日　本　数　学　会

２００３年度秋季総合分科会

函数論分科会

講演アブストラクト

２００３年9月

於　千　葉　大　学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する.
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する.
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦.
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.

3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する. 必要に応じ追加，削減できる.
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする. 再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する. その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する.
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する. 必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.
   (d) 案件の議決は投票によってはならない. 決定できない時は懸案事項として次回に繰越す. 緊急事項については評議員に処置を一任する.

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする.
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する.

函 数 論 分 科 会

9 月 26 日 (金)　第 VIII 会場

9:45 ～ 11:45

14:20 ～ 15:20　**特別講演**

宮 本 育 子 (千 葉 大 理)* 正値 (優) 調和関数の挙動と除外集合

15:45 ～ 16:45　**2003 年度 幾何学賞受賞特別講演 (第 VI 会場)**

平 地 健 吾 (東 大 数 理)* 強擬凸領域の幾何とベルグマン核

9 月 27 日 (土)　第 VIII 会場

9:20 ～ 12:00

8 藤川英華 (東工大理工)* The dilatation and the order of periodic elements of Teichmüller modular groups ・・・・・ 15

9 小櫃邦夫 (鹿児島大理)* Weil-Petersson 計量の漸近展開公式の改良 ・・・・・ 15
S. A. Wolpert (メリーランド大)

10 S. A. Kim (Woosuk Univ.)* Characterizations of hyperbolically convex regions ・・・・・ 15
須川敏幸 (広島大理)

11 柳原二郎 * Growth of meromorphic solutions of some functional equations ・・・・・ 15
石崎克也 (日本工大)

12 戸田暢茂 * On some holomorphic curves extremal for the defect relation ・・・・・ 15

13 G. G. Gundersen (Univ. of New Orleans) * Entire and meromorphic solutions of $f^5 + g^5 + h^5 = 1$ ・・・・・ 15
藤解和也 (金沢大工)

14 岡本崇志 (阪府大工)* 有理形関数に対する一意性をもつ 2 点集合 ・・・・・ 10
城崎学 (阪府大工)

15 足立幸信 * 二次元スタイン多様体 M 上の非退化正則写像の値分布と M の分類 (I) M 上非退化正則写像の値分布 ・・・・・ 15

16 足立幸信 * 二次元スタイン多様体 M 上の非退化正則写像の値分布と M の分類 (II) M の分類 ・・・・・ 15

14:20 ～ 15:45

17 相原義弘 (沼津高専) Estimate on deficiencies of meromorphic mappings for hypersurfaces ・・・ 15
森正気 (山形大理)
大内重樹 (国際基督教大)

18 奥間智弘 (群馬高専) Universal abelian covers of surface singularities ・・・・・ 15

19 清水悟 (東北大理) 初等ラインハルト領域に関する正則同値問題への群論的アプローチ ・・・・・ 15

20 大沢健夫 (名大多元数理) L^2 正則関数の拡張について (その七) — 特異部分多様体からの拡張 ・・・・ 15

21 兒玉充 (鹿児島大理工)* 二面体商特異点の無限小変形空間の CR 表示について ・・・・・ 10

16:00 ～ 17:00　特別講演

田島慎一 (新潟大工)* Grothendieck 留数の代数解析と計算アルゴリズム
中村弥生 (お茶の水女大人間文化)

1. On Some Double and Triple Infinite Sums
(A Serendipity in N- Fractional Calculus)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In 1991, an infinite sum which is derived through the N- fractional calculus of products

$$(z^{\beta} \cdot \log az)\ (a \neq 0)$$

is reported as a serendipity in N- fractional calculus, by the author.

In this paper two kinds double infinite sums and a triple infinite sum which are obtained from the previous infinite sum are reported.

A triple infinite sum is shown as follows, for example.

Theorem. We have the triple infinite sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[(m-1)! \cdot (n+m)! \left(\sum_{k=1}^{m} (n+k)^{-1}\right)\right]^{-1}}{k(k+m)(k+m+1)\cdots(k+m+n)} = 1.59063\cdots ,$$

where $m \in Z^{+}$ and $n \in Z_0^{+}$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; On the infinite sum

$$Q_{m,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+m)(k+m+1)\cdots(k+m+n)} \quad (n \in Z^{+} \cup \{0\},\ m \in Z^{+})$$

(A serendipity in fractional calculus). J. Coll. Engng. Nihon Univ. B-32 (1991),7 - 13.

[6] K. Nishimoto and S.T, Tu ; On the Infinite Sum

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-1)! \cdot 2^{n-1}}{\prod_{k=0}^{n} (2k+3)} \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-1)! \cdot (n+1) \cdot 2^{n-1}}{\prod_{k=0}^{n+1} (2k+3)}$$

(A serendipity in fractional calculus). J. Coll. Engng. Nihon Univ. B-32 (1991),15 - 21.

[7] K. Nishimoto and S.T, Tu ; On the Infinite Sum

$$R_{m,\beta} = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m+k-1)! \cdot (-1)^k}{(m-1)!k} \cdot \frac{\Gamma(-m-k-\beta)}{\Gamma(-\beta)}$$

(A serendipity in fractional calculus). J. Coll. Engng. Nihon Univ. B-32 (1991),23- 30.

[8] K. Nishimoto ; Infinite Sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus). J. Frac. Calc. Vol.6 (1994), 15 -26.

[9] H.M. Srivastava and K. Nishimoto ; Some infinite sums derived by usuing fractional calculus of logarithmic functions, J. Frac. Calc. Vol.8 (1995), 57 - 61.

[10] K. Nishimoto ; On some infinite sums obtained by N- fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol.20 (2001), 1 - 6.

[11] K. Nishimoto, Ding- Kuo Chyan, Shy- Der Lin and Shih- Tong Tu ; On some infinite suns derived by N- fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol.20 (2001), 91 - 97.

[12] Pin- Yu Wang, Tsu- Chen Wu and Shih- Tong Tu ; Some Infinite Sums via N- Fractional Calculus, J. Frac. Calc. Vol.21 (2002), 71 - 77.

[13] Shy- Der Lin, Shih- Tong Tu, Tsai- Ming Hsieh and H.M. Srivastava ; Some Finite and Infinite Sums Associated with the Digamma and Related Functions, J. Frac. Calc. Vol.22 (2002), 103 - 114.

[14] K.S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Diffetial Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[15] Igor Podlubny ; Fractional Differential Equations (1999), Academic Press.

[16] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapor, New Jersey, London, Hong Kong.

[17] A.P. Prudnikov, Yu. A. Bryckov and O.I. Marichev ; Integrals and Series, Vol. I, Gordon and Breach, New York, (1986).

[18] S. Moriguchi, K. Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulae, Vol.2, Iwanami Zensho, (1957), Iwanami, Japan.

2. Notes on Partial Sums of Analytic Functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions in $\mathbb{U}$. Let $\mathcal{S}^*$ be the subclass of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which are starlike in $\mathbb{U}$. Also let $\mathcal{K}$ be the subclass of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which are convex in $\mathbb{U}$. The partial sum $f_n(z)$ of $f(z) \in \mathcal{A}$ is given by

$$f_n(z) = z + \sum_{k=2}^{n} a_k z^k.$$

Remark 1. (1) If $f(z) \in \mathcal{S}$, then $f_n(z)$ is not univalent in $\mathbb{U}$ when $|a_n| \geqq \dfrac{1}{n}$.

(2) The function

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{k=2}^{\infty} k z^k$$

is the extremal function for the class $\mathcal{S}^*$. But $f_n(z)$ is not starlike in $\mathbb{U}$.

(3) The function

$$g(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} z^k$$

is the extremal function for the class $\mathcal{K}$. But $g_n(z)$ is not convex in $\mathbb{U}$.

Remark 2. (1) $f_3(z) = z + 2z^2 + 3z^3$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z f_3''(z)}{f_3'(z)}\right) > \frac{3191}{15876} = 0.2009\cdots$$

for $0 \leqq r < \beta$, where β is the positive root of the equation

$$81x^4 - 162x^3 + 74x^2 - 16x + 1 = 0 \qquad (0 < x < \frac{1}{3}).$$

(2) $g_3(z) = z + z^2 + z^3$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zg_3'(z)}{g_3(z)}\right) > \frac{626}{961} = 0.6514\cdots$$

for $0 \leqq r < \beta$, where β is the positive root of the equation

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0 \qquad (0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Theorem 1. $f_3(z) = z + 2z^2 + 3z^3$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf_3''(z)}{f_3'(z)}\right) > 2\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right) = 0.7350\cdots$$

for $0 \leqq r < \dfrac{7 - 2\sqrt{10}}{9} = 0.0750\cdots$.

Theorem 2. $g_3(z) = z + z^2 + z^3$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zg_3'(z)}{g_3(z)}\right) > \frac{4 - \sqrt{5}}{2} = 0.9919\cdots$$

for $0 \leqq r < \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2} = 0.1455\cdots$.

Theorem 3.

(1) $f_3(z) = z + 2z^2 + 3z^3$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf_3'(z)}{f_3(z)}\right) > \frac{3(89 - 16\sqrt{22})}{137} = 0.3055\cdots$$

for $0 \leqq r < \dfrac{5 - \sqrt{22}}{3} = 0.1031\cdots$.

(2) $g_3(z) = z + z^2 + z^3$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zg_3''(z)}{g_3'(z)}\right) > \frac{3(89 - 16\sqrt{22})}{137} = 0.3055\cdots$$

for $0 \leqq r < \dfrac{5 - \sqrt{22}}{3} = 0.1031\cdots$.

3. Gaussian convolutionの実逆変換について

群馬大工　斎藤三郎

関数の解析性をコンピュータで捉えられるかという問について、人はできないと思うかも知れない。　ラプラス変換やワイヤシュトラス変換（ガウス convolution) の像関数が解析関数になることから、それらの逆変換を実軸上の値あるいは実際にコンピュータで求めるには実軸上の有限個の点での値を用いて逆変換を確立する必要がある。　このため実逆変換には本質的な難しさがある。　実際、それらの問題は古い歴史を有し、いろいろ具体的な応用の観点からも要請されて現在でもこれらの難問への挑戦が行われている（[6]、[11])。

私たちはそれらの積分変換の像関数を完全に特徴づける方法を得たことから、新しい解析的な逆変換公式を確立し、　さらに像関数に条件をつけると誤差評価や逆変換の条件付き安定性が導けることを示した（[1 - 4,6,7,10])。　しかしながら、それらの公式は解析性などの像関数の特徴的な性質を正確に用いているため、コンピュータを用いて逆変換を実際に求められるようにはなっていないように思われる。そこで、コンピュータで実現できるような逆変換公式を求めて新しい公式を考えている。

一般に、　ヒルベルト空間の枠内での、フレッドフォルムの第１種積分方程式の解法について、　上記の観点から

１）　定義域の関数を再生核を持つヒルベルト空間（上記の変換では具体的には１階のソボレフ空間）と制限する、
２）　Tikhonov regularizations の考えを取り入れる、
３）　最良近似の考えを取り入れて、一般逆を考える、
４）　解析性を射影作用素で捉える、

などの考えで、新しい逆変換公式を得たのでこれらの一般的な考えと具体的な公式を紹介する。　それらの中のある公式は驚くべきものになっていると思われる。

参考文献

[1] K. Amano, S. Saitoh and A. Syarif, *A Real Inversion Formula for the Laplace Transform in a Sobolev Space*, Z. Anal. Anw. **18**(1999), 1031-1038.

[2] K. Amano, S. Saitoh and M. Yamamoto, *Error estimates of the real inversion formulas of the Laplace transform*, Integral Transforms and Special Functions, **10**(2000), 165-178.

[3] D.-W. Byun and S. Saitoh, *A real inversion formula for the Laplace transform*, Z. Anal. Anw. **12**(1993), 597-603.

[4] D.-W. Byun and S. Saitoh, *Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces*, Proc. of the 2nd International Colloquium on Numerical Analysis, VSP-Holland (1994), 55–61.

[5] C. W. Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden (1993).

[6] V. V. Kryzhniy, *Regularized Inversion of Integral Transformations of Mellin Convolution Type*, (to appear in Inverse Problems).

[7] S. Saitoh, *The Weierstrass Transform and an Isometry in the Heat Equation*, Applicable Analysis, **16**(1983), 1-6.

[8] S. Saitoh, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman Ltd (1997), UK.

[9] S. Saitoh, *Linear integrodifferential equations and the theory of reproducing kernels*, Stability and Control: Theory, Methods and Applications, Volume 10, *Volterra Equations and Applications*: Edited by C. Corduneanu and I. W. Sandberg, Gordon and Breach Science Publishers, (2000), Amsterdam.

[10] S. Saitoh, Vu Kim Tuan and M. Yamamoto, *Conditional Stability of a Real Inverse Formula for the Laplace Transform*, Z. Anal. Anw. **20**(2001), 193-202.

[11] W. Ulmer and W. Kaissl, *The inverse problem of a Gaussian convolution and its application to the finite size of measurement chambers/detectors in photon and proton dosimetry*, (to appear in Inverse Problems).

e-mail address: ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp

4. Bloch-type Spaces 上の Closed Range を持つ合成作用素について

米田　力生　　　愛知教育大学

Dを複素平面C上の開単位円板とする。 The Bloch space Bを

$$\| f \|_{\beta} := |f(0)| + \| f \|_B < +\infty ,$$

where $\| f \|_B := \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)|$を満たす$D$上の解析関数全体、 the space $B_{\log}$を

$$\| f \|_{\beta_{\log}} := |f(0)| + \| f \|_{B_{\log}} < +\infty ,$$

where $\| f \|_{B_{\log}} := \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)| \left(\log \frac{2}{1 - |z|^2} \right)$を満たす$D$上の解析関数全体、 the space B_αを

$$\| f \|_{\beta_\alpha} := |f(0)| + \| f \|_{B_\alpha} < +\infty ,$$

where $\| f \|_{B_\alpha} := \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)|$を満たす$D$上の解析関数全体とする。

ω を positive continuous function on $[0, 1]$ with $\omega(|z|) \to 0$ ($|z| \to 1^-$) と仮定し、 the space B_ωを

$$\| f \|_{B_\omega} := \sup_{z \in D} \omega(|z|) |f'(z)| < +\infty$$

を満たすD上の解析関数全体とする。　φは a holomorphic function taking D into Dを表示し、C_φはφとの合成作用素とする。そのとき、文献[3]で、P. Ghatage と J.Yan と D.Zheng は 次の結果を証明した：

Theorem A. *Let φ be a holomorphic function taking D into D. If C_φ is bounded below on B, then there exist positive constants ϵ,r with $r < 1$ such that , for all $z \in D$, $\rho(\varphi(\Omega_\epsilon), z) \le r$ where $\Omega_\epsilon = \{z \in D : \left| \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \varphi'(z) \right| > \epsilon\}$.*

Theorem B. *Let φ be a holomorphic function taking D into D. If for some constants $0 < r < \frac{1}{4}$, for each $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(\varphi(z_w), w) < r$ and $\left| \frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \varphi'(z) \right| > \epsilon$, then C_φ is bounded below on B.*

我々は次の結果を証明した:

Theorem 1. *Let $\alpha > 1$. Let φ be a holomorphic function taking D into D and C_φ is bounded on B_α. If C_φ is bounded below on B_α, then there exist positive constants ϵ, r with $r < 1$ such that , for all $w \in D$, $\rho(\varphi(\Omega_\epsilon), w) \le r$ where $\Omega_\epsilon = \{z \in D : \left| \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \right)^\alpha \varphi'(z) \right| > \epsilon\}$.*

Theorem 2. *Let $\alpha > 1$. Let φ be a holomorphic function taking D into D. If for some constants $0 < r < \gamma_2 := \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\gamma_1}\}$, and $\epsilon > 0$, for each $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(\varphi(z_w), w) < r$* and $\left|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^\alpha \varphi'(z)\right| > \epsilon$, *then C_φ is bounded below on B_α.*

Theorem 3. *Let φ be a holomorphic function taking D into D and C_φ is bounded on $B_{\log}$. If C_φ is bounded below on $B_{\log}$, then there exist positive constants ϵ,r with $r < 1$ such that , for all $w \in D$, $\rho(\varphi(\Omega_\epsilon), w) \leq r$ where*

$$\Omega_\epsilon = \{z \in D : \left|\frac{\left(1-|z|^2\right)\left(\log\frac{2}{1-|z|^2}\right)}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)\left(\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)}\varphi'(z)\right| > \epsilon,\ \varphi(z) \in D(w,r)\ \}.$$

Theorem 4. *Let φ be a holomorphic function taking D into D. If for some constants $0 < r < C_2 := \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{C_1}\}$, and $\epsilon > 0$, for each $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(\varphi(z_w), w) < r$ and*
$\left|\frac{\left(1-|z|^2\right)\left(\log\frac{2}{1-|z|^2}\right)}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)\left(\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)}\varphi'(z)\right| > \epsilon$, *then C_φ is bounded below on $B_{\log}$.*

Theorem 5. *Let φ be a holomorphic function taking D into D. If for some constants $0 < r < K_2 := \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{K_1}\}$,and $\epsilon > 0$, for each $w \in D$, there is a point $z_w \in D$ such that $\rho(\varphi(z_w), w) < r$ and $\left|\frac{\omega(|z|)}{\omega(|\varphi(z)|)}\varphi'(z)\right| > \epsilon$, then C_φ is bounded below on B_ω.*

参考文献

[1] C.C.Cowen and B.D.MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[2] J.Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, New York, 1981.

[3] P. Ghatage and J.Yan and D.Zheng, Composition operators with closed range on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.129,7(2000), 2039-2044.

[4] K.Madigan and A.Matheson, Compact composition operators on the Bloch space, Trans.Amer. Math.Soc. 347 (1995), 2679-2687.

[5] J.H.Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, NewYork, 1993.

[6] R.Yoneda, The composition operators on weighted Bloch space, Archiv der Math. 78(2002)310-317.

[7] K.Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York 1990.

5. 単位球上の重調和グリーンポテンシャルの p-乗球面積分平均の増大度

二村俊英　広島大大学院・理学研究科
水田義弘　広島大学・総合科学部

Gardiner [1] や Mizuta [4] によって，n 次元単位球 $\mathbf{B}$ や上半空間上の調和グリーンポテンシャルの p-乗球面積分平均の増大度の評価がなされている．本講演では，この問題を単位球上の重調和グリーンポテンシャルにおいて考察する．

$G_2(x,y)$ を単位球上の重調和グリーン関数とし，単位球上の非負測度 μ に対して，

$$G_2\mu(x) = \int_{\mathbf{B}} G_2(x,y)\ d\mu(y)$$

と定義する．重調和グリーン関数 $G_2(x,y)$ の評価により，$G_2\mu$ が重調和グリーンポテンシャル（すなわち、$G_2\mu \not\equiv \infty$）であるための必要十分条件は

$$\int_{\mathbf{B}} (1-|y|)^2\ d\mu(y) < \infty$$

である．

関数 u の 原点が中心の半径 r 球面 $S(r)$ 上の球面積分平均を

$$\mathcal{M}(u,r) = ⨍_{S(r)} u\ dS = \frac{1}{|S(r)|}\int_{S(r)} u\ dS$$

で表す．さらに，$p>0$ に対して，$\mathcal{M}_p(u,r) = \{\mathcal{M}(|u|^p, r)\}^{1/p}$ とする．

定理 1. $G_2\mu$ を $\mathbf{B}$ 上の重調和グリーンポテンシャルとする。

(1) $n \le 4$ のとき，$1 \le p < \infty$ ならば，

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{n-2-(n-1)/p}\mathcal{M}_p(G_2\mu, r) = 0.$$

(2) $n \ge 5$ のとき，

(i) $1 \le p < (n-1)/(n-4)$ ならば，

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^{n-2-(n-1)/p}\mathcal{M}_p(G_2\mu, r) = 0.$$

(ii) $(n-1)/(n-4) \le p < (n-1)/(n-5)$ ならば、

$$\liminf_{r\to 1}(1-r)^{n-2-(n-1)/p}\mathcal{M}_p(G_2\mu, r) = 0.$$

この定理の応用として，$\mathbf{B}$ 上の優重調和関数が重調和グリーンポテンシャルとなるための条件を球面積分平均の極限で特徴付ける．ここで，開集合 Ω 上の下半連続な局所可積分関数 u が優重調和であるとは，

(i) $$\int_\Omega u(x)\Delta^2\varphi(x)dx \geq 0 \qquad (\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0)$$

(ii) $$u(x) = \lim_{r\to 0} ⨍_{B(x,r)} u(y)\ dy \in (-\infty, \infty] \qquad (\forall x \in \Omega).$$

定理 2. u を $\mathbf{B}$ 上の優重調和関数とする．このとき，u が

$$\liminf_{r\to 1}(1-r)^{-1}\mathcal{M}_1(u,r) = 0$$

を満たすならば，u は重調和グリーンポテンシャルである．

参考文献

[1] S. J. Gardiner, Growth properties of p-th means of potentials in the unit ball, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 861-869.

