限でなければならないことは、例えば西野の定理(1982)から出る。$E_1, \cdots, E_m$ は互いに交わらないから、これらは一つの束写像 $\pi : \mathbb{T}^2 \longrightarrow E$ のファイバーであり、$\pi|S$ は 4) の性質をもつ。逆にファイバーが 3) の条件をみたすような束写像を与えたとき、底空間上のアーベル・ヤコビ写像の性質を用いることにより、一定の条件をみたす偶数個のファイバーを含み、他には複素線分を含まぬ Levi フラットを構成できる。S が実解析的であるという仮定の下に、非平坦な Levi フラットがそのようなものに尽きることが示される。この最後の部分には Ivashkovitch の Hartogs 型拡張定理を用いる。

発表予定稿： Levi-flats in complex tori of dimension two, preprint

20 On the displacement rigidity of Levi flat hypersurfaces —— the case of boundaries of disc bundles over compact Riemann surfaces

Klas Diederich (Wuppertal大学)　大沢健夫 (名古屋大学)

複素多様体内のLevi平坦超曲面というものは、多変数関数論においてこれまで反例としてのみその存在意義を認められてきたような印象があるが、最近少し事情が変わり、葉層構造論との関係から研究が活性化しつつある。そこでこの機会に、Kähler多様体上の円板束に関する以前の研究[D-O]を少し発展させてみたいと思った。[D-O]の主結果は、「コンパクトなKähler多様体上の解析的円板束は(中野の意味で)弱1完備である」というものだったが、その証明にはEells-Sampsonの調和写像論を用いており、その結果、円板束上に構成された多重劣調和関数には尽去性(exhaustiveness)以外にも特筆すべき点がひそんでいる。それを利用して円板束の境界の変形に関する性質を引き出してみようというのである。

MはコンパクトなKähler多様体、DはM上の解析的円板束とする。Dの境界とは付随する$\mathbb{P}^1$束内での境界をいうものとする。円板$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$の小林双曲性により、束$D$の変換関数系は局所定数であり、従って$M$上の円板束の解析的同値類の集合と$\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{Aut}\,\mathbb{D})/\mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$の間には自然な1対1の対応がある。$D$に対応する$\pi_1(M)$の(一つの)$\mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$表現の像を$\Gamma_D$で表す。$M$が種数が2以上の閉リーマン面$C$であり、$\Gamma_D$が$\mathbb{D}$に適正離散的(properly discontinuous)に作用するとき、束DはFuchs型であるということにする。

定義. C^∞多様体Xとその閉部分多様体Yに対し、Xの閉部分多様体Y'がYの変位(displacement)であるとは、Y'をふくむYの管状近傍Tと、Yを零断面にうつすTからYの法束$N_{Y/X}$へのC^∞同相φがあって$\varphi(Y')$がNの断面になることをいう。また、Xの閉部分多様体の列Y_nがYに収束するとは、ある番号から先のY_nが一定のTとφに関するYの変位であって、$\varphi(Y_n)$がC^∞位相で零断面に収束することをいう。

定義　複素多様体 X 内の Levi 平坦な閉じた超曲面 S が X 内で剛 (rigid) であるとは、S に収束する Levi 平坦超曲面の任意の列 S_n に対して、ある番号から先の S_n がすべて S と CR 同型になることをいう.

S が実解析的なとき、実解析的な変位 S_n に限って上の意味の剛性が成り立つとき、S は X 内で解析的に剛であるという.

このような用語を用いてわれわれの主結果は次のように述べられる.

定理.　上記のような C, $D \to C$, Γ_D に対し、以下の二つの場合には D に付随する $\mathbb{P}^1$ 束内で ∂D は解析的に剛である.

1)　D は Fuchs 型であり、$\mathbb{D}/\Gamma_D$ は C または C の複素共役に同型である.

または

2)　Γ_D は可換群である.

証明に用いられることがらはいささか多彩であり、ここでは列挙するにとどめる。

i)　閉リーマン面間の調和写像に関する Schoen-Yau の微分同相定理

ii)　調和断面による強多重劣調和関数の構成 ([D-O])

iii)　Ivashkovitch の Hartogs 型拡張定理

iv)　閉リーマン面の射影構造に関する基礎的諸事実 (Gunning の講義録)

[D-O]　Diederich, K. and Ohsawa, T.,　*Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds*,　Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 819-833.

21 代数的加法定理を許す有理型関数について

阿部 幸隆 (富山大学 理学部)

$\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数体 $\mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$ の非退化な部分体 K を考える．K は $\mathbb{C}$ 上有限生成で超越次数 n であるとする．このような K を $\mathbb{C}$ 上の n 変数代数関数体という．$f_0, \ldots, f_n$ を K の生成元とする．

定義 $f_0, \ldots, f_n$ が代数的加法定理（以下 *(AAT)* と略記）を許すとは，どの $j = 0, 1, \ldots, n$ に対しても有理関数 R_j が存在して

$$f_j(x+y) = R_j(f_0(x), \ldots, f_n(x), f_0(y), \ldots, f_n(y)), \quad x, y \in \mathbb{C}^n$$

をみたすときをいう．K の生成元 $f_0, \ldots, f_n$ が *(AAT)* を許すときに，K は *(AAT)* を許すという．

定義 K が (AAT^*) を許すとは，代数的に独立な n 個の元 $f_1, \ldots, f_n \in K$ が存在して，任意の $j = 1, \ldots, n$ に対し

$$P_j(f_j(x+y), f_1(x), \ldots, f_n(x), f_1(y), \ldots, f_n(y)) = 0, \quad x, y \in \mathbb{C}^n$$

をみたす 0 でない多項式 P_j がとれるときをいう．

K が (AAT) を許すことと (AAT^*) を許すことは同値である．

$n = 1$ のとき，f が (AAT^*) を許すのは，f が楕円関数であるか有理関数であるか e^{az} の有理関数であるかのいずれかであり，またそのときに限る．Weierstrass は，多変数でも同様で，アーベル関数かその退化したものであると述べていたが，その証明は存在しない（[3], [4] を参照）．また，アーベル関数の退化したものとはいかなる関数であるかもはっきりしない．

これに関して次の結果を得たので報告する．なお，K にさらに条件をつけた場合を [1] で考察している．

定理 ([2]) $K \subset \mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$ を *(AAT)* を許す $\mathbb{C}$ 上の n 変数代数関数体とする．このとき，適当な座標変換を行うことにより

$$K \subset \mathbb{C}(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q, g_0, \ldots, g_r)$$

とみなせる．ここで，$(z_1, \ldots, z_p)$, $(w_1, \ldots, w_q)$ はそれぞれ $\mathbb{C}^p$, $(\mathbb{C}^*)^q$ の座標関数，$g_0, \ldots, g_r$ は r 次元アーベル関数体の生成元である．

参考文献

[1] *Y. Abe*, Meromorphic functions admitting an algebraic addition theorem, Osaka J. Math. **36** (1999), 343–363.

[2] *Y. Abe*, A statement of Weierstrass on meromorphic functions which admit an algebraic addition theorem, preprint.

