日 本 数 学 会

2003年度年会

函 数 論 分 科 会
講 演 ア ブ ス ト ラ ク ト

2003年3月

於　東京大学大学院数理科学研究科

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.
2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する.
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（1））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する.
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦.
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.
3. 委員会の構成及び委員の選出・任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する. 必要に応じ追加，削減できる.
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする. 再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する. その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.
4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する.
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する. 必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.
   (d) 案件の議決は投票によってはならない. 決定できない時は懸案事項として次回に繰越す. 緊急事項については評議員に処置を一任する.
5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする.
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する.

第3日　3月25日 (火)

第VII会場　函 数 論

9:00~12:00

1	西本　勝之	(デカルト出版)	* N-method to some linear second order ordinary differential equations	15
2	M. Purohit	(Holkar Science)	* Some extensions of N-fractional calculus	15
	C. L. Parihar	(College India)		
	K. Nishimoto	(Descartes Press)		
3	相川　弘明	(島根大総合理工)	* 複雑領域のポテンシャル論的特徴付け	15
4	二村　俊英	(広島大理)	* Isolated singularities of super-polyharmonic functions	15
	水田　義弘	(広島大総合科)		
5	水田　義弘	(広島大総合科)	* 分数巾ポアソン核による積分の境界極限値について	15
	下村　哲	(広島大教育)		
6	宮本　育子	(千葉大理)	* Beurling's minimum principle in a cylinder	15
	柳下　稔	(千葉大自然)		
7	尾和　重義	(近畿大理工)	* Notes on univalency of certain analytic functions	15
	D.Yang	(Suzhou Univ.)		
8	山本　寛	(阪市大理)	* コンパクトリーマン面間の正則写像による単純閉曲線の像曲線の巻き数について	15
9	小森　洋平	(阪市大理)	* 同変 $K=2$ 予想の反例の具体的構成	20
	C. Matthews	(南オクラホマ州立大)		
10	井上　克己	(金沢大医)	* $SO(3)$ の非離散部分群の固定点集合	15

14:15~15:10

11	宮地　秀樹	(阪市大理)	* Semiconjugacy between actions of finitely generated Kleinian groups	15
12	佐藤　宏樹	(静岡大理)	* Jørgensen groups of parabolic type, II	15
	大市　牧人	(静岡大理工)		
	李　長軍	(静岡大理工)		
13	奥山　裕介	(静岡大理)	* Nevanlinna theory, Disphantine approximation, and the Siegel-Cremer problem	15

15:30~17:45　特別講演

中西　敏浩 (名大多元数理) * Trace identities and represectations of punctured surface groups to $SL(2,\mathbb{C})$ …… (15:30~16:30)

第 1 回 (2002 年度) 解析学賞受賞特別講演

野口　潤次郎 (東大数理) * 多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似 …… (16:45~17:45)

第4日　3月26日 (水)

第VII会場　函数論

9:30~12:00

14:15~15:25

15:40~16:40　特別講演

児玉　秋雄　(金沢大理)　* $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^l$ の特徴づけをめぐって

1. N- Method to Some Linear Second Order Ordinary Differential Equations

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article, the linear second order ordinary differential equations

$$L[\varphi, z, a; g] = \varphi_2 \cdot z + \varphi_1 \cdot (1 + a + gz) + \varphi \cdot ag = f, 0 \quad (z \neq 0)$$

where

$$\varphi_k = d^k\varphi / dz^k \ (k = 0, 1, 2), \ \varphi_0 = \varphi = \varphi(z),$$

$f = f(z)$ and $g = g(z)$ are given functions,

are discussed by means of N- fractional calculus.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto, S.T. Tu and J. F. Wu ; An application of fractional calculus to a partial differential equation of the second order, J. Coll. Engng. Nihon Univ. B- 32 (1991), 55 - 62.

[6] K. Nishimoto ; A generalization of Gauss' equation by fractional calculus method, J. Coll. Engng. Nihon Univ. B- 32 (1991), 79 - 87.

[7] S.D. Lin, S.T. Tu and K. Nishimoto ; A generalization of Legendre's equation by fractional calculus method, J. Frac. Calc. Vol.1, May (1992),35 - 43.

[8] K. Nishimoto ; Solutions of Gauss equation in fractional calculus , J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 29 - 37.

[9] Shih- Tong Tu and Sheng- Long Yang ; An application of fractional calculus to a generalization of Gegenbauer's equation, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 67 - 72.

[10] J.A. de Duran and S.L. Kalla ; An application of fractional calculus to the solution of (n+1)th order ordinary and partial differential equations, J. Frac. Calc. Vol.2, Nov. (1992), 67 - 76.

[11] K. Nishimoto ; Operator N^{ν} method to nonhomogeneous Gauss and Bessel equations, J. Frac. Calc. Vol.9, May (1996), 1 - 15.

[12] K. Nishimoto and Susana S. de Romero ; N- fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous and homogeneous Whittaker equations (I) , J. Frac. Calc. Vol.9, May (1996), 17 - 22.

[13] K. Nishimoto and Judith A. de Duran ; N- fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous Fukuhara equations (I), J. Frac. Calc. Vol. 9, May, (1996), 23 - 31.

[14] K. Nishimoto ; N- fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous Gauss' equation, J. Frac. Calc. Vol. 10, Nov.(1996), 33 - 39.

[15] K. Nishimoto ; Operator N^{ν} method to a generalized linear second order nonhomogeneous ordinary differential equation of Fuchs type, J. Frac. Calc. Vol. 11, May, (1997), 11 - 20.

[16] Shih- Tong Tu, Ding- Kuo Chyan and Erh- Tsung Chin ; Solutions of Gegenbauer and Tchebycheff equations via operator N^{μ} method, J. Frac. Calc. Vol. 12, Nov. (1997), 61 - 69.

[17] K. Nishimoto ; N- method to Hermite equations, J. Frac.Calc.Vol.14, Nov, (1998),21- 27.

[18] K. Nishimoto ; N- method to Weber equations, J. Frac.Calc.Vol.14, Nov., (1998), 1 - 8.

[19] K. Nishimoto ; N- method to generalized Laguerre equations, J. Frac.Calc.Vol.14, Nov., (1998), 9 - 21.

[20] Shy- Der Lin, Shih- Tong Tu and H.M. Srivastava ; Explicit solutions of certain ordinary differential equations by means of fractional calculus; J. Frac.Calc.Vol.20, Nov., (2001), 35 - 43.

[21] Shy- Der Lin, Shih- Tong Tu and H.M. Srivastava ; Explicit solutions of some class of non- Fuchsian differential equations by means of fractional calculus; J. Frac.Calc.Vol.21, May, (2002), 49 - 60.

[22] K. Nishimoto ; N- method to fractional differintegral equations of viscoelastic vibration (I), J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 73 - 82.

[23] K. Nishimoto ; N- method to fractional differintegral equations of viscoelastic vibration (I I), J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 83 - 89.

[24] K. Nishimoto ; Solutions to some homogeneous ordinary semi differential equations by means of N- fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 97 - 104.

[25] K. Nishimoto ; N- method to some nonhomogeneous constant coefficients semi differential equations, J. Frac. Calc. Vol. 22, Nov. (2002), 15 - 23.

[26] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).

[27] K. S. Miller and B. Ross ; An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, (1993).

[28] V. Kiriyakova ; Generalized fractional calculus and applications, Pitman Research Notes, No. 301, (1994), Longman.

[29] A. Carpinteri and F. Mainardi (Ed.); Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (1997), Springer, Wien, New York.

[30] R. Hilfer (Ed.) ; Applications of Fractional Calculus in Physics, (2000), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

2. Some Extensions of N- Fractional Calculus

Manju Purohit , C. L. Parihar — Holkar Science College, INDIA
and
Katsuyuki Nishimoto — Descartes Press

Abstract

In 1993, some theorems for the N-fractional calculus of products of two power functions are reported by K. Nishimoto and S.-T. Tu. In this paper, some theorems obtained by extensions of the theorems which are obtained again by the use of N- fractional calculus are reported.

Subject Classification 2000 ; 33C65, 26A33.

Keywords ; Fractional Calculus, Nishimoto operator N^{ν}, Appell Functions, Lauricella Functions, Multiple Hypergeometric Functions.

References

[1] Exton Harold ; Multiple hypergeometric function and application, John Wiley and Sons Inc. (1976), New York.
[2] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[3] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[4] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.
[5] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.
[6] K. Nishimoto and S.-T. Tu ; On the fractional calculus $\left((z-a)^{\beta}(z-b)^{\gamma}\right)_{\alpha}$, J . Frac. Calc. Vol.4, Nov. (1993), 13 - 21.
[7] L. J. Slater ; Generalized Hypergeometric Function, Cambridge Univ. Press (1966).

3. 複雑領域のポテンシャル論的特徴付け

相川弘明　島根大学・総合理工学部

Lipschitz 領域に対する Carleson [6] や Hunt-Wheeden [8, 9] の先駆的な仕事以来，複雑領域上のポテンシャル論に対する研究が数多くなされてきた．その中でも境界 Harnack 原理や Martin 境界の決定は中心的な話題であった．Lipschitz 領域に対しては Ancona [3] や Dahlberg [7]，Wu [11]; NTA 領域に対しては Jerison-Kenig [10]; Hölder 領域に対しては Bass-Burdzy [5]; 一様領域や一様 John 領域に対しては [1] や [2] など．これらの研究は領域の幾何学的条件を緩めていって，どこまでポテンシャル論的な性質が成り立つかという動機に基づいていた．

ここでは反対方向を考える．すなわち領域のポテンシャル論的性質を先に与え，それが幾何学的条件を導くかを考察する．ここで与える条件は，領域が容量密度条件をみたす限り，必要十分条件である．特に平面内の有限連結領域に対して必要十分条件になっている．以下 D は $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし，$\delta_D(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ とおく．中心 x 半径 r の開球および球面を $B(x,r)$ と $S(x,r)$ であらわす．

定義 1. 定数 A_0, $A_1 > 1$ および $r_0 > 0$ があって $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対し，u と v が $D \cap B(\xi, A_0 r)$ 上の任意の正調和関数で $\partial D \cap B(\xi, A_0 r)$ 上で消えるならば

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \le A_1 \quad (x, y \in D \cap B(\xi, r))$$

となっているとき，一様境界 Harnack 原理が成立するという．

[1, Theorem 1] で次を示した．

定理 A. 一様領域は一様境界 *Harnack* 原理をみたす．

この定理の逆を与えよう．一様領域の定義は境界の変化に繊細に影響されるのに，境界 Harnack 原理は極集合を除いても成立することから，境界 (同じことだが外部) が一様に大きいという容量密度条件を仮定する．

定義 2. 定数 $A > 1$ と $r_0 > 0$ が存在して

$$\frac{\mathrm{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r) \setminus D)}{\mathrm{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r))} \ge \frac{1}{A} \quad (\xi \in \partial D, 0 < r < r_0)$$

となっているとき容量密度条件が成立するという．

調和測度を用いると容量密度条件は

$$\omega(x, D \cap S(\xi, r), D \cap B(\xi, r)) \le A\left(\frac{|x-\xi|}{r}\right)^{\beta} \quad (x \in D \cap B(\xi, r))$$

となる $\beta > 0$ の存在と同値である ([4, Lemma 3]). 容量密度条件の仮定の基で一様領域や John 領域を特徴付けることが出来る.

定理 1. ***D*** **は容量密度条件をみたすとする. このとき** ***D*** **が** ***John*** **領域である必要十分条件は** $\alpha > 0$ **が存在して**

$$\omega(x, D \cap S(\xi, r), D \cap B(\xi, r)) \ge \frac{1}{A}\left(\frac{\delta_D(x)}{r}\right)^{\alpha} \quad (x \in D \cap B(\xi, \frac{r}{A})) \tag{1}$$

が任意の $\xi \in \partial D$ **と** $0 < r < r_0$ **に対して成立することである.**

定理 A の逆は以下に含まれる.

定理 2. ***D*** **は容量密度条件をみたすとする. このとき** ***D*** **が一様領域である必要十分条件は一様境界** ***Harnack*** **原理と (1) をみたすことである.**

参考文献

1. H. Aikawa, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), no. 1, 119–145.
2. H. Aikawa, T. Lundh, and T. Mizutani, *Martin boundary of a fractal domain*, Potential Anal. (to appear).
3. A. Ancona, *Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), no. 4, 169–213.
4. ______, *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbf{R}^n$, J. London Math. Soc. (2) **34** (1986), no. 2, 274–290.
5. R. F. Bass and K. Burdzy, *A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 2, 253–276.
6. L. Carleson, *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. Mat. **4** (1962), 393–399.
7. B. E. J. Dahlberg, *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. **65** (1977), no. 3, 275–288.
8. R. A. Hunt and R. L. Wheeden, *On the boundary values of harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 307–322.
9. ______, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **147** (1970), 507–527.
10. D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), no. 1, 80–147.
11. J. M. G. Wu, *Comparisons of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), no. 4, 147–167.

4. Isolated singularities of super-polyharmonic functions

二村俊英　広島大大学院・理学研究科
水田義弘　広島大学・総合科学部

この講演では，原点を孤立特異点とする m 調和関数や m 優調和関数の分解定理 [6] について述べる．

$B(x,r)$ と $S(x,r)$ によりそれぞれ中心 x，半径 r の開球と球面を表す．さらに，$\mathbf{B}=B(0,1)$ を単位球，$\mathbf{B}_0=\mathbf{B}\setminus\{0\}$ とする．

Ω をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n (n\geq 2)$ 内の開集合とする．$\mathcal{H}^m(\Omega)$ は Ω 上の m 調和関数の全体とする．Ω 上の局所可積分な下半連続関数 u が次を満たすとき，u を m 優調和関数であるといい，$u\in\mathcal{SH}^m(\Omega)$ で表す：

(i) $\displaystyle\int_\Omega u(x)(-\Delta)^m\varphi(x)dx\geq 0 \qquad (\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi\geq 0)$

(ii) $\displaystyle u(x)=\lim_{r\to 0}⨍_{B(x,r)} u(y)\,dy\in(-\infty,\infty] \qquad (\forall x\in\Omega)$

$2m$ 次のリース核 R_{2m} を，

$$R_{2m}(x)=\begin{cases}|x|^{2m-n} & (n\text{ は奇数または }n>2m),\\ |x|^{2m-n}\log(1/|x|) & (n\text{ は偶数かつ }n\leq 2m)\end{cases}$$

とし，

$$R_{2m,L}(\zeta,x)=R_{2m}(\zeta-x)-\sum_{|\lambda|\leq L}\frac{\zeta^\lambda}{\lambda!}\left(D^\lambda R_{2m}\right)(-x)$$

とする．さらに，$\alpha_m\neq 0$ は，$(-\Delta)^m R_{2m}=\alpha_m^{-1}\delta_0$（$\delta_0$：原点での Dirac 測度）となる定数とする．

定理 1. $u\in\mathcal{H}^m(\mathbf{B}_0)$ がある実数 s に対し

$$\liminf_{r\to 0} r^s ⨍_{S(r)} |u|\,dS=0 \tag{1}$$

を満たすならば，

$$u(x)=h(x)+\sum_{|\lambda|<s+2m-n}c(\lambda)D^\lambda R_{2m}(x) \qquad (x\in\mathbf{B}_0)$$

となる $h\in\mathcal{H}^m(\mathbf{B})$ と定数 $c(\lambda)$ が存在する．特に，$s>n-2$ ならば，(1) を

$$\liminf_{r\to 0} r^s ⨍_{S(r)} u^+\,dS=0 \tag{2}$$

に置き換えることができる．

定理 2. $u \in \mathcal{SH}^m(2\mathbf{B}_0)$, $\mu = (-\Delta)^m u$ とする．このとき，ある実数 $s > n-1$ に対し

$$\liminf_{r \to 0} r^s \fint_{S(r)} u\, dS = 0$$

を満たすならば，

$$u(x) = v(x) + \alpha_m \int_{\mathbf{B}_0} R_{2m,L}(\zeta, x) d\mu(\zeta) \qquad (x \in \mathbf{B}_0)$$

となる $v \in \mathcal{H}^m(\mathbf{B}_0)$ が存在する．ここに，L は $s+2m-n-1 < L \leq s+2m-n$ を満たす整数とする．

さらに，u が (2) を満たすならば，

$$u(x) = h(x) + \sum_{|\lambda| \leq L} c(\lambda) D^\lambda R_{2m}(x) + \alpha_m \int_{\mathbf{B}_0} R_{2m,L}(\zeta, x) d\mu(\zeta) \qquad (x \in \mathbf{B}_0)$$

となる $h \in \mathcal{H}^m(\mathbf{B})$ と定数 $c(\lambda)$ が存在する．

参考文献

[1] D. H. Armitage, On polyharmonic functions in $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 561-569.

[2] D. H. Armitage, A Liouville theorem for polyharmonic functions, Hiroshima Math. J. **31** (2001), 367-370.

[3] N. Aronszajn, T. M. Creese and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon Press, 1983.

[4] T. Futamura, K. Kishi and Y. Mizuta, A generalization of Bôcher's theorem for polyharmonic functions, Hiroshima Math. J. **31** (2001), 59-70.

[5] T. Futamura, K. Kishi and Y. Mizuta, Removability of sets for sub-polyharmonic functions, to appear in Hiroshima Math. J.

[6] T. Futamura and Y. Mizuta, Isolated singularities of super-polyharmonic functions, preprint.

[7] W. K. Hayman and P. B. Kennedy, Subharmonic functions, Vol. 1, Academic Press, London, 1976.

[8] Y. Ishikawa, M. Nakai and T. Tada, A form of classical Picard principle, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **72** (1996), 6-7.

5. 分数巾ポアソン核による積分の境界極限値について

水田　義弘　　　広島大学総合科学部

下村　哲　　　広島大学教育学部

Siegel-Talvila [6], Sjögren [5], Rönning [4], Brundin [2] の研究に関連して，半空間 $D = \{x = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n > 0\}$ $(n \geqq 2)$ における分数巾ポアソン核による積分の無限遠点での極限値と境界極限値について報告する．

$\mathbf{R}^{n-1}$ 上の関数 f が, 次の条件を満たすとする:

$$(1) \qquad \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |f(y)|^p (1 + |y|)^{-\gamma} dy < \infty.$$

ここに, $1 \leqq p < \infty$, $\gamma \in \mathbf{R}$ とする．境界データ f に対するディリクレ解を得るために，次の核関数を考える: $x \in \mathbf{R}^n$ に対して, $K_\lambda(x) = |x|^{-\lambda}$ かつ

$$K_{\lambda,m}(x,y) = \begin{cases} K_\lambda(x-y) & (|y| < 1), \\ K_\lambda(x-y) - \sum_{|j| \leqq m-1} \frac{x^j}{j!} \left[(\partial/\partial x)^j K_\lambda(x-y) \Big|_{x=0} \right] & (|y| \geqq 1) \end{cases}$$

とする．本稿では次の関数を考える:

$$K_{\lambda,m} f(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K_{\lambda,m}(x,y) f(y) dy.$$

[定理 1] $1 \leqq p < \infty$, $\lambda > 0$, $\gamma > -(n-1)(p-1)$,

$$n - \lambda - 1 - (n-\gamma-1)/p < m \leqq n - \lambda - (n-\gamma-1)/p \qquad (p > 1),$$
$$-\lambda + \gamma \leqq m < -\lambda + \gamma + 1 \qquad (p = 1)$$

とする．$\mathbf{R}^{n-1}$ 上の関数 f が条件 (1) を満たせば,

$$\lim_{|x| \to \infty, x \in D} x_n^\lambda |x|^{1-n+(n-\gamma-1)/p} K_{\lambda,m} f(x) = 0 \qquad (m < n - \lambda - (n-\gamma-1)/p),$$

$$\lim_{|x| \to \infty, x \in D} x_n^\lambda |x|^{1-n+(n-\gamma-1)/p} (\log |x|)^{-1/p'} K_{\lambda,m} f(x) = 0$$
$$(m = n - \lambda - (n-\gamma-1)/p,\ p > 1,\ p' = p/(p-1)).$$

$p = 1$, $m = -\lambda + \gamma$ のとき, Siegel-Talvila [6] によって示された．

境界データ f に対するディリクレ解は

$$U_{n,m}f(x) = \frac{2}{n\sigma_n} x_n K_{n,m}f(x)$$

で与えられる．ここに, σ_n は単位球の体積を表す．

[系 1] 条件 (1) を満たす $\mathbf{R}^{n-1}$ 上の連続関数 f に対して,

$$-1-(n-\gamma-1)/p < m < -(n-\gamma-1)/p, \qquad \gamma > -(n-1)(p-1)$$

ならば, $U_{n,m}f$ は次を満たす:

(i) $U_{n,m}f \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$; (ii) ∂D 上 $U_{n,m}f = f$; (iii) D 上 $\Delta U_{n,m}f = 0$;

(iv) $U_{n,m}f(x) = o(x_n^{1-n}|x|^{n-1-(n-\gamma-1)/p}) \qquad (|x| \to \infty, x \in D)$.