[2] W. Haußmann and O. Kounchev, Definiteness of the Peano kernel associated with the polyharmonic mean value property, J. London Math. Soc. (2) **62** (2000), 149-160.

[3] W. K. Hayman and B. Korenblum, Representation and uniqueness theorems for polyharmonic functions, J. Anal. Math. **60** (1993), 114.133.

[4] Y. Mizuta, Growth properties of p-th hyperplane means of Green potentials in a half space, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 1-12.

[5] M. Stoll, Rate of growth of pth means of invariant potentials in the unit ball of C^n, J. Math. Anal. Appl. **143** (1989), no. 2, 480–499.

[6] M. Stoll, Rate of growth of pth means of invariant potentials in the unit ball of C^n, II, J. Math. Anal. Appl. **165** (1992), no. 2, 374–398.

6. α-parabolic Bergman spaces

下村勝孝　茨城大・理
鈴木紀明　名大・多元
西尾昌治　阪市大・理

近年，Ramey や Yi および幾人かの研究者らにより，上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上の harmonic Bergman space の研究がすすめられている ([7],[8],[9])．そこで，鍵となっていることは，調和関数 u の Poisson 積分表示

$$u(x,t) = \int_{\boldsymbol{R}^n} P(x-y,t-s)u(y,s)dy \qquad (t > s > 0)$$

である．ここで，P は上半空間上の Poisson 核である．

これを見て，放物的に Bergman 空間を考えるのもおもしろいと考え，ここで，α-parabolic Bergman space を導入し，基本的な性質を確かめることにした．

$0 < \alpha \leq 1$ に対し，Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の α-次放物型作用素

$$L^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta)^\alpha$$

を考え，$W^{(\alpha)}$ を $L^{(\alpha)}$ の基本解とする：

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \begin{cases} (2\pi)^{-n} \int_{\boldsymbol{R}^n} \exp(-t|\xi|^{2\alpha} + \sqrt{-1}\, x \cdot \xi) d\xi & \text{if} \quad t > 0 \\ 0 \quad \text{othewise.} \end{cases}$$

ここで注意することは，$\alpha = 1/2$ のとき，$W^{(1/2)}(x,t) = P(x,t)$ と Poisson 核と一致するので，我々の理論は harmonic Bergman space を含む形ですすめられるという点である．

$1 \leq p < \infty$ に対し，

$$\boldsymbol{b}_\alpha^p := \{u : \boldsymbol{R}_+^{n+1} \to \boldsymbol{R} \in L^p | L^{(\alpha)} u = 0 \quad \text{(distribution)}\}$$

とおき，α-parabolic Bergman space とよぶ．

今回報告する結果は次のとおりである．

定理 1. $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対し，

$$u(x,t) = \int_{\boldsymbol{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t-s)u(y,s)dy \qquad (t > s > 0).$$

定理 1 は Huygens Property と呼ばれる ([11]) が，この結果と基本解の評価が，以下の結果を導くのに基本的に重要である．そして，定理 1 の証明には，$L^{(\alpha)}$ に関する調和測度と Riesz 核に関する掃散測度の関係が用いられる．

定理 2. $R_\alpha(x,t;y,s) := -2\partial_t W^{(\alpha)}(x-y,t+s)$ は，Bergman 核，すなわち，$L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1})$ から $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ への直交射影を表現する再生核である．

定理 3. $(b^p_\alpha)^* \simeq b^q_\alpha \quad (1 < p < \infty, 1/q + 1/p = 1)$

定理 4. $(b^1_\alpha)^* \simeq \mathcal{B}_\alpha/\boldsymbol{R}$. ここで，$\mathcal{B}_\alpha$ は α-parabolic Bloch space

$$\mathcal{B}_\alpha := \{u | L^{(\alpha)}u = 0, t\partial_t u \in L^\infty(\boldsymbol{R}^{n+1}_+)\}$$

であり，$\boldsymbol{R}$ は定数関数を表す．

定理 5. $(\mathcal{B}_{\alpha,0}/\boldsymbol{R})^* \simeq b^1_\alpha$. ここで，$\mathcal{B}_{\alpha,0}$ は α-parabolic little Bloch space，すなわち，$\mathcal{A}$ を Alexiandroff point とし，

$$\mathcal{B}_{\alpha,0} := \{u \in \mathcal{B}_\alpha | \lim_{(x,t)\to\mathcal{A}} t\partial_t u(x,t) = 0\}$$

である．

References

[1] J. L. Doob, Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.

[2] M. Itô, On α-harmonic functions, Nagoya Math. J., 26 (1966), 205–221.

[3] M. Itô and M. Nishio, Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order α, Nagoya Math. J., 115 (1989), 1–22.

[4] M. Nishio, The Wiener criterion of regular points for the parabolic operator of order α, Nagoya Math. J., 116 (1989), 163–179.

[5] M. Nishio and N. Suzuki, A characterization of strip domains by a mean value property for the parabolic operator of order α, New Zealand J. Math., 29 (2000), 47–54.

[6] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, preprint.

[7] H. Yi, Harmonic little Bloch functions on half-spaces, Math. Japonica, (1)47 (1998), 21–28.

[8] W. C. Ramey and H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 633–660.

[9] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, Bergman norm estimates of Poisson integrals, Nagoya Math. J. 161 (2001), 85–125.

[10] N. A. Watson, Parabolic equations on an infinite strip, Dekker, New York and Basel, 1989.

[11] D. V. Widder, The heat equation, Academic Press, 1975.

7. 容量関数を使った weak type のソボレフの不等式の評価

渡辺ヒサ子　　　　お茶の水女子大学人間文化研究科

Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界な開集合で, $1 < p < n$ とする. ソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega)$ のソボレフの不等式を使って, O'Neil や Peetre の結果より次の不等式が導かれる.

$\|\nabla u\|_p \leq 1$ であるようなどんな $u \in C_0^\infty(\Omega)$ に対しても

(1)
$$\int_0^\infty t^{p-1} |\{u > t\}|^{1-p/n} dt \leq c.$$

ここで, c は u に無関係な定数で, $|A|$ は集合 A の n 次元ルベーグ測度である.

$\Omega = \mathbf{R}^n$ のとき, この不等式が非整数次ソボレフ空間でどんな形で成り立つかかを考ええる.

G_α は α 次のベッセル核とする. 次の α 次ベッセルポテンシャルの集合

$$\mathcal{L}_\alpha^p = \{G_\alpha * f; f \in L^p(\mathbf{R}^n)\}$$

はノルムを $\|G_\alpha * f\|_{\alpha,p} = \|f\|_p$ で定義する。自然数 m に対しては, ソボレフ空間 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ は $\mathcal{L}_m^p$ と一致し, それらのノルムは同値であることが, 知られている. したがって, $\mathcal{L}_\alpha^p$ は整数次とは限らないソボレフ空間と見なされる.

$B_{\alpha,p}(A)$ を集合 A の α-次ベッセル容量として, $\mathbf{R}^n$ 上の関数 g に対し, ベッセル容量関数を

$$p(g) = \inf\{\|f\|_p;\ |g| \leq G_\alpha * f \ \ B_{\alpha,p} - q.e. \text{ on } \mathbf{R}^n,\ \ f \in L^p\}$$

と定義する.

このとき, 次の定理が得られる.

定理. $1 < p < n$, $\alpha p < n$, $u \in \mathcal{L}_\alpha^p$ とする. このとき

$$\int_0^\infty t^{p-1} |\{|u| > t\}|^{1-\alpha p/n} dt \leq cp(u).$$

ここで, c はに無関係な定数である.

この定理から $\alpha = 1$ の場合には, (1) が導かれる.

References

[A] N. G. Meyers, *A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes*, Math. Scand. **26** (1970), 255–292.

[H] K.. Hansson, *Imbetting theorems of Sobolev type in potential theorem*, Math. Scand. **45** (1979), 77–102.

[N] R. O'Neil, *Combolution operators and $L(p,q)$ spaces*, Duke Math. J. **30** (1963), 129–142.

[P] J. Peetre, *Espaces d'interpolation et théoreme de Soboleff*, Ann. Inst. Fourier **16** (1966), 279–317.

[S] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Prinston-New Jersey, 1970.

特別講演

Behaviour of Positive (Superharmonic) Harmonic Functions and Exceptinal Sets

Ikuko Miyamoto (Chiba University)

Let $\mathbf{R}$ and $\mathbf{R}_+$ be the set of all real numbers and all positive real numbers, respectively. We denote by $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ the n-dimensional Euclidean space. A point in $\mathbf{R}^n$ is denoted by $P = (X, y), X = (x_1, x_2, , , x_{n-1})$. The unit sphere and the upper half unit sphere are denoted by $\mathbf{S}^{n-1}$ and $\mathbf{S}_+^{n-1}$, respectively. When we introduce the system of the spherical coordinates

$$(r, \Theta), \Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}), \quad y = r\cos\theta_1$$

in $\mathbf{R}^n$, the half-space

$$\{(r, \Theta) \in \mathbf{R}^n : r \in \mathbf{R}_+,\ (1, \Theta) \in \mathbf{S}_+^{n-1}\} = \{(X, y) \in \mathbf{R}^n :\ y > 0\}$$

will be denoted by $\mathbf{T}_n$.

By $C_n(\Omega)$, we denote the set $\{(r, \Theta) \in \mathbf{R}^n : r \in \mathbf{R}_+,\ (1, \Theta) \in \Omega\}$ in $\mathbf{R}^n$ with a domain $\Omega \subset \mathbf{S}^{n-1} (n \geq 2)$ having smooth boundary. We call it a *cone*. Then $\mathbf{T}_n$ is a special cone obtained by putting $\Omega = \mathbf{S}_+^{n-1}$.

Consider the Dirichlet problem

$$\begin{aligned} (\Lambda_n + \lambda) f &= 0 \quad on\ \Omega \\ f &= 0 \quad on\ \partial\Omega, \end{aligned}$$

where Λ_n is the spherical part of the Laplace operator Δ_n

$$\Delta_n = \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-2}\Lambda_n.$$

We denote the least positive eigenvalue of this boundary value problem by τ_Ω and the normalized positive eigenfunction corresponding to τ_Ω by $f_\Omega(\Theta)$;

$$\int_\Omega f_\Omega^2(\Theta) d\sigma_\Theta = 1,$$

where $d\sigma_\Theta$ is the surface element on $\mathbf{S}^{n-1}$. We denote the solutions of the equation

$$t^2 + (n-2)t - \tau_\Omega = 0$$

by $\alpha_\Omega, -\beta_\Omega$ $(\alpha_\Omega, \beta_\Omega > 0)$. If $\Omega = \mathbf{S}_+^{n-1}$, then $\alpha_\Omega = 1,\ \beta_\Omega = n-1$, and

$$f_\Omega(\Theta) = (2ns_n^{-1})^{1/2}\cos\theta_1,$$

where s_n is the surface area $2\pi^{n/2}\{\Gamma(n/2)\}^{-1}$ of $\mathbf{S}^{n-1}$.

1. Behaviour of positive superharmonic functions and exceptional sets in a cone

(1) Definitions of exceptional sets in a cone

It is known that the Martin boundary Δ of $C_n(\Omega)$ is the set $\partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$ and each point of Δ is a minimal Martin boundary point. When we denote the Martin kernel by $K(P,Q)$ $(P \in C_n(\Omega), Q \in \partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\})$ with respect to a reference point chosen suitably, we know

$$K(P,\infty) = r^{\alpha_\Omega} f_\Omega(\Theta) \quad (P \in C_n(\Omega)).$$

A subset E of $C_n(\Omega)$ is said to be *minimally thin* at $\infty \in \Delta$ with respect to $C_n(\Omega)$, if there exists a point $P \in C_n(\Omega)$ such that

$$\hat{R}^E_{K(\cdot,\infty)}(P) \neq K(P,\infty),$$

where $\hat{R}^E_{K(\cdot,\infty)}(P)$ is the regularized reduced function of $K(\cdot,\infty)$ relative to E.

Let E be a Borel subset of $C_n(\Omega)$ and

$$E_k = E \cap I_k(\Omega) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

where

$$I_k(\Omega) = \{(r,\Theta) \in C_n(\Omega); 2^k \leq r < 2^{k+1}\}.$$

Since E_k is a bounded subset of $C_n(\Omega)$, then $\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}$ is bounded on $C_n(\Omega)$ and hence the greatest harmonic minorant of $\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}$ is zero. When we denote the Green function of $C_n(\Omega)$ by $G(P,Q)$ $(P \in C_n(\Omega), Q \in C_n(\Omega))$, we see from the Riesz decomposition theorem that there exists a unique positive measure λ_E on $C_n(\Omega)$ such that

$$\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}(P) = G\lambda_{E_k}(P) \quad (P \in C_n(\Omega)).$$

We denote the total mass $\lambda_{E_k}(C_n(\Omega))$ of λ_{E_k} by $\lambda_\Omega(E_k)$. The (Green) energy $\gamma_\Omega(E_k)$ of λ_{E_k} is defined by

$$\gamma_\Omega(E_k) = \int_{C_n(\Omega)} (G\lambda_{E_k}) d\lambda_{E_k}$$

As in $\mathbf{T}_n$ (Essén and Jackson [9, DEFINITION 3.1. and REMARK 3.1]), we have

Theorem 1.1 (Miyamoto and Yoshida [19, Theorem 1). *A subset E of $C_n(\Omega)$ is minimally thin at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$ if and only if*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_\Omega(E_k) 2^{-k(\alpha_\Omega+\beta_\Omega)} < \infty.$$

As in $\mathbf{T}_n$ (Essén and Jackson [9, DEFINITION 3.2.]), A subset E of $C_n(\Omega)$ is said to be *rarefied at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$*, if

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\beta_\Omega} \lambda_\Omega(E_k) < +\infty.$$

(2) Behaviour of positive superharmonic functions in a cone

We set

$$c(v) = \inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{v(P)}{K(P,\infty)}$$

for a positive superharmonic function $v(P)$ on $C_n(\Omega)$. We immediately see that $c(v) < +\infty$ (e.g. see Yoshida [24, Lemma 6.1]).

The following theorem 1.2 is immediately obtained by specializing the Fatou boundary limit theorem for the Martin space: for any positive superharmonic functin $v(P)$ in $C_n(\Omega)$

$$\text{mf } \lim_{P=(r,\Theta)\in C_n(\Omega), r\to+\infty} \frac{v(P)}{K(P,\infty)} = c(v),$$

where "mf limit" means minimal-fine limit (Naïm [21, THÉORÉME 10 and THÉORÉME 8'-17], also Doob [8, XII, 13. Theorem (a)]).

Theorem 1.2. *Let $v(P)$ be any positive superharmonic function in $C_n(\Omega)$. Then there exists a minimally thin set E at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$ such that $v(P)/K(P,\infty)$ uniformly converges to $c(v)$ on $C_n(\Omega)-E$ as $r \to +\infty$ ($P=(r,\Theta) \in C_n(\Omega)$). Conversely, for any minimally thin set E at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$ there exists a positive superharmonic function $v(P)$ such that*

$$\lim_{P=(r,\Theta)\in E, r\to+\infty} \frac{v(P)}{K(P,\infty)} = +\infty.$$

As in $\mathbf{T}_n$ (Essén and Jackson [9, THEOREM 4.6]), we have

Theorem 1.3 (Miyamoto and Yoshida [19, Theoerem 3]). *Let $v(P)$ be a positive superharmonic function on $C_n(\Omega)$. Then there exists a rarefied set E at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$ such that $v(P)r^{-\alpha_\Omega}$ uniformly converges to $c(v)f_\Omega(\Theta)$ on $C_n(\Omega) - E$ as $r \to +\infty$ ($P=(r,\Theta) \in C_n(\Omega)$).*

Remark 1.1. This theorem is best possible in the following sense: Given any rarefied set E at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$, there exists a positive superharmonic function $v(P)$ on $C_n(\Omega)$ such that $v(P)r^{-\alpha_\Omega}\geq 1$ on E and $c(v)=0$ (see Theorem 2.2). Hence $v(P)r^{-\alpha_\Omega}$ does not converge to $c(v)f_\Omega(\Theta)=0$ on E as $r \to +\infty$.

(3) Relation between minimally thin sets and rarefied sets in a cone

A cone $C_n(\Omega')$ is called a *subcone* of $C_n(\Omega)$, if $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ ($\overline{\Omega'}$ is the closure of Ω' on $\mathbf{S}^{n-1}$).

As in $\mathbf{T}_n$ (Essén and Jackson [9, Remark 3.2]), we have

Theorem 1.4 (Miyamoto and Yoshida [19, Theoerem 4]). *Let E be a subset of $C_n(\Omega)$. If E is rarefied at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$, then E is minimally thin at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$. If E is contained in a subcone of $C_n(\Omega)$ and E is minimally thin at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$, then E is also rarefied at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$.*

2. Characterizations of exceptional sets in a cone

(1) Qualitative characterizations

(A) Minimally thin sets

As for a subset of a Liapunov-Dini domain in $\mathbf{R}^n$ (Sjögren [22, THEOREME 2] and Dahlberg [7, THEOREM 1]), we have

Theorem 2.1 (Miyamoto, Yanagishita and Yoshida [17, THEOREM 1]). *The following statements are equivalent.*
(I) A subset E of $C_n(\Omega)$ is minimally thin at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$.
(II) (Sjögren type) There exists a positive superharmonic function $v(P)$ on $C_n(\Omega)$ such that

$$\inf_{P\in C_n(\Omega)} \frac{v(P)}{K(P,\infty)} = 0 \tag{2.1}$$

and

$$E \subset \{P \in C_n(\Omega); v(P) \geq r^{\alpha_\Omega} f_\Omega(\Theta)\}.$$

(III) (Dahlberg type) There exist a positive superharmonic function $v(P)$ on $C_n(\Omega)$ and a positive number m such that even if $v(P) \geq mK(P,\infty)$ $(P \in E)$, there exists $P_0 \in C_n(\Omega)$ satisfying $v(P_0) < mK(P_0,\infty)$.

(B) Rarefied sets

As in $\mathbf{T}_n$ (Essén and Jackson [9, Remark 4.4], Aikawa and Essén [3, Definition 12.4, p.74]) and in $\mathbf{T}_2$ (Hayman [11, p.474]), we have

Theorem 2.2 (Miyamoto and Yoshida [19, Theorem 2]). *A subset E of $C_n(\Omega)$ is rarefied at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$ if and only if there exists a positive superharmonic function $v(P)$ in $C_n(\Omega)$ satisfying (2.1) and*

$$E \subset \{P = (r,\Theta) \in C_n(\Omega);\ v(P) \geq r^{\alpha_\Omega}\}.$$

(2) Quantitative characterizations

(A) Minimally thin sets

As in $\mathbf{T}_n$ (Essén, Jackson and Rippon [10, COROLLARY 3]), we have

Theorem 2.3 (Miyamoto and Yoshida [19]). *If a subset of E of $C_n(\Omega)$ is minimally thin at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$, then E is covered by a sequence of balls B_k satisfying*

$$\sum_k \left(\frac{r_k}{R_k}\right)^n < +\infty,$$

where r_k is the radius of B_k and R_k is the distance between the origin and the center of B_k.

