日　本　数　学　会

２００２年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

２００２年９月

於 島 根 大 学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

9 月 25 日 (水)　第 V 会場

9:00 ∼ 12:00

1 崔　宰豪 (福岡大理)* Some inclusion properties of a certain family of integral operators ····· 15
西郷　恵 (福岡大理)
H. M. Srivastava (Univ. of Victoria)

2 戸田　暢茂 * On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, IV ········ 15

3 石崎　克也 (日本工大)* 函数方程式 $f^n + g^n + h^n = 1$ と複素微分方程式について ············ 15

4 山下　慎二 (都立大理) Inverse functions of the Grötzsch and the Teichmüller modulus functions 15

5 佐藤　宏樹 (静岡大理)* Extreme discrete groups for Jørgensen's inequality ················· 15
大市　牧人 (静岡大理工)
李　長軍 (静岡大理工)

6 藤川　英華 (東工大理工)* Limit sets of Teichmüller modular groups with no interior points ······ 15

7 V. Gutlyanskiĭ (NAS of Ukraine) * On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings ··············· 10
須川　敏幸 (広島大理)

8 須川　敏幸 (広島大理)* Some inequalities for the Poincaré metric of plane domains ·········· 10
M. Vuorinen (ヘルシンキ大)

9 米田　力生 (都立工高専)* Multipliers on weighted Dirichlet spaces ························ 15

10 倉田　久靖 (米子高専)* Sierpiński ガスケット上の調和関数 ······························ 15

11 今井　淳 (京大情報)* Sierpiński gasket 上の Martin 距離の Lipschitz 同値性 ··············· 15
川崎　泰裕 (NTT DoCoMo 九州)
佐藤　坦 (九大数理)

14:15 ∼ 16:00

12 水田　義弘 (広島大総合科)* ソボレフ関数のリース分解と無限遠点での極限値について ············ 15
下村　哲 (広島大教育)

13 二村　俊英 (広島大理)* 単調な重み付きソボレフ関数の Lindelöf 型定理 ···················· 15
水田　義弘 (広島大総合科)

14 宮本　育子 (千葉大理)* On harmonic majorization of the Martin function at infinity in a cone ·· 15
柳下　稔 (千葉大自然)
吉田　英信 (千葉大自然)

15 秦野　薫 (島根大教育) カントール集合のハウスドルフ測度とプレ・パッキング測度について ··· 15

16 渡辺　ヒサ子 (お茶の水女大)* フラクタルな側面上の放物型ベゾフノルムの体積積分による評価 ······ 15

17 中井　三留 * 完備無限葉平面の型問題 ·· 15

16:15 ∼ 17:15　特別講演

宮地　秀樹 (阪市大理)* 有界幾何を持つクライン多様体について

9 月 26 日 (木)　第 V 会場

9:30 ～ 11:30

18 西本　勝之 (デカルト出版)* N-fractional calculus of the power and logarithmic functions, and some identities · · · · · · · · · · 10

19 西本　勝之 (デカルト出版)* Some theorems for N-fractional calculus of logarithmic functions I · · · · · 10

20 真次　康夫 (信州大理) 荷重 Bergman-Privalov 空間の特徴付け · · · · · · · · · · 10
宮澤　純 (名鉄システム開発)
植木　誠一郎 (信州大理)

21 真次　康夫 (信州大理) 荷重 Bergman-Orlicz 空間の特徴付け · · · · · · · · · · 10
宮澤　純 (名鉄システム開発)

22 山口　博史 (奈良女大理) $\operatorname{div} \mathbf{u} = f, \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{g}$ の境界値問題 · · · · · · · · · · 10
宮武　貞夫 (奈良女大理)

23 山口　博史 (奈良女大理) Neumann のアルゴリズムに関する Poincaré の注意について · · · · · · · · · · 10
N. Levenberg (Auckland Univ.)

24 児玉　秋雄 (金沢大理) A group-theoretic characterization of $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^\ell$ · · · · · · · · · · 15
清水　悟 (東北大理)

25 松本　和子 (大阪女大理)* $\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体への対数的距離の Levi form と展開可能性 · · · · · · · 15

26 松島　敏夫 (石川工高専)* Radial cluster set of bounded holomorphic functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ · · · · · · · · · · 10

13:00 ～ 14:00　特別講演

大内　重樹 (国際基督教大教養)* Hörmander 環における補間問題について

1 SOME INCLUSION PEOPERTIES OF A CERTAIN FAMILY OF INTEGRAL OPERATORS

崔 宰豪 福岡大 ・ 理
西郷 恵 福岡大 ・ 理
H. M. Srivastava Univ. of Victoria

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ *normalized* by

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,$$

which are *analytic* in the *open* unit disk $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$. Also let $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}^*$ and $\mathcal{K}$ denote the subclasses of $\mathcal{A}$ consisting of functions which are *univalent*, *close-to-convex*, *starlike*, and *convex* in $\mathbb{U}$, respectively.

Let $\mathcal{M}$ be the class of analytic functions $\phi(z)$ in $\mathbb{U}$ normalized by $\phi(0) = 1$, and let $\mathcal{N}$ be the subclass of $\mathcal{M}$ consisting of those functions ϕ which are univalent in $\mathbb{U}$ and for which $\phi(\mathbb{U})$ is convex and $\Re\,\{\phi(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{U})$.

Making use of the principle of subordination between analytic functions, Ma and Minda [3] and Kim *et al.* [2] investigate the subclasses $\mathfrak{S}^*(\phi)$, $\mathfrak{K}(\phi)$, and $\mathfrak{C}(\phi,\psi)$ of the class $\mathcal{A}$ for ϕ, $\psi \in \mathcal{N}$, which are defined by

$$\mathfrak{S}^*(\phi) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \phi(z) \quad \text{in } \mathbb{U} \right\},$$

$$\mathfrak{K}(\phi) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \phi(z) \quad \text{in } \mathbb{U} \right\},$$

and

$$\mathfrak{C}(\phi,\psi) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \exists\ h \in \mathfrak{K}(\phi) \text{ s.t. } \frac{f'(z)}{h'(z)} \prec \psi(z) \quad \text{in } \mathbb{U} \right\}.$$

Obviously, for special choices for the functions ϕ and ψ involved in these definitions, we have the following relationships:

$$\mathfrak{S}^*\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{S}^*, \quad \mathfrak{K}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{K},$$

and

$$\mathfrak{C}\left(\frac{1+z}{1-z}, \frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{C}.$$

By analogy with the *general* Ruscheweyh operator $\mathcal{D}^\lambda$ $(\lambda > -1)$, we now set

$$f_\lambda(z) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} \qquad (\lambda > -1)$$

and define $f_{\lambda,\mu}$ by means of the Hadamard product (or convolution):

$$(f_\lambda * f_{\lambda,\mu})(z) = \frac{z}{(1-z)^\mu} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Noor and Noor [4] considered the operator I_n, and its natural generalization is provided by the integral operator $\mathcal{I}_{\lambda,\mu} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, which we define here by

$$\mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) = (f_{\lambda,\mu} * f)(z) \qquad (f \in \mathcal{A}; \lambda > -1; \mu > 0).$$

We note that $\mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) = \mathcal{L}(\mu, \lambda+1) f(z) (\lambda > -1; \mu > 0)$, where $\mathcal{L}(a,c)$ is the Carlson-Shaffer operator introduced in [1].

Next, by using the general operator $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$, we introduce the following new classes of analytic functions for ϕ, $\psi \in \mathcal{N}$ and $\lambda > -1$, $\mu > 0$:

$$\mathfrak{S}^*_{\lambda,\mu}(\phi) := \{f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) \in \mathfrak{S}^*(\phi)\},$$

$$\mathfrak{K}_{\lambda,\mu}(\phi) := \{f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) \in \mathfrak{K}(\phi)\},$$

and

$$\mathfrak{C}_{\lambda,\mu}(\phi,\psi) = \{f : f \in \mathcal{A} \text{ and } \mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) \in \mathfrak{C}(\phi,\psi)\}.$$

In the present report, we investigate several inclusion properties of the classes $\mathfrak{S}^*_{\lambda,\mu}(\phi)$, $\mathfrak{K}_{\lambda,\mu}(\phi)$ and $\mathfrak{C}_{\lambda,\mu}(\phi,\psi)$ associated with the general integral operator $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$. Some applications involving this and other families of integral operators are also considered.

Theorem 1. *Let $\lambda \geqq 0$ and $\mu \geqq 1$. Then*

$$\mathfrak{S}^*_{\lambda,\mu+1}(\phi) \subset \mathfrak{S}^*_{\lambda,\mu}(\phi) \subset \mathfrak{S}^*_{\lambda+1,\mu}(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{N}).$$

Theorem 2. *Let $\lambda \geqq 0$ and $\mu \geqq 1$. Then*

$$\mathfrak{K}_{\lambda,\mu+1}(\phi) \subset \mathfrak{K}_{\lambda,\mu}(\phi) \subset \mathfrak{K}_{\lambda+1,\mu}(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{N}).$$

Theorem 3. *Let $\lambda \geqq 0$ and $\mu \geqq 1$. Then*

$$\mathfrak{C}_{\lambda,\mu+1}(\phi,\psi) \subset \mathfrak{C}_{\lambda,\mu}(\phi,\psi) \subset \mathfrak{C}_{\lambda+1,\mu}(\phi,\psi) \qquad (\phi, \psi \in \mathcal{N}).$$

References

[1] B. C. Carlson and D. B. Shaffer, Starlike and prestarlike hypergeometric functions, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 737-745.

[2] Y. C. Kim, J. H. Choi, and T. Sugawa, Coefficient bounds and convolution properties for certain classes of close-to-convex functions, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci.* **76** (2000), 95-98.

[3] W. Ma and D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent functions, *Proceedings of the Conference on Complex Analysis*, International Press, Cambridge, MA, 1992, 157-169.

[4] K. I. Noor and M. A. Noor, On integral operators, *J. Math. Anal. Appl.* **238** (1999), 341-352.

2 On the Deficiency of Holomorphic Curves with Maximal Deficiency Sum, IV

TODA Nobushige

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a don-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \rightarrow \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$ and

$$X(0) = \{\boldsymbol{a}(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1} \in X | a_{n+1} = 0\}.$$

Defect Relation I ([1]($N = n$), [3]($N > n$). See [2]).

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1.$$

We are interested in the holomorphic curves extremal for the defect relation.

Theorem A([6]). Suppose that $N > n = 2m$ ($m \in \boldsymbol{N}$) and there are vectors $\boldsymbol{a}_j$ ($j = 1, \cdots, q$) in X which satisfy (3), where $2N - n + 1 < q \leq \infty$). Then there are at least

$$\left[\frac{2N - n + 1}{n + 1}\right] + 1$$

vectors $\boldsymbol{a} \in \{\boldsymbol{a}_j \ (j = 1, \cdots, q)\}$ satisfying $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 1$.

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

For $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$, let $\omega : Q \rightarrow (0, 1]$ be the Nochka weight function given in [2, p.72] and θ the reciprocal number of the Nochka constant given in [2, p.72]. Then we have the following properties:

Lemma(see [2], Theorem 2.11.4).

(i) $0 < \omega(j)\theta \leq 1$ for all $j \in Q$;

(ii) $q - 2N + n - 1 = \theta(\sum_{j=1}^{q} \omega(j) - n - 1)$;

(iii) $(N + 1)/(n + 1) \leq \theta \leq (2N - n + 1)/(n + 1)$;

(iv) If $P \subset Q$ and $0 < \#P \leq N + 1$, then $\sum_{j \in P} \omega(j) \leq d(P)$.

(c) Further we put $u(z) = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)|$,

$$t(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\log u(re^{i\theta}) - \log u(e^{i\theta})\} d\theta,$$

and $\Omega = \limsup_{r \to \infty} t(r, f)/T(r, f)$([4]).

Defect relation II([5]). For any $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$, we have the following inequalities:
(I) $\sum_{j=1}^{q} \omega(j)\delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq d + 1 + (n-d)\Omega$;
(II) $\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq 2N - n + 1 - \dfrac{N+1}{n+1}(n-d)(1-\Omega)$,

where $\quad d = \sum_{\boldsymbol{a}_j \in X(0)} \omega(j)$.

2. Theorem.
Theorem. Suppose that
(i) $N > n \geq 2$;
(ii) there are vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$ $(2N - n + 1 < q < \infty)$ satisfying

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1.$$

If $\Omega < 1$, then
(a) $\#X(0) = N$;
(b) there is a subset $P \subset Q$ satisfying

$$\#P = N - n + 1, \quad d(P) = 1, \quad \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 1 \quad (j \in P)$$

and

$$X(0) \cap \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in P\} = \phi.$$

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[3] E. I. Nochka: On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

[4] N. Toda: On the fundamental inequality for non-degenerate holomorphic curves. Kodai Math. J., 20-3(1997), 189-207.

[5] N. Toda: An improvement of the second fundamental theorem for holomorphic curves. Proceedings of the Second ISAAC Congress, Vol.1(2000), 501-510.

[6] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, II. Proceedings of the Third ISAAC Congress (to appear).

3　函数方程式 $f^n+g^n+h^n=1$ と 複素微分方程式について

日本工業大学
石崎　克也

本講演では, n を自然数として, 函数方程式

$$f(z)^n+g(z)^n+h(z)^n\equiv 1. \tag{1}$$

の整函数解および有理型函数解について得られた結果 [3] について報告いたします. 函数方程式(1) についての研究としては, たとえば [1], [4], [5] などがあります. 講演を通して, 標準的な Nevanlinna 理論の記号を使用することにします.

簡単のため, $f^n=F$, $g^n=G$, $h^n=H$ とおき, $T^*(r)=T(r,F)+T(r,G)+T(r,H)$ と書くことにします. 記号 $S^*(r)$ で測度有限な除外区間の外で $o(1)T^*(r)$, $r\to\infty$, を満たす量とします. 有理形函数 f_1, f_2, ..., f_n, $(n\geq 2)$, に対して $W(f_1,f_2,\dots,f_n)$ で Wronskian 行列式を表すこととして,

$$\Delta(z)=W(F(z),G(z),H(z))/(F(z)G(z)H(z))$$

とおきます. また, この講演を通して f^n, g^n, h^n は一次独立であると仮定しておきます.

Theorem. $n\geq 7$ とする. 函数方程式 (1) が超越的有理型函数解 f, g, h を持つとする. このとき,

$$\frac{n-6}{n}T^*(r)\leq\frac{6}{n-2}N\left(r,\frac{1}{\Delta}\right)+S^*(r).$$

が成り立つ.

$n\geq 9$ では超越的有理型解が存在しないことが示されています [2]. 超越的有理型解の存在については, 最近の研究で $n\leq 6$ の場合は存在例があげられていますから, $n=7$ および $n=8$ についてが未解決です. 上記の定理を導くときに得られた値分布的な評価式を用いることで, $n=8$ について次のことがわかります.

函数方程式 $f^8+g^8+h^8=1$ が超越的有理型解を持つとすると, f, g, h に対してある small な函数 $a(z)$ が存在して f, g, h は微分方程式

$$W(f^8,g^8,h^8)=a(z)(f(z)g(z)h(z))^6,$$

を満たす.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30D35.
Key words and phrases. Meromorphic functions, Fermat type functional equations, Value distribution theory, Complex differential equations .

整函数解については, $n \geq 7$ では超越的整函数解が存在しないことが示されています. 超越的整函数解の存在については, 最近の研究で $n \leq 5$ では存在例があげられています. ですから, $n = 6$ のときのみ未解決です. 同様の方法によって, 函数方程式 $f^6 + g^6 + h^6 = 1$ が超越的整函数解を持つとすると, f, g, h に対してある small な函数 $a(z)$ が存在して f, g, h は微分方程式

$$W(f^6, g^6, h^6) = a(z)(f(z)g(z)h(z))^4,$$

を満たすことが示されます.

REFERENCES

[1] Gundersen, G. G., Complex functional equations, to appear in University of Joensuu Publications in Sciences.

[2] Hayman, W. K., Waring's Problem für analytische Funktionen, Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. kl. Sitzungsber (1985), 1–13.

[3] Ishizaki, K., A note on the functional equation $f^n + g^n + h^n = 1$ and some complex differential equations, to appear in Computional Methods and Function Theory.

[4] Toda, N., On the functional equation $\sum_{i=0}^{p} a_i f_i^{n_i} = 1$, Tohoku, Math. J. 23 (1971), 289–299.

[5] Yu, K.-W. and C.-C. Yang, A note for Waring's type of equations for a ring of meromorphic functions, to appear in Indian J. Pure Appl. Math.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS NIPPON INSTITUTE OF TECHNOLOGY 4-1 GAKUENDAI MIYASHIRO MINAMISAITAMA SAITAMA 345-8501, JAPAN

E-mail address: `ishi@nit.ac.jp`

4 Inverse functions of the Grötzsch and the Teichmüller modulus functions

YAMASHITA, Shinji 山下慎二 (都立大 理)

The disk $D = \{z;\ |z| < 1\}$ in the complex plane $\mathbf{C} = \{z;\ |z| < +\infty\}$, slit along the closed interval $[0, r] = \{x;\ 0 \leqslant x \leqslant r\}$ for $0 < r < 1$, is conformally mapped onto the ring domain $\{z;\ 1 < |z| < e^{\mu(r)}\}$. Grötzsch's modulus function $\mu(r)$ is strictly decreasing from $+\infty$ to 0 as r increases from 0 to 1, and μ admits the inverse function ν defined in $(0, +\infty)$. On the other hand, $\mathbf{C}$ minus the intervals $[-1, 0]$ and $[t, +\infty)$, $t > 0$, is conformally mapped onto $\{z;\ 1 < |z| < e^{T(t)}\}$, where $T(t) = 2\mu(1/\sqrt{1+t})$. The inverse of Teichmüller's modulus function T is $S(x) = \nu(x/2)^{-2} - 1$, $x > 0$.

