日 本 数 学 会

2004年度年会

函 数 論 分 科 会
講 演 アブストラクト

2004年3月

於 筑波大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．
2. 委員会の任務
(a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
(b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
(c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
(d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
(e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
(f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
(g) 次期委員会委員候補者の推薦．
(h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．
3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
(a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる．
(b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
(c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．
4. 委員会の開催及び議決
(a) 委員会は評議員が召集する．
(b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
(c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
(d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．
5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
(a) 委員会の司会をする．
(b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
(c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
(d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

第1日　3月28日 (日)

第VII会場　函数論

10:00〜12:00

1 西本　勝之　(デカルト出版)　* N-Fractional calculus of the power and logarithmic functions and some identities (continue) ……… 10

2 小川　琢磨　(筑波大数学)　* Similar properties between the trigonometric function and the lemniscate function from some arithmetical points ……… 15

3 小川　琢磨　(筑波大数学)　* The connection between the trigonometric function and the lemniscate function from some plane algebraic curves ……… 15

4 米田　力生　(愛知教育大)　* Multiplication operators with closed range on the Bloch-type spaces について ……… 10

5 尾和　重義　(近畿大理工)　* Notes on integral means of analytic functions ……… 15
関根　忠行　(日大薬)

6 相川　弘明　(島根大総合理工)　* p-調和関数に対する Carleson 評価 ……… 15

7 中井　三留　* 動く分岐点に依る容量の変動公式 ……… 15

8 鈴木　紀明　(名大多元数理)　熱方程式の平均値に関する密度関数 ……… 15
N.A. Watson　(Canterbury Univ.)

14:15〜15:10

9 佐藤　宏樹　(静岡大理)　* Jørgensen groups of parabolic type, III – uncountably infinite case – 15
大市　牧人　(静岡大理)
李　長軍　(静岡大理工)

10 藤川　英華　(京大数理研)　* The recurrent sets in L^∞ spaces with group action ……… 15
松崎　克彦　(お茶の水女大理)

11 奥山　裕介　(金沢大理)　* Valiron and dynamical exceptional sets of rational composition sequences ……… 15

15:30〜17:45　特別講演

藤解　和也　(金沢大自然)　* Nevanlinna-Cartan の第二主要定理と函数方程式 $f_0^n + f_1^n + \cdots + f_k^n = 0$ ……… (15:30〜16:30)

第 2 回 (2003 年度) 解析学賞受賞特別講演

宮嶋　公夫　(鹿児島大理)　* 強擬凸 CR 構造と正規孤立特異点の変形 ……… (16:45〜17:45)

第2日　3月29日 (月)

第VII会場　函数論

10:15~12:00

13:40~14:40　特別講演

吉川　謙一　(東大数理)　$K3$ 曲面と解析的トーション

1. N- Fractional Calculus of The Power and Logarithmic Functions and Some Identities (Continue)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article, N- fractional calculus of the Power and Logarithmic functions and some identities are reported. Some of them are shown as follows.

(i) $$\left((z-c)^{\beta}\right)_{\alpha}=e^{-i\pi\alpha}z^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}\ {}_1F_0\left(\alpha-\beta\,;\frac{c}{z}\right)$$

where $\left|\frac{\Gamma(\alpha+k-\beta)}{\Gamma(k-\beta)}\right|<\infty$, $\left|\frac{c}{z}\right|<1$ and ${}_1F_0$ is a Generalized Hypergeometric function.

(i i) $$\left(\log(z-c)\right)_{\alpha}=-e^{-i\pi\alpha}z^{-\alpha}\left\{\Gamma(\alpha)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+2)}\left(\frac{c}{z}\right)^{k+1}\right\}$$

where $|\Gamma(\alpha)|<\infty$, $\left|\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)}\right|<\infty$, $\left|\frac{c}{z}\right|<1$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 3, may (1993), 19 - 27.

[6] K. Nishimoto and S.-T. Tu ; Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions), J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994), 27 - 34.

[7] S.-T. Tu and K. Nishimoto;On the fractional calculus of functions $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc. Vol. 5. May (1994), 35 - 43.

[8] K. Nishimoto ; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol.6, Nov. (1994), 15 - 26.

[9] S.-T. Tu and D.-K. Chyan ; A certain family of infinite series, differintegrable functions and Psi functions, J. Frac. Calc. Vol.7, May (1995), 41 -46.

[10] S.-T. Tu, D.-K. Chyan and T.-C. Wu ; Method for finding $D_{z}^{-n}\log^{k}z$ via Fractional Calculus and Psi Functions, J. Frac. Calc. Vol. 11, May (1997), 67 - 73.

[11] K. Nishimoto and T.-C. Wu ; On $(z^{m} \cdot \log z)_{-n}$ and $(e^{mz} \cdot \log z)_{-n}$ where $m \in Z_0^+$, $n \in Z^+$ (A serendipity in N- fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 13, may (1998), 29 - 36.

[12] K. Nishimoto ; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some Identities, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 1 - 6.

[13] K. Nishimoto ; Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I , J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 7 - 12.

[14] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus , Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order 1974), Academic Press New York, London.

[15] K.S. Miller and B. Ross; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, (1993), John Wiley & Sons. Inc.

[16] V. Kiryakova ; Generalized Fractional Calculus and Applications,(1993) Pitman Res. Notes in Math. Series No. 301, Longman: London etc. (co-publ. John Wiley & Sons, New York)

[17] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.) ; Fractals and Fractional Calculus in Continume Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.

[18] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singgapore, New Jersey, London, Hongkong.

2. SIMILAR PROPERTIES BETWEEN THE TRIGONOMETRIC FUNCTION AND THE LEMNISCATE FUNCTION FROM SOME ARITHMETICAL POINTS

小川　琢磨　筑波大学大学院 数学研究科 …

三角関数と lemniscate 関数の双方には数論的な観点から見ていくつかの**似ている性質達**があります。その**似ている性質達**を紹介します。lemniscate 関数は**虚数乗法を持つ楕円関数**なのですが、ここでは、lemniscate 関数の持つ（三角関数と類似の性質を持つ意味での）その**特殊性**に焦点を当てます。

1. Eisenstein による相互法則の証明

Eisenstein は、三角関数を用いて平方剰余の相互法則の証明を、lemniscate 関数を用いて４次剰余相互法則の証明を与えています。証明は、三角関数を用いてルジャンドル記号を表し、lemniscate 関数を用いて４次剰余記号を表すことによるものです。[1] [2]

(平方剰余の相互法則の場合)　p, q は $\mathbb{Z}$ 上の奇素数。$A = \left\{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a \leq \frac{p-1}{2}\right\}$ と置く。このとき、

$$\left(\frac{q}{p}\right)_2 = \Pi_{a\in A}\frac{\sin q(\dfrac{2\pi a}{p})}{\sin \dfrac{2\pi a}{p}}, \qquad \pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.1}$$

(４次剰余の相互法則の場合)　r, s は $\mathbb{Z}[i]$ 上の primary prime。$sl(u)$ を lemniscate sine とする。r_β は r の剰余系として、$B = \left\{r_\beta \in \mathbb{Z}[i] \mid 1 \leq \beta \leq \frac{Nr-1}{4}, \beta \in \mathbb{Z}\right\}$ と置く。このとき、

$$\left(\frac{s}{r}\right)_4 = \Pi_{r_\beta\in B}\frac{sl(s(\dfrac{2\omega r_\beta}{r}))}{sl(\dfrac{2\omega r_\beta}{r})}, \qquad \omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{1.2}$$

2. Abel による巡回方程式

一般に、５次以上の代数方程式は、代数的に解く事が出来ません。では、代数的に解く事のできる代数方程式の条件は？という観点から Abel は代数方程式の根どうしの関係に注目し、根どうしが以下の様式で結ばれている代数方程式は可解であるという結果を得ています。[3] [4] [5]

n 次代数方程式 n 個の根が、α をある１つの根、$R(x)$ をある有理変換、$R^k(x)$ を $R(x)$ の k 回合成変換とし、これらを用いて以下の (1.3) ように表現される場合、この n 次代数方程式は可解。

$$\alpha, R(\alpha), R^2(\alpha), R^3(\alpha), \cdots, R^{n-1}(\alpha). \qquad (R^n(\alpha) = \alpha) \tag{1.3}$$

実は、Eisenstein の相互法則の証明の中にこの巡回方程式達が横たわっています。

(巡回方程式の例)　(1.4) は $\mathbb{Z}$ 係数 [6]。(1.5) は $\mathbb{Z}[i]$ 係数 [7]。

$$11 - 220x + 1232x^2 - 2816x^3 + 2816x^4 - 1024x^5 = 0 \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&(-5+2i) - (13+76i)x - (325-246i)x^2 + (459-520i)x^3 \\ &\quad -(183-398i)x^4 + (65+148i)x^5 + (1-70i)x^6 + x^7 = 0\end{aligned} \tag{1.5}$$

筆者は現在休学中 … 連絡先：(住所) 埼玉県北葛飾郡庄和町永沼１５９－３、(郵便番号) ３４４－０１２３.

小川　琢磨　筑波大学大学院 数学研究科・・・

3. 対称性

Eisenstein の相互法則の証明はルジャンドル記号を三角関数で表し、q:奇素数に対して $P_q(\sin u) = \sin qu/\sin u$ を満たす多項式 $P_q(x)$ の性質を用いて平方剰余の相互法則の証明を与え、同様にして、４次剰余記号を lemniscate sine ($sl(u)$) で表し、s:primary prime に対して $R_s(sl(u)) = sl(su)/sl(u)$ を満たす有理関数 $R_s(x)$ の性質を用いて４次剰余の相互法則の証明を与えるというものです。(実は、この $P_q(x) = 0$ や $R_s(x)$ の分子の多項式＝０が巡回方程式)

ここでは、以上のような事実をうけて、さらに次のようなものも合わせて考えました。

(定義) [6] [8]

(1、三角関数の場合)　m: 正の奇数、$x = \sin u$、として以下のように定義される $\sin u$ の多項式を考える。

$$P_{s,m}(x) := \frac{\sin mu}{\sin u}, \qquad P_{c,m}(x) := \frac{\cos mu}{\cos u}.$$

(２、lemniscate 関数の場合)　n: primary 数、$x = sl(u)$、として以下のように定義される $sl(u)$ の有理関数を考える。$sl(u)$: lemniscate sine, $cl(u)$: lemniscate cosine.

$$R_{s,n}(x) := \frac{sl(nu)}{sl(u)}, \qquad R_{c,n}(x) := \frac{cl(nu)}{cl(u)}.$$

もともとは、この lemniscate 関数によって定義される有理関数について調べていました [9]。この有理関数は零点と極で**対称性**があり、この**対称性**が相互法則の証明にも作用しています。

(有理関数の例) [7] (右辺の $sl(u)$ を s と置いた。)

$$F_{-1,0} = \frac{sl((3-2i)u)}{sl(u)} = \frac{(3-2i)+(7+4i)s^4+(-11-10i)s^8+s^{12}}{1+(-11-10i)s^4+(7+4i)s^8+(3-2i)s^{12}};$$

$$G_{-1,0} = \frac{cl((3-2i)u)}{cl(u)} = \frac{1-(2-6i)s^2+(3+8i)s^4+(12-4i)s^6+(3+8i)s^8-(2-6i)s^{10}+s^{12}}{1+(2-6i)s^2+(3+8i)s^4-(12-4i)s^6+(3+8i)s^8+(2-6i)s^{10}+s^{12}}.$$

改めてこの有理関数の零点と極の**対称性**に焦点を当て、有理関数 $R_{s,n}(x)$ と $R_{c,n}(x)$ の間に以下の関数等式がある事を得、同様にして、多項式 $P_{s,m}(x)$ と $P_{c,m}(x)$ の間にも類似の関数等式がある事を得ました。

(結果) (関数等式) [6] [8]

(1、三角関数の場合)　m:正の奇数、$\mathbb{Z}$-係数の多項式 $P_{s,m}(x), P_{c,m}(x)$ の間に以下が成立する。

$$P_{c,m}(\sqrt{1-x^2}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} P_{s,m}(x). \tag{1.6}$$

(２、lemniscate 関数の場合)　n:primary 数、$\mathbb{Q}(i)(x)$ の有理関数 $R_{s,n}(x), R_{c,n}(x)$ の間に以下が成立する。

$$R_{c,n}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right) = R_{s,n}(x). \tag{1.7}$$

REFERENCES

[1] G.Eisenstein, *Application de l'algébre à l'arithmétique transcendante*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.29(1845), 177–184.
[2] F.Lemmermeyer, *Reciprocity Laws : From Euler to Eisenstein*, chapter 8, Springer, (2000).
[3] N.H.Abel. *Recherches sur les functions elliptiques*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.2(1827), 101–181. Bd.3(1828), 160–190.
[4] N.H.Abel. *Mémoire sur une classe particulière d'equations résolubles algébriquement*, J. fur reine u. angew. Math. Bd.4(1829), 131–156.
[5] 高瀬　正仁　訳　『アーベル／ガロア　楕円関数論』朝倉書店 (1998).
[6] T.Ogawa, *The polynomial defined by the trigonometric functions and odd integers*, submitted for publication.
[7] T.Ogawa, *The recurrence formulas and the symmetrical relation of the rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, submitted for publication.
[8] T.Ogawa, *The representation of the rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, submitted for publication.
[9] T.Ogawa, *The rational functions defined by the lemniscate functions and primary numbers of Gaussian integers*, 代数学分科会アブストラクト (2002.9)

3. THE CONNECTION BETWEEN THE TRIGONOMETRIC FUNCTION AND THE LEMNISCATE FUNCTION FROM SOME PLANE ALGEBRAIC CURVES

小川　琢磨　筑波大学大学院 数学研究科 …

三角関数と lemniscate 関数の双方にはいくつかの似ている性質達があります。また、双方、同じようにして構成されます。

感情としては『三角関数と lemniscate 関数は同じ関数なんです。』と叫びたい … そこで …

ここでは平面代数曲線としての円 (2.1) と lemniscate(2.2) （それぞれが、三角関数と lemniscate 関数の素となっている曲線 … ）

$$x^2 + y^2 = 1; \tag{2.1}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \tag{2.2}$$

この２つの代数曲線に何らかの**繋がり**はないのか？この**繋がり**について考えていきます。

まずは、それぞれの代数曲線がどのように構成されるのか?… その構成法に焦点を当てます。（注：以下点 $P := (x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上でしか考えません。）

(円の場合 …)

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P := (x, y)$、焦点 $F := (a, b)$（固定）、$c > 0$（定数）、に対して以下の条件を満足するもの。

$$|PF| = c, \qquad (|PF| := \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}). \tag{2.3}$$

条件 (2.3) に対して円:$x^2 + y^2 = 1$ は $F = (0, 0)$ で $c = 1$ の場合となります。

(lemniscate の場合 …)

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P := (x, y)$、焦点 $F_1 := (a_1, b_1), F_2 := (a_2, b_2)$（$F_1, F_2$ は固定、$F_1 \neq F_2$）、$c > 0$（定数）、に対して以下の条件を満足するもの。

$$|PF_1||PF_2| = c, \qquad (|PF_i| := \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \quad (i = 1, 2)). \tag{2.4}$$

条件 (2.4) に対して lemniscate:$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ は $F_1 = (-1/\sqrt{2}, 0)$,$F_2 = (1/\sqrt{2}, 0)$ で $c = 1/2$ の場合となります。

このような事を背景に次のようなものを考えていきます。ポイントは以下の３つ。

（ポイント）

1. 平面代数曲線の構成法の一般化。（複数の焦点 F_i と $c > 0$（定数）によって構成される代数曲線。各焦点は互いに異なる。）
$$|PF_1||PF_2| \cdots |PF_n| = c, \quad (|PF_i| := \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)).$$
2. 上記１の構成法に対して n 個の焦点が自然数 n に依存して定まるものを考える。（自然数 n に依存して決定される代数曲線）
3. このように上記１，２によって構成された曲線達全体を考えていく。つまり、

$$f_n(x, y) = 0 \begin{cases} f_1(x, y) = 0 & \Longleftrightarrow |PF_1| = c, \\ f_2(x, y) = 0 & \Longleftrightarrow |PF_1||PF_2| = c, \\ \cdots, \\ f_k(x, y) = 0 & \Longleftrightarrow |PF_1||PF_2| \cdots |PF_k| = c, \\ \cdots. \end{cases}$$

筆者は現在休学中 … 連絡先：(住所) 埼玉県北葛飾郡庄和町永沼１５９－３、(郵便番号) ３４４－０１２３.

以上１，２，３が基本的な考え方です。このような考え方を基に構成した具体的な代数曲線 $f_n(x,y)=0$、及びその性質（予想）を紹介します。

(結果)（予想）[1]

自然数 n に依存する平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ として次のようなものを考える。($c>0$:実数)

$$(*)\qquad \prod_{k=1}^{n}\Big(x^2+y^2-2c\big(x\cos\frac{2k\pi}{n}+y\sin\frac{2k\pi}{n}\big)+c^2\Big)-c^{2n}=0.$$

この時、この平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ の弧長全体の長さは、次のように与えられる。

$$\sqrt[n]{2}cB\Big(\frac{1}{2n},\frac{1}{2}\Big).$$

但し、$B(p,q)$ は Beta-function。

$$B(p,q):=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\qquad (p,q>0).$$

(補足①)

上記（＊）の平面代数曲線 $f_n(x,y)=0$ は、以下の考え方によって構成されたものです。(基本となる考え方は同じです。)

$\mathbb{R}^2$ 上の点 $P:=(x,y)$、焦点 $F_{ij}:=(a_{ij},b_{ij})$（固定で F_{ij} は自然数の i,j に依存する。)、自然数から、実数への関数 ϕ を用意して（$\phi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$)、以下のようなものを考える。

$$f_n(x,y)=0\begin{cases} f_1(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{11}|=\phi(1),\\ f_2(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{21}||PF_{22}|=\phi(2),\\ f_3(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{31}||PF_{32}||PF_{33}|=\phi(3),\\ \cdots, & \\ f_k(x,y)=0 & \Longleftrightarrow |PF_{k1}||PF_{k2}||PF_{k3}|\cdots|PF_{kk}|=\phi(k),\\ \cdots. & \end{cases}\qquad \Big(|PF_{ij}|:=\sqrt{(x-a_{ij})^2+(y-b_{ij})^2}\Big)$$

このような考え方に対して $c>0$ 実数（定数）を用意して、具体的に焦点 F_{nk} と関数 ϕ を以下のように定めたもの

$$F_{nk}:=\Big(c\cos\frac{2k\pi}{n},c\sin\frac{2k\pi}{n}\Big),\quad (k=1,2,\cdots,n,\quad n\in\mathbb{N});$$
$$\phi(n):=c^n.$$

これが、上記の代数曲線（＊）となります。

(補足②)

紙面の都合上、ここには書けませんが、最後に自分がこれまでして来た事と以下 [2] [3] [4] の文献についての関連についてお話したいと思います。

References

[1] T.Ogawa, *The connection of the analytic functions from a point of view to some plane algebraic curves*, preprint (2003.9).

[2] 高瀬　正仁『ｄｘとｄｙの解析学』(オイラーに学ぶ) 日本評論社 (2000).

[3] 渡邊　公夫『初等超越関数の世界』(現在、宮川　幸隆氏とともに執筆中 !?)

[4] 高瀬　正仁　論説　『Gauss「整数論」と Hilbert の第１２問題』、数学（日本数学会編集)、岩波書店、第５４巻、第４号、２００２年１０月　秋季号.

4. Multiplication Operators With Closed Range On The Bloch-type Spaces について

米田　力生　　愛知教育大学

D を複素平面上の開単位円板を表示するものとする。ブロッホ空間 $\mathcal{B}$ は

$$\| f \|_{\beta} := |f(0)| + \| f \|_{\mathcal{B}} < +\infty \,,$$

where $\| f \|_{\mathcal{B}} := \sup_{z \in D}(1 - |z|^2)\,|f'(z)|$ を満たす D 上の解析関数全体からなる空間とする。積分作用素 I_g, J_g, M_g を次のように定義する：

$$I_g(f)(z) := \int_0^z g(\zeta) f'(\zeta) d\zeta \,,\ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta$$

$$M_g(f)(z) := g(z) f(z) \,.$$

今回はブロッホ空間 $\mathcal{B}$ 上の Multiplication operator M_g や積分作用素 I_g, J_g がいつ bounded below になるのかについて研究し次の結果を得た：

Theorem 1. *Let g be an analytic function on D and I_g is bounded on $\mathcal{B}$. Then I_g is bounded below on $\mathcal{B}$ if and only if for ϵ, r with $r < 1$ for some $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$* and $|g(z_w)| > \epsilon$.

Theorem 2. *Let g be an analytic function on D and J_g is bounded on $\mathcal{B}$. Then J_g is bounded below on $\mathcal{B}$ if and only if for ϵ, r with $r < 1$ for some $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$* and $(1 - |z_w|^2)\left(\log \frac{1}{1 - |z_w|^2}\right) |g'(z_w)| > \epsilon$.

Theorem 3. *Let g be an analytic function on D and M_g is bounded on $\mathcal{B}$ and suppose that $\lim_{z \to 1}(1 - |z|^2)\left(\frac{1}{1 - |z|^2}\right) |g'(z)| = 0$. Then*

M_g is bounded below on $\mathcal{B}$ if and only if for ϵ, r with $r < 1$ for some $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(z_w, w) < r$ and $|g(z_w)| > \epsilon$.

参考文献

[1] C.C.Cowen and B.D.MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] J.Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, New York, 1981.

[3] P. Ghatage and J.Yan and D.Zheng, Composition operators with closed range on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.129 ,7(2000), 2039-2044.

[4] K.Madigan and A.Matheson, Compact composition operators on the Bloch space, Trans.Amer.Math.Soc. 347 (1995), 2679-2687.

[5] J.H.Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] R.Yoneda, Multiplication Operators With Closed Range On The Bloch-type Spaces, in preprint.

[7] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.

5. Notes on integral means of analytic functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Tadayuki Sekine (Nihon University)

Let $\mathcal{A}_n$ be the class of functions $f(z)$ normalized by

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}) \tag{1}$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. For analytic functions $f(z)$ and $g(z)$ in $\mathbb{U}$, we say that the function $f(z)$ is subordinate to $g(z)$ in $\mathbb{U}$ if there exists an analytic function $w(z)$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ such that $f(z) = g(w(z))$. We denote this subordination by $f(z) \prec g(z)$.

Lemma 1 (J.E.Littlewood(1925)). *If $f(z)$ and $g(z)$ are analytic in $\mathbb{U}$ with $f(z) \prec g(z)\,(z \in \mathbb{U})$, then*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta}|^{\mu} d\theta$$

for $\mu > 0$ and $0 < r < 1$.

Theorem A (H.Silverman(1997)). *Let*

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \geqq 0) \tag{2}$$

be analytic and univalent in $\mathbb{U}$. Then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $\mu > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^{\mu} d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |f_2(z)|^{\mu} d\theta,$$

where $f_2(z) = z - \dfrac{z^2}{2}$.

Theorem 1. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be given by* (1) *and*

$$(3) \qquad g(z) = z + b_j z^j + b_{2j-1} z^{2j-1} \in \mathcal{A}_j \quad (j \geqq n+1).$$

If

$$(4) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leqq |b_{2j-1}| - |b_j| \quad (|b_j| < |b_{2j-1}|),$$

then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $\mu > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |g(z)|^\mu d\theta.$$

Corollary 1. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be given by* (1) *and $g(z) \in \mathcal{A}_j$ be given by* (3). *If the coefficient inequality* (4) *holds true, then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $0 < \mu \leqq 2$,*

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu d\theta \leqq 2\pi r^\mu \left(1 + |b_j|^2 r^{2(j-1)} + |b_{2j-1}|^2 r^{4(j-1)}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Theorem 2. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be given by* (1) *and*

$$(5) \qquad h(z) = z + b_j z^j + b_{2j-1} z^{2j-1} + b_{3j-2} z^{3j-2} \in \mathcal{A}_j \quad (j \geqq n+1).$$

If

$$(6) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leqq |b_{3j-2}| - |b_{2j-1}| - |b_j| \quad (|b_j| + |b_{2j-1}| < |b_{3j-2}|),$$

then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $\mu > 0$,

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |h(z)|^\mu d\theta.$$

Corollary 2. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ be given by* (1) *and $h(z) \in \mathcal{A}_j$ be given by* (5). *If the coefficient inequality* (6) *holds true, then, for $z = re^{i\theta}\,(0 < r < 1)$ and $0 < \mu \leqq 2$,*

$$\int_0^{2\pi} |f(z)|^\mu d\theta \leqq 2\pi r^\mu \left(1 + |b_j|^2 r^{2(j-1)} + |b_{2j-1}|^2 r^{4(j-1)} + |b_{3j-2}|^2 r^{6(j-1)}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

6. p-調和関数に対する Carleson 評価

相川弘明 (島根大学・総合理工学部)

Carleson [4] は調和関数の非接境界値に関する局所 Fatou の定理を次の Carleson 評価を用いて証明した.