But we have a sharper result than in Theorem 2.3, because the energy $\gamma_\Omega(E)$ is countably sub-additive and quasi-additive. The following types of theorems were originally considered by Beurling [6] for a subset of a half-plane and then by Dahlberg [7] for a subset of a Liapunov-Dini domain in $\mathbf{R}^n$. As in $\mathbf{T}_n$ (Aikawa [1, Corollary 7 and Corollary 8]), we have

Theorem 2.4 (Miyamoto, Yanagishita and Yoshida [17, Theorem 2]). *Let a subset E of $C_n(\Omega)$ be minimally thin at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$. Then we have*

$$\int_E \frac{dP}{(1+|P|)^n} < \infty. \tag{2.2}$$

For a subset S in $\mathbf{R}^n$, the interior of S and the diameter of S are denoted by int S and diam S, respectively. For two subsets S_1 and S_2 in $\mathbf{R}^n$, the distance between S_1 and S_2 is denoted by $\mathrm{dist}(S_1, S_2)$. A cube is of the form

$$[l_1 2^{-k}, (l_1+1)2^{-k}] \times \cdots \times [l_n 2^{-k}, (l_n+1)2^{-k}]$$

where $k, l_1, \ldots, l_n$ are integers. Let ρ be a number satisfying $0 < \rho \le \frac{1}{2}$. A family of the Whitney cubes of $C_n(\Omega)$ with ρ is the set of cubes having the following properties;
(*i*) $\bigcup_i W_i = C_n(\Omega)$,
(*ii*) $\mathrm{int}\, W_i \cap \mathrm{int}\, W_j = \emptyset \quad (i \ne j)$,
(*iii*) $\left[\frac{8}{3\rho}\right] \mathrm{diam} W_i \le \mathrm{dist}(W_i, \mathbf{R}^n \setminus C_n(\Omega)) \le 2\left(\left[\frac{8}{3\rho}\right]+1\right) \mathrm{diam} W_i$,
where [a] denotes the integer satisfying $[a] \le a < [a]+1$ (Stein [23, p.167, Theorem 1]).

The following types of theorems were stated in Aikawa [1, Corollary 8] for a subset of T_n, Aikawa and Essén [2, Corollary 7.4.6 in p.158] for a subset of a Liapunov-Dini domain in $\mathbf{R}^n$.

Theorem 2.5 (Miyamoto, Yanagishita and Yoshida [17, Theorem 3]) *If E is a union of cubes from a family of the Whitney cubes of $C_n(\Omega)$ with ρ $(0 < \rho \le \frac{1}{2})$, then (2.2) is also sufficient for E to be minimally thin at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$.*

(B) Rarefied sets

When we set

$$d(P) = \inf_{Q \notin C_n(\Omega)} |P - Q|$$

for any $P \in C_n(\Omega)$, we have the following result analogous to Theorem 2.5, because $\lambda(E)$ is countably sub-additivite.

Theorem 2.6 (Miyamoto and Yoshida [20]). *Let E be a union of cubes from a family of the Whitney cubes of $C_n(\Omega)$ with ρ $(0 < \rho \le \frac{1}{2})$ such that*

$$\int_E \frac{dP}{(1+|P|)^{n-1} d(P)} < \infty. \tag{2.3}$$

Then E is rarefied at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$.

As in $\mathbf{T}_n$ (Essén, Jackson and Rippon [10, THEOREM 2 and p.397]), we have the following theorem, which gives Azarin [5, Theorem 2] with Theorem 1.3.

Theorem 2.7 (Miyamoto and Yoshida [20]). *If a subset of E of $C_n(\Omega)$ is rarefied at ∞ with respect to $C_n(\Omega)$, then E is covered by a sequence of balls B_k satisfying*

$$\sum_k \left(\frac{r_k}{R_k}\right)^{n-1} < +\infty,$$

where r_k is the radius of B_k and R_k is the distance between the origin and the center of B_k.

Remark 2.1. Since $\lambda(E)$ is not countably quasi-additivite (see Aikawa and Essén [3, p.105]), we cannot always obtain (2.3) from the rarefiedness of E as in Theorem 2.4.

3. Behaviour of positive harmonic functions and exceptional sets in a cone

(1) Equivalence set

Following Beurling [6], we say that a subset E of $C_n(\Omega)$ is an *equivalence set* for ∞, if every positive harmonic function in $C_n(\Omega)$ which majorizes $K(P,\infty)$ on E also majorizes $K(P,\infty)$ everywhere on $C_n(\Omega)$, i.e.

$$\inf_{P\in C_n(\Omega)} \frac{h(P)}{K(P,\infty)} = \inf_{P\in E} \frac{h(P)}{K(P,\infty)}$$

for every positive harmonic function h in $C_n(\Omega)$.

We set

$$B(P,r) = \{P' \in \mathbf{R}^n;\ |P'-P| < r\} \quad (r > 0)$$

for any $P \in C_n(\Omega)$. For a subset E of $C_n(\Omega)$ and a number ρ $(0 < \rho < 1)$ we put

$$E_\rho = \cup_{P\in E} B(P, \rho d(P)).$$

Aikawa [2, THEOREM 1] proved the following theorem for a subset of an NTA domain in $\mathbf{R}^n$.

Theorem 3.1 (Miyamoto, Yanagishita and Yoshida [18, Theorem 2] and Aikawa [2, THEOREM 1]). *Let E be a subset of $C_n(\Omega)$. The following conditions on E are equivalent:*
(i) E is an equivalence set for ∞;
(ii) for any ρ, $0 < \rho < 1$, E_ρ is not minimally thin at ∞;
(iii) for some ρ, $0 < \rho < 1$, E_ρ is not minimally thin at ∞ .

The following types of theorems were obtained by Beurling [6, Lemma 1] for a subset of a half-plane and then by Dahlberg [7, Theorem 1] for a subset of a Liapunov-Dini domain in $\mathbf{R}^n$.

Theorem 3.2 (Miyamoto, Yanagishita and Yoshida [18, Theorem 3]). *Let E be a subset of $C_n(\Omega)$. Then the following conditions on E are equivalent:*

(*i*) *E is an equivalence set for ∞ ;*

(*ii*) *$\int_{E_\rho}(1+|P|)^{-n}dP = +\infty$ for every ρ $(0<\rho<1)$;*

(*iii*) *$\int_{E_\rho}(1+|P|)^{-n}dP = +\infty$ for some ρ $(0<\rho<1)$.*

(2) Beurling's minimum Principle

Theorems 3.1 and 3.2 can be called "Beurling's minimum principle" by following Ancona [4] and Maz'ya [12]. We remark that the Martin function $K(P,\infty)$ is (up to a positive multiplicative constant) the only positive harmonic function in $C_n(\Omega)$ which vanishes on $\partial C_n(\Omega)$ and hence if $h(P)$ is a positive harmonic function of $C_n(\Omega)$, then

$$\liminf_{P\in C_n(\Omega),\ P\to P'} \{h(P) - K(P,\infty)\} \geq 0$$

for every $P' \in \partial C_n(\Omega)$. Thus if $h(P)$ satisfies an additional condition

$$\liminf_{P\in C_n(\Omega),\ P\to\infty} \{h(P) - K(P,\infty)\} \geq 0,$$

then it follows from the minimal principle of a harmonic function that $h(P)$ majorizes $K(P,\infty)$ everywhere on $C_n(\Omega)$.

In connection with the fact stated above, we shall say that a subset E of $C_n(\Omega)$ is an *essential equivalence set* for ∞, if every positive harmonic function $h(P)$ on $C_n(\Omega)$ satisfying

$$\liminf_{P\in E,\ P\to\infty} \{h(P) - K(P,\infty)\} \geq 0,$$

majorizes $K(P,\infty)$ everywhere on $C_n(\Omega)$.

Theorem 3.3 (Miyamoto and Yanagishita [16, Theorem 4]). *Let E be a subset of $C_n(\Omega)$. It is necessary and sufficient condition for E to be an essential equivalence set for ∞ that E is an equivalence set for ∞.*

4. Behaviour of positive harmonic (superharmonic) functions and exceptional sets in a cylinder

Let D be a bounded domain on $\mathbf{R}^{n-1} (n\geq 2)$ having smooth boundary. The set

$$\{(X,y)\in\mathbf{R}^n; X\in D, -\infty < y < +\infty\}$$

is usually called a *cylinder*. For a positive superharmonic (harmonic) functions in this cylinder, we can also obtain a result coresponding to each result in Sections 1, 2 and 3 (Miyamoto [13],[14], Miyamoto and Yanagishita[15],[16]).

References

[1] H.Aikawa: Quasiadditive of Riesz Capacity, Math. Scand., **69**(1991),15-30.

[2] H.Aikawa: Sets of determination for harmonic functions in an NTA domain, J. Math. Soc. Japan, **48**(1996), 299-315.

[3] H. Aikawa and M. Essén: Potential Theory-Selected Topics, Lecture Notes in Math. 1633, Springer-Verlag, 1996.

[4] A. Ancona; Positive harmonic functions and hyperbolicity, Lecture Notes in Math., 1344, Springer-Verlag, 1987, 1-23.

[5] V. S. Azarin: Generalization of a theorem of Hayman on subharmonic functions in an m-dimensional cone. Mat. Sb. **66**(108)(1965), 248-264 ; Amer. Math. Soc. Translation (2)**80** (1969), 119-138.

[6] A. Beurling: A minimum principle for positive harmonic functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math., **372**(1965), 3-7.

[7] B. E. J. Dahlberg: A minimum principle for positive harmonic functions. Proc. London Math. Soc. (3)**33**(1976), 238-250.

[8] J. L. Doob: Classical Potential Theory and Its Probabilistic Couterpart, Springer-Verlag, 1984.

[9] M. Essén and H. L. Jackson: On the covering properties of certain exceptional sets in a half-space, Hiroshima Math. J. **10**(1980), 233-262.

[10] M. Essén, H. L. Jackson and P. J. Rippon: On minimally thin sets in $\mathbf{R}^p$, $p \geq 2$, Hiroshima Math. J. **15**(1985), 393-410.

[11] W. K. Hayman: Subharmonic functions, Vol.2, Academic Press,1989.

[12] V. G. Maz'ya: Beurling's theorem on a minimum principle for positive harmonic functions, Zapiski Nau. Sem. LOMI, **30**(1972), (English translation) J. Soviet. Math., **4**(1975), 367-379.

[13] I. Miyamoto: Two criteria of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cylinder, preprint.

[14] I. Miyamoto: Minimally thin sets and Rarefied sets in a cylinder and their covering theorems, preprint.

[15] I. Miyamoto and M. Yanagishita: Beurling-Dahlberg-Sjögren type theorems for minimally thin sets in a cylinder, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[16] I. Miyamoto and M. Yanagishita: Beurling minimal principle in a cylinder, preprint.

[17] I. Miyamoto, M. Yanagishita and H. Yoshida: Beurling-Dahlberg-Sjögren type theorems for minimally thin sets in a cone, Canad.Math.Bull., **46**(2003), 252-264.

[18] I. Miyamoto, M. Yanagishita and H. Yoshida: On harmonic majorization of the Martin function at infinity in a cone, preprint.

[19] I. Miyamoto and Y. Yoshida: Two criterions of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cone, J. Math. Soc. Japan, **54**(2002), 487-512.

[20] I. Miyamoto and Y. Yoshida: Rarefied sets in a cone and covering theorems, preprint.

[21] L. Naïm: Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du Potential, Ann. Inst. Fourier Grenoble **7** (1957), 183-281.

[22] P. Sjögren: Une propriété des fonctions harmoniques positives d'aprés Dahlberg, Séminaire de théorie du potentiel. Lecture Notes in Math. 563, Springer-Verlag,1976,275-282.

[23] E. M. Stein: Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, 1970.

[24] H. Yoshida: Nevanlinna norm of a subharmonic function on a cone or on a cylinder, Proc. London Math. Soc. (3) **54** (1987), 267-299.

特別講演

強擬凸領域の幾何とベルグマン核

平地 健吾

東京大学大学院 数理科学研究科

Feffermanによって１９７９年提案された強擬凸領域の研究プログラム [4] は，歩みは遅いが，着実に進歩している．その基本的なアイディアは強擬凸領域のベルグマン核をリーマン多様体（あるいは共形多様体）上の熱核の類似と見ようというものである．熱核の漸近展開をとおして様々な指数定理が導かれるのはよく知られて事実である．ベルグマン核の漸近展開から強擬凸領域の指数定理を導くのがこのプログラムの最終的な目標である (もちろん，さらなる発展があればうれしい)．ベルグマン核の漸近展開については既に [4]，[1]，[14]，[11] により詳しい解析が行われている．この展開を指数定理に結びつけるのが現在の課題である．この講演では（試行的ではあるが）ベルグマン核およびセゲー核から領域の大域的不変量を定義する方法を与える．また熱核とスペクトル・ゼータ関数の関係に注目し，ベルグマン核に対応するゼータ関数の構成を試みる．どちらの結果も指数定理と呼べる段階ではないが，有望なアプローチであると期待している．

この原稿ではCR幾何と共形幾何の対応についても説明した．これによりベルグマン核およびセゲー核が親しみやすい対象であると思っていただければ幸いである．定理の証明については触れることができないが，最後の定理５を除いて，証明は代数解析（とくに単純ホロノミー系）の理論をもちいて行われる．

1　核関数の定義の復習

以下，この講演では Ω を n 次元複素多様体 M の中の相対コンパクトな領域とする． M 上の体積要素 dv を与え，Ω の L^2 ノルムを $\|f\|^2_{(\Omega,dv)} = \int_\Omega |f|^2 dv$ により定義する． このとき L^2 正則関数のなす空間 $H^2(\Omega, dv) = L^2(\Omega, dv) \cap \mathcal{O}(\Omega)$ はヒルベルト空間になる．(Ω, dv) のベルグマン核は $H^2(\Omega, dv)$ の完全正規直交系 $\{f_j(z)\}_j$ を用いて

$$B(z, \overline{w}) = \sum_j f_j(z)\overline{f_j(w)}$$

により定義される（この級数は $\Omega \times \Omega$ 上で広義一様収束し，$\{f_j(z)\}_j$ の選び方によらない）．

セゲー核は境界上の L^2 空間を用いて同様に定義される: 境界上の面素 $d\sigma$ を与え，L^2 ノルムを $\|f\|^2_{(\partial\Omega, dv)} = \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\sigma$ により定義する．このとき L^2 境界値をもつ正則関数の空間 $H^2(\partial\Omega, d\sigma) = L^2(\partial\Omega, d\sigma) \cap \mathcal{O}(\Omega)$ はヒルベルト空間になり，セゲー核は $H^2(\partial\Omega, d\sigma)$ の完全正規直交系 $\{f_j(z)\}_j$ を用いて

$$S(z, \overline{w}) = \sum_j f_j(z)\overline{f_j(w)}$$

により定義される．

詳しい解析をするに Ω の強擬凸性を仮定する; すなわち，各境界点 p にたいして p の近傍での正則座標で境界 $\partial\Omega$ が強凸となるものが選べるとする．このとき核関数 $B(z, \overline{w})$ および $S(z, \overline{w})$ の特異性は境界対角線集合上にのみ現れ，領域の定義関数 ρ (M 上の滑らかな実数値関数で $\Omega = \{z \in M : \rho(z) > 0\}$ かつ境界上で $d\rho \neq 0$ となるもの) を選べば

$$B(z, \overline{z}) = \varphi(z)\rho(z)^{-n-1} + \psi(z)\log\rho(z),$$

$$S(z, \overline{z}) = \varphi'(z)\rho(z)^{-n} + \psi'(z)\log\rho(z),$$

と表される (Fefferman の漸近展開 [3])．ここで係数 $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ は境界までこめて滑らかな関数である．（弱擬凸領域でのベルマン核の境界挙動の記述は現在でも困難な解析的な問題である．）

2 核関数から定義される大域的不変量

ベルグマン核およびセゲー核の境界での漸近展開から領域の大域的不変量を定義する方法を考える．このとき重要な指針となるのは共形幾何における熱核を用いた大域的不変量 (共形指数) の構成である．$(M, [g])$ を $2n$ 次元コンパクト共形多様体，$L_g = \Delta + \frac{n-2}{4(n-1)}R$ を山辺ラプラシアン，対応する熱核を $k_t(x, y)$ とする．$k_t(x, x)$ は $t = 0$ で特異性をもち

$$k_t(x, x) \sim t^{-n}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)t^j$$

のように展開が可能である．L_g は共形不変であるが係数 a_j は計量 $g \in [g]$ の選び方に依存して決まる局所リーマン不変量である．そこで g への依存性を明示して $a_j = a_j^g$ と書くことにする．

定理 (Branson–Ørstead [2], Parker–Rosenberg [17])．積分

$$\int_M a_n^g(x) dv_g(x) \tag{1}$$

は $g \in [g]$ の選び方によらない共形不変量である．

同様な結果がCR幾何においても成り立つ．その説明のために，CR構造と接触形式について復習する．J を M の複素構造とするとき $H(\partial\Omega) := T(\partial\Omega) \cap JT(\partial\Omega)$ は接束 $T(\partial\Omega)$ の実余次元1の部分束になる；$(H(\partial\Omega), J)$ をCR構造とよび，$\ker\theta = H(\partial\Omega)$ となる $\partial\Omega$ 上の1形式を接触形式とよぶ．強擬凸性を仮定すれば $d\theta$ が $H(\partial\Omega)$ 上で正定値エルミート形式を与えるように θ を選ぶことができる．このような θ は正値関数倍の任意性をもち，共形幾何において計量の族 $[g]$ を考えることに対応する．接触形式 θ を与えれば $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$ により $\partial\Omega$ 上の面素を与えることかできる．この面素から定義されるセゲー核を S_θ と書き，その境界での展開を ($'$ を省いて)

$$S_\theta(z, \overline{z}) = \varphi_\theta(z)\rho(z)^{-n} + \psi_\theta(z)\log\rho(z), \tag{2}$$

とおく．この展開は ρ の選び方に依存するが対数項の係数の境界値 $\psi_\theta|_{\partial\Omega}$ だけは $(\partial\Omega, \theta)$ によって局所的に決まる関数であることがわかる．この関数が熱核の展開の係数 a_n^g と対応する．実際，

定理1 [13]．(i) 境界上の積分

$$L(\partial\Omega, \theta) = \int_{\partial\Omega} \psi_\theta\, \theta \wedge (d\theta)^{n-1}$$

は接触形式 θ の選び方に依存しない．よって $L(\partial\Omega) = L(\partial\Omega, \theta)$ と書いてもよい．

(ii) M 内の滑らかな強擬凸領域の族 $\{\Omega_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ にたいして $L(\partial\Omega_t)$ は t に依存しない．

実際に積分 $L(\partial\Omega, \theta)$ を計算するのは困難である．$n = 2$ の場合には

$$\psi_\theta|_{\partial\Omega} = \frac{1}{24\pi^2}(\Delta_b R - 2\,\mathrm{Im}\, A_{11,}{}^{11})$$

であることが示されるが [10]. その積分は Stokes の定理により 0 となる. ここで Δ_b は sublaplacian. R と $A_{11,}{}^{11}$ は順に θ から決まる田中-Webster 接続のスカラー曲率とトーションの共変微分である. 残念ながら $L(\partial\Omega)$ が 0 でない計算例はまだ見つかっていない(不変量と呼んでよいのか少し心配である).

熱核の場合の (1) の共形不変性は熱方程式の変分から自然に導かれる. セゲー核を定義する方程式を与えることはできないが, セゲー核の超局所化し, ミクロ関数とみなせばミクロ微分作用素をもちいて変分公式を導くことができる. 定理 1 はその公式の応用である.