[3] *P. Painlevé*, Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition, Acta Math. **27** (1903), 1–54.

[4] *C. L. Siegel*, Topics in Complex Function Theory, Vol.3, Wiley-Interscience, New York, 1973.

22 A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space, II

Akio Kodama (Kanazawa Univ.)
Satoru Shimizu (Tohoku Univ.)

This is a continuation of our previous paper [4], and discusses a characterization of $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ by its holomorphic automorphism group. The problems related to the structure of the holomorphic automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ of $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ are in general very difficult to study. One reason is that $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ is terribly big when $k+\ell \geq 2$, and can not have the structure of a Lie group with respect to the compact-open topology. But, by looking at topological subgroups with Lie group structures of the topological group $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ equipped with the compact-open topology, we can find a lead to apply the Lie group theory to the investigation of such problems. Besides $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ admits a natural $(k+\ell)$-dimensional compact torus action given as the rotations along each coordinate axis. This fact enables us to use the machinery associated with torus actions, for example, the theory of Reinhardt domains. Under these points of view, we can show the following result.

Theorem 1. *Let M be a connected complex manifold of dimension n that is holomorphically separable and admits a smooth envelope of holomorphy. Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ *as topological groups, where the groups* $\mathrm{Aut}(M)$ *and* $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ *are equipped with the compact-open topology. Then M itself is biholomorphically equivalent to* $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$.

Some remarks should be made here. Firstly, the assertion of Theorem 1 was proved in [4, Main Theorem] under the assumption that M is a Stein manifold. This time, by improving our method of proof, the assertion of Theorem 1 is shown under the holomorphic separability condition with admittance of smooth envelope of holomorphy, which is a weaker condition than the Steinness condition. Next, when $k = n$, that is, for the case of a characterization of $\mathbf{C}^n$, the same result as ours was obtained independently on us in the paper of Isaev and Kruzhilin [3] without the holomorphic separability assumption and so on, and in the paper of Isaev [2] with the Steinness assumption. In particular, a similar idea to ours is used in the paper of Isaev [2]. Finally, if M is a domain in $\mathbf{C}^n$, then it admits a smooth envelope of holomorphy. Therefore Theorem 1 can be applied when M is a domain in $\mathbf{C}^n$.

Our method of proof of Theorem 1 has some interesting applications. One of them is a fact about actions on complex manifolds by groups given as the direct product of unitary groups.

Theorem 2. *Let M be a connected Stein manifold of dimension $n \geq 2$ and let K be a compact group given as the direct product $K = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ of unitary groups, where each $U(n_j)$ is the unitary group of degree $n_j \geq 1$ and $\sum_{j=1}^{s} n_j = n$. Suppose that an injective continuous group homomorphism ρ of K into* $\mathrm{Aut}(M)$ *is given. Then there exists a biholomorphic mapping F of M onto a Reinhardt domain D in $\mathbf{C}^n$ such that K is a subgroup of* $\mathrm{Aut}(D)$ *and $F\rho(K)F^{-1} = K$.*

In the study of n-dimensional compact torus actions on n-dimensional complex manifolds, a result of Barrett, Bedford and Dadok [1, Theorem 1] plays a fundamental role. Theorem 2 above plays a similar role in the study of n-dimensional compact group actions on n-dimensional complex manifolds for which n-dimensional compact groups are given as the direct product of unitary groups.

References

[1] D. E. Barrett, E. Bedford, and J. Dadok: *T^n-actions on holomorphically separable complex manifolds*, Math. Z. **202** (1989), 65–82.

[2] A. V. Isaev: *Characterization of $\mathbf{C}^n$ by its automorphism group*, Proc. Steklov Inst. Math. **235** (2001), 103–106.

[3] A. V. Isaev and N. G. Kruzhilin: *Effective actions of the unitary group on complex manifolds*, Canad. J. Math. **54** (2002), 1254–1279.

[4] A. Kodama and S. Shimizu: *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space*, Osaka J. Math. **41** (2004), 85–95.

23 Cayley 変換像の凸性による対称管状領域の特徴付け

甲斐 千舟　(京大・理)
野村 隆昭　(京大・理)

Cayley 変換

$$w \mapsto \frac{w-1}{w+1} = 1 - 2(w+1)^{-1} \qquad (w \in \mathbb{C}) \tag{1}$$

によって右半平面は開単位円板に写される. 管状領域 $\Omega + iV$ が対称であるときは, 対称錐 Ω に付随する Jordan 代数 V の逆元写像を用いて上式の $(w+1)^{-1}$ にあたるものを与えることによって, $\Omega + iV$ の Cayley 変換が自然に定義される. その像は複素化された Jordan 代数 W のスペクトルノルムに関する単位球となり, 特に凸集合である. 対称とは限らない一般の管状領域の Cayley 変換は, パラメーター付けされた擬逆元写像を用いて定義される. 管状領域が非対称な場合には, 対称な時とは違って標準的な逆元写像は無く, パラメーター付けが意味をもってくる.

V を有限次元実ベクトル空間, $\Omega \subset V$ を等質錐とする. すなわち, 直線を含まない開凸錐 Ω に線型自己同型群

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) \mid g\Omega = \Omega\}$$

が推移的に作用しているとする. このとき $G(\Omega)$ の分裂型可解部分群 H で Ω に単純推移的に作用するものが存在する. 任意に $E \in \Omega$ をとり, 固定する. 軌道写像 $H \ni T \mapsto TE \in \Omega$ は微分同相写像であるから, これを H の単位元で微分することにより線型同型写像 $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H) \ni L \mapsto LE \in T_E(\Omega) = V$ を得る. この逆写像を $V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$ と表す. V に積 $\triangle$ を

$$x \triangle y := L_x y \qquad (x, y \in V)$$

で導入する. $(V, \triangle)$ は E を単位元とする非結合的代数 (clan) になる. Clan $(V, \triangle)$ は normal 分解と呼ばれる直和分解をもつ: 正整数 r と冪等元 $E_1, \ldots, E_r$ が存在して, $1 \le j < k \le r$ をみたす整数 j, k に対して

$$V_{kj} := \left\{x \in V \;\middle|\; \forall c = \sum \lambda_i E_i, c \triangle x = 2^{-1}(\lambda_j + \lambda_k)x, x \triangle c = \lambda_j x\right\}$$

とおくとき,

$$E = E_1 + \cdots + E_r, \qquad V = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}E_i + \sum_{1 \le j < k \le r} V_{kj}.$$

$\mathfrak{a} := \sum \mathbb{R}L_{E_i}$ とおく. $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{h}$ の極大可換部分 Lie 代数である. 各 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ に対し, $A := \exp \mathfrak{a}$ の一次元表現 $\chi_{\mathbf{s}}$ を

$$\chi_{\mathbf{s}}\left(\exp\left(\sum t_i L_{E_i}\right)\right) := \exp\left(\sum s_i t_i\right)$$