定理 A. D を $\mathbb{R}^n$ の有界 Lipschitz 領域とすると, 定数 $C > 1$ が存在して, 以下の性質が成り立つ : $\xi \in \partial D$ および十分小さい $r > 0$ に対して, $x_r \in D$ を $|x_r - \xi| = r$ となる非接点とする. このとき, u が $D \cap B(\xi, Cr)$ の正調和関数で $\partial D \cap B(\xi, Cr)$ で消えているならば, $D \cap B(\xi, r)$ 上で $u \le Cu(x_r)$ となる.

Carleson 評価は, Lipschitz 領域を含む, より一般な領域に拡張され, 複雑な領域における調和解析で大切な役割を果たしている. Carleson 評価の証明は大別して 3 通りの方法がある:

1. 一様 barrier. Carleson の最初の証明や, Jerison–Kenig [10] はこの方法である. この議論のためには境界が一様に大きいこと (容量密度条件) を要求される. 容量密度条件の下で, 後で述べる距離測度空間内の一様領域上の p-調和関数に対する Carleson 評価を導くことが出来る ([9]).
2. 境界 Harnack 原理. Carleson 評価は境界 Harnack 原理の証明に用いられるが, [1] では先に境界 Harnack 原理を示して, その応用として Carleson 評価を導いた. この方法は, 容量密度条件を要求せず, 非正則な一様領域にも, Carleson 評価を示すことが出来る. しかし, 調和関数を一度 Green ポテンシャルで表すために, 非線形方程式の解には応用できなかった.
3. Domar の方法. Domar [8] は劣調和関数の体積平均値の原理を用いて, 正上半連続関数が最大劣調和劣関数をもつ条件を与えた. Benedicks [3] や Chevallier [6] は Denjoy 領域の研究の中で Domar の議論が, 実は Carleson 評価を与えていることに気づいたが, それ以降は忘れられてしまっていた. [2] は Domar の方法を正確に定式化して, 容量密度条件を仮定しない John 領域に対して Carleson 評価を示した.

Domar の方法は $\mathbb{R}^n$ の領域上の調和関数だけでなく, 一般の距離測度空間の非線

形方程式の解に対しても成り立つことを報告する．(X,d,μ) を proper（有界閉集合はコンパクト）な距離測度空間とし，測度 μ は doubling で，$(1,p)$-Poincaré 不等式を仮定する．この設定の下で，Cheeger 微分 [5] が定義され，p 次の Dirichlet 積分の変分問題の解として，p-調和関数が定義される．その劣解を p-劣調和関数という．この非常に一般な設定の下でも De Giorgi [7] の方法が適用でき ([11])，p-劣調和関数の平均値の不等式: $u \geq 0$ が $B(x,R)$ で p-劣調和関数ならば，

$$u(x) \leq C_s \left(\fint_{B(x,R)} u^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

が証明される．ただし，定数 C_s は x や R，u に依らない．Domar の方法を適用するにはこの不等式で十分であり，距離測度空間 X 内の有界 John 領域上の p-調和関数に対して，Carleson 評価を導くことが出来る．

これは Nageswari Shanmugalingam（Cincinnati 大学）との共同研究である．

参考文献

[1] H. Aikawa, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), no. 1, 119–145.

[2] H. Aikawa, K. Hirata, and T. Lundh, *Martin boundary points of John domains and unions of convex sets*, preprint.

[3] M. Benedicks, *Positive harmonic functions vanishing on the boundary of certain domains in* $\mathbf{R}^n$, Ark. Mat. **18** (1980), no. 1, 53–72.

[4] L. Carleson, *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. Mat. **4** (1962), 393–399.

[5] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 3, 428–517.

[6] N. Chevallier, *Frontière de Martin d'un domaine de* $\mathbf{R}^n$ *dont le bord est inclus dans une hypersurface lipschitzienne*, Ark. Mat. **27** (1989), no. 1, 29–48.

[7] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) **3** (1957), 25–43.

[8] Y. Domar, *On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function*, Ark. Mat. **3** (1957), 429–440.

[9] I. Holopainen, N. Shanmugalingam, and J. T. Tyson, *On the conformal Martin boundary of domains in metric spaces*, Papers on analysis, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat., vol. 83, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, 2001, pp. 147–168.

[10] D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), no. 1, 80–147.

[11] J. Kinnunen and N. Shanmugalingam, *Regularity of quasi-minimizers on metric spaces*, Manuscripta Math. **105** (2001), no. 3, 401–423.

7. 動く分岐点に依る容量の変動公式

中　井　三　留　(名工大・名誉教授)

A 及び B は単連結正則領域の閉被である様な複素 Z 平面 $\mathbf{C}$ 内の完閉集合で, A は複素 Z 平面 $\mathbf{C}$ の上半平面 $\Im Z > 0$ 内にあるとし, 又 B は複素 Z 平面 $\mathbf{C}$ の下半平面 $\Im Z < 0$ 内にあるとする. ∞ を複素球面 $\hat{\mathbf{C}}$ 内の無限遠点とし (従って $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$ となり), z を複素 Z 平面 $\mathbf{C}$ 上の点としたとき, γ を ∞ と z を結ぶ ∞ 以外は $\mathbf{C} \setminus (A \cup B)$ 内の単純曲線として, A を含む $\mathbf{C} \setminus \gamma$ と B を含む $\mathbf{C} \setminus \gamma$ を γ に沿って交叉状に貼り合せて出来る $\hat{\mathbf{C}}$ の**被覆リーマン面**を $W_{z,\gamma}$ とかく. これを [3] では印象的に

$$W_{z,\gamma} := (\hat{\mathbf{C}} \setminus \gamma) \boxtimes_{\gamma} (\hat{\mathbf{C}} \setminus \gamma) \tag{1}$$

と記したが, これは ∞ 及び z の上のみに重複度 2 の 2 つの分岐点を持つ $\hat{\mathbf{C}}$ の 2 葉被覆面で, 従って $\sqrt{Z - z}$ のリーマン面である. $W_{z,\gamma}$ の ∞ の上にある分岐点は固定したまま今ひとつの $z \in \mathbf{C} \setminus (A \cup B)$ の上にある分岐点を動かす (つまり z を動かす). A を含む開集合 $W_{z,\gamma} \setminus B$ に関する A の**変分容量** ([2])

$$\operatorname{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B) := \inf_{\varphi \in \Phi} \int_{W_{z,\gamma}} d\varphi \wedge *d\varphi \tag{2}$$

を考える, 但し $\Phi := \{\varphi \in C^\infty(W_{z,\gamma}) : \varphi|A = 1,\ \varphi|B = 0\}$ である. 変分 (2) は Φ の自然な閉包内に極値函数 $u_{z,\gamma}$ を持ち, それは

$$u_{z,\gamma} \in C(W_{z,\gamma}) \cap H(W_{z,\gamma} \setminus (A \cup B)), \quad u_{z,\gamma}|A = 1, \quad u_{z,\gamma}|B = 0 \tag{3}$$

で特徴付けられる ([2]), ここに $H(R)$ はリーマン面 R 上のすべての調和函数の族をあらわす.

さて $\mathcal{D}_{\theta,z} f$ を函数 f の z における下記の意味での **θ 方向微分**とする :

$$\mathcal{D}_{\theta,z} f := \lim_{r \downarrow 0} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{r}.$$

また $\zeta = \xi + i\eta$ を z の上の $W_{z,\gamma}$ の分岐点における標準的な局所座標 $\zeta := \sqrt{Z - z}$ $(\sqrt{1} = 1)$ とする. そのとき次の**変動公式**が得られたのでここに報告する :

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{\theta,z} \operatorname{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B) \\ &= \pi \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_{z,\gamma}(0) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} u_{z,\gamma}(0) \right)^2 \right) \cos\theta + 2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_{z,\gamma}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} u_{z,\gamma}(0) \right) \sin\theta \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

この公式は次の意味で局所的なので $\hat{\mathbf{C}} \setminus A$ や $\hat{\mathbf{C}} \setminus B$ を一般の双曲型のリーマン面に拡張できると思われる. 即ち $W_{z,\gamma}$ や $\operatorname{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B)$ や $u_{z,\gamma}$ 等は γ の $\hat{\mathbf{C}} \setminus (A \cup B)$ でのホモト

ピー類に依存するのでγを取り替えると同じzでも変るかもしれない．しかし一点の局所小円板Vを固定してVに最後に入るまでのγの部分は変えないでzがVの中だけ動きそこでのγの部分だけ変るとすれば上記諸対象は一価となる．さて上の公式(4)の応用は色々ある．例えば, $\mathrm{cap}(A, \hat{\mathbb{C}} \setminus B)$ と $\mathrm{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B)$ の比較は重要な課題であるがこれについて上記公式(4)は非常に有力な本質的な道具となる．これについては独立性の高い話題なので他の機会に別途論じたい．今回は直接的な次の結果への応用について述べる([1]参照).

定理： 分岐点の動きに応じた容量の変化は滑らかである：$\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ 上の函数 $z \mapsto \mathrm{cap}(A, W_{z,\gamma} \setminus B)$ は C^1 級である.

参 照 文 献

[1] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey: *Harmonic Function Theory*, 2nd ed., Springer, 2001.

[2] J. Heinonen. T. Kilpeläinen, and O. Martio: *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Clarendon Press, 1993.

[3] M. Nakai and S. Segawa: *A role of the completeness in the type problem for infinitely sheeted planes*, Complex Variables, To appear.

8. 熱方程式の平均値に関する密度関数

鈴木紀明 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)
N. A. Watson (Canterbury Universty)

$(n+1)$-次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の点を (x,t) と書く ($x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$). $\mathbf{R}^{n+1}$ の有界領域 D に対して，次を満たす関数 $K(x,t)$ を (熱方程式の原点での平均値に関する) D 上の密度関数と呼ぶことにする：

(i) $K(x,t) > 0$ a.e. on D,

(ii) $\overline{D}$ 上で熱方程式を満たす任意の関数 $u(x,t)$ に対して，次の等式が成り立つ：

$$u(0,0) = \iint_D K(x,t)u(x,t)dxdt.$$

よく知られた例として，$K(x,t) := 2^{-n-2}(\pi c)^{-n/2}\|x\|^2/t^2$ は原点 $(0,0)$ 中心，半径 $c>0$ の熱球 $\Omega(c)$ 上の密度関数である．ただし，

$$\Omega(c) := \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x\|^2 \le 2n(-t)\log\left(\frac{c}{-t}\right)\}.$$

熱球の境界は Gauss-Weierstrass 核の等高面である．さて，ここでは以下の問題を考察する．

(I) 密度関数が存在する D は何か？
(II) 有界な密度関数はいつ存在するか？
(III) $\inf_{(x,t)\in D} K(x,t) > 0$ となる密度関数はいつ存在するか？

定理 1. 領域 D に対して，以下を満たす $r_0 > 0$ と部分領域の族 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の存在を仮定すれば，D 上に密度関数が存在する：

(i) $\Omega(r_0) \subset D$.

(ii) 任意の $\alpha \in A$ に対して，$\Omega(r_0/2) \subset E_\alpha \subset D$, $\overline{E_\alpha}^\circ = E_\alpha$ かつ $\forall(x,t) \in E_\alpha$ に対して，$(y,s) \in \Omega(r_0/2)$ が存在して，(x,t) と (y,t) を t-座標が増加する E_α 内の折れ線で結ぶことができる．

(iii) $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in A} \overline{\partial_p E_\alpha} \supset D \setminus \Omega(2r_0/3)$.

定理 2. 領域 D に有界な密度関数が存在すれば，任意の $c>0$ に対して，負数 t_c が存在して $\overline{D} \supset \Omega(c) \cap \{t > t_c\}$ である．

このことから，熱球は有界な密度関数を持たないことがわかる．直方体 $\{|x_i| < c, -c^2 < t < 0\}$ には有界な密度を構成できるが，その他の例としては変形した熱球 $\Omega_m(c)$ (modified heat ball) がある．自然数 $m > 0$ に対して，

$$\Omega_m(c) := \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x\| < (2(m+n)(-t)\log(c/(-t)))^{1/2},\ -c < t < 0\}$$

は次の有界な密度関数を持つ：

$$c_0 \left(2(m+n)(-t) \log\left(\frac{c}{-t}\right) - \|x\|^2 \right)^{m/2} \left(\frac{m(m+n)}{-t} \log\left(\frac{c}{-t}\right) + \frac{\|x\|^2}{t^2} \right).$$

ここで $c_0 := \omega_m / \{2(m+2)(4\pi c)^{(m+n)/2}\}$ で，かつ ω_m は $\mathbf{R}^m$ の単位球の体積を表す．

以下，より詳細に密度関数の存在を調べるために，領域 D が

$$D(\varphi) = \{(x,t); \|x\| < \varphi(t) \ \ (-1 < t < 0)\},$$

の形の場合を考える．ここで φ は $(-1,0)$ 上の正値連続関数で，議論を容易にするために次の条件も課す：$t_0 \in [-1,0]$ が存在して φ は $[-1,t_0]$ で単調増加，$[t_0,0]$ で単調減少である．また，二つの $[-1,0]$ 上の関数 φ と ψ に対して $\varphi \approx \psi$ とは，正の定数 $c_1 < c_2$ が存在して，原点の近傍で $c_1\psi(t) \leq \varphi(t) \leq c_2\psi(t)$ が成り立つこととする．

定理 3. 原点が $D(\varphi)$ に関して Dirichlet 正則点ならば $D(\varphi)$ には密度関数は存在しない．

正則性の判定は $\varphi(t) \approx (4(-t)\log|\log(-t)|)^{1/2}$ であるから，例えば錐体 $\{\|x\| < -ct,\ -1 < t < 0\}$ には密度関数が存在しないことがわかる．より一般に次がわかる．

定理 4. (i) $\varphi(t) \approx (-t)^\beta$ $(\beta \geq 1/2)$ ならば密度関数は存在しない．
(ii) $\varphi(t) \approx (-t)^\beta$ $(\beta < 1/2)$ ならば密度関数が存在する．
(iii) 熱球には有界な密度関数は存在しない．
(iv) (ii) の場合でも (III) を満たす密度関数は存在しない．

References

[1] W.Hansen and I.Netuka, Volume densities with the mean value property for harmonic functions, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 135-140.

[2] N.Suzuki and N.A.Watson. Mean value densities for temperatures, to appear in Colloq. Math.

9. Jørgensen groups of parabolic type, III - uncountably infinite case -

Changjun Li (Shizuoka University), Makito Oichi (Shizuoka University) and Hiroki Sato (Shizuoka University)

ABSTRACT. Last time we stated that we found all Jørgensen groups of parabolic type for finite case and countably infinite case ([1,2]). In this talk we will state that we found all Jørgensen groups of parabolic type for uncountably infinite case ([3]).

If $\langle A, B\rangle$ is a Jørgensen group such that A ia parabolic, then we call $G = \langle A, B\rangle$ a *Jørgensen group of parabolic type*. By normalization we can represent this group as follows:

$G_{\mu,\sigma} = \langle A, B_{\mu,\sigma}\rangle$ be the group generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,\mu} = \begin{pmatrix} \mu\sigma & \mu^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & \mu\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $\mu \in \mathbf{C}$.

Then it gives rise to the following problem.

PROBLEM. Find all Jørgensen group of parabolic type.

Here we consider the case of $\mu = ik$ $(k \in \mathbf{R})$. Namely, we consider two-generator groups $G_{\sigma,ik} = \langle A, B_{ik,\sigma}\rangle$ generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,ik} = \begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbf{R}$.

Let C be the following cylinder: $C = \{(\sigma, ik) \mid |\sigma| = 1,\ k \in \mathbf{R}\}$.

THEOREM A (Sato [4]). *Every Jørgensen group of type $G_{\sigma,ik}$ lies on the cylinder C.*

By Theorem A we consider two-generator groups $G_{\sigma.\mu} = \langle A, B_{\sigma,\mu}\rangle$ with $\sigma = -ie^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ and $\mu = ik$ $(k \in \mathbf{R})$. For simplicity we set $B_{\theta,k} := B_{\sigma,ik}$ and $G_{\theta,k} = \langle A, B_{\sigma,ik}\rangle$ for $\sigma = -ie^{i\theta}$.

After some considerstion we can see that it suffices to consider the case where $0 \leq \theta \leq \pi/2$ for finding Jørgensen groups on the cylinder C.

Last time we stated that we found all Jørgensen groups in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $0 \leq |k| \leq \sqrt{3}/2$ (finite case)([1]) and in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $\sqrt{3}/2 < |k| \leq 1$ (countably infinite case)([2]). This time we will state that we found all Jørgensen groups in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $|k| > 1$ (uncountably infinite case)([3]). Then we found all Jørgensen groups of parabolic type if the following conjecture holds.

CONJECTURE. For any Jørgensen group $G_{\sigma,\mu}$ ($\sigma \in \mathbf{C}\setminus\{0\}, \mu \in \mathbf{C}$) of parabolic type, there exists a Jørgensen group $G_{\nu,ik}$ ($\nu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbf{R}$) such that $G_{\nu,ik}$ is conjugate to $G_{\sigma,\mu}$.

THEOREM (Li-Oichi-Sato [3]) (Uncountably infinite case).
The group $G_{\theta,k}$ with $0 \leq \theta \leq \pi/2$ and $1 < k$ is a Jørgensen group if and only if one of the following conditions holds.

(a) $\theta = 0$ *and* $k > 1$.

(b) (1) $\theta = \pi/6$ *and* $k = \sqrt{3}n/2$ $(n = 2, 4, 6, \ldots)$. (2) $\theta = \pi/6$ *and* $k = \sqrt{3}n/2$ $(n = 3, 5, 7, \ldots)$.

(c) (1) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 3/2$. (2) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 1 + \sqrt{2}/2$. (3) $\theta = \pi/4$ *and* $k = (5 + \sqrt{5})/4$. (4) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 1 + \sqrt{3}/2$. (5) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 1 + \cos(\pi/n)$ $(n = 7, 8, \ldots)$. (6) $\theta = \pi/4$ *and* $k = 2$. (7) $\theta = \pi/4$ *and* $k > 2$.

(d) $\theta = \pi/3$ *and* $k = \sqrt{3}n/2$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

(e) $\theta = \pi/2$ *and* $k > 1$.

Corollary. *There are uncountably infinite Jørgensen groups on the region* $\{(\theta, k) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 1 < k\}$.

References

[1] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type I (Finite type)*, MSRI Koukyuroku, Kyoto Univ. **1293** (2002), 65-77.

[2] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type II (Countably infinite case)*, MSRI Koukyuroku, Kyoto Univ. **1329** (2003), 48-57.

[3] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type III (Uncountably infinite case)*, preprint.

[4] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. **256** (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, 2000, 271-287.

10. THE RECURRENT SETS IN L^∞ SPACES WITH GROUP ACTION

EGE FUJIKAWA
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University
and
KATSUHIKO MATSUZAKI
Department of Mathematics, Ochanomizu University

1. THE SHIFT OPERATOR ON ℓ^∞

On the Banach space of the two-sided infinite sequences of real numbers

$$\ell^\infty = L^\infty(\mathbb{Z}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \mid \|x\|_\infty = \sup |x_n| < \infty\},$$

consider the shift operator $\sigma : \ell^\infty \to \ell^\infty$ defined by $(x_n) \mapsto (x_{n+1})$. This is an isometric linear operator on a non-separable Banach space. The orbit of $x \in \ell^\infty$ under σ is defined by

$$\mathrm{Orb}(\sigma; x) = \{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

and the set of the periodic points is defined by

$$\mathrm{Per}(\sigma) = \{x \in \ell^\infty \mid x \in \mathrm{Orb}(\sigma; x) - \{x\}\}.$$

We are concerned with the *recurrent set* for σ, which is

$$\mathrm{Rec}(\sigma) = \{x \in \ell^\infty \mid x \in \overline{\mathrm{Orb}(\sigma; x) - \{x\}}\}.$$

Clearly, this is a σ-invariant closed subset of ℓ^∞.

Theorem 1. *The closure* $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)}$ *is a σ-invariant Banach subspace of ℓ^∞ and is properly contained in* $\mathrm{Rec}(\sigma)$. *Namely,* $\mathrm{Rec}(\sigma) - \overline{\mathrm{Per}(\sigma)} \neq \emptyset$.

2. TIGHT GROUPS

We generalize the observation in the previous section to the Banach space $L^\infty(G)$ of the L^∞-functions on a discrete group G and define the sets $\mathrm{Orb}(G; x)$, $\mathrm{Per}(G)$ and $\mathrm{Rec}(G)$ in the same way. The inclusion relation $\mathrm{Rec}(G) \supset \overline{\mathrm{Per}(G)}$ is always satisfied, however, we are interested in its properness as is seen in Theorem 1.

Definition 2. *A discrete group G is called* tight *if* $\mathrm{Rec}(G) = \overline{\mathrm{Per}(G)}$.

We propose a problem to find examples of tight groups and then characterize all such groups.

3. Application to Teichmüller spaces

We consider the Teichmüller space $T(R)$ of a Riemann surface R not necessarily of finite analytic type, and the Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}(R)$, which is the group of all biholomorphic isometric automorphisms of $T(R)$. For every subgroup G of $\mathrm{Mod}(R)$, the sets $\mathrm{Orb}(G;p)$ for each $p \in T(R)$, $\mathrm{Per}(G)$ and $\mathrm{Rec}(G)$ are defined in the same way. Remark that $\mathrm{Rec}(G)$ and $\mathrm{Per}(G)$ are closely related to the *limit set* $\Lambda(G)$ and its subset $\Lambda_\infty(G)$ respectively, which were studied in [1] and [2].

Similar construction as in Theorem 1 can be applied to Riemann surfaces, which yields the following.

Proposition 3. *There exists a Riemann surface R satisfying the following property: for the isotropy subgroup $G \subset \mathrm{Mod}(R)$ of the origin, which is identified with the conformal automorphism group $\mathrm{Aut}(R)$, there is a point $p \in T(R)$ in $\Lambda(G) - \overline{\Lambda_\infty(G)}$.*

Furthermore, we can transfer this situation into $B(1)$ through the Bers embedding $\beta : T(R) \to B(\Gamma) \subset B(1)$, where $B(\Gamma)$ is the Banach space of all holomorphic functions φ on the unit disk Δ satisfying the automorphic condition $\varphi(\gamma(z))\gamma'(z)^2 = \varphi(z)$ for every element γ of the Fuchsian group Γ and the norm $\|\varphi\|_B = \sup \rho^{-2}(z)|\varphi(z)|$ finite for the hyperbolic density ρ of Δ.

Proposition 4. *For every hyperbolic or parabolic Möbius transformation $g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, consider an isometric linear operator $g^* : B(1) \to B(1)$ defined by $g^*\varphi = \varphi(g(z))g'(z)^2$. Then $\mathrm{Rec}(g^*) - \overline{\mathrm{Per}(g^*)} \neq \emptyset$.*

4. Application to H^∞

Let H^∞ be the Banach space of all holomorphic functions f on Δ with the supremum norm $\|f\|_\infty = \sup |f(z)|$ finite. For every Möbius transformation $g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, the composition operator $C_g : H^\infty \to H^\infty$ is defined by $C_g(f)(z) = f(g(z))$. This is an isometric linear operator. Adjusting the results in the previous section to H^∞, we have the following.

Proposition 5. *For every hyperbolic Möbius transformation $g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, the composition operator C_g of H^∞ satisfies $\mathrm{Rec}(C_g) - \overline{\mathrm{Per}(C_g)} \neq \emptyset$.*

References

[1] E. Fujikawa, *Limit sets and regions of discontinuity of Teichmüller modular groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 117–126.

[2] E. Fujikawa, H. Shiga and M. Taniguchi, *On the action of the mapping class group for Riemann surfaces of infinite type*, J. Math. Soc. Japan, to appear.