定理 1 で与えた不変量をベルグマン核から構成することも可能である. (Ω, dv) のベルグマン核 $B(z,\bar{z})$ は Ω 上の体積要素 $B(z,\bar{z})dv$ を与える. このとき $B(z,\bar{z})dv$ に関する Ω の体積は無限大になる. そこで, Ω の部分領域 $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega : \rho(z) > \varepsilon\}$ をとり, その体積

$$\mathrm{Vol}(\Omega_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} B(z,\bar{z})\, dv$$

の $\varepsilon \to +0$ での漸近展開を考える.

定理 2 [13]. M 上の任意の体積要素 dv および Ω の任意の定義関数 ρ にたいして $\mathrm{Vol}(\Omega_\varepsilon)$ は次の展開をもつ:

$$\mathrm{Vol}(\Omega_\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j\, \varepsilon^{j-n} + L(\partial\Omega)\log\varepsilon + O(1) \tag{3}$$

ここで C_j は定数, $L(\partial\Omega)$ は定理 1 で与えた不変量, $O(1)$ は有界項である.

この体積の漸近展開を用いた不変量の構成も共形幾何の類似と考えることができる: Ω を実 $2n+1$ 次元多様体 M 内の相対コンパクトな領域, g_+ を Ω 上の完備アインシュタイン計量で Ω の(任意の)定義関数 ρ にたいして $\rho^2 g_+$ が境界まで滑らかに拡張できるものとする(このような (Ω, g_+) は共形コンパクト・アインシュタイン多様体とよばれる [6]). このとき $\rho^2 g_+$ の境界への制限は $\partial\Omega$ 上のリーマン計量を与え, その共形類 $[g]$ は定義関数の選び方によらないことがわかる. このとき各 $g \in [g]$ にたいして ρ を標準的に選ぶことができ展開

$$\int_{\rho>\varepsilon} dv_{g_+} = \sum_{j=0}^{n-1} C_j\, \varepsilon^{2(j-n)} + L\log\varepsilon + O(1)$$

が成り立つ．ここに現れる L は g によらず共形類 $[g]$ の不変量を与える ([9], [7], [6]; 一般に (Ω, g_+) と $(\partial\Omega, [g])$ の対応は AdS/CFT 対応とよばれ物理的な関心からも研究が進められている）．

さらに共形幾何における不変量 L は Q-曲率とよばれる（共形不変でない）局所リーマン不変量の積分として表される [8]．例えば $n=2$ (よって $\dim\partial\Omega = 4$) の場合の Q-曲率は

$$Q_4 = \frac{1}{16}E - \frac{1}{4}|W|^2 - \Delta S.$$

ここで E は Pfaffian, W はワイル曲率, S はスカラー曲率，であり，その積分はガウス・ボンネの定理により

$$L = \int_{\partial\Omega} Q_4 dv_g = 8\pi^2\chi(\partial\Omega) - \frac{1}{4}\int_{\partial\Omega}|W|^2 dv_g$$

となる．右辺の第２項は局所共形不変量の積分であることに注意しておく．

この結果と定理１，２で与えた $L(\partial\Omega)$ は Fefferman 共形類を用いて結び付けることができる．Fefferman 共形類とは $\partial\Omega$ 上のある S^1-束 F 上に自然に定義されるローレンツ計量 (局所的には §5 で定義するローレンツ・ケーラー計量 $g[r]$ の $S^1\times\partial\Omega$ への制限) の共形類である．$n=2$ の場合 S^1-束 F は実 4 次元であり，上述の Q_4 が定義される．Q_4 は各ファイバー上では定数なので $\partial\Omega$ 上の関数を定義し，それがセゲー核の対数項の係数 $\psi_\theta|_{\partial\Omega}$ と（定数倍のずれをのぞいて）一致する [5]．ただこの場合にはローレンツ多様体 F のオイラー数は 0 であり，また $|W|^2$ は常に 0 になるため (これは 3 次元 CR 多様体の一般論から導かれる) 積分は上述のように 0 になってしまう．これは 3 次元 CR 構造の特殊性に起因する結果であり，高次元では自明でないものが見つかると期待できる．

以上では対数項の係数 $L(\partial\Omega)$ だけに注目したが，定義関数の選び方によっては他の係数 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ からも不変量が取り出せる可能性がある．その一つの例を与える．$E\to X$ を $n-1$ 次元コンパクト複素多様体上の正の直線束とする．このとき双対束のなかの円盤束 $\Omega = \{v\in E^* : |v| < 1\}$ は強擬凸領域になる．Ω の定義関数として $\rho = -\log|v|^2$ をとり E^* 上の体積要素を $dv = i^n\partial\rho\wedge\overline{\partial}\rho\wedge(\partial\overline{\partial}\rho)^{n-1}/(n-1)!$ で定める．

命題 3 [13]. (Ω, dv) のベルグマン核を $B(v,\overline{v})$ とするとき, 領域 $\Omega_\varepsilon = \{v \in E^* | \rho(v) > \varepsilon\}$ の Bdv に関する体積は次の展開をもつ:

$$\mathrm{Vol}(\Omega_\varepsilon) = 2\pi \int_0^\infty \epsilon^{-\varepsilon t} P(t) dt + O(\varepsilon^\infty) \tag{4}$$

ここで $P(t)$ は E のヒルベルト多項式, すなわち $m \gg 0$ にたいして $P(m) = \dim H^0(M, E^{\otimes m})$ をみたす多項式である.

これは体積の展開と指数定理との関連を示唆くるものではあるが, 残念ながら右辺の対数項は消えている.

3 重みつきのベルグマン核の解析接続

熱核から不変量を取り出す方法としてスペクトル・ゼータ関数が用いられる. ここではベルグマン核から「ゼータ関数」を定義する方法を考える. 熱核の固有関数での展開 $k_t(x,y) = \sum \epsilon^{-t\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(y)$ には固有値の情報が含まれているためメリン変換によりスペクトル・ゼータ関数と結び付けることができる. ところがベルグマン核にはそのような手がかりはない. そこで人工的にパラメーターを導入する.

§1 と同じ設定のもと実数 $s < 0$ にたいして重みつきの L^2 ノルム

$$\|f\|_s^2 = \int_\Omega |f(z)|^2 \frac{\rho(z)^{-s-1}}{\Gamma(-s)} dv(z), \tag{5}$$

を考える. ここで $\Gamma(-s)$ はガンマ関数である. このノルムに関する正則 L^2 関数のなす空間を

$$H_s(\Omega, r) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \|f\|_s < \infty\}$$

とおき, そのベルグマン核を $K_s[\rho](z,\overline{w})$ と書く. とくに $s = -1$ の場合が通常のベルグマン核 $B(z,\overline{w})$ と一致する. また $s \to 0$ での極限はセゲー核 $S(z,\overline{w})$ と一致する.

例 1. 単位球に定義関数 $\rho(z) = 1 - |z|^2$ を与えた場合:

$$K_s[\rho](z,\overline{w}) = \sum_\alpha \frac{z^\alpha \overline{w}^\alpha}{\|z^\alpha\|_s^2} = \frac{\Gamma(n-s)}{\pi^n} (1 - z \cdot \overline{w})^{s-n}.$$

この右辺を見れば $K_s[\rho](z,\overline{w})$ が s について解析接続可能であることがわかる．実はこれは，超局所化して考えれば一般の強擬凸領域でも成り立つ．以下ではその方法を説明する．

まず $K_s[\rho]$ の境界での漸近展開を与える．

定理 4 (小松 [16])．各 $s<0$ にたいして $K_s[\rho](z,\overline{z})$ は次の展開をもつ:

$$K_s[r] = \begin{cases} \varphi^{(s)}[\rho]\,\rho^{s-n} + \psi^{(s)}[\rho]\log\rho & \text{if } s\in\mathbf{Z}, \\ \varphi^{(s)}[\rho]\,\rho^{s-n} & \text{if } s\notin\mathbf{Z}. \end{cases} \tag{6}$$

ここで $\varphi^{(s)}[\rho],\psi^{(s)}[\rho]\in C^\infty(\overline{\Omega})$ は境界まで滑らかな関数である．

次のように関数を定義すれば

$$\Phi_s[\rho] = \begin{cases} \Gamma(-s)\rho^s & \text{if } s\in\mathbf{C}\setminus\{0,1,2,\dots\} \\ \frac{(-1)^{s+1}}{(-s)!}\,\rho^s\log\rho & \text{if } s\in\{0,1,2,\dots\} \end{cases}$$

二つの展開 (6) をまとめて

$$K_s[\rho](z) = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j^{(s)}[\rho](z)\Phi_{s-n+j}[\rho](z), \quad \varphi_j^{(s)}[\rho]\in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{7}$$

と書くことができる．変数 r と z は独立ではないのでこの展開の係数 $\varphi_j^{(s)}[\rho]$ の選び方には任意性があることを注意しておく．

展開 (7) は s について解析接続可能である．正確に述べると:

定理 5 [12]．展開 (7) の係数 $\varphi_j^{(s)}[\rho]$ は s についての多項式となるように選ぶことができる．すなわち

$$\varphi_j^{(s)}[\rho] = \sum_{k=0}^{2j} a_{j,k}[\rho]\,s^k$$

ここで $a_{j,k}[\rho]\in C^\infty(\overline{\Omega})$ は s によらない関数，という表示をもつ．

さらに関係式 $s\,\Phi_{s+j}[\rho] = -r\,\Phi_{s+j-1}[\rho] - j\,\Phi_{s+j}[\rho]$ を用いれば展開 (7) を

$$K_s[\rho] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j[\rho]\Phi_{s-n+j}[\rho], \tag{8}$$

のようにローラン級数の形にあらわすこともできる．ここで $a_j[\rho] \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は s によらない関数であり，$j<0$ について $a_j[\rho]=O(r^{-2j})$ をみたす（よって $a_j[\rho]\Phi_{s-n+j}[\rho]$ の境界での特異性は $|j|$ が大きくなるにつれて弱くなる）．この展開においては係数 $a_j[\rho]$ は modulo $O(r^\infty)$ で一意的に決定される．さらに写像 $r \mapsto a_j[\rho]$ は偏微分作用素として与えられる．

定理5により $K_s[\rho]$ は形式的級数として $s \in \mathbf{C}$ まで解析接続できることが分かった．ρ の実解析性を仮定すれば $K_s[\rho]$ が収束することをも証明できる．

4　不変式論を用いた $a_j[\rho]$ の計算

$K_s[\rho]$ の一意的な展開の係数として $a_j[\rho]$ を定義することができたが，その計算は容易ではない．この章では非常に性質のよい定義関数 ρ をえらべば $a_j[\rho]$ の幾何的な記述が可能であり，いくつかの $a_j[\rho]$ は CR 不変量を与えることを説明する．以下では $M=\mathbf{C}^n$ と仮定するが，全ての議論は局所的なので一般性は失わない．

ここで重要となるのは $a_j[\rho]$ の双正則変換則である．二つの強擬凸領域の間の双正則写像 $F\colon \widetilde{\Omega} \to \Omega$ は Fefferman の拡張定理 [3] により境界まで滑らかに拡張できる．よって Ω の定義関数 ρ にたいし $\widetilde{\Omega}$ の定義関数を

$$\widetilde{\rho} := |\det F'|^{-2/(n+1)} \rho \circ F \tag{9}$$

で与えることができる，ここで $\det F'$ は正則ヤコビ行列である．ノルム $\|\cdot\|_s$ の定義から直ちに重みつきベルグマン核の変換則

$$K_s[\widetilde{\rho}] = |\det F'|^{2(n-s)/(n+1)} K_s[\rho] \circ F \tag{10}$$

が導かれる．これを用いて $K_s[\rho]$ と $K_s[\widetilde{\rho}]$ の展開 (8) を比較すると，一意性により，係数の間の変換則

$$a_j[\widetilde{\rho}] = |\det F'|^{2j/(n+1)} a_j[\rho] \circ F \tag{11}$$

が導かれる．

このような変換則をみたす ρ の汎関数を全て決定できれば，その例である $a_j[\rho]$ も決定できることになる．そこでまず，変換則をみたす偏微

分作用素の作り方を考える．定義関数ρにたいして$\mathbf{C}^* \times \partial\Omega$の$\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^n$内での近傍上でのローレンツ・ケーラー計量

$$g[\rho] = \sum_{j,k=0}^{n} \frac{\partial^2(|z_0|^2 \rho(z))}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} dz_j d\overline{z}_k$$

を考える．gの曲率を$R = R[\rho]$その共変微分を$R^{(p,q)} = \overline{\nabla}^{q-2}\nabla^{p-2}R$とおき，次の形の完全縮約

$$W_{\#} = \mathrm{contr}\Big(R^{(p_1,q_1)} \otimes \cdots \otimes R^{(p_m,q_m)}\Big)$$

を考える．ここで指数は$\sum p_l = \sum q_l = m + w$をみたすとする．このような$W_{\#}$は各$\rho$にたいして$\overline{\Omega}$の境界の近傍で定義された関数$W[\rho] := W_{\#}[\rho]|_{z_0=1}$を与える．この汎関数$r \mapsto W[\rho]$を重み$w$のワイル汎関数とよぶ．$W$が重み$w$をもてば変換(9)のもと，目標の変換則

$$W[\widetilde{\rho}] = |\det F'|^{2w/(n+1)} W[\rho] \circ F$$

がえられる．

$a_j[\rho]$は全てワイル汎関数であたえられるというのが予想であるが，いまのところ証明できていない．しかしρの選び方に制限をつければこの予想が正しいことがわかる．これは[4]，[1]，[11]で開発された放物型不変式論の応用である．まず定義関数の作り方を説明する．$\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^n$上で次のような複素Monge-Ampère方程式を考える：

$$(-1)^n \det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^j \partial \overline{z}^k}\right)_{0 \le j,k \le n} = |z_0|^{2n}$$

この方程式は$\mathbf{C}^* \times \partial\Omega$に沿って次の形の形式解をもつ：

$$U = r_{\#} + r_{\#} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cdot (r^{n+1} \log r_{\#})^k$$

ここでrはΩの定義関数，$r_{\#}(z_0, z) = |z_0|^2 r(z)$，また$\eta_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$である．このような$U$にたいしては，その滑らかな部分$r_{\#} = |z_0|^2 r$が一意的に決定される．解$U$は一意的ではないが，全ての解$U$についてその滑らかな部分$r$を選び$\Omega$の定義関数の族$\mathcal{F}_\Omega$を与えることができる．この族は双正則写像による引き戻し(9)によって保たれる．

定理５ [12]. 定義関数 r を $\mathcal{F}_\Omega$ から選べば各 $a_j[r]$ は次のような表示をもつ:

$$a_j[r] = \sum_{k=0}^{\infty} W_{j,k}[r]\, r^k, \qquad r \in \mathcal{F}_\Omega, \tag{12}$$

ここで $W_{j,k}$ は重み $j+k$ のワイル汎関数の一次結合である．さらにこのとき $j \leq n+2$ にたいしては境界値 $a_j[r]|_{\partial\Omega}$ が $\partial\Omega$ の局所 CR 不変量を与える．

定理にしたがって展開の最初の３項を書き下すと

$$\pi^n K_s[r] = \Phi_{s-n}[r] + \frac{1}{24}\|R\|^2_{z_0=1}\Phi_{s-n+2}[r] + O(r^{s-n-3})$$

となる．初項の係数は定数であり，２項目 $\Phi_{s-n+1}[r]$ の係数は消える．３項目の係数も $\|R\|^2$ を除いてすべて消える．これは複素 Monge-Ampère 方程式から $g[r]$ の近似的 Ricci 平坦性が導かれるからである（Ricci 平坦性が不変式論において重要な役割を果たしている）．

最後に $K_s[\rho]$ をスペクトル・ゼータ関数の類似と見る理由を説明する (があまり説得力はない).

例２．ジーゲル領域

$$\Omega_0 := \{(z', z_n) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C} : r_0(z) := 2\,\mathrm{Im}\, z_n - |z'|^2 > 0\}.$$

は単位球と双正則同値なので, ベルグマン核の変換則から

$$K_s[r_0](z,\overline{w}) = \frac{\Gamma(n-s)}{\pi^n}\, r_0(z,\overline{w})^{s-n},$$

ここで $r_0(z,\overline{w}) := -i(z_n - \overline{w}_n) - z' \cdot \overline{w}'$, がわかる．さらに Ω_0 への $2\pi m \in 2\pi\mathbf{Z}$ の作用 $z \mapsto z + (0, 2\pi m)$ を考え, 商空間 $\Omega_0/2\pi\mathbf{Z}$ を定義すれば, そのベルグマン核 $\widetilde{K}_s[r_0]$ は $K_s[r_0]$ の重ねあわせ

$$\widetilde{K}_s[r_0](z,\overline{w}) = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} K_s[r_0](z, \overline{w} + 2\pi\ell)$$

で与えられる．よって Poisson の和公式により

$$\widetilde{K}_s[r_0](z,\overline{w}) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\, r_0(z,\overline{w})} m^{n-s-1}.$$

が導かれる. Re $r_0(z,\overline{w}) > 0$ で右辺は収束し s の正則関数を定義する. とくに s を Re $s > n$ に制限して境界値 $r_0 \to 0$ をとれば

$$\lim_{r_0 \to 0} \widetilde{K}_s[r_0](z,\overline{z}) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{n-s-1} = \zeta(n-s-1),$$

ここで $\zeta(a)$ はリーマンのゼータ関数である.

参考文献

[1] T. N. Bailey, M. G. Eastwood and C. R. Graham, *Invariant theory for conformal and CR geometry*, Ann. of Math. **139** (1994), 491–552.

[2] T. Branson and B. Ørstead, *Conformal indices of Riemannian manifolds*, Composito Math. **60** (1986), 261–293.

[3] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[4] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[5] C. Fefferman and K. Hirachi, *Ambient metric construction of Q-curvature in conformal and CR geometries*, Mathematical Research Letters, to appear. `arXiv:math.DG/0303184`

[6] C.R. Graham, *Volume and Area Renormalizations for Conformally Compact Einstein Metrics*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II, Suppl. **63** (2000), 31–42.

[7] C.R. Graham and E. Witten, *Conformal anomaly of submanifold observables in AdS/CFT correspondence*, Nucl. Phys. B **546** (1999) 52–64. `arXiv:hep-th/9901021`

[8] C.R. Graham and M. Zworski, *Scattering matrix in conformal geometry*, Invent. Math. **152** (2003), 89–118. `arXiv:math.DG/0109089`

[9] M. Henningson and K. Skenderis, *The holographic Weyl anomaly*, J. High Ener. Phys. **07** (1998), 023, `arXiv:hep-th/9806087`; *Holography and the Weyl anomaly*, `arXiv:hep-th/9812032`.

[10] K. Hirachi, Scalar pseudo-hermitian invariants and the Szegö kernel on three-dimensional CR manifolds, *in "Complex Geometry,"* Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **143**, pp 67–76, Dekker, 1992.

[11] K. Hirachi, *Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel*, Ann. of Math. **151** (2000) 151–191. `arXiv:math.CV/0010014`

[12] K. Hirachi, *A link between the asymptotic expansions of the Bergman kernel and the Szego kernel*, to appear in "Complex Analysis in Several Variables," Advanced Studies in Pure Mathematics, Math. Soc. Japan, Tokyo.

[13] K. Hirachi, *Logarithmic singularity of the Szegö kernel and a global invariant of strictly pseudoconvex domains*, preprint.

[14] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, *CR invariants of weight five in the Bergman kernel*, Adv. in Math. **143** (1999), 185-250.

[15] M. Kashiwara, *Analyse micro-locale du noyau de Bergman* Sém. Goulaouic-Schwartz, École Polytech., Exposé n° VIII, 1976–77.

[16] Gen Komatsu, personal communication.

[17] T. Parker and S. Rosenberg, *Invariants of conformal Lapalcians*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 199–222.