Let σ_n be the n times composed function of $\sigma_1(r) = 2\sqrt{r}/(1+r)$, $r \geqslant 0$. For a natural number n and for a real constant $\beta \neq 0$ with $\beta \geqslant -2$, we shall estimate the function $\Delta_{n,\beta}(x)$ of $x > 0$ which appears in the identity

$$\nu(x)^\beta = \sigma_n\Big(4e^{-2^n x}\Big)^\beta + \Delta_{n,\beta}(x) e^{-(\beta+2^{n+1})x}.$$

First, $-2^{2\beta-n+4} < \beta^{-1}\Delta_{n,\beta}(x) < 0$ for $x > 2^{1-n}\log 2$; secondly,

$$2^{2^{1-n}\beta+4}\Big(\sigma_n(\sqrt{2})^\beta - 1\Big) < \Delta_{n,\beta}(x) < 2^{2^{1-n}\beta+4}\Big(1 - \sigma_n(4)^\beta\Big)$$

for $x \leqslant 2^{1-n}\log 2$ with $\beta > 0$; finally, for $x \leqslant 2^{1-n}\log 2$ with $-2 \leqslant \beta < 0$, the function $\Delta_{n,\beta}(x)$ increases from $1 - \sigma_n(4)^\beta < 0$ to the positive quantity

$$2^{2^{1-n}\beta+4}\Big(\nu(2^{1-n}\log 2)^\beta - 1\Big) \quad \Big(< 2^{2^{1-n}\beta+4}\Big(\sigma_n(\sqrt{2})^\beta - 1\Big)\Big)$$

as x increases from 0 to $2^{1-n}\log 2$.

The case where $\beta = 1$ or $\beta = -2$ is of use for approximating ν or S in terms of algebraic functions $\sigma_n\Big(4e^{-2^n x}\Big)$ or $\sigma_n\Big(4e^{-2^{n-1}x}\Big)^{-2} - 1$ of e^x, respectively.

A special emphasis is placed on ν and S because the function $\varphi_K(r) = \nu(\mu(r)/K)$ of r with $0 \leqslant r < 1$ for a fixed $K \geqslant 1$, and the function $\lambda(K, t) = S\Big(2K\mu(1/\sqrt{1+t})\Big)$ of two variables $K \geqslant 1$ and $t \geqslant 0$, where $\varphi_K(0) =$

$\lambda(K, 0) = 0$ as definition, are important in Geometric Function Theory; see [LV, p. 64, Theorem 3.1] for $\varphi_K(r)$, and [LV], [LVV] for $\lambda(K) = \lambda(K, 1)$. The function $\lambda(K)$ of $K \geqslant 1$ appears in the sharp inequality [LV, p. 81, (6.6)] for the boundary values of a K-quasiconformal self-mapping of the upper half-plane preserving the point at infinity.

It will be proved that

$$1.2425... < \left(\lambda(K) - 16^{-1}e^{\pi K} + 2^{-1}\right)e^{\pi K} < 1.2504...$$

for $K \geqslant 1$. Earlier and weaker estimates are in

$$1 < \left(\lambda(K) - 16^{-1}e^{\pi K} + 2^{-1}\right)e^{\pi K} < 2$$

for $K \geqslant 1$; see [LVV, pp. 12–13] and [AVV, p. 7].

G. J. Martin's Schottky-type theorem [M, Theorem 1.1] is of particular interest. Namely, for f holomorphic in D with $f(D) \subset \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$, the inequality $|f(z)| \leqslant \lambda(K, t)$ for $z \in D$ holds, where $K = (1 + |z|)/(1 - |z|)$ and $t = |f(0)|$. See also [Y].

References

[AVV] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy, and M. Vuorinen, *Distortion functions for plane quasiconformal mappings.* Israel J. Math. 62 (1988), 1–16.

[LV] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1973.

[LVV] O. Lehto, K. I. Virtanen, and J. Väisälä, *Contributions to the distortion theory of quasiconformal mappings.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 273 (1959), 1–14.

[M] G. J. Martin, *The distortion theorem for quasiconformal mappings, Schottky's theorem and holomorphic motions.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1095–1103.

[Y] S. Yamashita, *Extremals for families of plane quasiconformal mappings.* to be published in Journ. Ineq. & Appl.

"No profit grows where is no pleasure ta'en."

—W. Shakespeare: The Taming of the Shrew, Act I, Scene i

5

Extreme discrete groups for Jørgensen's inequality

Changjun Li (Shizuoka University),
Makito Oichi (Shizuoka University) and Hiroki Sato (Shizuoka University)

ABSTRACT. In this talk we will state extreme discrete groups (Jørgensen groups) of parabolic type for Jørgensen's inequality.

THEOREM A (Jørgensen [**1**]). *Suppose that the Möbius transformations A and B generate a non-elementary discrete group. Then*

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1.$$

The lower bound 1 *is best possible.*

DEFINITION 1. Let A and B be Möbius transformations. The *Jørgensen number* $J(A,B)$ of the ordered pair (A,B) is defined as

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|.$$

We denote by Möb the set of all Möbius transformations.

DEFINITION 2. Let G be a non-elementary two-generator subgroup of Möb. The *Jørgensen number* $J(G)$ for G is defined as follows:

$J(G) := \inf\{J(A,B) \mid A \text{ and } B \text{ generate } G\}$.

DEFINITION 3. A non-elementary two-generator subgroup G of Möb is a *Jørgensen group* if G is a discrete group with $J(G) = 1$.

If $\langle A,B\rangle$ is a Jørgensen group such that A ia parabolic, then we call $G = \langle A,B\rangle$ a *Jørgensen group of parabolic type.* By normalization we can represent this group as follows:

$G_{\mu,\sigma} = \langle A, B_{\mu,\sigma}\rangle$ be the group generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,\mu} = \begin{pmatrix} \mu\sigma & \mu^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & \mu\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $\mu \in \mathbf{C}$.

Then it gives rise to the following problems.

PROBLEM. Find all Jørgensen group of parabolic type.

Here we consider the case of $\mu = ik$ ($k \in \mathbf{R}$). Namely, we consider two-generator groups $G_{\sigma,ik} = \langle A, B_{ik,\sigma}\rangle$ generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,ik} = \begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbf{R}$.

Let C be the following cylinder: $C = \{(\sigma, ik) \mid |\sigma| = 1,\ k \in \mathbf{R}\}$.

THEOREM B (Sato [**3**]). *Every Jørgensen group of type $G_{\sigma,ik}$ lies on the cylinder C.*

By Theorem B we consider two-generator groups $G_{\sigma,\mu} = \langle A, B_{\sigma,\mu}\rangle$ with $\sigma = -ie^{i\theta}$ ($0 \le \theta < 2\pi$) and $\mu = ik$ ($k \in \mathbf{R}$). For simplicity we set $B_{\theta,ik} := B_{\sigma,ik}$ and $G_{\theta,ik} = \langle A, B_{\sigma,ik}\rangle$ for $\sigma = -ie^{i\theta}$:

Here we will state that we found all Jørgensen groups in the case where $0 \le \theta \le 2\pi$ and $|k| < \sqrt{3}/2$.

THEOREM (Li - Oichi - Sato [**2**]). *There are sixteen Jørgensen groups in $D = \{(\theta, k) \in \mathbf{R} \mid 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le k \le \sqrt{3}/2\}$, in which nine groups are Kleinian groups of the first kind and seven groups are of the second kind.*

Finally we give the following conjecture:

CONJECTURE. For any Jørgensen group $G_{\sigma,\mu}$ ($\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \mu \in \mathbf{C}$) of parabolic type, there exists a Jørgensen group $G_{\nu,ik}$ ($\nu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbf{R}$) such that $G_{\nu,ik}$ is conjugate to $G_{\sigma,\mu}$.

References

[1] T. Jørgensen, *On discrete groups of Möbius transformations*, Amer. J. Math. **98** (1976) 739-749.

[2] C. Li, M. Oichi and H. Sato, *Extreme discrete groups for Jørgensen's inequality*, in preparation.

[3] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, 2000, 271-287.

6 Limit sets of Teichmüller modular groups with no interior points

Ege Fujikawa
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

For a hyperbolic Riemann surface R, the reduced Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is a group of automorphisms on the reduced Teichmüller space $T^{\#}(R)$. The action of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is isometric with respect to the Teichmüller distance d_T. If R is of finite type, then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ acts properly discontinuously on $T^{\#}(R)$. However, if R is of infinite type, then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ does not act properly discontinuously on $T^{\#}(R)$, in general. On the basis of this fact, in [1], we have introduced the following notions and observed some properties.

Definition 1 We say that a point p in $T^{\#}(R)$ is a *limit point* for a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ if there exists a sequence $\{\chi_n\}$ of distinct elements of G such that $\lim_{n\to\infty} d_T(\chi_n(p), p) = 0$. The set of the limit points is called the *limit set* of G, and denoted by $\Lambda(G)$. The complement $T^{\#}(R) - \Lambda(G)$ of the limit set is denoted by $\Omega(G)$, and called the *region of discontinuity* of G.

Lemma 1 ([1]) *$\Lambda(G)$ is G-invariant and closed.*

Lemma 2 ([1]) *For a subgroup $G \subset \mathrm{Mod}^{\#}(R)$, $\Lambda(G) - \Lambda^2_\infty(G)$ does not have an isolated point. Here, $\Lambda^2_\infty(G)$ is the set of points $p \in \Lambda(G)$ such that $\mathrm{Stab}_G(p)$ consists of infinitely many elements and all elements in $\mathrm{Stab}_G(p)$ are of finite order.*

We consider the following problem on a property of the limit set, which is stated in [1].

Problem If both $\Omega(\mathrm{Mod}^{\#}(R))$ and $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R))$ are not empty, then $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R))$ is nowhere dense in $T^{\#}(R)$.

In this talk, we show a partial solution of this problem.

Definition 2 For a positive constant M, we say that a point $p \in R$ belongs to $R_M \subset R$ if there exists a non-trivial simple closed curve c_p containing p such that the hyperbolic length of c_p is less than M.

Definition 3 We say that R satisfies the *lower bound condition* if there exists a positive constant ϵ such that the R_ϵ consists only of cusp neighborhoods. Further we say that R satisfies the *upper bound condition* if there exist a positive constant M and a connected component R_M^* of R_M such that a homomorphism of $\pi_1(R_M^*)$ to $\pi_1(R)$ that is induced by the inclusion map of R_M^* into R is surjective.

Proposition ([1]) If R satisfies the lower and upper bound conditions, then $\Omega(\mathrm{Mod}^{\#}(R)) \neq \emptyset$.

We state our main theorem.

Theorem *Let R be a Riemann surface that satisfies the lower and upper bound conditions. If $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R)) \neq \emptyset$, then $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R))$ is nowhere dense in $T^{\#}(R)$.*

References

[1] E. Fujikawa, Limit sets and regions of discontinuity of Teichmüller modular groups, preprint.

7

ON LIPSCHITZ CONTINUITY OF QUASICONFORMAL MAPPINGS

Vladimir Gutlyanskiĭ
Institute of Applied Mathematics and Mechanics, NAS of Ukraine

須川 敏幸
広島大学大学院理学研究科

K-擬等角写像 f が局所的には $(1/K)$-Hölder 連続であることはよく知られている。これは、いわば歪曲度関数

$$K_f(z) = \frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}$$

の L^∞-ノルムによる評価である。ここに、$\mu_f = \bar{\partial} f/\partial f$ は f の Belrami 係数とする。もし、この K_f の L^p-ノルムによる評価が与えられれば、このような結果の精密化と言えるであろう。ここではそのような評価を実際に与え、さらにそれを用いて擬等角写像がある点において Lipschitz 連続になるための十分条件を与える。

局所的な話なので、以下では $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ を単位円板とし、$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を K-擬等角埋め込みで $f(0) = 0$ と正規化されていると仮定する。(注意：従って、$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は全射とは限らないが、Riemann の写像定理と Schwarz の補題を用いれば全射であることを仮定してもそれほど一般性を失わない。) まず K_f の円環上での平均と言える

$$P_f(r,R) = \frac{1}{2\pi \log(R/r)} \iint_{r<|z|<R} \frac{K_f(z)}{|z|^2} dxdy, \quad 0 < r < R \le 1$$

を考える。$1 \le P_f(r,R) \le K$ であることに注意されたい。

定理 1. **$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を正規化された K-擬等角埋め込みとすると、**

$$|f(z)| \le C \left(\frac{|z|}{R}\right)^{1/P_f(|z|,R)}, \quad |z| < R$$

が $R \le 1$ に対して成り立つ。ここに C は 64 以下の絶対定数である。

次に、$K_f - 1$ の円板上の平均値を定義する。

$$\omega_f(t) = \frac{1}{\pi t^2} \iint_{|z|<t} (K_f(z) - 1) dxdy, \quad 0 < t \le 1.$$

従って $0 \le \omega_f(t) \le K - 1$ が任意の t について成り立つ。これについて、次の評価が成立する。

定理 2. **$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を正規化された K-擬等角埋め込みとすると、**

$$|f(z)| \le C(K)|z| \exp\left(\int_{|z|}^{1} \frac{\omega_f(t)}{t} dt\right), \quad 0 < |z| < 1$$

が成り立つ。ここに $C(K)$ は K にのみ依存する定数である。

これより直ちに次の系が得られる。

系 3. ω_f **が** Dini **条件を満たせば、上の** f **は原点において** Lipschitz **連続である。**

上で述べた主張は、実は K_f の代わりに次の

$$D_{f,0}(z) = \frac{\left|1 - \mu_f(z)\frac{\bar{z}}{z}\right|^2}{1 - |\mu_f(z)|^2}$$

を考えても同様に成り立つことが分かるが、詳細については [1] を見られたい。

References

[1] Gutlyanskiĭ, V. and Sugawa, T. On Lipschitz Continuity of Quasiconformal Mappings, *Report. Univ. Jyväskylä*, **83** (2001), 91–108.

8

SOME INEQUALITIES FOR THE POINCARÉ METRIC OF PLANE DOMAINS

須川 敏幸　広島大学大学院理学研究科

MATTI VUORINEN　ヘルシンキ大学

この講演では平面領域の双曲計量および双曲距離の（主に下からの）効果的な評価法について述べ、いくつかその応用を紹介する。

(双曲的と呼ばれる) 境界が2点以上からなる平面領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ の双曲計量 (Poincaré 計量) を $\rho_\Omega(z)|dz|$ により表す。ただし、ここに双曲計量とは完備な等角的リーマン計量で Gauss 曲率が -4 であるもののことをいう。また、その測地線の長さから自然に定義される距離を双曲距離 (Poincaré 距離) と呼び、$d_\Omega(z_1, z_2)$ のように表す。このようなものは、解析的普遍被覆写像を用いて記述することができるが、そのような写像を具体的に書き表したり、数値的にせよ計算するのは特殊な場合を除き非常に困難である。従って、計量の密度や、距離を評価するということが実際的な問題となる。その際、重要な役割を果たすのが次の比較原理である。すなわち、Ω_0, Ω_1 を双曲的平面領域で $\Omega_0 \subset \Omega \subset \Omega_1$ を満たすものとするとき、

$$\rho_{\Omega_1}(z) \le \rho_\Omega(z) \le \rho_{\Omega_0}(z), \quad d_{\Omega_1}(z_1, z_2) \le d_\Omega(z_1, z_2) \le d_{\Omega_0}(z_1, z_2)$$

が $z, z_1, z_2 \in \Omega_0$ について成り立つ。従って与えられた Ω に対して計算しやすい上のような Ω_0, Ω_1 を見つければよい、ということになる。Ω_0 としてよく使われるのが円板や、円環であり、Ω_1 としては2点穴あき平面 $\mathbb{C}_{a,b} = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ が便利である。例えば $\lambda_{a,b} := \rho_{\mathbb{C}_{a,b}}$ の表示は、Agard [1] によりいくつか得られている。また、$\lambda = \lambda_{1,0}$ と置けば $|b-a|\lambda_{a,b}(z) = \lambda((z-a)/(b-a))$ であり、λ については $\lambda(-|z|) \le \lambda(z) \le \lambda(|z|)$ であることが知られおり、$\lambda(-x), x > 0,$ についてはかなり精密な評価も知られている。

本講演では、境界点 $a \in \partial\Omega$ を固定して得られる次のような境界の大きさを測る量

$$m_{\partial\Omega}(a, t) = \min\left\{\left|\log|b-a| - t\right|; b \in \partial\Omega\right\}$$

を $t \in \mathbb{R}$ について考察し、これを用いて双曲計量の具体的な評価を与える。ここで重要なことは、$m_{\partial\Omega}(a, t)$ が a を固定すれば t に関して 1-Lipschitz 連続になることである。また、$\partial\Omega$ の一様完全性は、$m_{\partial\Omega}(a, t)$ が $a \in \partial\Omega, t \in (0, \mathrm{diam}\partial\Omega)$ に関して一様に有界であることとして特徴づけられる。このような考察の応用として、最近の Gardiner-Lakic [2] による次の結果の直接的証明が得られる。

定理 1. 各点 $z \in \Omega$ に対して $\sigma_\Omega(z) = \sup\{\lambda_{a,b}(z); a, b \in \partial\Omega\}$ と定義する。すると $\sigma_\Omega(z) \le \rho_\Omega(z) \le C\sigma_\Omega(z)$ が、ある絶対定数 $C > 1$ について成立する。

この定理を満足する絶対定数のうち最小のものを C_1 と書けば、$C_0 \le C_1 \le 2C_0 + \pi/4 \approx 10.3246$ となることが証明から分かる。ただし、ここに $C_0 = \Gamma(1/4)^4/4\pi^2 \approx 4.37688$ とする。

さらに、このような考察を用いて双曲距離の下からの評価を与えることもできる。奇関数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$\varphi(t)=\log\left(\frac{\mathcal{K}(1/(1+e^{-t/2}))}{\mathcal{K}(1/(1+e^{t/2}))}\right)$$

によって定める。ただしここに $\mathcal{K}$ は第一種完全楕円積分、すなわち

$$\mathcal{K}(x)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x\,t^2)}},\quad 0<x<1,$$

とする。この関数について、$t>0$ において

$$\log\left(1+\frac{t}{2C_0}\right)\le\varphi(t)\le\log\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)$$

が成り立つことが分かる。これを用いて次の定理が示される。

定理 2. N **を自然数または** ∞ **とし、** $t_j,\ 1\le j<N$ **を単調増加実数列、** $t_0=-\infty, t_N=\infty$ **とする。領域** $\Omega\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ **の補集合が各** j **に対してある点** a_j **で** $|a_j|=e^{t_j}$ **なるものを含むとする。任意の** $|z_1|\le|z_2|$ **を満たす 2 点** $z_1,z_2\in\Omega$ **に対して、整数** $1\le k\le l<N$ **を** $(t_{k-1}+t_k)/2\le\log|z_1|\le(t_k+t_{k+1})/2$ **かつ** $(t_{l-1}+t_l)/2\le\log|z_2|\le(t_l+t_{l+1})/2$ **を満たすように取れば、**

$$d_\Omega(z_1,z_2)\ge\frac{1}{2}\varphi\bigl(t_k-\log|z_1|\bigr)+\sum_{n=k+1}^{l}\varphi(t_n-t_{n-1})+\frac{1}{2}\varphi\bigl(\log|z_2|-t_l\bigr)$$

が成り立つ。逆に、 $D=\mathbb{C}\setminus\{e^{t_j};0\le j<N\}$ **とすれば、**

$$\frac{d_D(-|z_1|,-|z_2|)}{C_1}\le\frac{1}{2}\varphi\bigl(t_k-\log|z_1|\bigr)+\sum_{n=k+1}^{l}\varphi(t_n-t_{n-1})+\frac{1}{2}\varphi\bigl(\log|z_2|-t_l\bigr)$$

が成り立つ。ここに C_1 **は先の定理を満たす最小の絶対定数とする。**

なお、$\varphi(t)/t$ は $t\ge0$ において単調減少、従って $\varphi(t)$ は劣加法的であると予想される。上記の定理を用いて、Littlewood 型の結果などが導かれる。

References

[1] Agard, S. Distortion theorems for quasiconformal mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math.*, **413** (1968), 1–12.