次に $\mathcal{P}_\lambda f(x) = \dfrac{K_\lambda f(x)}{K_\lambda \chi_G(x)}$ の境界極限値の存在を調べよう．ここに, $\lambda \geqq n-1$, $1 \leqq p < \infty$, $f \in L^p(G)$, χ_G は有界開集合 $G \subset \mathbf{R}^{n-1}$ の特性関数とする．さらに，アプローチ領域

$$\mathcal{A}_h(\xi) = \{x \in D : |x-\xi| < h(x_n)\}$$

を考える．ここに，$h(t) = C \begin{cases} t & (\lambda > n-1), \\ t\left(\log \frac{1}{t}\right)^{p/(n-1)} & (\lambda = n-1). \end{cases}$

[定理 2] ほとんどすべての境界点 $\xi \in G$ において, 集合 $\mathcal{A}_h(\xi)$ に沿って $x \to \xi$ のとき,

$$\mathcal{P}_\lambda f(x) \to f(\xi).$$

参考文献

[1] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, 1992.

[2] M. Brundin, Approach regions for the square root of the Poisson kernel and weak L^p boundary functions, Thesis.

[3] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosho, Tokyo, 1996.

[4] J. O. Rönning, Convergence results for the square root of the Poisson kernel, Math Scand. **81** (1997), 219-235.

[5] P. Sjögren, Approach regions for the square root of the Poisson kernel and bounded functions, Bull. Austral. Math. Soc. **55** (1997), 521-527.

[6] D. Siegel and E. Talvila, Sharp growth estimates for modified Poisson integrals in a half space, Potential Analysis **15** (2001), 333-360.

6. Beurling's Minimum Principle in a Cylinder

宮本　育子　千葉大・理
柳下　稔　　千葉大・自然

D を $\mathbf{R}^{n-1}$ $(n \geq 2)$ 上の滑らかな境界をもつ有界領域とし,

$$\Gamma_n(D) = \{(X, y) \in \mathbf{R}^n; X \in D, -\infty < y < +\infty\}$$

をシリンダーと呼ぶ. $\Gamma_n(D)$ のマルチン境界 Δ は集合 $\partial\Gamma_n(D) \cup \{+\infty, -\infty\}$ であり, ある適当な基準点に関するマルチン核を $K_Q(P)$ $(P \in \Gamma_n(D), Q \in \Delta)$ で表すとする.

$\Gamma_n(D)$ の部分集合 E が $K_{+\infty}(P)$ の正値調和優関数を characterize するとは, E 上において $h(P) \geq K_{+\infty}(P)$ となる任意の正値調和関数 h に対して, $\Gamma_n(D)$ 上で $h(P) \geq K_{+\infty}(P)$ となるときをいう.

$\Gamma_n(D)$ の部分集合 E が $+\infty$ で minimally thin であるとは,

$$\hat{R}^E_{K_{+\infty}(\cdot)}(P) \neq K_{+\infty}(P),$$

となる $P \in \Gamma_n(D)$ が存在するときをいう. 但し, $\hat{R}^E_{K_{+\infty}(\cdot)}(P)$ は E に関する $K_{+\infty}(P)$ の regularized reduced function とする.

$B(P, r)$ を $P \in \mathbf{R}^n$ を中心, 半径が r の開球とし, $d(P)$ を $P \in \Gamma_n(D)$ から $\Gamma_n(D)$ の境界までの距離とする. $E \subset \Gamma_n(D)$, $\rho (0 < \rho < 1)$ に対して,

$$E_\rho = \cup_{P \in E} B(P, \rho d(P))$$

とする.

この講演では, Dahlberg [1] による滑らかな境界を持つ有界領域における問題を, シリンダーという境界に尖点がある領域において考察する. 証明には [2] における結果を適用する.

定理 1. $\Gamma_n(D)$ の部分集合 E に対して, 以下の条件は同値である.
(i) E が $K_{+\infty}(P)$ の正値調和優関数を characterize する,
(ii) 任意の ρ, $0 < \rho < 1$ に対して, E_ρ は $+\infty$ で minimally thin でない.
(iii) ある ρ, $0 < \rho < 1$ に対して, E_ρ は $+\infty$ で minimally thin でない.

定理 2. $\Gamma_n(D)$ の部分集合 E に対して, 以下の条件は同値である.
(i) E が $K_{+\infty}(P)$ の正値調和優関数を characterize する,
(ii) 任意の ρ, $0 < \rho < 1$ に対して, $|E_\rho| = \infty$,

(*iii*) ある ρ, $0 < \rho < 1$ に対して, $|E_\rho| = \infty$.

$\Gamma_n(D)$ 内の点列 $\{P_m|\}_{m\geq 1}$, が separated sequence であるとは, ある定数 $c(>0)$ が存在して,

$$|P_i - P_j| \geq cd(P_i) \quad (i, j = 1, 2, ..., i \neq j),$$

となるときをいう.

系. $\{P_m\}_{m\geq 1}$ を separated sequence とする. 点列 $\{P_m\}_{m\geq 1}$, が $K_{+\infty}(P)$ の正値調和優関数を characterize するための必要十分条件は

$$\sum_{m=1}^{\infty} d(P_m)^n = \infty$$

である.

参考文献

[1] B. E. J. Dahlberg, *A minimum principle for positive harmonic functions,* Proc. London Math. Soc., (3)**33**(1976), 238-250.

[2] I. Miyamoto and M. Yanagishita, *Some characterization of minimally thin sets in a cylinder and Beurling-Dahlberg-Sjögren type theorems,* Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

7. Notes on univalency of certain analytic functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Dinggong Yang (Suzhou University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

that are analytic in the open unit disc $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. We denote by $\mathcal{S}$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$.
Let $g(z) \in \mathcal{A}$ with $g(z)/z \neq 0\,(z \in \mathbb{U})$. Then we say that $f(z) \in \mathcal{A}$ belongs to the class $\mathcal{T}(\lambda, \mu, g)$ if it satisfies $f(z)/z \neq 0\,(z \in \mathbb{U})$ and

$$\left| z^2 \left(\frac{f'(z)}{f(z)^2} - \frac{g'(z)}{g(z)^2} \right) - \lambda z^2 \left(\frac{z}{f(z)} - \frac{z}{g(z)} \right)'' \right| < \mu$$

for $z \in \mathbb{U}$, where λ is complex with $\mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0$ and $\mu > 0$.

Theorem 1. If $f(z) \in \mathcal{T}(\lambda, \mu, g)$ and $\delta(g) \geqq \frac{\mu}{|1+2\lambda|}$ for $\mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0, \mu > 0$, and

$$\delta(g) = \inf \left\{ \left| \frac{(1/g(z_1) - (1/g(z_2))}{z_1 - z_2} \right| : z_1 \neq z_2, z_1 \in \mathbb{U}, z_2 \in \mathbb{U} \right\},$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Corollary 1. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $f(z)/z \neq 0\,(z \in \mathbb{U})$ and

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - \frac{1 + 2\alpha z}{(1 + \alpha z)^2} - \lambda z^2 \left\{ \left(\frac{z}{f(z)} \right)'' - \frac{2\alpha^2}{(1 + \alpha z)^3} \right\} \right| < \mu$$

for $z \in \mathbb{U}$ with $\mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0, \mu > 0, |\alpha| < 1/2$ and

$$\frac{\mu}{|1 + 2\lambda|} \leqq \frac{1 - 2|\alpha|}{(1 - |\alpha|)^2},$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Remark 1. S.Ozaki and M.Nunokawa (Proc.Amer.Math.Soc.33(1972)) have shown that

If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - 1\right| \leqq 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Theorem 2. Let $f(z) \in \mathcal{A}, g(z) \in \mathcal{A}$ with $f(z)g(z) \neq 0\,(0 < |z| < 1)$ and $\delta(g) \geqq 1$. If

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)} - \frac{z}{g(z)}\right)''\right| \leqq 2 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Corollary 2. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $f(z)/z \neq 0\,(z \in \mathbb{U})$ and

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)''\right| \leqq 2 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Remark 2. M.Nunokawa, M.Obradovió and S.Owa (Proc.Amer.Math.Soc. 106(1989)) have shown that

If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)''\right| \leqq 1 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}$.

Problem. (1) If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)''\right| \leqq \alpha \leqq 2 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α, then $f(z) \in \mathcal{S}^*(\beta)$?

(2) If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\left|\left(\frac{z}{f(z)}\right)''\right| \leqq \alpha \leqq 1 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α, then $f(z) \in \mathcal{K}(\beta)$?

8. コンパクトリーマン面間の正則写像による単純閉曲線の像曲線の巻き数について

大阪市立大学大学院理学研究科　山本 寛

C をリーマン面 R 上の任意の自明でない閉曲線とする．以下の条件を満たす自然数 $r > 0$ の最小値を $N_R(C)$ と書き，“R に於ける C の巻き数” と呼ぶ事にする．

- R 上のある閉曲線 C_0 が存在して，C_0 を r 回 iterate したもの $C_0{}^r$ と C とが自由ホモトープとなる．

C が R 上自明な閉曲線の時は，$N_R(C) = 0$ と定める．

R_1, R_2 をそれぞれ種数 g_1, g_2 $(g_1 \geq g_2 > 1)$ のコンパクトリーマン面，f を R_1 から R_2 への正則写像とし，C を R_1 上の任意の自明でない単純閉曲線とする．本講演では，R_2 に於ける $f(C)$ の巻き数 $N_{R_2}(f(C))$ の上からの評価について説明したい．

$f\colon R_1 \to R_2$ が分岐点を持たない時，$N_{R_2}(f(C))$ は f の葉数 d_f で上から評価できる．よって，Riemann-Hurwitz の関係式（cf. Farkas and Kra [1]）

$$2(g_1 - 1) = 2d_f(g_2 - 1) + B(f) \quad (\text{但し } B(f) \text{ は } f \text{ の分岐度の総和})$$

より，$N_{R_2}(f(C))$ の g_1, g_2 のみに依存する数による上からの評価

$$N_{R_2}(f(C)) \leq d_f = \frac{g_1 - 1}{g_2 - 1}$$

が得られる．

一方，$f\colon R_1 \to R_2$ が分岐点を持つ時に，$N_{R_2}(f(C))$ を g_1, g_2 のみに依存する数で上から評価する事は，一般にはできない．そこで，$N_{R_2}(f(C))$ の上からの評価を求める上で g_1, g_2 以外に利用する情報として，C の双曲的長さ $l_{R_1}(C)$ を採用する事にする．得られた評価は以下のとおりである．

定理 R_1, R_2 をそれぞれ種数 g_1, g_2 $(g_1 \geq g_2 > 1)$ のコンパクトリーマン面とし，f を R_1 から R_2 への非定値正則写像とする．R_1 上の任意の単純閉測地線 C に対して，

$$N_{R_2}(f(C)) \leq \max\{\frac{g_1 - 1}{g_2 - 1}, \Lambda(g_1, g_2, l_{R_1}(C))\}$$

が成り立つ．但し，

$$\begin{aligned}\Lambda(g_1, g_2, l) &= \sinh \frac{\pi^2(1+2(g_1-g_2)(g_1-1)/(g_2-1))}{\eta(l)}, \\ \eta(l) &= \frac{2\pi}{l}\left(\pi - 4\arctan(\tanh\frac{l}{4})\right),\end{aligned}$$

また，$l_{R_1}(C)$ は，R_1 上の曲率 -1 の双曲計量による C の長さとする．

参考文献

[1] H. M. Farkas and I. Kra: *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980.

[2] H. Yamamoto: On the multiplicity of the image of simple closed curves via holomorphic maps between compact Riemann surfaces, *to appear*.

9. 同変 $K=2$ 予想の反例の具体的構成

小森洋平　大阪市立大学大学院理学研究科
Charles A. Matthews　南オクラホマ州立大学

2つのメビウス変換 $S(z)=z+2$ と $T(z)=\frac{1}{z}+(1+2i)$ で生成される群 $G=\langle S,T\rangle$ は、regular b-group of type $(1,1)$ と呼ばれている自由クライン群になる。G はリーマン球面 $\hat{\mathbf{C}}$ に等角に作用して、その作用で不変な単連結成分 Ω を1つだけ持ち、その商空間 Ω/G は1点穴あきトーラスになる。

一方 $\hat{\mathbf{C}}$ を双曲3次元空間 $\mathbf{H}^3$ の境界と思い、$\hat{\mathbf{C}}$ での Ω の補集合の $\mathbf{H}^3$ での双曲的凸閉包を考えると、凸閉包の境界 $\mathrm{Dome}(\Omega)$ に G は等長に作用する。その商空間 $\mathrm{Dome}(\Omega)/G$ もまた1点穴あきトーラスになる。

そこで、これら2つの1点穴あきトーラスがタイヒミュラー空間でどれくらい離れているかを評価した。2点間のタイヒミュラー距離を $\log K$ とすると、

主結果　$2.0015 < K < 2.0161.$

この評価がサーストンの同変 $K=2$ 予想の反例を与えていることを、この講演で説明する。

10. $SO(3)$ の非離散部分群の固定点集合

井上克己 (金沢大・医)

群の離散性とは独立に初等性を定義する必要がある。そこで次の定義を採用する。

定義 (Beardon [2]). $SL(2,\mathbf{C})$ の部分群 G が初等群であるとは、ある $\xi \in \overline{\mathbf{H}^3}$ の G 軌跡が有限集合となることを言う。

初等群については次の命題が基本的である。

命題 (Abikoff-Haas [1]). G を $SL(2,\mathbf{C})$ の初等群とすると 1 点か 2 点からなる集合 $X \subset \overline{\mathbf{H}^3}$ で G 不変なものが存在して以下のいずれかが成り立つ。

(1) X は $\mathbf{H}^3$ の 1 点からなる。

(2) X は $\partial\mathbf{H}^3 = \hat{\mathbf{C}}$ の 1 点のみからなる。

(3) X は $\hat{\mathbf{C}}$ のあい異なる 2 点のみからなる。

特に G が (1) をみたすことと G が楕円変換 (と Id) のみからなることは同値である。さらに G が (1) をみたす初等群で $X = \{\xi\}, \xi \in \mathbf{H}^3$ とすると $\exists f \in M(\widehat{\mathbf{R}^3})$ $s.t.$ $f(\mathbf{H}^3) = \mathbf{B}^3$, $f(\xi) = 0$ & $fGf^{-1} < SO(3)$ となる。これより先は $SO(3)$ の部分群 G について考察する。ここで G の固定点集合を $F_G := \{\, \xi \in \mathbf{S}^2 \mid g(\xi) = \xi \ for \ \exists g \in G - \{Id\} \,\}$ とし、さらに $k = 2, 3, \cdots, +\infty$ にたいし G の位数 k の要素の固定点集合を $F_G^k := \{\, \xi \in F_G \mid \mathrm{ord}(g) = k \,\}$ と定義する。また $N = (0,0,1)$, $S = (0,0,-1)$, $E = \{\, (x,y,0) \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ とおく。

定理. G を $SO(3)$ の非離散部分群とすると次のいずれかが成り立つ。

(1) $\exists f \in SO(3)$ $s.t.$ $F_{fGf^{-1}} = f(F_G) = \{N, S\}$.

(2) $\exists f \in SO(3)$ $s.t.$ $f(F_G) \subset \{N,S\} \cup E$, $f(F_G) \cap E \subset f(F_G^2)$ & $\overline{f(F_G)} = \{N,S\} \cup E$.

(3) $\overline{F_G^\infty} = \mathbf{S}^2$.

証明には次の二つの補題を用いる。

補題1. $SO(3)$ の非離散部分群 G が $\mathbf{S}^2$ 上のいかなる大円も不変にしないとする。さらに G は位数無限大の要素を含むとする。すると $\overline{F_G^\infty}=\mathbf{S}^2$ がなりたつ。

補題2. G は $SO(3)$ の非離散部分群で有限位数の要素のみからなるとすると G は $\mathbf{S}^2$ 上のある大円を不変にする。

定理の系として次の結果を得る。

系. G は $SL(2,\mathbf{C})$ の純楕円的な部分群で $\hat{\mathbf{C}}$ 上のいかなる円も不変にしないとする。すると G が離散であることと G のすべての 1 元生成部分群が離散であることは同値である。

注意. 上の系で“いかなる円も不変にしない”という前提をみたさないと反例が存在する。

参考文献

[1] Abikoff, A. and Haas, A., *Nondiscrete groups of hyperbolic motions*, Bull. London Math. Soc. 22 (1990) 233-238.
[2] Beardon, A. F., *The geometry of discrete groups*, Springer(1983).
[3] Inoue, K., *Fixed point sets for non-discrete subgroups of SO(3)*, preprint.
[4] Jϕrgensen, T., *A note on subgroups of SL(2,C)*, Quart. J. Math. Oxford (2) 28 (1977) 209-212.

11. Semiconjugacy between actions of finitely generated Kleinian groups

宮地秀樹*
(大阪市立大学)

リーマン球面上の自己双正則変換（一次分数変換）全体 $PSL_2(\mathbf{C})$ 内の離散部分群をクライン群とよぶ。リーマン球面を３次元球面の境界とみなしたときには、一次分数変換全体は３次元球面内のポアンカレ計量に関して向きを保つ等長写像に拡張される。この拡張に関してクライン群は３次元双曲空間 $\mathbf{H}^3$ 上の離散部分群と同一視される。従って、クライン群 Γ に対して双曲多様体 $N_\Gamma := \mathbf{H}^3/\Gamma$ を考えることができる。ねじれ元の持たないクライン群 Γ は N_Γ が（境界付き）コンパクト３次元多様体の内部と同相になるとき、位相的素直 (topologically tame) であるといわれる。また、（ねじれ元を含む）クライン群が位相的素直であるとは、その中に位数が有限な、ねじれ元を含まない位相的素直な部分群を含む時にそう呼ばれる。明らかに位相的素直なクライン群は有限生成であるが、逆に、有限生成クライン群は位相的素直であることも予想されている（A.Marden)。

一方、クライン群は３次元多様体の基本群のリーマン球面への作用だと考えると、これは（複素）力学系とみなすことが出来る。力学系において基本的なものの一つに双曲的と呼ばれる力学系があるが、それはクライン群においては凸ココンパクト (convex cocompact) と呼ばれるクライン群に対応する。ここで、凸ココンパクトクライン群とは斜航的元と楕円的元のみからなる幾何学的有限なクライン群である。

ここで言葉を準備する：クライン群 G は、G の任意の無限位数の元は斜航的元であり、その移動距離 (translation length) が G にのみ依存する正の定数で下から押さえられているときに有界幾何 (bounded geometry) を持つと言われる。２つの同型なクライン群 Γ_1 と Γ_2 と同型写像 $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ に対して、全射連続写像 $h : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ が $\rho(\gamma) \circ h = h \circ \gamma$ を任意の $\gamma \in \Gamma_1$ に対して成立するとき、h は同型写像 ρ に関する擬共役 (semi-conjugate) であるという。擬共役が単射であれば、力学系の（位相的）共役を与える。

*The author is partially supported by Research Fellowships of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

定理 1. 有界幾何を持つ位相的素直なクライン群 Γ に対して、凸ココンパクトなクライン群 Γ_0 と同型 $\rho:\Gamma_0\to\Gamma$ とその同型に関する擬共役が存在する。

特に、ねじれ元の無い場合については次のことが成立する。

定理 2. 有界幾何を持つ位相的素直なねじれ元を持たないクライン群 Γ と凸ココンパクトなクライン群 Γ_0 で N_{Γ_0} と N_Γ が同相なものをとる。$H:N_{\Gamma_0}\to N_\Gamma$ を同相写像とし同型 $\rho:\Gamma_0\to\Gamma$ を H から誘導されるものとする。このとき、H とホモトピックな連続写像 $g:N_{\Gamma_0}\to N_\Gamma$ でそのリフト $\tilde{g}:\mathbf{H}^3\to\mathbf{H}^3$ が境界に連続拡張されるものが存在する。特にその連続拡張は ρ に関する擬共役になる。

この講演では、他に（位相的素直とは仮定しない）有限生成クライン群の場合において、擬共役が存在するための条件を論じる予定である。

参考文献

[Kl99] Klarreich E., Semiconjugacies of between Kleinian group actions on the Riemann sphere, Amer. Jour. of Math. **121** (1999), 1031–1078.

[Mi94] Minsky Y., On rigidity, limit sets, and the end invariants of hyperbolic 3-manifolds, J.Amer. Math.Soc. **7** (1994), 539–588.

[M] Miyachi H., Semiconjugacies between actions of topologically tame Kleinian groups, preprint (2002)

12. Jørgensen groups of parabolic type, II - countable infinite case -

Changjun Li (Shizuoka University),
Makito Oichi (Shizuoka University) and Hiroki Sato (Shizuoka University)

ABSTRACT. Last time we stated that we found all Jørgensen groups of parabolic type for the finite case. In this talk we will state that we found all Jørgensen groups of parabolic type for the countable infinite case.

If $\langle A, B\rangle$ is a Jørgensen group such that A ia parabolic, then we call $G = \langle A, B\rangle$ a *Jørgensen group of parabolic type*. By normalization we can represent this group as follows:

Let $G_{\mu,\sigma} = \langle A, B_{\mu,\sigma}\rangle$ be the group generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,\mu} = \begin{pmatrix} \mu\sigma & \mu^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & \mu\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $\mu \in \mathbf{C}$.

Then it gives rise to the following problem.

PROBLEM. Find all Jørgensen groups of parabolic type.