で定義する. $\mathfrak{n}_{kj} := \{L_x \in \mathfrak{h} \,|\, x \in V_{kj}\}$ $(1 \le j < k \le r), \mathfrak{n} := \sum_{j<k} \mathfrak{n}_{kj}$ とおく. $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{h}$ の冪零部分 Lie 代数であり, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{n}$ である. $N := \exp \mathfrak{n}$ とおくと,

$H = A \ltimes N$ となる. $\chi_{\mathbf{s}}$ を $\chi_{\mathbf{s}}|_N \equiv 1$ として H の一次元表現に拡張し同じ記号で表す. 微分同相写像 $H \ni T \mapsto TE \in \Omega$ を用いて $\chi_{\mathbf{s}}$ を Ω に移した函数を $\Delta_{\mathbf{s}}$ とする:

$$\Delta_{\mathbf{s}}(hE) := \chi_{\mathbf{s}}(h) \qquad (h \in H).$$

パラメーター $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ は $s_1, \ldots, s_r > 0$ を満たすとする (これを $\mathbf{s} > 0$ と書く). V 上の双線型形式 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を

$$\langle x|y \rangle_{\mathbf{s}} := D_x D_y \log \Delta_{-\mathbf{s}}(E) \qquad (x, y \in V)$$

により定義すると, これは V 上の正定値内積を定める. ただし, V 上の C^∞ 級函数 f と $v, x \in V$ に対し $D_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv)\big|_{t=0}$ である. $x \in \Omega$ の擬逆元 $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)$ を次のように定める:

$$\langle \mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)|y \rangle_{\mathbf{s}} = -D_y \log \Delta_{-\mathbf{s}}(x) \qquad (y \in V).$$

$\mathcal{I}_{\mathbf{s}} : \Omega \to V$ を擬逆元写像と呼ぶ. 一方, Ω の双対錐を内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を用いて V に実現したものを $\Omega^{\mathbf{s}}$ とする:

$$\Omega^{\mathbf{s}} := \{x \in V \mid \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \langle x|y \rangle_{\mathbf{s}} > 0\}.$$

$\Omega^{\mathbf{s}}$ から出発して $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ の定義と同様の操作を進めることにより, 双対擬逆元写像 $\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}} : \Omega^{\mathbf{s}} \to V$ を得る.

$\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(E) = E, \mathcal{I}_{\mathbf{s}}(\Omega) = \Omega^{\mathbf{s}}$ を満たす. $W := V_{\mathbb{C}}$ とおくと, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}, \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ は共に W 上の双有理写像に解析接続され, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}^{-1} = \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ である. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}, \mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}$ はそれぞれ管状領域 $\Omega + iV, \Omega^{\mathbf{s}} + iV$ 上で正則である. 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ を W に複素双線型に拡張し, 同じ記号で表す. W 上の線型作用素 A の $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbf{s}}$ に関する転置写像を ${}^{\mathbf{s}}A$ と書く. H の複素化を $H_{\mathbb{C}}$ とおく. $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}$ は $H_{\mathbb{C}}$ 共変である: $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(hx) = {}^{\mathbf{s}}h^{-1}\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(x)$ $(h \in H_{\mathbb{C}})$. また, 実形 V に関する W の複素共役を $w \mapsto \overline{w}$ で表すと, $\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(\overline{w}) = \overline{\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w)}$ $(w \in W)$. Ω によって決まるパラメーター $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ を

$$d_i := \operatorname{Tr} L_{E_i} \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

で定める. 管状領域 $\Omega + iV$ が対称ならば, E を単位元とする Jordan 代数の構造が W に入る. このとき $\mathcal{I}_{\mathbf{d}}$ は Jordan 代数の逆元写像に一致する.

(1) に倣って管状領域 $\Omega + iV$ の Cayley 変換 $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}$ を

$$\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(w) := E - 2\mathcal{I}_{\mathbf{s}}(w + E) \qquad (w \in \Omega + iV)$$

と定義する. また, $\Omega^{\mathbf{s}} + iV$ の双対 Cayley 変換 $\mathcal{C}^*_{\mathbf{s}}$ を次のように定める:

$$\mathcal{C}^*_{\mathbf{s}}(w) := E - 2\mathcal{I}^*_{\mathbf{s}}(w + E) \qquad (w \in \Omega^{\mathbf{s}} + iV).$$

定理. Ω を既約な等質錐とし, $\mathbf{s} > 0$ とする. このとき次の二つは同値である:
(A) $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}(\Omega + iV), \mathcal{C}^*_{\mathbf{s}}(\Omega^{\mathbf{s}} + iV)$ は共に凸である.
(B) $\Omega + iV$ は対称であり, ある正数 $p > 0$ が存在して $\mathbf{s} = p\mathbf{d}$ となる.

参考文献

[1] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric cones through pseudoinverse maps*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[2] C. Kai and T. Nomura, *A characterization of symmetric tube domains by convexity of Cayley transform images*, Kyoto-Math., 2004-4.

24 筒状域における Cousin 第2問題

濱野佐知子 (奈良女大・人間文化)

岡先生は 1938 年の第 III 論文において, 双円環ですら解を持たない Cousin 第2分布があることを示されている. では, 筒状域[1] における Cousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ はどのような条件を満たせば解を持つのだろうか？ 正則域における Cousin 第2問題は, もしそれが連続解を持てば解析解も持つ, という「岡の原理」を手がかりに,

『任意次元の筒状域における Cousin 第2問題が解を持つための必要十分条件』

を得ることが我々の目的である.

岡先生は論文 III – Exemples (岡潔先生遺稿集第五集 p.111) で, 双円環における Cousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ に対して, 円の直積による実2次元の閉曲面と $(\mathfrak{z})$ とのある種の交点数を定義し, もしその分布が解を持てばその交点数の総和は零であることを示し, それが零ではない例を挙げることによって, Cousin 第2問題は双円環においてすら解を持たないことがあることを示されている. それで我々はその交点数を任意次元の場合に次のように一般化した.

複素 n 変数 $z_1, \ldots, z_n$ の空間 $\mathbf{C}^n$ における筒状域 $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ に Cousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ が与えられているとする. i, j $(i, j = 1, \ldots, n)$ を任意に取り, 筒状域 $D_i \times D_j$ を D_{ij} と表し, さらに D_i と D_j を除いた筒状域を $D^{(ij)}$ と表す. 次に, D_i および D_j 内にそれぞれ単純閉曲線 γ_i および γ_j を描き, $D^{(ij)}$ 内に点 p を適当に取って, D における実2次元の閉曲面 $\gamma_i \times \gamma_j \times p$ を描く. このような曲面を一般に Γ と表す. このとき Γ を $(\mathfrak{z})$ に対して特殊な位置関係にないように取れば, 岡先生の双円環の場合と同様に Γ と $(\mathfrak{z})$ のある種の交点数が定義できる. (これは K. Stein の概念 charakteristischen Zahlen を筒状域の場合に具体化したものになっている.)

この定義のもとで次の定理が得られる.

主定理. $\mathbf{C}^n$ の任意の筒状域 D に Cousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ が与えられているとき, $(\mathfrak{z})$ が D において解を持つための必要十分条件は, 任意の指数の組 i, j および任意の閉曲面 Γ に対して, $(\mathfrak{z})$ と Γ との交点数がすべて零となることである.