8. THE DILATATION AND THE ORDER OF PERIODIC ELEMENTS OF TEICHMÜLLER MODULAR GROUPS

EGE FUJIKAWA

Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology

For an arbitrarily Riemann surface R possibly of the infinitely generated fundamental group, an element χ of the Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}(R)$ that fixes the base point of the Teichmüller space $T(R)$ is induced by a conformal automorphism of R. We consider when the order of χ is finite. In [1], we proved that, for a Riemann surface R with the non-abelian fundamental group, a conformal automorphism f of R has the finite order if and only if f fixes either a simple closed geodesic, a puncture or a point on R. In each case, we estimated the order of f concretely in terms of the injectivity radius on a Riemann surface which satisfies a certain condition on hyperbolic geometry.

In this talk, we consider a quasiconformal automorphism f instead of a conformal automorphism. Then the element $\chi \in \mathrm{Mod}(R)$ induced by f does not necessarily fix the base point of $T(R)$. However we see that, if the maximal dilatation of f is less than some constant, then the orbit of the base point under the action of the iterate of χ is a finite set and χ is periodic. We estimate a range of the maximal dilatation of f for χ to be periodic as well as the order of the period of χ.

We give some definitions on hyperbolic geometry on Riemann surfaces.

Definition. For a constant $M > 0$, we define R_M to be the subset of points $p \in R$ such that there exists a non-trivial simple closed curve passing through p whose hyperbolic length is less than M. We say that R satisfies the *lower bound condition* if there exists a constant $\epsilon > 0$ such that R_ϵ consists only of cusp neighborhoods. Further we say that R satisfies the *upper bound condition* if there exist a constant $M > 0$ and a connected component R_M^* of R_M such that a homomorphism of $\pi_1(R_M^*)$ to $\pi_1(R)$ that is induced by the inclusion map of R_M^* into R is surjective.

We state our theorems.

Theorem 1. *Let R be a Riemann surface that satisfies the lower bound condition for a constant $\epsilon > 0$ and satisfies the upper bound condition for a constant $M > 0$ and for a connected component R_M^* of R_M. Let $\ell > 0$ be a constant.*

Then there exists a constant $K_0 = K_0(\epsilon, M, \ell) > 1$ depending only on ϵ, M and ℓ that satisfies the following property: Let f be a quasiconformal automorphism of R such that $f(c)$ is homotopic to c for a simple closed geodesic c on R with $c \subset R_M^*$ and $\ell(c) = \ell$. If $K(f) < K_0$, then there exists a positive integer n such that f^n is homotopic to the identity. Moreover, we have $n \leq N_0$, where

$$N_0 = N_0(M, \ell) = -\frac{\ell}{\log(\tanh(D+E))},$$

$$D = D(M, \ell) = \begin{cases} 2\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sinh(M/2)}{\sinh(\ell/2)}\right) + M & (\ell \leq M) \\ M & (\ell \geq M), \end{cases}$$

and

$$E = (1/4)\operatorname{arccosh}(e^{54}/2).$$

In particular, in the case that $K(f) = 1$, we have the following.

Theorem 2. *Let R be a Riemann surface that satisfies the upper bound condition for a constant $M > 0$ and for a connected component R_M^* of R_M. Let f be a conformal automorphism of R such that $f(c) = c$ for a simple closed geodesic c on R with $c \subset R_M^*$ and $\ell(c) = \ell > 0$. Then the order n of f satisfies*

$$n \leq \min\left\{-\frac{\ell}{\log(\tanh(D/2))},\ (e^M - 1)\cosh(\ell/2)\right\}.$$

Here $D = D(M, \ell)$ is the same constant in Theorem 1.

Theorems 1 and 2 yield the discreteness of the orbit of a point in the Teichmüller space under the action of a certain subgroup of the Teichmüller modular group.

Corollary 3 ([2]). *Let R be a Riemann surface satisfying the lower and upper bound conditions. For a simple closed geodesic c on R, let G be a subgroup of* $\mathrm{Mod}(R)$ *such that $g(c)$ is homotopic to c for every $[g] \in G$. Then for every point $p \in T(R)$, the orbit $G(p)$ of p is a discrete subset in $T(R)$. Further, for any point $p \in T(R)$, there exist only finitely many elements $[g]$ in G that fix p.*

References

[1] E. Fujikawa, *The order of conformal automorphisms of Riemann surfaces of infinite type*, Kodai Math. J., **26** (2003), 16–25.

[2] E. Fujikawa, H. Shiga and M. Taniguchi, *On the action of the mapping class group for Riemann surfaces of infinite type*, preprint.

9. Weil-Petersson計量の漸近展開公式の改良

小櫃 邦夫　鹿児島大学理学部
Scott A. Wolpert メリーランド大学

R_0 を種数 $g > 1$ で k 個のノードをもつ安定曲線とする．各ノード q_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は、近傍 $N_i = \{(z_i, w_i) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_i|, |w_i| < 1, z_i w_i = 0\}$ をもつ．$R_0 / \bigcup_{i=1}^{k} N_i$ にサポートをもつ1次独立なベルトラミ微分を τ_μ $(\mu = k+1, k+2, \ldots, 3g-3)$ とする．$\tau(s) = \sum_{\mu=k+1}^{3g-3} s_\mu \tau_\mu$ をベルトラミ微分にもつ擬等角写像 $f_s : R_0 \to R_s$ の像として安定曲線 R_s が定まる．f_s による自然な同一視で、z_i, w_i, N_i は R_s の座標、ノードの近傍とみなせる．さらに、R_s から各 N_i を $N_{i,t} = \{(z_i, w_i) | z_i w_i = t_i, |t_i| < 1\}$ にカット&ペーストして得られる滑らかな曲線を $R_{t,s}$ とおく．種数 g の曲線のタイヒミュラー空間 T_g に対して、$[R_{t,s}]$ での接空間 $T_{[R_{t,s}]}T_g$ における Weil-Petersson 計量の内積はつぎのように定義される．(ただし、$\rho_{t,s}^2$ は $R_{t,s}$ の双曲計量である.)

$$\langle \alpha, \beta \rangle (t, s) = \iint_{R_{t,s}} \alpha \overline{\beta}\, \rho_{t,s}^{-2} \qquad (\alpha, \beta \in T_{[R_{t,s}]} T_g)$$

$\partial / \partial t_i, \partial / \partial s_\mu$ を表す $R_{t,s}$ 上のベルトラミ微分をそれぞれ α_i, β_μ とおくとき、つぎの記号で Weil-Petersson 計量のリーマンテンソルを表す．$(i, j = 1, 2, \ldots, k, \quad \mu, \nu = k+1, \ldots, 3g-3)$

$$g_{i\overline{j}}(t, s) = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle (t, s), \quad g_{i\overline{\mu}}(t, s) = \langle \alpha_i, \beta_\mu \rangle (t, s), \quad g_{\mu\overline{\nu}}(t, s) = \langle \beta_\mu, \beta_\nu \rangle (t, s)$$

Weil-Petersson 計量の境界挙動について、次の結果が先駆的である．

定理 1 (Masur (1976) [1])

$$\begin{array}{lll}
i) & g_{i\overline{i}}(t, s) \approx \left[|t_i|^2 (-\log |t_i|)^3\right]^{-1} & \mathit{for}\ i \le k \\
ii) & g_{i\overline{j}}(t, s) = O(\left[|t_i||t_j|(\log |t_i|)^3 (\log |t_j|)^3\right]^{-1}) & \mathit{for}\ i, j \le k, i \ne j \\
iii) & g_{i\overline{\mu}}(t, s) = O(\left[|t_i|(-\log |t_i|)^3\right]^{-1}) & \mathit{for}\ i \le k, \mu \ge k+1 \\
iv) & \lim_{(t,s) \to (0,0)} g_{\mu\overline{\nu}}(t, s) = g_{\mu\overline{\nu}}(0, 0) & \mathit{for}\ \mu, \nu \ge k+1.
\end{array}$$

Yamada は、Wolf, Wolpert の結果 ([3], [4], [5]) を用いて、次のような定理 1 $i), iv)$ の改良を与えた.

定理 2 (Yamada (2001) [6], Prop.4)

$$i)' \quad g_{i\bar{i}}(t,s) = \pi^3 \left[|t_i|^2(-\log|t_i|)^3\right]^{-1}\left[1 + O\Big(\sum_{i=1}^{k}(\log|t_i|)^{-2}\Big)\right] \quad for\, i \le k$$

$$iv)' \quad g_{\mu\bar{\nu}}(t,s) = g_{\mu\bar{\nu}}(0,s) + O\Big(\sum_{i=1}^{k}(\log|t_i|)^{-2}\Big) \qquad for\, \mu,\nu \ge k+1.$$

最近、代数曲線の退化に対する双曲計量の漸近展開公式 (Wolpert [5], Expansion 4.2.) を精密化して、定理 1 $iv)$ のさらなる改良を得た.

定理 3 (Obitsu and Wolpert (2003) [2], Thm.6)

リーマン面上の座標、

$$\begin{aligned} iv)'' \quad & g_{\mu\bar{\nu}}(t,s) \\ = \quad & g_{\mu\bar{\nu}}(0,s) + \frac{4\pi^4}{3}\sum_{i=1}^{k}(\log|t_i|)^{-2}\Big\langle\beta_\mu, (E_{i,1}(z,2) + E_{i,2}(z,2))\beta_\nu\Big\rangle(0,s) \\ & + O\Big(\sum_{i=1}^{k}(\log|t_i|)^{-3}\Big). \end{aligned}$$

つまり、Weil-Petersson 計量の退化から Takhtajan-Zograf 計量が現れる!

参考文献

[1] Masur, H., *The extension of the Weil-Petersson metric to the boundary of Teichmüller space*, Duke Math. J. **43** (1976), 623-635.

[2] Obitsu, K. and Wolpert, S.A., *Notes: the grafting expansion and the Eisenstein series*, 21pp., preprint (2003).

[3] Wolf, M., *Infinite energy harmonic maps and degeneration of hyperbolic surfaces in moduli space*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 487-539.

[4] Wolf, M. and Wolpert, S.A., *Real analytic structures of the moduli space of curves*, Amer. J. Math. **114** (1992), 1079-1102.

[5] Wolpert, S.A., *The hyperbolic metric and the geometry of the universal curve*, J. Diff. Geom. **31** (1990), 417-472.

[6] Yamada, S., *Weil-Petersson completion of Teichmüller spaces and mapping class group actions*, 30pp. (2001), math.DG/0112001.

10. CHARACTERIZATIONS OF HYPERBOLICALLY CONVEX REGIONS

Seong-A Kim
Woosuk University

須川 敏幸
広島大学大学院理学研究科

X を定曲率 -4 を持つ単連結な 2 次元完備 Riemann 多様体とする。X の真部分領域 Ω は、その任意の二点を結ぶ X における測地線分が Ω に含まれるとき、(X において) 双曲的凸であると言われる。X には等角構造、従って複素構造が自然に入るので完備双曲計量 $\lambda_X(z)|dz|$ を持つ Riemann 面と考えることができるが、Ω もその部分領域として Riemann 面となり、一意化定理によりやはり完備双曲計量 $\lambda_\Omega(z)|dz|$ を持つことがわかる。同じ局所座標を用いて比 $\rho_{X,\Omega} = \rho_\Omega = \lambda_\Omega/\lambda_X$ を取れば、これは座標の取り方にはよらない Ω 上の函数と考えることができる。単調性 (Schwarz の補題) により $\rho_\Omega > 1$ であることに注意する。この講演ではこの函数 ρ_Ω の性質を用いた Ω の双曲的凸性を与える。そのために、いくつかの不変微分作用素と函数の凸性概念を用意しておく。まず

$$\partial_X = \frac{1}{\lambda_X}\partial,$$
$$\partial_X^2 = \frac{1}{\lambda_X^2}\left[\partial^2 - 2(\partial_X\lambda_X)\partial\right] = \frac{1}{\lambda_X^2}\left[\partial^2 - 2(\partial\log\lambda_X)\partial\right],$$
$$\Delta_X = \frac{1}{\lambda_X^2}\Delta = \frac{4}{\lambda_X^2}\partial\bar\partial$$

と定める。(実は、最初の二つは完全に座標に関して不変というわけではなく、例えば座標変換 $w = \varphi(z)$ に対しては、$\partial_X(r\circ\varphi) = (\varphi'/|\varphi'|)[(\tilde\partial_X r)\circ\varphi]$, $\partial_X^2(r\circ\varphi) = (\varphi'/|\varphi'|)^2[(\tilde\partial_X^2 r)\circ\varphi]$ のような変換則が成り立つ。ここに記号 $\tilde{}$ は座標 w に関するものを表すこととする。従って特に、少なくとも絶対値を取ればこれらは不変となる。) 次に X の (単連結とは限らない) 部分領域 Ω 上の函数 r が (X-) 双曲的凹であるとは、Ω に含まれる X の閉測地線分に対し、両端点を $t : 1-t$ に内分する点を w_t と書くとき

$$r(w_t) \geq \frac{\sinh[2(1-t)d]r(w_0) + \sinh[2td]r(w_1)}{\sinh[2d]}$$

が成立することをいう。ただしここに d は測地線分の長さとする。

我々の主定理は以下の通りである。

定理 1. Ω を単連結双曲 Riemann 面 X の真部分領域とするとき、次の各条件は互いに同値である。

(i) Ω は X において双曲的凸である。

(ii) $\left|\partial_X \dfrac{1}{\rho_\Omega}\right| \leq 1.$

(iii) $\left|\partial_X \dfrac{1}{\rho_\Omega}\right| \leq 1 - \dfrac{1}{\rho_\Omega^2}.$

(iv) $\Delta_X \dfrac{1}{\rho_\Omega} \leq \dfrac{4}{\rho_\Omega}.$

(v) $1/\rho_\Omega$ は Ω において優調和である。

(vi) $\Delta_X \dfrac{1}{\rho_\Omega} \leq -\dfrac{4}{\rho_\Omega}\left(1 - \dfrac{1}{\rho_\Omega^2}\right).$

(vii) $\rho_\Omega \left|\partial_X^2 \dfrac{1}{\rho_\Omega}\right| \leq \dfrac{3}{2}\left(1 - \left|\partial_X \dfrac{1}{\rho_\Omega}\right|^2\right)$

(viii) $\dfrac{1}{\rho_\Omega}\left|\partial_X^2 \dfrac{1}{\rho_\Omega}\right| + \left|\partial_X \dfrac{1}{\rho_\Omega}\right|^2 \leq 1 + \dfrac{1}{\rho_\Omega^2}.$

(ix) $1/\rho_\Omega$ は Ω 内で X-双曲的凹である。

(x) $\tanh(1/\rho_\Omega)$ は Ω 内で X-双曲的凹である。

Ω が X において双曲的凸であれば、必然的に Ω は単連結となるが、上の定理では Ω に単連結性を仮定していないことに注意されたい。

なお、講演ではいわゆる二点歪曲性による別の特徴付けにも触れたい。

11. Growth of Meromorphic Solutions of Some Functional Equations

柳原　二郎
石崎　克也（日本工業大学）

共通零点を持たない多項式

(1) $$a_j(z) = a_0^{(j)} - \sum_{k=1}^{A_j} a_k^{(j)} z^k, \quad \deg[a_j(z)] = A_j, \quad j = 0, \dots, p,$$

を係数とする函数方程式

(2) $$a_0(z)f(z) + a_1(z)f(cz) + \cdots + a_p(z)f(c^p z) = 0, \quad 0 < |c| < 1,$$

$a_0(z)a_p(z) \neq 0$, の整函数解, 有理型函数解について得られた結果を報告いたします. 超越的有理型函数解 $f(z)$ の存在を仮定すれば, その増大度は $T(r,f) = O((\log r)^2)$ かつ　$(\log r)^2 = O(T(r,f))$ であること, 特に, 超越整函数解の場合には

(3) $$m(r,f) = \frac{\sigma^*}{-2\log|c|}(\log r)^2(1+o(1)),$$

が成立することは, [1], [2] の中で紹介いたしました.

今回は問題意識を解の存在定理と(3) の中に現れる定数 σ^* について, 更に調べることにします [4]. 議論の中で(2) の左辺を c-差分作用素を $f(z)$ に作用させた形と見て, この作用素が分解（２つ以上の作用素の合成）に書けないときに既約であると定義して, 仮定のひとつに加えます.

整函数解を求めるために, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ と置いて係数の関係式を求めると, Poincaré の差分方程式 [6], [3] が得られます：

(4) $$T_n \alpha_n = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{A_j} a_k^{(j)} c^{(n-k)j} \alpha_{n-k} \right),$$

ここで,

$$T_n = a_0^{(0)} + a_0^{(1)} c^n + \cdots + a_0^{(p)} c^{np} = \sum_{j=0}^{p} a_0^{(j)} c^{nj}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$T_n = 0$ を満たす整数 n が存在しなければ, 非自明な解は得られないことは容易にわかります, またこのような n は高々 p 個なので $n_0 > n_1 > \cdots > n_k$, $k \leq p$ とおきます. *cf* [5].

解の存在 (非存在) や増大度などの性質は, $a_0(z)$ の形によって変化します. 実際, (i) $A_0 = 0$, (ii) $A_0 \geq 1$, $a_0(0) \neq 0$, (iii) $A_0 \geq 1$, $a_0(0) = 0$ の場合に分けて取り扱う必要があります. ここでは, (i) のときの結果のみ紹介いたします.

- 方程式(1) 2 が整函数解を持つための必要十分条件は, ある n に対して $T_n = 0$ となることである.
- $f_0(z) = z^{n_0} g(z)$, $g(z)$ は整函数で $g(0) \neq 0$ (n_0 に対する解) は必ず存在し, 定数倍を除いて一意的に決まる.
- 方程式(1) が既約であるとする. $f_0(z)$ の増大を測る (3) における σ^* は Newton-polygon の最大勾配で与えられる.

References

✓ [1] W. Bergweiler, K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Meromorphic solutions of some functional equations,* Methods Appl. Anal. 5(3) (1998), 248–258. Correction Methods Appl. Anal. 6(4) (1999).

✓ [2] W. Bergweiler, K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Growth of meromorphic solutions of some functional equations* I, Aequationes Math. 63 (2002), 140–151.

[3] W. Bergweiler and W. Hayman, *Zeros of solutions of a functional equation,* to appear in Comput. Methods Funct. Theory.

[4] K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Growth of meromorphic solutions of some functional equations* II. Preprint.

[5] J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo and D. Yang, *Meromorphic solutions of some linear functional equations,* Aequationes Math. 63 (2002), 110–135.

[6] O. Perron, *Über die Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen,* Math. Ann. 84 (1921), 1–15.

Acta Math 61, 1-38.

12. On some holomorphic curves extremal for the defect relation

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. **(a)** Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a don-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \; : \; \boldsymbol{C} \;\rightarrow\; \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$.

Defect Relation ([1]($N = n$), [3]($N > n$). See [2]). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequality:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curves extremal for the defect relation.

Problem. $\delta(\boldsymbol{a}_j, f)$? when the equality holds in the defect relation.

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$.

Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

Further we put

$$\mathcal{O} = \{P \subset Q \mid 0 < \#P \leq N + 1\} \;\text{ and }\; \lambda = \min_{P \in \mathcal{O}} \frac{d(P)}{\#P}.$$

Then, we have

Proposition. $\frac{1}{N-n+1} \leq \lambda \leq \frac{n+1}{N+1}$ and

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq \min\{2N - n + 1, (n+1)/\lambda\} \tag{1}$$

([4]).

2. Result.

Theorem. Suppose that
(i) $N > n = 2m - 1$ and $(m, N - m + 1) = d \ \ (m \in \boldsymbol{N})$;
(ii) there exist $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X \ (2N - n + 1 < q < \infty)$ satisfying $\delta(\boldsymbol{a}_j, f) > 0$ $(j = 1, \cdots, q)$ and

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1.$$

Then, either (I) or (II) given below holds:
(I) There exist at least $[(2N-n+1)/(n+1)]+1$ integers $j \in Q$ satisfying $\delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 1$.