Here we consider the case of $\mu = ik$ ($k \in \mathbf{R}$). Namely, we consider two-generator groups $G_{\sigma,ik} = \langle A, B_{ik,\sigma}\rangle$ generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,ik} = \begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbf{R}$.

Let C be the following cylinder: $C = \{(\sigma, ik) \mid |\sigma| = 1,\ k \in \mathbf{R}\}$.

THEOREM A (Sato [2]). *Every Jørgensen group of type $G_{\sigma,ik}$ lies on the cylinder C.*

By Theorem A we consider two-generator groups $G_{\sigma,\mu} = \langle A, B_{\sigma,\mu}\rangle$ with $\sigma = -ie^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) and $\mu = ik$ ($k \in \mathbf{R}$). For simplicity we set $B_{\theta,k} := B_{\sigma,ik}$ and $G_{\theta,k} = \langle A, B_{\sigma,k}\rangle$ for $\sigma = -ie^{i\theta}$.

After some consideration we can see that it suffices to consider the case where $0 \leq \theta \leq \pi/2$ for finding Jørgensen groups on the cylinder C.

Last time we stated that we found all Jørgensen groups in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $0 \leq |k| \leq \sqrt{3}/2$, that is, we obtained the following theorem.

THEOREM B (Finite Case) (Li - Oichi - Sato [1]). *There are sixteen Jørgensen groups in $D = \{(\theta, k) \in \mathbf{R} \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq k \leq \sqrt{3}/2\}$, in which nine groups are Kleinian groups of the first kind and seven groups are of the second kind.*

This time we will state that we found all Jørgensen groups in the case where $0 \leq \theta \leq 2\pi$ and $\sqrt{3}/2 < |k| \leq 1$, that is, we obtain the following theorems.

THEOREM 1 (Li - Oichi - Sato [1]). *Let $G_{\theta,k} = \langle A, B_{\theta,k} \rangle$ be the group generated by A and $B_{\theta,k}$. If $0 < \theta < \pi/6$, $\pi/6 < \theta < \pi/4$, $\pi/4 < \theta < \pi/3$ or $\pi/3 < \theta < \pi/2$, then $G_{\theta,k} = \langle A, B_{\theta,k} \rangle$ is not a Kleinian group for every $k \in \mathbf{R}$ and so not a Jørgensen group for every $k \in \mathbf{R}$.*

THEOREM 2. There are countable infinite numbers of Jørgensen groups on the segment $\{(\theta, k) \mid \theta = 0,\ \sqrt{3}/2 < k \leq 1\}$.

THEOREM 3. There are no Jørgensen groups on the segment $\{(\theta, k) \mid \theta = \pi/6,\ \sqrt{3}/2 < k \leq 1\}$.

THEOREM 4. There is only one Jørgensen group on the segment $\{(\theta, k) \mid \theta = \pi/4,\ \sqrt{3}/2 < k \leq 1\}$, that is, $G_{\pi/4,1}$ is a Jørgensen group and others are not Jørgensen groups on the segment.

THEOREM 5. There are no Jørgensen groups on the segment $\{(\theta, k) \mid \theta = \pi/3,\ \sqrt{3}/2 < k \leq 1\}$.

THEOREM 6. There are countable infinite numbers of Jørgensen groups on the segment $\{(\theta, k) \mid \theta = \pi/2,\ \sqrt{3}/2 < k \leq 1\}$.

References

[1] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type, I - finite case -*, preprint.

[2] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, 2000, 271-287.

13. NEVANLINNA THEORY, DIOPHANTINE APPROXIMATION, AND THE SIEGEL-CREMER PROBLEM

YÛSUKE OKUYAMA
(奥山裕介)

ABSTRACT. We attack the Fatou, Siegel, and Cremer problem on irrationally indifferent cycles of points and circles of rational functions by the Nevanlinna theory, and obtain more general and natural Diophantine condition for non-linearizability than those ever known by completely different arguments.

1. NEVANLINNA THEORY

Let $[p, q]$ be the chordal distance between $p, q \in \hat{\mathbb{C}}$ such that $[0, \infty] = 1$. For rational functions f and g, we define the *pointwise proximity* $w(f, g) := \log(1/[f, g])$, and the *mean proximity* $m(f, g) := \int_{\hat{\mathbb{C}}} w(f, g) d\sigma$, where σ is the spherical metric on $\hat{\mathbb{C}}$ such that $\sigma(\hat{\mathbb{C}}) = 1$.

Definition 1.1. Let $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of rational functions such that $d_k := \deg f_k \uparrow \infty$ as $k \to \infty$. For a rational function g, we define the *Valiron exceptionality*

$$\mathrm{VE}(g; \mathcal{F}) := \limsup_{k \to \infty} \frac{m(g, f_k)}{d_k}.$$

We say g to be *Valiron exceptional* for $\mathcal{F}$ if $\mathrm{VE}(g; \mathcal{F}) > 0$.

Example 1.1. In the case that $\mathcal{F} = \{z^k\}$ and $g \equiv 0$, we have $\mathrm{VE}(g; \mathcal{F}) > 0$ so g is Valiron exceptional for $\mathcal{F}$.

We write $f^k := f^{\circ k}$ for $k \in \mathbb{N}$ and a rational function f.

Main Theorem 1 (Fundamental Equality). *Let f be a rational function of degree $d \geq 2$. Then for every positive continuous function $\phi \not\equiv 0$ on $\hat{\mathbb{C}}$,*

$$\mathrm{VE}(\mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{C}}}; \{f^k\}) = \limsup_{k \to \infty} \frac{\int_{\hat{\mathbb{C}}} \phi \cdot w(\mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{C}}}, f^k) d\sigma}{d^k \cdot \int_{\hat{\mathbb{C}}} \phi d\sigma}.$$

2. THE FATOU-JULIA STRATEGY

For a rational function f, we define the *Fatou* set $F(f)$ and *Julia* set $J(f)$ by the set of all points of normality of $\{f^k\}$ and its complement in $\hat{\mathbb{C}}$ respectively.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30D05; Secondary 30D35, 37F50, 39B12.
Key words and phrases. Nevanlinna Theory, irrationally indifferent cycle, Siegel cycle, Cremer cycle.

Main Theorem 2. *Let f be a rational function of degree ≥ 2 such that $F(f) \neq \emptyset$. Then the identity of $\hat{\mathbb{C}}$ is non-Valiron exceptional for $\{f^k\}$.*

3. Siegel, Herman and Cremer cycles

Let f be a rational function of degree $d \geq 2$.

Definition 3.1. Let $\{f^j(z_0)\}_{j=1}^p$ be a cycle of points of period p. We define its *multiplier* by $(f^p)'(z_0)$. Let $\{f^j(S)\}_{j=1}^p$ be a cycle of topological circles of period p, where we assume that for every $j \in \mathbb{N}$, $f|(f^{(j-1)}(S))$ is a *homeomorphism* from $f^{(j-1)}(S)$ to $f^j(S)$. We define its *multiplier* by $\exp(2\pi i\alpha)$, where $\alpha \in \mathbb{R}$ is the rotation number of an S^1-homeomorphism topologically conjugate to $f^p|S$. We say a cycle O of points or circles *irrationally indifferent* if its multiplier equals $\exp(2\pi i\alpha)$ for some $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, and then *Siegel* or *Cremer* if it intersects $F(f)$ or not.

Main Theorem 3. *Let O be an irrationally indifferent cycle of points or circles of period p and of multiplier λ. If O is Siegel, then*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{d^{pk}} \log \frac{1}{|\lambda^k - 1|} = \mathrm{VE}(\mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{C}}}; \{f^{pk}\}).$$

Main Theorem 4 (Non-linearizability Criteria). *Let O be as in Main Theorem 3. If*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{d^{pk}} \log \frac{1}{|\lambda^k - 1|} > 0, \tag{O(d)}$$

then O is Cremer.

Remark 3.1. Main theorem 4 completely generalizes the classical Cremer theorem where he studied a cycle of only points and more restricted condition:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{d^{pk}} \log \frac{1}{|\lambda^k - 1|} = \infty.$$

Definition 3.2. Let D be a connected component of $F(f)$ of period p. We call D a *rotation domain* if there exist a conformal map h from D onto either $\mathbb{D}$ or an annulus and $\lambda \in S^1$ such that $h \circ f^p = R_\lambda \circ h$ on D, where $R_\lambda(z) := \lambda z$. We call D a *Siegel disk* or an *Herman ring* respectively and λ its *rotation number*.

Main Theorem 5. *The rotation numbers of no rotation domains satisfy* O(d).

Remark 3.2. Our treatment of rotation numbers of irrationally indifferent cycles of circles dispenses with quasiconformal surgeries.

Main Theorem 6. *The multipliers of no irrationally indifferent cycles of circles which are boundaries of cycles of rotation domains satisfy* O(d).

ACKNOWLEDGEMENT. The author would like to express his gratitude to Professors Masahiko Taniguchi and Toshiyuki Sugawa for many valuable discussions and advices.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Shizuoka University, Shizuoka 422-8529 Japan
E-mail address: syokuya@ipc.shizuoka.ac.jp

特別講演

穴あき曲面群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現とトレース恒等式

中西敏浩　名古屋大学大学院多元数理科学研究科

0. 序. F を向き付け可能な曲面とする。この講演で扱う対象は F の基本群(曲面群)の $PSL(2,\mathbb{C})$ 表現である。函数論においては F 上の射影構造のホロノミー表現として登場する。F が双曲型リーマン面であるとき、その普遍被覆面から単位円板 $\mathbb{D}$ への Koebe 写像による被覆変換群の共役で得られる Fuchs 群表現はその典型例である。この例のように忠実かつその像が離散的である表現が興味深い。

この講演の目標は、穴あき曲面群の忠実な $PSL(2,\mathbb{C})$ 表現(離散性は仮定しない)の空間にある座標系を導入することなのだが、まずは一つの例でその動機を説明する。

穴あきトーラス群とは、2つの $SL(2,\mathbb{C})$ の行列 A, B で、交換子 $[A,B]=ABA^{-1}B^{-1}$ が放物型かつ $\mathrm{tr}[A,B]=-2$ をみたすものによって生成される階数 2 の自由群であるとする。こうした穴あきトーラス群の標準生成系の順序対 (A,B) 全体を考え、同値関係

$$(A_1,B_1)\sim(A_2,B_2)\Leftrightarrow \text{ ある } C\in SL(2,\mathbb{C}) \text{ があって } A_2=C^{-1}A_1C, B_2=C^{-1}B_1C$$

による商空間を $\mathcal{R}'_1$ で表わす。$\{A,B\}\in\mathcal{R}'_1$ に対して $x=\mathrm{tr}A, y=\mathrm{tr}B$, $z=\mathrm{tr}AB$ とおくと、これらは、いわゆる Markov の方程式をみたす。

$$x^2+y^2+z^2=xyz. \tag{1}$$

逆に (1) をみたす $x,y,z\in\mathbb{C}^\times$ が与えられると $x=\mathrm{tr}A, y=\mathrm{tr}B$, $z=\mathrm{tr}AB$ である $\{A,B\}\in\mathcal{R}'_1$ が一意的に定まる。換言すると (1) をみたす $(x,y,z)\in(\mathbb{C}^\times)^3$ は $\mathcal{R}'_1$ に座標系を定める。次に穴あきトーラス群の写像類群 $\mathcal{MC}'_1$ の (x,y,z) 座標への作用を見る。$\mathcal{MC}'_1$ は2元 $S:\{A,B\}\mapsto\{A,BA\}$ と $T:\{A,B\}\mapsto\{ABA^{-1},A^{-1}\}$ で生成される。S の作用により $(\mathrm{tr}A,\mathrm{tr}B,\mathrm{tr}AB)$ は $(\mathrm{tr}A,\mathrm{tr}BA,\mathrm{tr}ABA)$ に写されるから、S は写像 $S_*(x,y,z)=(x,z,xz-y)$ を定める。同様にして

$$S_*(x,y,z)=(x,z,xz-y),\qquad T_*(x,y,z)=(y,x,xy-z). \tag{2}$$

$\sigma=TSTS^{-1}$ を考える。σ は双曲的であり[1]、σ_* は点 $\tau=(\frac{3-\sqrt{-3}}{2},\frac{3+\sqrt{-3}}{2},\frac{3-\sqrt{-3}}{2})$ およびその複素共役を固定する。今 τ に対応する $\{A,B\}$ の代表系 A,B を選ぶと、σ は $\{A,B\}$ を固定するので、ある $C\in SL(2,\mathbb{C})$ が存在して

$$(ABA^{-3},A^2BA^{-1})=\sigma(A,B)=(C^{-1}AC,C^{-1}BC).$$

このとき A,B,C によって生成される群 Γ は $SL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群(すなわちクライン群)であり、$M=\mathbb{H}^3/\Gamma$ は 3 次元球面における8の字結び目の補空間と同相である。σ を定める S の自

[1] Bers 流の分類[Ber]による。$S\mapsto\pm\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $T\mapsto\pm\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ の対応で $\mathcal{MC}'_1$ から $PSL(2,\mathbb{Z})$ への同型を得る。穴あきトーラス群という特殊な場合は σ_* が双曲的であることは、$|\mathrm{tr}\ \sigma|=3$ からわかる。

己同相写像を h とすると、M は穴あきトーラス S と区間 $I=[0,1]$ との積 $S\times I$ の境界の点 $(x,0)\in S\times\{0\}$ と点 $(h(x),1)\in S\times\{1\}$ を同一視して得られ、円周 S^1 上のファイバー空間の構造をもつ。

S^1 上のファイバー構造をもつ双曲多様体を見いだすこうした方法を一般の曲面に適用できるようにしたい[2]。そのためには、写像類群の作用が (2) のように具体的に表示できるような曲面群の座標系を $PSL(2,\mathbb{C})$ 表現空間に導入する必要がある。もしその座標空間のすべての点が $PSL(2,\mathbb{C})$ 表現空間の点を表わすとは限らないのならば、どこにそれが存在するかを示すもの、すなわち (1) に相当する式も必要になる。

1. 穴あき曲面群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現空間.

1.1. この講演では記述を簡単にするため1点穴あき曲面を考える。F を種数 $g\geq 1$ の向き付け可能閉曲面、p を F の点とし、$F'=F-\{p\}$ とおく。このとき基本群 $\pi_1(F')$ は次の群表示をもつ:

$$\pi_1(F')=\langle a_1,b_1,...,a_g,b_g,d:[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]d=1\rangle.$$

ここで d は p の回りを一周する単純閉曲線のホモトピー類である。表現空間

$$\mathcal{R}'_g=\{\rho:\pi_1(F')\to SL(2,\mathbb{C}):\rho \text{ は忠実な表現で、} \rho(d) \text{ は放物型かつ } \mathrm{tr}\rho(d)=-2\}/SL(2,\mathbb{C})$$

を考える。$SL(2,\mathbb{C})$ において共役な表現は同じものと見なしている[3]。付加条件 $\mathrm{tr}\rho(d)=-2$ は離散表現については成立している。

$\mathcal{R}'_g$ において共役な表現は同一視されているので、いくつかの $\pi_1(F')$ の元 $x_1,...,x_n,...$ を選んで、それらの定めるトレース関数 $\rho\mapsto\mathrm{tr}\rho(x_n)$ の族を $\mathcal{R}'_g$ の座標として採用するのは自然な考えである(たとえば [Luo] 参照)。ここでは写像類群の作用の具体的表示を得るために、トレース関数の一つの variation である λ 座標というものを導入する。

1.2. λ length. $S^1=\{e^{i\theta}:0\leq\theta<2\pi\}$ を単位円周とする。単純閉曲線

$$\bar{c}:(S^1,S^1-\{1\},1)\to(F,F',p)$$

の $S^1-\{1\}$ への制限 $c=\bar{c}|_{S^1-\{p\}}$ あるいは、その像を ideal arc と呼ぶ。$\bar{c}$ の正則近傍の境界は2つの単純閉曲線 $c',c''\subset F'$ からなる。$\rho\in\mathcal{R}'_g$ とし、その代表元も ρ で表わすことにしておく。トレース関数は、自由ホモトピー類(曲線の向きも気にしない)の集合を定義域にしているので

$$\lambda(c,\rho)=-(\mathrm{tr}\rho(c')+\mathrm{tr}\rho(c''))$$

が定まる。これを ideal arc c の ρ に関する λ length という。

---

[2]例にあげたのは非常に特殊で、一般には（もちろん双曲型の写像類を選んだとして）多くの不動点が存在し、その中の複素共役や外部自己同型を除いたたった一つが離散表現に対応する。ここで離散性の判定という厄介な問題につきあたることになる。また (2) は多項式写像であるが、これも穴あきトーラスの場合の特殊性である。

[3]ここでは $SL(2,\mathbb{C})$ 表現を考えている。orbifold 群を考えるときは、それが偶数位数の元を含めば、その $SL(2,\mathbb{C})$ への忠実な表現はありえないから注意を要する。

(1) λ length の名前は、ρ が Fuchs 群表現であるとき、$\lambda(c,\rho)$ が Penner [Pe1] が導入した(特別な場合における) λ length と符号を無視すれば一致することに由来する。後の写像類群の有理写像表現も Penner のアイデアに依っている。

(2) $SL(2,\mathbb{C})$ への表現の場合は行列の符号が悩ましい。穴あきトーラス群 (A,B) が Fuchs 群の場合は $\mathrm{tr}[A,B]=-2$ である。$A,B,C\in SL(2,\mathbb{R})$ が3つの穴あき球面群を生成するとき、$\mathrm{tr}A<0, \mathrm{tr}B<0$ であれば $\mathrm{tr}C<0$ であるが、すべてのトレースが正であるようには選ぶことができない、などのことがわかっている[Zie]. λ length の定義でトレースのマイナスを考えているのは、Fuchs 群表現に制限すればすべての λ length が正となるように行列を選ぶことができるからである。

1.3. ideal triangulation. ideal arc の組 $\Delta=(c_1,c_2,...,c_d)$ は、$\bar{c}_1,...,\bar{c}_d$ が F の三角形分割になっているとき F' の ideal triangulation を定めるという。あるいは Δ そのものを F' の ideal triangulation と呼ぶ。このとき Euler 標数の計算により Δ の ideal arc の個数は $d=6g-3$, また三角形の数は $n=4g-2$ である。この章の目標である ideal triangulation 上の λ length たちが $\mathcal{R}'_g$ 上の大域座標系を与えることを述べる。

定理 1. $\Delta=(c_1,c_2,...,c_d)$ を F' の ideal triangulation とする。このとき写像

$$\iota_\Delta:\mathcal{R}'_g\longrightarrow(\mathbb{C}^\times)^d \qquad \rho\mapsto(\lambda(c_1,\rho),...,\lambda(c_d,\rho))$$

は単射である。

さらに ι_Δ の像がどこにあるかを知ること、すなわち (1) に相当する $\lambda(c_1,\rho),...,\lambda(c_d,\rho)$ がみたすべき式を書き下すことができる。

定義. T を ideal triangulation Δ の三角形(すなわち $F'-\cup_{k=1}^d C_k$ の連結成分)とする。もし $T\cup\{p\}$ の正則近傍 N が 2 次元球面から互いに交わらない 3 円板を取り除いたものと同相であれば、T は untwisted であるという。そうでないとき、N はトーラスから 1 つの円板を取り除いたものと同相であり、T は twisted であるという[Mos].

1.4. Δ の三角形を $T_1,...,T_n$ とする。さらに各 T_k の辺を $c_{k1},c_{k2},c_{k3}\in\Delta$ とする。$\rho\in\mathcal{R}'_g$ に対して

$$s(T_k,\rho)=\epsilon(T_k)\left(\frac{\lambda(c_{k1},\rho)}{\lambda(c_{k2},\rho)\lambda(c_{k3},\rho)}+\frac{\lambda(c_{k2},\rho)}{\lambda(c_{k3},\rho)\lambda(c_{k1},\rho)}+\frac{\lambda(c_{k3},\rho)}{\lambda(c_{k1},\rho)\lambda(c_{k2},\rho)}\right)$$

とおく[4]。ここで T が untwisted ならば $\epsilon(T)=+1$, twisted ならば $\epsilon(T)=-1$ である。

定理 2. (トレース恒等式) 任意の $\rho\in\mathcal{R}'_g$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^n s(T_k,\rho)=1$.

これで最初の例で述べた S^1 上のファイバー構造をもつ 3 次元双曲多様体(ただしファイバーは穴あき曲面)を見つけるためのレシピの前半部分、すなわちトレース恒等式 (1) の一般化が完成した。穴あきトーラスの場合は、任意の 2 つの ideal triangulation が写像類群の作用で同値であるから一種類のトレース恒等式 (1) だけで済むけれども、$g\geq 2$ のときは ideal triangulation の曲

[4] ρ が忠実な表現なので $\lambda(c,\rho)$ は決して 0 にならないことを注意しておく。

面上のグラフとしての同型類の数だけトレース恒等式が存在する。それだけ扱いは厄介になる(1 点穴あき種数 g の面 F'_g の場合、その同型類は $(g-1)\times(g-1)!/2$ 個以上あるらしい[Pe2])。さて次に写像類群の作用の表示に移ろう。

2. 写像類群.