条件が必要なことは岡先生によって示されている. しかも我々はすでに次のことを示した.

定理. 任意次元の一般な筒状域と位相同型な正則域では, その領域の任意の完全内部で常に解を持つような Cousin 第2分布は, 領域全体でも解を持つ.

したがって問題は, 主定理の条件のもとで, 筒状域の完全内部で解が求まることを示すことである. それで以下 D の各成分 D_i $(i = 1, \ldots, n)$ は有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれた閉筒状域であると仮定する.

[1] n 個の座標平面にそれぞれ領域 D_i を描いたとき, D_i $(i = 1, \ldots, n)$ の $\mathbf{C}^n$ における直積集合を筒状域という.

さて, 我々の研究の主要な部分は, この状勢のもとで, 主定理の条件を満たすCousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ に対して, 連続解を作ることにある. それさえ出来れば, 岡の原理により, 解析的な解が得られる.

そこで, そのための2つの補題を準備する.

1. 複素2変数 z_1, z_2 の空間に, z_1 平面に描かれた単純閉曲線 γ と z_2 平面に描かれた a, b を端点とする単純曲線 l との直積 $\Gamma^* = \gamma \times l$ を考え, $f(z_1, z_2)$ を Γ^* のある近傍 V における正則函数とする. このとき, 解析面 $S: f(z_1, z_2) = 0$ と Γ^* との交わりが有限個の点であれば, l の方向を a から b と定めて, 主定理における交点数と同様に, S と Γ^* の交点数が定義できる. このとき次の補題が得られる：

補題 1. S と Γ^* の交点数の総和 I は等式：

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{L_b} d \arg f(z_1, z_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{L_a} d \arg f(z_1, z_2)$$

を満たす. ただし $L_a = \gamma \times a$, $L_b = \gamma \times b$ であり, $f(z_1, z_2)$ は L_a および L_b 上に零を持たないとする.

2. α をある正の数とし, 実2変数 x, y の平面における閉矩形領域 $D_0 : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \alpha$ と, 複素 n 変数の空間における閉筒状域 $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ の直積 $\Delta = D_0 \times D$ を考える. D_0 の両サイドを $l_1 : x = 0,\ 0 \leqq y \leqq \alpha$ および $l_2 : x = 1,\ 0 \leqq y \leqq \alpha$ とおき, 直積集合 $L_i = l_i \times D\,(i = 1, 2)$ を描く. そして, $L_i\,(i = 1, 2)$ 上に零をとらない複素数値一価連続函数 $\lambda_i(y, (z))\,(i = 1, 2)$ を与える. このとき, 次の補題が得られる：

補題 2. もし D 内の任意の単純閉曲線 γ に対して, ある $y'\,(0 \leqq y' \leqq \alpha)$ で

$$\int_\gamma d \arg \lambda_1(y', (z)) = \int_\gamma d \arg \lambda_2(y', (z))$$

を満たすなら, Δ における零を取らない複素数値連続函数 $\Phi(x, y, (z))$ を,

$$\Phi(0, y, (z)) = \lambda_1(y, (z)), \quad \Phi(1, y, (z)) = \lambda_2(y, (z))$$

となるように求めることができる.

3. さて, 閉筒状域 $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ の各成分 D_i の連結度を $\nu_i\,(i = 1, \ldots, n)$ とし, D のランク ν を

$$\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_n$$

と定義する. このとき, 上記の2つの補題から, 次の命題が得られる：

命題. D に与えられた Cousin 第2分布 $(\mathfrak{z})$ が主定理の条件を満たすとき, ν を零または正の整数として, もし $(\mathfrak{z})$ がランク ν 以下の任意の閉領域に対して連続解を持つならば, ランク $\nu{+}1$ の任意の閉領域についても連続解を作ることが出来る.

岡の原理のおかげで, この命題により, 主定理は証明される.

25 複素多様体上の領域の変動に関する２階変分公式

N. Levenberg(Auckland Univ.), 山口博史（奈良女子大学）

M を n 次元の複素多様体, $ds^2 = \sum_{a,b=1}^n g_{a\bar{b}} dz_a \otimes d\bar{z}_b$ を M 上の Hermite 計量, $c(z) \geq 0$ を M 上の C^∞ 級関数, B を平面上の円板 $\{|t| < \rho\}$ とする. $D(t)$, $t \in B$ を滑らかな境界 $\partial D(t)$ で囲まれた M 上の不分岐域とする：領域の変動

$$\mathcal{D}:\ t \in B \to D(t) \Subset M$$

を $n+1$ 次元の領域 $\mathcal{D} = \cup_{t \in B}(t, D(t)) \subset B \times M$ と同一視し, $\partial\mathcal{D} = \cup_{t\in B}(t, \partial D(t))$ と書く. 計量 ds^2 から生じる実ラプラシアンを Δ とする. 各 $D(t)$, $t \in B$ は定点 a を含むと仮定し, 作用素 $\Delta - c$ に関する点 a での基本解の一つを $L(a,z)$ とする. 極 $L(a,z)$ をもつ $\Delta - c$ に関する $D(t)$ でのグリーン関数を $g(t,z)$ とする（中井-Sario 著 *Classificaion Theory (1970年)* を参照）. 点 a の近傍で

$$g(t,z) = L(z,a) + \lambda(t) + h(t,z)$$

ただし, $h(t,a) = 0$ と展開される. $\lambda(t)$ を $(D(t), a)$ のロバン定数と呼ぶ.

補題　次の２階変分公式が成立する.

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial \bar{t}}(t) = -c_n \int_{\partial D(t)} k_2(t,z) \sum_{a,b=1}^n \left(g^{\bar{a}b} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_a} \frac{\partial g}{\partial z_b}\right) d\sigma_z$$
$$-\frac{c_n}{2^{n-2}}\left\{\|\bar{\partial}\frac{\partial g}{\partial t}\|^2_{D(t)} + \frac{1}{2}\|\sqrt{c}\frac{\partial g}{\partial t}\|^2_{D(t)} + \int_{D(t)} \left[\Re\left\{\frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial \bar{t}} \bar{\partial} \frac{\partial g}{\partial t} \wedge \partial * \omega\right\} + \frac{1}{2i}\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|^2 \bar{\partial}\partial * \omega\right]\right\}.$$

ここに, $c_n > 0$ は次元定数, $\omega := i\sum_{a,b=1}^n g_{a\bar{b}} dz_a \wedge d\bar{z}_b$, $g^{\bar{a}b} := (g_{a\bar{b}})^{-1}$, $k_2(t,z)$ は $\mathcal{D}$ の定義関数 $\psi(t,z)$ を用いて, 次式で定まる $\partial\mathcal{D}$ 上の実数値関数である:

$$k_2(t,z) := \left[\sum_{a,b=1}^n g^{\bar{a}b} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_a} \frac{\partial \psi}{\partial z_b}\right]^{-3/2}$$
$$\times \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \bar{t}}\left(\sum_{a,b=1}^n g^{\bar{a}b} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_a}\frac{\partial \psi}{\partial z_b}\right) - 2\Re\left\{\frac{\partial \psi}{\partial t}\left(\sum_{a,b=1}^n g^{\bar{a}b}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_a}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_b \partial \bar{t}}\right)\right\} + \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|^2\left(\sum_{a,b=1}^n g^{\bar{a}b}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}_a \partial z_b}\right)\right].$$

定理　もし ds^2 が M 上のケーラー計量であって, $\mathcal{D}$ が $B \times M$ の不分岐擬凸状域ならば, $\lambda(t)$ は B 上の優調和関数である.