11. VALIRON AND DYNAMICAL EXCEPTIONAL SETS OF RATIONAL COMPOSITION SEQUENCES

YÛSUKE OKUYAMA
(奥山裕介)

1. The exceptional sets in Nevanlinna theory

Let $[p, q]$ be the chordal distance between $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$ such that $[0, \infty] = 1$, and σ the spherical area measure on $\hat{\mathbb{C}}$ such that $\sigma(\hat{\mathbb{C}}) = 1$. We write the set of all rational endomorphism of $\hat{\mathbb{C}}$ by Rat, and call a sequence in Rat a *rational sequence*.

For $f, g \in$ Rat, we define the *pointwise proximity function*:

$$(w(g, f))(z) := \log \frac{1}{[g(z), f(z)]} : \hat{\mathbb{C}} \to [0, \infty],$$

and the *mean proximity*:

$$m(g, f) := \int_{\hat{\mathbb{C}}} w(g, f) d\sigma \in [0, \infty).$$

For a rational sequence $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, we define the *characteristic sequence* $\{T_{\mathcal{F}}(k) := \deg f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$.

Let $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a rational sequence with the increasing characteristic sequence.

Definition 1.1. For $g \in$ Rat, we define the *Valiron exceptionality*:

$$\mathrm{VE}(g; \mathcal{F}) := \limsup_{k \to \infty} \frac{m(g, f_k)}{T_{\mathcal{F}}(k)} \in [0, \infty].$$

Identifying every point in $\hat{\mathbb{C}}$ as a constant map, we define the *Valiron exceptional set* by

$$E_V(\mathcal{F}) := \{p \in \hat{\mathbb{C}}; \mathrm{VE}(p; \mathcal{F}) > 0\}.$$

It is known that $E_V(\mathcal{F})$ is at least countable and has the following property:

Theorem 1.1 (Sodin). *For such a regular probability measure μ on $\hat{\mathbb{C}}$ that $\mu(\{p\}) = 0$ for every $p \in E_V(\mathcal{F})$, $(f_k^*\sigma - f_k^*\mu)/\deg f_k$ tends to 0 as $k \to \infty$ weakly.*

2. The dynamical exceptional set for rational iteration

Let $f \in \mathrm{Rat}$ be of degree $d \geq 2$. We write $f^k := f^{\circ k}$ for $k \in \mathbb{N}$.

Definition 2.1. The dynamical exceptional set is defined as

$$E(\{f^k\}) := \{p \in \hat{\mathbb{C}}; \# \bigcup_{n>0} f^{-1}(p) < \infty\}.$$

It is easy to see that $(f^k)^*\sigma/d^k$ converges as $k \to \infty$ weakly.

It is known that $E(\{f^k\})$ consists of at most two points and has the following property:

Theorem 2.1 (Lyubich, Eremenko-Sodin). *For such a regular probability measure μ on $\hat{\mathbb{C}}$ that $\mu(\{p\}) = 0$ for every $p \in E(\{f^k\})$, $(f^k)^*\mu/d^k$ tends to the limit of $(f^k)^*\sigma/d^k$ as $k \to \infty$ weakly.*

3. Main Theorem

How these two exceptional sets are related is:

Main Theorem 1.

$$E_V(\{f^k\}) = E(\{f^k\}).$$

In particular, $\#E_V(\{f^k\}) \leq 2$.

From this, by a combinatorial argument, we can also characterize the Valiron exceptional sets of rational *composition* sequences by the dynamical exceptional sets of generators.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kanazawa University, Kanazawa 920-1192 Japan

E-mail address: okuyama@kenroku.kanazawa-u.ac.jp

特別講演

Nevanlinna-Cartan の第二主要定理と函数方程式 $f_0{}^n + f_1{}^n + \cdots + f_k{}^n = 0$

藤解 和也 （金沢大学大学院 自然科学研究科）

この講演では R. Nevanlinna と H. Cartan のいわゆる値分布論、特にその第二主要定理と題目に掲げた函数方程式との関わりについて考察する。この方程式の解として得られる複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 $f_0^n, \ldots f_k^n$ が極値的に振舞うために自然数 k と n はどう選ばれるべきかという問題を取り扱う。その動機付けを値分布論の発展と関連付けながら、またいくつか具体例を紹介しつつこの分野について「面白み」の一端でも紹介できたなら幸甚である。

1 Picard の小定理から

R. Nevanlinna は著書 [25] の中で、複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義された超越的な（すなわち有理式以外の）有理型函数の像は高々 2 点を除いて射影直線 $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ を必ず無限回覆うという Picard の小定理が、ある函数方程式に自明な解が存在しないことと同値であることを示している。実際、$Q(z), R(z) \in \mathbb{C}(z)$ に対して、方程式

$$Q(z)e^{\varphi(z)} + R(z)e^{\psi(z)} \equiv 1 \tag{1.1}$$

を満たす非定数整函数 $\varphi(z), \psi(z)$ は存在しない。（これを「Borel 恒等式の不可能性」とも呼ぶ。）証明は簡単で、解が存在するなら超越有理型函数 $f(z) = Q(z)e^{\varphi(z)} = 1 - R(z)e^{\psi(z)}$ の像は 3 点 $0, 1, \infty$ を高々 $\max\{\deg Q, \deg R\}$ 回しか覆うことができない。この逆もまた容易に分かる。

今後は、単に有理型函数と言えば「複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義された超越有理型函数」を意味するものとする。

附記 1 上記では超越的な有理型函数にこだわった。「無限回の被覆」は有理式のそれとの対比である。函数方程式 (1.1) が $\mathbb{C}(z)$ 上で考えられているのはその為である。*E. Borel* は更にこの関係を推し進めて、係数体を「位数」が $\rho(>0)$ 未満の有理型函数全体の成す族 Λ_ρ として同様な結果を得た。このとき被覆回数に関する主張は「位数 ρ の有理型函数による $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ の 1 点の原像がなす点列の収束指数は、高々 2 点を除くといずれも ρ」であり、また方程式がもち得る解は次数 ρ 未満の有理式となる。尚、これらの主張では対応する函数方程式に現れる $\alpha(z)e^{\varphi(z)}$, $\alpha \in \mathbb{C}(z)$（または Λ_ρ）を極値函数として、その最良性が示される。

こうして Nevanlinna は「$\mathbb{C}$ の超越有理型函数による像の様子をある種の函数方程式の大域的な解の“非存在性”により知る」という研究の泉を Picard の小定理に見つけ出した訳である。以下、この泉から湧き出た流れについて、講演者の浅薄な理解のため内容に偏りが生じることをご容赦願いつつ、現在までの繋がりを追ってみたい。

2 Fermat-Wiles の定理を遥か遠くに見つつ

F. Gross [7] は Fermat-Wiles の定理を $\mathbb{C}$ 上の有理型函数を対象にして考察した。それに先だって整函数に関する G. Iyer [20] の結果があるが、これらをまとめる次の様になる：

定理 1 ([20][7][1]) 函数方程式

$$f(z)^n + g(z)^n \equiv 1 \tag{2.2}$$

には、$n \geq 3$ のとき非定数整函数解は存在しない。また $n \geq 4$ では非定数有理型函数解が存在しない。また $n = 2$ のときの整函数解は、ある整函数 $\theta(z)$ により必ず

$$f(z) = \cos\theta(z), \quad g(z) = \sin\theta(z) \tag{2.3}$$

と表される。$n = 3$ のときは

$$f(z) = \frac{1 + \wp'(z)/\sqrt{3}}{2\wp(z)}, \; g(z) = \frac{1 - \wp'(z)/\sqrt{3}}{2\wp(z)} \tag{2.4}$$

なる有理型函数解が存在する。ここに $\wp(z)$ は $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 1$ で与えられる *Weierstrass* の $\wp$-函数である。任意の解はこれらに整函数 $h(z)$ を合成して得られる。

整函数についての主張はやはり Picard の小定理から得られる。また $n = 2$ のとき整数解が (2.3) に限られるのは、0 と ∞ の 2 つの除外値を持つ $\mathbb{C}$ 上の有理型函数が指数函数のみであることより分かる。これらを示したのは Iyer [20] である。

また、有理型函数解の特徴付けは I. N. Baker [1] による。これら「解の一意性」を示すためはある解析函数の平面全体への接続可能性を調べることになるが、これには少々紙数を要するので割愛し、ここではこの解が得られる理由を簡単に述べる。実際、恒等式

$$(t+1)^2 - (t-1)^2 = 4t, \quad (t+1)^3 - (t-1)^3 = 2(3t^2+1)$$

において、それぞれの右辺に零点をもたない整函数として $t = e^{2i\theta}$、有理型函数の 3 乗として表す目的で $t = \wp'(h)/\sqrt{3}$ を代入すればよい。(第一式で $t = h^2$ と置いたものが「Pythagoras の三つ組み」で、これから $n = 2$ のときの有理型函数解が得られる。)

一方、有理型函数解の非存在性を議論するには最早 Picard の定理では不足である。そのため次節では Nevanlinna の第二主要定理についての必要事項を確認する。

附記 2 *Borel* 恒等式の不可能性は *Fermat-Wiles* の定理の傍証を与える。実際、恒等式 $e^{az} + e^{bz} = e^{cz}$ が成り立つなら、この両辺の原点での n 階微分係数は $a^n + b^n = c^n$ という関係を満たすことになる。

3 Nevanlinna の値分布論

複素平面 $\mathbb{C}$ の非定数有理型函数 $f(z)$ について Nevanlinna の理論で主役となる3つの実関数は次で定義される：

$$\begin{aligned} m_f(r,\infty) &= \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi}, \\ N_f(r,\infty) &= n_f(0,\infty)\log r + \int_0^r [n_f(t,\infty) - n_f(0,\infty)]\frac{dt}{t}, \\ T_f(r) &= m_f(r,\infty) + N_f(r,\infty). \end{aligned}$$

ここで $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$, また $n_f(r,\infty)$ は閉円板 $\{|z| \le r\}$ 上にある f の極の個数をその重複度も含めて数えたものとする。それぞれ近接 (proximity), 個数 (counting), 特性 (characteristic) 関数と呼ばれる。また複素数 $a \in \mathbb{C}$ について $m_f(r,a) = m_{1/(f-a)}(r,\infty)$, $N_f(r,a) = N_{1/(f-a)}(r,\infty)$ と記すが、Jensen の定理により Nevanlinna の**第一主要定理**

$$T_f(r) = m_f(r,a) + N_f(r,a) + O(1).$$

が成り立つ。さらに Nevanlinna は分岐点に関する個数関数を導入した：

$$N_{\mathrm{ram},f}(r) = N_{f'}(r,0) + 2N_f(r,\infty) - N_{f'}(r,\infty)\,(\ge 0).$$

この関数は対数導函数 f'/f が密接に関係していることは容易にわかる。一方、f'/f の近接函数の増大は $T_f(r)$ に比較すると誤差の程度である。これは「対数導函数の補題」と呼ばれる Nevanlinna の理論でもっとも重要な結果である。これを利用して Nevanlinna [24] は2つ目の主要定理を導いた。

定理 2（第二主要定理） 任意の相異なる q 個の点 $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}$ 上の超越有理型函数 f について、

$$(q - 2 + o(1))T_f(r) \le \sum_{j=1}^{q} N_f(r,a_j) - N_{ram,f}(r)$$

という不等式が r の値に関するある集合を除けば必ず成立する。

上記については Nevanlinna [24, 25] の他に [15], [21], [22], [23], また最近の出版では [3] や [27] などを参照されたい。特に後者の2つでは「誤差」の精密な評価に関する記述がある。

Picard の小定理は、$q = 3$ でこの定理を適用し $N_f(r,a_j) \le O(1)\log r$ となり得る a_j の個数が2以下であることから導くことができる。

さらに分岐度を考慮した評価により、“k-truncated” 個数函数 $N_f^{(k)}(r,\infty)$ が導入される。これは $N_f(r,\infty)$ と同様に定義されるが、指定された $k(\ge 1)$ を超える重複

度を持つ極の寄与はすべて k で打ち切られる。例えば $N_f^{(1)}(r,\infty)$ は極の重複度を考慮せずその点の個数のみを数えたものであり、

$$\sum_{j=1}^{q} N_f(r,a_j) - N_{\mathrm{ram},f}(r) \leq \sum_{j=1}^{q} N_f^{(1)}(r,a_j)$$

であることから、第二主要定理より次の不等式が成り立つ：

$$\big(q-2+o(1)\big)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^{q} N_f^{(1)}(r,a_j)\,.$$

この応用として完全分岐値の個数に関する評価を得る。ここで値 a が f の「完全分岐値」とは、方程式 $f(z)=a$ の解がすべて重解となることをいい、このとき $w=f(z)$ の像 Riemann 面は点 $w=a$ 上ですべて分岐していることになる。第一主要定理から

$$N_f^{(1)}(r,a) \leq \frac{1}{2}N_f(r,a) \leq \frac{1}{2}T_f(r)+O(1)$$

となるので、第二主要定理は完全分岐値が高々 4 つしかないことを示している。実際に完全分岐値を 4 つ持つ有理型函数としては Weierstrass の $\wp$ 函数がよく知られている。更に分岐度まで考慮して、例えば a_j $(1 \leq j \leq q)$ の重複度が常に $m_j(\geq 1)$ であれば、第二主要定理から「分岐定理」

$$q-2 \leq \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j} \quad \text{それゆえ} \quad \sum_{j=1}^{q}\frac{m_j-1}{m_j} \leq 2 \tag{3.5}$$

が得られる。もし a_j が除外値のときには $m_j=\infty$ と考える。特に $q=3$ のとき $(m_1,m_2,m_3)=(2,2,\infty),(3,3,3)$ として等号が成り立つ。例えば、微分方程式

$$(w')^2 = w^2-1 \quad \text{および} \quad (w')^3=(w^3-1)^2$$

の解として、それぞれ

$$\sin z \quad \text{および} \quad \frac{\wp'(z/\sqrt{3})-\sqrt{3}}{\wp'(z/\sqrt{3})+\sqrt{3}} \tag{3.6}$$

などが極値函数となる。ここで $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)-1$ である。

この結果を Iyer のアイデアに基づいて $f(z)^n+g(z)^n \equiv 1$ に摘要したのが Gross であった。実際、有理型函数 $F(z) := f(z)^n = 1-g(z)^n$ では 3 つの値 $0, \infty, 1$ の重複度がいずれも n の整数倍となるので、(3.5) から $n \leq 3$ が従う。また解の構成にはその極値函数である (3.6) を使えばよい。

4 再び Picard の定理

Nevanlinna の第二主要定理には Picard のもうひとつの古典的な定理が関連していた。すなわち前節で述べた分岐定理を用いて Picard の代数曲線に関する次の定理を示すことができる（E. Hille [18] 等を参照）：

定理 3　平面代数曲線の種数が 2 以上であれば、これを $\mathbb{C}$ 上の 2 つの有理型函数を用いてパラメータ表示することは不可能である。

曲線の種数は双有理変換で不変であるから種数 p の曲線は次のような標準形を持つ：

$$y^2 = \prod_{j=1}^{2p+1}(x-a_j) \quad \text{あるいは} \quad y^2 = \prod_{k=1}^{2p+2}(x-b_k). \tag{4.7}$$

ここで a_j, b_k はそれぞれ相異なるものとする。

まず $p=1$ のとき、これらのパラメータ表示はそれぞれ $\wp$ 函数、Jacobi の楕円函数で与えられる。(a_j あるいは b_k の内の 2 つが一致する場合には $p=0$ となるが、このときパラメータ表示は有理式により得られ、Pythagoras の 3 つ組みがその例であった。)

次に $p \geq 2$ のときにも曲線 (4.7) がある有理型函数 $f_i(z), i=1,2$ により

$$[f_2(z)]^2 = \prod_{j=1}^{2p+1}[f_1(z)-a_j] \quad \text{あるいは} \quad [f_2(z)]^2 = \prod_{k=1}^{2p+2}[f_1(z)-b_k]$$

とパラメータ表示できたとする。このとき $f_1(z)$ は完全分岐値を $2p+2(\geq 6)$ 個もつことになり分岐定理に矛盾する。こうして種数が 2 以上の曲線をパラメータ表示する有理型函数の存在領域は複素平面 $\mathbb{C}$ 全体とは成り得ないのであった。以上、我々の考察では

- 種数 0 の有理曲線　(C_1^0) $y^2 = x+1$,　(C_2^0) $y^2 = x^2+1$;
- 種数 1 の楕円曲線　(C_3^1) $y^2 = x^3+1$,　(C_4^1) $y^2 = x^4+1$

のパラメータ表示に任意の整函数を合成して得られる関係式が活用されることになる。第 2 節でみた Iyer と Gross-Baker の結果は曲線 (C^0) $u^2+v^2=1$ と (C^1) $u^3+v^3=1$ の種数がそれぞれ 0, 1 であることを用いたものである。曲線 (C_1^0) から (C^0) へ、また (C_3^1) から (C^1) への双有理変換として例えば

$$(u,v) = \left(\frac{x+2}{2y},\ \frac{ix}{2y}\right) \quad \text{および} \quad \left(-\frac{iy+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x},\ \frac{iy-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x}\right)$$

がある。

5　Waring の問題に沿って

H. A. Heilbronn は "Hayman の問題集" [16, 2.26] で「すべての整函数 $f(z)$ を整函数 $f_\nu(z)$ $(\nu = 1,\cdots,k)$ の等ベキ n の和で

$$f(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{k}[f_\nu(z)]^n$$

と表現するために必要となる項数 $k = k(n)$ の最小値 $W_E(n)$ を求めよ」という整函数に対するいわゆる Waring の問題を提出した。彼は次の2点を注意している：

1) $f(z) = z$ の問題に帰着できる。実際、このとき $f(z) = \sum_{\nu=1}^{k}[f_\nu \circ f(z)]^n$.

2) $\omega_\nu = \exp\{\frac{2\pi\nu i}{n}\}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ としてつぎの恒等式が成り立つ：

$$z \equiv \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(1+\omega_\nu z)^n}{\omega_\nu}$$

従って $W_E(n) \leq n$ となる。特に $n = 1, 2, 3$ では $W_E(n) = n$.

$W_E(3) = 3$ は再び Picard の小定理からの帰結である。実際、$f_1(z)^3 + f_2(z)^3 = z$ に整函数解があれば有理型函数 $f_1(z)/f_2(z)$ は高々原点を除いて3つの値 $-\omega_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ を取ることができない。

同様な問題は有理型函数に対しても考えることができ、やはり z の問題に帰着される。実際、与えられた n と $f(z)$ について $f(z) = g(z)/h(z)^n$ となる整函数 g, h が存在するので、$g(z)$ について表現を求めた後、$h(z)^n$ で両辺を割ればよい。このときの答を $W_M(n)$ と記す。勿論 $W_M(n) \leq W_E(n) \leq n$ である。W. K. Hayman [17] は正則曲線の値分布に関する Cartan の理論における第二主要定理を適用することで、次の結果を得た：

定理 4　整数 $n \geq 2$ に対して

$$W_E(n) \geq \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}} \quad \text{および} \quad W_M(n) \geq \sqrt{n+1}.$$

(Hayman [17] の考察を改良し、最近の結果も含めより分かりやすい形で G. G. Gundersen と Hayman による論文 [13] が出版される。その内容はこの講演とも密接に関連していることから以下の表記はこれに従うことにする。）ただし正確な値については現時点で $W_M(2) = W_E(2) = 2$ と $W_M(3) = 2 < 3 = W_E(3)$ が判っているのみである。Gross と C. F. Osgood [8] は $f(z)^3 + g(z)^3 \equiv z$ の一価有理型な解として、任意の整函数 $\phi(z)$ 毎に

$$\frac{f(z^3)}{z} = \frac{1 + \wp'(\phi(z))/\sqrt{3}}{2\wp(\phi(z))}, \quad \frac{g(z^3)}{z} = \frac{1 - \wp'(\phi(z))/\sqrt{3}}{2\wp(\phi(z))}$$

で与えられる f, g が存在することを "$\wp(z:0,1)$" の性質を最大限に利用して証明した。$n = 2$ では Pythagoras の3つ組みを用いて得られる

$$\left(\frac{\phi(z)^2 + z/2}{\phi(z)}\right)^2 - \left(\frac{\phi(z)^2 - z/2}{\phi(z)}\right)^2 \equiv z \tag{5.8}$$

が解である。(整函数解を得るには $\phi(z) = e^z$ とおけばよい。cf. [9])

附記 3 これらの解の構成は何れも *Fermat* 方程式に対する有理型および整函数解に対する定理 1 を利用したものである。このことから *Waring* の問題では方程式の係数に z を含む曲線、例えば $y^2 = x^k + z$ などが解決への糸口を与えてくれるのでは、と期待したいが結果は芳しくない。$k \geq 2$ での有理型函数解の存在もよくわからないため、$k = 1$ のとき例えば (P_1) $y'' = y^2 + z$, (P_2) $y''(z) = \alpha + zy(z) + 2y(z)^3$ の解である P_1, P_2 を用いて (5.8) で「z が現れない」表現

$$\begin{aligned} z &\equiv \left(i\frac{P_1''(z) - 12P_1(z)^2}{2\sqrt{6}P_1(z)}\right)^2 + \left(\frac{P_1''(z)}{2\sqrt{6}P_1(z)}\right)^2 \\ &\equiv \left(i\frac{4P_2(z)^2 - P_2''(z) + \alpha}{2\sqrt{2}P_2(z)^2}\right)^2 + \left(P_2''(z) + \alpha 2\sqrt{2}P_2(z)^2\right)^2 \end{aligned}$$

を得るのみである。しかしながら、勿論これは *Painlevé* 超越函数 P_1, P_2 を特徴付ける性質ではなく、*Riccati* 方程式 $y' = y^2 + z$ で与えられる超越有理型函数 y もまた同様な性質をもつ。このとき y は *Airy* 函数 A の対数導函数で与えられることから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A''}{A'} - \frac{A'}{A}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{A''}{A'} + \frac{A'}{A}\right)^2 = z$$

となるが、一方で $y(z/\sqrt[3]{2})/\sqrt[3]{2}$ が *Painlevé* 方程式 (P_2) $(\alpha = 1)$ の特殊解であるのは面白い。

なお、*Painlevé* 超越函数が *Nevanlinna* の第二主要定理において、やはりある種の極値的な振舞いをすることが下村と *N. Steinmetz* によって示されている（[6] 等を参照のこと）。

6 Cartan の理論

さて、Hayman [17] は定理 4 の証明に Cartan の第二主用定理を適用したのであった。Nevanlinna の理論が n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 内の正則曲線に関する Cartan の理論へと発展していく様子については Lang [23], Ru [27] などに詳しい。この講演では、準備を容易にする為にも函数方程式への応用に限定して Cartan の第二主要定理を説明するに留めたい。その目的で Gundersen-Hayman [13] を主に引用する。以下ではその記述に倣い、対象を整函数の線型結合が成す族の値分布とする。

定理 5 (Cartan の第二主要定理) 線形独立な $p(\geq 2)$ 個の整函数 $g_1, g_2, \ldots, g_p$ について常に $\max_{1\leq j\leq p}\{|g_j(z)|\} > 0$ が成り立っているとし、$r > 0$ の関数

$$T(r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} - u(0), \quad ここに\ u(re^{i\theta}) = \sup_{1\leq j\leq p} \log|g_j(z)|$$

を定義する。また $g_1, g_2, \ldots, g_p$ の $q(> p)$ 個の線型結合 $f_1, f_2, \ldots, f_q$ について、どの p 個も線型独立であると仮定して、有理型函数 H を

$$H = \frac{f_1 f_2 \cdots f_q}{W(g_1, g_2, \ldots, g_p)} \tag{6.9}$$

で定義する。ここで $W = W(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ は *Wronski* 行列式である。このとき比 g_j/g_1 $(2 \leq j \leq p)$ の少なくとも一つは超越的であるとして

$$\begin{aligned} (q - p + o(1))T(r) &\leq N_H(r, 0) - N_H(r, \infty) && (6.10) \\ &\leq \sum_{j=1}^{q} N_{f_j}^{(p-1)}(r, 0) - N_H(r, \infty) && (6.11) \end{aligned}$$

が有限測度をもつ集合を除いて $r \to \infty$ としたときに成立する。

注意 1 ここで $p = 2$ のとき $f = g_2/g_1$ として

$$T(r) = T_{g_2/g_1}(r) + O(1) \quad \text{および} \quad N_H(r, \infty) + N_W(r, 0) = N_{ram,f}(r)$$

である。証明と共に $N_H(r, \infty)$ の考慮についても [13] が参考になる。

注意 2 $W_M(n)$, $W_E(n)$ の下からの評価は、「1 に対する *Waring* の問題」(*Fermat* の問題) の答 $F_M(n)$, $F_E(n)$ についても同様に成り立つ。これらの証明には *Nevanlinna* の第二主要定理を函数方程式 (2.2) に適用した *Gross* の方法が参考になる。