[2] Gardiner, F. P. and Lakic, N. Comparing Poincaré densities, *Ann. of Math.*, **154** (2001), 245–267.

9

題	Multipliers On Weighted Dirichret Spaces について

氏名	米田 力生	所属	東京都立工業高等専門学校

D を複素平面C上の開単位円盤とする。$H(D)$はD上の解析関数全体からなる空間とする。Bloch 空間Bは$\sup\{(1-|z|^2)\,|f'(z)|\,; z\in D\} < +\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。$\alpha \geq 1$に対して，α-Bloch 空間B^{α}は$\sup\{(1-|z|^2)^{\alpha}\,|f'(z)|\,; z\in D\} < +\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。$\omega(z)$は、$\omega(|z|)\to\infty$ $(|z|\to 1^-)$かつ　$(1-|z|^2)^{\beta}\omega(|z|)\to 0$ $(|z|\to 1^-)$ for any $\beta>0$を満たす positive weighted function とする。$\alpha>1$に対して，荷重付き Bloch 空間B_{ω}は $\sup\{(1-|z|^2)^{\alpha}\omega(z)\,|f'(z)|\,; z\in D\} < +\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とし、荷重付き Dirichret 空間D_{ω}は $\int_D (1-|z|^2)^{\alpha}\omega(z)|g'(z)|^2 dA(z) < +\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。

D上の解析関数gに対して，作用素I_g , J_g は

$$I_g(h)(z) := \int_0^z g(\zeta)h'(\zeta)d\zeta\ ,\ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

と定義される。もし$g(z)=z$ならば，J_gは the integration operator であり，もし $g(z)=\log\frac{1}{1-z}$ならば，J_g は the Cesáro operator である。X, Yを Banach 空間とする。関数fに対して、 multiplier of X into Yは $fg\in Y$ for all g in Xを満たすものと定義される。 このとき $fX\subset Y$と書く。上で定義された作用素I_g , J_g は、multiplier と密接な関係がある。本研究では、この観点から荷重付き Dirichret 空間、荷重付き Bloch 空間上の multiplier　について研究する。そして、次のような結果を得た。

定理 1. J_g がB_{ω} 上で有界である必要十分条件は

$$g\in B$$

である。

系 1. g が multiplier of B_ω into B_ω である必要十分条件は

$$g \in H^\infty$$

である。

定理 2. J_g が D_ω 上で有界である必要十分条件は

$$g \in B$$

である。

系 2. g が multiplier of D_ω into D_ω である必要十分条件は

$$g \in H^\infty$$

である。

また，荷重付き BMOA 上でも同様の結果を得ることが出来た。

References

[1] R.Yoneda, Integration operators on weighted Bloch space, Nihonkai Math.J.No.2,pp123-133.

[2] R.Yoneda, Essential Norms Of Integration Operators And Multipliers On Weighted Bloch Spaces, in preprint.

[3] R.Yoneda, Multipliers On Weighted Dirichret Spaces, in preprint.

[4] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.

10　Sierpiński ガスケット上の調和関数

倉田　久靖　　米子高専

平面上に正三角形 $p_1p_2p_3$ を取る．写像 $F_i(p) = (p - p_i)/2 + p_i$ $(i = 1, 2, 3)$ について、$K = \bigcup_{i=1}^{3} F_i(K)$ を満たす空でないコンパクト集合 K が唯一つ存在する．それを Sierpiński ガスケットという．$\{1, 2, 3\}$ をアルファベットとする長さ n の単語の全体を X_n とし、$x = a_1 \ldots a_n \in X_n$ について、$F_x = F_{a_1} \circ \cdots \circ F_{a_n}$ とおく．すべての $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ について

$$4\varphi(F_x(q_1)) = \varphi(F_x(p_2)) + \varphi(F_x(p_3)) + \varphi(F_x(q_2)) + \varphi(F_x(q_3))$$
$$4\varphi(F_x(q_2)) = \varphi(F_x(p_3)) + \varphi(F_x(p_1)) + \varphi(F_x(q_3)) + \varphi(F_x(q_1))$$
$$4\varphi(F_x(q_3)) = \varphi(F_x(p_1)) + \varphi(F_x(p_2)) + \varphi(F_x(q_1)) + \varphi(F_x(q_2))$$

（ただし $q_1 = (p_2 + p_3)/2$ など）を満たす K 上の連続関数 φ を調和関数と呼ぶ（[1]）．

定理 A ([1])．$S = \{p_1, p_2, p_3\}$ とおき、S 上の任意の関数 φ_0 を取る．S で $\varphi = \varphi_0$ を満たす調和関数 φ がただ一つ存在する．

ここで、この調和関数の別な表現を与える．$x, y \in X_n$ $(x \neq y)$ に対し、$F_x(K) \cap F_y(K) \neq \emptyset$ となるとき、x と y を辺で結び X_n をグラフと考える．各辺の長さを 2^{-n} とし、これから誘導される距離 d により X_n をネットワークと考えれば、X_n 上の関数の調和性が定義される．点列 $\xi = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ で、$x_n \in X_n$、$F_{x_{n+1}}(K) \subset F_{x_n}(K)$ となるもの全体を Ξ とする．$\xi = (x_n)_n$、$\eta = (y_n)_n$ について、$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ のとき $\xi \sim \eta$ とする同値関係を考えれば、その同値類の全体 $\tilde{\Xi}$ は Sierpiński ガスケット K と同一視できる．p_i $(i = 1, 2, 3)$ に対応する $\tilde{\xi}_i$ を取り、その代表元 $\xi_i = \left(x_n^{(i)}\right)_n$ について、$u_0\left(x_n^{(i)}\right) = \varphi_0(p_i)$ とおく．X_n 上の関数 u で、$\left\{x_n^{(i)}\right\}_i$ において $u = u_0$ を満たし、その他の点で調和なものを考える．u はすべての n について定義されているとしてよい．

定理 1．$S = \{p_1, p_2, p_3\}$ とおき、S 上の任意の関数 φ_0 を取る．上記の u を取ると、任意の $\tilde{\xi} \in \tilde{\Xi}$ と、その代表元 $\xi = (x_n)_n$ について、$\varphi\left(\tilde{\xi}\right) := \lim_{n\to\infty} u(x_n)$ が存在し、それは代表元の取り方によらない．φ は [1] の意味で調和である．逆に [1] の意味の調和関数はこの形に書ける．

続いてこれを一般化する．

定理 2. S を $\{F_x(p_i); x \in \bigcup_n X_n, i=1,2,3\}$ の有限部分集合とし、S 上の任意の関数 φ_0 を取る．上記と同様に u を取ると、任意の $\tilde{\xi} \in \tilde{\Xi}$ と、その代表元 $\xi = (x_n)_n$ について、$\varphi\left(\tilde{\xi}\right) := \lim_{n\to\infty} u(x_n)$ が存在し、それは代表元の取り方によらない．

同様の方法で図 1 のような図形の調和関数も考えられる．図のように φ_0 を取れば、φ は長方形部分で 0、線分部分では長方形からの距離に比例した値になる．

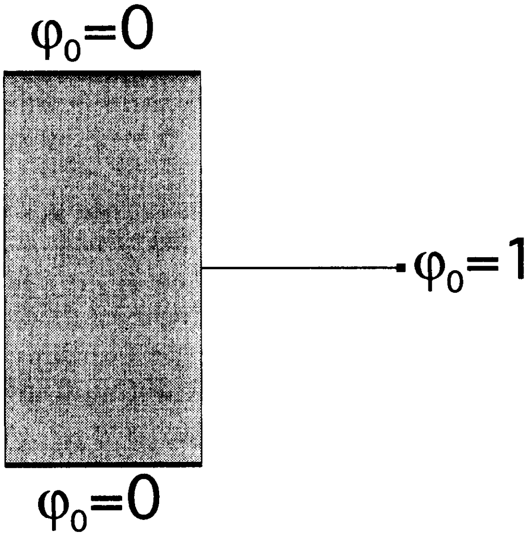


図 1

参考文献

1. J. Kigami, *A harmonic calculus on the Sierpiński spaces*, Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 259–290.

2. ______, *Analysis on fractals*, Cambridge University Press, 2001.

11

Sierpiński gasket 上の Martin 距離の Lipschitz 同値性

今井　淳　京都大学大学院情報学研究科
川崎 泰裕　NTT DoCoMo 九州
佐藤　坦　九州大学大学院数理学研究院

アルファベット $\mathcal{A} := \{1, 2, \ldots, N\}$ $(N \geq 2)$ から構成される語空間を $\mathcal{W} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ とする. $\mathcal{W}$ 上に或る特別な Markov 連鎖を定義し, その Martin 核を $k(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ とし, $d(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x} \in \mathcal{W}$ の長さとする時, $\mathcal{W}$ 上の距離:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |2^{-d(\mathbf{x})} - 2^{-d(\mathbf{y})}| + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2N)^n} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}^n} |k(\mathbf{u}, \mathbf{x}) - k(\mathbf{u}, \mathbf{y})|$$

による $\mathcal{W}$ の完備化を $\overline{\mathcal{W}}$ とする. この時 $\mathcal{W}$ 上の距離 ρ は自然に $\overline{\mathcal{W}}$ 上の距離に拡張されるので, それを再び ρ で表す.

Denker と Sato は [1] で, $\overline{\mathcal{W}}$ の境界集合 $\partial\overline{\mathcal{W}}$ が $(N-1)$ 次元の Sierpiński gasket $\mathcal{S}$ と同一視される (同相) ことを示し, 更に [2] で $\rho(\xi, \eta)$ と Euclid 距離 $\|\xi - \eta\|$ との比較, 即ち N にのみ依って定まる定数 C_N が存在して, $\|\xi - \eta\|$ の十分小さなとき

$$\frac{1}{32}\|\xi - \eta\| \log_2 \frac{1}{\|\xi - \eta\|} \leq \rho(\xi, \eta) \leq \frac{12}{C_N}\|\xi - \eta\| \log_2 \frac{C_N}{\|\xi - \eta\|}, \quad \xi, \eta \in \mathcal{S}$$

の成り立つことを示した.

しかしここで問題が起こる. それは, 距離 $\rho(\xi, \eta)$ は $\mathcal{S}$ 上の函数族 $\{k(\mathbf{u}, \cdot) : \mathbf{u} \in \mathcal{W}\}$ の各点収束位相を定めるが, 逆にこの各点収束位相は任意の

$$\mathbf{a} = \{a_n\}_n \in \ell_1^+ := \left\{\mathbf{a} = \{a_n\}_n : \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty,\ a_n > 0 \text{ for } \forall n \geq 0\right\}$$

に対して定まる距離:

$$\rho_{\mathbf{a}}(\xi, \eta) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{N^n} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}^n} |k(\mathbf{u}, \xi) - k(\mathbf{u}, \eta)| \qquad \xi, \eta \in \mathcal{S}$$

によって実現される. この場合, 全ての $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ について唯一つの位相を定めるが, 互いに Lipschitz 同値であるとは限らない. しかし, フラクタル解析における重要な性質, 例えばハウスドルフ次元などの特性量は Lipschitz 同値な距離でないと保存されない. そこで $\{\rho_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \ell_1^+\}$ の Lipschitz 同値性が問題となる.

本講演ではまず $\{\rho_{\mathbf{a}}(\xi,\ \eta) : \mathbf{a} \in \ell_1^+\}$ の Lipschitz 同値性を特徴付け, 更に Euclid 距離 $\|\xi - \eta\|$ と Lipschitz 同値になる為の必要十分条件を与える. 実際, 次の定理が成り立つことを報告する.

定理 1. $\mathbf{a} = \{a_n\}_n, \mathbf{b} = \{b_n\}_n \in \ell_1^+$ とする. このとき, $\rho_{\mathbf{a}}$ と $\rho_{\mathbf{b}}$ が Lipschitz 同値となる為の必要十分条件は

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{G_{\mathbf{a}}(n)}{G_{\mathbf{b}}(n)} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{G_{\mathbf{a}}(n)}{G_{\mathbf{b}}(n)} < \infty$$

である. 但し

$$G_{\mathbf{a}}(n) := \sum_{k=1}^{n} 2^{k-n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

定理 2. $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ とすると, 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{S}$ に対して

$$\|\xi - \eta\| \le \frac{16}{G_{\mathbf{a}}(1)} \rho_{\mathbf{a}}(\xi,\ \eta)$$

が成り立つ, 即ち, Euclid 距離 $\|\xi - \eta\|$ は全ての $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ について $\rho_{\mathbf{a}}$-Lipschitz 連続である.

定理 3. $\mathbf{a} \in \ell_1^+$ とする. この時 $\mathbf{a} = \{a_n\}_n$ について, $\rho_{\mathbf{a}}$ と, Euclid 距離 $\|\xi - \eta\|$ が Lipschitz 同値となる為の必要十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n < \infty$ となることである.

REFERENCES

1. M. Denker and H. Sato: Sierpiński gasket as a Martin boundary I: Martin kernels. *Potential Anal.* **14** (2001), 211–232.
2. ______: Sierpiński gasket as a Martin boundary II: The intrinsic metric. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **35** (1999), 769–794.

電子メールアドレス:
今井　aimai@acs.i.kyoto-u.ac.jp
川崎　y4-kawasaki@pop02.odn.ne.jp
佐藤　sato@math.kyushu-u.ac.jp

12
ソボレフ関数のリース分解と無限遠点での極限値について

水田　義弘　　　広島大学総合科学部

下村　哲　　　広島大学教育学部

半空間 $D = \{x = (x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_n > 0\}$ $(n \geqq 2)$ 上で定義されたソボレフ関数 u で，条件

$$(1) \qquad \int_D |\nabla u(x)|^p x_n^\gamma dx < \infty$$

を満足する（局所 p-細連続な）ものの全体を $\mathbf{D}^{p,\gamma}$, ほとんどいたるところの境界点で垂直方向の極限値零をもつ $\mathbf{D}^{p,\gamma}$ に属するソボレフ関数の全体を $\mathbf{D}_0^{p,\gamma}$, $\mathbf{D}^{p,\gamma}$ に属する D 上の調和関数の全体を $\mathbf{HD}^{p,\gamma}$ で表す．ここに，$\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$, $1 < p < \infty$, $-1 < \gamma < p-1$ とする．

Deny-Lions [2] と関連して，条件（1）を満足する D 上のソボレフ関数 $u \in \mathbf{D}^{p,\gamma}$ は,

$$(2) \qquad u = u_0 + h$$

と一意に分解される（**リース分解**）．ここに, $u_0 \in \mathbf{D}_0^{p,\gamma}$, $h \in \mathbf{HD}^{p,\gamma}$ である．ソボレフ関数 $u \in \mathbf{D}^{p,\gamma}$ は無限遠点で細極限値（fine limits）をもつ（Kurokawa-Mizuta [4]）．本講演では，Lelong-Ferrand [5], Essén-Jackson [3], Aikawa [1], Miyamoto-Yoshida [6], Mizuta [7] の研究に関連して，u_0 の無限遠点での minimally fine limits の存在について報告する．

次の核関数を考える:

$$k_{\beta,\gamma}(x,y) = x_n^{1-\beta} y_n^{-\gamma/p} |x-y|^{1-n} |\bar{x}-y|^{-1}$$

ここに，$\bar{x} = (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$ とする．集合 $E \subset D$ が無限遠点で (minimally) $(k_{\beta,\gamma}, p)$-thin であるとは,

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i(n+\gamma-(1-\beta)p)} C_{k_{\beta,\gamma},p}(E_i; D_i) < \infty$$

を満たすときをいう．ここに, $C_{k_{\beta,\gamma},p}$ はリース容量, $E_i = \{x \in E : 2^i \leqq |x| < 2^{i+1}\}$, $D_i = \{x \in D : 2^{i-1} < |x| < 2^{i+2}\}$ とする．

定理 1．$p > 1$, $-1 < \gamma < p-1$, $(1-\beta)p - n < \gamma$, $0 \leqq \beta \leqq 1$ とする．$u \in \mathbf{D}_0^{p,\gamma}$ ならば, 無限遠点で $(k_{\beta,\gamma}, p)$-thin で

$$\lim_{|x|\to\infty, x\in D-E} x_n^{-\beta} |x|^{(n+\gamma-(1-\beta)p)/p} u(x) = 0$$

となる $E \subset D$ が存在する.