注意 1　定理は, $M = \mathbb{C}$ の場合は1976年, $M = \mathbb{C}^n$ かつ ds^2 がユークリッド計量の場合は1989年に示した. 補題の２階の変分公式は, $M = \mathbb{C}^n$ かつ ds^2 がユークリッド計量の場合は, 1991年（N.Levenberg-山口）に示した.

系 M を複素 n-次元の等質空間, G を推移的に働く複素有限次元の M の変換リー群とする. e を G の単位元とする. $D \Subset M$ を滑らかな境界 ∂D で囲まれた M 上の不分岐擬凸状域とする. 各 $z \in D$ に対して $D(z) = \{g \in G \mid g(z) \in D\} \ni e$ を考え, G の領域 $D(z)$ の助変数 $z \in D$ に関する変動

$$\mathcal{D}:\ z \in D \to D(z) \subset M$$

を作る. 複素リー群 G での多重劣調和近似関数の存在 (1973年) および ケーラー計量の存在 (2000年) が風間英明さんによって示されているから, これを用いて, $(D(z), e)$ に対して ロバン定数 $\Lambda(z)$ を作れる. これを D 上の関数と見るとき, 次が成立する:

(i) $-\Lambda(z)$ は常に D 上の多重劣調和近似関数である.

(ii) 或る点 $z_0 \in D$ で $-\Lambda(z)$ が強多重劣調和では無いとすれば, z_0 を通る D 内の解析曲線 $\Gamma:\ z = z(t)$, $t \in \mathbb{C}$ で, 条件 $\Gamma \Subset D$ を満たすものが存在する.

(iii) (M, G) が次の <u>性質</u> (spanning property) をもてば, $-\Lambda(z)$ は D での強多重劣調和近似関数になる:

<u>性質</u> $\forall z_0 \in M$ に対して その等方部分群 $H_{z_0} = \{g \in G \mid g(z_0) = z_0\}$ を考える. γ を点 z_0 を通る M 上の任意の (局所的な) 滑らかな複素一次解析曲線とする. このとき, $h_i \in H_{z_0}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が見つかって, 像曲線 $\gamma_i := h_i(\gamma)$ の点 z_0 における接線ベクトルを $a_i \in \mathbb{C}^n$ とすれば, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ を張る.

注意 2 例えば, グラスマン多様体 $GR(p+q, p)$ は 変換群として $G = GL(p+q, \mathbb{C})$ を取ることによって, 上記の spanning property を持つ. 従って, $GR(p+q, p)$ での滑らか境界をもつ不分岐擬凸状領域にはロバン定数から 強多重劣調和近似関数を作れる.

なお, 上田哲生さんは, 既に1980年に「グラスマン多様体の (無限多様も許す) 任意の不分岐擬凸状領域はStein多様体である」ことを岡の定理 (論文IX) に帰着させて証明している.

特別講演

Bergman kernel and metric with applications to geometry

Bo-Yong Chen

1 Basic notions and properties

Around late 1920's and early 1930's, Stephen Bergman introduced the reproducing kernel and the invariant metric for L^2 holomorphic functions on a domain in $\mathbf{C}^n$ which now carry his name. Later, these concepts were generalized to complex manifolds by several authors (A. Weil 1958, S. Kobayashi 1959) as follows: Given a n-dimensional complex manifold M. Denote by K_M the canonical line bundle and $H^2(M, K_M)$ the Hilbert space of holomorphic sections s of K_M such that

$$||s||^2 = \left|\int_M s \wedge \bar{s}\right| < \infty.$$

Let $s_1, s_2, \cdots$ be an orthonormal basis for $H^2(M, K_M)$. Then the non-negative (n, n) form $B_M = \sum_j s_j \wedge \bar{s}_j$ is called the *Bergman kernel form*. Write

$$B_M(z, \bar{z}) = B_M^*(z, \bar{z}) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$$

in local coordinates and set $ds_M^2 = \partial\bar{\partial} \log B_M^*$ provided B_M nowhere vanishing. Since it does not depend on the choice of coordinate, ds_M^2 defines a Kähler metric on M which is called the *Bergman metric* if it is non-degenerate. Let us first give some examples which carry the Bergman metric.

Examples. 1. Any compact manifold with very ample K_M.

2. Any domain in a complete Kähler manifold (e.g. Stein manifold) which carries a bounded strictly plurisubharmonic (psh) function. In particular, if M is a bounded domain in $\mathbf{C}^n$, then the global defined B_M^* is the classical Bergman kernel function.

Importance of the Bergman metric lies in its invariance under biholomorphic maps and its extreme property as follows

$$ds_M^2(z; v) = \frac{1}{B_M^*(z)} \sup\{ \quad |\partial s^*(v)|^2(z) : s \in H^2(M, K_M),\ ||s|| \le 1,\ s(z) = 0,$$
$$s = s^* dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \ \}$$

for any tangent vector $v \in T_z^{1,0}(M)$.

2 Boundary behavior of the Bergman kernel

Definition. Let M be a bounded pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$. Given $z_0 \in \partial M$, the growth exponent of the Bergman kernel function at z_0 is defined by

$$\alpha_M(z_0) = \sup\left\{s \geq 0 : \lim\inf_{z \to z_0} \delta_M^s(z) B_M(z, \bar{z}) > 0\right\}$$

where δ_M denotes the Euclidean boundary distance.

The modern theory of the Bergman kernel on M started from L. Hörmander's magic application of his weighted L^2 existence theorem in 1965, from which the asymptotic behavior of the Bergman kernel of bounded strongly pseudoconvex domains was given, in particular, $\alpha_M = n + 1$. A complete picture of the Bergman kernel and metric on bounded strongly pseudoconvex domains was figured out in C. Fefferman's fundamental paper (1974). Along this line, precise estimates were obtain for certain weakly pseudoconvex domains (Catlin 1989, McNeal 1994, etc). However, for a general smooth pseudoconvex domain M, only a lower estimate holds: $B_M \geq C\delta_M^{-2}$ (Ohsawa-Takegoshi 1987, P. Pflug 1975 slightly weaker). Examples with Levi-flat boundary shows that the lower bound is sharp. So to obtain better bounds, the boundary of M should be uniformly extendable at each boundary point in certain sense. In this sprit, Diederich-Herbort-Ohsawa (1986) proved $\alpha_M \geq 2 + \tau$ where $\tau > 0$ measures the degree of the extendibility (in particular, it contains domains of finite type). Recently, J. Kamimoto (2002) obtained an asymptotic formula of B_M in a non tangential convex cone of finite type domains

$$\{(z, w) \in \mathbf{C}^{n+1} : \operatorname{Im} w > \rho(z) = f(|z_1|, \cdots, |z_n|)\},$$

where $f \geq 0$ is a smooth function which has an isolated minimal point at 0. In particular, $B_M \asymp \delta_M^{-2-2/d_f} |\log \delta_M|^{m_f - 1}$ holds there, where $d_f > 0$, $m_f \geq 1$ comes from the Newton polyhedron of f at 0. His result suggests that the estimate of Diederich-Herbort-Ohsawa is perhaps not sufficiently sharp for many cases. However, one can not get $\alpha_M(0) \geq 2 + 2/d_f$ since the above estimate is only non tangential. Therefore, it is desirable to look for certain holomorphic invariant to measure the growth exponent of the Bergman kernel precisely, even for non finite type domains. In this sprite, we recall