また、より一般的な方程式については戸田 [35] の結果などがある。$F_M(n)$ に関しては、藤本 [4], *M. Green* [5] の結果もある ([23] も参照のこと)。

さて Hayman の証明であるが、これにはまず $q = p + 1$ のとき

$$f_1 := g_1, \quad \dots, \quad f_p := g_p, \quad f_{p+1} := g_1 + \cdots + g_p$$

に (6.11) を適用し、ある r の値を除外して成り立つ不等式 (「いろは予想」の類似品)

$$(1 + o(1))T(r) \le (p-1) \sum_{j=1}^{p+1} N_{g_j}^{(1)}(r, 0) \tag{6.12}$$

を導く。次に函数方程式 $\sum_{\nu=1}^{p} F_\nu(z)^n \equiv 1$ または z に超越的有理型函数解 $F_\nu = h_\nu / h_{p+1}$ が存在したとして、互いに共通零点をもたない整函数 $g_j = {h_j}^n$ $(1 \le j \le p)$, $g_{p+1} = z^m h_{p+1}^n$ $(m = 0, 1)$ により定理 5 が適用可能な

$$\sum_{\nu=1}^{p} h_\nu(z)^n \equiv h_{p+1}(z)^n \text{ または } z h_{p+1}(z)^n$$

の形に表現し直す。そして

補助定理 ([2],[13]) 相異なる整数 $j, m \in \{1, \dots, p\}$ について次が成り立つ:

$$N_{g_j}(r, 0) - O(1) \le T_{g_j/g_m}(r) \le T(r) + O(1).$$

と共に (6.12) に適用すると、ある r の除外集合の外で $r \to \infty$ として

$$(1 + o(1)) \sup_{1 \le j \le p+1} N_{g_j}(r, 0) \le (p-1) \frac{p+1}{n} \sup_{1 \le j \le p+1} N_{g_j}(r, 0)$$

が得られる。これより $n \le p^2 - 1$ が従う。整函数の場合 $N_{g_{p+1}}(r, 0)$ の寄与はないので $n \le (p-1)p$ となる。これで定理 4 が示され、同時に $F_M(n)$, $F_E(n)$ についても下からの評価が得られた。しかし、各 $n (\ge 2)$ について次の関係が直ちに分る:

$$F_M(n) \le W_M(n), \quad F_E(n) \le W_E(n).$$

7 既知の解と $F_*(n)$, $W_*(n)$ の値について

では定理 4 の評価はどの程度精密であろうか。既に述べたように Heilbronn の例により各 $n(\geq 2)$ で $W_E(n) \leq n$ が成り立つ。また [17] にも別な例が与えられて

$$W_M(n) \leq n/2 + a, \tag{7.13}$$

但し $a = 3/2$ （n は奇数）, $a = 2$ （n は 4 の倍数）, $a = 3$ （n は 4 の倍数以外の偶数） という上からの評価が得られている。一方、D. Newman-M. Slater [28] では $F_E(n) \leq \sqrt{4n+1}$ となる例が与えられている。また [17] にも類似の評価があるが、いずれにしても下からの評価との隙間は埋めがたい。現時点では [13] によると

$$F_M(5) = F_E(5) = 3 \ \ [11,\ 26,\ 14], \quad F_M(6) = 3 \ \ [10], \quad F_E(14) = 5 \ \ [26]$$

と上述した $W_M(3) = 2$ および $W_E(3) = 3$ が既知である。特に B. Reznick [26] による $n = 14$ についての結果は驚嘆すべきものであるが、彼は 2 次形式で解を求めることを試み計算機実験からこの発見に至ったとのことである。

最良性は度外視して、例えば $n = 3, 4, 7, 8, 10$ では $\mathbb{C}(z)$ の解として次のようなものがある。但し $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ とする。

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left(z^3+1\right)^3 - \tfrac{1}{2}\left(z^3-1\right)^3 - 3(z^2)^3 &= 1 \quad \text{[Molluzo]}\\
\tfrac{1}{9}\left(z+1\right)^3 + \tfrac{\omega}{9}\left(z+\omega\right)^3 + \tfrac{\omega^2}{9}\left(z+\omega^2\right)^3 &= z \quad \text{[Molluzo]}\\
\tfrac{1}{18}\left(\tfrac{z^4+1}{z^2}\right)^4 + \tfrac{\omega^2}{18}\left(\tfrac{z^4+\omega}{z^2}\right)^4 + \tfrac{a}{18}\left(\tfrac{z^4+\omega^2}{z^2}\right)^4 &= 1 \quad \text{[Newman-Slater]}\\
\tfrac{1}{16}\left(z+1\right)^4 + \tfrac{-1}{16}\left(z-1\right)^4 + \tfrac{-i}{16}\left(z-i\right)^4 + \tfrac{i}{16}\left(z+i\right)^4 &= z \quad \text{[Heilbronn]}\\
\tfrac{1}{63}\left(\tfrac{1+z^7}{z^2}\right)^7 + \tfrac{\omega}{63}\left(\tfrac{1+\omega z^7}{z^2}\right)^7 + \tfrac{\omega^2}{63}\left(\tfrac{1+\omega^2 z^7}{z^2}\right)^7 - (z^3)^7 &= 1 \quad \text{[Newman-Slater]}\\
\left(\tfrac{z^4+1}{z}\right)^8 + \left(\tfrac{z^4-1}{z}\right)^8 - \left(\tfrac{z^4+i}{z}\right)^8 - \left(\tfrac{z^4-i}{z}\right)^8 - 7(z^2)^8 &= 7 \ \text{[New one?]}\\
\left(\tfrac{z^{10}+1}{z^3}\right)^{10} - \left(\tfrac{z^{10}-1}{z^3}\right)^{10} + i\left(\tfrac{z^{10}+i}{z^3}\right)^{10} - i\left(\tfrac{z^{10}-i}{z^3}\right)^{10} - 480(z^7)^{10} &= 480 \ \text{[Shorter?]}
\end{aligned}$$

となっている。これらの z に適当な有理型函数を代入して超越的な解を得ることはできるが、これでは我々の目的には不充分である。「項の簡約」のため、第 4 節でみた（2 つの有理型函数により一意化できる）曲線を考える。実は既知の解は何れも、$\mathbb{C}[u,v]$ の元でパラメータ表示された曲面とこれらの曲線との「交わり」として得られている。例えば Green [5], Gundersen [11], [10] ではそれぞれ

$$\begin{aligned}
&(u+v)^4 - (u-v)^4 = 8u^3v + 8uv^3\\
&(u+1)^5 - (u-1)^5 - (v+1)^5 + (v-1)^5 = 10(u^2-v^2)(u^2+v^2+2)\\
&(u+v)^6 + (u-v)^6 = \tfrac{2+11i}{2}\left(u^2 + \tfrac{3-4i}{5}v^2\right)^3 + \tfrac{2-11i}{2}\left(u^2 + \tfrac{3+4i}{5}v^2\right)^3
\end{aligned}$$

$xy=1$, $x^2+y^2+2=0$, $y^2=x^4+6x^2/5+1$ を一意化する函数を e^z, $\sin z$, $\operatorname{sn} z$ などから求めて u, v に代入し $F_E(4)\le 3$, $F_M(5)=3$, $F_M(6)\le 3$ を得ていることが分る（[33]）。同様に $F_M(8)\le 4$ ([12]) なども知られている。一方、$W_*(n)$ については

$$(u+v)^5-(u-v)^5+i(u+iv)^5-i(u-iv)^5=40u^2v^3$$
$$(u+v)^7+(u-v)^7+(u+iv)^7+(u-iv)^7-4u^7=140u^3v^4$$

などに、$v=z=1/u$ として得られる解により $W_E(5)\le 4$, $W_E(7)\le 5$ となるが、これは Hayman による評価式 (7.13) に等しい。なお、上述の Reznick の 14 次の例は

$$\textstyle\sum_{j=0}^{4}(\omega^j u^2+iuv+\omega^{-j}v^2)^5=5^7(uv)^{14}$$

（ここに $\omega=\exp(\frac{2\pi i}{5})$）であるが（他の偶数 n と同様に) $F_E(n)$ にのみ寄与する。

さて、$F_M(n)\le 3$ に限りもう少し詳細を述べておく。Hayman [17] 他の結果から $n\ge 9$ ではこれは不可能である。一方で、これまで見つかった解は $n\le 6$ までである。隙間 $n=7,8$ が埋まっていない。このとき解が存在する為の必要条件が石崎 [19] で述べられているが、ここでは敢えて $n=6$ について考える。Gundersen [10] の解は、整函数としての Jacobi の θ 函数を用いた別な表現が可能である ([34])。これは Hayman の証明において定理 5 の (6.11) ではなく評価式 (6.10) を直接に用いる目的で求めた。つまり「分岐」についてより精密に考えるのである。実際、この場合に (6.9) で定義される H を求めると

$$W\left((h_1)^6,(h_2)^6,(h_3)^6\right)=C(h_1)^4(h_2)^4(h_3)^6(h_4)^6$$

より

$$H=C^{-1}(h_1)^2(h_2)^2(h_1)(h_1)$$

となる。ここに $C=-60^2/\theta_2(0)^2\theta_3(0)^2$ とし、あるパラメータのもと a はそれに関係する非零定数として $h_1=\theta_4+\theta_1$, $h_2=\theta_4-\theta_1$, $h_3=a\theta_3$, $h_4=a\theta_2$ である。これは (6.10) において「等号」が成り立つことを示している。また Green の 4 次の解もやはり「整函数に関する等号」を成り立たせている。これらはその意味で極値的な解であると言えよう。

注意 3 尚、g_j がすべて 0 を除外する整函数、すなわち指数函数であるときに、(6.10) の等号が成り立つ自明でない例を [31, 32] で与えているが、そこで利用したのは p 階の線型方程式である。一方、今回は代数的な分岐が鍵でありそれゆえ自然に非線型代数方程式との結びついた。構成法からも分かるように、こうして得られた正則曲線は「代数的に退化」していると思われる。そうでない解を求めよ、という野口先生の問題への糸口はなかなか見つからない。

最後に、関連する流れについて 2 つほど触れて終わりにする。

まず城崎 [30] 等では有理型函数の 1 意性に関連して、$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 内の Fermat 型をした小林双曲的超曲面が構成されている。ここでは、定数でない正則写像 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

の非存在性と小林双曲性とが同値であることを示した R. Brody の定理が主要な役割を演じている ([23] などを参照)。これは今回考えた事象の背反といえる。

また E. G. Saleeby [29] は $u : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ に関する一階偏微分方程式 $\mathfrak{E}_{k,n}u := \sum_{i=1}^{k}(u_{z_i})^n = 1$, $z_i \in \mathbb{C}$ を、$f_i : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ に関する Fermat 型の函数方程式 $\mathfrak{F}_{k,n}f := \sum_{i=1}^{k}(f_i)^n = 1$ と関連付け、$k = 2$, $n \geq 2$ の場合について整函数あるいは有理型函数解の存在とその表現について考察している。ここでは定理 1 による解の特徴づけが本質的である。$k \geq 2$ の場合を考察するには、対応する「解の一意性」が示されなければならないが、それには今しばらく時間が必要に思われる。

参考文献

[1] Baker, I. N., On a class of meromorphic functions. Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 819–822.

[2] Cartan, H., Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica Cluj. **7** (1933), 5–31.

[3] Cherry, W. and Z. Ye, Nevanlinna's theory of value distribution. The second main theorem and its error terms. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[4] Fujimoto, H., On meromorphic maps into the complex projective space. J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 272–288.

[5] Green, M. L., Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties. Amer. J. Math. **97** (1975), 43–75.

[6] Gromak, V. I., Laine, I. and S. Shimomura, Painlevé differential equations in the complex plane. de Gruyter Studies in Mathematics, **28**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002.

[7] Gross, F., On the equation $f^n + g^n = 1$. Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 86–88. Correction: **72** (1966), 576.

[8] Gross, F. and C. F. Osgood, On the functional equation $f^n + g^n = h^n$ and a new approach to a certain class of more general functional equations. Indian J. Math. **23** (1981), 17–39.

[9] Gross, F. and C. F. Osgood, Further results on Fermat type equations and a characterization of the Chebyshev polynomials. J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 317-324. Correction: **134** (1988), 254–255.

[10] Gundersen, G. G., Meromorphic solutions of $f^6 + g^6 + h^6 \equiv 1$. Analysis **18** (1998), 285–290.

[11] Gundersen, G. G., Meromorphic solutions of $f^5 + g^5 + h^5 \equiv 1$. Complex Variables, **43** (2001), 293–298.

[12] Gundersen, G. G., Complex functional equations, in 'Complex functional equations' (Mekrijärvi, 2000). Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. **5** (2003), 21–50.

[13] Gundersen, G. G. and W. K. Hayman, The strength of Cartan's version of Nevanlinna theory. Bull. London Math. Soc. (to appear).

[14] Gundersen, G. G. and K. Tohge, Entire and meromorphic solutions of $f^5+g^5+h^5 = 1$. Univ. Joensuu Dept. Math. Report series (to appear).

[15] Hayman, W. K., Meromorphic functions. Oxford Clarendon Press, 1964.

[16] Hayman, W. K., Research problems in function theory. Athlone press of University of London. 1967.

[17] Hayman, W. K., Waring's Problem für analytische funktionen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. kl. Sitzungsber (1985), 1–13.

[18] Hille, I., Ordinary differential equation in the complex domain. Wiley and Sons, New York–London–Sydney–Toronto, 1976.

[19] Ishizaki, K., A note on the functional equation $f^n + g^n + h^n = 1$ and some complex differential equations. Comput. Methods Funct. Theory **2** (2002), 67–85.

[20] Iyer, G., On certain functional equations. J. Indian Math. Soc. 3 (1939), 312–315.

[21] Jank, G. and L. Volkmann, Meromorphe Functionen und Differentialgeichungen. Birkhäuser-Verlag, Besel–Boston–Stuttgart, 1985.

[22] Laine, I., Nevanlinna theory and complex differential equations. W. Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[23] Lang, S., Introduction to complex hyperbolic spaces. Springer-Verlag, New York, 1987.

[24] Nevanlinna, R., Zur Theorie der meromorphen Funktionen. Acta Math. **46**(1925), 1–99.

[25] Nevanlinna, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions Méromorphes. Gauthier-Villars, Paris 1929.

[26] B. Reznick, Patterns of dependence among powers of polynomials. Algorithmic and quantitative real algebraic geometry, DIMACS: Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 60, 101–121, Amer. Math. Soc., 2003.

[27] Ru, M., Nevanlinna theory and its relation to Diophantine approximation. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

[28] Newman, D., Slater, M., Waring's problem for the ring of polynomials. J. Number Theory 11(1979), 477–487.

[29] Saleeby, E. G., Entire and meromorphic solutions of Fermat type partial differential equations. Analysis **19** (1999), 369–376.

[30] Shirosaki, M., Hyperbolic hypersurfaces in the complex projective spaces of low dimensions. Kodai Math. J. **23** (2000), 224–233.

[31] Tohge, K., Logarithmic derivatives of meromorphic or algebroid solutions of some homogeneous linear differential equations. Analysis, **19** (1999), 273–297.

[32] Tohge, K., On meromorphic solutions of linear differential equations with at least one transcendental coefficient. Proceedings of the Second ISAAC Congress, Kluwer Academic Publishers. Vol.1, 399–411, 2000.

[33] Tohge, K., On meromorphic functions satisfying Fermat type functional equations — Examples and their value distributions. Preprint.

[34] Tohge, K., On Gundersen's solution of the Fermat-type functional equation of degree 6. Preprint.

[35] Toda, N., On the functional equation $\sum_{i=0}^{p} a_i f_i^{n_i}$. Tohoku, Math. J. 23 (1971), 289–299.

強擬凸 CR 構造と正規孤立特異点の変形

宮嶋公夫（鹿児島大学理学部）

序

0.1. **強擬凸 CR 構造と正規孤立特異点.** CR 構造の誕生は『多変数解析関数の世界では Riemann 写像定理は成り立たない』ということの認識にまで遡る. $\mathbb{C}^2$ 内の有界領域の双正則分類をその境界に着目して行うという H. Poincaré のアイデアに導かれて, $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ の有界領域の可微分境界上に現れる Cauchy-Riemann 構造を CR 構造と呼ぶ. 抽象的な CR 構造は, 境界上の Cauchy-Riemann 構造の抽象化で, 次のように定義される.

定義 0.1. 可微分多様体 M 上の CR 構造とは, 次の性質を持つ可積分部分束 $T^{0,1}M \subset \mathbb{C}TM$ のことを言う.

(i) $\overline{T_p^{0,1}M} \cap T_p^{0,1}M = \{0\}$ $(p \in M)$,
(ii) $\mathrm{rank}\ \mathbb{C}TM/\big(\overline{T^{0,1}M} \oplus T^{0,1}M\big) = 1$,

有界領域の擬凸性の一般化として, Levi-形式[1]が各点で定符号である CR 構造を強擬凸 CR 構造という. (抽象的に定義された) CR 構造は必ずしも有界領域の境界構造になるとは限らないが, 次の事実は, 埋め込み可能強擬凸 CR 構造は孤立特異点の境界構造と捉えるのが自然であるということを示している.

定理 0.2 (F. Harvey-H. Lawson, H. Rossi, S. S.-T. Yau). 複素ユークリッド空間に埋め込まれた強擬凸 *CR* 多様体[2]は孤立特異点の境界として実現される.

更に, 孤立特異点の正規化を取ることにより, 強擬凸 CR 多様体を境界とする正規孤立特異点は一意に定まるので, 埋め込み可能強擬凸 CR 多様体と正規孤立特異点は同値な概念であるということになる. この

---

[1] CR 構造に対して,

$$\mathcal{L}_p(X, \overline{Y}) := -\sqrt{-1}[\tilde{X}, \overline{\tilde{Y}}](p) \mod T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M,$$
$$\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(M, T^{1,0}M) \text{ s.t. } \tilde{X}(p) = X, \tilde{Y}(p) = Y$$

で決まる $T_p^{1,0}M$ 上のエルミート形式 $\mathcal{L}_p$ を Levi-形式とよぶ.

[2] 複素ユークリッド空間内に埋め込み可能な CR 構造を埋め込み可能な CR 構造と呼ぶ.

ことに基づけば，正規孤立特異点の変形論を埋め込み可能強擬凸 CR 構造の変形によって構成しようというのは自然なアイデアである．

更に，実 5 次元以上の強擬凸 CR 構造は埋め込み可能である（Boutet de Monvel）という事実に基づき，倉西氏は次のプログラムを提起した．

問題 0.3 (M. Kuranishi). 複素 3 次元以上の正規孤立特異点の完備族をその境界上の強擬凸 CR 構造の変形によって構成せよ．

本講演では，倉西氏の問題を特異点の変形への $\bar{\partial}$-理論の応用の一環であると捉え，正規孤立特異点の変形への $\bar{\partial}$-理論を通じたアプローチについてお話したいと思います．

0.2. **完備変形族**. 変形論において，完備族の構成は古典的であるが最も基本的な問題である．コンパクト複素多様体の変形理論は，Teichmüler 理論や楕円曲線・アーベル多様体のモジュライ等の理論を源泉とし，具体的な多様体の構成に基づかない局所モジュライの一般理論として，小平-Spencer によって定式化され，そこで確立された理論はその後現れた種々の対象の変形理論の原型となっている．特に，一般的に局所モジュライ空間は存在するとは限らず，それに代わるものとして次のような完備族が定式化されている；

(i) 全ての微小変形を含んでいる，

(ii) 変形族のパラメータに関する微分は非退化，

ここで，変形族のパラメータに関する微分係数は複素解析的コホモロジー群 $H^1(X, \Theta_X)$ の元として捉えられることも，小平-Spencer 理論の一部である（Θ_X は X 上の正則接ベクトル場の層）．完備族の存在は変形理論の根幹をなすもので，次の存在定理は各種の変形理論の原型をなしている．

定理 0.4 (M. Kuranishi). $H^1(X, \Theta_X)$ の原点の近傍の部分解析空間をパラメータ空間とする完備族が常に存在する．

定理 0.5 (K. Kodaira-D. C. Spencer). $H^2(X, \Theta_X) = 0$ ならば，完備族のパラメータ空間は $H^1(X, \Theta_X)$ の原点の近傍となる．

コンパクト複素多様体の変形理論をモデルとして，孤立特異点芽の変形論は次のように確立されている．V を $0 \in V$ 以外には特異点を持たない複素解析空間とする．V の変形とは，パラメータ空間への平坦正則写像 $\pi : \mathcal{V} \to T$ *s.t.* $\pi^{-1}(0) = V$ によって与えられる解析空間芽の parametrization $\mathcal{V} = \left\{V_t := \pi^{-1}(t)\right\}_{t \in T}$ のことである．孤立特異点芽 V の無限小変形空間は $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_V, \mathcal{O}_V)$ で表現され，次のような完備族の存在定理が証明されている．

定理 0.6 (H. Grauert). $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_V, \mathcal{O}_V)$ の原点の近傍の部分解析空間をパラメータ空間とする完備族 が常に存在する．

定理 0.7 (G. N. Tjurina). $\mathrm{Ext}^2(\Omega^1_V, \mathcal{O}_V) = 0$ ならば，完備族のパラメータ空間は $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_V, \mathcal{O}_V)$ の原点の近傍となる．

コンパクト複素多様体の場合の完備族の構成には，

- 複素多様体を複素解析的局所座標系によって定まるものと捉える解析的連接層の手法に基づいた構成法（[G], [D]）と，
- 可微分多様体上の複素構造によって定まるものと捉える $\bar{\partial}$-方程式の手法に基づいた構成法 （[K-N-S], [K1], [K2]）がある．

これらは，完備族の存在に関する２通りの証明法ということに止まらず，前者は代数幾何的モジュライ空間の扱いに則した構成法，後者は微分幾何的モジュライ空間の扱いに沿った構成法という特徴をもっている．従って，これら２つの構成を整備することは両者を結び付ける位置にある複素解析学からの寄与として当然必要なことと考えられる．本講演では，解析的連接層の手法に基づいた取り扱いしかされてこなかった孤立特異点の変形において，小平-Spencer-倉西 $\bar{\partial}$-変形理論を確立することについてお話ししたいと思います．

1. $\bar{\partial}$-変形論のモデル

1.1. コンパクト複素構造の変形（$\bar{\partial}$-変形理論の原型）． この小節では，$\bar{\partial}$-変形理論のモデルとして，コンパクト複素多様体の完備変形族構成を概観する．複素多様体 X の複素構造 $T^{0,1}X$ の微小変位は，可積分条件 (1) を満たす $\phi \in A^{0,1}_X(T^{1,0}X)$ によって ${}^{\phi}T^{0,1} = \{\bar{v} - \phi(\bar{v}) \mid \bar{v} \in T^{0,1}X\}$ と表される．

$$\bar{\partial}\phi - \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0 \tag{1}$$

したがって，複素構造の局所モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} = \left\{\phi \in A^{0,1}_X(T^{1,0}X) \mid \text{(i)}||\phi||_k < \epsilon, \text{(ii)}\bar{\partial}\phi - \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0\right\}/\mathrm{Diff}(X)$$

と，軌道空間として表現されるが，一般的にはこれに（自然な）複素解析的構造が入ることは望めない．

$$\mathcal{K} := \left\{\phi \in A^{0,1}_X(T^{1,0}X) \mid \text{(i)}||\phi||_k < \epsilon, \text{(ii)}\bar{\partial}\phi - \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0, \text{(iii)}\bar{\partial}^*\phi = 0\right\}$$

を倉西スライスと呼ぶが，X がコンパクトの場合，これは次のような性質を持っている．

(A) $T_0\mathcal{K} \simeq T_0\mathcal{M}$ であり，$\mathcal{K}$ は $H^1(X, T^{1,0}X)$ の原点の近傍内の複素解析空間として実現される．

(B) $\mathcal{K}$ は 0 に近い軌道を全て含んでいる．

注意 1.1. $\mathcal{K}$ は軌道を分離しているわけではないが，接空間レベルでは分離している．(A) がそのことを意味している．

$\mathcal{K}$ によってパラメトライズされる複素多様体の変形族は X の完備族を与えており，倉西族と呼ばれる．代数幾何的に構成された完備族と比較するためにはこの性質は欠かせない．この点を強調して，(B) の代わりに，次の性質をあげる場合もある．