2.1. 写像類群 $\mathcal{MC}'_g$ とは、向きを保つ同相写像 $h:(F,p)\to(F,p)$ のアイソトピー類のなす群である。今 $\Delta=(c_1,c_2,\dots,c_d)$ を F' の ideal triangulation とする。$[h]\in\mathcal{MC}'_g$ に対し、$h\Delta=(h(c_1),h(c_2),\dots,h(c_d))$ も F' の ideal triangulation である。写像類 $[h]$ が引き起こす座標変換

$$\varphi_{h\Delta,\Delta}=\iota_{h\Delta}\circ\iota_\Delta^{-1}:\iota_\Delta(\mathcal{R}'_g)\to\iota_{h\Delta}(\mathcal{R}'_g)$$

が有理写像であることを見るのがこの章の目的である。

2.2. elementary moves F' の ideal triangulation Δ の辺 $e\in\Delta$ を一つ選ぶ。S_1, S_2 を e に隣接する三角形、a, b, e を S_1 の辺、c, d, e を S_2 の辺とし、四辺形 $Q=S_1\cup e\cup S_2$ において a と c が互いの対辺であるとする。e を Q のもう一つの対角線 f に置き換えることによって新しい ideal triangulation $\Delta'=(\Delta-\{e\})\cup\{f\}$ が得られる。

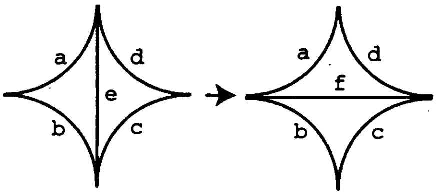


Figure . Elementary move

上の図は e とそれに隣接する三角形を普遍被覆面に持ち上げたものと見てください。

Δ から Δ' への変形を e 上の elementary move という。$\rho\in\mathcal{R}'_g$ とし $\lambda_a=\lambda(a,\rho)$, $\lambda_b=\lambda(b,\rho)$, $\lambda_c=\lambda(c,\rho)$, $\lambda_d=\lambda(d,\rho)$, $\lambda_e=\lambda(e,\rho)$, $\lambda_f=\lambda(f,\rho)$ とおくとき、λ_f は残りの λ lengths をもちいて次のように表わされる。

$$\lambda_f=\frac{\epsilon_1\lambda_a\lambda_c+\epsilon_2\lambda_b\lambda_d}{\lambda_e}. \tag{3}$$

ただし ϵ_i $(i=1,2)$ は以下のように定める。T_1 を a, d, f を辺にもつ Δ' の三角形、T_2 を b, c, f を辺にもつ Δ' の三角形とする。もし S_1 と S_2 が同じ parity もつ(すなわち、どちらも twisted である、あるいはどちらも untwisted である)ときは $(\epsilon_1,\epsilon_2)=(1,1)$ である。それ以外の場合 S_1 と T_1 が同じ parity をもつときは $(\epsilon_1,\epsilon_2)=(-1,1)$, 異なる parity をもつときは $(\epsilon_1,\epsilon_2)=(1,-1)$ である。(3) により

$$\varphi_{\Delta',\Delta}=\iota_{\Delta'}\circ\iota_\Delta^{-1}:(\cdots,\lambda_a,\lambda_b,\lambda_c,\lambda_d,\lambda_e,\cdots)\mapsto(\cdots,\lambda_a,\lambda_b,\lambda_c,\lambda_d,\lambda_f,\cdots)$$

は有理写像であることがわかる。

補題. [Pe1] 任意の 2 つの ideal triangulations Δ, Δ' に対して elementaty move の有限列 $\Delta=\Delta_0\to\Delta_1\to\Delta_2\to\cdots\to\Delta_p=\Delta'$ が存在する。

Δ を一つ固定する。$[h]\in\mathcal{MC}'_g$ に対し、上の補題をもちいて elementary move 列 $\Delta=\Delta_0\to\Delta_1\to\Delta_2\to\cdots\to\Delta_p=h\Delta$ を見つけると

$$h_*=\varphi_{h\Delta,\Delta}=\varphi_{\Delta_p,\Delta_{p-1}}\circ\cdots\circ\varphi_{\Delta_1,\Delta_0}$$

は有理写像の合成としてやはり有理写像である。まとめると

定理 3. 写像類群 $\mathcal{MC}'_g$ は $(\mathbb{C}^\times)^{6g-3}$ に有理写像として作用する。

こうしてレシピの後半部分も完成した。実際に応用してみよう。実は種数が 2 のときでさえ計算は恐ろしく大変である。この講演では扱わなかったが、2つ穴あきトーラス群を考えてみる。この群は

A,B,C で生成される階数 3 の自由群で、C, $D=[A,B]C$ は放物型、$\mathrm{tr}D=-2$.

ある ideal triangulation のもとで、λ lengths は $x=-(\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}BA^{-1}B^{-1}C)$, $y=-(\mathrm{tr}B+\mathrm{tr}B^{-1}C)$, $z=-(\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}AC)$, $u=-(\mathrm{tr}AB+\mathrm{tr}A^{-1}B^{-1}C)$, $v=-(\mathrm{tr}C+\mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1})$ となり、定理 2 でいうトレース多項式は、

$$u^2vx+vxy^2+u^2vz+vx^2z+vy^2z+vxz^2-uv^2y-ux^2y-uyz^2-2uxyz+\cancel{\;}uvxyz.$$

いくつかの写像類(ここでは曲面群の外部自己同型としての標準生成系 (A,B,C) への作用で表わす)

$$\begin{aligned}
\varphi_1(A,B,C)&=(A,BA,C)\\
\varphi_2(A,B,C)&=(ABA^{-1},A^{-1},C),\\
\varphi_3(A,B,C)&=(A,BA^{-1}B^{-1}CB,BA^{-1}B^{-1}CBAB^{-1})
\end{aligned}$$

の有理表現は

$$\begin{aligned}
\varphi_{1*}\ &:\ \left(x,u,z,\frac{u^2+xz}{y},v\right)\\
\varphi_{2*}\ &:\ \left(y,z,\frac{-vy^2-vxz+uyz}{ux},\frac{y^2+xz}{u},v\right)\\
\varphi_{3*}\ &:\ \left(x,\frac{-uvy+xy^2+x^2z}{uz},\frac{-u^2vx+uv^2y+ux^2y-vxy^2-vx^2z}{uyz},\frac{-uv+xy}{z},\frac{(u^2v-uxy+uvxy+vy^2+vxz-uyz)^2}{u^2vy^2}\right)
\end{aligned}$$

となる。ここで (x,y,z,u,v) のそれぞれの写像による像だけを記した。

$\phi=\varphi_1\varphi_3^{-1}\varphi_2$ は固定点 $\tau=(-4,-4,-4+8\sqrt{-1},-8,-8-8\sqrt{-1})$ をもつ。この点に対応する群は

$$A=\begin{pmatrix}\frac{17-5\sqrt{-1}}{4} & -6+\frac{21\sqrt{-1}}{8}\\ 1 & \frac{-5+\sqrt{-1}}{4}\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}\frac{5+11\sqrt{-1}}{4} & -\frac{18+37\sqrt{-1}}{8}\\ -1+2\sqrt{-1} & \frac{7-15\sqrt{-1}}{4}\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}4 & \frac{-25+25\sqrt{-1}}{4}\\ 2+2\sqrt{-1} & -6\end{pmatrix}$$

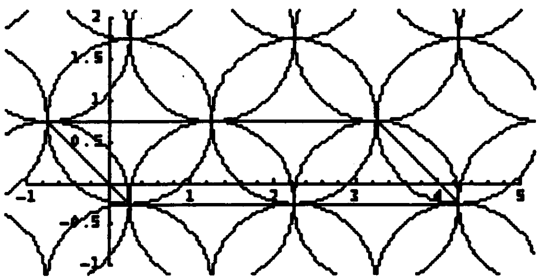
であり

$$ABA^{-1}B^{-1}C = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

をみたす。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと $(\phi(A), \phi(B), \phi(C)) = (M^{-1}AM, M^{-1}BM, M^{-1}CM)$. Γ を A, B, C, M で生成される群とする。$\mathbb{H}^3/\Gamma$ は 2 穴あきトーラスをファイバーとする S^1 上のファイバー構造をもつ。



Γ のいくつかの元の isometric circle を描いたもの。平行四辺形は ∞ の固定部分群の基本領域

3. 応用. 最後に λ length 座標のいくつかの応用を与える。

3.1. 写像類群の作用で不変な正則 2 次形式. Δ を F'_g の ideal triangulation とする。1.4 節と同じ記号の下で、$\lambda_{ki} = \lambda(c_{ki}, \cdot)$, $i = 1, 2, 3$, とおくと

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} (d\lambda_{k1} \wedge d\lambda_{k2} + d\lambda_{k2} \wedge d\lambda_{k3} + d\lambda_{k3} \wedge d\lambda_{k1})$$

は写像類群 $\mathcal{MC}'_g$ の作用で不変である。これを Fuchs 群表現の空間に制限したのは Weil-Peterssen 形式である[Pe2].

3.2. 放物型変換. $a_1, ..., a_s$ を F'_g 上の互いに交わらない単純閉曲線の組で、どの2つもアイソトピックでないとする。τ_i で a_i における Dehn twist を表わすものとする。$(n_1, ..., n_s) \in \mathbb{Z}^s - \{(0, ..., 0)\}$ とし、$\tau = \tau_1^{n_1} \cdots \tau_1^{n_s}$ とおく。このとき τ (したがって何乗かすると τ となる写像類)は忠実な表現空間 $\mathcal{R}'_g$ に固定点をもたない。

もし時間が許せば、その他の λ length の応用(Markov の方程式の整数解の類似 [NäNa1], 錐特異点をもつ双曲曲面のモジュライ空間の体積 [NäNa2], 数論的Fuchs群への応用 [NNR])についても講演で述べる。

おわりに 十年来の共同研究者である Helsinki 大学の M. Näätänen 氏に感謝の意を捧げたい。また函数論で長年お世話になった吹田信之先生にこの講演を聴いていただけなかったのが残念である。ご冥福をお祈りいたします。

参考文献

[Ber] Bers, L., An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston, Acta Math. **141** (1978), 73–98.

[Luo] Luo, Feng, Geodesic length functions and Teichmüller spaces, J. Differential Geom. **48** (1998), 275–317.

[Mos] Mosher, L., A user's guide to the mapping class group: once punctured surfaces, Geomettric and computational perspectives on infinite groups (Mineapolis, MN and New Brusswick, NJ, 1994), 101–174, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[NäNa1] Nakanishi, T. and M. Näätänen, The Teichmüller space of a pu nctured surface represented as a real algebraic space, Michigan Math. J., **42** (1995) 235–258

[NäNa2] Nakanishi, T. and M. Näätänen, Areas of two-dimensional moduli spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **129** (2001), 3241–3252.

[NNR] Nakanishi, T., M. Näätänen and G. Rosenberger, Arithmetic Fuchsian groups of signature $(0; e_1, e_2, e_3, e_4)$ with $2 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3$, $e_4 = \infty$, in Complex Geometry of Groups (edited by A. Carocca et al), Contemporary Mathematics, **vol.240**, 1999, 269-277.

[Pe1] Penner, R. C., The decorated Teichmüller space of punctured surfaces, Commun. Math. Phys. **113** (1987), 299-339.

[Pe2] Penner, R. C., Weil-Petersson volumes. J. Differential Geom. **35** (1992), no. 3, 559–608.

[Zie] Zieschang, H., *Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces*, Lecture Notes in Math. **875**, Springer-Verlag, 1981.

特別講演

多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似

野口潤次郎　東大・数理

平成 9 年秋の学会の折に，企画特別講演で「値分布と有理点分布」という題で話をした．今回は，その後のこの方面の進展を紹介し，問題点について考えたい．

1 第一主要定理

第一主要定理は，理論の枠組みを決めるということで重要である．一変数では，R. Nevanlinna の後，A. Bloch, H. Cartan, 清水辰次郎, L.V. Ahlfors 等が 1930 年前後に研究し，高次元では 1960 年代，W. Stoll, Bott-Chern, H. Wu 等により盛んに研究された．

$\mathbf{C}^m$ の複素座標を $z = (z_j)$ とする．次の記号を定める．

$$\|z\| = (\textstyle\sum_j |z_j|^2)^{1/2}, \quad d = \partial + \bar\partial, \qquad d^c = \frac{i}{4\pi}(\bar\partial - \partial),$$
$$\alpha = dd^c\|z\|^2, \qquad \gamma = (dd^c \log \|z\|^2)^{m-1} \wedge d^c \log \|z\|^2.$$

$\varphi(z)$ を $\mathbf{C}^m$ 上定義された $[-\infty, \infty]$ に値をもち，局所的に多重劣調和関数の差で表される関数とする．カレントの意味での二階微分 $dd^c[\phi]$ は複素数値ラドン測度を係数とする $(1,1)$ 型式である．このとき次の Jensen の公式が成立する．

補題 1.1 (Jensen の公式) 任意の $r > s > 0$ に対し，

$$\int_{\{\|z\|=r\}} \varphi(z)\gamma(z) - \int_{\{\|z\|=s\}} \varphi(z)\gamma(z) = \int_s^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|<t\}} 2dd^c[\varphi] \wedge \alpha^{m-1}.$$

$f(z)$ を $\mathbf{C}^m$ 上の有理型関数として，$\varphi(z) = \log |f(z)|$ とおく．$f(z)$ の零因子を $(f)_0$，極因子を $(f)_\infty$ とする．(f) の因子は，$(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ である．

補題 1.2 (Poincaré-Lelong の公式) カレントとして，

$$2dd^c[\log |f|] = (f).$$

$\varphi(z) = \log |f(z)|$ とおき，補題 1.1, 補題 1.2 を用いると次を得る．

(1.3)
$$\int_{\{\|z\|=r\}} \log |f(z)|\gamma(z) - \int_{\{\|z\|=1\}} \log |f(z)|\gamma(z)$$
$$= \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|<t\}\cap(f)_0} \alpha^{m-1} - \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|<t\}\cap(f)_\infty} \alpha^{m-1}.$$

次のように定める．

$$\log^+ t = \max\{0, \log t\}, \qquad \log t = \log^+ t - \log^+ \frac{1}{t} \tag{1.4}$$

$$m(r,f) = \int_{\{\|z\|=r\}} \log^+ |f(z)| \gamma(z) \quad (\text{無限遠点への接近関数}),$$

$$N(r,(f)_{0(\mathrm{resp.}\,\infty)}) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|\le t\}\cap (f)_{0(\mathrm{resp.}\,\infty)}} \alpha^{m-1} \quad (\text{個数関数}),$$

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,(f)_\infty) \quad (\text{ネヴァンリンナの位数関数}).$$

(1.3) と (1.4) より次を得る．

定理 1.5 (第一主要定理) $T(r,f) = T(r,1/f) + \int_{\|z\|=1} \log |f(z)| \gamma(z)$.

次の簡単な事実に注意する．

$$\log^+ \left| \prod_1^q a_j \right| \le \sum_1^q \log^+ |a_j|,$$

$$\log^+ \left| \sum_1^q a_j \right| \le \sum_1^q \log^+ |a_j| + \log q.$$

従って，

$$T\left(r, \prod_1^q f_j\right) \le \sum_1^q T(r,f_j),$$

$$T\left(r, \sum_1^q f_j\right) \le \sum_1^q T(r,f_j) + \log q,$$

$$T\left(r, Q(f_1,\dots,f_q)\right) \le C_1 \sum_1^q T(r,f_j) + C_2.$$

ここで，$Q(\cdots)$ は多変数有理関数である．特に $1/(f-a), a \in \mathbf{C}$ を考えると，

定理 1.6 (第一主要定理)

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f-a) - \int_{\|z\|=1} \log |f(z) - a| \gamma(z)$$

$$= T(r,f) + O(1),$$

$$|O(1)| \le \log^+ |a| + \log 2 + \left| \int_{\|z\|=1} \log |f(z) - a| \gamma(z) \right|.$$

補題 1.7 $\displaystyle\int_{\|z\|=1} \log |f(z) - a| \gamma(z)$ は $a \in \mathbf{C}$ について局所有界（実は連続）である．

$$N(r,(f-a)_0) \le T\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

$N(r,(f-\infty)_0) = N(r,(f)_\infty)$ と考える．以上より，次の重要な不等式を得る．

定理 1.8 (ネヴァンリンナ不等式) ある定数 C が存在して，任意の $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ に対し

$$N(r,(f-a)_0) \le T(r,f) + C.$$

$T(r,f)$ の幾何学的解釈：Ω_0 を $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の Fubini-Study 計量型式，つまり超平面束 $O(1)$ の Chern 型式とする．清水の位数関数 ([22]) を次のように定義する．

$$T_f(r,\Omega_0) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\|z\|\le t} f^*\Omega_0 \wedge \alpha^{m-1}.$$

定理 1.9 (清水 [22]・**Ahlfors** [1]) $T(r,f) = T_f(r,\Omega_0) + O(1)$.

以上を n 次元複素射影代数的多様体 V と有理型写像 $f : \mathbf{C}^m \to V$ に拡張する．$\{\psi_j\}_{j=1}^n$ を有理関数体 $\mathbf{C}(V)$ の超越基底とする．$f^*\psi_j \not\equiv \infty$ とする．$\{\psi_j\}_{j=1}^n$ に関する位数関数を次で定める．

$$T_f(r,\{\psi_j\}_{j=1}^n) = \max_j T(r, f^*\psi_j).$$

$L \to V$ をエルミート直線束，Ω_L を L の Chern 型式とし，L に関する位数関数を次のように定める．

$$T_f(r,L) = T(r,\Omega_L) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\|z\|\le t} f^*\Omega_L \wedge \alpha^{m-1}.$$

定理 1.10 (i) $T_f(r,L) < C_1 T_f(r,\{\psi_j\}_{j=1}^n) + C_2$.

(ii) $L > 0$ ならば，$T_f(r,\{\psi_j\}_{j=1}^n) < C_3 T_f(r,L) + C_4$.

(iii) $L > 0$ ならば，$T_f(r,L) = O(\log r)$ と f が有理写像であることは同値である．更に，$T_f(r,L) = O(1)$ と f が定写像であることは同値である．

$T_f(r,\{\psi_j\}_{j=1}^n)$ はネヴァンリンナの位数関数 $T(r,f)$ の拡張，$T_f(r,L)$ は清水の位数関数 $T_f(r,\Omega_0)$ の拡張と考えられる．

非負係数因子 $D = (\sigma), \sigma \in H^0(V,L)$ への接近関数を次のようにおく．

$$m_f(r,D) = \int_{\|z\|=r} \log \frac{1}{\|\sigma \circ f(z)\|} \gamma(z).$$

定理 1.11 (第一主要定理) $T_f(r,L) = m_f(r,D) + N(r,f^*D) + O(1)$.