(II) There are mutually disjoint subsets $P_1, \cdots, P_p$ of Q satisfying
(a) $Q = \cup_{k=1}^{p} P_k$ and
(b) for some integers $a_k \ \ (1 \leq a_k \leq d)$

$$d(P_k) = a_k\mu, \quad \#P_k = a_k\nu \ \text{ and } \ \nu \sum_{k=1}^{p} a_k = q,$$

where $\mu = m/d$ and $\nu = (N - m + 1)/d$.

Proof. From (1), (ii) and (i) we obtain the inequality

$$\lambda \leq \frac{n+1}{2N - n + 1} = \frac{m}{N - m + 1}.$$

When $\lambda < \frac{m}{N-m+1}$, we have (I); and when $\lambda = \frac{m}{N-m+1}$, we have (II).

Remark. This theorem is a generalization of the result for $d = 1$ given in [5], which was reported at the annual meeting of M.S.J. on March 29, 2002.

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[3] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

[4] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum. Kodai Math. J., 24-1(2001), 134-146.

[5] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, III. NIT Sem Rep. on Math., No.158(2002), pp.20.

※印は本会で記入

※番号	題	
13.		Entire and meromorphic solutions of $f^5 + g^5 + h^5 = 1$

氏名		所属	
	Gary G. Gundersen		ニューオリンズ大学
	藤解 和也		金沢大学　工学部

In 2001, Gundersen [1] gave the first example of three transcendental meromorphic (non-entire) functions f, g, h in the plane that satisfy the equation

$$f^5 + g^5 + h^5 = 1. \tag{1}$$

In this talk we give new examples of transcendental entire, non-constant rational, and transcendental meromorphic (non-entire) solutions of (1).

Our main result is about a "general" solutions of (1).

Theorem *Let w be a non-constant meromorphic function, and set*

$$F = \frac{-1 + 2\sqrt{2}\,i\,w - w^2}{1 + 2\sqrt{2}\,i\,w + w^2}, \quad G = \frac{1 + \sqrt{2}\,i + (1 - \sqrt{2}\,i)w^2}{1 + 2\sqrt{2}\,i\,w + w^2},$$

$$H = \frac{1 - \sqrt{2}\,i + (1 + \sqrt{2}\,i)w^2}{1 + 2\sqrt{2}\,i\,w + w^2}.$$

Then

$$F^5 + G^5 + H^5 = 1. \tag{2}$$

By choosing w to be certain *particular* functions in Theorem, we can obtain three transcendental *entire* functions F, G, H that satisfy (2).

Then we will speak along the following lines:

(a) For the purposes of illustration and clarity, we discuss in more detail the steps in the above method to find examples of (1).

(b) At the same time we use the above method in more detail to find various kinds of examples of (1), and in particular, we determine when this method gives non-constant entire solutions of (1).

(c) We discuss the idea by Reznick [2], [3], which is similar to the above idea.

(d) We give a generalization of Gundersen's example and compare it with the above examples.

Open problem *It is known that there cannot exist transcendental entire solutions of*

$$f^n + g^n + h^n = 1\,, \tag{3}$$

when $n \geq 7$. *On the other hand, the above example shows that there exist transcendental entire solutions of* (3) *when* $n = 5$, *and it is also known that there exist such examples for all* n *satisfying* $1 \leq n \leq 4$. *Therefore, the one remaining open question is whether there exist transcendental entire solutions of* (3) *when* $n = 6$*?*

References

[1] G. G. Gundersen, *Meromorphic solutions of* $f^5 + g^5 + h^5 \equiv 1$, Complex Variables **43** (2001), 293–298.

[2] B. Reznick, Analytic number theory seminar notes, UIUC, 9/21/00.

[3] B. Reznick, *Patterns of dependence among powers of polynomials*, to appear in DIMCS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.

14. 有理形関数に対する一意性をもつ２点集合族について

岡本崇志　　　大阪府立大学大学院工学研究科

城崎　学　　　大阪府立大学工学部

定義. S_j $(1 \leq j \leq q)$ を $\hat{\boldsymbol{C}}$（または $\boldsymbol{C}$）の互いに共有点をもたない疎な集合とする．$\{S_1, \cdots, S_q\}$ が有理形関数（または整関数）に対する一意性（略：UPM（または UPE））をもつとは，$\boldsymbol{C}$ 上の非定数有理形関数（または非定数整関数）f, g に対して，

$$f^{-1}(S_j) = g^{-1}(S_j) \quad (CM) \quad (1 \leq j \leq q)$$

から $f = g$ が導かれるときにいう．

特に，$\{S\}$ が UPM（または UPE）をもつとき，S を有理形関数（または整関数）に対する一意性値域集合（略：URSM（または URSE））という．

例えば Nevanlinna の４点定理より，任意の順序で非調和比が -1 にならない４点 $a_1, \cdots, a_4$ をとれば，$\{\{a_1\}, \cdots, \{a_4\}\}$ は UPM をもつ．また，Yi らにより UPM や UPE をもつ集合の例が幾つか挙げられているが，１点集合を含まない集合の集まりで，generic な条件の下で UPM や UPE をもつという結果は知られていないようである．あるいは，それらの例ではほとんど１点集合や５点以上の集合が現れ，２点から４点の集合ではそのようなものを作るのは難しい（もちろん，Nevanlinna の結果から他愛のない例は直ぐ作れる）．

ここでは２点集合についての結果を報告する．

定理 1. $\xi_1, \eta_1, \cdots, \xi_q, \eta_q$ は相異なる点とし，$S_j = \{\xi_j, \eta_j\}$ とおく．相異なる 3 つの j について ξ_j と η_j を交換する 1 次変換が存在しないと仮定する．このとき，$q \geq 6$ ならば $\{S_1 \cdots, S_q\}$ は UPM をもつ．

定理 2. 定理 1 の仮定の下，さらに各 S_j の中点は相異なるとする．このとき，$q \geq 5$ ならば，$\{S_1 \cdots, S_q\}$ は UPE をもつ．

Main References

- K. Tohge, *Meromorhphic functions covering certain finite sets at the same points*, Kodai Math. J. **11** (1988), 249–279.
- R. Nevanlinna, *Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen*, Acta Math. **48** (1926), 367–391.
- H.-X. Yi, *Unicity theorems for entire functions*, Kodai Math. J. **17** (1994), 133–141.
- H.-X. Yi, *A question of Gross and the uniqueness of entire functions*, Nagoya Math. J. **138** (1995), 169–177.
- H.-X. Yi, *Meromorphic functions that share three sets*, Kodai Math. J. **20** (1997), 22–32.

15. 二次元スタイン多様体 M 上の非退化正則写像の値分布と M の分類 (I) M 上の非退化正則写像の値分布

足立幸信

1941 年、R.Nevanlinna[Ne] は整関数の値分布理論が $\mathbb{C}$ と同様な性質をもつ開リーマン面として nullberandeten Flächen を考え、開リーマン面の分類の一つのきっかけを与えた。

R, R' は以下、開リーマン面とする。よく知られているように、R 上にグリーン関数が存在するとき双曲型、存在しないとき放物型 $(R \in O_G)$ という。R 上非定数有界正則関数が存在しないリーマン面のクラスを O_{AB} とすると $O_G \subsetneqq O_{AB}$ であることが知られている。

命題 1　O_{AB} でない双曲型リーマン面を R, R' とすると、$M = R \times R'$ の解析曲線で、その正規化が O_{AB} のリーマン面と双正則となることはない。M を $\mathbb{C}^2$ の有界領域としても同様のことがいえる。

西野に従って放物型のリーマン面で種数有限のものを特殊放物型、コンパクトリーマン面から有限個の点を除いたものを代数型のリーマン面と呼ぶ。

命題 2　(cf. [Ni3])　$\phi : R \to R'$　が非定数正則写像とすると、$R \in O_G$ なら $R' \in O_G$、R が特殊放物型（代数型）なら R' もそう。

西野 [Ni3]、鈴木 [Su2] によって M 上の正則関数が level curve の既約成分の正規化がどういう型のリーマン面と双正則かで、２変数の整関数と同様に分類されている。ここではその定義は省略する。（講演では述べる。）$\mathcal{O}_E(M), \mathcal{O}_H(M), \mathcal{O}_P(M), \mathcal{O}_{SP}(M), \mathcal{O}_A(M)$ をそれぞれ M 上非定数、双曲型、放物型、特殊放物型、代数型正則関数の全体とする。たとえば $f \in \mathcal{O}_P(M)$ とは f の level curve の既約成分の正規化すべてが O_G のリーマン面と双正則である、というのが定義なのであるが、山口 [Y1,2]、西野 [Ni3]、鈴木 [Su1,2] によって一様性原理が示されており、実用上ほとんどの level curve について議論すればよい。

定義3　$F: M \to \mathbb{C}^2$ が非退化（像が開集合を含む）正則写像のとき $F \in E(M)$ と書く。いま $F \in E(M), P(x,y)$ を非定数多項式とする。

（1）$\forall P$ に対し、$P \circ F \in \mathcal{O}_H(M)$　のとき $F \in GH(M)$,

（2）$\exists P$ に対し、$P \circ F \in \mathcal{O}_H(M)$　のとき $F \in H(M)$,

（3）$\forall P$ に対し、$P \circ F \in \mathcal{O}_P(M)(,\mathcal{O}_S P(M), \mathcal{O}_A(M))$　のとき $F \in P(M)(,SP(M), A(M))$,

（4）$\exists P_1, P_2$ に対し、$(P_1, P_2) \circ F \in E(M), P_1 \circ F, P_2 \circ F \in \mathcal{O}_P(M)$ のとき $F \in G(M)$ と記号する。

$GH(M), H(M), P(M), SP(M), A(M), G(M)$ をそれぞれ M の真性双曲型、双曲型、放物型、特殊放物型、代数型、一般型正則写像という。

$G(M)$ は $P(M)$ を含み、$H(M) - GH(M)$ の一部を含む広いクラスの写像族である。それについて、次のピカールの小定理の一般化と考えられる定理が [A2] で $G(\mathbb{C}^2)$ において示したように同様に成立する。$GH(M)$ の代表例であるファトゥー・ビーベルバッハ写像は明らかにピカールの小定理の一般化は成立しない。従って一変数整関数全てに対して成立するようなピカールの小定理を $E(M)$ に対して一般化することはできない。

$F \in E(M), p \in \mathbb{C}^2$ に対し $F^{-1}(p)$ が M の curve を含むような点 p の全体を E_0 とすると、E_0 は高々可算個の点である。

定理4　$F \in G(M)$ とする。$N_F = \sup_{p \in \mathbb{C}^2 - E_0} N_F(p)$ とおく。ここに $N_F(p)$ は $\{F^{-1}(p)\}$ の重複度を込めて数えた個数で $N_F(p) \leq \infty$ である。すると $\exists E \subset \mathbb{C}^2, E_0 \subset E$、$E$ の $\mathbb{R}^4$ のルベーグ測度は0で、$p \in \mathbb{C}^2 - E$ なら $N_F(p) = N_F$、$p \in E - E_0$ なら $N_F(p) < N_F$ となる。

系5　$F \in E(M)$ の除外集合の $\mathbb{R}^4$ のルベーグ測度が正なら $F \in H(M) - G(M)$。

16. 二次元スタイン多様体 M 上の非退化正則写像の値分布と M の分類 (II) M の分類

足立幸信

定義 1

（1） $P(M) = \emptyset$ のとき $M \in \mathcal{H}$ とし、双曲型と呼ぶ。

（2） $P(M) \neq \emptyset$ のとき $M \in \mathcal{P}$ とし、放物型と呼ぶ。

（3） $SP(M) \neq \emptyset$ のとき $M \in \mathcal{SP}$ とし、特殊放物型と呼ぶ。

（4） $A(M) \neq \emptyset$ のとき $M \in \mathcal{A}$ とし、代数型と呼ぶ。

（5） $G(M) \neq \emptyset$ のとき $M \in \mathcal{G}$ とし、一般型と呼ぶ。

（6） $E(M) = GH(M)$ のとき $M \in \mathcal{GH}$ とし、真性双曲型と呼ぶ。

命題 2　$\Phi : M \to M'$ ：双正則によって上のクラスは不変。

命題 3　任意の M について $GH(M) \neq \emptyset$。

命題 4　$\mathcal{GH} \subset \mathcal{H}, \mathcal{H} \cap \mathcal{P} = \emptyset, \mathcal{A} \subset \mathcal{SP} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{P} - \mathcal{GH}$。

例 5

（1） M_1 がコンパクト化 $(M_1, \Phi, \hat{M})$ を持ち（$\hat{M}$ はコンパクト複素多様体、$\Phi : M_1 \to M_0 = \Phi(M)$ は双正則、$\hat{M} - M_0 = C$ は $\hat{M}$ の curve）、$\hat{M}$ で有理型写像 F で、$F \in E(M_0)$ なら $M_1 \in \mathcal{A}$。

（2） $M_2 = \mathbb{C}^2(x, y) - \{x = a_1, a_2, \cdots\} - \{y = b_1, b_2, \cdots\}, \{a_i\}, \{b_j\}$ は $\mathbb{C}$ の内部に集積しない無限個の数列、とすると $M_2 \in \mathcal{SP} - \mathcal{A}$。

（3） $R, R' \in O_G$ とすると $M_3 = R \times R' \in \mathcal{G}$。

（4） $\{|f(x, y)| < 1\}, f \in \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2)$ の連結成分を M_4 とすると $M_4 \in (\mathcal{H} - \mathcal{GH}) - \mathcal{G}$。

（5） $\mathbb{C}^2$ の有界スタイン領域 $\in \mathcal{GH}$。R, R' は双曲型で O_{AB} でないリーマン面とすると $M_5 = R \times R' \in \mathcal{GH}$。

定理 6　$M \in \mathcal{G}$ 上非定数有界正則関数は存在しない。

注意 7　$R, R' \in O_{AB}$ とすると $M_6 = R \times R'$ 上非定数有界正則関数は存在しない。$M_6 \in \mathcal{G}$ であろうか？

西野 [Ni2,3]、鈴木 [Su2] より

定理 8　M を位相的に有限 $(dim H_i(M, \mathbb{Z}) < \infty, i \geq 0)$、$F \in A(M)$ とすると、M のコンパクト化 $(M, \Phi, \hat{M})$ があり、$F \circ \Phi^{-1}$ は $\hat{M}$ の有理正則写像である。ただし $(M, \Phi, \hat{M})$ は F によって一般に異なる。

注意 9　[A1] によれば $M = \mathbb{C}^2$ のとき、Φ は F とは無関係に $Aut(\mathbb{C}^2)$ でとれる。また $M \in \mathcal{A}$ は例 5 にあげた M_1 に限られることもわかる。また $M \in \mathcal{A}$ は $\mathbb{C}^2$ のように、すべてのクラスの写像族を持つこともわかる。

References

[A1] Y.Adachi, Kodai Math.J,23(2000),164-170.

[A2] Y.Adachi, to appear FJMS.

[Ne] R.Nevanlinna, Ann.Acad.Sci. Fenn.Ser,A.I,(1941),1-31.

[Ni1] T.Nishino, J.Math.Kyoto Univ.,13(1973),217-272.

[Ni2] T.Nishino, J.Math.Kyoto Univ.,15(1975),527-553.

[Ni3] T.Nishino, Sûgaku,32(1980),230-246.

[Su1] M.Suzuki, Séminaire F.Norguet,1975-1976,Springer,31-57.

[Su2] M.Suzuki, Ann.Scient Ec.Norm.Sup.,10(1977),517-546.

[Y1] H.Yamaguchi, J.Math.Kyoto Univ.,16(1976),71-92.

[Y2] H.Yamaguchi, J.Math.Kyoto Univ.,16(1976),497-530.

17. Estimate of Deficiencies of Meromorphic Mappings for Hypersurfaces

YOSHIHIRO AIHARA, SEIKI MORI AND SHIGEKI OH'UCHI

Numazu College of Technology, Yamagata University and ICU

The defect relation for meromorphic mappings shows that the set of Nevanlinna's deficient divisors for f is very small. Furthermore, meromorphic mappings without defect are dense in the space of all meromorphic mappings $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ with respect to a certain kind of distance. It therefore seems that the construction of meromorphic mappings with preassigned deficiencies is very difficult. There have been several studies on the construction of holomorphic curves with deficient hypersurfaces. We now recall the defect relation for dominant meromorphic mappings $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ due to Griffiths' school, that is, we have the defect relation

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_f(D_j) \leq \frac{n+1}{d},$$

where $D_1, \cdots, D_q$ are nonsingular hypersurfaces of degree d in $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ intersecting normally. There has been a conjecture of Griffiths ([G, p. 379]) stating the defect relation for meromorphic mappings $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ is also given by the above form under an appropriate nondegeneracy condition on f. Moreover, there also has been a conjecture such that the estimate

$$\delta_f(D) \leq \frac{C}{d}$$

holds under a generic condition for D, where C is a positive constant independent of f and D (cf. [S, p. 289]). In [AM], we proved the existence of meromorphic mappings that have a preassigned positive deficiency for a given divisor D in $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$, that is, we have the following theorem concerning Griffiths' conjecture:

Theorem. *Let $D \in |L(H)^{\otimes d}|$ be an arbitrary divisor in $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, where $L(H)$ is the hyperplane bundle over $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ and let d be a positive integer. Then there exists a positive constant $\lambda(D)$ depending only on D with $\lambda(D) \leq d$ that has the following property: For each positive number α with $\alpha \leq \lambda(D)/d$, there exists a meromorphic mapping $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ with Zariski dense image such that f $\delta_f(D) = \alpha$. Furthermore, in the case of $m \geq n$, there exists a dominant meromorphic mapping $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ with $\delta_f(D) = \alpha$.*

This theorem yields that for every irreducible hypersurface S in $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ there exists a meromorphic mapping f such that the deficiency $\delta_f(S)$ for S is positive and less than one. We note here that the constant $\lambda(D)$ may be dependent on the degree d. For instance, we have $\lambda(D) = d$ for some singular divisors. In the case of $d = \tilde{d}$, we could not obtain good estimate of $\lambda(D)$. However, we lately have new estimate of $\lambda(D)$ that improves the previous result. Let D be an effective divisor defined by $P(\zeta) = 0$, where P is a homogeneous polynomial with degree $d \geq 2$ and $\zeta = (\zeta_0, \cdots, \zeta_n)$ is a homogeneous coordinate system in $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Let d_j be the highest degree in ζ_j that are contained in P and set $\tilde{d} = \min_{0\leq j\leq n} d_j$. Then we have the following estimate:

Proposition. *There exists a polynomial $L(z)$ in z with degree d determined by $P(\zeta)$ that has the following property: Denote by κ the largest multiplicity of roots of the equation $L(z) = 0$, where $1 \leq \kappa \leq d - 1$. Then the following estimate holds.*

(I) *If $d = \tilde{d}$, then $\lambda(D) = \kappa$.*

(II) *If $\tilde{d} < d$, then $\lambda(D) = d - \tilde{d}$.*

We do not know whether $\lambda(D)$ is sharp or not. Note that the above constant κ does not depend on d. So far, if $\kappa \geq 2$, we do not know the existence of smooth hypersurface for which the above theorem holds. On the other hand, if $\tilde{d} \leq d-2$, we can easily construct a singular divisor D and a dominant meromorphic mapping $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ for which Griffiths' defect relation does not hold, that is,

$$\frac{n+1}{d} < \delta_f(D) < 1.$$

This divisor D is not at most simple normal crossings. This fact shows that the hypothesis in Griffiths' defect relation cannot be simply dropped.

References

[AM] Y. Aihara and S. Mori, Deficiencies of meromorphic mappings of hypersurfaces, preprint, 2002, pp. 27.

[G] P. A. Griffiths, Holomorphic mappings: Survey of some results and discussion of open problems, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 374–382.