(B') 任意の変形族は $\mathcal{K}$ で parametrize された変形族から parameter の取り替えにより得られる．

以後，我々は (A), (B') の性質を持つスライスの構成を問題にする．

ここで，($\bar{\partial}$-変形理論の議論の原型として) $\mathcal{K}$ を構成する倉西 method と小平-Spencer method を概観しておく．いずれの method においても，コンパクト複素多様体上の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$ に関する Hodge-小平分解

$$u = \rho u + (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})Gu,\ u \in A_X^{0,q}(\mathcal{E}) \tag{2}$$

を伴った $\bar{\partial}$-方程式の解作用素 $\bar{\partial}^*G$ が基本的な役割を果たす．

$$\begin{cases} \bar{\partial}^*\phi = 0, \\ \bar{\partial}\phi - \frac{1}{2}[\phi,\phi] = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a) & \bar{\partial}^*\phi = 0, \\ (b) & \phi - \frac{1}{2}\bar{\partial}^*G[\phi,\phi] \in H^{0,1}(T^{1,0}X), \\ (c) & \bar{\partial}^*\bar{\partial}G[\phi,\phi] = 0, \\ (d) & \rho[\phi,\phi] = 0 \end{cases}$$

となるが，(b) の解を $H^{0,1}(T^{1,0}X)$ の原点の近傍でパラメトライズしておけば，(b)+(d)$\Longrightarrow$(a)+(c) が成り立つので，主要な部分は (b) を解くことになる．

［(b) の解の構成］

- （倉西 method）

$$F(\phi) = \phi - \frac{1}{2}\bar{\partial}^*G[\phi,\phi]$$

で定義される 0 のまわりの局所正則写像 $F : A_X^{0,1}(T^{1,0}X) \to A_X^{0,1}(T^{1,0}X)$ を考える．Banach 逆写像定理を適用して得られる複素解析写像 F^{-1} により，(b) の解は $\phi(t) = F^{-1}(t)$ ($t \in H^{0,1}(T^{1,0}X)$ の 0 の近傍) で与えられる．

- （小平-Spencer method）$\phi_1, \ldots, \phi_d$ を $H^{0,1}(T^{1,0}X)$ の基底とし，

$$\phi_1(t) = \sum_{\sigma=1}^{d} \phi_\sigma t_\sigma,$$

$$\phi_\mu(t) = \frac{1}{2}\bar{\partial}^*G[\phi^{(\mu-1)}(t), \phi^{(\mu-1)}(t)] \text{ の } \mu \text{ 次の項}$$

として，$\phi_\mu(t)$ を帰納的に定める．但し，$\phi^{(\mu-1)}(t) = \sum_{\nu=1}^{\mu-1}\phi_\nu(t)$ と記している．このとき，

$$||\phi_\mu||_k(t) << C\left(||\phi^{(\mu-1)}||_k(t)\right)^2$$

が成り立ち，$\sum_{\mu=1}^{\infty}\phi_\mu(t)$ の収束性が示される．

いずれの method においても，$\bar\partial$-方程式の標準解に関する次の評価が鍵を握る役割を果たしている．

$$||\bar\partial^* Gu||_k \le C||u||_{k-1} \tag{3}$$

1.2. **CR 構造の変形.** $\bar\partial$-解析から孤立特異点の変形のアプローチにおいては，非コンパクト複素構造の変形や CR 構造の変形を扱うことになる． その際に現れる解析的困難を明らかにするために，モデルとして CR 構造の変形の場合にスライス構成の議論を行ってみる．

$T^{0,1}M$ を M 上の強擬凸 CR 構造とする．以後，$T^{1,0}M := \overline{T^{0,1}M}$ とし，可微分部分直線束 $\mathbb{C}TM \supset \mathbb{C}F$ $\left(\simeq \mathbb{C}TM/\left(\overline{T^{0,1}M} \oplus T^{0,1}M\right)\right)$ を固定して，それによる束分解

$$\mathbb{C}TM = \mathbb{C}F \oplus T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

を固定する．

CR 構造 $T^{0,1}M$ の微小変位は，可積分条件 (4) を満たす $\phi \in A^{0,1}_M(T')$ によって ${}^{\phi}T^{0,1} = \left\{\overline{v} - \phi(\overline{v}) \mid \overline{v} \in T^{0,1}M\right\}$ と表される．但し，$T' := \mathbb{C}F \oplus T^{1,0}M$ と記している．

$$\bar\partial_b\phi - \frac{1}{2}\rho'[\phi,\phi] + R(\phi) = 0 \tag{4}$$

ここで，ρ' は T' への射影，$R(\phi)$ は ϕ に関して 2 次と 3 次の項からなっており微分の階数は 0 である．CR 構造の局所モジュライ空間は

$$\left\{\phi \in A^{0,1}_M(T') \mid \text{(i)}||\phi||_k < \epsilon, \text{(ii)}\bar\partial_b\phi - \frac{1}{2}\rho'[\phi,\phi] + R(\phi) = 0\right\}/\mathrm{Diff}(M)$$

であるが，${}^{\phi}T^{0,1}$ と ${}^{\phi'}T^{0,1}$ とが同じ特異点の境界になることは必ずしもそれらが CR 同値であることを意味しないので，特異点の変形という観点からは，この局所モジュライ空間は適切ではなく，次のような弱い同値関係[3]が用いられている． （これを wiggle の意味での同値と呼ぶことにする.）

$${}^{\phi}T^{0,1} \sim {}^{\phi'}T^{0,1} \Leftrightarrow {}^{\phi}T^{0,1} \text{ と } {}^{\phi'}T^{0,1} \text{ は (1,1) 凸凹多様体への}$$
$$\text{実超曲面としての埋め込みから得られる．}$$

$$\mathcal{M} = \left\{\phi \in A^{0,1}_M(T') \mid \text{(i)}||\phi||_k < \epsilon, \text{(ii)}\bar\partial_b\phi - \frac{1}{2}\rho'[\phi,\phi] + R(\phi) = 0\right\}/\sim$$

とすると，

$$T_0\mathcal{M} = \left\{\phi \in A^{0,1}_M(T') \mid \bar\partial_b\phi = 0\right\}/\bar\partial_b A^0_M(T') \simeq H^{0,1}(M,T').$$

[3]これが同値関係をなしているかどうかは証明されていないので，${}^{\phi}T^{0,1} \sim {}^{\phi_1}T^{0,1} \sim \cdots \sim {}^{\phi'}T^{0,1}$ のときに同値であるとする同値関係を採用しておく．

ここで，$\dim_{\mathbf{R}} M \geq 5$ とすると，強擬凸 CR 多様体上の正則ベクトル束 $\mathcal{E}$ に対しては $1 \leq q \leq n-2$ の範囲で Hodge-小平分解[4]

$$u = \rho_b u + (\bar\partial_b \bar\partial_b^* + \bar\partial_b^* \bar\partial_b) N_b u, \ u \in A_M^{0,q}(\mathcal{E}) \tag{5}$$

が成り立つので，1.1 節のコンパクト複素多様体の場合の議論を形式的に適用できて

$$\mathcal{K} = \left\{\phi \in A_M^{0,1}(T') \,|\, (\mathrm{i})||\phi||_k < \epsilon, (\mathrm{ii})\bar\partial_b\phi - \frac{1}{2}\rho'[\phi,\, \phi] + R(\phi) = 0, (\mathrm{iii})\bar\partial_b^*\phi = 0\right\}$$

が完備族に対応すべきスライスとなる．これが形式変形レベルで (A), (B') の性質を持つことは (5) に基づいて示されるが，収束性の議論のためには $\bar\partial_b$-方程式の標準解に関する Soblev norm-評価 [5]

$$||\bar\partial_b^* N_b u||_k \leq C||u||_{k-1/2} \tag{6}$$

では不十分である．

倉西氏と赤堀氏の先駆的な貢献は，この困難の克服に集中している．(Cf. [K3], [A1], [A-G-L])

2. 正規孤立特異点の変形への $\bar\partial$-理論からのアプローチ

さて，本来の問題である正規孤立特異点の変形への $\bar\partial$-理論を通じてのアプローチへ戻ろう．

V を 2 次元以上の正規解析空間で $0 \in V$ のみに特異点をもっていると仮定する[5]．このとき，V は次の 3 つの多様体それぞれから一意に定まるから，それらの変形から V の変形へのアプローチが可能である．(I) 境界 ∂V 上の CR 構造，(II) 非特異部分 $U := V \setminus \{0\}$，(III) 特異点解消 $\widetilde{V}$．

(I), (II), (III) に現れる複素構造や CR 構造は正規孤立特異点を一意に定めるが，それらの変形族同士の対応は単純ではない．その様子は次の図式に現れている．($\widetilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ はそれぞれ $\widetilde{V}$, V, U の変形族を表す．)

$$\begin{array}{ccc}
H^0(\widetilde{\mathcal{V}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{V}}}) & \xrightarrow{r_{\widetilde{\mathcal{V}}}} & H^0(\widetilde{V}, \mathcal{O}_{\widetilde{V}}) \\
 & & \uparrow = \\
H^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}) & \xrightarrow{\text{surjective}} & H^0(V, \mathcal{O}_V) \\
 & & \downarrow = \\
H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{r_U} & H^0(U, \mathcal{O}_U)
\end{array}$$

$\mathcal{U}$ の穴埋めをして $\mathcal{V}$ が得られるとすれば準同型 $H^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ が，$\widetilde{\mathcal{V}}$ を blowing down して $\mathcal{V}$ が得られるとすれば準同型 $H^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}) \to$

[4]Follnd Folland, G. B. and Kohn, J. J., "The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex", Ann. of Math. Studies 75, Princeton Univ. Press, 1972.

[5]複素 1 次元正規解析空間は非特異なので $\dim_{\mathbf{C}} V \geq 2$ と仮定している．

$H^0(\widetilde{\mathcal{V}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{V}}})$ が存在する筈だが，一般的にはそのようなことは期待できないことが次の例で示されている．

例 2.1 (R. O. Buchweitz-J. J. Millson, O. Riemenschneider). (1) U の変形で V の変形へ穴埋めできないものがある．(これは，M 上の CR 構造の変形で V の変形の境界として実現できない例でもある．)
(2) $\widetilde{V}$ の変形で V の変形へ blowing down できないものがある．
(3) 逆に，V の変形を同時特異点解消して $\widetilde{V}$ の変形を得ることができるとは限らない．

命題 2.2. (1) $r_{\widetilde{V}}$ が全射 $\Longleftrightarrow$ 写像 $H^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}) \to H^0(\widetilde{\mathcal{V}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{V}}})$ が存在する．
(2) r_U が全射 $\Longleftrightarrow$ 写像 $H^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ が存在する．

Proof. ($\Leftarrow$) 自明．($\Rightarrow$) (1) は [R]. (2) は [F] の議論の改良． □

この命題に基づけば，次のような特殊な変形のみを考察の対象とすることの妥当性が了解されるであろう．

定義 2.3. 複素解析空間の変形族 $\pi : \mathcal{X} \to T$ が安定変形族であるとは，制限写像

$$H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to H^0(X, \mathcal{O}_X)$$

が全射になるときを言う．CR 構造の変形にも同じ用語を使う．

次に示すように，変形族の安定性は $\mathbb{C}^N$ への（埋め込み）写像の安定性と同値である．

命題 2.4. $f : X \to D \subset \mathbb{C}^N$ を複素解析空間からの正則写像とし，$H^0(D, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_X)$ は全射であると仮定する．このとき，変形族 $\pi : \mathcal{X} \to T$ が安定変形族 $\Leftrightarrow$ f の拡張 $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}^N \times T$ が存在する．

また，CR 構造の変形においても，埋め込み安定性が正規孤立特異点の変形に対応していることは次の定理に現れている．

定理 2.5 ([B-E]). 形式変形レベルで，M 上の埋め込み安定な CR 構造の変形族は V の変形族に対応する．

これらのことに基づいて，上記 (I), (II), (III) のそれぞれの場合に，CR 構造や複素構造の安定変形を通して V の変形へのアプローチを行うことにする．

3. 安定変形の完備族

前節に挙げた (I), (II), (III) のそれぞれの場合に，次の存在定理が証明される．

定理 3.1 ([M2], [M5], [M4], [M6]). 安定変形の完備族が存在する．更に，*(I), (II)* の場合には，それらを穴埋めして V の完備変形族が得られる．

次節以降で，前半の証明の概略を説明する．後半については，無限小変形レベルでそのことを示しているコホモロジー群の間の同型を指摘するに留めておく．

命題 3.2.

$$\begin{aligned}(7)\quad \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_V, \mathcal{O}_V) &\simeq \mathrm{Ker}\left\{H^1(U, \Theta_U) \to H^1(U, \Theta_{\mathbb{C}^N|U})\right\} \\ &\simeq \mathrm{Ker}\left\{H^1(M, T') \to H^1(M, T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M})\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\quad \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_V, \mathcal{O}_V) &\simeq \mathrm{Ker}\left\{H^1(U, N_{U/\mathbb{C}^N}) \to H^1(U, \mathcal{O}^m_U)\right\} \\ &\simeq \mathrm{Ker}\left\{H^1(M, N_{U/\mathbb{C}^N|M}) \to H^1(M, 1^m_M)\right\}\end{aligned}$$

ここで，$N_{U/\mathbb{C}^N}$ は $\mathbb{C}^N$ 内での U の法束を表す．

4. (I) CR 構造の安定変形の完備族構成 ([M2])

定理 3.1 前半の証明は，形式的には (I)~(III) で平行した議論が可能なので，そのモデルとして (I) の場合について，この節で証明の概略を説明する． V を $\mathbb{C}^N$ の原点の近傍での既約 $n(\geq 2)$ 次元正規部分空間とし，$0 \in V$ のみに特異点を持つとする． $r = \left(\sum_{\beta=1}^N |w^\beta|^2\right)_{|V}$, $M = \{r = c\} \cap V$ とし， $f : M \to \mathbb{C}^N$ を自然埋め込みとする．強擬凸 CR 多様体である M 上では，次のような $\bar\partial_b$-解析が確立されている．$\mathcal{E}$ をある特異点解消 $\widetilde{V}$ 上の正則ベクトル束とすると，Hodge-小平分解

$$(9)\qquad u = \rho_b u + (\bar\partial_b\bar\partial_b^* + \bar\partial_b^*\bar\partial_b)N_b u,\ u \in A^{0,1}_M(\mathcal{E}_{|M})$$

が成り立つ[6]．また，$\bar\partial_b$-方程式の標準解に関する次の評価が成り立つ[7]．Folland-Stein norm $||u||_{(k)}$ に関して，

$$(10)\qquad ||\bar\partial_b^* N_b u||_{(k)} \leq C||u||_{(k-1)}.$$

[6] $n \geq 3$ では $\mathcal{E}_{|M}$ は M 上の正則ベクトル束で十分であるが，$n = 2$ では $\widetilde{V}$ 上の正則ベクトル束であることが肝要である．(Cf. [M1])

[7] Folland, G. B. and Stein, E. M., Estimates for the $\bar\partial_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, Comm. Pur Appl. Math. **27** (1974), 429–522. Beals, R. and Greiner P., "Calculus on Heisenberg manifolds", Ann. of Math. Studies 119, Princeton Univ. Press, 1988.

4.1. **安定変形の複素解析**（[M2], [M1]）. 安定変形に対して，完備変形族に対応したスライス構成のために，3節に現れた安定変形に現れるコホモロジー群を微分複体のコホモロジー群として表現しておく. $K_M^{\bullet,\bullet}$ を，正則ベクトル束の列

$$0 \longrightarrow T' \xrightarrow{F} T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M} \xrightarrow{H} 1_M^{\oplus m} \longrightarrow 0 \tag{11}$$

から得られる次のような2重（微分）複体とする. 但し，$F = \rho^{1,0} \circ df$（$\rho^{1,0}$ は (1,0)-部分への射影），$H(v) = (v(h_1), \ldots, v(h_m))$ ($v \in T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M}$) としている.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & H^0(M, T^{1.0}\mathbb{C}^N_{|M}) & \xrightarrow{H} & H^0(M, 1_M)^m & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\
0 & \longrightarrow & K_M^{0,0} := A_M^0(T') & \xrightarrow{F} & A_M^0(T^{1.0}\mathbb{C}^N_{|M}) & \xrightarrow{H} & (A_M^0)^{\oplus m} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \\
0 & \longrightarrow & A_M^{0.1}(T') & \xrightarrow{F} & A_M^{0,1}(T^{1.0}\mathbb{C}^N_{|M}) & \xrightarrow{H} & (A_M^{0.1})^{\oplus m} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \\
0 & \longrightarrow & A_M^{0.2}(T') & \xrightarrow{F} & A_M^{0.2}(T^{1.0}\mathbb{C}^N_{|M}) & \xrightarrow{H} & (A_M^{0.2})^{\oplus m} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\partial_b} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

命題 4.1. (1) $H^1(K_M^{\bullet,\bullet}) \simeq \mathrm{Ker}\left\{H^1(M, T') \to H^1(M, T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M})\right\}$,
(2) $H^2(K_M^{\bullet,\bullet}) \simeq \mathrm{Ker}\left\{H^1(M, N_{U/\mathbb{C}^N|M}) \to H^1(M, 1_M^m)\right\}$.

$(K_M^\bullet, d_M)$ を2重複体 $K_M^{\bullet,\bullet}$ に付随した単純複体とすると，Hodge-小平分解の役割を果たす作用素が次のように得られる.

命題 4.2. $q = 1, 2$ に対して，次の性質を持つ作用素 $Z_q : K_M^q \to \mathrm{Ker}\, d_M \cap K_M^q$ と $Q_q : \mathrm{Ker}\, d_M \cap K_M^q \to K_M^{q-1}$ が存在する.
(1) $Z_q^2 = Z_q$,
(2) $d_M Q_q d_M = d_M$.

系 4.3. $q = 1, 2$ に対して，次の分解 [8] が成り立つ.

$$u = (1 - d_M Q_q) Z_q u + d_M Q_q Z_q u + (1 - Z_q) u \ (u \in K_M^q).$$

[8] 我々の完備族構成においては，この分解が Hodge-小平分解の役割を果たす.

d_M-方程式の標準解 $Q_q u$ に関しては次の Folland-Stein norm 評価[9]を得る.

命題 4.4. (1) $(a_1, b_0, c_{-1}) = Q_2 Z_2(a_2, b_1, c_0)$ のとき,

$$||a_1||_{(k)} + ||b_0||_{(k+1)} \le C||b_1||_{(k)}.$$

(2) $(a_0, b_{-1}) = Q_1 Z_1(a_1, b_0, c_{-1})$ のとき,

$$||a_0||_{(k+1)} \le C||a_1||_{(k)}.$$

4.2. **完備族の構成（形式的部分）**. 埋め込み安定変形を多様体と埋め込み写像の組の変形と見なせば, 我々の問題の局所モジュライ空間は次のようなものになる.

$$\mathcal{M}_M = \Big\{(\phi,\, g) \in A_M^{0,1}(T') \oplus A_M^0(T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M}) \,|\, (i) ||\phi||_{(k)} + ||g||_{(k+1)} < \epsilon,$$
$$(ii) \big(\bar\partial_b\phi - \frac{1}{2}\rho'[\phi,\, \phi] + R(\phi),\, (\bar\partial_b - \phi)(f+g)\big) = \big(0,\, 0\big)\Big\}/\sim$$

ここで, $(\phi,\, g) \sim (\phi',\, g') \Leftrightarrow$ (wiggle の意味で) ${}^{\phi}T^{0,1} \sim {}^{\phi'}T^{0,1}$ と考えている. このとき,

$$T_{(0,0)}\mathcal{M}_M =$$
$$\Big\{(\phi,\, g) \in A_M^{0,1}(T') \oplus A_M^0(T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M}) \,|\, \big(\bar\partial_b\phi,\, \bar\partial_b g - F\phi\big) = \big(0,\, 0\big)\Big\}$$
$$/\big\{(\bar\partial_b\psi,\, F\psi + \beta) \,|\, \psi \in A_M^0(T'),\, \beta \in H^0(M, T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M})\big\}$$
$$\simeq \mathrm{Ker}\,\big\{H^1(M,\, T') \to H^1(M,\, T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M})\big\}$$

なので, 任意に取った補空間 $C^1 = \big(A_M^{0,1}(T') \oplus A_M^0(T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M})\big) \ominus d_M\big(A_M^{0,1}(T') \oplus H^0(M,\, T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M})\big)$ [10]に対して, 完備変形族に対応すべきスライスが次のように得られる.

$$\mathcal{K}_M = \Big\{(\phi,\, g) \in C^1 \,|\, (i) ||\phi||_{(k)} + ||g||_{(k+1)} < \epsilon,$$
$$(ii) \big(\bar\partial_b\phi - \frac{1}{2}\rho'[\phi,\, \phi] + R(\phi),\, (\bar\partial_b - \phi)(f+g)\big) = \big(0,\, 0\big)\Big\} \tag{13}$$

---

[9] Sobolev norm に関する評価は, 次のようなものになる.

$$||a_1||_k + ||b_0||_{k+1} \le C||b_1||_{k+1/2},\ ||a_0||_{k+1} \le C||a_1||_{k+1/2}. \tag{12}$$

[10] $d_M(\psi,\, \beta) = (\bar\partial_b\psi,\, \beta + F\psi)$ である.

4.3. **完備族の構成（収束性の証明）**. 以下に、小平-Spencer method による $\mathcal{K}_M$ の構成について説明する． それには，4.1 節で得られた 2 重複体 $K_M^{\bullet;\bullet}$ を利用する [11]．$\{(\phi_\sigma,\, g_\sigma,\, k_\sigma)\}_{1\le\sigma\le d}$ を $H^1(K_M^{\bullet;\bullet})$ の基底とし，

$$(\phi_1(t),\, g_1(t),\, k_1(t)) = \sum_{\sigma=1}^{d}(\phi_\sigma,\, g_\sigma,\, k_\sigma)t_\sigma,$$

$\mu \geq 2$ に対しては，

$$\begin{aligned}(14)\quad &(\phi_\mu(t),\, g_\mu(t),\, k_\mu(t)) = \\ &\quad Q_2Z_2\Bigg(\frac{1}{2}\rho'[\phi^{(\mu-1)}(t),\phi^{(\mu-1)}(t)] - R(\phi^{(\mu-1)}(t)),\\ &\qquad\qquad \phi^{(\mu-1)}(t)(g^{(\mu-1)}(t)),\\ &\qquad\qquad -(h+\widetilde{k}^{(\mu-1)}(t))\circ(f+g^{(\mu-1)}(t))\Bigg) \text{ の } \mu \text{ 次の項}\end{aligned}$$

と帰納的に定義する．ここで，$\widetilde{k}^{(\mu-1)}(t) \in \left(H^0(B_c,\, \mathcal{O}_{\mathbf{C}^N}) \cap C^\infty(\overline{B_c})\right)[t_1,\ldots,t_d]$ s.t. $\widetilde{k}^{(\mu-1)}(t)_{|M} = k^{(\mu-1)}(t)$ で，$\widetilde{k}^{(\mu-1)}(t)\circ(f+g^{(\mu-1)}(t))$ は f を中心とする $g^{(\mu-1)}(t)$ に関する Taylor 級数の意味である．

収束性の議論には，方程式

$$(15)\qquad d_M(\phi,\, g,\, k) = (\theta,\, \xi,\, \chi)$$

の標準解

$$(\phi,\, g,\, k) = Q_2Z_2(\theta,\, \xi,\, \chi)$$

の ϕ と g に対する評価が問題になる．Sobolev-norm による評価 (12) は不十分だが，もし (14) の構成を

$$(16)\qquad \phi^{(\mu-1)}(t) \in A_M^{0,1}(T^{1,0}M)[t_1,\ldots,t_d]$$

という付加的条件付きで行うことができれば，(10) を利用した評価を使うことが出来るので

$$\begin{aligned}||\phi_\mu||_{(k)}(t) + ||g_\mu||_{(k+1)}(t) &<< C_1||\phi^{(\mu-1)}(t)(g^{\mu-1}(t))||_{(k)}\\ &<< C_2||\phi^{(\mu-1)}||_{(k)}(t)||g^{(\mu-1)}||_{(k+1)}(t)\end{aligned}$$

[11](13) の形と比べると，2 重複体 $K_M^{\bullet;\bullet}$ には余分な項 $K_M^{2;\bullet}$ が含まれているように見える．これは $\mathcal{K}_M$ の記述を V の変形論と正確に一致させるために使われている．(3 節参照.)