さてどうして $f(\mathbf{C}^m)$ と因子 D の交わりを考えるのか？ 値分布なのであるから，$a \in V$ に対し $f^{-1}a$ を考えないのか？

この問題の背後には，安定性の問題が横たわっているように思われる．ある意味で，因子の逆像にはたとえ写像が超越的でもある種の安定性がある．それを示すのが第二主要定理である．一方，点の逆像には，少なくとも次のような理由で安定性がない．

(i) Fatou (1922)，Bieberbach (1933): 単射正則写像 $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ で，ヤコビャン $J(f) \equiv 1$ であるが，$\mathbf{C}^2 \setminus f(\mathbf{C}^2)$ が非空開集合を含むものがある．更に，別のそのような単射正則写像 $g : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ で，$f(\mathbf{C}^2) \cap g(\mathbf{C}^2) = \emptyset$ となるものが取れる．このような f に対しては $f^{-1}x$ は，ある開集合上空集合で，また別の開集合上では 1 点集合になり，安定性がない．

(ii) 最近 Buzzard-Lu (2000) は，$n(\geq 2)$ 次元複素トーラス N と非空開集合 $U \subset N$ に対し，微分非退化正則写像 $f : \mathbf{C}^n \to N \setminus U$ を構成した．$\pi : \mathbf{C}^n \to N$ を普遍被覆写像とし，$\tilde{U} = \pi^{-1}U$ とおく．$\tilde{f} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を f の持ち上げとする．$\tilde{f}$ は微分非退化で，格子状に分布している開集合 $\tilde{U}$ に対し，$\tilde{f}^{-1}\tilde{U} = \emptyset$ である．

(iii) Cornalba-Shiffman (1972) は次のような正則写像 $f : z \in \mathbf{C}^2 \to (f_1(z), f_2(z)) \in \mathbf{C}^2$ を構成した．各正則関数 f_1, f_2 の位数が零でも，共通零点 $f^{-1}0$ は，離散集合で位数が無限になるものが作れる．$\mathbf{C}^m$ のいくつかの解析集合 A_ν の増大度から共通部分 $\bigcap_\nu A_\nu$ の増大度を評価する問題は，超越ベズー問題と呼ばれるが，この例は，それが一般には成立しないことを示している．これは，(i), (ii) の理由に比べると少し弱い感じがするが，それでも点の逆像分布を調べる難しさを十分に表している．

因子 D に対し f^*D を解析することで，かなり $f(\mathbf{C}^m)$ の様子がわかるというのが以下の話である．

2 対数的 Bloch・落合の定理と整数点分布

V を n 次元複素射影代数的多様体とする．Ω_V^1 で V 上の正則 1 型式の芽の層を表す．$f : \mathbf{C}^m \to V$ を有理型写像とする．$f(\mathbf{C}^m)$ のザリスキー像 $X_0(f)$ ($f(\mathbf{C}^m)$ を含む最小の代数的集合) を調べる．$X_0(f) \neq V$ のとき，f は代数的に退化しているという．解析的に非退化な $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^m$ と合成することにより，それは $f(\phi(\mathbf{C}))$ のザリスキー像と一致するから，ひとまず $m = 1$ とする．

定理 2.1 (Bloch・落合の定理) (i) $h^0(V, \Omega_V^1) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(V, \Omega_V^1) > n$ ならば，f は代数的に退化している．

(ii) V をアーベル多様体 A とすると，整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ に対し $X_0(f)$ はアーベル部分多様体の平行移動になる．

f は非定写像とする．この証明を解説する．簡単にするため $n=1$ とする．一次独立な $\eta_j \in H^0(V, \Omega^1_V), j=1,2$ がある．

$$f^*\eta_j = \zeta_j(z)dz$$

とおく．$\psi = \frac{\eta_1}{\eta_2} \in \mathbf{C}(V)$ は超越基底である．$f^*\psi = \zeta_1/\zeta_2$ であるから，第一主要定理を使って

$$T(r, f^*\psi) = T(r, \zeta_1/\zeta_2) \leq T(r, \zeta_1) + T(r, \zeta_2) + O(1).$$

ζ_j は正則関数であるから，$T(r, \zeta_j) = m(r, \zeta_j)$．従って次のような評価があれば，矛盾を得ることになる．

補題 2.2 (微分補題) 任意の $0 < \delta < 1$ に対し

$$m(r, \eta_j) \leq \delta \log r + O(\log^+ T_f(r, f^*\psi))||_{E(\delta)}. \tag{2.3}$$

ここで，"$||_{E(\delta)}$" とは $E(\delta) \subset \mathbf{R}^+$ は測度有限なボレル集合で，不等式は $r \notin E(\delta)$ に対し成立することを意味する．

(2.3) の右辺を "小項 (small term)" と呼び，$S_f(r)$ と記す．

この補題の証明は，概略次のようなものである．V 上にエルミート計量型式 Ω を取る．定数 $c > 0$ があり，$|\eta_j|^2 \leq \pi c \Omega$.

$$\begin{aligned} m(r, \eta_j) &= \int_{|z|=r} \log^+ |\eta_j(z)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \log^+ |\eta_j(z)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{2} \log^+ \left(\int_{|z|=r} |\eta_j(z)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \log^+ \left(\int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} |\eta_j(z)|^2 \frac{1}{\pi} r dr d\theta \right)^{(1+\delta)^2} + \delta \log r ||_{E(\delta)} \\ &\leq \frac{1}{2} \log^+ \left(\int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} c f^*\Omega \right)^{(1+\delta)^2} + \delta \log r ||_{E(\delta)} \\ &\leq 2 \log T_f(r, \Omega) + 2 \log^+ c + \delta \log r ||_{E(\delta)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

一方，清水・Ahlfors の定理より $T_f(r, \Omega) \sim T(r, f^*\psi)$ であるから，(2.3) を得る．

さて Picard の定理を考える．$D = \{0, 1, \infty\} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ とおく．

定理 2.5 (Piard の定理) 任意の $f: \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus D$ は，定写像である．

今度は，$\omega_1 = dw/w, \omega_2 = dw/(w-1) \in H^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \Omega^1_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})}(\log D))$ が一次独立なので，

$$h^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \Omega^1_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})}(\log D)) > 1.$$

$f^*(\omega_1/\omega_2) = 1 - 1/f(z)$. 従って $f^*\omega_j = \xi_j(z)dz$ とおいて，次が分かれば Picard の定理の証明は，$n=1$ のときの Bloch・落合の定理の証明と同じである．

$$m(r, \xi_1) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S_f(r).$$

これは，**Nevanlinna の対数微分の補題**に他ならない．いずれも，一意化定理にはよらない証明であることに注意されたい．

$H_j, 1 \leq j \leq q$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の相異なる超平面とし，$D = \sum_j H_j$ とおく．

$$h^0(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \Omega^1_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}(\log D)) = q - 1.$$

定理 2.6 (Borel の定理) $h^0(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \Omega^1_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}(\log D)) > n$, つまり $q \geq n+2$ ならば，任意の $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus D$ は代数的に退化する．

対数微分を導入することにより，結局 Bloch・落合の定理と Borel の定理は同じことを言っていることになる．

一般次元 $\dim V \geq 1$ での微分補題 2.2 は，A. Bloch [3] が定理 2.1 を示す際に，証明できずに仮定したもので，後日落合 [21] により証明された．A. Bloch の与えた定理 2.1 の証明それ自体も，2 次元の場合のスケッチ風のものであった．しかし，そのアイデアの豊かさには驚くべきものがある．対数微分の場合は [9] による．

現在次の定理が証明されている．

定理 2.7 (対数的 Bloch・落合の定理 [9], [10], [16]) M をコンパクトケーラー多様体，D をその超曲面とする．$h^0(M, \Omega^1_M(\log D)) > \dim M$ ならば，任意の $f : \mathbf{C} \to M \setminus D$ の像は，M の真解析的部分集合に含まれる．

対数的 Bloch・落合の定理の応用を述べる．相異なる超曲面 $D_j \subset V, 1 \leq j \leq l$ が**一般の位置**にあるとは，相異なる任意の k 個の共通部分 $D_{j_1} \cap \cdots \cap D_{j_k}$ が純 $n-k$ 次元を持つこととする．$k > n$ ならば空集合である．

$\mathrm{NS}(V)$ で Neron-Severi 群を表す．$L(D_j), 1 \leq j \leq l$ で生成される部分群の階数を $\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\{D_j\}_{j=1}^l$ と記す．

定理 2.8 ([16]) $D_j \subset V, 1 \leq j \leq l$ は一般の位置にある豊富超曲面とする．

(i) $l > n(\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\,\mathrm{NS}(V) + 1)$ ならば，$V \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i$ は完備小林双曲的で，V に双曲的に埋め込まれている．

(ii) $X \subset \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ を既約部分多様体とする．$D_j, 1 \leqq i \leqq l$ は超曲面切断であるとする．$l > 2\dim X$ ならば $X \setminus \bigcup_{j=1}^{l} D_j$ は完備小林双曲的で，X に双曲的に埋め込まれている．

(iii) $f : \mathbf{C} \to V$ を整正則曲線で，各 D_j に対し $f(\mathbf{C}) \subset D_j$ であるか，$f(\mathbf{C}) \cap D_j = \emptyset$ が成立しているとする．$l > n$ と仮定する．すると $f(\mathbf{C})$ は，次の次元評価をみたす部分多様体 $W \subset V$ に含まれる．

$$\dim W \leqq \frac{n}{l-n} \operatorname{rank}_{\mathbf{Z}} \mathrm{NS}(M).$$

特に，$V = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ ならば

$$\dim W \leqq \frac{n}{l-n}.$$

対数的 Bloch・落合の定理 2.7 と定理 2.8 には，Diophantine 類似がある．

定理 2.9 (Faltings [8]-Vojta [29]) F を有限次代数体とし，V, D は F 上定義されているとする．S を F の素点からなる有限集合で，全ての無限素点を含むものとする．$h^0(V, \Omega_V^1(\log D) > n$ を仮定する．W を (D, S)-整数点集合とすると，W は V の真代数的部分集合に含まれる．

定理 2.10 ([16]) $D_j \subset V, 1 \leq j \leq l$ は F 上定義された一般の位置にある豊富超曲面とする．

(i) $l > m(\operatorname{rank}_{\mathbf{Z}} \mathrm{NS}(V) + 1)$ ならば，任意の $(\sum_{j=1}^{l} D_j, S)$-整数点集合 $(\subset V(k) \setminus D)$ は有限である．

(ii) $X \subset \mathbf{P}_k^m$ を既約部分多様体とする．$D_j, 1 \leqq i \leqq l$ は超曲面切断であるとする．$l > 2\dim X$ ならば $X(k) \setminus \sum D_j$ の任意の $(\sum_{j=1}^{l} D_j, S)$-整数点集合は有限である．

(iii) $A \subset V(k)$ は，各 D_j に対し $A \subset D_j$ であるか，$A \cap D_j = \emptyset$ で A は $(\sum_{D_j \not\supset A} D_j, S)$-整数点集合である．$l > n$ と仮定する．すると A 次の次元評価をみたす部分多様体 $W \subset V$ に含まれる．

$$\dim W \leqq \frac{n}{l-n} \operatorname{rank}_{\mathbf{Z}} \mathrm{NS}(V).$$

特に，$V = \mathbf{P}_k^n$ ならば $\dim W \leqq \frac{n}{l-n}$; $l > 2n$ ならば，$\dim W = 0$，つまり A は有限集合である．

補足． 微分補題 2.2 の証明で，(2.4) の計算をみると，解析性はあまり使っていない．実際概複素構造に関する擬正則写像に対して成立する．M をコンパクト概複素多様体とし，Ω をその上のエルミート計量型式とする．擬正則曲線 $f : \mathbf{C} \to M$ に対し，位数関数を次で定義する．

$$T_f(r, \Omega) = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{\|z\|<t} f^*\Omega.$$

M 上の任意の連続 1 型式 η に対し,

$$f^*\eta = \zeta_1(z)dz + \zeta_2(z)d\bar{z}$$

とおく.

補題 2.11 上述の記号のもとで, 次が成立する.

$$m(r, \zeta_j) = S_f(r).$$

何かに使えないか?

3 対数ジェット微分の補題と第二主要定理

前節でみたように, (対数) 微分の補題は値分布論で本質的である. 特に定義域が $\mathbf{C}^m(m > 1)$ の場合, その証明はかなり長い評価の末に得られるものだった. 最近, H.L. Selberg (1941) のアイデアにもとづくかなり簡約化されたものを得たので紹介したい. ひとまず, $\mathbf{C}^m$ 上の有理型関数 f を考える.

$$\|df\| = \left(\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right|^2\right)^{1/2}$$

とおく.

補題 3.1 (A.L. Vitter [27], Biancofiore-Stoll [2])

$$m\left(r, \frac{\|df\|}{|f|}\right) = S_f(r).$$

証明 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上の特異計量型式

$$\Psi = \frac{1}{|w|^2(1 + |\log|w||^2)}\frac{i}{2\pi}dw \wedge d\bar{w}$$

を考える.

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} \Psi = \pi.$$

$$f^*\Psi \wedge \alpha^{m-1} = \frac{1}{m}\frac{\|df\|^2}{|f|^2(1 + |\log|f||^2)}\alpha^m.$$

である.

$$\mu(r) = \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}}\int_{\|z\|<t} f^*\Psi \wedge \alpha^{m-1}$$

とおく．Fubini の定理より

$$\mu(r) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} \int_1^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{\{\|z\|<t\} \cap (f-w)_0} \alpha^{m-1} \Psi(w)$$
$$\leq \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} N(r, (f-w)_0) \Psi(w).$$

ネヴァンリンナ不等式 (定理 1.8) から，

$$\mu(r) \leq \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})} (T(r,f) + C)\Psi(w) = \pi T(r,f) + C\pi. \tag{3.2}$$

一方，

$$\frac{\|df\|^2}{|f|^2}\alpha^m = m(1 + |\log|f||^2) f^*\Psi \wedge \alpha^{m-1}.$$

これと (3.2) より，

$$m\left(r, \frac{\|f\|}{|f|}\right) = S_f(r)$$

が，ちょっとした計算で従う． 証了

V を n 次元複素射影代数的多様体，D をその超曲面とする．$\mathcal{J}_k(V, \log D)$ で D に沿う対数的 k-ジェットの層とする ([11])．D が正規交叉ならば，対数的 k-ジェット空間 $J_k(V, \log D)$ の切断の芽の層になっている．一般に $J_k(V, \log D)$ の正則有理関数 ϕ を k-ジェット微分と呼ぶ．有理型写像 $f: \mathbf{C}^m \to V$ に対し，

$$f^*\phi = \sum \xi_{i_1 h_1 \dots i_m h_m} (d^{i_1} z_1)^{h_1} \cdots (d^{i_m} z_m)^{h_m}$$

と係数関数を決める．

補題 3.3 (対数ジェット微分の補題) $m(r, \xi_{i_1 h_1 \dots i_m h_m}) = S_f(r)$.

以下の結果の証明では，解析的にはこの対数ジェット微分の補題 3.3 が本質的である．

定理 3.4 (i) **(Siu-Yeung [24])** A をアーベル多様体，D をその豊富超曲面とする．このとき $f: \mathbf{C} \to A \setminus D$ は定写像である．

(ii) ([12]) A を準アーベル多様体，D をその超曲面で $\{a \in A; a + D = D\}$ は有限とする．このとき $f: \mathbf{C} \to A \setminus D$ の像はm準アーベル部分多様体の平行移動 W で，$W \cap D = \emptyset$ であるものに含まれる．

Faltings と Vojta は，Siegel の楕円曲線の整数点に関する定理の拡張として次のことを証明した．この類似については，Diophantine 近似が先行した（初めての場合？）．

定理 3.5 F を有限次代数体とする．以下 F 上で考える．

(i) (**Faltings** [7]) A をアーベル多様体，D をその豊富超曲面とする．このとき (D,S)-整数点集合は有限である．

(ii) (**Vojta** [29]) A を準アーベル多様体，D をその超曲面で $\{a \in A; a+D=D\}$ は有限とする．このとき (D,S)-整数点集合は準アーベル部分多様体の平行移動 W で，$W \cap D = \emptyset$ であるものに含まれる．

アーベル多様体や準アーベル多様体（準トーラス）A では，そのジェット空間が，$J_k(A) \cong A \times \mathbf{C}^n$ $(n = \dim A)$ と大域的に自明になるので解析しやすくなる．以下定理 3.4 の定量版である第二主要定理を与える．

定義により，A のもつ群完全列を次のようにおく．

$$0 \to (\mathbf{C}^*)^t \to A \to A_0 \to 0.$$

A_0 はアーベル多様体である．$(\mathbf{C}^*)^t \hookrightarrow (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^t$ とコンパクト化をとり A のコンパクト化 $\bar{A}$ を得る．$\partial A = \bar{A} \setminus A = \cup_{i=1}^t B_i$ を境界因子の非特異点集合–特異点集合の非特異点集合–$\cdots$ ととる階層分解とする．D を A の代数的超曲面で $\bar{A}$ 上に $\bar{D}$ と拡張しておく．$\partial A + \bar{D}$ が一般の位置にある条件を考える．

3.6 条件　任意の既約成分 $Z \subset B_t$ に対し，$Z \not\subset \bar{D}$.

自然数 k を取る．整正則曲線 $f: \mathbf{C} \to A$ $(f(\mathbf{C}) \not\subset D)$ に対し，$f^*D = \sum_\nu m_\nu z_\nu$ (z_ν は相異なる) とするとき，次のように定める．

$$\begin{aligned}
&(f^*D)_k = \textstyle\sum_\nu \min\{k, m_\nu\} z_\nu, \quad && (f^*D)^k = \textstyle\sum_\nu (m_\nu - k)^+ z_\nu,\\
&N_k(r, f^*D) = N(r, (f^*D)_k) && (\text{打ち切り個数関数}),\\
&N^k(r, f^*D) = N(r, (f^*D)^k) && (\text{重複度関数}).
\end{aligned}$$

次が成立する．

$$\begin{aligned}
N(r, f^*D) &= N_k(r, f^*D) + N^k(r, f^*D),\\
T_f(r, L(\bar{D})) &= m_f(r, \bar{D}) + N(r, f^*D) + O(1).
\end{aligned}$$

定理 3.7 (第二主要定理 [20]) A は，準アーベル多様体（準トーラスでもよい）．D は条件 *3.6* を満たす代数的超曲面とする．任意の整正則曲線 $f: \mathbf{C} \to A$ に対し，その位数 ρ_f が有限な場合は自然数 $k = k(\rho_f, D)$，$\rho_f = \infty$ の場合は $k = k(f, D)$ が存在して，

$$T_f(r, L(\bar{D})) \leq N_k(r, f^*D) + S_f(r). \tag{3.8}$$

同値な式であるが，$f(z)$ の D に近づく近似（あまり近づかない）の評価として，

$$m_f(r, \bar{D}) + N^k(r, f^*D) = S_f(r). \tag{3.9}$$

証明の要点は，対数ジェット微分の補題 3.3 と以下に述べるジェット射影法である．$\bar{A}$ 上の ∂A に沿う対数ジェット空間 $J_k(\bar{A}, \log \bar{D})$ は $\bar{A} \times \mathbf{C}^{nk}$ と同型になるので，ジェット射影

$$I_k : J_k(\bar{A}, \log \bar{D}) \cong \bar{A} \times \mathbf{C}^{nk} \to \mathbf{C}^{nk}$$

が取れる．$f(z)$ が $\bar{D}$ をあまり近似しないことが定量的に分かればよいが，このままでは難しい．そこで，ジェット空間まで持ち上げ $X_k(f)$ と $J_k(D)$ をジェット射影をして分離するのがアイデアである．k を大きくとると

$$I_k(X_k(f)) \cap I_k(J_k(\bar{D}, \log D \cap \partial A)) \neq I_k(X_k(f)). \tag{3.10}$$

A がアーベル多様体の場合，Siu-Yeung は，(3.10) の交叉の位数を D の Chern 数で評価し，$k = k(c_1(D)^n)$ という依存性を示した．D に任意の特異点を許し，剰余項を $S_f(r)$ という量で抑える為には，これが最良であることが例で分かる．しかし，この剰余項を $\epsilon T_f(r, L)$ $(L > 0)$ と緩めると，打ち切り位数 k を下げられる．実際，山ノ井は次を示している．

定理 3.11 (山ノ井 [31]) A をアーベル多様体，D をその豊富超曲面，$f : \mathbf{C} \to A$ を代数的非退化な整正則曲線とすると，

$$T_f(r, L(D)) \leq N_1(r, f^*D) + \epsilon T_f(r, L(D))||_{E(\epsilon)}.$$

このような強い結果が得られるのは，f のジェット像 $X_k(f)$ の構造が単純であることが効いている．次の構造定理が成立する．

定理 3.12 [17] A を n 次元準アーベル多様体とする．$f : \mathbf{C} \to A$ を整正則曲線とし，$X_k(f)$ を $J_k(f)(\mathbf{C})$ の $J_k(A) \cong A \times \mathbf{C}^{nk}$ 内でのザリスキー閉包とする．

(i) $\rho_f < \infty$ ならば，準アーベル部分多様体 $B \subset A$，$a \in A$ そして部分多様体 $W_k \subset \mathbf{C}^{nk}$ が存在して，$X_k(f) = (B + a) \times W_k$ が成立する．
(ii) A が単純アーベル多様体ならば，部分多様体 $W_k \subset \mathbf{C}^{nk}$ があって，$X_k(f) = A \times W_k$ が存在する．

一般には，この様な直積構造になっていないことが例をもって示される．しかしそれでも，$X_k(f)$ は扱いやすい形状をしていることが分かる．

定理 3.7 や定理 3.11 の様に，打ち切り個数関数 $N_k(r, \bullet)$ を用いた Diophantine 類似の評価式は興味深い (A. Buium)．これが，イロハ予想 (abc-Conjecture) につながる．準アーベル多様体上では，その関数体類似が成立することが分かる (A. Buium [5] [6], [18])．

小林予想と Lang 予想の関連で下記の結果も値分布と Diophantine 近似の応用で得られた．

城崎 ([23]) に従い，次のようにおく．$d, e \in \mathbf{N}$ は互いに素で次をみたす．

$$d > 2e + 8.$$

二変数同次多項式 $P(w_0, w_1)$ を

$$P(w_0, w_1) = w_0^d + w_1^d + w_0^e w_1^{d-e}$$

と定め，帰納的に

$$\begin{aligned} P_1(w_0, w_1) &= P(w_0, w_1), \\ P_n(w_0, w_1, \ldots, w_n) &= P_{n-1}(P(w_0, w_1), \ldots, P(w_{n-1}, w_n)), \\ n &= 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

と定める．P_n は次数 d^n の同次多項式である．$e \geqq 2$ とすると，

$$X = \{P_n(w_0, w_1, \ldots, w_n) = 0\} \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}} \tag{3.13}$$

は小林双曲的である（城崎 [23]）．

定理 3.14 ([13]) X を (3.13) で，$e \geqq 2$ として定義する．すると，任意の有限次代数体 F に対し有理点集合 $X(F)$ は有限である．

4 基本予想

(1) 正則曲線. V を n 次元複素射影代数的多様体とし，D をその超曲面とする．D は単純正規交叉のみをもつとする（たぶん妥当な仮定）．$f : \mathbf{C} \to V$ を整正則曲線とする．$L \to V$ を直線束とし，$|L|$ でその完備線形系を表す．f が L-非退化とは，任意の $E \in |L|$ に対し $f(\mathbf{C}) \not\subset E$ が成立することとする．

4.1 **(正則曲線の基本予想)** ある $k = k(n)$ が存在して，$(L(D) + K_V)$-非退化な整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to V$ に対し，

$$\begin{aligned} T_f(r, L(\bar{D})) + T_f(r, K_V) &\leq N_k(r, f^*D) + S_f(r), \\ m_f(r, \bar{D}) + N^k(r, f^*D) + T_f(r, K_V) &= S_f(r). \end{aligned}$$

この予想の Diophantine 類似は，次のように与えられる．

F を有限次代数体とする．その無限素点を全て含む素点の有限集合 S をとり，固定する．V, D は F 上で考える．$x \in V(x)$ に対し，$x \in V \setminus D$ の D への接近を $v \in S$ で測り和をとったものを $m(x, D)$ と表す．$v \notin S$ に関して v-進距離で D への接近を測り和をとったものを $N(x, D)$，その v-進位数を k で打ち切り測ったものを $N_k(x, D)$，

$$N^k(x, D) = N(x, D) - N_k(r, D)$$

とおく．直線束 $L \to V$ に関する $x \in V(F)$ の高さ関数を $\mathrm{h}(x, L)$ と書く．

正則曲線の基本予想の類似は次のように述べられる．

4.2 **(Diophantine 近似類似基本予想，多変数イロハ予想)** 上述のことを仮定する．さらに，豊富直線束 $L_0 \to V$ を一つ固定する．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し真部分多様体 $E(\epsilon) \subset V_F$ が存在して，$x \in V(F) \setminus E(\epsilon)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{h}(x, L(D)) + \mathrm{h}(x, K_V) \leq N_k(x, D) + \epsilon\mathrm{h}(x, L_0), \\
&m(x, D) + N^k(x, D) + \mathrm{h}(x, K_V) \leq \epsilon\mathrm{h}(x, L_0).
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

$V = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ の場合は，$D = \{0, -1, \infty\}$ ととると，次のイロハ予想 (Masser-Oesterlé) になる．

4.4 **(イロハ予想 (abc-conjecture))** $a, b, c \in \mathbf{Z}$ を互いに素で

$$a + b + c = 0$$

を満たすとする．任意の $\epsilon > 0$ に対し ϵ のみに依る正定数 $C(\epsilon)$ が存在して，次が成立する．

$$(\max\{|a|, |b|, |c|\})^{3-2-\epsilon} \leq C(\epsilon) \prod_{p>0,\ \text{素}, p|(abc)} p. \tag{4.5}$$

(4.5) の左辺の指数について $3 = \deg D$, $-2 = \deg K_{\mathbf{P}^1}$, 右辺での打ち切り位数は $k = 1$ である．(4.5) の log をとれば，(4.3) になる．

参考文献

[1] Ahlfors, L.V., Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen, 7^e Congr. Math. Scand. Oslo 1929, pp. 84–88, Oslo, 1930.