Definition. (Demailly-Kollár 2001) Let ρ be a measurable function in a neighborhood of 0 in $\mathbf{C}^n$. The *complex singular exponent* of ρ at 0 is defined to be the non-negative number

$$c_0(\rho) = \sup\{c \geq 0 : |\rho|^{-2c} \text{ is } L^1 \text{ on a neighborhood of } 0\}.$$

When ρ is a holomorphic function, $c_0(\rho)$ is known as the *log canonical threshold* in algebraic geometry. Roughly speaking, the complex singular exponent is a holomorphic invariant measuring how singular a function ρ is at 0. It has important applications in complex geometry and complex analysis and can be computed via resolution of singularity (see the survey article by J. Kollár 1997). In Kamimoto's case, it equals to $1/d_f$.

Theorem 2.1. *Let*

$$M = \left\{(z,w) \in \mathbf{C}^{n+1} : \operatorname{Im} w > \rho(z) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2\right\},$$

where f_k are holomorphic functions vanishing at the origin. Let U be any open neighborhood of 0. *Then*

$$\alpha_{M \cap U}(0) \geq 2 + 2c_0(\rho).$$

The proof of Theorem 2.1 is based on the following L^2−extension theorem

Theorem (T. Ohsawa 2001) *Let D be a pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$ and let D' be the intersection of D and a linear complex subspace of dimension k. Let $\#(D')$ the space of all $\Psi \in PSH(D)$ such that $D' \subset \Psi^{-1}(-\infty)$ and for any $p \in D'$, there is a neighborhood U of p in D such that*

$$\sup_{U \setminus D'} |\Psi(z) - 2(n-k)\log d(z, D')| < \infty$$

where $d(z, D')$ denotes the Euclidean distance from z to D'. Then for any $\Psi \in \#(D')$ and any holomorphic function f on D' satisfying

$$\int_{D'} |f|^2 dV[\Psi] := \lim_{t \to +\infty} \sup \frac{2(n-k)}{\sigma_{2n-2k-1}} \int_{\Psi^{-1}((-t-1,-t))} f e^{-\Psi} dV < +\infty$$

where σ_m denotes the volume of the unit sphere in $\mathbf{R}^{m+1}$, there exists a holomorphic function F on D such that $F|_{D'} = f$ and

$$\int_D |F|^2 e^{-\Psi} dV \leq 2^8 \pi \int_{D'} |f|^2 dV[\Psi].$$

and the following semi-continuity principle of complex singular exponent:

Theorem. (Demailly-Kollár 2001) *Let Ω be a domain containing* 0 *and $\varphi \in PSH(\Omega)$ be given. If $c < c_0(e^{\varphi})$ and ψ converges to φ in $PSH(\Omega)$, then $e^{-2c\psi}$ converges to $e^{-2c\varphi}$ in L^1 norm over some neighborhood U of* 0.

It should be mentioned that $c_0(\rho)$ can also be used to give Hölder estimates of $\bar{\partial}$−equation for domains in Theorem 2.1.

3 Completeness of the Bergman metric

S. Kobayashi (1959, 1962) was the first who considered the completeness problem of the Bergman metric. He gave a useful criteria as follows

KC. *Let M be a complex manifold which possesses a Bergman metric. Assume that there exists a dense subspace $\mathcal{H}$ of $H^2(M, K_M)$ such that for any $s \in \mathcal{H}$ and for any sequence of points $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ of M which has no adherent point in M, there is a subsequence $\{y_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ such that*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{s(y_{k_j}) \wedge \bar{s}(y_{k_j})}{B_M(y_{k_j})} = 0.$$

Then the Bergman metric of M is complete.

By using this criteria, Bergman completeness of many special domains had been verified by a few people. However, the first general result proved by T. Ohsawa (1981) is that any bounded C^1 pseudoconvex domain is Bergman complete. In the same year, it was shown by Kerzman-Rosay that any bounded C^1 pseudoconvex domain is hyperconvex. A complex manifold M is called *hyperconvex* if there exists on M a C^∞ strictly psh function ψ such that $\{z \in M : \psi(z) < c\} \subset\subset M$ for any $c < 0$. There is a conjecture (perhaps due to S. Kobayashi) that any hyperconvex manifold should be Bergman complete. Jarnicki-Pflug (1989) proved the completeness for complete circular domain with a continuous Minkowski functional, which suggests the conjecture might be true at least for hyperconvex domains. This important case was proved around 1998 by Blocki-Pflug and G. Herbort independently. In their proofs, a concept called pluricomplex Green function (Roughly speaking, a generalization of the classical Green function to high dimensional case via Perron's definition) plays an important role. The use of the Green functions to Bergman kernel and metric goes back to the works of T. Ohsawa (1993) and Diederich-Ohsawa (1995).

On the other hand, there exist various hyperconvex manifolds for which the method of Blocki-Pflug (or Herbort) can not be directly applied, for instance,

(1) Pseudoconvex domains with C^2 boundary in $\mathbf{P}^n$ (Ohsawa-Sibony 1998);

(2) Any complete Kähler manifold M with a pole o such that its sectional curvature K is non-positive and in addition satisfies

$$\mathrm{K} \leq -\frac{1+\epsilon}{r^2 \log r}$$

for some constant $\epsilon > 0$ outside a compact subset of M, where r denotes the distance function based at o (Green-Wu 1979);

(3) Holomorphic fiber bundles whose base and fiber are hyperconvex (Vâjâitu 1996).

For (2), Greene-Wu proved the completeness for the case when the sectional curvature is pinched by two negative constants. The lower bound assumption was removed in Chen-Zhang (2002).

Theorem 3.1. *Any hyperconvex manifold carries a complete Bergman metric.*

An old theorem of H. Bremermann (1955) states that a bounded Bergman complete domain is holomorphically convex. It leads S. Kobayashi (1962) to ask whether a non-compact Bergman complete manifold is holomorphically convex. We give a negative answer:

Theorem 3.2. *There is a non-compact complex manifold which carries a complete Bergman metric but is not holomorphically convex.*

The construction of the example is inspired by a paper of H. Grauert (1962). Let M be a complete Kähler manifold with bounded geometry and L be a holomorphic Hermitian line bundle with curvature bounded above by a negative constant. We consider the so-called Grauert tube defined by

$$T(L) = \{v \in L : |v| < 1\}.$$

One can show that if L is sufficiently negative, then $T(L)$ carries a complete Bergman metric. On the other hand, there exists many examples such that the zero section M has no non-constant holomorphic functions.