[S] Y.-T. Siu, Nonequidimensional value distribution theory, Proc. Complex Analysis, Joensuu 1987 (eds. I. Laine et al.), 285–311, Lect. Notes in Math. **1351**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

18. UNIVERSAL ABELIAN COVERS OF SURFACE SINGULARITIES

奥間 智弘　(群馬高専)

(X, o) を 2 次元正規特異点とし，そのリンク S は $H_1(S, \mathbb{Q}) = 0$ を満たすとする．さらに，X は S 上の錐に同相であると仮定する．このとき，$H_1(S, \mathbb{Z})$ は有限群であり，それに対応する $X \setminus \{o\}$ のアーベル被覆に 1 点を付け加えることにより 2 次元特異点の有限射 $q\colon (Y, o) \to (X, o)$ を得る．Y を X の universal abelian cover (UAC) という．

予想 (Neumann-Wahl [2]). X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein のとき，X の UAC は complete intersection であろう．

この予想は，X が $\mathbb{C}^*$ 作用を持つ場合と，標準被覆がカスプになる有理型特異点の場合には正しいことが証明されている ([1], [3]).

X **を有理型特異点または最小楕円型特異点と仮定する**．また，$\widetilde{X} \to T$ を X の equisingular deformation とする．

Theorem 1. *有限射 $\widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ で，任意の $t \in T$ に対して $\widetilde{Y}_t \to \widetilde{X}_t$ が UAC になるようなものが存在する．自然な射 $\widetilde{Y} \to T$ も equisingular deformation である．*

Corollary 2. *X の UAC が complete intersection ならば，$\widetilde{X}_t$ の UAC もそうなる．*

星型グラフを持つ 2 次元特異点が，$\mathbb{C}^*$ 作用を持つ特異点の equisingular deformation になるための条件が [4] で与えられている．そのことから次を得る．

Corollary 3. *X の最小良特異点解消の双対グラフが星型であるとする．このとき，X の UAC は complete intersection である．*

REFERENCES

[1] W. D. Neumann, *Abelian covers of quasihomogeneous surface singularities*, Singularities (P. Orlik, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Part 2, Amer. Math. Soc., 1983, pp. 233–243.

[2] W. D. Neumann and J. Wahl, *Universal abelian covers of surface singularities*, Trends in Singularities (A. Libgober and M. Tibar, eds.), Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2002, pp. 181–190.

[3] ———, *Universal abelian covers of quotient-cusps*, Math. Ann. **326** (2003), 75–93.

[4] M. Tomari and K.-i. Watanabe, *Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped" resolution*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 681–740.

19. 初等ラインハルト領域に関する正則同値問題への群論的アプローチ

清水　悟

東北大学大学院理学研究科

1. ラインハルト領域に関する正則同値問題．$U(1)$ により絶対値 1 の複素数のなす乗法群を表し，$T = (U(1))^n$ とおく．このとき n 次元コンパクトトーラス T は $\mathbf{C}^n$ 上に次の規則により正則変換群として作用する：$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in T$, $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$に対して，$\alpha \cdot z = (\alpha_1 z_1, \cdots, \alpha_n z_n)$.

さて $\mathbf{C}^n$ 内の領域 D は，すべての$\alpha \in T$ に対して$\alpha \cdot D \subset D$ が成り立つとき，ラインハルト領域と呼ばれる．このとき T は D 上に正則変換群として作用する．T の作用から誘導される D の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(D)$ の部分群を $T(D)$ で表す．

ラインハルト領域に関する正則同値問題を論ずるためには，$(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型の概念が必要である．$(\mathbf{C}^*)^n$ の正則自己同型φ は

$$\varphi : (\mathbf{C}^*)^n \ni (z_1, \cdots, z_n) \longmapsto (w_1, \cdots, w_n) \in (\mathbf{C}^*)^n,$$
$$w_i = \alpha_i z_1^{a_{1i}} \cdots z_n^{a_{ni}}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

の形をもつとき，$(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型と呼ばれる．ここで $(a_{ij}) \in GL(n, \mathbf{Z})$, $(\alpha_i) \in (\mathbf{C}^*)^n$ である．$\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ により $(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型全体のなす $\mathrm{Aut}((\mathbf{C}^*)^n)$ の部分群を表す．次の命題は，ラインハルト領域の間の T-作用に関する同変双正則写像が $(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型により与えられることを示す．

命題 ([3])　$\varphi : D \to D'$ を $\mathbf{C}^n$ 内の２つのラインハルト領域 D, D' の間の双正則写像とする．このとき$\varphi T(D) \varphi^{-1} = T(D')$ となるための必要十分条件はφ が $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ のある元の制限として与えられることである．

ラインハルト領域の間の T-作用に関する同変双正則写像はラインハルト領域のカテゴリーにおける自然な射と考えられるので，次の定義と問題が導かれる．

定義　$\mathbf{C}^n$ 内の２つのラインハルト領域は，それらの間に $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ のある元の制限として与えられる双正則写像が存在するとき，代数的に同値であると呼ばれる．

問題（ラインハルト領域に関する正則同値問題）　$\mathbf{C}^n$ 内の２つのラインハルト領域 D と D' が双正則同値ならば，それらは代数的に同値になるか？

D, D' が有界なとき，この問題には肯定的な解答が与えられている ([2]).

2. 初等ラインハルト領域．$c = (c_1, \cdots, c_n)$ を $\mathbf{R}^n - \{0\}$ の元とし，$\mathbf{C}^n$ 上の非負値実数値関数ρ_c を

$$\rho_c(z) = |\, z_1 \,|^{c_1} \cdots |\, z_n \,|^{c_n}, \quad z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n,$$

により定義する．

$$D_c = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \rho_c(z) < 1\}$$

により与えられる $\mathbf{C}^n$ 内の非有界ラインハルト領域 D_c は初等ラインハルト領域と呼ばれる ([1] 参照)．この講演では次の結果への群論的アプローチについて報告する．

定理　c と c' を $\mathbf{R}^n - \{0\}$ の元とする．もし $\mathbf{C}^n$ 内の２つの非有界ラインハルト領域 D_c と $D_{c'}$ が双正則同値ならば，それらは代数的に同値になる．

この定理は，[1] において，多重複素グリーン関数を用いて示されているが，ここでは [6] の結果の応用として，正則自己同型群の理論を用いた証明を与える．この証明法は（初等ラインハルト領域とは限らない）一般の非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題への適用が期待される．また上記定理は，$n = 2$ のときについては [4]，[5] において示された．

参考文献

1. A. Edigarian and W. Zwonek, *Proper holomorphic mappings in some class of unbounded domains.*, Kodai Math. J. **22** (1999), 305–312.
2. S. Shimizu, *Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin*, Tohoku Math. J. **40** (1988), 119–152.
3. S. Shimizu, *Automorphisms of bounded Reinhardt domains*, Japan. J. Math. **15** (1989), 385–414.
4. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in* $\mathbf{C}^2$, Osaka J. Math. **28** (1991), 609–621.
5. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in* $\mathbf{C}^2$,II, Kodai Math. J. **15** (1992), 430–444.
6. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for Reinhardt domains and the conjugacy of torus actions*, preprint.

※印は本会で記入

※番号 **20.** 題

L^2正則関数の拡張について（其の七）

特異部分多様体からの拡張

氏名 大沢健夫　　所属 名古屋大学多元数理

L^2正則関数の拡張定理は一種の補間定理であるが、これまで補間集合を特異点をもたない部分多様体に限ってきた。その理由は技術的な困難の存在であったが、その一部が解決したのでご報告したい。

原型との比較が容易なように設定をつぎのようにする。Dを$\mathbb{C}^n$の有界擬凸領域とし、VはDの複素解析的部分集合であり、$\overline{D}$の近傍で定義されたある正則関数sの零点集合になっているとする。またdsは$\partial D\cap s^{-1}(0)$上では零にならないとする。V上の正則関数とは局所的にn変数の正則関数としてまわりにのばせるもの、すなわちVの定義イデアル層を$\mathcal{I}$としたとき、$\mathcal{O}_D/\mathcal{I}$の断面をいうのであった。$V_{reg}=\{x\in V \mid ds(x)\neq 0\}$、$A^2(V)=\{f \mid f$は$V$上正則で$\int_{V_{reg}}|f|^2\,dv<\infty\}$とおく。ただし$dv$はユークリッド計量によって$V_{reg}$上に誘導された計量に関する体積要素を表す。この状況においてつぎの定理が成り立つ。

定理 D, V を上の通りとすると有界線形作用素

$$I: A^2(V) \longrightarrow A^2(D)$$

で $I(f)|V = f$ ($\forall f \in A^2(V)$) をみたすものが存在する。ただし $A^2(D)=\{F$ は D 上正則で $\int_D |F|^2 d\lambda < \infty\}$ ($d\lambda$ はルベーグ測度) とおく。

（この段階ではまだ多重劣調和なウェイトを許すところまで行っていない。）

証明のポイントは、いわゆる大沢・竹腰の公式における'twisted weight'として多重優調和でないものを許したときに出てくる不等式の中から良い評価式を取り出してくる点である。これは、考え方としてはすでに'On the extension of L^2 holomorphic functions III〜V'において提出され、複素多様体上の L^2 拡張定理を定式化する時にポイントとなったものであるが、上の問題を解くための具体的な計算上のテクニックはまったく新しいものであり、一般化が期待できるものである。

21. 二面体商特異点の無限小変形空間のCR表示について

鹿児島大学大学院理工学研究科　D2 兒玉 充

$V = \{(X_0, X_1, \cdots, X_N) \in \boldsymbol{C}^{N+1} \,|\, h(X_0, X_1, \cdots, X_N) = 0\} \subset \boldsymbol{C}^{N+1}$ とするとき，特異点の無限小変形空間について次が成り立つことが知られている ([1]).

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_V^1, \mathcal{O}_V) \cong \boldsymbol{C}[X_0, X_1, \cdots, X_N]/\mathcal{J} \tag{1}$$

ここで $\mathcal{J} = \left(h, \dfrac{\partial h}{\partial X_0}, \dfrac{\partial h}{\partial X_1}, \cdots, \dfrac{\partial h}{\partial X_N}\right)$.

一方，S は $\boldsymbol{C}^{N+1}$ の強擬凸領域の境界，$M = V \cap S$ とすると M は V の境界である．特異点の無限小変形空間と S 上の CR 構造の無限小変形空間の間には次の関係があることが知られている ([2])．

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_V^1, \mathcal{O}_V) \cong \mathrm{Ker}\{H_M^{0,1}(T') \xrightarrow{F} H_M^{0,1}(T^{1,0}\boldsymbol{C}^{N+1}{}_{|M})\} \tag{2}$$

この講演の目標は，二面体商特異点について (1)，(2) の対応により，$\mathrm{Ext}^1(\Omega_V^1, \mathcal{O}_V)$ の CR 表示を求めることと，その対応をみることである．

$n \geq 2$ とする．このとき，

$$D_{n+2} := \left\langle \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \zeta = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2n}\right) \right\rangle$$

を二面体群という．二面体群 D_{n+2} による複素 2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{C}^2$ の商空間 $V := \boldsymbol{C}^2/D_{n+2}$ は二面体商特異点とよばれる原点のみに孤立特異点をもつ複素解析空間になる．

$\boldsymbol{C}[z,w]$ の D_{n+2} 不変式環 $\boldsymbol{C}[z,w]^{D_{n+2}}$ の生成元として $zw(z^{2n} - w^{2n}), z^{2n} + w^{2n}, z^2w^2$ がとれるから，写像 $\pi : \boldsymbol{C}^2 \longrightarrow \boldsymbol{C}^3$ を $\pi(z,w) = (zw(z^{2n} - w^{2n}), z^{2n} + w^{2n}, z^2w^2)$ で定義すると，

$$V \cong \pi(\boldsymbol{C}^2) = \{(X_0, X_1, X_2) \in \boldsymbol{C}^3 \,|\, X_0^2 - X_1^2 X_2 + 4X_2^{n+1} = 0\}$$

と $\boldsymbol{C}^3$ に実現される．

V に対して，特異点の近傍の境界として $M := S^3/D_{n+2}$ がとれる．M は V の実超曲面であり，この M には V の非特異部分から自然な CR 構造 $T^{0,1}M$ が引き起こされる．

定義 1 (CR 構造)

$$T^{0,1}M := \boldsymbol{C}TM \cap T^{0,1}(V \setminus \{0\})$$

によって定まる $T^{0,1}M$ を M 上の CR 構造という．

$T^{1,0}M := \overline{T^{0,1}M}$ とする．$F = \boldsymbol{C}TM/(T^{0,1}M \oplus T^{1,0}M)$ とおくと，可微分束の完全列

$$0 \longrightarrow T^{0,1}M \oplus T^{1,0}M \longrightarrow \boldsymbol{C}TM \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

をえるから，

$$\boldsymbol{C}TM = T^{0,1}M \oplus T^{1,0}M \oplus F$$

という可微分束の分解がえられる．今，$T^{0,1}M$, $T^{1,0}M$, F は，それぞれ次で張られる．

$$\bar{Z} := w\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - z\frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \quad Z := \bar{w}\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial w}, \quad T := \mathrm{Im}\left(z\frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

以下 $G = D_{n+2}$, $M = S^3/G$, $T' := T^{1,0}M \oplus F$ とする．

定義 2

$$H_M^{0,1}(T') := \mathrm{Coker}\,\{A_M^0(T') \xrightarrow{\bar\partial_{T'}} A_M^{0,1}(T')\}$$
$$H_M^{0,1}(T^{1,0}\boldsymbol{C}^3{}_{|M}) := \mathrm{Coker}\,\{A_M^0(T^{1,0}\boldsymbol{C}^3{}_{|M}) \xrightarrow{\bar\partial_b} A_M^{0,1}(T^{1,0}\boldsymbol{C}^3{}_{|M})\}$$

とする.

定理 $n \geq 2$ とする. $\mathrm{Ker}\{H_M^{0,1}(T') \xrightarrow{F} H_M^{0,1}(T^{1,0}\boldsymbol{C}^3{}_{|M})\}$ の基底として, 次の $n+2$ 個がとれる. ただし, $0 \leq k \leq n-1$ とする.

$$\bar z^{2k}\bar w^{2k} Z \otimes \bar Z^*,\quad (\bar z^{2n} + \bar w^{2n}) Z \otimes \bar Z^*,\quad \left\{\frac{(2n)!(2n+1)!}{(4n)!}(\bar z^{4n} + \bar w^{4n}) + \bar z^{2n}\bar w^{2n}\right\} Z \otimes \bar Z^*$$

一方, V の定義方程式は $h(X_0, X_1, X_2) = X_0^2 - X_1^2 X_2 + 4X_2^{n+1}$ だから

$$\boldsymbol{C}[X_0, X_1, X_2]/\mathcal{J} = \mathrm{Span}_{\boldsymbol{C}}\langle 1, X_1, X_2, X_2^2, \cdots, X_2^n\rangle$$

命題 $n \geq 2$ のとき, (1), (2) の対応により次の関係が導かれる. ここで $0 \leq k \leq n-1$ とし, c_k は k によって決まる定数である.

$\mathrm{Ker}\{H_M^{0,1}(T') \xrightarrow{F} H_M^{0,1}(T^{1,0}\boldsymbol{C}^3_{\vert M})\}$		$\boldsymbol{C}[X_0, X_1, X_2]/\mathcal{J}$
$\bar z^{2k}\bar w^{2k} Z \otimes \bar Z^*$	$\longleftrightarrow$	$c_k X_2^{n-k}$
$(\bar z^{2n} + \bar w^{2n}) Z \otimes \bar Z^*$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{2n}{(2n+1)(n+1)} X_1 + \dfrac{2(4n+1)!}{(2n+1)!(2n)!}\beta_0 X_2{}^n$
$\left\{\dfrac{(2n+1)!(2n)!}{(4n)!}(\bar z^{4n} + \bar w^{4n}) + \bar z^{2n}\bar w^{2n}\right\} Z \otimes \bar Z^*$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{4n(2n)!(2n)!}{(4n+1)!} + \beta_0 X_1$

参考文献

[1] Ishii, S : 特異点入門, Springer-Verlag Tokyo (1997).

[2] Miyajima, K : *CR construction of the flat deformations of normal isolated singularities*, J. Alg. Geom. 8 (1999), 403-470.

特別講演

Grothendieck 留数の代数解析と計算アルゴリズム

田島慎一　新潟大学工学部情報工学科
中村弥生　お茶の水女子大学大学院人間文化研究科

代数解析の観点から多変数留数 (Grothendieck local residues) を考察する. ホロノミック D_X-加群の理論と計算機代数の手法を用いることで, Grothendieck local residues の値がアルゴリズミックに計算可能となることを示す.

1　代数的局所コホモロジー類

変数 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in X = \mathbb{C}^n$ を不定元とする $K(= \mathbb{Q})$ 係数多項式環 $K[z_1, \ldots, z_n]$ を $K[z]$ で表す. n 個の多項式 $f_1, \ldots, f_n \in K[z]$ の組であり $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ が正規列 (regular sequence) となるものが与えられたとする. これらの多項式が生成するイデアルを $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \subset K[z]$ とし, 対応する零次元多様体 $V(I) = \{z \in X \mid f_1(z) = \cdots = f_n(z) = 0\}$ を Z と置く.

本稿では, 多項式 $\varphi \in K[z]$ に対し, 各点 $\beta \in Z$ での Grothendieck local residues の値を対応させる線形写像

$$\varphi \longrightarrow \mathrm{Res}_\beta(\begin{bmatrix} \varphi(z)dz \\ f_1 \ldots f_n \end{bmatrix})$$

を解析し, その応用として Grothendieck local residues を計算するアルゴリズムを導出する.

この節では, Grothendieck symbol $\begin{bmatrix} dz \\ f_1 \ldots f_n \end{bmatrix} \in \mathrm{E}xt^n_{K[z]}(K[z]/I, K[z]dz)$ が定める **超関数** を導入し, D_X-加群の理論が適用できるような枠組みで問題を定式化する.

X 上の n 次正則微分形式のなす層を Ω^n_X とおき, Z に台を持つ代数的局所コホモロジー群を $\mathcal{H}^n_{[Z]}(\Omega^n_X)$ とする. Ext 群からこの代数的局所コホモロジー群への自然な写像

$$\iota : \mathrm{E}xt^n(K[z]/I, K[z]dz) \longrightarrow \mathcal{H}^n_{[Z]}(\Omega^n_X)$$

を用いて, 代数的局所コホモロジー類 $\omega_{\mathcal{F}}$ を $\omega_{\mathcal{F}} = \iota(\begin{bmatrix} dz \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix})$ で定義する. 今, X 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ とおくと $\omega_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{H}^n_{[Z]}(\Omega^n_X))$ となる.

米田 pairing

$$\mathrm{Res}\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{O}_X/I \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{H}^n_{[Z]}(\Omega^n_X)) \longrightarrow \mathbb{C}_Z$$

は非退化なので, 代数的局所コホモロジー類 $\omega_{\mathcal{F}}$ は超関数と見なせる. 線形汎関数としての $\omega_{\mathcal{F}}$ の役割を明記する必要がある際は $\mathrm{Res}_\beta\langle \varphi(z), \omega_{\mathcal{F}} \rangle$ なる記号で留数値 $\mathrm{Res}_\beta(\begin{bmatrix} \varphi(z)dz \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix})$ を表すことにする.

今, イデアル $I \subset K[z]$ の多項式環 $K[z]$ での準素イデアル分解を $I = I_1 \cap \cdots \cap I_\ell$ とする. 各 $I_\lambda \in K[z] (\lambda = 1, 2, \dots, \ell)$ に対し, $Z_\lambda = V(I_\lambda)$ とおく.

$$\mathcal{H}^n_{[Z]}(\Omega^n_X) = \mathcal{H}^n_{[Z_1]}(\Omega^n_X) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^n_{[Z_\ell]}(\Omega^n_X)$$

に対応した代数的局所コホモロジー類 $\omega_{\mathcal{F}}$ の直和分解をとり,

$$\omega_{\mathcal{F}} = \omega_{\mathcal{F},1} + \cdots + \omega_{\mathcal{F},\ell}$$

とおく. ただし各, $\omega_{\mathcal{F},\lambda}$ は $\mathrm{supp}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) = Z_\lambda$ を満たしているとする.