が成り立ち，収束性の議論が成立する．このために，(16) が成立するように方程式 (15) の標準解を修正する必要が生じる．それは次の命題の形で示される[12]．

命題 4.5. $\widetilde{T}^{1,0}\mathbb{C}^N := \{v \in T^{1,0}\mathbb{C}^N \mid v(r) = 0\}$ とする．命題 *4.2, 4.4* と同じ性質をもち，次の性質を持つような作用素 $Z_2 : K_M^2 \to \mathrm{Ker}\ d_M \cap K_M^2$ と $Q_2 : \mathrm{Ker}\ d_M \cap K_M^2 \to K_M^1$ が存在する．

$(a_1, b_0, c_{-1}) = Q_2 Z_2(a_2, b_1, c_0)$ のとき，

$$b_1 \in A_M^{0,1}(\widetilde{T}^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M}) \Rightarrow a_1 \in A_M^{0,1}(T^{1,0}M),\ b_0 \in A_M^0(\widetilde{T}^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M}).$$

命題 4.6. *(14)* による構成アルゴリズムでは，

$\phi^{(\mu-1)}(t)(g^{(\mu-1)}(t))$ の μ次の項 $\in A_M^{0,1}(\widetilde{T}^{1,0}\mathbb{C}^N_{|M})[t_1, \ldots, t_d]$ $(\mu = 2, 3, \ldots)$

が成立している．

5. (II) U の安定変形，(III) $\widetilde{V}$ の安定変形

5.1. U **の安定変形**（[M5]）．$\Omega := \{a < r < b\} \cap V$ として，$\overline{\Omega}$ の近傍芽上の複素構造の安定変形を扱う．$f : U \to \mathbb{C}^N$ を自然埋め込みとする．(11) の代わりに列

$$0 \longrightarrow T^{1,0}U \xrightarrow{df} T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|U} \xrightarrow{H} 1_U^{\oplus m} \longrightarrow 0$$

から得られる 2 重複体を $K_U^{\bullet,\bullet}$ とする．局所モジュライ空間[13]

$$\mathcal{M}_U = \Big\{(\phi, g) \in A_{\Omega}^{0,1}(T^{1,0}U) \oplus A_{\Omega}^0(T^{1,0}\mathbb{C}^N_{|U}) \,\Big|\, (i)||\phi||_k + ||g||'_k < \epsilon,$$
$$(ii)\big(\bar\partial\phi - \frac{1}{2}[\phi, \phi], (\bar\partial - \phi)(f + g)\big) = (0, 0)\Big\}/\sim$$

に対して，完備変形族に対応するスライスの形式的構成は (I) と平行した議論が可能である．収束性を保証する部分の議論では，U 上の複素構造は $\mathbb{C}^N$ への埋め込みから一意に定まることと $\partial\Omega$ の強擬凸性より，(14) に平行した構成アルゴリズムでは $\phi_\mu(t)$ が境界上で $\mathbb{C}T\partial\Omega \cap T^{1,0}\mathbb{C}^N$-値となるように，その境界挙動が controllable であることが示される．そのような形式解に対して，$\bar\partial$-方程式の標準解に関しての次の評価式を利用して，$\sum_\mu \phi_\mu(t)$ と $\sum_\mu g_\mu(t)$ のそれぞれが $|| \ ||_k$-norm と $|| \ ||'_k$-norm に関して収束することが示される．

[12]命題 4.5 の証明のポイントは，M 上の CR 構造は埋め込みから定まるので，$\phi_\mu(t)$ の接ベクトル成分の bad-direction は埋め込みの μ 次の項 $g_\mu(t)$ の調整によって行えるというところにある．

[13]但し，$(\phi, g) \sim (\phi', g') \Leftrightarrow$ ((1,1) 凸凹多様体内での有界領域としての wiggle の意味で) ${}^{\phi}T^{0,1} \sim {}^{\phi'}T^{0,1}$ と考えている．また，安定変形の議論に則した形で g の境界挙動を測定するために，中間的な norm $||g||_k \leq ||g||'_k \leq ||g||_{k+1}$ を採用している．

(γ) ([G-S]) X を U 上のベクトル場で $X_{|\partial\Omega} \in \Gamma(\partial\Omega, T^{1,0}\partial\Omega \oplus T^{0,1}\partial\Omega)$ を満たすものとすると，

$$||X\bar{\partial}^* Nu||_k \leq C_X ||u||_k, \; u \in A^{0,1}_{\overline{\Omega}}.$$

5.2. $\widetilde{V}$ **の安定変形** ([M4], [M6])．例 2.1 に示されたように，
$\widetilde{V}$ の安定変形論は V の変形論に対応するとは限らず，blowing-down を伴った $\widetilde{V}$ の変形論，あるいは特異点解消を伴った V の変形論に対応すると考えられる．

$f : \widetilde{V} \to \mathbb{C}^N$ を V の特異点解消を通じた自然写像とする．$r = \left(\sum_{\beta=1}^N |w^\beta|^2\right) \circ f$，$\Omega = \{r < b\}$ として $\overline{\Omega}$ の近傍芽上の複素構造の安定変形を扱う．(11) の代わりに列

$$0 \longrightarrow T^{1,0}\widetilde{V} \xrightarrow{df} f^*T^{1,0}\mathbb{C}^N \xrightarrow{H} 1^{\oplus m}_{\widetilde{V}} \longrightarrow 0$$

から得られる 2 重複体を $K^{\bullet,\bullet}_{\widetilde{V}}$ とする．ここでも，$K^{\bullet,\bullet}_{\widetilde{V}}$ を利用して局所モジュライ空間[14]

$$\mathcal{M}_{\widetilde{V}} = \Big\{(\phi, g) \in A^{0,1}_{\overline{\Omega}}(T^{1,0}\widetilde{V}) \oplus A^0_{\overline{\Omega}}(f^*T^{1,0}\mathbb{C}^N) \,|\, (i) ||\phi||_k + ||g||'_k < \epsilon,$$
$$(ii)\big(\bar{\partial}\phi - \frac{1}{2}[\phi, \phi], (\bar{\partial} - \phi)(f+g)\big) = (0, 0)\Big\}/\sim$$

に対して，完備変形族に対応すべきスライスを構成する．ここでは，$\widetilde{V}$ 上の複素構造が $\mathbb{C}^N$ への写像から決まるとは言えないので，$K^{\bullet,\bullet}_{\widetilde{V}}$ の解析には $\widetilde{V}$ 内部の複素構造の変形を見込む必要がある．形式的な構成アルゴリズムは (14) に平行して行われるが，収束性を保証する部分の議論では，境界付近では (II) のテクニックを，内部では Gårding 不等式を利用する．

6. 横断的 S^1-作用を持つ強擬凸 CR 構造の場合 ([M3])

横断的 S^1-作用を持つ強擬凸 CR 構造には，以下の (i), (ii) の性質を持つような無限小 CR 自己同型 $\xi \in \Gamma(M, TM)$ が存在し，normal 強擬凸 CR 構造と呼ばれる．一方，横断的 S^1-作用を持つ強擬凸 CR 構造は準斉次特異点の境界構造である ([L-Y])．この節では，横断的 S^1-作用を持つ場合に，CR 構造の安定変形の完備族構成を適用することにより，CR 構造の変形と準斉次特異点の変形の相互作用を形式変形レベルで見てみたい[15]．

---

[14] 但し，$(\phi, g) \sim (\phi', g') \Leftrightarrow$ (強擬凸多様体内での有界領域としての wiggle の意味で) ${}^{\phi}T^{0,1} \sim {}^{\phi'}T^{0,1}$ と考えている．

[15] 特異点の変形を表す方程式の次数が，コンパクト化の変形や同時 blowing down と結びついていることは，代数幾何的特異点の理論においては H. Pinkham や J.

V は重み付き斉次多項式 $h_1(w) = \cdots = h_m(w) = 0$ で定義される $\mathbb{C}^N$ の正規部分空間で 0 のみを特異点に持つものとする．e_β $(\beta = 1, \ldots, N)$ を座標 w^β の重みとする．このとき，$M = V \cap S^{2N-1}$ 上のベクトル場 $\xi := \sqrt{-1}\sum_{\beta=1}^N e_\beta \left(w^\beta \frac{\partial}{\partial w^\beta} - \overline{w^\beta}\frac{\partial}{\partial \overline{w^\beta}}\right)$ は次の性質をもつ．

(i) $\xi \notin T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$,

(ii) $Z \in \Gamma(M, T^{1,0}M) \Longrightarrow [\xi, Z] \in \Gamma(M, T^{1,0}M)$.

このとき，リー微分 L_ξ がテンソル空間に作用し，K_M^q に次数付け $K_M^q = \oplus_{\nu\in\mathbb{Z}} K_{(\nu)}^q$ が導入される．我々の完備族構成をこの分解に則して行うことにより，V の変形空間の次数付けとその意味付けが次のように得られる．(すべて，形式変形レベルで考えている．)

(1) $H^1(K_M^{\bullet;\bullet})$ の固有空間分解 $H^1(K_M^{\bullet;\bullet}) = \oplus H^1(K_M^{\bullet;\bullet})_{(\nu)}$ (有限和) が得られる． $H^1(K_M^{\bullet;\bullet})$ の基底 $\{u_\sigma\}_{1\le\sigma\le d}$ を $u_\sigma \in K_{(\nu_\sigma)}^1$ と選ぶ．パラメータ空間の座標 $(t_1, \ldots, t_d)$ に重み $\deg t_\sigma = -\nu_\sigma$ を導入すると，4 節の完備族 $u(t) = \sum_I u_I t^I \in K_M^1[[t_1, \ldots, t_d]]$ の構成は $\deg(u_I t^I) = 0$ $(\forall I)$ が成り立つように行うことができる．従って，
$H^1(K_M^{\bullet;\bullet})_{(\nu)} = 0$ $(\nu > 0)$ の場合は，完備族を $u(t) \in \left(\oplus_{\nu\le 0} K_{(\nu)}^1\right)[[t_1, \ldots, t_d]]$ となるように構成できる．
$H^1(K_M^{\bullet;\bullet})_{(\nu)} = 0$ $(\nu < 0)$ の場合は，$u(t) \in \left(\oplus_{\nu\ge 0} K_{(\nu)}^1\right)[[t_1, \ldots, t_d]]$,
$H^1(K_M^{\bullet;\bullet})_{(\nu)} = 0$ $(\nu \ne 0)$ の場合は， $u(t) \in K_{(0)}^1[[t_1, \ldots, t_d]]$ である．

CR 構造の安定変形を方程式の変形という側面から見ると，次に示すように，この次数付けは代数幾何における次数付けと対応している．

(2) $(\phi, g, k) \in K_{(\nu)}^1$, $k = (k_1, \ldots, k_m)$ とすると， $k_\rho = \widetilde{k}_{\rho|M}$ $(1 \le \rho \le m)$ である．但し，$\widetilde{k}_\rho$ は $\deg \widetilde{k}_\rho = \deg h_\rho - \nu$ であるような重み付き斉次多項式．($\deg h_\rho - \nu < 0$ の場合は $k_\rho = 0$.)

さらに，V が代数多様体上の負直線束に付随した S^1-束の場合は，CR 構造の変形に関しては次のような意味付けが得られる．

(3) $(\phi(t), g(t), k(t)) \in \left(\oplus_{\nu\ge 0} K_{(\nu)}^1\right)[[t_1, \ldots, t_d]]$ とすると，CR 構造の変形族は負直線束の ∞-切断の近傍の変形へ拡張される．従って，CR 構造の安定変形族はコンパクト複素解析空間の変形族に埋め込まれる．

(4) $(\phi(t), g(t), k(t)) \in \left(\oplus_{\nu< 0} K_{(\nu)}^1\right)[[t_1, \ldots, t_d]]$ とすると，CR 構造の変形族は負直線束の 0-切断の近傍の変形へ拡張される．しかも，その変形族は V の変形へ blow down される．

Wahl により知られていることであるが，方程式の変形と内部構造の変形の関係を結びつける典型例として挙げてある．

References

[A1] Akahori, T., The new estimate for the subbundles E_j and its application to the deformation of the boundaries of strongly pseudo convex domains, Inv. Math. **63** (1981), 311–334.

[A2] ______, The new Neumann operator associated with deformations of strongly pseudoconvex domains and its application to deformation theory, Inv. Math. **68** (1982), 317–352.

[A-G-L] Akahori, T., Garfield, P. M. and Lee, J. M., Deformation theory of 5-dimensional CR structures and the Rumin complex, Michigan Math. J. **50** (2002), 517–549.

[B-E] Bland, J. and Epstein, C.L., Embeddable CR-structures and deformations of pseudoconvex surfaces. Part I: Formal deformations, J. Alg. Geom. **5** (1996), 277–368.

[D] Douady, A., Le problème des modules locaux pour les espaces $\mathbb{C}$-analytiques compacts, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **7** (1974), 569–602.

[F] Fujiki, A., Flat Stein completion of a flat (1,1)-convex concave map, Unpublished manuscript.

[G] Grauert, H., Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume, Inv. Math. **25** (1974), 107–142.

[G-S] Greiner, P. C. and Stein, E. M., Estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem, Mathematical Notes 19, Princeton Univ. Press, 1977.

[K-N-S] Kodaira, K., Nirenberg, L. and Spencer, D. C., On the existence of deformations of complex analytic structures, Ann. of Math. **68** (1958), 450–459.

[K1] Kuranishi, M., On the locally complete families of complex structures, Ann. of Math. **75** (1962), 536–577.

[K2] ______, "Deformations of compact complex manifolds", Les Press Univ. Montreal, Montréal, 1969.

[K3] ______, Application of $\bar{\partial}_b$ to deformations of isolated singularities, Proc. Sympos. Pure Math. **30** (1977), 97–106.

[L-Y] Lawson, H. B. Jr. and Yau, Stephen S.-T., Holomorphic symmetry, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **20** (1987), 557–577.

[M1] Miyajima, K., A note on the closed rangeness of vector bundle valued tangential Cauchy-Riemann operator, in "Analysis and Geometry in Several Complex Variables (ed. G. Komatsu and M. Kuranishi)", Birkhäuser, 1999, 193–208.

[M2] ______, CR construction of the flat deformations of normal isolated singularities, J. Alg. Geom. **8** (1999), 403–470.

[M3] ______, CR description of the formal deformations of quasi-homogeneous singularities, in "Selected Topics in Cauchy-Riemann Geometry (ed. S. Dragomir)", quaderni di matematica Vol. 9, 2003, 249–280.

[M4] ______, Analytic approach to deformation of resolution of normal isolated singularities: Formal deformations, J. Korean Math. Soc. **40** (2003), 709–725.

[M5] ______, Stably embeddable deformations of complex structures and the flat deformations of normal isolated singularities, Preprint.

[M6] ______, Analytic approach to deformation of resolution of normal isolated singularities: Construction of the versal family, Preprint.

[R] Riemenschneider, O., Bemerkungen zur Deformationstheorie nichtrationaler Singularitäten, manuscripta math. **14** (1974), 91–99.

12. An Application of Gröbner Bases for the Moduli of Hypersurface Simple $K3$ Singularities

Tadashi Takahashi

Department of Mathematics and Informatics
Faculty of Human Development, Kobe University
3-11 Tsurukabuto, Nada-ku, Kobe 657-8501, JAPAN

Abstract

For many classes of singularities there exist normal forms. We know the weights of hypersurface simple $K3$ singularities by nondegenerate polynomials and obtained examples. In this paper, we try to decide the non-degeneracy conditions of unimodular, bimodular and trimodular type simple $K3$ singularities. We show that they are obtained by using Gröbner bases in this paper.

Results

We calculate the non-degeneracy condition of moduli of simple $K3$ singularities by using the above theorem för an each defining equation. We obtain the following results.

For $\#m(f)=1$,

No.	The non-degeneracy conditions
f_{52}	$\lambda^4 - 256 = 0$
f_{56}	$\lambda^3 + 27 = 0$
f_{73}	$\lambda^3 + 27 = 0$

For $\#m(f)=2$,

No.	The non-degeneracy conditions
f_{30}	$3125+16\lambda^5+500\lambda^2\mu-8\lambda^4\mu^2-225\lambda\mu^3+\lambda^3\mu^4+27\mu^5=0$
f_{46}	$(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2)=0$
f_{61}	$(-2+\lambda)(2+\mu)(-8+\lambda^2-4\mu)(8+\lambda^2-4\mu)=0$
f_{65}	$(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2)=0$
f_{80}	$(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2)=0$
f_{84}	$(16-\lambda^2-18\lambda\mu+\lambda^3\mu+27\mu^2)(-16-\lambda^2+18\lambda\mu+\lambda^3\mu+27\mu^2)=0$
f_{86}	$3125-64\lambda^5-2000\lambda^2\mu-128\lambda^4\mu^2-3600\lambda\mu^3-64\lambda^3\mu^4-1728\mu^5=0$
f_{91}	$\mu(27+\lambda^3-36\lambda\mu-\lambda^4\mu+8\lambda^2\mu^2-16\mu^3)=0$

For $\#m(f)=3$, the non-degeneracy conditions are long expressions. Therefore we write them which is not indicated by table.

f_{57} $(a=0)$: $(-2+\lambda)(2+\lambda)(108-108\lambda+27\lambda^2-16\mu^3-144\mu\nu+72\lambda\mu\nu-16\mu^2\nu^2-128\nu^3+64\lambda\nu^3)(108+108\lambda+27\lambda^2-16\mu^3+144\mu\nu+72\lambda\mu\nu-16\mu^2\nu^2+128\nu^3+64\lambda\nu^3)=0.$

f_{57} $(a=0)$: $(-2+\lambda)(2+\lambda)(-8+4\lambda-\mu^2)(8+4\lambda-\mu^2)=0.$

f_{64} $(a=0)$: $(-512+512\lambda^2-128\lambda^4+288\lambda\mu^2-16\lambda^3\mu^2+27\mu^4+768\nu-512\lambda^2\nu+64\lambda^4\nu-144\lambda\mu^2\nu-384\nu^2+128\lambda^2\nu^2+64\nu^3)(512+512\lambda^2+128\lambda^4-288\lambda\mu^2-16\lambda^3\mu^2+27\mu^4+768\nu+512\lambda^2\nu+64\lambda^4\nu-144\lambda\mu^2\nu+384\nu^2+128\lambda^2\nu^2+64\nu^3)=0.$

f_{64} $(a=0)$: $(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2)=0.$

f_{68} : $3125+16\lambda^5+4125\lambda^2\mu+16\lambda^7\mu+888\lambda^4\mu^2+16200\lambda\mu^3+16\lambda^6\mu^3+864\lambda^3\mu^4+11664\mu^5-5625\lambda\nu-16\lambda^6\nu-3420\lambda^3\mu\nu-13500\mu^2\nu-2592\lambda^2\mu^3\nu+2700\lambda^2\nu^2+216\lambda^4\mu\nu^2-5670\lambda\mu^2\nu^2+216\lambda^3\mu^3\nu^2-5832\mu^4\nu^2-216\lambda^3\nu^3+6075\mu\nu^3+729\lambda\mu\nu^4+729\mu^3\nu^4-729\nu^5=0.$

f_{74} : $3125+16\lambda^5+500\lambda^2\mu-8\lambda^4\mu^2-225\lambda\mu^3+\lambda^3\mu^4+27\mu^5-200\lambda^3\nu-5000\mu\nu-16\lambda^5\mu\nu-430\lambda^2\mu^2\nu+8\lambda^4\mu^3\nu+216\lambda\mu^4\nu-\lambda^3\mu^5\nu-27\mu^6\nu+4000\lambda\nu^2+16\lambda^6\nu^2+704\lambda^3\mu\nu^2+1800\mu^2\nu^2-8\lambda^5\mu^2\nu^2-296\lambda^2\mu^3\nu^2+\lambda^4\mu^4\nu^2+36\lambda\mu^5\nu^2-192\lambda^4\nu^3-2560\lambda\mu\nu^3+64\lambda^3\mu^2\nu^3+32\mu^3\nu^3-8\lambda^2\mu^4\nu^3+768\lambda^2\nu^4-128\lambda\mu^2\nu^4+16\mu^4\nu^4-1024\nu^5=0.$

f_{83} : $3125+16\lambda^5-5625\lambda\mu-16\lambda^6\mu+2700\lambda^2\mu^2-216\lambda^3\mu^3-729\mu^5+4125\lambda^2\nu+16\lambda^7\nu-3420\lambda^3\mu\nu+216\lambda^4\mu^2\nu+6075\mu^3\nu+729\lambda\mu^4\nu+888\lambda^4\nu^2-13500\mu\nu^2-5670\lambda\mu^2\nu^2+16200\lambda\nu^3+16\lambda^6\nu^3-2592\lambda^2\mu\nu^3+216\lambda^3\mu^2\nu^3+729\mu^4\nu^3+864\lambda^3\nu^4-5832\mu^2\nu^4+11664\nu^5=0.$

f_{90} : $\mu(-2+\nu)(2+\nu)(64-\lambda^4-96\lambda\mu+\lambda^5\mu+30\lambda^2\mu^2+\lambda^3\mu^3+27\mu^4+8\lambda^2\nu-8\lambda^3\mu\nu+72\mu^2\nu-\lambda^4\mu^2\nu-36\lambda\mu^3\nu-16\nu^2+16\lambda\mu\nu^2+8\lambda^2\mu^2\nu^2-16\mu^2\nu^3)=0.$

f_{92} $(a=0)$: $3125+16\lambda^5-5625\lambda\mu-16\lambda^6\mu+2700\lambda^2\mu^2-216\lambda^3\mu^3-729\mu^5+4125\lambda^2\nu+16\lambda^7\nu-3420\lambda^3\mu\nu+216\lambda^4\mu^2\nu+6075\mu^3\nu+729\lambda\mu^4\nu+888\lambda^4\nu^2-13500\mu\nu^2-5670\lambda\mu^2\nu^2+16200\lambda\nu^3+16\lambda^6\nu^3-2592\lambda^2\mu\nu^3+216\lambda^3\mu^2\nu^3+729\mu^4\nu^3+864\lambda^3\nu^4-5832\mu^2\nu^4+11664\nu^5=0.$

f_{92} $(a=0)$: $(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2)=0.$

13. An Application of Elimination Ideal for a Defining Equation of Singularity

Tadashi Takahashi

Department of Mathematics and Informatics
Faculty of Human Development, Kobe University
3-11 Tsurukabuto, Nada-ku, Kobe 657-8501, JAPAN

Abstract

We can obtain non-degeneracy conditions of singularities by using Gröbner basis. We can treat divisions of polynomials that have parameter coefficients and indeterminate exponents by using pseudo-remainders. In classification of singularities using hierarchy, the defining equations are polynomials with parameter coefficients and indeterminate exponents. In general, the forms of Gröbner bases of ideals generated by such polynomials depend on the values of parameters, and those calculations are not easy. We will see that a stratification problem of coefficients and exponents of a set of polynomials is naturally raised to classify singularities. We will give a partial answer to this problem.

Result

In the elimination theory, one of basic strategy is Elimination Theorem. We can obtain the non-degeneracy condition of singularity by using Gröbner basis. As first technique, for the defining equation with parameter coefficients, we can obtain the non-degeneracy condition of singularity by using Gröbner basis.

We can calculate the Gröbner basis as generic case.

First, we calculate Gröbner basis G_1 of ideal $J_1 = <F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}>$ (in $Q(k)[x, y, z, Y]$) on a field of rational functions $Q(k)$.