[2] Biancofiore, A. and Stoll, W., Another proof of the lemma of the logarithmic derivative in several complex variables, Ann. Math. Studies **100**, pp. 29–45, Princeton Univ. Press, 1981.

[3] Bloch, A., Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension, J. Math. Pures Appl. **5** (1926), 19–66.

[4] Bott, R. and Chern, S.-S., Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic sections, Acta Math. **114** (1965), 71–112.

[5] Buium, A., The abc theorem of abelian varieties, Intern. Math. Res. Notices **5** (1994), 219-233.

[6] Buium, A., Intersection Multiplicities on abelian varieties, Math. Ann. **310** (1998), 653-659.

[7] Faltings, G., Diophantine approximation on abelian varieties, Ann. Math. **133** (1991), 549–576.

[8] Faltings, G., The general case of Lang's conjecture, Symposium in Algebraic Geometry, Barsoti, eds., pp. 175–182, Acad. Press, 1994.

[9] Noguchi, J., Holomorphic curves in algebraic varieties, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833–853.

[10] Noguchi, J., Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties. Nagoya Math. J. **83** (1981), 213–233.

[11] Noguchi, J., Logarithmic jet spaces and extensions of de Franchis' theorem, Contributions to Several Complex Variables, pp. 227–249, Aspects Math. No. **9**, Vieweg, 1986.

[12] Noguchi, J., On holomorphic curves in semi-Abelian varieties, Math. Z. **228** (1998), 713-721.

[13] Noguchi, J., An arithmetic property of Shirosaki's hyperbolic projective hypersurface, preprint, UTMS 2002-10, to appear in Forum Math.

[14] 野口潤次郎，ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似，共立出版，2003 年出版予定.

[15] Noguchi, J. and Ochiai, T., Geometric Function Theory in Several Complex Variables, Japanese edition, Iwanami, Tokyo, 1984; English Translation, Transl. Math. Mono. **80**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1990.

[16] Noguchi, J. and Winkelmann, J., Holomorphic curves and integral points off divisors, Math. Z. **239** (2002), 593–610.

[17] Noguchi, J. and Winkelmann, J., A note on jets of entire curves in semi-abelian varieties, preprint UTMS 2002-25, 2002, to appear in Math. Z.

[18] Noguchi, J. and Winkelmann, J., Bounds for curves in abelian varieties, preprint UTMS 2002-21.

[19] Noguchi, J., Winkelmann, J., and Yamanoi, K., The value distribution of holomorphic curves into semi-Abelian varieties, C.R. Acad. Sci. Paris t. **331** (2000), Serié I, 235-240.

[20] Noguchi, J.; Winkelmann, J.; Yamanoi, K.: The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties, Acta Math. **188** no. 1 (2002), 129-161.

[21] Ochiai, T., On holomorphic curves in algebraic varieties with ample irregularity, Invent. Math. **43** (1977), 83–96.

[22] Shimizu, T., On the theory of meromorphic functions, Japan. J. Math. **6** (1929), 119–171.

[23] Shirosaki, M., On some hypersurfaces and holomorphic mappings, Kodai Math. J. **21** (1998), 29–34.

[24] Siu, Y.-T. and Yeung, S.-K., A generalized Bloch's theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an Abelian variety. Math. Ann. **306** (1996), 743-758.

[25] Stoll, W., Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (II), Acta Math. **92** (1954), 55–169.

[26] Stoll, W., Value Distribution of Holomorphic Maps into Compact Complex Manifolds, Lecture Notes in Math. **135**, Springer-Verlag, 1970.

[27] Vitter, A.L., The lemma of the logarithmic derivative in several complex variables, Duke Math. J. **44** (1977), 89–104.

[28] Vojta, P., Diophantine Approximations and Value Distribution Theory, Lecture Notes in Math. **1239**, Springer-Verlag, 1987.

[29] Vojta, P., Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I–II; I, Invent. Math. **126** (1996), 133–181; II, Amer. J. Math. **121** (1999), 283–313.

[30] Wu, H., Remarks on the first main theorem in equidistribution theory, I–IV; I, J. Diff. Geom. **2** (1968), 197–202; II, J. Diff. Geom. **2** (1968), 369–384; III, J. Diff. Geom. **3** (1969), 83–94; VI, J. Diff. Geom. **3** (1969), 433–446.

[31] Yamanoi, K., Holomorphic curves in Abelian varieties and intersections with higher codimensional subvarieties, preprint, 2001.

14. 有理型関数の logarithmic derivative の評価について

下村　俊　　　　慶應大，理工

本講演では，有理型関数の logarithmic dereivative の大きさに関する評価について述べる．$g(z)$ を有理型関数，$\Delta_0(r) = \{z \mid |z| < r\}$ とする．さらに，$\mu(A)$ により集合 $A \subset \mathbf{C}$ の面積をあらわす．

定理. α および ε を $(1-\varepsilon)\alpha > 1$ を満たすような正数とする．このとき，$R \to \infty$ のとき $\mu(G \cap \Delta_0(R))/R^2 \leq \pi\varepsilon + o(1)$ を満たすような集合 $G \subset \mathbf{C}$ が存在し，すべての $z \in \mathbf{C} \setminus G$, $|z| = r$ に対して

$$\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{C_1}{r} T(\alpha r, g)$$

が成立する．ここで $C_1 = C_1(\varepsilon, \alpha)$ はある正数．

この結果は G. G. Gundersen, J. London Math. Soc. 37 (1988) における評価の少し異なった条件のもとでの改良を与えている．G. G. Gundersen の評価の証明では，Boutroux-Cartan の補題が本質的な役割をはたしているが，ここではそれに相当するものとして，点列 a_j $(j = 0, 1, \ldots)$ $|a_0| \leq |a_1| \leq \ldots \leq |a_j| \leq \ldots$ についての和

$$A_0(R, z) = \sum_{|a_j| \leq R} \frac{1}{|z - a_j|}$$

に関する次の補題を使う．

補題. $\varepsilon > 0$ および $\alpha > 1$ を任意に与えられた正数とする．このとき, 集合 F_ε で任意の $\rho > 1$ に対して $\mu(F_\varepsilon) \leq \varepsilon\pi(1 - \alpha^{-2})\rho^2$, を満たすものが存在し，すべての $z \in \Delta_0(\rho) \setminus \Delta_0(\rho/\alpha) \setminus F_\varepsilon$ に対して

$$A_0(\alpha\rho, z) \leq K_{\varepsilon,\alpha} n(\alpha\rho)/\rho$$

が成立する．ここで，$n(R)$ は $\Delta_0(R)$ 内の点 a_j の個数，$K_{\varepsilon,\alpha}$ はある正数を表す．

さらに，上の結果から得られる系，および，高階導関数に関する評価についても述べてみたい．

15. 線形差分方程式と Wiman–Valiron の方法について

日本工業大学
石崎　克也

本講演では [8], 多項式係数の差分方程式

(1) $$a_p(z)\Delta^p f(z) + \cdots + a_1(z)\Delta f(z) + a_0(z)f(z) = 0,$$

の整函数解について取り扱うこととします. ここで, Δ は基本差分作用素 $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$ です. よく知られていることとして, Wiman–Valiron の方法は多項式係数線形常微分方程式

(2) $$d_h(z)f^{(h)}(z) + \cdots + d_1(z)f'(z) + d_0(z)f(z) = 0,$$

の整函数解の増大度を調べる場合には有効な手段であり, $\nu(r,f)$ を整函数解 f の Central index とするとき

(3) $$\nu(r,f) = \sigma L r^{\sigma}(1+o(1)), \quad \text{as } r \to \infty,$$

が得られ, これから

(4) $$\log M(r,f) = L r^{\sigma}(1+o(1)), \quad \text{as } r \to \infty,$$

が導かれます. ここで L は定数であり, σ は函数 f の位数を表します. ここでは位数が 1/2 未満の (1) の函数解について, 微分方程式と同様の結果が得られることを報告します.

Central index を用いた議論は整函数解 f を級数表示 [4] することからはじめます. この方法は微分方程式 [5], [7] や q-差分方程式 [3] では有効ですが, 差分方程式の場合は機能しません. そこで, f を Binomial 級数に表現して Central index などを改めて定義し, これに対し Wiman–Valiron 理論の中の主要定理が同じような形で成立するかを確認する必要があります. 我々は, [6] の中にも詳しく紹介されている Kövari[9] の方法をもとにして, Wiman–Valiron 理論を再構築します.

記号を準備します. $z(0) = 1$, $z(1) = z$, $z^{*(0)} = 1$, $z^{*(1)} = z$, として $n \geq 2$ に対しては

$$z(n) = z(z-1)\cdots(z-n+1), \quad z^{*(n)} = z(z+1)\cdots(z+n-1).$$

とし, 位数が 1/2 未満の整函数 $f(z)$ に対して

(5) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z(n)$$

と書いて

(6) $$\mu^*(r,f) = \sup_{0 \leq n < \infty} \left(\sup_{|z|=r} |a_n z(n)|\right)$$

$$\nu^*(r,f) = \max\{n \mid |a_n| r^{*(n)} = \mu^*(r)\}.$$

と定義します. このとき, 次の定理が成り立ちます.

Theorem 1 位数 $\sigma < 1/2$ の整函数 $f(z)$ に対して測度有限な除外区間 E の外で

$$\begin{cases} \dfrac{|a_{N+k}|r^{*(N+k)}}{\mu^*(r)} \leq \exp(-\dfrac{1}{2}b(k+N)k^2), & k \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{|a_{N-k}|r^{*(N-k)}}{\mu^*(r)} \leq (1+\epsilon_N)\exp(-\dfrac{1}{2}b(N)k^2), & 0 \leq k < N, \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, $N = \nu^*(r)$, $\epsilon_N = 1/(2N^{1/\sigma - 2})$,

$$b(N) = 1/(N \log N (\log\log N)^{1+\delta}).$$

Theorem 2 位数 $\sigma < 1/2$ の整函数 $f(z)$ は, 任意の自然数 h に対して測度有限な除外区間 E の外で

$$\left(\frac{z}{N}\right)^h \Delta^h f(z) = f(z) + O\left(\frac{k}{N}\right) M(r,f), \quad |z| = r,$$

を満たす. ここで, $N = \nu^*(r)$ である.

Theorem 2 から, (1) の解で位数が 1/2 未満のものについては, (4) の評価式が成立することが直ちに導かれます. しかし, Γ-函数の考察から e.g. [2], (1) の解で位数が 1 の場合は (4) が成り立たない反例が構成できます [1].

References

[1] Bank, S. B. and R. P. Kaufman: *An extension of Hölder's theorem concerning the Gamma function.* Funkcialaj Ekvacioj, 19 (1979) 53–63.

[2] Bank S. B. and Kaufman, R.: On the Gamma function and the Nevanlinna characteristic, Analysis **6** (1986), 115–133.

[3] Bergweiler W., K. Ishizaki, and N. Yanagihara: *Growth of meromorphic solutions of some functional equations* I. Aequationes Math. 63 (2002), 140–151.

[4] Boas, R. P. Jr., Entire functions, Academic Press Inc., New York, 1954.

[5] Gundersen, Gary G., Steinbart, Enid M. amd Wang, Shupei: *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients.* Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225–1247

[6] Hayman, W. K.: *The local growth of power series: A survey of the Wiman–Valiron method.* Canad. Math. Bull. 17 (1974), 317–358.

[7] Helmrath, W. and J. Nikolaus: *Ein elementarer Beweis bei der Anwendung der Zentralindexmethode auf Differentialgleichungen.* Complex Variables Theory Appl. 3 (1984), 253–262.

[8] Ishizaki, K. and N. Yanagihara : Wiman-Valiron method for difference equations, Preprint.

[9] Kövari: *On the Borel exceptional values of lacunary integral functions.* J. Analyse Math. 9 (1961), 71–109.

Department of Mathematics NIPPON Institute of Technology 4-1 Gakuendai Miyashiro Minamisaitama Saitama 345-8501, JAPAN

E-mail address: ishi@nit.ac.jp

16. Some Notes on the Deficiency of Holomorphic Curves with Maximal Deficiency Sum

戸田　暢茂　(愛知工業大学客員)

1. Introduction. **(a)** Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a don-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\},$$

where n is a positive integer.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$ and

$$X(0) = \{\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \in X | a_{n+1} = 0\}.$$

Defect Relation I ([1]($N = n$), [3]($N > n$). See [2]). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequalities:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_n(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curves extremal for the defect relation.

Problem. $\delta_n(\boldsymbol{a}_j, f)$? when the equality holds in the defect relation.

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

For $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$, let $\omega : Q \to (0, 1]$ be the Nochka weight function given in [2, p.72] and θ the reciprocal number of the Nochka constant given in [2, p.72]. Then we have the following properties:

Lemma 1(see [2], Theorem 2.11.4).

(i) $0 < \omega(j)\theta \leq 1$ for all $j \in Q$;

(ii) $q - 2N + n - 1 = \theta(\sum_{j=1}^{q} \omega(j) - n - 1)$;

(iii) $(N+1)/(n+1) \leq \theta \leq (2N - n + 1)/(n+1)$;

(iv) If $P \subset Q$ and $0 < \#P \leq N + 1$, then $\sum_{j \in P} \omega(j) \leq d(P)$.

Note. We can improve (iii) as follows:

(iii)′ $N/n \leq \theta \leq (2N - n + 1)/(n+1)$.

Lemma 2. For $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$, let $\sigma : Q \to (0, 1]$ be a weight function satisfying the condition:

$$\sum_{j \in P} \sigma(j) \leq d(P)$$

for any subset P of Q such that $0 < \#P \leq N + 1$. Then, we have the inequality

$$\sum_{j=1}^{q} \sigma(j) \delta_n(\boldsymbol{a}_j, f) \leq n + 1.$$

(c) Further we put $\quad u(z)=\max_{1\le j\le n}|f_j(z)|$,

$$t(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\log u(re^{i\theta})-\log u(e^{i\theta})\}d\theta,$$

and $\quad \Omega=\limsup_{r\to\infty} t(r,f)/T(r,f)$([4]).

Defect relation II(cf.[5]). For any $a_1,\cdots,a_q\in X$, we have the following inequalities:

(I) $\sum_{j=1}^{q}\omega(j)\delta_n(a_j,f)\le d+1+(n-d)\Omega$;

(II) $\sum_{j=1}^{q}\delta_n(a_j,f)\le 2N-n+1-\dfrac{N}{n}(n-d)(1-\Omega)$,

where $\quad d=\sum_{a_j\in X(0)}\omega(j)$.

2. Results. Suppose that the equality holds in **Defect Relation I** for $2N-n+1<q<\infty$.

[I]. If $N>n=2m$ ($m\in \boldsymbol{N}$), then there are at least

$$(2N-n+1)/(n+1)$$

vectors $a\in\{a_1,\cdots,a_q\}$ satisfying $\delta_n(a,f)=1$.

[II]. If $N>n\ge 2$ and $\Omega<1$, then

(a) $\#X(0)=N$;

(b) there is a subset $P\subset Q$ satisfying

$$\#P=N-n+1,\ \ d(P)=1,\ \ \delta_n(a_j,f)=1\ \ (j\in P)$$

and

$$X(0)\cap\{a_j\mid j\in P\}=\phi.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[3] E. I. Nochka:. On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

[4] N. Toda: On the fundamental inequality for non-degenerate holomorphic curves. Kodai Math. J., 20-3(1997), 189-207.

[5] N. Toda: An improvement of the second fundamental theorem for holomorphic curves. Proceedings of the Second ISAAC Congress, Vol.1(2000), 501-510.

[6] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, II. Proceedings of the Third ISAAC Congress (to appear).

17. 非定数正則写像の一意性について

城崎　学　　　　大阪府立大学工学部

$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ への正則写像の一意性定理については，色々研究され知られているが，それらは線形非退化正則写像，あるいは代数的非退化正則写像についてのものである．それでは，これら非退化条件を最も弱いもの，つまり非定数という条件の下で一意性が成り立つか？(もちろん，$n=1$ の場合は明らかである.)

$n=2$ の場合に以下の一意性定理が得られたので報告する．

整数 p,q,d,N は $p\geq 25$, $q\geq 9$, $d\geq (2q-1)^2$, $N\geq 9$ を満たすものとし，ベクトル $\boldsymbol{v}_j=(a_{j0},a_{j1},a_{j2})(j=1,\cdots,q)$ は次の条件を満たすとする．

(C1) $\boldsymbol{e}_0=(1,0,0),\boldsymbol{e}_1=(0,1,0),\boldsymbol{e}_2=(0,0,1)$ として，$\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_q$ は一般の位置にある．

(C2) $(a_{j\mu})^d\neq -(a_{k\mu})^d$ $(1\leq j<k\leq q,\ \mu=0,1,2)$

(C3) 相異なる $1\leq j_1,k_1,j_2,k_2\leq q$ と $\mu=0,1,2$ に対し，

$$\frac{a_{j_1\mu}}{a_{k_1\mu}}\neq\frac{\det({}^t\boldsymbol{v}_{j_1},{}^t\boldsymbol{v}_{j_2},{}^t\boldsymbol{v}_{k_2})}{\det({}^t\boldsymbol{v}_{k_1},{}^t\boldsymbol{v}_{j_2},{}^t\boldsymbol{v}_{k_2})}.$$

(C4) $1\leq j_1,j_2,k_1,k_2\leq q$ と $0\leq\mu,\nu\leq 2$ に対して，$j_1\neq j_2,k_1\neq k_2$ のときは，

$$\left(\frac{a_{j_1\mu}}{a_{j_2\mu}}\right)^d=\left(\frac{a_{k_1\nu}}{a_{k_2\nu}}\right)^d$$

と $j_1=k_1$, $j_2=k_2$, $\mu=\nu$ が同値．

(C5) 相異なる $1\leq j_1,j_2,j_3\leq q$ と相異なる $1\leq k_1,k_2,k_3\leq q$ と $0\leq\mu_0,\mu_1,\nu\leq$

$2: \mu_0 \neq \mu_1, \nu \neq \mu_1$ および 1 の d 乗根 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ に対し

$$\det \begin{pmatrix} a_{j_1\mu_0} & a_{j_1\mu_1} & \omega_1 a_{k_1\nu} \\ a_{j_2\mu_0} & a_{j_2\mu_1} & \omega_2 a_{k_2\nu} \\ a_{j_3\mu_0} & a_{j_3\mu_1} & \omega_3 a_{k_3\nu} \end{pmatrix} = 0$$

と $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3, j_1 = k_1, j_2 = k_2, j_3 = k_3, \nu = \mu_1$ が同値.

そこで

$$P(w_0, w_1, w_2) = \sum_{j=1}^{q} (a_{j0}w_0{}^p + a_{j1}w_1{}^p + a_{j2}w_2{}^p)^d$$

とおく.