可測集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ のルベーグ測度を $|E|$ と表す.

命題 1. $0 \leqq \beta < 1$, $-1 < \gamma < p-1$ とする. (3) が成り立つならば,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|E_i|}{|B_i|} \right)^{(1-(1-\beta)/n)p} < \infty$$

となる. ここに, $E_i = E \cap B_{i+1} - B_i$, $B_i = B(0, 2^i) \cap D$ とする.

定理 2. $p > 1$, $-1 < \gamma < p-1$, $n + \gamma - p > 0$ とする. $h \in \mathbf{HD}^{p,\gamma}$ ならば, ある定数 A に対して,

$$\lim_{|x| \to \infty, x \in D} x_n^{(n+\gamma-p)/p} \{h(x) - A\} = 0$$

となる.

References

[1] H. Aikawa, On the behavior at infinity of non-negative superharmonic functions in a half space, Hiroshima Math. J. **11** (1981), 425-441.

[2] J. Deny and J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier **5** (1955), 305-370.

[3] M. Essén and H.L.Jackson, On the covering properties of certain exceptional sets in a half space, Hiroshima Math. J. **10** (1980), 233-262.

[4] T. Kurokawa and Y. Mizuta, On the order at infinity of Riesz potentials, Hiroshima Math. J. **9** (1979), 533-545.

[5] J. Lelong-Ferrand, Étude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, Ann. Sci. École Norm. Sup. **66** (1949), 125-159.

[6] I. Miyamoto and H. Yoshida, Two criteria of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cone, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[7] Y. Mizuta, On the behavior at infinity of Green potentials in a half space, Hiroshima Math. J. **10** (1980), 607-613.

[8] M. Ohtsuka, Extremal length and precise functions in 3-space, Lecture Notes at Hiroshima University, 1972.

13　単調な重み付きソボレフ関数の Lindelöf 型定理

二村俊英　広島大学大学院・理学研究科
水田義弘　広島大学・総合科学部

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n(n \geq 2)$ の上半空間 $\mathbf{D} = \{x = (x', x_n) : x_n > 0\}$ とする．連続関数 u が $\mathbf{D}$ 上で単調とは，任意の開集合 $G \subset\subset \mathbf{D}$ に対して，

$$\max_{\overline{G}} u = \max_{\partial G} u \qquad \text{かつ} \qquad \min_{\overline{G}} u = \min_{\partial G} u$$

が成り立つときをいう．調和関数，さらには，擬等角写像の成分関数は単調である．単調なソボレフ関数 $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbf{D})$ は $p > n-1$ ならば，$2B \subset \mathbf{D}$ となる任意の半径 r の球 B に対して，

$$|u(x) - u(y)| \leq Mr \left(\frac{1}{r^n} \int_{2B} |\nabla u(z)|^p dz \right)^{1/p} \qquad (\ \forall x, y \in B\ )$$

を満たす．本講演ではこのような不等式を満たす $\mathbf{D}$ 上の関数 u の Lindelöf 型定理を与える．

次のような条件を満たす $\mathbf{R}^n$ 上のボレル測度 μ を考える：

$(\mu 1)$　$\mu(B(x, 2r)) \leq A_1 \mu(B(x, r))$　　$(\ x \in \mathbf{R}^n,\ r > 0\ )$

$(\mu 2)$　$\mu(B(\xi, r)) \geq A_2 (r/R)^s \mu(B(\xi', R))$　　$(\ \xi, \xi' \in \partial\mathbf{D},\ B(\xi, r) \subset B(\xi', R)\ )$

ここで，次のような性質を満たす $\mathbf{D}$ 上の関数 u を考える: D 上の非負関数 $g \in L^p_{loc}(D; \mu)$ と定数 M, $\sigma \geq 1$ が存在して，

$$|u(x) - u(y)| \leq M\rho_{\mathbf{D}}(z) \left(\frac{1}{\mu(\sigma B_z)} \int_{\sigma B_z} g^p d\mu \right)^{1/p} \qquad (\forall x, y \in B_z, \forall z \in \mathbf{D}) \quad (1)$$

が成り立つ．ここで，$B_z = B(z, \rho_{\mathbf{D}}(z)/(2\sigma))$, $\rho_{\mathbf{D}}(z) = z_n$ とする．

定理 1. $\mathbf{D}$ 上の関数 u は条件 (1) を満たし，

$$\int_{\mathbf{D}} g(w)^p d\mu(w) < \infty \qquad (2)$$

とする．ここで

$$E = \left\{ \xi \in \partial\mathbf{D} : \limsup_{r \to 0} \left(r^{-p} \mu(B(\xi, r)) \right)^{-1} \int_{B(\xi, r) \cap \mathbf{D}} g(z)^p d\mu(z) > 0 \right\}$$

とおく．$p > s-1$ のとき，$\xi \in \partial D \setminus E$ に対して，D 内のある曲線 γ に沿っての u の有限な極限値 β が存在するならば，u は ξ で角極限値 β をもつ．

系 1. u を $\mathbf{D}$ 上の単調なソボレフ関数で

$$\int_{\mathbf{D}} |\nabla u(z)|^p z_n^\alpha dz < \infty$$

とする．ここに，$p > n-1$，$0 \leq n + \alpha - p < 1$．ここで，

$$E_{n+\alpha-p} = \left\{ \xi \in \partial\mathbf{D} : \limsup_{r \to 0} r^{p-\alpha-n} \int_{B(\xi,r)\cap\mathbf{D}} |\nabla u(z)|^p z_n^\alpha dz > 0 \right\}.$$

このとき，$\xi \in \partial D \setminus E_{n+\alpha-p}$ に対して，D 内のある曲線 γ に沿っての u の有限な極限値 β が存在するならば，u は ξ で角極限値 β をもつ．

系 2. $1 \leq q < p/(n-1)$，$w \in A_q$，$d\nu(y) = w(y)dy$ とする．u を $\mathbf{D}$ 上の単調なソボレフ関数で

$$\int_{\mathbf{D}} |\nabla u(z)|^p d\nu(z) < \infty$$

とする．ここで，

$$E = \left\{ \xi \in \partial\mathbf{D} : \limsup_{r \to 0} \left(r^{-p} \nu(B(\xi, r)) \right)^{-1} \int_{B(\xi,r)\cap\mathbf{D}} |\nabla u(z)|^p d\nu(z) > 0 \right\}$$

とする．このとき，$\xi \in \partial D \setminus E$ に対して，D 内のある曲線 γ に沿っての u の有限な極限値 β が存在するならば，u は ξ で角極限値 β をもつ．

参考文献

[1] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré, Mem. Amer. Math. Soc. **145** (2000), no. 688.

[2] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Oxford Univ. Press, 1993.

[3] P. Koskela, J. J. Manfredi and E. Villamor, Regularity theory and traces of $\mathcal{A}$-harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 755-766.

[4] H. Lebesgue, Sur le probléme de Dirichlet, Rend. Cir. Mat. Palermo **24** (1907), 371-402.

[5] J. J. Manfredi and E. Villamor, Traces of monotone Sobolev functions, J. Geom. Anal. **6** (1996), 433-444.

[6] J. J. Manfredi and E. Villamor, Traces of monotone Sobolev functions in weighted Sobolev spaces, Illinois J. Math. **45** (2001), 403-422.

[7] Y. Mizuta, Tangential limits of monotone Sobolev functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **20** (1995), 315-326.

14 On Harmonic Majorization of the Martin Function at Infinity in a Cone

柳下　稔　千葉大・自然
宮本　育子　千葉大・理
吉田　英信　千葉大・自然

$\mathbf{S}^{n-1}$($\mathbf{R}^n$ 内の単位球面) 上の滑らかな境界をもつ領域 Ω に対して, $\mathbf{R}^n$ 内の点 P の極座標表示を (r,Θ) で表すとき,

$$C_n(\Omega) = \{P = (r,\Theta) \in \mathbf{R}^n; (1,\Theta) \in \Omega\}$$

をコーンと呼ぶ. $C_n(\Omega)$ のマルチン境界 Δ は集合 $\partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$ であり, ∞ でのある適当な基準点に関するマルチン核を $K_\infty(P)$ $(P \in C_n(\Omega))$ で表す.

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E が $K_\infty(P)$ の調和優関数を characterize するとは, E 上において $h(P) \geq K_\infty(P)$ なる任意の正値調和関数に対して, $C_n(\Omega)$ 上で $h(P) \geq K_\infty(P)$ となるときをいう. このことは, $C_n(\Omega)$ 上の任意の正値調和関数に対して,

$$\inf_{P\in C_n(\Omega)} \frac{h(P)}{K_\infty(P)} = \inf_{P\in E} \frac{h(P)}{K_\infty(P)}$$

が成り立つこと同値である.

$B(P,r)$ を $P \in \mathbf{R}^n$ を中心, 半径が r の開球とし, $d(P)$ を $P \in C_n(\Omega)$ から $C_n(\Omega)$ の境界までの距離とする. $E \subset C_n(\Omega)$, ρ $(0 < \rho < 1)$ に対して,

$$E_\rho = \cup_{P\in E} B(P, \rho d(P))$$

とする.

この講演では, Dahlberg [2] による滑らかな境界を持つ有界領域における結果が, コーンという境界に角がある領域においても同様に成り立つことを報告する. 証明には [3] における結果を用いる.

定理. $C_n(\Omega)$ の部分集合 E に対して, 以下の条件は同値である.
(i) E が $K_\infty(P)$ の調和優関数を characterize する,
(ii) 任意の ρ, $0 < \rho < 1$ に対して, $\int_{E_\rho} (1 + |P|)^{-n} dP = +\infty$,
(iii) ある ρ, $0 < \rho < 1$ に対して, $\int_{E_\rho} (1 + |P|)^{-n} dP = +\infty$.

$C_n(\Omega)$ 内の点列 $\{P_m\}_{m\geq 1}$, が separated sequence であるとは, ある定数 $c\ (>0)$ が存在して,

$$|P_i - P_j| \geq cd(P_i) \quad (i, j = 1, 2, ..., i \neq j),$$

なるときをいう.

系. $\{P_m\}_{m\geq 1}$ を $\inf_m |P_m| > 0$ を満たす separated sequence とする. 点列 $\{P_m\}_{m\geq 1}$, が $K_\infty(P)$ の調和優関数を characterize するための必要十分条件は

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d(P_m)}{|P_m|} \right)^n = +\infty$$

である.

この系は, Armitage-Kuran [1] での定理の拡張になっている.

参考文献

[1] D.H.Armitage and Ü.Kuran, *On positive harmonic majorization of y in* $\mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$. J. London Math. Soc., (2)**3**(1971), 733-741.

[2] B. E. J. Dahlberg, *A minimum principle for positive harmonic functions,* Proc. London Math. Soc., (3)**33**(1976), 238-250.

[3] I. Miyamoto, M. Yanagishita and H. Yoshida, *Beurling-Dahlberg-Sjögren type theorems for minimally thin sets in a cone,* Canad.Math.Bull., to appear.

15 カントール集合のハウスドルフ測度とプレ・パッキング測度について

秦野　薫　島根大・教育学部

d-次元ユークリッド空間 R^d において $[\{k_q\},\{\lambda_q\}]$ によって構成される一般化された対称なカントール集合を K^d と表す。ϕ を測度関数で $\underline{\phi(t)/t^d \text{ は単調減少関}}$数とする。

注意. $\phi(t) = t^\alpha(-\log t)^\beta$ は次の場合測度関数になる。

(1) $\alpha = 0, \beta < 0$ (2) $0 < \alpha < d$ (3) $\alpha = d, \beta \overset{\geq}{\cancel{<}} 0$.

カントール集合 K^d のハウスドルフ測度 (Λ_ϕ と書く) とプレ・パッキング測度 ($\phi - P$ と書く) に関して次の 2 つの評価が得られる.

定理 1.

$$2^{-3d}\,\underline{\lim}_{q\to\infty}(k_1 \ldots k_q)^d\phi(\lambda_q) \le \Lambda_\phi(K^d) \le \underline{\lim}_{q\to\infty}(k_1 \ldots k_q)^d\phi(\lambda_q).$$

系.

$$\dim(K^d) = \underline{\lim}_{q\to\infty}\frac{\log(k_1 \ldots k_q)^d}{-\log\lambda_q}.$$

定理 2. 次の条件を満たす自然数 L があると仮定する。

条件：$k_q > L$ なる q に対して、$\delta_q \le C\lambda_q$

を満たす定数 C がある。このとき、

$$\overline{\lim}_{q\to\infty}(k_1 \ldots k_q)^d\phi(\lambda_q) \le \phi - P(K^d) \le M\,\overline{\lim}_{q\to\infty}(k_1 \ldots k_q)^d\phi(\lambda_q).$$

系. 定理 2 と同じ条件のもとに、

$$\Delta(K^d) = \overline{\lim}_{q\to\infty}\frac{\log(k_1 \ldots k_q)^d}{-\log\lambda_q}.$$

この2つの定理を用いて、次の例を示すことが出来る。これは [2] の結果：$\dim(K) = 0, \Delta(K) = 1$ を満たすコンパクト集合 K が R^1 に存在するを特別な場合として含む。

例. 次の条件を満たす2つの測度関数 ϕ_1, ϕ_2 を与える。
$\lim_{t\to 0} \frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} = 0, \quad \lim_{t\to 0} \frac{\phi_2(t)}{t^d} = \infty, \quad \phi_1(t)/t^d$ strictly decreasing.
このとき、$0 < \Lambda_{\phi_1}(K^d) < \infty, 0 < \phi_2 - P(K^d) < \infty$ を満たすカントール集合 K^d が存在する。

参考文献

[1] HATANO, K. Notes on Hausdorff Dimensions of Cartesian Product Sets, Hiroshima Math. J.1(1971), 17-25.

[2] Tricot, C.JR. Two definitons of fractional dimension, Math. Camb. Phil.Soc. 91(1982), 57-74.

16　フラクタルな側面上の放物型ベゾフノルムの体積積分による評価

渡辺ヒサ子　　　お茶の水女子大学人間文化研究科

D は $\mathbf{R}^d$ の有界領域で, 境界 ∂D は β-集合とする $(d-1 \leq \beta < d)$. すなわち, 十分小さな r に対しては

$$b_1 r^\beta \leq \mu(B(z,r) \cap \partial D) \leq b_2 r^\beta$$

が成り立つような ∂D 上の正ラドン測度 μ が存在すると仮定する. このような測度 μ を固定する. D からできる円筒状領域 $\Omega_D = D \times (0,T)$ を考え, その側面 $\partial D \times [0,T]$ を S_D で表す. 側面上の測度として, $\mu_T = \mu \times \mathcal{L}^1_{|[0,T]}$ を用いる. また、2点 $X=(x,t)$, $Y=(y,s)$ に対し, 放物型距離

$$\rho(X,Y) = \left(|x-y|^2 + |t-s|\right)^{1/2}$$

を使用し, $p>1$, $\alpha>0$ に対し, S_D 上のベゾフ空間

$$\Lambda^p_\alpha(S_D) = \{f \in L^p(\mu_T); \iint \frac{|f(X)-f(Y)|^p}{\rho(X,Y)^{\beta+2+\alpha p}} d\mu_T(X) d\mu_T(Y) < \infty\}$$

を考え, $\Lambda^p_\alpha(S_D)$ の元 f のノルムを

$$\|f\|_{\alpha,p} = \left(\int |f(X)|^p d\mu_T(X)\right)^{1/p} + \left(\iint \frac{|f(X)-f(Y)|^p}{\rho(X,Y)^{\beta+2+\alpha p}} d\mu_T(X) d\mu_T(Y)\right)^{1/p}$$

で定義する.

側面はフラクタルであるため, この空間 $\Lambda^p_\alpha(S_D)$ 上の作用素が有界であることなどを直接に証明することは困難であることが多い. このため, 側面上で定義された関数 f を, 放物型 Whitney 分解を使って, $\mathbf{R}^{d+1}$ 全体の関数 $\mathcal{E}(f)$ に拡張し, $(\mathbf{R}^d \setminus \partial D) \times (0,T)$ では, なめらかであるようにする. このとき, 各 $f \in \Lambda^p_\alpha(S_D)$ に対し

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d \times [0,T]} |\nabla_y \mathcal{E}(f)(Y)|^p \delta(Y)^{p-p\alpha-d+\beta} dY \\ + &\int_{\mathbf{R}^d \times [0,T]} |\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{E}(f)(Y)|^p \delta(Y)^{2p-p\alpha-d+\beta} dY \leq \|f\|^p_{\alpha,p} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, c は f によらない定数で, $\delta(Y)$ は Y から S_D への距離である.

このことは, 7月に数理研で行われた研究集会で発表させていただいたので, 今回は, 逆の問題を考える. このため, 次の定義をする.

領域 D が一様領域であるというのは, D の任意の2点 x_0, y_0 に対し, D に含まれる長さのある曲線 γ で,

$$
\begin{aligned}
&l(\gamma) \le a|x_0 - y_0|, \\
&\min\{l(\gamma(x_0, x)), l(\gamma(x, y_0))\} \le b\,\mathrm{dist}(x, \partial D) \ (\forall x \in \gamma)
\end{aligned}
$$

が成り立つ γ が存在することである. ここで, $l(\gamma)$, $l(x_0, x)$ は γ の長さ, γ 上の x_0 と x を結ぶ部分をそれぞれ表し, a, b は x_0, y_0 によらない定数である.

この定義のもとで, 側面及び内部で定義された「なめらか」な関数に対しては, 側面上のベゾフノルムは内部の体積積分で, 次のように評価できる.