次は明らかである.

補題

(i) $\omega_{\mathcal{F},\lambda} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I_\lambda, \mathcal{H}^n_{[Z_\lambda]}(\Omega^n_X))$,

(ii) $K[z]\omega_{\mathcal{F},\lambda} = \iota(\mathrm{Ext}^n_{K[z]}(K[z]/I, K[z]dz))$.

補題 $\beta \in Z_\lambda$ とする. 次が成り立つ.

$$\mathrm{Res}_\beta(\begin{bmatrix} \varphi(z)dz \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix}) = \mathrm{Res}_\beta\langle \varphi(z), \omega_{\mathcal{F},\lambda} \rangle.$$

$j_{\mathcal{F},\lambda}(z) = \dfrac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)} \bmod I_\lambda$ とおく.

定義 K-ベクトル空間 $E_{I_\lambda} = K[z]/I_\lambda$ の部分ベクトル空間 $E_{J,\lambda}, E_{K,\lambda}$ を次で定義する.

$$E_{J,\lambda} = \{\ j_{\mathcal{F},\lambda}(z)g(z) \bmod I_\lambda \mid g \in K[z]/\sqrt{I_\lambda}\},$$

$$E_{K,\lambda} = \{\ h \in E_{I_\lambda} \mid \mathrm{Res}_\beta\langle h(z), \omega_{\mathcal{F},\lambda} \rangle = 0,\ \beta \in Z_\lambda\}.$$

次が成り立つ.

命題 $E_{I_\lambda} = E_{J,\lambda} \oplus E_{K,\lambda}$.

2 ホロノミック D_X 加群

$X = \mathbb{C}^n$ 上の Weyl 代数 $K[z, \frac{\partial}{\partial z}]$ を D_X で表す. $\mathcal{H}^n_{[Z_\lambda]}(\Omega^n_X)$ が右 D_X-加群の構造をもつことに注目し, $W_{\mathcal{F},\lambda} = \omega_{\mathcal{F},\lambda} D_X$ とおく. $W_{\mathcal{F},\lambda} \subset \mathcal{H}^n_{[Z_\lambda]}(\Omega^n_X)$ である. 代数的局所コホモロジー類 $\omega_{\mathcal{F},\lambda}$ の D_X における annihilator を $\mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})$ で表す:

$$\mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) = \{P \in D_X \mid \omega_{\mathcal{F},\lambda} P = 0\}.$$

いま, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma_{\mathcal{F},\lambda} \in \mathcal{H}^n_{[Z_\lambda]}(\mathcal{O}_X)$ を用いて $\omega_{\mathcal{F},\lambda} = \sigma_{\mathcal{F},\lambda} dz$ と表すと

$$\mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) = \{P \in D_X \mid P^*(\sigma_{\mathcal{F},\lambda}) = 0\}.$$

と表されることを注意しておく. ここで P^* は, 偏微分作用素 $P \in D_X$ の形式随伴作用素を表す.

右 D_X-加群 $M_{\mathcal{F},\lambda}$ を $M_{\mathcal{F},\lambda} = D_X / \mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})$ で定める.

命題

(i) $M_{\mathcal{F},\lambda}$ は $Z_\lambda = V(I_\lambda)$ に台をもつホロノミック系である.

(ii) 各点 $\beta \in Z_\lambda$ において $M_{\mathcal{F},\lambda}$ は simple である.

命題 ホロノミック系 $M_{\mathcal{F},\lambda}$ の代数的局所コホモロジー解について, つぎが成り立つ.

$$\dim_K \mathrm{H}om_{D_X}(M_{\mathcal{F},\lambda}, W_{\mathcal{F},\lambda})) = \dim_K K[z]/\sqrt{I_\lambda} = \sharp Z_\lambda$$

柏原・河合の双対定理をホロノミック系 $M_{\mathcal{F},\lambda}$ に適用することで, つぎの定理を得る.

定理

$$E_{K,\lambda} = \mathrm{Span}_K\{\ P\psi \bmod I_\lambda \mid \psi \in K[z], P \in \mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})\}.$$

今, $R^{(k)}_{\mathcal{F},\lambda} = \{P \in D_X \mid \mathrm{ord} P \leq k, \omega_{\mathcal{F},\lambda} P = 0\}$ と置き, $R^{(k)}_{\mathcal{F},\lambda}$ の生成する右 D_X-イデアル $R^{(k)}_{\mathcal{F},\lambda} D_X$ を $\mathcal{A}nn^{(k)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})$ と置く. イデアルの増加列

$$\mathcal{A}nn^{(0)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) \subseteq \mathcal{A}nn^{(1)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}nn^{(k)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) \subseteq \cdots$$

を得る. ここで, $\mathcal{A}nn^{(0)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) = I_\lambda D_X$ が成り立つ.

次の結果も明らかである.

補題 次の条件は同値.

(i) イデアル I_λ は素イデアル.

(ii) $\mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) = \mathcal{A}nn^{(0)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})$.

補題　右 D_X-加群 $M^{(k)}_{\mathcal{F},\lambda}$ を $D_X/\mathcal{A}nn^{(k)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})$ で定める．これらは $Z_\lambda = V(I_\lambda)$ に台をもつホロノミック系となる．

D_X はネター環であるので $\mathcal{A}nn^{(k)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) = \mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})$ なる自然数 k が存在する．つぎが成立する．

命題　次の条件は同値．

(i) $\mathcal{A}nn^{(k)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) = \mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})$.

(ii) $E_{K,\lambda} = \mathrm{Span}_K\{\ P\psi \bmod I_\lambda \mid \psi \in K[z], P \in \mathcal{A}nn^{(k)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})\}$

次の結果は annihilator を構成していく際に重要な役割を果たす．

命題　$S \in D_X$ は $k+1$ 階の偏微分作用素であるとする．このとき次は同値となる．

(i) $[g,S] \in R^{(k)}_{\mathcal{F},\lambda}$ がすべての $g \in I_\lambda$ に対して成立する．

(ii) $S + h(z) \in R^{(k+1)}_{\mathcal{F},\lambda}$ を満たす $h \in K[z]$ が存在する．

証明　交換子積 $[\ ,\ ]$ の性質から $[g, S+h] = [g,S]$ が成り立つので $(i) \longrightarrow (ii)$ は明らか．$(ii) \longrightarrow (i)$ を示せばよい．いま，$\omega_{\mathcal{F},\lambda}[g,S] = 0$ とする．$\omega_{\mathcal{F},\lambda}(gS - Sg) = -(\omega_{\mathcal{F},\lambda}S)g$ より，$-(\omega_{\mathcal{F},\lambda}S)g = 0,\ \forall g \in I_\lambda$ を得る．これより，$-(\omega_{\mathcal{F},\lambda}S) = \omega_{\mathcal{F},\lambda}h$ なる $h \in K[z]$ の存在がいえるがこれは，$S + h \in R^{(k+1)}_{\mathcal{F},\lambda}$ を意味する．

3　Annihilator の構成法

この節では $I_\lambda \neq \sqrt{I_\lambda}$ なる場合に，$\omega_{\mathcal{F},\lambda} = \sigma_{\mathcal{F},\lambda}dz$ なる代数的局所コホモロジー類 $\sigma_{\mathcal{F},\lambda}$ の annihilator $\mathcal{A}nn_{D_X}(\sigma_{\mathcal{F},\lambda}) = \mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})^*$ を構成する方法を与える．

$\mathcal{A}nn^{(0)}_{D_X}(\sigma_{\mathcal{F},\lambda}) = D_X I_\lambda$ となることを用いて $\mathcal{A}nn^{(1)}_{D_X}(\sigma_{\mathcal{F},\lambda}) = \mathcal{A}nn^{(1)}_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})^*$ を決定することから始める．

まず，I_λ のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I_\lambda)$ をとり，

$$L^{(0)}_\lambda = \mathrm{Gr}(I_\lambda), B_\lambda = \{z^\gamma \mid \mathrm{NF}_{L^{(0)}_\lambda}(z^\gamma) = z^\gamma\}$$

とおく．さらに，

$$U^{(0)}_\lambda = B_\lambda,\ L(U^{(0)}_\lambda) = \mathrm{Span}_K(U^{(0)}_\lambda)$$

とおく．

いま，一階の偏微分作用素 $Q \in D_X$ が与えられたとする．Q を $L^{(0)}_\lambda$ でわり算しその余りをとると，余りとして得られる偏微分作用素の係数多項式はすべて $L(U^{(0)}_\lambda)$

に属することが分かる．この事に注目して，

$$U_\lambda^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{n}\{(-\frac{\partial}{\partial z_i})z^\gamma \mid z^\gamma \in B_\lambda\}, L(U_\lambda^{(1)}) = \mathrm{Span}_K(U_\lambda^{(1)})$$

とおき，

$$L_\lambda^{(1)} = \{S+h \in D_X \mid (S+h)\sigma_{\mathcal{F},\lambda} = 0, S = \sum(-\frac{\partial}{\partial z_i})a_i(z) \in L(U_\lambda^{(1)}), h \in L(U_\lambda^{(0)})\}$$

を導入する．$\mathcal{A}nn_{D_X}^{(1)}(\sigma_{\mathcal{F},\lambda})$ は $L_\lambda^{(0)}$ と $L_\lambda^{(1)}$ より生成されることは明らかである．

次の条件をみたす $a_1, a_2, ..., a_n, h$ を求める事により $S+h \in L_\lambda^{(1)}$ を構成することができる．

(i) $\sum a_i(z)\frac{\partial g}{\partial z_i}(z) \in I_\lambda, \forall g \in I_\lambda$,

(ii) $\sum a_i(z)\frac{\partial(f_1 \cdots f_n)}{\partial z_i} + (h(z) - \sum \frac{\partial a_i}{\partial z_i})f_1 \cdots f_n \in I_\lambda^{(2)}$.

ただし，$I_\lambda^{(2)}$ は，$I^{(2)} = \langle f_1^2, f_2^2, ..., f_n^2\rangle$ の準素イデアル分解に現れるイデアルであり，$\sqrt{I_\lambda^{(2)}} = \sqrt{I_\lambda}$ を満たすものを意味する．

$E_{I_\lambda} = K[z]/I_\lambda$ の部分ベクトル空間 $E_{L_\lambda^{(1)}}$ を

$$E_{L_\lambda^{(1)}} = \mathrm{Span}_K\{h \mid \sum(-\frac{\partial}{\partial z_i})a_i(z) + h(z) \in L_\lambda^{(1)}\}$$

で定義する．

補題　次が成立する．

$$E_{L_\lambda^{(1)}} = \mathrm{Span}_K\{\ P\psi \ \mathrm{mod}\ I_\lambda \mid \psi \in K[z], P \in \mathcal{A}nn_{D_X}^{(1)}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})\}$$

ベクトル空間 $E_{L_\lambda^{(1)}}$ の次元を調べることで，$E_{L_\lambda^{(1)}} = E_{K,\lambda}$ か否かが判定できる．

次に，$E_{L_\lambda^{(1)}} \neq E_{K,\lambda}$ であるとし，2 階の annihilators を構成する方法を述べる．Weyl 代数上にしかるべき方法で項順序を入れ，偏微分作用素に対して HT, NF (それぞれ headterm, normalform の略) 等の概念を入れる．

$\Lambda_\lambda^{(1)}, B_\lambda^{(1)} \subset U_\lambda^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{n}\{(-\frac{\partial}{\partial z_i})z^\gamma \mid z^\gamma \in B_\lambda\}$ を

$\Lambda_\lambda^{(1)} = \{\mathrm{HT}(S) \mid S+h \in L_\lambda^{(1)}\}$,

$B_\lambda^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{n}\{(-\frac{\partial}{\partial z_i})z^\gamma \mid \mathrm{NF}_{L_\lambda^{(0)} \cup L_\lambda^{(1)}}((-\frac{\partial}{\partial z_i})z^\gamma) = (-\frac{\partial}{\partial z_i})z^\gamma\}$

で定める．$B_\lambda^{(1)} = U_\lambda^{(1)} - \Lambda_\lambda^{(1)}$ となる．

$$U_\lambda^{(2)} = \bigcup_{1<i,j<n}\{(-\frac{\partial}{\partial z_i})(-\frac{\partial}{\partial z_j})z^\gamma \mid z^\gamma \in B_\lambda\}$$

とし

$$T_\lambda^{(2)} = U_\lambda^{(2)} - \{(-\frac{\partial}{\partial z_i})T \mid T \in \Lambda_\lambda^{(1)}\},\ L(T_\lambda^{(2)}) = \mathrm{Span}_K(T_\lambda^{(2)})$$

とおく.

$$L_\lambda^{(2)} = \{S_{(2)} + S_{(1)} + h \in \mathcal{A}nn_{D_X}^{(2)}(\sigma_{\mathcal{F},\lambda}) \mid S_{(2)} \in L(T_\lambda^{(2)}), S_{(1)} \in L(B_\lambda^{(1)}), h \in B_\lambda\}$$

とすれば, $\mathcal{A}nn_{D_X}^{(2)}(\sigma_{\mathcal{F},\lambda})$ は $L_\lambda^{(0)}, L_\lambda^{(1)}$ と $L_\lambda^{(2)}$ より生成されることは明らかである.

次の条件をみたす $S = S_{(2)} + S_{(1)}, h$ を求める事により $S + h \in L_\lambda^{(2)}$ を構成することができる.

(i) $[g, S] \in \mathcal{A}nn_{\mathcal{F},\lambda}^{(1)}, \forall g \in I_\lambda$

(ii) $(S + h)\sigma_{\mathcal{F},\lambda} = 0$

ここで (ii) の条件を具体的に書き下すには, $I^{(3)} = \langle f_1^3, f_2^3, ..., f_n^3\rangle$ の準素イデアル分解に現れるイデアルであり, $\sqrt{I_\lambda^{(3)}} = \sqrt{I_\lambda}$ を満たすものを使う.

$$E_{L_\lambda^{(2)}} = \mathrm{Span}\{h \mid S_{(2)} + S_{(1)} + h(z) \in L_\lambda^{(2)}\}$$

で $E_{I_\lambda} = K[z]/I_\lambda$ の部分ベクトル空間を定義する.

補題　次が成立する.

$$E_{L_\lambda^{(1)}} + E_{L_\lambda^{(2)}} = \mathrm{Span}_K\{\ P\psi \bmod I_\lambda \mid \psi \in K[z], P \in \mathcal{A}nn_{D_X}^{(2)}(\omega_{\mathcal{F},\lambda})\}$$

高階の annihilators も同様な手続きで構成することができる. この方法を用いると $\mathcal{A}nn_{D_X}(\omega_{\mathcal{F},\lambda}) = \mathcal{A}nn_{D_X}(\sigma_{\mathcal{F},\lambda})^*$, $E_{K,\lambda}$ がアルゴリズミックに求まる.

4　留数計算アルゴリズムの概略

Grothendieck 留数 $\mathrm{Res}_\beta(\begin{bmatrix} \varphi(z)dz \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix})$ の値を計算するアルゴリズムの概略を述べる. 留数値の表現の仕方としては以下の二通りを考える.

(i) β の式として留数値を表現する.

(ii) 留数値の満たすべき方程式を与える.

Input:　$f_1, f_2, ..., f_n, \varphi \in K[z]$

Step1. イデアル $I = \langle f_1, f_2, ..., f_n\rangle$ の準素イデアル分解 $I = I_1 \cap \cdots \cap I_\ell$ を求める.

Step2. $I_\lambda, \sqrt{I_\lambda}$ のグレブナ基底を用いて, $E_{I_\lambda}, E_{J,\lambda}$ を構成する. 重複度
$\mu_\lambda = \dim_K(K[z]/I_\lambda)/\dim_K(K[z]/\sqrt{I_\lambda})$ を求める.

Step3. $I_\lambda \neq \sqrt{I_\lambda}$ なる場合 (前節で述べた方法等により), $E_{K,\lambda}$ の基底を求める.

Step4. 次を満たす $g_\lambda \in K[z]/\sqrt{I_\lambda}$ を求める.

$$\varphi(z) \bmod I_\lambda = j_{\mathcal{F},\lambda}(z) g_\lambda(z) + h(z) \bmod I_\lambda$$

Step5. イデアル $\langle\sqrt{I_\lambda}, t - \mu_\lambda g_\lambda(z)\rangle \subset K[z,t]$ に対し, $\langle\sqrt{I_\lambda}, t - \mu_\lambda g_\lambda(z)\rangle \cap K[t]$ の生成元 $r_\lambda(t)$ を求める.

Output: $g_\lambda(z), r_\lambda(t)$

g_λ は $\beta \in Z_\lambda$ において $\mu_\lambda g_\lambda(\beta) = \mathrm{Res}_\beta(\begin{bmatrix} \varphi(z)dz \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix})$ をみたす. また,

$$\{\mathrm{Res}_\beta(\begin{bmatrix} \varphi(z)dz \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix}) \mid \beta \in Z_\lambda\} = \{t \mid r_\lambda(t) = 0\}$$

が成立する.

参考文献

[1] J. P. Cardinal and B. Mourrain: Algebraic appriach of residues and applications, in The Mathematics of Numerical Analysis, Lect. Applied Math. Dekker **32** (1996), 189–210.

[2] P. Griffiths and J. Harris: Principles of Algebraic Geometry. Wiley Interscience (1978).

[3] A. Grothendieck: Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Séminaire Bourbaki **149** (1957)

[4] R. Hartshorne: Residues and Duality. Lecture Notes in Math. **20**, Springer (1966).

[5] M. Kashiwara: On the maximally overdetermined system of linear differential equations. I. Publ. RIMS, Kyoto Univ., **10**(1975), 563–579.

[6] M. Kashiwara: On the holonomic systems of linear differential equations, II, Inventions Math., **49** (1978), 121–135.

[7] M. Kashiwara and T. Kawai: On holonomic systems of microdifferential equations. III. Publ. RIMS, Kyoto Univ., **17** (1981), 813–979.

[8] Y. Nakamura and S. Tajima: Residue calculus with Differential operator, Kyushu J. Math., **54** (2000), 127–138.

[9] Y. Nakamura and S. Tajima: A method for constructing holonomic systems for algebraic local cohomology classes with support on a zero dimensional variety, Mathematical Software, World Scientific, 158–168 (2002).

[10] Y. Nakamura and S. Tajima: The algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, preprint.

[11] T. Oaku: Algorithms for the b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules, Adv. in Appl. Math., **19** (1997), 61-105.

[12] M. Sato: Theory of hyperfunction II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **8** (1960), 387–437.

[13] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura: Multidimensional local residues and holonomic D-modules, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033** 「特異点と複素解析幾何」(1998), 59–70.

[14] 田島慎一, 中村弥生: D-加群を用いた留数計算アルゴリズムの局所化, 数式処理 **7** (1999), 2–10.

[15] 田島慎一, 中村弥生: 多変数有理関数の留数計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085**,「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 71-81.

[16] 田島慎一: 偏微分作用素を用いた多変数留数計算アルゴリズムと中国剰余定理, 京都大学数理解析研究所講究録 **1199**,「数式処理における理論と応用の研究」(2001), 51-69.

[17] 田島慎一: Algorithms for computing Grothendieck local residues — improvement with a rescue step—, 京都大学数理解析研究所講究録 **1233**,「特異点と Newton 図形」(2001), 67–81.

[18] 田島慎一, 中村弥生: 代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について II, 京都大学数理解析研究所講究録 **1295**,「Computer Algebra - Algorithms, Implementations and Applications」(2002), 1–8.

[19] S. Tajima and Y. Nakamura: Computational aspects of Grothendieck local residues, "Séminaires et Congrès" , Société Mathématique de France, to appear.

[20] Y. L. Tong: Integral representation formulae and Grothendieck residue symbol, Amer. J. Math., **95** (1973), 904-917.