Type	Defining equation(Restriction)
$Q_{2,0}$	$x^3+yz^2+ax^2y^2+xy^4 = 0$ $(a^2-4 = 0)$
$Q_{2,p}$	$x^3+yz^2+x^2y^2+ay^{6+p} = 0$ $(p > 0,\ a = 0)$
$S_{1,0}$	$x^2z+yz^2+y^5+azy^3 = 0$ $(a^2-4 = 0)$
$S_{1,p}$	$x^2z+yz^2+x^2y^2+ay^{5+p} = 0$ $(p > 0,\ a = 0)$
$S^{\#}_{1,2q-1}$	$x^2z+yz^2+zy^3+axy^{3+q} = 0$ $(q > 0,\ a = 0)$
$S^{\#}_{1,2q}$	$x^2z+yz^2+zy^3+ax^2y^{2+q} = 0$ $(q > 0,\ a = 0)$
$U_{1,0}$	$x^3+xz^2+xy^3+ay^3 = 0$ $(a(a^2+1) = 0)$
$U_{1,2q-1}$	$x^3+xz^2+xy^3+ay^{1+q}z^2 = 0$ $(q > 0,\ a = 0)$
$U_{1,2q}$	$x^3+xz^2+xy^3+ay^{3+q}z = 0$ $(q > 0,\ a = 0)$

Type	Defining equation(Restriction)
$Q_{k,0}$	$x^3+yz^2+bx^2y^k+xy^{2k} = 0$ $(k > 1,\ b^2-4 = 0)$
$Q_{k,i}$	$x^3+yz^2+x^2y^k+by^{3k+i} = 0$ $(k > 1,\ b = 0)$

Type	Defining equation(Restriction)
$S_{k,0}$	$x^2z+yz^2+y^{4k+1}+axy^{3k+1}+bzy^{2k+1} = 0$ $(b^2-4 = 0)$
$S_{k,i}$	$x^2z+yz^2+x^2y^{2k}+ax^3y^k+by^{4k+1+i} = 0$ $(i > 0,\ b = 0)$
$S^{\#}_{k,2q-1}$	$x^2z+yz^2+zy^{2k+1}+bxy^{3k+q}+ay^{4k+q+1} = 0$ $(q > 0,\ b = 0)$
$S^{\#}_{k,2q}$	$x^2z+yz^2+zy^{2k+1}+bx^2y^{2k+q}+axy^{3k+q+1} = 0$ $(q > 0,\ b = 0)$

Type	Defining equation(Restriction)
$U_{k,2q}$	$x^3+xz^2+xy^{2k+1}+ax^2y^{k+1}+by^{3k+2+q}+czy^{2k+1+q} = 0$ $(q \geq 0,\ c = 0)$
$U_{k,2q-1}$	$x^3+xz^2+xy^{2k+1}+ax^2y^{k+1}+bzy^{2k+1+q}+cz^2y^{k+q} = 0$ $(q > 0,\ c = 0)$

Type	Defining equation(Restriction)
$V_{1,0}$	$x^2y+z^4+az^3y+bz^2y^2+zy^3 = 0$ $(4a^3+27-18ab-a^2b^2+4b^3 = 0)$
$V_{1,p}$	$x^2y+z^4+bz^3y+z^2y^2+ay^{4+p} = 0$ $(a = 0)$
$V^{\#}_{1,2q-1}$	$x^2y+z^3y+ay^2z^2+y^4+bxz^{2+q} = 0$ $(4a^3+27 = 0 \text{ or } b = 0)$
$V^{\#}_{k,2q}$	$x^2y+z^3y+ay^2z^2+y^4+bz^{4+q} = 0$ $(4a^3+27 = 0 \text{ or } b = 0)$

In the case $V_{1,p}$, Arnol'd showed the restriction with $a = 0$ or $(b^2-4) = 0$. This is not right.

14. On a holomorphic curve almost extremal for the defect relation

TODA Nobushige (愛知工業大学客員)

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a don-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\},$$

X a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, and $X(0) = \{\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \in X | a_{n+1} = 0\}$, where $N \geq n$.

Defect Relation I ([1]($N = n$), [3]($N > n$). See [2]).

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curve f with vectors $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, \cdots, q)$ in X satisfying

$$2N - n + 1 - \epsilon < \sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f)$$

for some $0 < \epsilon < 1$ when $N > n$.

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

For $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$, let $\omega : Q \to (0, 1]$ be the Nochka weight function given in [2, p.72] and θ the reciprocal number of the Nochka constant given in [2, p.72]. Then we have the following properties:

Lemma(see [2], Theorem 2.11.4).

(a) $0 < \omega(j)\theta \leq 1$ for all $j \in Q$; (b) $q - 2N + n - 1 = \theta(\sum_{j=1}^{q} \omega(j) - n - 1)$;

(c) $(N + 1)/(n + 1) \leq \theta \leq (2N - n + 1)/(n + 1)$;

(d) If $P \subset Q$ and $0 < \#P \leq N + 1$, then $\sum_{j \in P} \omega(j) \leq d(P)$.

Note. (c) of this lemma can be refined as follows :

$$N/n \leq \theta \leq (2N - n + 1)/(n + 1).$$

We put $P(0) = \{j \in Q \mid \boldsymbol{a}_j \in X(0)\}$.

(c) Further we put $u(z) = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)|$,

$$t(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\log u(re^{i\theta}) - \log u(e^{i\theta})\} d\theta,$$

and $\Omega = \limsup_{r \to \infty} t(r, f)/T(r, f)$([4]).

Defect relation II(see [5]). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$ and $d = \sum_{j \in P(0)} \omega(j)$,
(I) $\sum_{j=1}^{q} \omega(j)\delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq d + 1 + (n-d)\Omega$;
(II) $\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1 - (N/n)(n-d)(1-\Omega)$.

2. Theorem. Suppose that (i) $N > n \geq 2$; (ii) $\Omega < 1$ and that

(iii) there are vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$ $(2N - n + 1 < q < \infty)$ satisfying $\delta(\boldsymbol{a}_j, f) > 0$ and

$$2N - n + 1 - \epsilon < \sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f)$$

for $0 < \epsilon < (1-\Omega)(N-n)/(N-n+1)(n+1)$.

Then,

(a) $\#P(0) = N$.

(b) There is a subset $P \subset Q$ satisfying

$$\#P = N - n + 1, \quad d(P) = 1, \quad P(0) \cap P = \phi$$

and

$$\delta(\boldsymbol{a}_j, f) > 1 - n\epsilon/(N-n)(n-1) \ (j \in P).$$

In particular, if $\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1$, then $\delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 1$ $(j \in P)$.

(c) Any n vectors in $X - \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in P\}$ are linearly independent.

Corollary. If f is an exponential curve, there is a positive number δ_o such that

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1 - \delta_o.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[3] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

[4] N. Toda: On the fundamental inequality for non-degenerate holomorphic curves. Kodai Math. J., 20-3(1997), 189-207.

[5] N. Toda: An improvement of the second fundamental theorem for holomorphic curves. Proceedings of the Second ISAAC Congress, Vol.1(2000), 501-510.

15. The Riemann bilinear relation over CR structures

Takao Akahori(Himeji Inst. of Tech.)

This work is a continuation of our studies on the deformation of the boundaies of isolated singularities.

Let (V,o) be a normal isolated singularity in a complex euclidean space C^N. Let M be the intersection of this singularity V and the real hypersphere $S_\epsilon^{2N-1}(o)$, centered at the origin o, with radius ϵ, $\epsilon > 0$, namely $M = V \cap S_\epsilon^{2N-1}(o)$. Then over this C^∞ manifold, a CR structure is induced from V. This CR structure is important, for example, this CR structure determines a normal isolated singularity (V,o) uniquely. By noting this fact, Kuranishi initiated the deformation theory of CR structures, and this theory has been developed by several authors(Miyajima, Garfield, Lee). The existence of the versal family of the deformation theory of CR structures is finally solved by [AGL1] by using "the Rumin complex for tangent bundle valued forms".

Theorem 1 *(see Theorem 7.1 in [AGL1]) If $(M, {}^0T'')$ is a compact strongly pseudo convex CR manifold with $dim_R M = 2n-1 \geq 5$, then there is a versal family of deformations of CR structures of $(M, {}^0T'')$, $\{(M, {}^{\phi(t)}T'')_{t \in T}\}$, where T is the parameter space of the versal family, satisfying:*

$$dim_C T = dim_C H^1(M, T').$$

On the other hand, recently, related to the string theory, compact and open Calabi-Yau manifolds(both) obtain attentions. For compact Calabi-Yau manifolds, there has been much progress. For example, the moduli space of compact Calabi-Yau manifolds, there is a special Kaehler metric, and the Kaehler potential.

$$\Phi(t,\bar{t}) = \sqrt{-1} d'_t d''_t \log(-c_n \int_{X_t} \omega_t \wedge \overline{\omega_t}).$$

We have to explain the notations. Let $(X, T''X)$ be a Calabi-Yau manifold, this means that: the canonical line bundle K_X is trivial, $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0, 1 \leq i \leq n-1$, where $n = dim_C X$. Let $(\mathcal{X}, \pi, T)$ be the versal family of complex structures of X. And $X_t = \pi^{-1}(t)$. By $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, the holomorphic $(n,0)$ form can be extended on X_t(we write it by ω_t) and by taking $\sqrt{-1} d'_t d''_t \log$, the potential $\Phi(t,\bar{t})$ doesn't depend on the extention of this holomorphic form. Therefore it is natural to try to obtain similar result. Here, instead of treating open manifolds, we discuss CR structures on their boundaries. The approach to treat rational double points as a CR Calabi Yau manifold(this means that

; a normal CR manifold with $dim_R M = 2n - 1$, admits a non-vanishing CR form n-form ω and $H^1(M, \mathcal{O}_M) = 0$), is already treated in [AM]. In [AM], Z^1 space, a subspace of the Kohn-Rossi cohomology $H^1(M, \wedge^{n-1}(T')^*)$ is found and some similarity between compact Calabi-Yau manifold and our CR manifolds is discussed(one is a compact complex manifold and the other is a real odd dimensional C^∞ manifold). In this work, over Z^1, we see that the Riemann bilinear relation holds over Z^1. As an application, we construct a canonical Kaehler potential on the parameter space of the versal family of CR structures like compact Calabi-Yau manifolds. Our new theorem is as follows.

Theorem 2 *Asuume that $(M, {}^0T'')$ is a compact strongly pseudo convex normal CR manifold with $dim_R M = 2n - 1 \geq 5$. Assume that $(M, {}^0T'')$ admits a nonvanishing CR n-form. And $H^1(M, \wedge^{n-1}(T')^*) \simeq Z^1$. Then, there is a canonical Kaehler potential on the parameter space of the versal family of CR structures of $(M, {}^0T'')$.*

$H^1(M, \mathcal{O}) = 0$ モ仮定スル.

References

[AGL1] T. Akahori, P. M. Garfield, and J. M. Lee, *Deformation theory of five-dimensional CR structures and the Rumin complex*, **50** (2002), 517-549, Michigan Mathematical Journal.

[AM] T. Akahori and K. Miyajima, *An analogy of Tian-Todorov theorem on deformations of CR-structures*, Compositio Mathematica **85** (1993), no. 1, 57–85.

[K] M. Kuranishi, *Application of $\bar{\partial}_b$ to deformation of isolated singularities*, Several complex variables (Williams Coll., Williamstown, Mass., 1975), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXX, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977, pp. 97-106.

16. バナッハ空間における Frenkel の補題について

本田竜広（有明工業高専），宮城光廣（宇部工業高専）
西原　賢（福岡工業大学），大貝聖子（明治学園高校）
吉田　守（福岡大学理学部）

Abstract

E を無条件シャウダー基底をもつ複素バナッハ空間とし，D を E の擬凸領域，$V \quad (\neq \emptyset)$ を E の複素閉部分多様体とする。V の次元が有限であるか又は V の E に対する余次元が有限とすると，$H^p(D \setminus V, \mathcal{O}) = 0 \quad 1 \leq p < \mathrm{codim}_E V - 1$. 特に, V の次元が有限で E の次元が無限ならば，$H^p(D \setminus V, \mathcal{O}) = 0 \quad p \geq 1$ で $D \setminus V$ は擬凸でない。 この結果より，$H^p(\boldsymbol{P}(E), \mathcal{O}) = 0 \quad 1 \leq p < \dim E - 1$ であることを示すことができる。ただし，$\boldsymbol{P}(E)$ は E の原点を通る直線全体の複素射影空間を表す。

Introduction

D を $\boldsymbol{C}^n$ の領域とし，$\mathcal{O}$ を D 上の正則関数芽の層とする。Serre [7] は $H^p(D, \mathcal{O}) = 0 \quad 1 \leq p \leq n-1$ ならば，D は正則領域であることを示した。この Serre の結果と 岡 [6]，Bremermann [1]，Norguet [5] によるレビ問題の解と Cartan の定理 B より，次が成立する:

(1) D は擬凸である。

(2) D は正則領域である。

(3) $H^p(D, \mathcal{O}) = 0 \quad 1 \leq p \leq n-1.$

(4) $H^p(D, \mathcal{O}) = 0 \quad p \geq 1.$

D がシャウダー基底を持つ複素バナッハ空間のとき，Gruman [2]，Gruman-Kiselman [3] は上の (1) と (2) が同値であることを示した。 Lempert [4] は E が~~無条件シャウダー基底~~を持ち，D が擬凸ならば，$H^p(D, \mathcal{O}) = 0 \quad p \geq 1$ であることを示した。すなわち，(1) ならば (4) が成り立つことを示した。

この講演において，E が無限次元のとき，(4) ならば (1) が成り立つかどうかという問題に関連して，E が無条件シャウダー基底をもつ複素バナッハ空間で，D が E の擬凸領域，$V \quad (\neq \emptyset)$ が E の複素閉部分多様体とするとき。コホモロジー郡 $H^p(D \setminus V, \mathcal{O})$ を調べる。

$x = \sum x_n e_n$ ，(e_n) シャウダー基底，これが和の順序によらない場合を 無条件シャウダー基底と呼ぶ.

まず最初に $B(0, r)$ が E の原点を中心とし，半径 r の開球 で，W が無条件シャウダー基底をもつ複素バナッハ空間 F の擬凸領域であるとき，$H^p(D\setminus V, \mathcal{O}) = 0 \quad 1 \leq p < \dim(E) - 1$ であることを示す。これは Frenkel の補題の無限次元版である。

次に，上の結果を使って，V の次元が有限であるか又は V の E に対する余次元が有限であるとき，$H^p(D\setminus V, \mathcal{O}) = 0 \quad 1 \leq p < \mathrm{codim}_E V - 1$ であることを示す。特に，V の次元が有限で E の次元が無限ならば，$H^p(D\setminus V, \mathcal{O}) = 0 \quad p \geq 1$ で $D\setminus V$ は擬凸でない。これは (4) から (1) は E の次元が無限ならば，成立しないことを意味している。

最後に上の結果から，D が 複素射影空間 $\boldsymbol{P}(E)$ の真部分擬凸領域か又は $\boldsymbol{P}(E)$ 自身であるとき， $H^p(D, \mathcal{O}) = 0 \quad p \geq 1$ であることを示すことができる。

References

[1] H.J. Bremermann, Über die Äquivalenz der pseudoconvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann., 128(1954), 63-91.

[2] L. Gruman, The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces, Illinois J. Math., 18(1974), 20-26.

[3] L. Gruman and C. O. Kiselman, Le problème de Levi dans les espaces de Banach à base, C. R. Acad. Sc. Paris, 274(1972), 1296-1299.

[4] L. Lempert, The Dolbeault complex in infinite dimensions III. Sheaf cohomology in Banach spaces, Invent. Math., 142(2000), 579-603.

[5] F. Norguet, Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plurieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. France, 82(1954), 137-159.

[6] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complex, IX, Domaines finis sans point critique intéreur, Japan. J. Math., 23(1953), 97-155.

[7] P. Serre, Quelques problèmes gloaux relatifs aux variétes de Stein, <<Colloque sur les fonctions de plusieurs variables>>[1953, Bruxelles], 57-68. Liège, G. Thone; Paris, Masson, 1953(Centre belge de Recherches Mathématiques).

17. Bergman計量を持つStein多様体のある顕著なクラスについて

大沢健夫（名古屋大学多元数理）

1. Xをn次元の複素多様体とする。よく知られているように、XがStein多様体であるためにはX上に強多重劣調和な皆既関数が存在することが必要かつ十分な条件である（Grauertの定理）。そのような関数でC^∞級のものをφとすればe^φの複素Hessian $\partial\bar\partial e^\varphi$は$X$上の完備なKähler計量になる。従ってすべてのStein多様体は完備なKähler計量を持ち、その中には大域的なポテンシャル関数を持つ計量が存在し、さらにその中にはポテンシャル関数ψが条件 $\psi\partial\bar\partial\psi \geq \partial\psi\bar\partial\psi$ を満足するものが存在する。（$\psi = e^\varphi$とおけばよい。）他方、条件 $\partial\bar\partial\psi > \partial\psi\bar\partial\psi$ をみたす皆既関数ψが存在するようなStein多様体は有界非定数多重劣調和関数を持ち（例えば$-e^{-\psi}$）、従って$\mathbb{C}^n$などはこのクラスには入らない。ポテンシャル関数の勾配に関するこの種の増大度条件と、完備Kähler多様体$(X, \partial\bar\partial\psi)$のより内在的な構造である$L^2$コホモロジーやBergman計量との関連についての研究は、Donnelly-Fefferman（'83）やGromov（'91）の画期的な業績に基礎を置き、現在活発に進展しつつある。陳伯勇（'03）はXが $\partial\bar\partial\psi > \partial\psi\bar\partial\psi$ をみたす皆既関数を持てば、Xは完備なBergman計量を持つことを示した。一方J. D. McNeal（'02）は、ポテンシャルψが定数$0<A<1$, $B>0$に対して不等式 $(A\psi+B)\partial\bar\partial\psi \geq \partial\psi\bar\partial\psi$ をみたすような計量に関するL^2調和形式及びラプラス作用素のスペクトルの下限について考察し、特に$(\mathbb{C}^n, \partial\bar\partial\|z\|^2)$はそのようなポテンシャルを持たないことを結論づけている。彼の言い方に従えば、'複素ユークリッド空間は狭義Kähler凸ではない'ということになる。ここではこれを一歩進めて'$\mathbb{C}^n$（計量構造抜き）は狭義Kähler凸構造を持たない'ことを示したい。

2. 主結果は上記の主張を特別な場合として含む次の定理である。

定理. XをStein多様体とする。もしX上に正値かつ強多重劣調和な皆既関数ψが存在して、ある定数$0<A<1$, $B>0$に対し$(A\psi+B)\partial\bar\partial\psi \geq \partial\psi\bar\partial\psi$をみたせば、$X$はBergman計量を有する。

(注意. この定理では$\partial\bar\partial\psi$が完備であることは仮定していない.)

証明には以下の3つの補題を用いる。(記号の説明は省略する。)

補題 1. $\psi : X \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}_+$, $(A\psi+B)\partial\bar\partial\psi > \partial\psi\bar\partial\psi$, $0<A<1$, $B>0$
$\Longrightarrow \forall C>0 \ \exists \Phi \in C^2(X)_{\mathbb{R}_+}$ s.t. $\Phi\partial\bar\partial\Phi > C\partial\Phi\bar\partial\Phi$.

補題 2. $\varphi, \psi \in C^\infty(X)_{\mathbb{R}_+} \cap PSH$, $C>0$, $\psi\partial\bar\partial\psi > C\partial\psi\bar\partial\psi$,
$\nu \in C^2(X)_{\mathbb{R}} \Longrightarrow$ Kähler計量 $2\partial\bar\partial(\varphi+\psi)$に関して

$$C^{-1}\left(\|\sqrt{\psi}\bar\partial u\|_\nu^2 + \|\sqrt{\psi}\vartheta_\nu u\|_\nu^2 + \|\sqrt{\psi}\bar\vartheta u\|_\nu^2\right)$$

$$\geq \left(q-\frac{1}{2}\right)\|u\|_\nu^2 - \left(\sqrt{-1}e(\partial\bar\partial\varphi)\Lambda u, u\right)_\nu$$

ただし $u \in C_0^{n,q}(X)$.

補題 3. φ, ψ, C, ν を上の通りとし、さらに$\psi>1$を仮定すると、X上の任意のKähler計量に関して任意の$u \in C_0^{n,q}(X)$に対し

$$\|\sqrt{\psi-1}\,\bar\partial u\|_\nu^2 + \|\sqrt{\psi-1}\,\vartheta_\nu u\|_\nu^2 - \|\sqrt{\psi-1}\,\bar\vartheta u\|_\nu^2$$

$$\geq \left(\sqrt{-1}e((\psi-1)\partial\bar\partial\nu - \partial\bar\partial\psi)\Lambda u, u\right)_\nu - C^{-1}\|u\|_\nu^2 + \|\sqrt{\psi}\vartheta_\nu u\|_\nu^2$$

が成立する。

18. $\mathbb{C}^2$ の実超曲面へ距離の Levi form の表示と Levi 問題への応用

松本 和子 (大阪女大理)

Levi 問題とは「複素多様体 X の部分領域 D は, 擬凸領域 (locally Stein) なら正則領域 (Stein) か」という問題である. D が $\mathbb{C}^2$ の正則領域で D の境界 M が C^2 級の場合に, M が満たすべき局所的な幾何学的条件を M の定義関数で表したのが E. E. Levi (1910 年) で, それ以前に M の滑らかさの仮定なしで, M が満たすべき条件 (擬凸性) を示したのが Hartogs (1906 年) である. $\mathbb{C}^n$ の領域に対する Levi の問題の解決及びその際の過程が K. Oka (1942 年, 1953 年) の有名な業績で, 今日の多変数関数論の基礎となっている.

Grauert ('58)
D: Stein
$\Leftrightarrow$ C^2 stplsh
exhaust.

Docquier-Grauert (1960 年) により, 複素多様体 D が Stein であるための必要十分条件は, 強多重劣調和関数によって exhaust されることである. X が複素射影空間や正の正則双断面曲率を持つ Kähler 多様体の場合, 与えられた計量から自然に決まる D の境界距離関数を δ で表すと, A. Takeuchi の結果及びその一般化として $-\log\delta$ は強多重劣調和になり, 擬凸領域 $D \Subset X$ は Stein であることが直ちに分かる (cf. [1]).

他方, Grauert によって指摘されたように, 複素トーラス上には正則領域ではない擬凸領域が存在する. また, Grassmann 多様体のように, 曲率非負でも Levi 問題が常に解ける場合もある (T. Ueda).

本講演では, 曲率非負の複素多様体上の Levi 問題に対する (或る意味では) 最初の微分幾何学的アプローチとして, $\mathbb{C}^2$ 内の C^2 級の実超曲面 M に対し, M までの Euclid 距離 δ_M の Levi form の, M の定義関数による具体的表示及びその応用 ([4]) について報告する. Levi form の表示から, M が C^3 級の場合, $-\log\delta_M$ の Levi form が複素接方向に常に退化するための必要十分条件は $M = \mathbb{C} \times S$ $(S \subset \mathbb{C})$ の形であることが言える. 特に 2 次元複素トーラス上の滑らかな境界を持つ擬凸領域 D は, 境界 M が局所的に $\mathbb{C}$ との直積の形でなければ (つまり Grauert によって指摘されたタイプのもの以外は) Stein になる ([2] または [3] により, この結果は M が C^2 級で良い).

Levi form の計算結果は次の通りである.

$M \subset \mathbb{C}^2$ の原点の近くでの定義関数を $y_2 = r(x_1, y_1, x_2)$, 原点における接平面を $y_2 = 0$ とする $(z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i)$. 点 $p_y = (0, \sqrt{-1}y)$ $(y \in \mathbb{R}, |y| < {}^{\exists}\varepsilon)$ に最も近い M の点は原点となる. 実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1y_1} & r_{x_1x_2} \\ r_{y_1x_1} & r_{y_1y_1} & r_{y_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2y_1} & r_{x_2x_2} \end{pmatrix} (0,0,0)$$

により定義する.

$$\begin{cases} h_{11}(y) = (a+c) + y\{2(b^2 - ac) + d^2 + e^2 - f(a+c)\} \\ \qquad\qquad + 2y^2 \det(A) \\ h_{12}(y) = (d - \sqrt{-1}e) + y\{(be - cd) - \sqrt{-1}(bd - ae)\} \\ h_{22}(y) = f + y\{d^2 + e^2 - f(a+c)\} + y^2 \det(A) \\ \mu(y) = h_{11}(y)\{1 - y(a+c) + y^2(ac - b^2)\} - y|h_{12}(y)|^2 \end{cases}$$

とおく. このとき, 点 $p_y = (0, \sqrt{-1}y)$ $(0 < |y| < {}^{\exists}\varepsilon)$ での Levi form $L[-\log \delta_M](p_y, \zeta)$ $(\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2)$ は次のように表される.

(i) $(a, b, c, d, e) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ の場合

$$L[-\log \delta_M](p_y, \zeta) = \frac{yh_{11}(y)\left|\zeta_1 + \dfrac{\overline{h_{12}(y)}}{h_{11}(y)}\zeta_2\right|^2 + \dfrac{\mu(y)}{h_{11}(y)}|\zeta_2|^2}{4y^2 \det(E - yA)}$$

(ii) $(a, b, c, d, e) = (0, 0, 0, 0, 0)$ の場合

$$L[-\log \delta_M](p_y, \zeta) = \frac{|\zeta_2|^2}{4y^2(1 - fy)}$$

参考文献

[1] K. Matsumoto, Boundary distance functions and q-convexity of pseudoconvex domains of general order in Kähler manifolds, J. Math. Soc. Japan, **48** (1996), 85–107.