The above theorems shows that the class of Bergman complete manifolds is quite large, however, different from holomorphically convex manifolds, while the latter is understood well. It seems worthwhile to study these manifolds systemically, for instance,

a) Does a locally trivial holomorphic fiber bundle carry a complete Bergman metric if both base and fiber are Bergman complete? The answer is positive if the base is hyperconvex (Chen 2003).

b) Is Bergman completeness stable under small deformations?

4 The Bergman metric on Teichmüller spaces

The Teichmüller spaces and moduli spaces of Riemann surfaces of genus $g \geq 2$ have been studied intensively by many mathematicians in complex analysis, topology, differential and algebraic geometry for at least half a century. They have also appeared in theoretic physics such as string theory. The foundation of the modern theory of Teichmüller and moduli spaces was lay down by L. Ahlfors and L. Bers. One of the most important fact in Teichmüller theory is that the Teichmüller space can be embedded as a bounded domain in some $\mathbf{C}^{3g-3}$, which is called the Bers Simultaneous Uniformization. There is a complete distance on Teichmüller spaces which is called the Teichmüller distance. The main contribution of linking the Teichmüller theory with several complex variables is due to H. L. Royden (1971). He proved that the Teichmüller distance coincides with another invariant distance introduced by S. Kobayashi in 1967, from which it follows that the Teichmüller space is biholomorphic to a domain of holomorphy in $\mathbf{C}^{3g-3}$. Moreover, he gave an infinitesimal metric induced from the Kobayashi distance, now named the Kobayashi-Royden metric, which plays an essential role in the study of complex hyperbolic geometry. The boundary of the Teichmüller space is very irregular, it contains a dense set of maximal cusps (C. T. McMullen 1991). Anyway, S. L. Krushkal (1991) proved that the Teichmüller space is hyperconvex. Therefore, the Bergman metric is complete. It was also known that the Bergman kernel function is a exhaustion function since it is on bounded hyperconvex domains (T. Ohsawa 1993).

The Kobayashi-Royden metric is not smooth. A. Weil (1957/58) introduced a Riemannian metric on the Teichmüller space which is induced from the Petersson scalar product on holomorphic quadratic differentials on Riemann surfaces, now called the Weil-Petersson metric. It is dominated by the Teichmüller metric. L. Ahlfors (1961) proved that it is a Kähler metric and its holomorphic sectional curvature and Ricci curvature are negative. Later, some mathematicians (S. Wolpert, A. J. Tromba, Y. T. Siu, J. Jost etc.) developed a new geometry called the Weil-Petersson geometry. Bers had ever conjectured that the Bergman and Weil-Petersson metrics are equivalent. But it was disapproved by S. Wolpert (1975) by showing some Weil-Petersson geodesics have finite length. By adding the Weil-Petersson metric with a $(1,1)$ form induced from short hyperbolic length functions, C. T. McMullen (2000) obtained a complete Kähler metric on Teichmüller spaces, which is equivalent to the Teichmüller-Kobayashi metric. The motivation of McMullen to construct such a metric is to prove that the moduli space of Riemann surfaces is Kähler hyperbolic in the sense of Gromov (see the definition in next section). Based on his work, we prove the following

Theorem 4.1. *The Bergman and Teichmüller metrics are equivalent.*

Let us sketch the idea of the proof. Denote by g_{WP} the Weil-Petersson metric and l_γ the hyperbolic length function with respect a geodesic γ. Take a cut-off function Log on $\mathbf{R}$ which equals to $\log x$ for $x \geq 2$ and vanishes on $x \leq 1$. McMullen showed that

$$g_{1/l} = g_{WP} - \delta \sum_{l_\gamma(X)<\epsilon} \partial\bar{\partial}\mathrm{Log}\frac{\epsilon}{l_\gamma}$$

where the sum is over primitive short geodesics γ on X; at most $3g-3$ terms occur in the sum, is a Kähler metric which is equivalent to the Teichmüller metric provided $0 < \delta << \epsilon << 1$. He also proved that $g_{WP} = -d\beta$ for some $(1,0)$ form induced by the Bers embedding, showing that β is bounded in g_{WP}. Takhtajan-Teo (2003) found a real analytic function S coming from the string theory such that $\partial S = -\beta$. Thus $\psi = -S - \delta \sum_{l_\gamma(X)<\epsilon} \mathrm{Log}\frac{\epsilon}{l_\gamma}$ gives a global potential of McMullen's metric satisfying

$$\partial\bar{\partial}\psi \geq C\partial\psi\bar{\partial}\psi \tag{1}$$

for some constant $C > 0$. One can show that for each point X_0 in the Teichmüller space $\varphi = -e^{-\frac{C}{2}(\psi-\psi(X_0))}$ is uniformly bounded and its Levi form has uniformly lower bound with respect to Teichmüller metric on Royden's embedded polydisc at X_0. Finally, we use the weighted L^2-estimate for $\bar{\partial}$ on complete Kähler manifold, developed by T. Ohsawa (1980) and J. P. Demailly (1982) to complete the proof.

Remark. The importance of inequality (1) was first noticed by Donnelly-Fefferman (1983). It also appears in a series of papers of T. Ohsawa and his colleagues.

Since the Teichmüller space is a bounded domain of holomorphy, it carries a complete invariant Kähler-Einstein metric (Cheng-Yau 1980, Mok-Yau 1983). By the above method, one can also show that the Bergman metric is $d-$bounded and has bounded geometry (see the definition in next section). By Yau's Schwarz lemma, the Bergman kernel form dominates the Kähler-Einstein volume form. Therefore, by Mok-Yau we have the following estimates for the Bergman kernel function and the Bergman distance:

Theorem 4.2. *(i)* $B_T \geq C(\delta_T|\log \delta_T|)^{-2}$;

(ii) Given $X_0 \in \mathrm{Teich}(R)$, *we have* $dist_T(X_0, \cdot) \geq C|\log \delta_T|$.

Recently, Liu-Sun-Yau (2004) proved that the Kähler-Einstein metric is equivalent to the Teichmüller metric by a deep analysis on the Weil-Petersson metric.

It should be pointed out that Diederich-Ohsawa (1995) proved that for any bounded pseudoconvex domain M with piecewise C^2 boundary, the Bergman distance is bounded below by $C \log|\log \delta_M|$. This bound was improved by Z. Blocki (2002) to $\frac{C|\log \delta_M|}{\log|\log \delta_M|}$.