定理. D は有界な一様領域で, その境界は β-集合とする $(d-1 \le \beta < d)$. さらに, $p > 1$, $p - p\alpha - d + \beta > 0$, $\alpha + (d-\beta)/p < \lambda < 1$ と仮定する. また, 関数 u は Ω_D で C^1 級で, $\overline{D} \times [0,T]$ では, ρ に関して λ-Hölder 連続とする. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_D}\int_{S_D} \frac{|u(X) - u(Y)|^p}{\rho(X,Y)^{\beta+2+\alpha p}} d\mu_T(X) d\mu_T(Y) \\
\le\ & c\left(\int_{D\times[0,T]} |\nabla_y u(Y)|^p \delta(Y)^{p-p\alpha-d+\beta} dY + \int_{D\times[0,T]} |\frac{\partial}{\partial s} u(Y)|^p \delta(Y)^{2p-p\alpha-d+\beta} dY\right).
\end{aligned}
$$

ここで, c は u によらない定数である.

References

[HN] J. Harrison and A. Norton, Geometric integration on fractal curves in the plane, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 567–594.

[JW] A. Jonsson and H. Wallin, A Whitney extension theorem in L_p and Besov spaces, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **28**, 1 (1978), 139–192.

[S] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Prinston-New Jersey, 1970.

[V] J. Väisälä, Uniform domains, Tōhoku Math. J. **40** (1988), 101–118.

[W] H. Watanabe, Estimates of the Besov norms on fractal lateral boundary by volume integrals, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **52**, 2 (2001), 9-22.

17　完備無限葉平面の型問題

中井　三留　名工大（名誉教授）

W をリーマン面，π を W から複素平面 $\mathbf{C}$ への解析写像とし，更に逆像 $\pi^{-1}(a)$ の濃度が全ての $a \in \mathbf{C}$ で一定値 $\nu_W \in \mathbf{N} \cup \{\aleph_0\}$ のとき，$\mathbf{C}$ の被覆面 W（詳しくは三つ揃い $(W, \mathbf{C}, \pi)$）を特に**多葉平面**と言い ν_W を W の**葉数**と言う．多葉平面 W に対して $W \in \mathcal{O}_G$（放物的）であるか又は $W \notin \mathcal{O}_G$（双曲的）であるかを決定する課題を**一般化型問題**と言う（リーマン面の分類理論，例えば [6],[7] 等参照）．W が有限葉（即ち $\nu_W < \aleph_0$）なら常に $W \in \mathcal{O}_G$ となるから，W が**無限葉平面**（即ち $\nu_W = \aleph_0$）の場合に限定して一般化型問題を論ずればよい．

以前に我々は ([3],[4]) 或る特定のタイプの無限葉平面 $(W, \mathbf{C}, \pi)$ のみに限定して考える時，$W \in \mathcal{O}_G$ となる為の必要十分条件は被覆面として $(W, \mathbf{C}, \pi)$ が**完備**（complete，[1] 参照），即ち各 $a \in \mathbf{C}$ に対して，a 中心の適当な閉円板 V でその逆像 $\pi^{-1}(V)$ のどの成分も完閉となる様なものが存在する，ことであると言う定理を示した．これはどちらかと言えば完備無限葉平面 W に対しては $W \notin \mathcal{O}_G$ と言う現象が起こり難いのではないかとの想いを示唆するものと考えられる．事実 $W \notin \mathcal{O}_G$ となる W の例を構成しようとする際に非完備でも構わないと言うのであれば，それは極めて容易に達成できる（[2]）事が知られて居る．

今回は，数列 $(a_n)_{n \geq 1} \subset (0, 1/2]$ を任意に与える度に，各番号 $n \in \mathbf{N}$ 毎に数列の n 項に関連して決まる $1/2$ 以下の長さを持つ夫々0,1,2 を始点とする実軸上にある 3 本のスリットの入った平面 $\mathbf{C}$ の無限枚を数列の与え方に依らぬ一定の手順と繋がり方で適当な二枚の葉同士の夫々中の同一視されるスリットの組同士で交叉状に貼り合わせて行く事で出来るリーマン面 $W = W[(a_n)_{n \geq 1}]$ を鋏と糊的に構成し，自然に決まる射影 $\pi : W \to \mathbf{C}$ を射影として採用することで得られる $\mathbf{C}$ の被覆面 $(W, \mathbf{C}, \pi)$ をそれが**完備無限葉平面**と成る様に構成する．この様

に定める互いに同相な完備無限葉平面の範疇内の W が $(a_n)_{n\geq 1}$ の取り方次第で，$W \in \mathcal{O}_G$ にも $W \notin \mathcal{O}_G$ にも成り得ることを示すのが本講演の目的である，即ち次の結果を報告する．

定理：　数列 $(\boldsymbol{a}_n)_{n\geq 1}$ が十分に零から離れておれば，$\boldsymbol{W}[(\boldsymbol{a}_n)_{n\geq 1}] \notin \mathcal{O}_G$ であるが，数列 $(\boldsymbol{a}_n)_{n\geq 1}$ が十分に零に近いと $\boldsymbol{W}[(\boldsymbol{a}_n)_{n\geq 1}] \in \mathcal{O}_G$ となる．

更に具体的には，前者の条件は $\liminf_{n\to\infty} a_n > 0$ を意味し，後者の条件は $\sum_{n\geq 1} 3^{-n} \mathrm{mod}\ A_n = +\infty$ を意味する，但し A_n は複素球面 $\hat{\mathbf{C}}$ から $\alpha = [1, 1 + a_{n+1}]$ と $\beta = [0, 1/2] \cup [2, 2 + a_n]$ を除去した領域でそのモジュラス $\mathrm{mod}\ A_n$ は A_n 上の α で境界値 1，β で境界値 0 を持つ調和関数の A_n 上のディリクレ積分の逆数の 2π 倍の事とする．従って何れにしろ後者は $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のスピードの高い事を意味する．

参　照　文　献

[1] L. V. Ahlfors and L. Sario: *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.

[2] 石田久: 私的な会話，京都大学数学教室，2001 年 7 月．

[3] 中井三留・瀬川重男: 被覆面の型，数理研講究録，2002 年．

[4] M. Nakai and S. Segawa: *The type of a covering surface*, Preprint.

[5] R. Nevanlinna: *Analytic Functions*, Springer, 1970.

[6] L. Sario and M. Nakai: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.

[7] M. Tsuji: *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, 1957.

特別講演

ON KLEINIAN GROUPS WITH BOUNDED GEOMETRY

宮地 秀樹 (大阪市立大学理学研究科)

この講演では、有界幾何を持つ Klein 群に関して、現在知られている (私が知っている) 次の2つのことを中心に概説したい。

- そのようなクライン群の端層状構造予想 (ending lamination conjecture) の解決。
- そのようなクライン群 (特にその極限集合) の解析的性質。

このアブストラクトでは、講演で使われるであろう基本的な言葉といくつかの事実をまとめておく。また、このアブストラクトの最後にある参考文献はここでの必要最小元であろうものを書いているのであって、このトピック全部の論文や書籍を網羅していないことを注意しておく。

1. クライン群. リーマン球面のの自己等角写像のなす群 (メビウス変換群) は $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ と同一視される。リーマン球面を複素平面の一点コンパクト化と思ったときこれらの元はリーマン球面上の円を円に写すので、半球を半球に写す操作によって自然に上半空間 $\mathbf{H}^3=\{(x,y,t\in\mathbf{R}^3\mid t>0)\}$ に拡張 (ポアンカレ拡張) される。ここで、複素平面は上半空間の境界の一部 $\{(x,y,t)\mid t=0\}$ と考えている。さらに、$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の各元の拡張は上半空間上の双曲計量に関して、向きを保存する等長写像である。逆に上半空間の向きを保つ等長写像は境界まで拡張され、その拡張の境界への制限はメビウス変換になっている。以下、$g\in\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の拡張も同じ記号 g を用いて書くことにする。元 $g\in\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ に対して、移動距離 (translation length) を、量 $\inf\{d(z,g(z))\mid z\in\mathbf{H}^3\}$ と定義し、$\ell(g)$ と書く。ここで、$d(\cdot,\cdot)$ は上半空間の双曲計量である。移動距離が正の元を斜航的 (loxodromic) な元という。$\ell(g)=0$ だが境界に固定点を持つ元を放物的 (parabolic) という。それら以外を楕円的 (elliptic) な元と言う。

クライン群 (Kleinian group) とは $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ 内の離散部分群のことである。上の拡張でクライン群を上半空間の等長写像のなす群の部分群として見たときに、クライン群は上半空間に真性不連続に作用する。クライン群の商多様体の最小な部分多様体を商多様体 (もしくはクライン群の) 凸核 (convex core, 凸芯とも訳される) という。

以下、簡単の為にクライン群と言えば、有限生成でかつ全ての元が斜航的である $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$ の離散群とする。P.Scott の定理からクライン群の商多様体の内部にはコンパクト核 (compact core, コンパクト芯とも訳される) と呼ばれる商多様体とホモトピー同値なコンパクト多様体が存在する。クライン群の商多様体の端 (end, 縁部とも訳される) とは、コンパクト芯の補集合の各成分の同値類のことである。ここで、同値関係は次のようにして入れる：U_1,U_2 を上のような成分する (それらを与えるコンパクト芯は一般には異なってもよい)。このとき U_1 と U_2 はあるコンパクト芯とその補集合の成分 V が存在して $V\subset U_1\cap U_2$ が成立する時に同値だと定義する。端 e の各元を e の近傍という。

クライン群 Γ は商多様体 $\mathbf{H}^3/\Gamma$ がコンパクト3次元多様体の内部と同相であるとき位相的素直 (topologically tame) であると言われる。位相的素直なクライン群のコンパクト芯の補集合の各成分の閉包はそのコンパクト芯のある境界成分 S と半直線 $[0,\infty)$ の直積と同相である。端 e は、凸核と交わらないような近傍が取れる時、幾何

日本学術振興会特別研究員 PD

学的有限 (geometrically finite) である言われる。そうでないときには幾何学的無限 (geometrically infinite) と言われる。

2. 曲面上の幾何からの準備. 双曲曲面 S 上の部分集合で、完備かつ自己交差の無い測地線の交わらない和からなる閉集合のことを測地線層 (geodesic lamination) という。単純閉測地線はその典型例である。測地線層で横断的測度を持つものを、(それらを対として) 測度付き測地線層 (measured geodesic lamination) と呼ぶ。またその測地線層を測度付き測地線層の台 (support) と言う。S 上の測地線層、測度付き測地線層のなす空間をそれぞれ $\mathcal{GL}(S)$、$\mathcal{ML}(S)$ と書く。$\mathcal{GL}(S)$ には閉集合全体のなす空間に定義されるハウスドルフ位相が入り、$\mathcal{ML}(S)$ には測度の弱位相により位相が入る。S が解析的有限型であるとき $\mathcal{ML}(S)$ は S のタイヒミュラー空間の同次元の実ユークリッド空間と同相であることが知られていて、したがってその射影化 $\mathcal{PML}(S) = \mathcal{ML}(S)/\mathbf{R}_+$ はコンパクトであり、特にタイヒミュラー空間の次元から１引いた次元の球面と同相になる。

3. 端不変量 (end invariant). ここでは、位相的素直なクライン群の端不変量 (end invariant) なる不変量を与える。先と同じようにここでは有限生成かつすべての元が斜航的なクライン群を考える。

3.1. 幾何学的有限な端の場合： 幾何学的有限な端には、その無限遠に無限遠境界にリーマン球面から自然に誘導される等角構造を持つ解析有限型のリーマン面が対応して、(適当な標識 (marking) が入り) タイヒミュラー空間 (もしくはその商空間) の元を定める。これを幾何学的有限な端の端不変量という。

3.2. 幾何学的無限な端の場合： S を与えられた端 e に面する商多様体のコンパクト芯の境界成分とする。S に適当な双曲構造を与えておく。以下の不変量は与えられた双曲構造に (本質的には) 依存しない。このとき、次のような S 上の単純閉測地線の族 $\{\alpha_i\}_i$ が存在する：α_i は商多様体内でそれとホモトピックな測地線 α_i^* が存在して、e に出る (exit)。つまり、任意の e の近傍 U に対して $i_0 > 0$ が存在して、$i > i_0$ であれば $\alpha_i^* \subset U$ である。さらに、α_i の射影類 $[\alpha_i] \in \mathcal{PML}(S)$ はある射影的測度付き測地線層 $[\mu_e] \in \mathcal{PML}(S)$ に収束し、その測度付き測地線層の台 $\lambda_e \in \mathcal{GL}$ は $\{\alpha_i\}_i$ によらず決まる。この λ_e を端層 (ending lamination) と呼び、これが端 e の不変量である。

4. 有界幾何をもつクライン群. クライン群 Γ が有界幾何 (bounded geometry) を持つとは、任意の G の元の移動距離が G のみに依存する量で下から押えられる時にそう言われる。特に、そのようなクライン群の元は全て斜航的である。そのようなクライン群で上半空間を割って出来た多様体は、各点での単射半径が下から G のみに依存する量で下から押えられている。

端層状構造定理. Y.Minsky ([Mi00], [Mi01]) によれば、有界幾何を持つ自由積分解不能なクライン群はその端不変量で特長付けられる。ここでは特に、クライン群が曲面群と同型でかつその２つの端が退化しているものに関して彼の特徴付けを記しておく。

Γ をそのようなクライン群として、S をそれと同型な基本群を持つ閉曲面とする。λ_+, λ_- を Γ の端不変量とする。$\mathcal{C}(S)$ と $\mathcal{A}(S)$ をそれぞれ S 上の閉曲線複体 (the complex of curves)、弧複体 (the complex of arcs) とする (詳しい定義は Minsky の原論文を参照せよ)。S の圧縮不能な部分曲面 Y に対して Y に対して、射影係数 (projection coefficient)$d_Y(\lambda_+, \lambda_-)$ を以下のように定める: Y が円環で無いときは Y

に関する被覆 $\hat{Y} \to S$ を取り、そこに $\lambda_{\pm}$ を持ち上げる。その持ち上げの各葉を $\hat{Y}$ の境界に関してホモトピー (つまり端点を動かして良い) を取る。このとき、各 $\lambda_{\pm}$ から $\mathcal{A}(\hat{Y})$ 内の単体を得る。それらの重心をそれぞれ $\pi_Y(\lambda_{\pm}) \in \mathcal{A}(\hat{Y})$ と書く。この記号の下で

$$d_Y(\lambda_+, \lambda_-) = d_{\mathcal{A}(\hat{Y})}(\pi_Y(\lambda_)), \pi_Y(\lambda_-))$$

と定義する。Y が円環の時には、端点を止めたホモトピーを考え上と同様に定義をする。このとき次が成立する。

定理 (Minsky). Γ が有界幾何を持つための必要十分条件はある $K > 0$ が存在して

$$\sup_Y d_Y(\lambda_+, \lambda_-) \leq K$$

が成立することである。

系 (端層状構造定理). Γ_1 と Γ_2 を同じ端不変量を持つ上のようなクライン群とする。もし Γ_1 が有界幾何を持てば、Γ_2 も有界幾何をもち、両者は $\mathrm{PSL}_2(\mathrm{C})$ 内で共役である。

極限集合の幾何学的性質. Γ を有界幾何を持つ全退化群とする。このとき次が成立する：

定理. ([My01] and [My02])

1. Γ の極限集合の内点の任意２点は擬弧 (quasi-arc) で結ぶことが出来る。
2. $f : \mathbf{D} \to \Omega(\Gamma)$ をリーマン写像とする。このとき f は境界まで連続に延び、かつ次の連続性を持つ：

$$d_e(f(z)f(w)) \leq A\left\{\log\frac{1}{|z-w|}\right\}^{-B}.$$

ここで、d_e は球面距離である。

References

[Mi94] Minsky Y., On rigidity, limit sets and end invariants of hyperbolic 3-manifolds, Jour. Amer. Math. Soc., **7** (1994), 539–587.

[Mi00] Minsky Y., Kleinian groups and the complex of curves, Geometry and Topology **4** (2000), 117–148.

[Mi01] Minsky Y., Bounded geometry for Kleinian groups, Invent. Math. **146** (2001), 143–192.

[My01] Miyachi H., Quasi-arcs in the limit set of a singly degenerate group with bounded geometry, Accepted for the proceeding of the conference, Kleinian groups and Hyperbolic 3-manifolds (Y.Komori, V.Markovic, and C.Series eds.).

[My02] Miyachi H., Modulus of continuity of Cannon-Thurston maps, preprint (2002).

[MyOh] Miyachi H. and Ohshika K., On topologically tame Kleinian groups with bounded geometry, in preparation.

[Oh98] Ohshika K., Rigidity and topological conjugates of topologically tame Kleinian groups, Trans. Amer. Math. Soc., **350** (1998), 3989–4022.

18 N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some Identities

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article, N- fractional calculus of the power fumctions and that of logarithmic ones are discussed. Moreover some identities related to them are reported. Some of them are shown as follows for example.

1)
$$\frac{\left((z-a)^{\beta}\right)_{\alpha}\left((z-a)^{-\alpha}\right)_{-\alpha}}{(z-a)^{\beta-\alpha}} = \log(z-a)^{-1/B(\alpha,-\beta)}$$

for $\left|\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}\right| < \infty$, $|\Gamma(\alpha)| < \infty$, $z \neq a$.

2)
$$\frac{\left[\left(\log(z-a)\right)_{\alpha}\right]^{2}}{\left(\log(z-a)\right)_{2\alpha}} = -B(\alpha,\alpha) \quad (B(\alpha,\alpha)\ \text{; Beta function})$$

where $|\Gamma(\alpha)| < \infty$, $|\Gamma(2\alpha)| < \infty$, $z \neq a$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On the fractional calculus of functions $(a-z)^{\beta}$ and $\log(a-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 3, May (1993),19 - 27.

[4] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[5] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[6] K. Nishimoto ; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol.6, Nov. (1994), 15 - 26.

[7] S.-T. Tu and D.-K. Chyan ; A certain family of infinite series, differintegrable functions and Psi functions, J. Frac. Calc. Vol.7, May (1995), 41 -46.

[8] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus , Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order 1974), Academic Press New York, London.

[9] K.S. Miller and B. Ross ; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, (1993), John Wiley & Sons. Inc.