[2] K. Matsumoto and T. Ohsawa, On the real analytic Levi flat hypersurfaces in complex tori of dimension two, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **52** (2002), 1525–1532.

[3] K. Matsumoto, Levi form of logarithmic distance to complex submanifolds and its application to developability, Adv. Stud. Pure Math., to appear.

[4] K. Matsumoto, Some geometric properties of Levi form of distance to real hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$, ~~preprint~~. to appear in Japanese J. Math. 31 (2004).

$K3$ 曲面と解析的トーション

吉　川　謙　一（東京大学大学院数理科学研究科）

§0. 序.

$\mathbb{H}$ を複素上半平面とし、周期 $\tau \in \mathbb{H}$ を持つ楕円曲線を $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ で表す。E_τ の Weierstrass 標準形 $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$ に対して、判別式 $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 12 の尖点形式で、以下の表示を持つ (Jacobi)：

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \qquad q = e^{2\pi i \tau}.$$

E_τ の Kähler 計量 $g_\tau = |dz|^2/\mathrm{Im}\,\tau$ に関するラプラシアンを $\square_\tau = \mathrm{Im}\,\tau \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ とすれば、そのスペクトル・ゼータ関数は $\zeta_\tau(s) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (\mathrm{Im}\,\tau)^s |m\tau + n|^{-2s}$ で与えられる。この関数は $\mathrm{Re}\,s > 1$ で絶対収束し、全平面に解析接続され、さらに $s = 0$ で正則である。

Kronecker により、以下の等式が知られている：

$$\exp(\zeta_\tau'(0)) = \mathrm{Const.}\,(\mathrm{Im}\tau)^2 |\Delta(\tau)|^{\frac{1}{6}}.$$

ここで、Const. は τ に依存しない定数である。

この講演では、上述 Kronecker の定理の $K3$ 曲面版について話す。詳しい解説は [Y1] を、証明の細部については [Y3] を参照。Kronecker の定理の $K3$ 曲面とは異なる拡張については、[Y2] を参照。

§1. 対合を持つ $K3$ 曲面.

Definition 1. 以下の条件をみたす連結コンパクト非特異複素曲面 X を $K3$ 曲面という：

$$(1) \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0, \qquad\qquad (2) \quad K_X \cong \mathcal{O}_X. \quad \square$$

この講演を通して、X は $K3$ 曲面を表す。以下の事実が知られている（[BPV], [BBD] を参照)。

Fact 2. (1) 2 次元複素トーラス T の対合 ν: $z \to -z$ による商空間 T/ν から極小特異点解消により得られる複素曲面を *Kummer* 曲面という。X は *Kummer* 曲面に微分同型である。

(2) $H^2(X, \mathbb{Z})$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群であり、交叉積を入れることにより格子となる。以下の等長同型が存在する：

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{L}_{K3} := \mathbb{U} \oplus \mathbb{U} \oplus \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8.$$

ここで、$\mathbb{U} = (\mathbb{Z}^2, \binom{0\,1}{1\,0})$, $\mathbb{E}_8$ は階数 8 の負定値ユニモジュラー偶格子である。

(3) X は *Kähler* 計量を持ち、任意の*Kähler* 類には *Ricci* 平坦形式が唯一存在する。 $\square$

Definition 3. $M \subset \mathbb{L}_{K3}$ を符号 $(1, r(M)-1)$ の部分格子とし、ι: $X \to X$ を正則対合とする。以下の条件がみたされるとき、組 (X, ι) を M-型 2-elementary $K3$ 曲面という：

(1) ι は正則 2-形式に非自明に作用する i.e., $\iota^*\eta = -\eta$, $\forall \eta \in H^0(X, K_X)$.

(2) $H^2_+(X,\mathbb{Z}) := \{l \in H^2(X,\mathbb{Z});\ \iota^* l = l\}$ とおけば、$H^2_+(X,\mathbb{Z}) \cong M$. □

この講演を通して、M-型 2-elementary $K3$ 曲面が存在する M のみを考える。(M は原始的、2-elementary, 双曲型格子である。) M-型 2-elementary $K3$ 曲面のモジュライ空間は以下のように与えられる。

$M^\perp$ により、M の $\mathbb{L}_{K3}$ における直交補空間を表す：

$$M^\perp := \{l \in \mathbb{L}_{K3};\ \langle l, m\rangle = 0\ \forall m \in M\}.$$

Fact 4. *M-型 2-elementary $K3$ 曲面の重さ 2 の Hodge 構造の分類空間は、以下の集合と同一視される：*

$$\Omega_M := \{[\eta] \in \mathbb{P}(M^\perp \otimes \mathbb{C});\ \langle \eta, \eta\rangle = 0, \quad \langle \eta, \bar{\eta}\rangle > 0\}.$$

Ω_M は二個の連結成分を持ち、各連結成分は $20 - r(M)$ 次元 IV 型対称有界領域に同型である。 □

Definition 5. Ω_M の判別式軌跡 $\mathcal{D}_M$ を以下の式で定める：

$$\mathcal{D}_M := \bigcup_{d \in M^\perp,\ \langle d,d\rangle = -2} d^\perp, \qquad d^\perp := \{[\eta] \in \Omega_M;\ \langle d, \eta\rangle = 0\}.$$

Ω_M の稠密 Zariski 開集合 Ω^0_M を以下の式で定める：

$$\Omega^0_M := \Omega_M \setminus \mathcal{D}_M. \quad □$$

このとき、$M^\perp$ の自己同型群 $O(M^\perp)$ は Ω_M と $\mathcal{D}_M$ に射影変換として正則に作用する。

Theorem 6 [Y3, Th. 1.8]. *M-型 2-elementary $K3$ 曲面の粗モジュライ空間を $\mathcal{M}^0_M$ とすれば、Griffiths 周期写像により*

$$\mathcal{M}^0_M \cong \Omega^0_M / O(M^\perp). \quad □$$

以下、Griffiths 周期写像により $\mathcal{M}^0_M = \Omega^0_M/O(M^\perp)$ と見なす。

§2. 同変解析的トーション.

Notation

- (V, γ)：コンパクト Kähler 多様体
- G：(V,γ) に正則かつ等長的に作用する有限群
- $A^{0,q}_V$：V 上の C^∞-級 $(0,q)$-形式の成す複素ベクトル空間
- $S_V = \bigoplus_{q \geq 0} A^{0,q}_V$：$V$ 上のスピノルの空間

Definition 7. S_V 上の $\mathbb{Z}$-grading を保つ作用素 $\Box$, N, ϵ を以下の式で定義する：

(1) $\Box := (\bar\partial + \bar\partial^*)^2$.

(2) $N(\varphi) := q\,\varphi$ $(\varphi \in A^{0,q}_V(F))$.

(3) $\epsilon(\varphi) := (-1)^q \varphi$ $(\varphi \in A^{0,q}_V(F))$. □

$\sigma(\Box) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $\Box$ のスペクトル、$E(\lambda) := \{\varphi \in S_V;\ \Box\varphi = \lambda\varphi\}$ を $\Box$ の固有空間とすれば、

$$(i)\ S_V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\Box)} E(\lambda), \qquad (ii)\ E(\lambda) \perp E(\mu),\ (\lambda \neq \mu), \qquad (iii)\ \dim E(\lambda) < +\infty$$

が Hodge-小平分解定理として知られている。ラプラシアン $\Box$ は S_V 上の作用素 N, ϵ と可換であり、G-作用とも可換である。このことから、$E(\lambda)$ は G, N, ϵ の作用で不変な S_V の有限次元部分空間である。

Definition 8. $g \in G$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し、ゼータ関数を以下の式で定める：

$$\zeta_G(g)(s) := \sum_{\lambda \in \sigma(\Box)\setminus\{0\}} \lambda^{-s} \operatorname{Tr}\left[\epsilon \cdot N \cdot g|_{E(\lambda)}\right]. \quad \Box$$

Fact 9. $\zeta_G(g)(s)$ は s の実部が十分大きいとき絶対収束し、全平面 $\mathbb{C}$ に解析接続され、さらに $s=0$ において正則である。 $\Box$

Definition 10 [RS], [BGS], [Bi1]**.** (V,γ) の同変解析的トーションを、以下の式で定義する：

$$\tau_G(V,\gamma)(g) := \exp\left(-\zeta'_G(g)(0)\right), \qquad g \in G.$$

$g=1$ のとき、同変解析的トーションを $\tau(V,\gamma)$ と書き、(V,γ) の解析的トーションという。 $\Box$

§3. 2-elementary $K3$ 曲面の不変量.

Notation

- (X,ι) : M-型 2-elementary $K3$ 曲面
- $\mathbb{Z}_2 := \langle\iota\rangle$: ι により生成される $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群
- $\eta \in H^0(X,K_X)\setminus\{0\}$: X 上の正則 2-形式
- γ : X 上の ι-不変 Kähler 形式
- $\mathrm{Vol}(X,\gamma) := \int_X \gamma^2/2!$: (X,γ) の体積
- $\|\eta\|^2_{L^2} := \int_X \eta\wedge\bar\eta$: η の L^2-ノルム
- $X^\iota = \{x \in X;\ \iota(x)=x\}$: $\iota\colon X\to X$ の不動点集合
- $X^\iota = \amalg_i C_i$: X^ι の連結成分への分解
- $\mathrm{Vol}(C_i,\gamma|_{C_i}) := \int_{C_i}\gamma|_{C_i}$: $(C_i,\gamma|_{C_i})$ の体積
- $c_1(C_i,\gamma|_{C_i})$: $(TC_i,\gamma|_{C_i})$ の Chern 形式

Fact 11 [N]**.** X^ι の位相型は M により定まり、$X^\iota \neq \emptyset$ のとき $\dim C_i = 1$ $(\forall i)$ が成り立つ。 $\Box$

Definition 12 [Y3, §5]**.** (1) 実数 $A_M(X,\iota,\gamma)$ を以下の式で定める：

$$A_M(X,\iota,\gamma) := \begin{cases} \exp\left[\frac{1}{8}\sum_i\int_{C_i}\log\left(\frac{\eta\wedge\bar\eta}{\gamma^2/2}\cdot\frac{\mathrm{Vol}(X,\gamma)}{\|\eta\|^2_{L^2}}\right)\Big|_{C_i} c_1(C_i,\gamma|_{C_i})\right], & (X^\iota\neq\emptyset) \\ 1 & (X^\iota=\emptyset). \end{cases}$$

(2) 実数 $\mathcal{T}_M(X,\iota,\gamma)$ と $\tau_M(X,\iota,\gamma)$ を以下の式で定める：

$$\mathcal{T}_M(X,\iota,\gamma) := \mathrm{Vol}(X,\gamma)^{\frac{14-r(M)}{4}}\,\tau_{\mathbb{Z}_2}(X,\gamma)(\iota)\prod_i \mathrm{Vol}(C_i,\gamma|_{C_i})\tau(C_i,\gamma|_{C_i}),$$

$$\tau_M(X,\iota,\gamma) := \mathcal{T}_M(X,\iota,\gamma)\,A_M(X,\iota,\gamma). \quad \Box$$

Remark. γ が Ricci-平坦ならば $\frac{\gamma^2/2}{\eta\wedge\bar\eta} = \frac{\mathrm{Vol}(X,\gamma)}{\|\eta\|^2_{L^2}}$ となるので、$A_M(X,\iota,\gamma)=1$ と $\mathcal{T}_M(X,\iota,\gamma) = \tau_M(X,\iota,\gamma)$ が成り立つ。 $\Box$

Theorem 13 [Y3, Th. 5.7]. (X,ι) が M-型の 2-*elementary* $K3$ 曲面ならば、$\tau_M(X,\iota,\gamma)$ は ι-不変 *Kähler* 形式 γ に依らない。特に、$\tau_M(X,\iota,\gamma)$ は X の複素構造と ι のみに依存する実数である。 □

以下、$\tau_M(X,\iota,\gamma)$ を $\tau_M(X,\iota)$ と書く：

$$\tau_M(X,\iota) := \tau_M(X,\iota,\gamma).$$

Theorem 13 より、τ_M をモジュライ空間 $\mathcal{M}_M^0 = \Omega_M^0/O(M^\perp)$ 上の関数と見なすことができる。

$\mathcal{M}_M^0$ 上の関数としての τ_M の性質を述べるために、Ω_M 上の $O(M^\perp)$-同変正則直線束 λ_M^q を説明する。

$\mathfrak{S}_g$ を g 次 Siegel 上半空間とし、$\mathcal{A}_g := \mathfrak{S}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$ を Siegel モジュラー多様体とすれば、$\mathcal{A}_g$ は g 次元主偏極 Abel 多様体の粗モジュライ空間である。$\mathcal{F}_g$ により、$\mathcal{A}_g$ 上の Hodge 直線束を表す。

Definition 14. (1) M-型 2-elementary $K3$ 曲面 (X,ι) の Griffiths 周期を $\overline{\pi}_M(X,\iota)$ で表すとき、写像 $\overline{J}_M^0 \colon \mathcal{M}_M^0 \to \mathcal{A}_{g(M)}$ を

$$\overline{J}_M^0(\overline{\pi}_M(X,\iota)) := [\mathrm{Jac}(X^\iota)] \in \mathcal{A}_{g(M)}$$

として定める。ここで、$g(M) := \dim H^1(X^\iota, \mathcal{O}_{X^\iota})$ である。

(2) 写像 $J_M^0 \colon \Omega_M^0 \to \mathcal{A}_{g(M)}$ を $\overline{J}_M^0$ から誘導される正則写像として定める。$\mathcal{A}_{g(M)}$ 上の自明な $O(M^\perp)$-作用を考えることにより、J_M^0 を $O(M^\perp)$-同変正則写像と見る。 □

Fact 15. (1) $\mathcal{D}_M$ の真部分解析的集合 Z が存在して、J_M^0 は $\Omega_M \setminus Z$ から $\mathcal{A}_{g(M)}$ の佐武コンパクト化 $\mathcal{A}_{g(M)}^*$ への $O(M^\perp)$-同変正則写像 $J_M \colon \Omega_M \setminus Z \to \mathcal{A}_{g(M)}^*$ に拡張する。

(2) 自然数 $q \in \mathbb{N}$ が存在して、$\mathcal{F}_g^q$ は $\mathcal{A}_g^*$ 上の非常に豊富な直線束 $\overline{\mathcal{F}}_g^q$ に拡張する。

(3) $\Omega_M \setminus Z$ 上の $O(M^\perp)$-同変正則直線束 $J_M^* \mathcal{F}_{g(M)}^q$ は、Ω_M 上の $O(M^\perp)$-同変正則直線束 λ_M^q に拡張する。 □

Ω_M の各連結成分を保つ $O(M^\perp)$ の元全体が成す$O(M^\perp)$ の部分群を $O(M^\perp)^+$ で表す。

Main Theorem [Y3, Main Theorem]. 自然数 ν に対して、$\mathcal{F}_{g(M)}^\nu$ が $\mathcal{A}_{g(M)}^*$ 上の非常に豊富な直線束に拡張すると仮定する。Ω_M 上の $O(M^\perp)^+$ に関する重さ $(r(M)-6)\nu$ の $\lambda_M^{4\nu}$-値保型形式 Φ_M^ν で、以下の条件をみたすものが絶対値 1 の複素数を除いて一意的に存在する： $r(M) \leqq 17$ を仮定する

(1) Φ_M^ν の零因子は判別式軌跡 $\nu\mathcal{D}_M$ である。

(2) 任意の M-型 2-*elementary* $K3$ 曲面 (X,ι) と X 上の任意の ι-不変 *Kähler* 形式 γ に対し、

$$\tau_M(X,\iota,\gamma) = \|\Phi_M^\nu(\overline{\pi}_M(X,\iota))\|^{-\frac{1}{2\nu}}.$$

ここで、$\|\cdot\|$ は *Petersson* ノルムである。 □

自然な射影 $\Pi_M \colon \Omega_M^0 \to \mathcal{M}_M^0$ により、τ_M を Ω_M^0 上の関数に引き戻す：

$$\tau_{\Omega_M^0} := \tau_M \circ \Pi_M.$$

Poincaré-Lelong の公式から、Main Theorem の証明は (1) $\log \tau_{\Omega_M^0} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_M)$, (2) Ω_M 上のカレントの等式：

$$dd^c \log \tau_{\Omega_M^0} = \frac{r(M)-6}{4}\,\omega_M + J_M^* \omega_{\mathcal{A}_{g(M)}} - \frac{1}{4}\delta_{\mathcal{D}_M}$$

に帰着する。ここで、右辺で用いた記号の意味は以下の通りである：

- ω_M ： Ω_M の Bergmann 計量に関する Kähler 形式
- $\omega_{\mathcal{A}_g}$ ： $\mathfrak{S}_g$ の Bergmann 計量に関する Kähler 形式から誘導される $\mathcal{A}_g$ 上の Kähler 形式
- $J_M^*\omega_{\mathcal{A}_{g(M)}}$ ： Ω_M^0 上の閉正 $(1,1)$-カレント $(J_M^0)^*\omega_{\mathcal{A}_{g(M)}}$ の Ω_M への自明拡張
- $\delta_{\mathcal{D}_M}$ ：被約因子 $\mathcal{D}_M$ に台を持つ Dirac δ-カレント.

問題の微分方程式は、同変 Quillen 計量の曲率公式([BGS], [M])、および同変 Quillen 計量の埋め込み定理([Bi1], [Bi2]) を用いて示される。議論の詳細は、[Y3, §5, §6, §7] を参照。

Remark. [Y1] では上の微分方程式を示すのに Ricci-平坦計量の退化を調べるということが述べられている。実は Main Theorem の定式化と証明の双方について、Ricci-平坦計量は全く必要が無い。[Y1] を書いた時点で、講演者はこの事実を全く認識していなかった。この場を借りて、Ricci-平坦計量に関する [Y1] の記述を変更したい。 □

§4. Enriques 曲面の解析的トーション.

Definition 16. 以下の条件をみたす連結コンパクト非特異複素曲面 Y を Enriques 曲面という：

$$(1)\quad H^1(Y,\mathcal{O}_Y)=0,\qquad (2)\quad K_Y\not\cong\mathcal{O}_Y,\qquad (3)\quad K_Y^2\cong\mathcal{O}_Y\quad\square$$

以下、Y を Enriques 曲面とする。Y の普遍被覆空間 X は $K3$ 曲面で、正則対合 $\iota\colon X\to X$ が存在して、$Y=X/\iota$ と表される。このとき、(X,ι) は $\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2)$-型 2-elementary $K3$ 曲面である([N])。従って、Enriques 曲面に対して普遍被覆空間とその被覆変換群の組を対応させることにより、Enriques 曲面のモジュライ空間は $\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2)$-型 2-elementary $K3$ 曲面のモジュライ空間に同型である。また、$(\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2))^{\perp}=\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}\oplus\mathbb{E}_8(2)$ なので、$\Lambda=\mathbb{U}\oplus\mathbb{E}_8(2)$ とおけば、$\Omega_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2)}$ は管状領域 $\Lambda\otimes\mathbb{R}+\sqrt{-1}C_\Lambda$ に同型である：

$$\Lambda\otimes\mathbb{R}+\sqrt{-1}C_\Lambda\ni y\to\left(\left(\frac{1}{2},-\frac{(y,y)}{2}\right),y\right)\in\Omega_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2)}.$$

Borcherds は $\Lambda\otimes\mathbb{R}+\sqrt{-1}C_\Lambda$ 上の形式的関数 $\Phi(y)$ を次の無限積により導入した ([Bo1])：

$$\Phi(y):=e^{2\pi i(\rho,y)}\prod_{r\in\Delta^+}\left(1-e^{2\pi i(r,y)}\right)^{\pm c((r,r)/2)}$$

ここで、$\rho=((0,1),0)$, $\rho'=((1,0),0)\in\Lambda$, $\Delta^+=\{l\in\Lambda;\ (l,\rho)>0\}$ である。また、$\{c(n)\}_{n\geq-1}$ は以下の母関数により定まる数列である：

$$\sum_{n=-1}^{\infty}c(n)q^n=\eta(\tau)^{-8}\eta(2\tau)^8\eta(4\tau)^{-8},\qquad\eta(\tau)=\Delta(\tau)^{\frac{1}{24}}.$$

Theorem 17 [Bo1], [Bo2]. $\Phi(y)$ は $\langle\mathrm{Im}\,y,\mathrm{Im}\,y\rangle\gg0$ のとき絶対収束し、$\Omega_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2)}$ 上の $O(\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}\oplus\mathbb{E}_8(2))^+$ に関する重さ 4 の保型形式に解析接続される。 □

Theorem 18 [Y3, Th. 8.3]. Y を *Enriques* 曲面とし、$X \to Y = X/\iota$ を普遍被覆 $K3$ 曲面とする。κ を Y 上の *Ricci*-平坦 *Kähler* 形式とすれば、非零定数 C が存在して、以下の等式が成り立つ：

$$\sqrt{\mathrm{Vol}(Y,\kappa)}\,\tau(Y,\kappa) = C\,\|\Phi(\overline{\pi}_{\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2)}(X,\iota))\|^{-\frac{1}{4}}. \quad \square$$

$M = \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8(2)$ の時は、26 次元 Borcherds Φ-関数が Φ_M^ν として現れる。この例については、[Y3, §8.2], [Y4] を参照。

Theorem 18 において、X の複素構造の変形を考えることにより、以下の定理を示すことができる。

Theorem 19 [Y5]. Z, σ, g, γ, η を以下のように定める：

- Z：実数体 $\mathbb{R}$ 上で定義された $K3$ 曲面
- $\sigma\colon Z \to Z$：$\mathbb{C}$ の複素共役から誘導される Z の反正則対合
- g：Z の σ-不変 *Ricci*-平坦 *Kähler* 計量
- γ：g の*Kähler* 形式
- η：$\mathbb{R}$ 上で定義された Z の正則 2-形式であって、以下の正規化条件をみたすもの：

$$\eta \wedge \bar{\eta} = 2\gamma^2.$$

このとき、$Z(\mathbb{R}) = \emptyset$ ならば、(Z,g) の σ-作用に関するラプラシアン Δ_g の同変行列式は以下の等式をみたす：

$$\mathrm{Vol}\,(Z,g)^{-1/2}\,\det{}_{\mathbb{Z}_2}\Delta_g(\sigma) = C\,\|\Phi(\alpha(\gamma + \sqrt{-1}\mathrm{Im}\,\eta))\|^{1/8}.$$

ここで、$\alpha\colon H^2(Z,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{L}_{K3}$ は格子の同型である。 $\square$

Theorem 19 で、$\alpha(\gamma + \sqrt{-1}\mathrm{Im}\,\eta)$ が最早 $K3$ 曲面 Z の周期ではないことを注意する。

References

[BPV]. Barth, W., Peters, C., Van de Ven, A., *Compact Complex Surfaces*, Springer, Berlin, 1984.

[BBD]. Beauville, A., Bourguignon, J.-P., Demazure, M., *Géométrie des surfaces K3: modules et périodes*, (Séminaire Palaiseau), Astérisque **126** (1985).

[Bi1]. Bismut, J.-M., *Equivariant immersions and Quillen metrics*, J. Differ. Geom. **41** (1995), 53-157.

[Bi2]. ———, *Quillen metrics and singular fibers in arbitrary relative dimension*, J. Alg. Geom. **6** (1997), 19-149.

[BGS]. Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C., *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I,II,III*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.

[Bo1]. Borcherds, R.E., *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), 699-710.

[Bo2]. ———, *Automorphic forms with singularities on Grassmanians*, Invent. Math. **132** (1998), 491-562.

[M]. Ma, X., *Submersions and equivariant Quillen metrics*, Ann. Inst. Fourier **50** (2000), 1539-1588.

[N]. Nikulin, V.V., *Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections*, J. Soviet Math. **22** (1983), 1401-1476.

[RS]. Ray, D.B., Singer, I.M., *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. **98** (1973), 154-177.

[Y1]. Yoshikawa, K.-I., 解析的トーションとモジュライ空間上の保型形式, 数学 **52** (2000), 142-158.

[Y2]. ———, *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, J. Differ.Geom. **52** (1999), 73-115.

[Y3]. ———, *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*, DOI: 10.1007/s00222-003-0334-3, Invent. Math. (in press) (2004).

[Y4]. ———, *Nikulin's K3 surfaces, adiabatic limit of equivariant analytic torsion, and the Borcherds Φ-function*, Adv. Study. Pure Math. (to appear).

[Y5]. ———, *Real K3 surfaces without real points, equivariant determinat of the Laplacain, and the Borcherds Φ-function*, in preparation (2004).