5 An application of the Bergman metric to geometry

Perhaps the first application of the Bergman metric in complex geometry is due to K. Kodaira (1954): Any compact complex manifold has ample canonical line bundle if it is covered by a complex manifold which carries a Bergman metric. There are also some applications in the paper of S. Kogayashi (1959). However, the difficulty of determining the sign of curvature of the Bergman metric limits its application in geometry, except for some special cases (eg. compact quotients of bounded symmetry domains). Hence it is not surprising that its position in geometry is replaced by the Kähler-Einstein metric when the latter appears. On the other hand, these two invariant Kähler metrics are closely related. In this section, we give an application of the Bergman metric to geometry which can be viewed as a generalization to the case of compact quotients of bounded symmetry domains.

Definition. (Cheng-Yau 1980) Suppose that (M, ω) is a complete Kähler manifold of dimension n. We say that (M, ω) has *bounded geometry of order* l if and only if for each $x_0 \in M$ there exists an embedded polydisc

$$\iota : (\Delta^n, 0) \to (M, x_0)$$

such that the Euclidean metric and ω are equivalent on Δ^n and there is a constant $C_l > 0$ such that for any multi-indices α, β with $|\alpha| + |\beta| \leq l$ we have

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}} g_{i\bar j} \right| \leq C_l$$

on Δ^n where $\omega = \sum g_{i\bar{j}} dz_i d\bar{z}_j$.

Example. Let $\pi : \tilde{M} \to M$ be a holomorphic covering over a compact Kähler manifold (M, ω). Then $(\tilde{M}, \pi^*(\omega))$ has bounded geometry of any order.

By using the method similar to section 4, one can prove the following

Theorem 5.1. *Suppose (M, ω) has bounded geometry of order 1 and the Ricci curvature of ω is bounded above by a negative constant. If the canonical line bundle K_M of M is trivial, then M carries a Bergman metric which is $d-$bounded and equivalent to the Kobayashi-Royden metric.*

The notion of $d-$boundedness was introduced by M. Gromov (1991). A complete Kähler metric ω on M is called *$d-$bounded* if there is a $1-$form θ such that $\omega = d\theta$ and $\sup_M |\theta|_\omega < \infty$. A complete Kähler manifold (M, ω) is called *Kähler hyperbolic* if the following conditions are verified: (1) the lift $\tilde{\omega}$ of ω to the universal covering $\tilde{M}$ of M is $d-$bounded; (2) (M, ω) has finite volume and bounded sectional curvature; (3) $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ has positive injectivity radius. Note that (2), (3) hold naturally when M is compact. Kähler hyperbolicity implies Kobayashi hyperbolicity, but is stronger than the latter (for instance, the fundamental group of a Kähler hyperbolic manifold is of exponential growth. On the other hand, there are examples of simply-connected compact complex manifold which are Kobayashi hyperbolic, e.g., a generic hypersurface of large degree in $\mathbf{P}^n$ with $n > 2$). Examples include compact Kähler manifolds of negative sectional curvature, and finite volume quotients of non-compact Hermitian symmetric spaces with no Euclidean factors. Recently, McMullen (2000) proved that the moduli space of Riemann surfaces is also Kähler hyperbolic.

By the celebrated theorem of Aubin and Yau, any compact complex manifold with ample canonical line bundle admits a complete Kähler-Einstein metric with negative Ricci curvature. Since the Bergman metric is invariant, we have

Corollary 5.2. *Let $\pi : \tilde{M} \to M$ be a holomorphic covering over a compact Kähler manifold. If K_M is ample and $K_{\tilde{M}}$ is trivial, then M is Kähler hyperbolic.*

Examples include

(a) M : compact Riemann surface with genus $g \geq 2$, $\tilde{M}$: infinite covering over M.
(b) M : compact complex manifold, $\tilde{M}$: bounded domain in $\mathbf{C}^n$.
(c) M : compact Kähler manifold of general type, $\tilde{M}$: contractible Stein manifold (Oka-Grauert principle).

By the Cartan-Hadamard theorem and Wu's theorem, any compact Kähler manifold of general type and with semi-negative sectional curvature satisfies (c). F. Zheng (1996, 1999) provides examples of such manifolds which are neither compact Kähler manifolds of negative sectional curvature nor compact quotients of bounded symmetry domains. It should be pointed out that the contractibility assumption of $\tilde{M}$ in (c) can not be removed, since a sufficiently general, smooth, ample hypersuface in an Abelian variety of dimension at least 3 has ample canonical line bundle and Stein universal covering, but it can not be Kähler hyperbolic since the fundamental group is Abelian.

Comparing to (b), one can show

(b') M : complex manifold (not necessary compact), $\tilde{M}$: bounded domain in $\mathbf{C}^n$ covering M with $n > 1$. Then any compact Kähler submanifold in M is Kähler hyperbolic.

Gromov proved that the L^2 cohomology of the universal covering of a Kähler hyperbolic manifold vanishes except in the middle dimension n. Combined with the theorem of Atiyah-Singer, he showed that the Euler characteristic satisfies $(-1)^n\chi(M) > 0$. There is a so-called Hopf-Singer conjecture in Riemannian geometry which states $(-1)^n\chi(M) \geq 0$ for all compact aspherical $2n-$dimensional Riemann manifold (i.e., the universal covering is contractible). Jost-Zuo (2000) verified this conjecture for compact Kähler manifolds with semi-negative sectional curvature.

Campana-Peternell (2004) proved that for a projective manifold M with a Stein universal covering, either K_M is ample or $\chi(M) = 0$. Hence

Corollary 5.3. *The Hopf-Singer conjecture is true for any projective manifold whose universal covering is a contractible Stein manifold.*

Comparing to McMullen's work and Theorem 4.1, one might thinks that those quasi-projective manifolds covered by a bounded domain should have strong geometry properties and its universal covering should have strong function-theoretic properties. P. Griffiths (1970) even showed that every point in a projective manifold has a Zariski neighborhood whose universal covering is a contractible bounded domain of holomorphy in $\mathbf{C}^n$ by using Bers simultaneous uniformization. Such Zariski neighborhoods are in fact quasi-projective (Mok-Wong 1983).

References

[1] B. Y. Chen, *Bergman completeness of hyperconvex manifolds*, Nagoya Math. J. (to appear).

[2] ———, *Equivalence of the Bergman and Teichmüller metrics on Teichmüller spaces*, submitted to Nagoya Math. J.

[3] ———, *Invariant metrics and applications to complex geometry*, preprint.

[4] ———, *Some applications of complex singular exponent*, preprint.

[5] ———, *On certain Kähler manifolds which possess a complete Bergman metric*, preprint.

[6] J. P. Demailly and J. Kollár, *Semi-continuity of complex singular exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **34** (2001), 525–556.

[7] H. Grauert, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. **146** (1962), 331–368.

[8] M. Gromov, *Kähler hyperbolicity and L^2–Hodge theory*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 263–292.

[9] S. Kobayashi, *Geometry of bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 267–290.

[10] C. T. McMullen, *The moduli space of Riemann surfaces is Kähler hyperbolic*, Ann. of Math. **151** (2000), 327–357.

[11] T. Ohsawa, *On the extension of L^2 holomorphic functions V-Effects of generalization*, Nagoya Math. J. **161** (2001), 1–21.