[10] V. Kiryakova ; Generalized Fractional Calculus and Applications,(1993) Pitman Res. Notes in Math. Series No. 301, Longman: London etc. (co-publ. John Wiley & Sons, New York)

19 Some Theorems for N- Fractional Calculus of Logarithmic Functions I

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article, some interesting identities for N- fractional calculus of the logarithmic functions are reported. Some of them are shown as follows for example. ($z \neq a$)

1) $$\left(\frac{\log(\log(z-a))_\alpha}{\log(\log(\log(z-a))_\alpha)_\beta} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \begin{pmatrix} |\Gamma(\alpha+k)| < \infty \ (k=0,1) \\ |\Gamma(\beta+k)| < \infty \ (k=0,1) \end{pmatrix} .$$

2) $$(\log(z-a))_\alpha (\log(z-a))_{1-\alpha} = \frac{\pi}{(a-z)\sin\pi\alpha} \quad (|\Gamma(\alpha)|, |\Gamma(1-\alpha)| < \infty) .$$

3) $$\frac{\prod_{k=1}^{n} (\log(z-a))_{\alpha_k}}{(\log(z-a))_{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}} = (-1)^{n+1} \frac{\prod_{k=1}^{n} \Gamma(\alpha_k)}{\Gamma(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k)}$$

where $|\Gamma(\alpha_k)| < \infty$, $|\Gamma(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k)| < \infty$, and $\alpha_k (k=1,2,\cdots,n)$ are constants.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol.6, Nov. (1994), 15 - 26.

[6] S.-T. Tu and D.-K. Chyan ; A certain family of infinite series, differintegrable functions and Psi functions, J. Frac. Calc. Vol.7, May (1995), 41 -46.

[7] K. Nishimoto; N- Fractional Calculus of the Power and Logarithmic Functions, and some Identities, J. Frac. Calc. Vol. 21, May (2002), 1 - 6.

[8] K.B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus , Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order 1974), Academic Press New York, London.

[9] K.S. Miller and B. Ross ; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, (1993), John Wiley & Sons. Inc.

[10] V. Kiryakova ; Generalized Fractional Calculus and Applications,(1993) Pitman Res. Notes in Math. Series No. 301, Longman: London etc. (co-publ. John Wiley & Sons, New York)

20

題

荷重 Bergman-Privalov 空間の特徴付け

真次　康夫　　（信州大学理学部）

宮澤　純　　（名鉄システム開発）

植木誠一郎　　（信州大学理学部）

$B \equiv B_n$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球とする. $H(B)$ は B 上の正則関数全体を表す. ν は B 上の正規化された Lebesgue 測度を表す. 各 $\alpha \in (-1, \infty)$ に対して, $d\nu_\alpha(z) = c_\alpha(1 - |z|^2)^\alpha d\nu(z)$, $z \in B$ とする. ただし, 定数 c_α は $\nu_\alpha(B) = 1$ を満たすように定める. 各 $\alpha \in (-1, \infty)$, $p \in (0, \infty)$ に対して, B 上の荷重 *Bergman* 空間 $A^p(\nu_\alpha)$ を次のように定義する:

$$A^p(\nu_\alpha) = \left\{ f \in H(B) : \|f\|_{A^p(\nu_\alpha)} \equiv \left[\int_B |f|^p \, d\nu_\alpha \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

さらに, 各 $\alpha \in (-1, \infty)$, $p \in [1, \infty)$ に対して, 荷重 *Bergman-Privalov* 空間 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ を次のように定義する:

$$(AN)^p(\nu_\alpha) = \left\{ f \in H(B) : \|f\|_{(AN)^p(\nu_\alpha)} \equiv \left[\int_B \{\log(1 + |f|)\}^p \, d\nu_\alpha \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Bergman 空間 $A^p(B) \equiv A^p(\nu_0)$ $(0 < p < \infty)$ に関し, C. Ouyang-W. Yang and R. Zhao は次のような特徴付けを与えた:

Theorem.([1] C. Ouyang-W. Yang and R. Zhao) $0 < p < \infty$ とする. $f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対して, 次の 2 条件は同値である:

1. $f \in A^p(B)$,
2. $\displaystyle\int_B |\widetilde{\nabla} f|^2 |f|^{p-2} \, d\nu < \infty.$

ただし, $\widetilde{\nabla} f$ は B 上の Bergman 計量に関する f の gradient である. さらに, $f \in A^p(B)$ ならば,

$$\lim_{r \uparrow 1} (1 - r^2)^{n+1} \int_{rB} |f(z)|^{p-2} |\widetilde{\nabla} f(z)|^2 (1 - |z|^2)^{-n-1} \, d\nu(z) = 0$$

が成立する. ただし, $rB = \{z \in B : |z| < r\}$, $0 < r < 1$ である.

荷重 Bergman-Privalov 空間 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ $(-1 < \alpha < \infty,\ 1 \le p < \infty)$ の特徴付けに関して, 上記と同種の特徴付けとして, 以下の結果を得た:

Theorem.([2]) $-1 < \alpha < \infty$ とする.

1. $1 < p < \infty$ の時, $f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対して, 次の 2 条件は同値である:

(a) $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$,
(b) $\displaystyle\int_B \frac{\{\log(1+|f|)\}^{p-2}}{(1+|f|)^2}|\widetilde{\nabla} f|^2\, d\nu_\alpha < \infty$.
さらに, $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ ならば,

$$\lim_{r\uparrow 1}\left[(1-r^2)^{n+1+\alpha}\int_{rB}\frac{\{\log(1+|f(z)|)\}^{p-2}}{(1+|f(z)|)^2}|\widetilde{\nabla} f(z)|^2(1-|z|^2)^{-n-1}\, d\nu(z)\right] = 0.$$

が成立する.

2. $p=1$ の時, $f \in H(B)\setminus\{0\}$ に対して, 次の 2 条件は同値である:
(a) $f \in (AN)^1(\nu_\alpha)$,
(b) $\displaystyle\int_B \frac{|\widetilde{\nabla} f|^2}{|f|(1+|f|)^2}\, d\nu_\alpha < \infty$.
さらに, $f \in (AN)^1(\nu_\alpha)$ ならば,

$$\lim_{r\uparrow 1}\left[(1-r^2)^{n+1+\alpha}\int_{rB}\frac{|\widetilde{\nabla} f(z)|^2}{|f(z)|(1+|f(z)|)^2}(1-|z|^2)^{-n-1}\, d\nu(z)\right] = 0.$$

が成立する.

References

[1] C. Ouyang, W. Yang and R. Zhao, *Characterizations of Bergman spaces and Bloch space in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc., **347** (1995), 4301–4313.

[2] Y. Matsugu, J. Miyazawa and S. Ueki, *A characterization of weighted Bergman-Privalov spaces on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, J. Korean Math. Soc., (to appear).

21

題

荷重 Bergman-Orlicz 空間の特徴付け

真次　康夫　　（信州大学理学部）
宮澤　純　　（名鉄システム開発）

$B \equiv B_n$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球とする．$H(B)$ は B 上の正則関数全体を表す．ν は B 上の正規化された Lebesgue 測度を表す．各 $\alpha \in (-1, \infty)$ に対して, $d\nu_\alpha(z) = c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha \, d\nu(z)$, $z \in B$ とする．ただし, 定数 c_α は $\nu_\alpha(B) = 1$ を満たすように定める．各 $\alpha \in (-1, \infty)$ と条件 $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)/t = \infty$ を満たす、$\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能、非減少、非負凸関数 φ に対して, B 上の荷重 *Bergman-Orlicz* 空間 $A_\varphi(\nu_\alpha)$ を次のように定義する:

$$A_\varphi(\nu_\alpha) = \left\{ f \in H(B) \, : \, \int_B \varphi(\log|f|) \, d\nu_\alpha < \infty \right\}.$$

$\varphi(t) = e^{pt}, p \in (0, \infty)$ の場合、$A_\varphi(\nu_\alpha)$ は荷重 Bergman $A^p(\nu_\alpha)$ である。これに関し, F. Beatrous and J. Burbea は次のような特徴付けを与えた:

Theorem.([1] F. Beatrous and J. Burbea) $-1 < \alpha < \infty, 0 < p < \infty$ とする．$f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対して, 次の 2 条件は同値である:

1. $f \in A^p(\nu_\alpha)$,
2. $\displaystyle\int_B |f(z)|^p \frac{|\mathcal{R}f(z)|^2}{|z|^2|f(z)|^2}(1-|z|^2)^2 \, d\nu_\alpha(z) < \infty.$

z_j

ただし, $\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(z), z \in B$ である。荷重 Bergman-Orlicz 空間 $A_\varphi(\nu_\alpha)$ の特徴付けに関して, 上記と同種の特徴付けとして, 以下の結果を得た:

Theorem.([2]) $\alpha \in (-1, \infty)$ とし、φ は条件 $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)/t = \infty$ を満たす、$\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能、非減少、非負凸関数とする。$f \in H(B) \setminus \{0\}$ に対して, 次の 2 条件は同値である:

1. $f \in A_\varphi(\nu_\alpha)$,
2. $\displaystyle\int_B \varphi''(\log|f(z)|) \frac{|\mathcal{R}f(z)|^2}{|z|^2|f(z)|^2}(1-|z|^2)^2 \, d\nu_\alpha(z) < \infty.$

References

[1] F.Beatrous and J.Burbea, 'Characterizations of spaces of holomorphic functions in the ball', *Kodai Math. J.* 8(1985), 36-51.

[2] Y. Matsugu and J. Miyazawa, *A characterization of weighted Bergman-Orlicz spaces on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, J. Austral. Math. Soc., (to appear).

22 [題] div $\mathbf{u} = f$, rot $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ の境界値問題

[氏名] 山口博史 [所属] 奈良女子大学 理学部
宮武貞夫 奈良女子大学 理学部

$D \subset \mathbf{R}^3$ を一つの滑らかな閉曲面 Σ によって囲まれた領域とする. f を $\overline{D}$ 上の C^1-級関数, $\mathbf{g}$ を $\overline{D}$ 上の C^1-級のベクトル場, φ を Σ 上の連続関数とする. $\mathbf{n}_x$ を曲面 Σ の点 $\mathbf{x}$ における外単位法ベクトルとする. このとき, 次の境界値問題 $(*)$ を考える:

$$(*)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \operatorname{div} \mathbf{u} = f & \text{on } D, \\ \text{(ii)} & \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } D, \\ \text{(iii)} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_x = \varphi(\mathbf{x}) & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

ここでは, $(*)$ を満たす $\overline{D}$ 上の C^2-級ベクトル場 $\mathbf{u}$ (すなわち, 一階線型偏微分方程式 $(*)$ の解 $\mathbf{u}$) の存在と一意性を問題とし, その静電磁場的意味を述べる.

先ず, $\overline{D}$ 上で解 $\mathbf{u}$ が存在するための必要条件は

$$\begin{array}{lll} (1) & \iiint_D f\, dv_x & = \iint_\Sigma \varphi\, dS_x, \\ (2) & \operatorname{div} \mathbf{g} & = 0 \quad \text{on } D \end{array}$$

であることは容易に分かる.

次に, 上の 2 条件が $\overline{D}$ 上で解 $\mathbf{u}$ が存在するため十分条件であることを示そう.

f 及び $\mathbf{g}$ をそれぞれ $\mathbf{R}^3$ 上の C_0^1-級の関数 $\tilde{f}$ 及びベクトル場 $\tilde{\mathbf{g}}$ に延長する. その際, Σ は一つの曲面から成るから 条件 (2) から $\mathbf{R}^3$ 上で $\operatorname{div} \mathbf{g} = 0$ と仮定できる.

$\tilde{f}$ の ニュートンポテンシャル $N\tilde{f}$ を作る. すなわち,

$$N\tilde{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\tilde{f}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} dv_y, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

ここで

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\mathrm{grad}\ N\tilde{f} \qquad \text{on } \mathbf{R}^3$$

と置くとポアソンの方程式から $\tilde{\mathbf{u}}$ は D 上で (i) を満たす.

ベクトル場 $\tilde{g}$ の $\mathbf{R}^3$ でのベクトルポテンシャル $A\tilde{g}$ を作る:

$$A\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|} dv_y, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{v}} = -\mathrm{rot}\ A\tilde{g} \qquad \text{on } \mathbf{R}^3$$

と置くとポアソンの方程式から $\tilde{\mathbf{v}}$ は D で (ii) を満たす. 従って

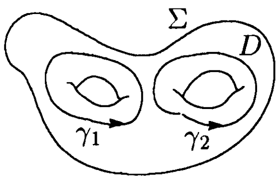
$$\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{v}}, \qquad \mathbf{x} \in D$$

と置くと これは (i), (ii) を満たす.

Σ 上で $\psi = \varphi - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_x$ とおくと条件 (1) から $\iint_\Sigma \psi\, dS_x = 0$ である. したがって, Neumann 問題を解くことによって $\overline{D}$ 上の連続関数で, 境界値 ψ を持ち, D 内で調和な関数 h が存在する. これを用いて

$$\mathbf{U} := \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{v}} + \mathrm{grad}\ h \qquad \text{on } D$$

と置くとこの $\mathbf{u}$ は偏微分方程式 $(*)$ の解の一つである.



一意性について, 例えば, 左図のように穴が 2 つあるような領域 D について見てみよう. このとき, D に関する 2 つの一次独立な平衡磁場 B_1, B_2 が存在する (北大紀要, 1996). 従って, $(*)$ の任意の解 $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + aB_1 + bB_2 \qquad \text{on } D$$

で与えられる (ただし, a, b は実数定数) . 故に, $(*)$ の解 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ は線積分

$$\int_{\gamma_i} u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz, \qquad i = 1, 2$$

の値を指定することによって一意的に定まる.

23 [**題**] Neumann のアルゴリズムに関するポアンカレの注意について

[氏名] 山口博史 [所属] 奈良女子大学 理学部
N. Levenberg Auckland University

$D \subset \mathbf{R}^3$ を一つの滑らかな閉曲面 Σ によって囲まれた領域とする. f を Σ 上の連続関数とする. 簡単のために $D^+ = D$, $D^- = \mathbf{R}^3 \setminus \overline{D}$ と書く. f の Σ に関する二重層ポテンシャルを

$$W_0(\mathbf{x}) = \mathcal{M}f(\mathbf{x}) := \frac{-1}{2\pi}\iint_\Sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\left(\frac{1}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}\right) f(\mathbf{y})\,dS_y, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \Sigma$$

を作る. 任意の点 $\mathbf{y} \in \Sigma$ に対して

$$W_0^{\pm}(\mathbf{y}) := \lim_{\mathbf{x}(\in D^{\pm}) \to \mathbf{y}} W_0(\mathbf{x}), \qquad U_0(\mathbf{y}) := \frac{W_0 + (\mathbf{y}) + W_0^-(\mathbf{y})}{2}$$

と置く. 同様にして, 帰納的に

$$\begin{array}{llll} W_1(\mathbf{x}) & = \mathcal{M}U_0(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \Sigma, & U_1(\mathbf{y}) & = \frac{W_1^+(\mathbf{y})+W_1^-(\mathbf{y})}{2}, \ \ \mathbf{y} \in \Sigma, \\ W_2(\mathbf{x}) & = \mathcal{M}U_1(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \Sigma, & U_2(\mathbf{y}) & = \frac{W_2^+(\mathbf{y})+W_2^-(\mathbf{y})}{2}, \ \ \mathbf{y} \in \Sigma, \\ & \vdots & & \vdots \end{array}$$

作り, 形式的に無限和

$$W(\mathbf{x}) = W_0(\mathbf{x}) - W_1(\mathbf{x}) + W_2(\mathbf{x}) - \cdots$$

を考える. ここでは, これを Neumann のアルゴリズムと呼ぶ.

Neumann (1877) 領域 $D \subset \mathbf{R}^3$ が凸領域であれば, 級数 $W(\mathbf{x})$ は D で広義の一様収束をし, 境界値 f に関する D 上の Dirichlet 問題の解を与える.

<u>**Poincaré** (Acta Math. 1896)</u>　閉領域 $\overline{D} \subset \mathbf{R}^3$ が閉球 $\{\|\mathbf{x}\| \le 1\} \subset \mathbf{R}^3$ と C^1-級同値 (diffeomorphic) であり, $f \in C^1(\Sigma)$ ならば, 級数 $W(\mathbf{x})$ について 上と同様のことが成立する.

Poincaré はその論文の最後に「 $\overline{D}$ が閉~~線~~球と diffeomorphic という位相的条件は（物理的に考えて）不要であるに違いない」と注意している.

<u>ここでは</u>（領域 $D \subset \mathbf{R}^3$ には何ら位相的条件は設けないが）境界面 Σ が実解析的であり, $f \in C^\omega(\Sigma)$ ならば, 次の収束が言えることを示す：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|dW_n\|_{\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma} < \infty.$$

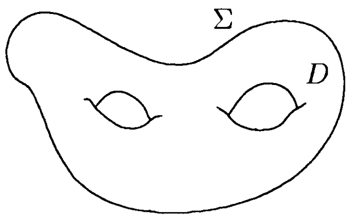
このことから, 次が導かれる：

(i)　$W(\mathbf{x})$ は D で広義の一様収束をする.

(ii)　超関数の意味で

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} W^+(\mathbf{y}) \right) dS_y = f(\mathbf{y})\, dS_y.$$

これらのことは, 静電磁場, 特に, ソレノイドを一般化し, 数学的に見直すことによってなされる. その際, 「二重層ポテンシャルの傾き grad $\mathcal{M}g(\mathbf{x})$ は Σ 上の面電流 $(\mathbf{n}_y \times \text{grad } g(\mathbf{x}))\, dS_y$ から生じる $\mathbf{R}^3 \setminus \Sigma$ での磁場である」ことが有用であった.



24 A group-theoretic characterization of $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$

Akio Kodama (Kanazawa Univ.)

Satoru Shimizu (Tohoku Univ.)