$f, g : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ をそれぞれ既約表現 $(f_0, f_1, f_2), (g_0, g_1, g_2)$ をもつ非定数正則写像とする.

Theorem 1. 零点のないある整関数 α により $P(f_0, f_1, f_2) = \alpha P(g_0, g_1, g_2)$ が成り立つとき，$f_j = \beta_j g_j (j = 0, 1, 2)$ が成り立つ．ここで，$\beta_j{}^{dp} = \alpha$ および $\beta_0{}^p = \beta_1{}^p = \beta_2{}^p$.

更に，b を

(B) $(-b)^{Npd} \neq -1$ および 1 の任意の Npd 乗根 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ に対して

$$\{\omega_1(\omega_0 + \omega_2) - \omega_0\omega_2\} b^2 \neq \omega_1\omega_3$$

を満たす定数として

$$Q(w_0, w_1, w_2) = P(w_0, w_1, w_2)^N + P(b(w_1 + w_2), b(w_2 + w_0), b(w_0 + w_1))^N$$

とおくと次が成り立つ.

Theorem 2. 零点のないある整関数 α により $Q(f_0, f_1, f_2) = \alpha Q(g_0, g_1, g_2)$ が成り立つとき，$f = g$.

多項式 $P(w_0, w_1, w_2)$ の最小次数は $25(2 \cdot 9 - 1)^2 = 7225$ であり，$Q(w_0, w_1, w_2)$ の方は $7225 \cdot 9 = 65025$ である.

18. Q 上のある小林双曲的射影超曲面の算術的有限性

野口潤次郎　東大・数理

1974 年 S. ラング [La74] は次の予想を提案した.

ラング予想. V を有限次代数体 k 上の代数多様体とする. ある埋め込み $k \hookrightarrow \mathbf{C}$ に対し $V_{\mathbf{C}}$ が小林双曲的であるならば, V の k-有理点集合 $V(k)$ は高々有限集合である.

この予想によれば, ひとたび $V_{\mathbf{C}}$ が小林双曲的であることが分かれば, 任意の有限次代数体 k に対して V の k-有理点集合は高々有限ということになる. ここでは, この性質を "**算術的有限性**" (*arithmetic finiteness property*) と呼ぶことにする.

この予想の関数体上の類似は [No85], [No92] で証明された. 有限次代数体の場合は, G. ファルティンクス [Fa83], [Fa91] が, $\dim V = 1$ の場合とアーベル多様体の部分多様体に対して証明し, 準アーベル多様体の部分多様体の場合は P. ヴォユタ [Vo96], [Vo99] が示している.

一方, 小林昭七は 1970 年に著書 [Ko70] の中で次の予想を提出した.

小林予想. 複素射影空間 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 内の次数の高い一般の超曲面は小林双曲的である.

ブロデイの定理により, コンパクトな小林双曲的多様体の微小変形は小林双曲的であるから, 小林双曲的射影超曲面を定義する $\mathbf{Q}$ 係数の同次多項式 $P(x)$ が沢山みつかり, 任意の有限次代数体上不定方程式 $P(x) = 0$ は, 射影的に常に解は高々有限個ということになる. 方程式が 1 個ということは, 制限としては最小で解を最も見つけやすいとも言える. 逆に, ラング予想の反例があるとすれば, このようなものが見つけやすいのではないかと考えられる.

一般の次元 $n \geq 2$ で, 小林双曲的射影超曲面 X の存在は [MN96] で示された. そこで構成された X は, $\mathbf{Q}$ 上定義するとき任意の有限次代数体 k 上 S-単数点は有限個ということは分かる. k-有理点の有限性を示すには, イロハ予想 (abc-Conjecture) の多変数版である "多変数イロハ予想" ($abc\cdots$-Conjecture) ([No96], [Vo98]) が必要である.

城崎 [Sh98] は, 一致の定理を考察するの中からもっと簡単な小林双曲的射影超曲面の構成法を見いだした. 記号を用意しよう. $d > 2e + 8$ をみたす互いに素な正整数 $d, e \in \mathbf{N}$ をとる. 二変数同次多項式 $P(w_0, w_1) = w_0^d + w_1^d + w_0^e w_1^{d-e}$ をとる. 城崎 [Sh98] に従い, 帰納的に次のようにおく.

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & P_1(w_0, w_1) = P(w_0, w_1), \\
& P_n(w_0, w_1, \ldots, w_n) = P_{n-1}(P(w_0, w_1), \ldots, P(w_{n-1}, w_n)), \quad n = 2, 3, \ldots .
\end{aligned}
$$

P_n は $\mathbf{Q}$-係数, 次数 d^n の同次多項式である.

$$
(2) \qquad X = \{P_n(w_0, w_1, \ldots, w_n) = 0\} \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}
$$

とおく. [Sh98] により $X_{\mathbf{C}}$ は $e \geq 2$ に対し, 小林双曲的である.

主定理. ([No02]) $e \geqq 2$ を仮定する. すると (2) で定めた X は, 算術的有限性を持つ.

証明には, 上記構成法と [Sh98] の結果, 及び [Fa83] を使う.

参考文献

[Fa83] Faltings, G., Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math. **73** (1983), 349-366.

[Fa91] Faltings, G., Diophantine approximation on Abelian varieties, Ann. Math. **133** (1991), 549-576.

[Ko70] Kobayashi, S., Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, New York, 1970.

[La74] Lang, S., Higher dimensional Diophantine problems, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 779-787.

[MN96] Masuda, K. and Noguchi, J., A construction of hyperbolic hypersurfaces of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, Math. Ann. **304** (1996), 339-362.

[No85] Noguchi, J., Hyperbolic fibre spaces and Mordell's conjecture over function fields, Publ. RIMS, Kyoto University **21** (1985), 27-46.

[No92] Noguchi, J., Meromorphic mappings into compact hyperbolic complex spaces and geometric Diophantine problems, Internat. J. Math. **3** (1992), 277-289.

[No96] Noguchi, J., On Nevanlinna's second main theorem, Geometric Complex Analysis, Proc. the Third International Research Institute, Math. Soc. Japan, Hayama, 1995, pp. 489–503, World Scientific, Singapore, 1996.

[No97] Noguchi, J., Nevanlinna-Cartan theory over function fields and a Diophantine equation, J. reine angew. Math. **487** (1997), 61-83; Correction to the paper, Nevanlinna-Cartan theory over function fields and a Diophantine equation, J. reine angew. Math. **497** (1998), 235.

[No97] Noguchi, J., Some results in view of Nevanlinna theory, preprint UTMS 2001-24.

[NW02] Noguchi, J. and Winkelmann, J., Holomorphic curves and integral points off divisors, Math. Z. **239** (2002), 129-161.

[No02] J. Noguchi, An arithmetic property of Shirosaki's hyperbolic projective hypersurface, preprint, UTMS 2002-10, to appear in Forum Math.

[Sh97] Shirosaki, M., On polynomials which determin holomorphic mappings, J. Math. Soc. Japan **49** (1997), 289-298.

[Sh98] Shirosaki, M., On some hypersurfaces and holomorphic mappings, Kodai Math. **21** (1998), 29-34.

[SW95] Sarnak, P. and Wang, L., Some hypersurfaces in $\mathbf{P}^4$ and the Hasse-principle, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **321** (1995), 319-322.

[Vo96] Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I, Invent. Math. **126** (1996), 133-181.

[Vo98] Vojta, P., A more general abc conjecture, Intern. Math. Res. Notices **21** (1998), 1103-1116.

[Vo99] Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, II, Amer. J. Math. **121** (1999), 283-313.

19. 準アーベル多様体内整正則曲線のジェット像の構造定理

野口潤次郎　東大・数理

初めに，この研究は J. Winkelmann 氏との共同研究です．

A を準アーベル多様体とし，$f : \mathbf{C} \to A$ を整正則曲線とする．$J_k(f) : \mathbf{C} \to J_k(A)$ をその k-ジェット持ち上げとする．A は自明な正則接束をもつので，A 上のジェット束 $J_k(A)$ も自明である．つまり，$A \cong A \times \mathbf{C}^{nk}$ $(n = \dim A)$.

ここでは，ザリスキー位相は代数的集合を閉集合とする．またある写像がザリスキー非退化とは，その像が像空間の中でザリスキー稠密であることとする．そうでないとき，ザリスキー退化という．

X_k で $J_k(f)$ のザリスキー像，つまり像 $J_k(f)(\mathbf{C})$ の $J_k(A)$ 内でのザリスキー閉包とする．

アーベル多様体の場合は, [3], Theorem 2.2 (タイトルにある Geeralized Bloch's Theorem), 準アーベルの場合は [1], Proposition 1.8 (ii) において，X_k は A の部分群多様体の平行移動と $\mathbf{C}^{nk}$ の代数的部分多様体の直積の構造をもつと主張されたが，この証明にはギャップがあり，成立しない（証明のギャップは P. Vojta の指摘による）.

ここでの目的は，一般には成立しないという反例を与えることと，成立する場合もありその間の事情を明らかにすることである．

f の位数関数を $T_f(r)$ とするとき，f の位数 ρ_f を，

$$\rho_f = \limsup_{r \to \infty} \log T_f(r) / \log r$$

とおく．

定理 1 上記の記号のもとで，次が成立する．

(i) $\rho_f < \infty$ ならば，準アーベル部分多様体 $B \subset A$ と $a \in A$ 及び代数的部分多様体 $W_k \subset \mathbf{C}^{nk}$ が存在して，$X_k = (B + a) \times W_k$ が成立する．

(ii) A が単純アーベル多様体ならば，部分多様体 $W_k \subset \mathbf{C}^{nk}$ が存在して，$X_k = A \times W_k$ が成立する．

証明法は，基本的に [1] に従う．

規約代数的部分多様体 $X \subset A \times \mathbf{C}^m$ に対し，その平行移動不変部分群を

$$\mathrm{Stab}_A(X) = \{a \in A : (x + a, y) \in X \text{ for } \forall (x, y) \in X \subset A \times \mathbf{C}^m\}^0,$$

と定義する．ただし，$\{\cdot\}^0$ は単位元を含む連結成分を意味する．$\mathrm{Stab}_A(X)$ は A 内の連結でな代数的部分群になる．

I_l で次のジェット射影を表す．

$$I_l : J_l(A \times \mathbf{C}^m) \cong A \times \mathbf{C}^{nl+m(l+1)} \to J_l(A \times \mathbf{C}^m)/A \cong \mathbf{C}^{nl+m(l+1)}.$$

補題 2 $\mathrm{Stab}_A(X) = \{0\}$ を仮定する．そのとき，十分大きな任意の l に対し，制限 $I_l|_{J_l(X)}$ は $J_l(X \setminus \mathrm{Sing}(X))$ の一般の点で極大階数の微分を持つ．

次の補題が定理の証明の鍵である．

補題 3 $g : \mathbf{C} \to A \times \mathbf{C}^m$ を整正則曲線，X をそのザリスキー像とする．$\mathrm{Stab}_A(X) = \{0\}$ と仮定する．l を補題 *2* の様にとる．すると任意の有理関数 $\phi \in \mathbf{C}(X)$ に対し，引き戻された有理関数 $\phi \circ g$ は $\mathbf{C}$ 上 $I_l \circ J_l(g)$ の座標関数の成分で生成される関数体上代数的である．

さて，反例である．

定理 4 *3* 次元アーベル多様体 A と整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ で次をみたす例が存在する．

(i) f はザリスキー非退化である．
(ii) X をジェト持ち上げ $J_1(f) : \mathbf{C} \to J_1(A) \cong A \times \mathbf{C}^3$ のザリスキー像とする．すると，X は $J_1(A)$ の中で積構造をもたない，即ち代数的部分部分集合 $W \subset \mathbf{C}^3$ をもって $X = A \times W$ となることはない．

証明は，構成的になされ，A は楕円曲線とアーベル曲面の直積である．

参考文献

[1] Noguchi, J., On holomorphic curves in semi-Abelian varieties, Math. Z. **228** (1998), 713-721.

[2] Noguchi, J. and Winkelmann, J., A note on jets of entire curves in semi-abelian varieties, to appear in Math. Z., preprint UTMS 2002-25, 2002.

[3] Siu, Y.-T. and Yeung, S.-K., A generalized Bloch's theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an Abelian variety. Math. Ann. **306** (1996), 743-758.

20. 小林計量による凸領域の一つの特徴付け

小林正史 (慶大経済)

本講演では正則不変計量である Kobayashi 擬計量を用いた凸領域の特徴付けについて論じる. 正則不変計量による凸領域の特徴付けについては今までに Vigué [2],[3], Graham [1], などによりなされている. 彼らは一点における正則不変計量の標形と大域的な写像をもとに特徴付けを行った. ここではそれらとは異なる条件をもとに特徴付けを行う.

主定理を述べるのに必要な用語をまず定義する.

定義 1. 複素多様体 M が taut であるとは, 複素平面内の単位円板 $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$ から M への正則写像全体が正規族であるときをいう.

M を複素多様体とするとき, Kobayashi 擬計量を $\kappa_M(v)$ で表す. ここで, $v \in T_pM$, $p \in M$ である.

定義 2. M, N を複素多様体, $U \subset M$ を開集合とする. このとき, 正則写像 $\Phi\colon U \to N$ が U で κ 等長であるとは, 任意の $v \in T_aM$, $a \in U$ に対して

$$\kappa_M(v) = \kappa_N(\Phi_* v)$$

の成り立つときをいう.

次が主定理である.

主定理 3. M を taut な n 次元複素多様体, $D \subset \mathbb{C}^n$ を有界凸領域とする. $U \subset D$ を開集合とし, $\Phi\colon U \to M$ は U で κ 等長な正則写像とする. このとき, 正則被覆写像 $\tilde{\Phi}\colon D \to M$ で $\tilde{\Phi}|_U = \Phi$ となるものが存在する.

この主定理から次が直ちにわかる.

系 4. 主定理の仮定のもと，さらに M が単連結であるとき，D と M は双正則同値である．

主定理において taut という条件を除くと主定理は成り立たないことに注意する．これは $M = \Delta^2 \setminus \{(3/4, 0)\}$, $D = \Delta^2$, $F = \mathrm{id}\colon \Delta(1/2)^2 \to \Delta(1/2)^2$ として見るとわかる．ここで $\Delta(1/2) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1/2\}$ である．

参考文献

[1] Ian Graham, *Holomorphic mappings into strictly convex domains which are Kobayashi isometries at one point*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), no. 4, 917–921. MR 89k:32048

[2] Jean-Pierre Vigué, *La métrique infinitésimale de Kobayashi et la caractérisation des domaines convexes bornés*, J. Math. Pures Appl. (9) **78** (1999), no. 9, 867–876. MR 1 725 744

[3] ———, *Revêtements et isométries pour la métrique infinitésimale de Kobayashi*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 11, 3279–3284. MR 2002c:32022

※印は本会で記入

※番号	題	
21.		多変数の普遍関数について

氏名	阿部幸隆	所属	富山大学理学部

1929年にG. D. Birkhoffは次の定理を証明した。

定理（[5]） 次の性質をもつ一変数整関数$f(z)$が存在する。

任意の整関数$g(z)$に対して、複素数列$\{a_n\}$が存在して

$$\lim_{n\to\infty} f(z+a_n) = g(z).$$

ただし、収束は$\mathbb{C}$上広義一様である。

上のような関数$f(z)$は普遍関数（universal function）と呼ばれる（正確な定義は講演中に述べる）。このBirkhoffの定理が関数論における普遍関数の研究のはじまりで、その後様々な研究がなされた。とくに、1998年にはMontes-Rodriguezがリーマン面に拡張している（[6]）。

このような関数を多変数で考察して得た一連の結果（[1, 2, 3, 4]）について報告する。一部、P. Zappaとの共同研究である。

参考文献

[1] Y. Abe, Universal holomorphic functions in several variables, Analysis 17 (1997), 71–97.

[2] Y. Abe, Universal functions on complex special linear groups, in "Proceedings of the Fourth International Conference on Difference Equations, Poznan", Gordon and Breach Science Publishers, 2000, pp. 1–8.

[3] Y. Abe and P. Zappa, Universal functions on complex general linear groups, J. Approx. Theory 100 (1999), 221–232.

[4] Y. Abe and P. Zappa, Universal functions on Stein manifolds, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] G. D. Birkhoff, Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières, C. R. Paris 189 (1929), 473–475.

[6] A. Montes-Rodríguez, A Birkhoff theorem for Riemann surfaces, Rocky Mountain J. Math. 28 (1998), 663–693.

22. 単連結で有理凸状であるが多項式凸状ではない例

西野利雄　　九州大学名誉教授

T. Nishino, Un exemple concernant la convexité par rapport aux polynômes, Math. Kyoto Univ., 6, No 1. (1966)
に, 多項式凸状域に関する次のような例が書かれている.

z と w の空間 $\mathbf{C}^2$ において直積領域 $\Lambda=\Delta_1\times\Delta_2$:

$$\Delta_1 \ : \ 1 < |z| < M, \qquad \Delta_2 \ : \ |w| < 1$$

および, 実 3 次元の超曲面

$$(A) \qquad \Sigma \ : \ (1-t)z^2 - 2tz + w = 0 \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

を考え,

$$\mathfrak{D} \ : \ \Lambda - \Lambda \cap \Sigma$$

と置く. この領域 $\mathfrak{D}$ は単連結で有理凸状ではあるが, 多項式凸状ではない.

残念ながら数年前, この中の, 多項式凸状ではないという証明の一部が間違っていることに気付いた. しかしこの度その修正が得られたので, その部分の報告をする.

補題 1. 複素 2 変数 z,w の空間の双円筒 $\Delta : |z|<1,\ |w|<1$ の完全内部に, 多項式多面体 E を考え, さらに z と w の多項式 $Q(z,w)$ を, 解析面 $H : Q(z,w)=0$ が Δ の点を通り, E とは交わらないように取る. このとき, もし E が単連結ならば, z と w の多項式 $P(z,w)$ で, 二つの条件 :

1. E において不等式 $|P(z,w)|<1/2$ を満たす.
2. Δ 内で, 解析面 $P(z,w)=1$ は $\Delta\cap H$ と一致する.

を満たすものが存在する.

この補題により，当初の領域 $\mathfrak{D}$ が単連結であって多項式凸状なら，$Q(z,w)=z$ とし，E を $\mathfrak{D}$ の完全内部に取られた多項式多面体として，補題1の多項式 $P(z,w)$ を作ると，双円筒 $\Lambda^*:|z|<M,\ |w|<1$ 内の解析面 $T_t: P(z,w)=t,\ (1\leqq t\leqq\infty)$ は t と共に，$z=0$ から始まり，Σ の近傍のみを通って，Λ^* の外へ出てしまうことになる．しかしそれは不可能である．

この証明方針は元のままであるが，元の論文ではその不可能性の証明が間違っていた．それでもう一つ次の補題を準備する．

補題 2. 複素2変数 z,w の空間における双円筒 $\Delta: |z|<1, |w|<1$ を考え，$\mathfrak{E}$ を Δ における擬凹状集合とし，$\mathfrak{E}$ の z 平面への射影は実軸に含まれていると仮定する．このとき，もし $\mathfrak{E}$ が Δ の点 (a,b) を含むなら，$\mathfrak{E}$ は複素直線 $z=a$ の Δ 内の部分を含む．

さて，領域 $\mathfrak{D}$ を単連結で多項式凸状と仮定し，$E_j\ (j=1,2,\dots)$ を

$$E_j \Subset E_{j+1}, \qquad \lim_{j\to\infty} E_j = \mathfrak{D}$$

となる多項式多面体の列とし，各 E_j に対して，上記の多項式 $P_j(z,w)$ を作る．そして，正の数 $r,\rho\ (r>1,\rho<1)$ をそれぞれ十分1に近く取って，双円筒 $\Lambda^0: |z|<r, |w|<\rho$ を考え，上記の $T_t^{(j)}: P_j(z,w)=t$ が Λ^0 と交わらない最小の t を t_j として，

$$\mathfrak{E} = \lim_{\nu\to\infty} \overline{\bigcup_{j\geqq\nu} T_{t_j}^{(j)}}$$

と置く．

Λ 内で，$\mathfrak{E}$ は Σ に含まれる擬凹状集合であり，少なくとも一つ Λ^0 のエッジ $|z|=r, |w|=\rho$ の点 O を含む．Σ は t ごとに式 (A) で与えられる解析面 $S_t\ (0\leqq t\leqq 1)$ の族によって作られている．それで O を通る S_t を S_{t_0} とすると，補題2により，$\mathfrak{E}$ は S_{t_0} の Λ 内の部分を含む．仮定により，$\mathfrak{E}$ は Λ^0 の点を含まない．他方，S_{t_0} は Λ^0 の点を含む．これは矛盾である．

したがって $\mathfrak{D}$ は多項式凸状ではない．

※印は本会で記入

※番号	題	
23.		L^2正則関数の拡張について（其の六）—— ある極限型

氏名　大沢健夫　　所属　名大多元数理

L^2正則関数の拡張については、次の結果とそのいくつかの改良版が知られている。

定理（L^2拡張定理［〜・竹腰, '87 Math. Z.）Dを$\mathbb{C}^n$の有界擬凸領域とし、$D'=\{z=(z_1,\dots,z_n)\in D \mid z_n=0\}$とおく。このとき$D$の直径にのみ依存する正数$C$が存在して、$D$上の任意の多重劣調和関数$\varphi$と、可積分条件$\int_{D'} e^{-\varphi}|f|^2<\infty$をみたす$D'$上の任意の正則関数$f$に対し、$f$の$D$への正則な拡張$\tilde{f}$で$\int_D e^{-\varphi}|\tilde{f}|^2 \le C\int_{D'} e^{-\varphi}|f|^2$をみたすものが存在する。ただし積分は*Lebesgue*測度に関するものとする。

Dを複素多様体におきかえても、ポテンシャル関数$\log|z_n|$に相当するものがある場合には同様の命題が成立し、その応用として$\mathbb{C}^n$の領域上の割算問題について新しい結果が得られる。（〜, Generalization of a precise L^2 division theorem, to appear）

今回はこのような一般化とは逆に、Dが強擬凸である

場合に限り、むしろL^2拡張定理を特殊化することにより得られた結果について報告したい。

主定理 DはC^2級の境界をもつ$\mathbb{C}^n$の強擬凸領域であり、$z_n=0$は∂Dと横断的に交わるとする。このとき正数C_1が存在して、$\overline{D}$上連続でD上多重劣調和な任意の関数φと、可積分条件$\int_{D'} e^{-\varphi}|f|^2<\infty$をみたす$D'$上の任意の正則関数$f$に対し、$f$の$D$への正則な拡張$\tilde{f}$で

$$\lim_{\tau\to 0}\tau\int_D \delta^{-1+\tau}e^{-\varphi}|\tilde{f}|^2 \le C_1\int_{D'} e^{-\varphi}|f|^2$$

をみたすものが存在する。ただし$\delta(z)$はzと∂Dのユークリッド距離を表す。

注意。$\varphi=0$かつ$\partial D\in C^\infty$の場合には、主定理はF. Beatrous ('85 Michigan J.) がHenkin-Ramirez型の積分核の解析によって得た一連の結果にふくまれる。Beatrousの証明は$\partial D\in C^3$の場合も通用するが、φの存在を許している点がL^2拡張定理の良い所だったので、今回の主定理にも何か新しい意味があると思われる。

謝辞。この仕事(On the extension of L^2 holomorphic functions VI — a limiting case)の間、斎藤三郎氏と安達謙三氏に有益なご注意を頂いた。

24. CR structure on the boundary of Grauert tube

Eisuke Koizumi
Mathematical Institute, Tohoku University

Let (X, g) be a C^ω complete Riemannian manifold. For each geodesic γ on X, we define the mapping $\psi_\gamma : \mathbb{C} \to TX$ by $\psi_\gamma(\sigma + i\tau) := \tau\dot{\gamma}(\sigma)$.