In the study of the holomorphic automorphism group $\mathrm{Aut}(M)$ of a complex manifold M, it seems to be natural to direct our attention to not only the abstract group structure of $\mathrm{Aut}(M)$ but also the topological group structure of $\mathrm{Aut}(M)$ equipped with the compact-open topology. In fact, a well-known theorem of H. Cartan says that the topological group given as the holomorphic automorphism group of a bounded domain in $\mathbf{C}^n$ has the structure of a Lie group, and this result enables us to make various kinds of detailed studies of bounded domains in $\mathbf{C}^n$. On the other hand, in contrast to the case of bounded domains, the holomorphic automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ of the unbounded domain $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell$ is terribly big when $k+\ell \geq 2$, and can not have the structure of a Lie group. But, by looking at topological subgroups of $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ with Lie group structures, we can find a lead to apply the Lie group theory to the investigation of the problems related to the structure of $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$. In fact, we can prove the following theorem with the aid of the theory of Reinhardt domains developed in Shimizu [5], [6], and the fundamental result on torus actions on complex manifolds due to Barrett-Bedford-Dadok [2]:

Main Theorem. *Let M be a connected Stein manifold of dimension n. Assume that* $\mathrm{Aut}(M)$ *is isomorphic to* $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k})$ *as topological groups. Then M is biholomorphically equivalent to* $\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^{n-k}$.

Corollary. *If two pairs (k,ℓ) and (k',ℓ') of nonnegative integers do not coincide, then the topological groups* $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^k \times (\mathbf{C}^*)^\ell)$ *and* $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^{k'} \times (\mathbf{C}^*)^{\ell'})$ *are not isomorphic.*

It should be remarked that, as shown in Ahern and Rudin [1], the groups $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^n)$ and $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^m)$ are isomorphic as abstract groups precisely when $n = m$. Also, our method can be applied to the study of unitary group actions on complex manifolds. The following Theorems A and B give a different approach from Kaup [4], Isaev-Kruzhilin [3] to the study of $U(n)$-actions on a complex manifold of dimension n:

Theorem A. *Let M be a connected Stein manifold of dimension $n \geq 2$. Assume that $U(n)$ acts effectively on M as a Lie transformation group through ρ. Then M is biholomorphically equivalent to either B^n or $\mathbf{C}^n$, where B^n denotes the unit ball in $\mathbf{C}^n$.*

Theorem B. *Let M be a connected Stein manifold of dimension $n \geq 2$. Assume that there are two injective continuous group homomorphisms ρ_1 and ρ_2 of $U(n)$ into $\mathrm{Aut}(M)$. Then there exists an element ψ of $\mathrm{Aut}(M)$ such that $\psi\rho_1(U(n))\psi^{-1} = \rho_2(U(n))$. In other words, any two effective $U(n)$-actions on M are equivalent under an automorphism of M.*

References

[1] P. Ahern and W. Rudin: *Periodic Automorphisms of* $\mathbf{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 287–303.

[2] D. E. Barrett, E. Bedford, and J. Dadok: *T^n-actions on holomorphically separable complex manifolds*, Math. Z. **202** (1989), 65–82.

[3] A. V. Isaev and N. G. Kruzhilin: *Effective actions of the unitary group on complex manifolds*, Preprint, CMA, ANU MRR00-024.

[4] W. Kaup: *Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen*, Invent. Math. **3** (1967), 43–70.

[5] S. Shimizu: *Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin*, Tohoku Math. J. **40** (1988), 119–152.

[6] S. Shimizu: *Automorphisms of bounded Reinhardt domains*, Japan. J. Math. **15** (1989), 385–414.

~~A. Z~~ A. Isaev, Proc. Steklov Inst. Math. 235 (2001), 103–106
S. Krantz, Complex Variables 47 52 (2002), 215–223.

25

$\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体への対数的距離の Levi form と展開可能性

松本 和子 (大阪女大・理)

1. M を $\mathbb{C}^n$ の開集合で定義された余次元 q の複素部分多様体とし, $P \in \mathbb{C}^n$ から M への Euclid 距離を $\delta_M(P)$ で表す. このとき, 関数 $\varphi := -\log\delta_M$ は M の近くで weakly q-convex, すなわち φ の Levi form $L[\varphi]$ は $n-q+1$ 個の負でない固有値を持つ. さらに $L[\varphi]$ は M の $n-q$ 次元の接方向に半正定値である.

この講演では, Levi form $L[\varphi]$ を, M の defining function を用いて M の近くで具体的に計算した結果について報告する. その結果, $L[\varphi]$ が接方向に退化するための M の defining function に関する必要十分条件が求まる. また, Fischer-Wu [2] (cf. [1]) の結果を用いると, この条件は M の展開可能性と関連があることが分かる.

このような計算を行った最初の動機は, n 次元複素トーラス $\mathbb{T}^n$ 内には Levi-flat real hypersurface S は存在しない (例外を除く) という予想を示すための第 1 段階として, $\mathbb{T}^n \setminus S$ が Stein であるための条件, すなわち $\mathbb{T}^n \setminus S$ に強多重劣調和な exhaustion function が構成できるための条件を求めることである (cf. Matsumoto-Ohsawa [4]).

2. r, q, n を $r+q=n$ である自然数とし, $\mathbb{C}^n$ の開集合で定義された余次元 q の複素部分多様体 M を

$$M = \{(t, f(t)) \mid t = (t_1, \ldots, t_r) \in V\}$$

により表す. ここで V は $\mathbb{C}^r$ の開集合, $f = (f_1, \ldots, f_q) : V \longrightarrow \mathbb{C}^q$ は正則写像である. $(z, w) = (z_1, \ldots, z_r; w_1, \ldots, w_q)$ を $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^q$ の (大域的な) 座標系とする. (z, w) の平行移動と unitary 変換を行って, $0 = (0, \ldots, 0) \in V$ で

$$f_\mu(0) = 0, \quad \frac{\partial f_\mu}{\partial t_i}(0) = 0 \qquad (1 \le i \le r, 1 \le \mu \le q)$$

とすることができる. $\delta_M(z, w)$ を $(z, w) \in \mathbb{C}^n$ から M への Euclid 距離とし, $\varphi(z, w) := -\log\delta_M(z, w)$ とおく.

r 次正方行列 $\Phi(w)$ と $F_\mu(t)$ $(1 \le \mu \le q)$ を

$$\Phi(w) := \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0, w)\right)_{1\le i,j\le r}, \quad F_\mu(t) := \left(\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial t_i \partial t_j}(t)\right)_{1\le i,j\le r}$$

により定義し,

$$\mathcal{F}(w) := \sum_{\mu=1}^{q} \overline{F_\mu(0)} w_\mu.$$

とおく. $F_\mu(t)$ と $\mathcal{F}(w)$ は対称行列で, $\Phi(w)$ は Hermite 行列である.

このとき次が成り立つ.

Theorem. $\varepsilon > 0$ があって $0 < ||w|| < \varepsilon$ のとき,

$$\Phi(w) = \frac{1}{2||w||^2}\overline{\mathcal{F}(w)}\mathcal{F}(w)[E - \overline{\mathcal{F}(w)}\mathcal{F}(w)]^{-1}$$

となる. ここで $||w||^2 := \sum_{\mu=1}^{q} |w_\mu|^2$ で, E は単位行列を表す. 特に $0 < ||w|| < \varepsilon$ である各 w に対し, 2つの行列 $\Phi(w)$ と $\mathcal{F}(w)$ の rank は等しい.

3. M が $\mathbb{C}^n$ の complex hypersurface で $z_n = f(z_1, \ldots, z_{n-1})$ によって表されているとき, $-\log \delta_M$ の Levi form が接方向に常に退化する (少なくとも1つ固有値 0 を持つ) ための必要十分条件は, $\det(\partial^2 f / \partial z_i \partial z_j) \equiv 0$ となることであり, Fischer-Wu [2] により, この条件は M が (ほとんど至る所) 展開可能であることと同値である.

$r \ge 3$ かつ $q \ge 2$ の場合は, Levi form $L[-\log \delta_M]$ の退化から M の展開可能性は導かれないという例がある.

References

[1] G. Fischer and J. Piontkowski, "Ruled Varieties", Vieweg, Braunschweig, 2001.

[2] G. Fischer and H. Wu, Developable complex analytic submanifolds, Internat. J. Math. **6** (1995), 229–272.

[3] K. Matsumoto, Levi form of logarithmic distance to complex submanifolds and its application to developability, preprint.

[4] K. Matsumoto and T. Ohsawa, On the real analytic Levi flat hypersurfaces in complex tori of dimension two, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), to appear.

26 RADIAL CLUSTER SET OF BOUNDED HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN THE UNIT BALL OF $\mathbb{C}^n$

TOSHIO MATSUSHIMA

Ishikawa National College of Technology

1. Introduction and main results

Let $f(z)$ be a function in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, and let ζ be a boundary point. We discuss *the radial cluster set* of f at ζ

$$C_r(f,\zeta) = \bigcap_{T<1} \overline{\{f(t\zeta) : T < t < 1\}}$$

as a study of the boundary behavior of a function in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. The author has shown that various sets appear as a radial cluster set in **[1]**, and also has shown the existence of a bounded holomorphic function and map which has "big" radial cluster sets at arbitrarily given boundary points in **[2]**. In this talk we point out the "genus" of the radial cluster set. Our main results are as followings:

Theorem 1.1. *Let $\{\zeta_k\}_{k=1}^m$ be an arbitrary discrete subset of the boundary of the unit ball of $\mathbb{C}^n$, where $1 \le m < +\infty, n \ge 1$ and $\zeta_k \ne \zeta_l$ if $k \ne l$. Assume that $\{l_k\}_{k=1}^m$ be a set of arbitrary natural numbers. Then there exists a bounded holomorphic function $f(z)$ in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ such that $C_r(f,\zeta_k)$ is an l_k-ply connected set whose measure is positive.*

Theorem 1.2. *Let $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ be an arbitrary discrete subset of the boundary of the unit ball of $\mathbb{C}^n$, where $n \ge 1$ and $\zeta_k \ne \zeta_l$ if $k \ne l$. Assume that $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ be an arbitrary sequence of natural numbers. Then there exists a bounded holomorphic function $f(z)$ in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ such that $C_r(f,\zeta_k)$ is measure positive and $\mathbb{C}\backslash C_r(f,\zeta_k)$ contains a subset that has at least l_k connected components.*

2. Lemmas

We use the following notation:
$\langle z,w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k\overline{w_k}$, $|z| = \sqrt{\langle z,z\rangle}$ for $z=(z_1,\cdots,z_n)$, $w=(w_1,\cdots,w_n) \in \mathbb{C}^n$;
$B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $\overline{B_n} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \le 1\}$, $\Delta = B_1$,
$\partial B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ and $\|f\| = \sup_{z\in B_n} |f(z)|$ for a function f in B_n.

We use the following lemmas to prove the theorems:

Lemma 2.1. *Let z be a complex number, and let M be a non-negative real number. If $|\mathrm{Im}\ z| \leq M$, then $|\sin z| \leq \exp M$ and $|\cos z| \leq \exp M$.*

Lemma 2.2. *Let $(2\pi\mathbb{T})^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ be a torus of dimension n, and let $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \in (2\pi\mathbb{T})^n$ denote the residue class of modulus $(2\pi\mathbb{Z})^n$ to which $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ belongs. For $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, define the map*

$$\varphi : [0, +\infty) \ni t \longmapsto [x_1 + 2\pi\omega_1 t, x_2 + 2\pi\omega_2 t, \cdots, x_n + 2\pi\omega_n t] \in (2\pi\mathbb{T})^n$$

for arbitrarily fixed $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Then the image of φ is dense in $(2\pi\mathbb{T})^n$ if and only if $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ are linearly independent over $\mathbb{Z}$.

Lemma 2.3. *Let $g_1(z)$ and $g_2(z)$ be functions from B_n into $\mathbb{C}^m$, where $m \geq 1$. We denote by Λ the radial cluster set of $g_1(z)$ at a point $\zeta \in \partial B_n$. Suppose that $g_2(z)$ has the radial limit α at the point ζ, i.e.,*

$$\lim_{t \to 1} g_2(t\zeta) = \alpha \in \mathbb{C}^m.$$

Then the radial cluster set of $g_1 + g_2$ at ζ is $\Lambda + \alpha$.

Lemma 2.4. *Let ζ be an arbitrary point of ∂B_n. Assume that l is an arbitrary natural number. Then there exists a bounded holomorphic function $\tilde{f}(z)$ in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ such that $C_r(\tilde{f}, \zeta)$ is an l-ply connected set whose measure is positive.*

References

1. T. Matsushima, *Image of a radius by a holomorphic function and map on the unit disk of $\mathbb{C}$*, Math. J. Toyama Univ. **18** (1995), 97–106.
2. T. Matsushima, *Bounded holomorphic function with some boundary behavior in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Kodai Math. J. **24** (2001), 305–312.

特別講演

Hörmander 環における補間問題について

大内　重樹　　（国際基督教大学教養学部）

§0. 序文

X を $\mathbb{C}^n$ 上の解析的部分集合とし, p を $\mathbb{C}^n$ 上の多重劣調和関数とする. このとき, 次のような $\mathbb{C}^n$ 上の整関数に対する補間問題を考える.

問題. 正定数 A, B が X 上で

$$|f(z)| \le A\exp(Bp(z))$$

となるようにとれる任意の X 上の解析関数 f に対し, $\mathbb{C}^n$ 上の整関数 F が $F|_X \equiv f$ となり, F による正定数 A', B' をもって $\mathbb{C}^n$ 上

$$|F(z)| \le A'\exp(B'p(z))$$

となるようにとれるための X についての条件は何か?

一般に V を $\mathbb{C}^n$ の部分集合とするとき, 正定数 A, Bが任意の $z \in V$ に対し $|f(z)| \le A\exp(Bp(z))$ を満たすようにとれる V 上の解析関数 f のなす空間を $A_p(V)$ とおくことにすれば, 上の問題は, 「$A_p(X)$ が $A_p(\mathbb{C}^n)$ により補間されるための X についての条件とは?」ということができる. これが, (一番簡単な意味での) A_p補間問題である.

A_p補間問題は, 調和解析からのモチベーションから研究されてきた.

例えば, $p(z) = |\operatorname{Im} z| + \log(1 + |z|^2)$ のとき $A_p(\mathbb{C}^n) = \hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n)$ ($= \mathbb{R}^n$ 上にコンパクト台をもつ超関数の Fourier 変換のなす空間) である. $\mu_1, \ldots, \mu_N \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ で, $g_1, \ldots, g_N \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ($= C^\infty(\mathbb{R}^n)$) のとき, A_p補間問題は $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ についての畳み込み方程式 (convolution equation) の過剰決定系 $f * \mu_j = g_j \quad (j = 1, \ldots, N)$ の解についてのいくつかの問題と同値になる (cf., e.g. [BG2], [BT1], [BT2]). ここで, 解析的部分集合 X は, $\mu_1, \ldots, \mu_N \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ の Fourier 変換 $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_N \in \hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n) = A_p(\mathbb{C}^n)$ の共通零点集合である. しかし, このことは厳密に言うと正しくない. なぜなら, 考えるべきものが $A_p(\mathbb{C}^n)$ 内での $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_N$ によって生成されるイデアルであるからである. つまり, $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_N$ の「重複度込み」の零点を考える必要がでてくる. こうして, 「重複度多様体 (multiplicity variety)」の概念が発生する. もちろん, このときの A_p補間問題は少し修正される.

最近, A_p補間問題は調和解析とはある程度離れて一人歩きをしているように思われる. そこで, ここでは主に A_p補間問題を解く方を中心に考える. また, 重複度多様体については離散的な場合のみを考えることにする.

解析的部分集合 X が A_p補間問題の解かどうかを判定する条件の述べ方は, 次のような2つのタイプ (あるいは, その中間) に分類される.

(1) 解析的部分集合 X が大域的にある整関数の共通零点で定義されている (あるいは, その部分集合である) ことがわかっているときその整関数の性質を用いて判定する方法.

(2) 解析的部分集合 X を $\mathbb{C}^n$ 上の幾何的対象と見たときの性質 (例えば, 値分布や曲率など) を用いて判定する方法.

(1) は解析的条件, (2) は幾何的条件と呼ばれることがある.

§1. 準備

まず, 関数空間 $A_p(\mathbb{C}^n)$ を定義しよう. p を $\mathbb{C}^n$ 上の多重劣調和関数とする.

定義 1.1. 正定数 A, B が任意の $z \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$|f(z)| \leq A\exp(Bp(z))$$

を満たすようにとれるような $\mathbb{C}^n$ 上の整関数 f のなす空間を $A_p(\mathbb{C}^n)$ とかく.

$A(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}^n$ 上の整関数のなす環とすると, $A_p(\mathbb{C}^n)$ が $A(\mathbb{C}^n)$ の部分環になるのは明らか. そこで, この環 $A_p(\mathbb{C}^n)$ を **Hörmander 環**とよぶことがある.

以降, $\mathbb{C}^n$ 上の多重劣調和関数 p は次の性質を満たすと仮定する.

(W1) $p(z) \geq 0$, $\log(1+|z|^2) = O(p(z))$

(W2) 正定数 C_1, C_2 が存在して, $|z-\zeta| \leq 1$ ならば $p(\zeta) \leq C_1 p(z) + C_2$ を満たす.

上の (W1), (W2) を満たす $\mathbb{C}^n$ 上の多重劣調和関数は**ウエイト** (weight) と呼ばれる. この仮定をおく理由はそれに対応する Hörmander 環に関する次の命題が成立することである (cf., e.g. [BT1], [BT2], [BG2], [Ho2]).

命題 1.2. p が $\mathbb{C}^n$ 上のウエイトのとき以下が成立する.

(1) $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \subset A_p(\mathbb{C}^n)(\mathbb{C}^n)$.

(2) 空間 $A_p(\mathbb{C}^n)(\mathbb{C}^n)$ は微分により閉じている.

(3) $f \in A_p(\mathbb{C}^n)$ は任意の $z \in \mathbb{C}^n$ に対し $|f(z)| \leq A\exp(Bp(z))$ $(A,\ B > 0)$ を満たしていると仮定する. このとき, A, B, p のみに依存し f にはよらない正定数 A', B' が存在し, 任意の $z \in \mathbb{C}^n$ に対し

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|D^\alpha f(z)|}{\alpha!} \leq A' \exp(B'p(z))$$

が成立する. ただし, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, D^\alpha = \partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}/\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}$ である.