Definition 1. Let (X, g) be a C^ω Riemannian manifold, and let $T^rX := \{v \in TX | \ g(v,v) < r^2\}$, where $0 < r \leq \infty$. A complex structure on T^rX is said to be *adapted* if ψ_γ is holomorphic for every geodesic γ on X.

An adapted complex structure is unique if it exists.

The Grauert tube of radius r over a C^ω Riemannian manifold X is the manifold T^rX equipped with the adapted complex structure. X is called the center of the Grauert tube T^rX.

For a C^ω Riemannian manifold X, let $r_{\max}(X)$ be the maximal radius r such that the adapted complex structure is defined on T^rX. It is known that $r_{\max}(X) > 0$ if X is compact, or X is homogeneous.

We assume that X is compact. Let T^rX be the Grauert tube, and let $\rho : T^rX \to \mathbb{R}$ be the mapping defined by $\rho(v) := 2g(v,v)$. Then ρ has the following properties:

(1) ρ is strictly plurisubharmonic;

(2) $X = \rho^{-1}(0)$;

(3) the metric $ds^2_{T^rX}$ obtained from the Kähler form $i\partial\bar{\partial}\rho/2$ is compatible with g, that is, $ds^2_{T^rX}|_X = g$; and

(4) $(\partial\bar{\partial}\sqrt{\rho})^n = 0$ in $T^rX - X$, where $n = \dim X$.

Let $\Omega_\varepsilon := \{\rho < \varepsilon^2\} \subset T^rX$, and let $M_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$. Then we see that M_ε is a strongly pseudoconvex CR manifold.

We assume that $\dim X = 2$. Let $\theta := \iota_\varepsilon^*(-i\partial\rho)$, where ι_ε is the embedding of M_ε in the Grauert tube. Then θ defines a pseudo-hermitian structure on M_ε.

Let $S_\varepsilon(z, \bar{z})$ be the Szegö kernel with respect to the volume element $\theta \wedge d\theta$. Then S_ε has the asymptotic expansion

$$S_\varepsilon(z, \bar{z}) = \varphi(z)\rho_\varepsilon(z)^{-2} + \psi(z) \log \rho_\varepsilon(z),$$

where $\varphi,\ \psi \in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon})$ and ρ_ε is a defining function of Ω_ε with $\rho_\varepsilon > 0$ in Ω_ε.

The next theorem is our main result.

Theorem 1 ([1]). *Let R be the Webster scalar curvature with respect to (M_ε, θ), and let $\psi_0 := \psi|_{M_\varepsilon}$. Then R and ψ_0 have the following asymptotic expansions:*

$$R \sim \sum_{l=-1}^{\infty} F_l^R(g_{ij}^{(m)}, \mu)\varepsilon^{2l},$$

$$\psi_\varepsilon|_{M_\varepsilon}\ \cancel{\psi_0} \sim \frac{1}{24\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty} F_l^{\psi_0}(g_{ij}^{(m)}, \mu)\varepsilon^{2l},$$

where

$$F_l^R(\lambda^2 g_{ij}^{(m)}, \mu) = \lambda^{-2l-2}F_l^R(g_{ij}^{(m)}, \mu),$$
$$F_l^{\psi_0}(\lambda^2 g_{ij}^{(m)}, \mu) = \lambda^{-2l-4}F_l^{\psi_0}(g_{ij}^{(m)}, \mu)$$

for $\lambda > 0$. In particular, we have

$$F_{-1}^R(g_{ij}^{(m)}, \mu) = \frac{1}{2}, \quad F_0^R(g_{ij}^{(m)}, \mu) = \frac{1}{6}k,$$
$$F_1^R(g_{ij}^{(m)}, \mu) = -\frac{1}{360}k^2 - \frac{1}{30}\Delta k - \frac{1}{12}(k\rho)_{,00},$$
$$F_0^{\psi_0}(g_{ij}^{(m)}, \mu) = -\frac{1}{10}\Delta k - \frac{2}{5}\cancel{(k\rho)_{,00},} \text{ --- } \{\varepsilon^2 T_\varepsilon^2 k\}\Big|_{\varepsilon=0}$$

where we naturally consider the scalar curvature k and Δk, the Laplacian of k, the functions on M_ε.

References

[1] E. Koizumi, *CR structure on the boundary of Grauert tube*, in preparation.

25. NUMERICAL GORENSTEIN ELLIPTIC SINGULARITIES

奥間 智弘　(群馬高専)

(X,x) を2次元正規特異点, $f\colon(M,A)\to(X,x)$ を最小特異点解消, Z を基本サイクルとする. $\chi(\mathcal{O}_Z)=0$ のとき (X,x) は楕円型といわれる. K を M 上の標準因子とする. $K\equiv -Z_K$ となるサイクル Z_K が存在するとき, (X,x) は数値的 Gorenstein といわれる.

以下, (X,x) は数値的 Gorenstein かつ楕円型であるとする. Yau の楕円列を $Z=Z_0>\cdots>Z_m=E$ であらわす. ここで E は最小楕円型サイクル. Némethi により, (X,x) が Gorenstein かつ $H^1(A,\mathbb{Z})=0$ なら $p_g(X,x)=m+1$ であることが示されている (p_g は幾何種数) [1]. 今回はそれの一般化を含む結果について報告したい. X_j で Z_j の台をブローイングダウンして出来る特異点をあらわす. これもまた数値的 Gorenstein かつ楕円型である.

$$\alpha := \min\{j \mid 0\le j\le m,\ X_j \text{ は Gorenstein}\}.$$
$$\gamma := \begin{cases} \operatorname{ord}(\mathcal{O}_E(Z_\alpha))\ \ (\text{in } \operatorname{Pic} E) & \text{if } \alpha<m \\ 1 & \text{if } \alpha=m. \end{cases}$$

Theorem 1. (1) $p_g(X,x)=(m-\alpha)/\gamma+1$.

(2) Z が極大イデアルサイクルならば $p_g(X,x)=m+1$.

(3) (X,x) が *Gorenstein* ならば $p_g(X,x)=L(X,x)$, ここで L は" *maximal-ideal-adic filtration*" の長さである [2].

(X,x) が Gorenstein ならば定義により $\alpha=0$, $H^1(A,\mathbb{Z})=0$ なら $\operatorname{Pic}E$ は torsion free なので $\gamma=1$ である.

REFERENCES

[1] A. Némethi, *"Weakly" elliptic Gorenstein singularities of surfaces*, Invent. Math. **137**, No. 1 (1999), 145–167.

[2] M. Tomari, *Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ for normal two-dimensional singularities*, Complex analytic singularities, Advanced Studies in Pure Math., vol. 8, 1986, pp. 153–163.

特別講演

$\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ の特徴づけをめぐって

児玉 秋雄 (金沢大学 理学部)

1. 基本問題と結果

複素多様体 M に対して, $\mathrm{Aut}(M)$ を M の正則自己同型群とする. $\mathrm{Aut}(M)$ は写像の合成を積とする群であるが, コンパクト開位相を入れることにより, M に連続的に作用する位相変換群となる. さらに, $M = D$ が $\mathbf{C}^n$ の有界領域である場合には, 良く知られている H. Cartan の定理により, $\mathrm{Aut}(D)$ は実リー群の構造を持つ [11]. しかし, 一般的には $\mathrm{Aut}(M)$ はリー群の構造を持たない. 例えば, $k+\ell \geq 2$ のとき, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ はリー群構造を持たない巨大な群であり, その構造は非常に複雑である ([2], [13]).

さて, 今 $\mathbf{C}^n$ の領域 D が $\mathbf{C}^n$ に双正則同値である, すなわち D から $\mathbf{C}^n$ の上への双正則写像 $F : D \to \mathbf{C}^n$ が存在すると仮定しよう. このとき, 明らかに $\mathrm{Aut}(D)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ は位相群として同型になる. それでは, この逆は成り立つか? すなわち,

「$\mathbf{C}^n$ の領域 D に対して, $\mathrm{Aut}(D)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ が位相群として同型であるならば, D は $\mathbf{C}^n$ に双正則同値であるか?」

さらに問題を一般化して,

基本問題: M を n 次元連結複素多様体とし, k を $0 \leq k \leq n$ である整数とする. このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ が位相群として同型であるならば, M は $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$ に双正則同値であるか?

本講演では主に, この問題に関して 清水 悟 氏 (東北大学大学院理学研究科) との共同研究 [9] において得られた, 以下の結果について話したい:

主定理. M を n 次元の連結な Stein 多様体とし, k を $0 \leq k \leq n$ である整数とする. このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ が位相群として同型であるならば, M は $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$ に双正則同値である.

この主定理から, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ の位相群としての構造に関する, 次のことがわかる:

系. 負でない整数の組 (k, ℓ) と (k', ℓ') に対して, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^{k'} \times (\mathbf{C}^*)^{\ell'})$ が位相群として同型であるのは, $(k, \ell) = (k', \ell')$ の場合に限る.

なお, Ahern-Rudin [1] で示されているように, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^m)$ が抽象群として同型であるのは, $n = m$ の場合に限る. このことから, 上記の系においても, 2つの群が単に抽象群として同型であるという仮定のもとで, 同様のことが成り立つのではないかと思われる.

主定理の証明に用いられる手法はまた, n 次ユニタリ群 $U(n)$ が正則自己同型からなる群として作用するような複素多様体の構造の研究に応用出来る. 実際, 我々の手法を用いることにより, 次のようなことが証明出来る:

定理 1. n (≥ 2) 次元連結 Stein 多様体 M 上に, n 次ユニタリ群 $U(n)$ が正則自己同型からなる群として連続的, かつ効果的に作用するならば, M は n 次元複素ユークリッド空間 $\mathbf{C}^n$, またはその中の単位球 B^n のいずれかに双正則同値である.

定理 2. n (≥ 2) 次元連結 Stein 多様体 M に対して, $\rho_1, \rho_2 : U(n) \to \mathrm{Aut}(M)$ を任意の2つの連続な単射準同型写像とする. このとき, ある元 $\psi \in \mathrm{Aut}(M)$ が存在して, $\psi\rho_1(U(n))\psi^{-1} = \rho_2(U(n))$ となる. より詳しく, 必要ならば ψ を適当な元 $\Psi \in \mathrm{Aut}(M)$ に取り直すことにより, すべての $u \in U(n)$ に対して

$$\Psi\rho_1(u)\Psi^{-1} = \rho_2(u) \quad \text{または} \quad \Psi\rho_1(u)\Psi^{-1} = \rho_2(\bar{u})$$

となるように出来る. ただし, $\bar{u}$ は行列 u の複素共役行列である.

この講演では, これらの事実の証明において, n 次元トーラス $T^n = (U(1))^n$ が正則自己同型からなる群として連続的, かつ効果的に作用するような複素多

様体の構造に関する Barrett-Bedford-Dadok [3] の結果, 及び有界ラインハルト領域についての清水悟氏の結果 [14], [15] が, 非有界領域 $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ の特徴づけに関する研究においていかに有効に用いられたかについて述べるとともに, 今後に残されたいくつかの問題についてふれたい.

2. 関連する結果といくつかの問題

M を n 次元の連結な複素多様体とする. Isaev-Kruzhilin [7] は, n 次ユニタリ群 $U(n)$ が正則自己同型からなる群として連続的, かつ効果的に作用するような M を分類し, その結果の応用として次の定理を証明した:

定理 I-K. M を n 次元の連結な複素多様体とする. このとき, $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ が位相群として同型であるならば, M は $\mathbf{C}^n$ に双正則同値である.

従って, 我々の主定理において $k = n$ の特別な場合には, M が Stein 多様体であるという仮定を落とすことが出来る. また, この $U(n)$-作用を許す複素多様体の分類に関する彼らの論文は非常に難解なものであり, 定理 I-K のより直接的な見通しのよい証明が望まれる.

一方, M が Stein 多様体である場合には, 上記の論文 [7] で得られた $U(n)$-作用を許す複素多様体の分類に関する結果を用いることなく, Isaev [6] が定理 I-K と同じ結論を得ている (記号, 証明方法を込めて, ほとんど同じことを Krantz が発表している [10]).

いくつかの問題を提起するため, ここで Isaev [6] における, M が Stein 多様体である場合の定理 I-K の証明のキーポイントを思い出しておこう: まず, M が Stein 多様体で, かつ $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ が位相群として同型であることから, Barrett-Bedford-Dadok [3] の結果を用いることにより, M はある $\mathbf{C}^h \times (\mathbf{C}^*)^{n-h}$ $(0 \leq h \leq n)$ に双正則同値であることを証明する. 次に, 彼は

(1) 位相群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ は連結である; 一方

(2) $h \neq n$ のとき, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^h \times (\mathbf{C}^*)^{n-h})$ は連結でない,

ことを示す. 従って, 今 $\mathrm{Aut}(M)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ は位相群として同型であると仮定されていることから, (1), (2) より M は $\mathbf{C}^n$ に双正則同値であることが結論され, 証明が終わる.

ここで注意しておきたいことは, $0 \le h, k \le n-1$ で $h \ne k$ のとき, (2) の主張が

「$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^h \times (\mathbf{C}^*)^{n-h})$ と $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ は位相群として同型でない」

ことを保証してはいないということである. このことから, 彼のと類似した議論を用いて, 我々の主定理を証明することは難しいように思われる.

ここで, Isaev [6] における議論に関連して, 次のような問題を提起したい: 与えられた整数 h $(0 \le h \le n)$ に対して,

$$\mathit{\Gamma}_h := \text{位相群 } \mathrm{Aut}(\mathbf{C}^h \times (\mathbf{C}^*)^{n-h}) \text{ の連結成分全体のなす集合の濃度}$$

とおく. 例えば, 上述の (1) から, $\mathit{\Gamma}_n = 1$ である. このとき,

問題 1. 濃度 $\mathit{\Gamma}_h$ は与えられた整数 h のみで決定されるか?

問題 2. $\mathbf{C}^h \times (\mathbf{C}^*)^{n-h}$ が $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$ に双正則同値であるのは, $\mathit{\Gamma}_h = \mathit{\Gamma}_k$ の場合のみであるか?

もちろん, $\mathbf{C}^n$ の一般の領域に対しては, これらの問題は否定的である. 実際, $\mathbf{C}^n$ 内の滑らかな境界を持つ強擬凸有界領域の族 $\{D_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ で,

(*i*) すべての $\mathrm{Aut}(D_t)$ は恒等変換のみからなる群である;

(*ii*) D_s が D_t に双正則同値であるのは, $s = t$ の場合に限る,

となるものが存在する ([4], [5]). また, 一般複素楕円体

$$E(k,\alpha) = \left\{ z \in \mathbf{C}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} |z_i|^2 + \left(\sum_{j=k+1}^{n} |z_j|^2 \right)^{\alpha} < 1 \right\}$$

$(k \in \mathbf{Z},\ 1 \le k \le n,\ 0 < \alpha \in \mathbf{R})$ 対して,

(*i*) すべての $\mathrm{Aut}(E(k,\alpha))$ は連結である;

(*ii*)　$E(k,\alpha)$ が $E(\ell,\beta)$ に双正則同値であるのは, $(k,\alpha)=(\ell,\beta)$ の場合に限る,

ことがわかる ([8], [12]).

いずれにしても, M が Stein 多様体とは限らない一般の複素多様体に対する「基本問題」の解決には, さらなる新しいアイデアが必要である. さしあたって, 最も本質的であると思われる

問題 3. $M=D$ が $\mathbf{C}^n$ の領域である場合に, 主定理と同じ結論が成り立つか?

を解決したい. この場合には, Barrett-Bedford-Dadok [3] の結果を用いることにより, $\mathrm{Aut}(D)$ は $\mathbf{C}^n$ の正則変換

$$\mathbf{C}^n \ni (z_1,\ldots,z_n) \longmapsto (\alpha_1 z_1,\ldots,\alpha_n z_n) \in \mathbf{C}^n$$

$((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbf{C}^*)^n)$ 全体のなす群 $\Pi(\mathbf{C}^n)$ を含んでいると仮定してよいことがわかる. 従って, D は $\Pi(\mathbf{C}^n)$-不変な $\mathbf{C}^n$ の部分領域であるから,

$$D=\mathbf{C}^n \qquad \text{または} \qquad D=\mathbf{C}^n\setminus\textstyle\bigcup_{k=1}^r V_k$$

(各 V_k はいくつかの座標超平面の共通部分) という特別な形をした領域である場合に帰着されるのだが, 目下のところこれ以上のことは何もわかっていない.

参考文献

[1] P. Ahern and W. Rudin, *Periodic Automorphisms of* $\mathbf{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 287–303.

[2] E. Andersén and L. Lempert, *On the group of holomorphic automorphisms of* $\mathbf{C}^n$, Invent. Math. **110** (1992), 371–388.

[3] D. E. Barrett, E. Bedford, and J. Dadok, *T^n-actions on holomorphically separable complex manifolds*, Math. Z. **202** (1989), 65–82.

[4] D. Burns, S. Shnider and R. O. Wells, *On deformations of strictly pseudo-convex domains*, Invent. Math. **46** (1978), 237–253.

[5] R. E. Greene and S. G. Krantz, *Deformation of complex structures, estimates for the $\bar{\partial}$ equation, and stability of the Bergman kernel*, Adv. Math. **43** (1982), 1–86.

[6] A. V. Isaev, *Characterization of* $\mathbf{C}^n$ *by its automorphism group*, Proc. Steklov Inst. Math. **235** (2001), 103–106.

[7] A. V. Isaev and N. G. Kruzhilin, *Effective actions of the unitary group on complex manifolds*, to appear in Canad. J. Math. (2002).

[8] A. Kodama, *Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains* $E(k,\alpha)$ *in* $\mathbf{C}^n$, Tohoku Math. J. **40** (1988), 343–365.

[9] A. Kodama and S. Shimizu, *A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space*, Preprint (2002).

[10] S. G. Krantz, *Determination of a domain in complex space by its automorphism group*, Complex Variables **47** (2002), 215–223.

[11] R. Narasimhan, Several complex variables, Univ. Chicago Press, Chicago and London, 1971.

[12] I. Naruki, *The holomorphic equivalence problem for a class of Reinhardt domains*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **4** (1968), 527–543.

[13] J. P. Rosay and W. Rudin, *Holomorphic maps from* $\mathbf{C}^n$ *to* $\mathbf{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc., **310** (1988), 47–86.

[14] S. Shimizu, *Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin*, Tohoku Math. J. **40** (1988), 119–152.

[15] S. Shimizu, *Automorphisms of bounded Reinhardt domains*, Japan. J. Math. **15** (1989), 385–414.