(4) $f \in A_p(\mathbb{C}^n)$ であることと, $f \in A(\mathbb{C}^n)$ で

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f|^2 \exp(-Kp) d\lambda < \infty$$

となる正定数 K が存在することは同値である. ただし, $d\lambda$ は $\mathbb{C}^n$ 上の Lebesgue 測度をあらわす.

例 1.3. ウエイト p と対応する Hörmander 環 $A_p(\mathbb{C}^n)$ のいくつかの例を挙げる.

(1) $p(z)=\log(1+|z|^2)$ のとき $A_p(\mathbb{C}^n)=\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ である.

(2) $p(z)=|z|^\sigma$ のとき

$$A_p(\mathbb{C}^n)=\{f\in A(\mathbb{C}^n):\text{「}(f\text{ の位数})=\sigma\text{ かつ }f\text{ は有限型」}\\ \text{あるいは「}(f\text{ の位数})<\sigma\text{」}\}$$

である. 特に, $\sigma=1$ のとき $A_p(\mathbb{C}^n)=\{$ 指数型整関数 $\}$ ということがわかる.

(3) $p(z)=|\operatorname{Im} z|+\log(1+|z|^2)$ のとき $A_p(\mathbb{C}^n)=\hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbb{R}^n$ 上のコンパクト台をもつ超関数の Fourier 変換のなす空間) である (cf. [Eh]). ただし, $\operatorname{Im} z=(\operatorname{Im} z_1,\ldots,\operatorname{Im} z_n)$ である.

(4) $p(z)=\exp(|z|^a)$ $(a>0)$ について, これがウエイトになるための必要十分条件は $a\le 1$ である.

次に, 離散的な場合の重複度多様体を定義する (cf., e.g. [BG1], [BG2]).

定義 1.4. (1) $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $|z_k|\nearrow\infty$ $(k\to\infty)$ となる $\mathbb{C}^n$ 内の点列とし, $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を自然数列とする. このとき, $V=\{(z_k,m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を**重複度多様体** (multiplicity variety) と呼び, m_k を z_k の**重複度** (multiplicity) と呼ぶ.

(2) $f_1,\ldots,f_N\in A(\mathbb{C}^n)\setminus\{0\}$ の共通零点集合が離散的であると仮定する. このとき, $f_1,\ldots,f_N$ の $z_k\in\mathbb{C}$ における共通零点としての位数がちょうど m_k (>0) のとき, 重複度多様体 $V(f)$ を $V(f)=\{(z_k,m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ で定義する.

増大度を考えなければ次のような補間定理が導かれる.

定理 1.5. **(補間定理)** $V=\{(z_k,m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を重複度多様体とし, $\{a_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{N},|\alpha|\le m_k-1}$ を $(n+1)$-重複素数列とする. このとき, 任意の $k\in\mathbb{N}$, $|\alpha|\le m_k-1$ に対し, $D^\alpha g(z_k)/\alpha!=a_{k,\alpha}$ となる $g\in A(\mathbb{C}^n)$ が存在する.

上の補間定理に似たようなものが $A(\mathbb{C}^n)$ のかわりに $A_p(\mathbb{C}^n)$ で成立するかどうかを考えるのが重複度多様体における $A_p(\mathbb{C}^n)$ 補間問題である.

次に, 重複度多様体 $V=\{(z_k,m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 上の解析関数を定義する.

定義 1.6. $V=\{(z_k,m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を重複度多様体とする. このとき,

(1) $I=I(V)=\{F\in A(\mathbb{C}^n): F$ は z_k で少なくとも m_k 位の零点をもつ $\}$ を V に付随した $A(\mathbb{C}^n)$ 内の閉イデアルと呼ぶ.

(2) $A(V)=A(\mathbb{C}^n)/I$ の元を V 上の解析関数と呼ぶ. これは, $(n+1)$-重複素数列

$$\{a_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{N};|\alpha|\le m_k-1}$$

と同一視される.

(3) 制限写像 $\rho_V: A(\mathbb{C}^n)\to A(V)$ を

$$\rho_V(f)=\left\{\frac{D^\alpha(z_k)}{\alpha!}\right\}_{k\in\mathbb{N};|\alpha|\le m_k-1}$$

によって定義する.

補間定理より ρ_V は全射であることがわかる. 次に, $A(V)$ の部分空間 $A_p(V)$ を定義しよう.

定義 1.7. $V=\{(z_k,m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を重複度多様体とする．このとき，正定数 A, B が任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し
$$\sum_{|\alpha|=0}^{m_k-1}|a_{k,\alpha}|\leq A\exp(Bp(z_k))$$
を満たすようにとれるような V 上の解析関数 $\{a_{k,l}\}_{k\in\mathbb{N};|\alpha|\leq m_k-1}$ のなす空間を $A_p(V)$ とかく．命題 1.2 (3) より $\rho_V(A_p(\mathbb{C}^n))\subset A_p(V)$ であるが，写像 $\rho_V:A_p(\mathbb{C}^n)\to A_p(\mathbb{C}^n)(V)$ が全射のとき V を $A_p(\mathbb{C}^n)$ **に関する補間多様体** (interpolating variety for $A_p(\mathbb{C}^n)$) と呼ぶ．

注意．ほかの空間を $A_p(V)$ と定義することもできたはずである．ところが，この定義を採用したのは調和解析への応用のためである (cf. [BG2], [BT1])．

また，(重複度なしの) $\mathbb{C}^n$ 上の解析的部分集合 X に対しても同様のことを定義しよう．$A(X)$ を X 上の解析関数のなす空間とする．制限写像 $\rho_X:A(\mathbb{C}^n)\to A(X)$ を $\rho_X(f)=f|_X$ により定義すると，ρ_X は全射になる (cf., e.g. [Ho3, p. 203])．

定義 1.8. X を $\mathbb{C}^n$ 上の解析的部分集合とする．このとき，正定数 A, B が任意の $z\in X$ に対し
$$|f(z)|\leq A\exp(Bp(z))$$
を満たすようにとれるような X 上の解析関数 f のなす空間を $A_p(V)$ とかく．もちろん $\rho_X(A_p(\mathbb{C}^n))\subset A_p(X)$ であるが，写像 $\rho_X:A_p(\mathbb{C}^n)\to A_p(X)$ が全射のとき X を $A_p(\mathbb{C}^n)$ **に関する補間多様体** (interpolating variety for $A_p(\mathbb{C}^n)$) と呼ぶ．

つまり，$A_p(\mathbb{C}^n)$ 補間問題とは「解析的部分集合 (あるいは重複度多様体) が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるための条件とは？」ということができる．

最後に，補間多様体であることを示すときに大変重要な**半局所補間定理** (semilocal interpolation theorem) を紹介する．$f=(f_1,\ldots,f_N)\in(A_p(\mathbb{C}^n))^N$ で $|f|^2=|f_1|^2+\cdots+|f_N|^2$ とおくとき，正定数 ε, C に対し $Z(f)=\{z\in\mathbb{C}^n:f_1(z)=\cdots=f_N(z)=0\}$ の近傍 $S_p(f;\varepsilon,C)$ を
$$S_p(f;\varepsilon,C)=\{z\in\mathbb{C}^n:|f(z)|<\varepsilon\exp(-Cp(z))\}$$
により定義する．($S_p(f;\varepsilon,C)$ は，$Z(f)$ の管状近傍のような役割をもつ.)

定理 1.9. (**半局所補間定理**, cf., [BG2], [BT1], [BT2]) ε, $C>0$ として，g を任意の $z\in S_p(f;\varepsilon,C)$ に対し $|g(z)|\leq A\exp(Bp(z))$ を満たす $S_p(f;\varepsilon,C)$ 上の正則関数とする．このとき，整関数 $G\in A_p(\mathbb{C}^n)$ と正定数 ε_1, C_1, A_1, B_1 と $S(f;\varepsilon_1,C_1)$ 上の正則関数 $h_1,\ldots,h_N$ があって，任意の $z\in S_p(f;\varepsilon_1,C_1)$ に対し
$$G(z)-g(z)=\sum_{j=1}^{N}f_j(z)h_j(z)$$
$$|h_j(z)|\leq A_1\exp(B_1p(z))\quad(j=1,\ldots,N)$$
を満たす．特に，$Z(f)$ 上で $G=g$ が成立する．また，$Z(f)$ が離散的な場合，$V(f)=\{(z_k,m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ とすると，任意の $k\in\mathbb{N},|\alpha|\leq m_k-1$ に対し
$$D^\alpha G(z_k)=D^\alpha g(z_k)$$

が成立する.

この定理の証明のためには Hörmander による L^2 理論 (cf. [Ho1], [Ho3]) がふんだんに用いられていることに注意する.

この半局所補間定理のために, 解析的部分集合 (あるいは重複度多様体) X が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であることを示すためには, 任意の $f \in A_p(X)$ が「A_p 性」を保ったまま $S(f;\varepsilon,C)$ という形をした近傍にまで拡張できることを示せばよいことがわかる.

§2. 1 変数の場合

まず, 解析的条件についての結果を述べる. $m_k = 1$ とすれば, 重複度のない場合もこの結果に含まれる.

定理 2.1. ([BL1]) $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を重複度多様体とする. このとき, V が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるための必要十分条件は, 整関数 $f \in A_p(\mathbb{C}^n)$ と正定数 ε, C が $V \subset V(f)$ であって, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\frac{|f^{(m_k)}(z_k)|}{m_k!} \geq \varepsilon \exp(-Cp(z_k))$$

を満たすようにとれることである. ただし, 2 つの重複度多様体 $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $W = \{(w_{k'}, n_{k'})\}_{k'\in\mathbb{N}}$ に対し $V \subset W$ であることは, 点列として $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\{w_{k'}\}_{k'\in\mathbb{N}}$ の部分列で $z_k = w_{k'}$ のとき $m_k \leq n_{k'}$ であることを意味する.

注意. [BL2] では, $A_p(\mathbb{C})$ 関数の商によって定義される $\mathbb{C}$ 上の有理型関数のなす空間 $M_p(\mathbb{C})$ に関する補間問題についても述べている.

次に, Nevanlinna の個数関数によって表示される幾何的条件について扱う. 以降, ウエイト p は**放射状** (radial) である, つまり, $p(z) = p(|z|)$ を満たしていると仮定する.

ここでは, ウエイト p が **2 倍条件** (doubling conditon) $p(2z) = O(p(z))$ を満たしていると仮定した結果を述べる.

注意. ウエイト p が 2 倍条件を満たすことと, ある正定数 κ が存在して $p(z) = O(|z|^\kappa)$ となることは同値であることがわかる. 一方, ウエイト性からでは, ある正定数 A が存在して $p(z) = O(\exp(A|z|))$ であることしかわからない. 実際, 例 1.3 (4) で述べたように $p(z) = \exp|z|$ はウエイトである.

定理 2.2. ([BL2]) p を 2 倍条件を満たす放射状ウエイトとし, $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を重複度多様体とする. このとき, V が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるための必要十分条件は正定数 A, B が存在して, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$N(|z|, V) \leq A + Bp(z) \tag{2.1}$$

となり, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$N(|z_k|, z_k, V) \leq A + Bp(z_k) \tag{2.2}$$

となることである. ただし, N は Nevanlinna の個数関数である.

この定理の十分性の証明は, 定理 3.1 の条件を満たす整関数 $f \in A_p(\mathbb{C}^n)$ を作る (Rubel-Taylor による Fourier 級数法 (cf., [RT]) が用いられていることに注意する.) ことで行わ

れる. (2.1) は, $V \subset V(f)$ となる整関数 $f \in A_p(\mathbb{C})$ の存在を示している評価式で, (2.2) は, 作った整関数 f の微分の評価に関係する評価式であるが, 実のところ, V 内の異なる 2 点があんまり接近していないことを示している式である. 実際, $V = \{(z_k, m_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるならば, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\min_{k'\neq k} |z_{k'} - z_k| \geq \varepsilon \exp(-Cp(z_k))$$

となる正定数 ε, C が存在することがわかっており, 定理 2.1 の必要性の証明に用いられる. (もちろん, 逆は成立しない.)

無限位数放射状ウエイト (例えば, $p(z) = \exp|z|$) の場合にも, 必要条件と十分条件が合致しないけれども Berenstein-Li により考察され (cf., [BL2]), また, 放射状じゃないウエイトについても, ウエイト $p(z) = |\operatorname{Im} z| + \log(1+|z|^2)$ のときは, Squires による研究 (cf., [Sq1], [Sq2]) や, Hartmann-Massaneda による研究 (cf., [HM]) などがなされている.

§3. 多変数の場合

まず, X が $\mathbb{C}^n$ の解析的部分集合の場合議論する. 次の結果は, $\mathbb{C}^n$ の解析的部分集合が離散的な場合の結果である.

定理 3.1. ([BL1]) $X = \{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ を離散多様体とする. このとき, X が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるための必要十分条件は, $m(\geq n)$ 個の整関数 $f_1, \ldots, f_m \in A_p(\mathbb{C}^n)$ と正定数 ε, C が $X \subset Z(f_1, \ldots, f_m)$ であって, 任意の $k \in \mathbb{N}$ と $u \in S^{2n-1}$ に対し

$$\sum_{j=1}^{m} |D_u f_j(\zeta_k)| \geq \varepsilon \exp(-CP(\zeta_k))$$

を満たすようにとれることである. ただし, $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ であって,

$$D_u f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial f(z)}{\partial z_n} u_n$$

は $u \in S^{2n-1}$ 方向に沿った f の方向微分である.

この定理は, Jacobi 行列を用いて言い換えることができる.

系 3.2. ([BL1]) $X = \{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ を離散多様体とする. このとき, X が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるための必要十分条件は, $m(\geq n)$ 個の整関数 $f_1, \ldots, f_m \in A_p(\mathbb{C}^n)$ と正定数 ε, C が $X \subset Z(f_1, \ldots, f_m)$ であって, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sum_{I,J} |\Delta_{I,J}(\zeta_k)| \geq \varepsilon \exp(-Cp(\zeta_k)) \tag{3.1}$$

を満たすようにとれることである. ただし, (3.1) の左辺は $f_1, \ldots f_m$ の Jacobi 行列 Jf の $n \times n$ 小行列の行列式の絶対値の和をあらわしている.

また, 離散多様体 X が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的であるとき, X についての Nevanlinna の個数関数の増大度の評価が得られている (cf., [LV], [Li]) .

ここで, 「離散多様体」を「様々な次元の複素アフィン部分空間の非交和」にかえ, 離散多様体のときを特別な場合として含むようにして定理 3.1 を拡張することができた. 命題を述べる前にいろいろ定義をする.

まず, $x_\nu(\nu \in \mathbb{N})$ を $\mathbb{C}^n$ 内の余次元 k_ν $(1 \leq k_\nu \leq n)$ の複素アフィン部分空間で, $\nu \neq \nu'$ のとき $X_\nu \cap X_{\nu'} = \emptyset$ であるとする. ただし, $k_\nu = n$ のときは $\mathbb{C}^n$ 内の 1 点をあらわす. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{C}^n$ 内の標準内積とし, $\nu \in \mathbb{N}$ に対し $N_\nu = \{v \in \mathbb{C}^n : \langle v, x-y \rangle = 0,\ \forall x, y \in X_\nu\}$ とおくと, 明らかに N_ν は $\mathbb{C}^n$ の k_ν 次線形部分空間になる. $S^{2n-1} = \{u \in \mathbb{C}^n : |u| = 1\}$ で $S_\nu = N_\nu \cap S^{2n-1}$ とおく.

定理 3.3. ([O1]) $X = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} X_\nu$ を上で定義したような様々な次元の複素アフィン部分空間の非交和とする. このとき, X が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるための必要十分条件は, $m(\geq \sup_{\nu \in \mathbb{N}} k_\nu)$ 個の整関数 $f_1, \ldots f_m \in A_p(\mathbb{C}^n)$ と正定数 ε, C が $X \subset Z(f_1, \ldots, f_m)$ であって, 任意の $\nu \in \mathbb{N}$, $\zeta \in X_\nu$, $u \in S_\nu$ に対し

$$\sum_{j=1}^{m} |D_u f_j(\zeta)| \geq \varepsilon \exp(-Cp(\zeta))$$

を満たすようにとれることである.

この定理により, X が複素アフィン部分空間の非交和のとき, [BT3] で提出された未解決問題の肯定的な解を与えることができる.

系 3.4. p, qを $p \leq q$ となるウエイトとする. このとき, 複素アフィン部分空間の非交和 X が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるならば, それは $A_q(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体でもある.

また, 証明すればわかることであるが, 複素アフィン部分空間の直和 X が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体であるとき, 定理 3.4 における m は $\sup_{\nu \in \mathbb{N}} k_\nu$ で十分であることがわかる. そこで, 定理 3.3 で $X = Z(f_1, \ldots, f_m)$ となるようにするためにはいくつの $A_p(\mathbb{C}^n)$ 関数が必要になるかという問題が導かれる. (この問題は, $A_p(\mathbb{C}^n)$ 内のイデアルに関係した問題である.) この問題については, $m = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} k_\nu + 1$ で十分であることを証明されている (cf., [O2]).

次に, X が滑らかな多様体 (smooth manifold) のときの一つの十分条件を与える.

定理 3.5. ([BT2], [BT3]) $X \subset \mathbb{C}^n$ を余次元 k の滑らかな多様体で, $f = (f_1, \ldots, f_N) \in (A_p(\mathbb{C}^n))^N$ をもって $X = Z(f)$ と表示され, 任意の $z \in X$ に対し $\operatorname{rank} Jf(z) = k$ であるとする. このとき, 正定数 ε, C が任意の $z \in X$ に対し

$$\sum_{I,J} |\Delta_{I,J}(z)| \geq \varepsilon \exp(-Cp(z)) \tag{3.2}$$

を満たすようにとれるならば, X は $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体である. ただし (3.2) の左辺は, f の Jacobi 行列 Jf の全ての $k \times k$ 小行列の行列式の絶対値の和をあらわしている.

定理 3.3 の結果を受けて, 今度は各複素アフィン部分空間を代数的集合にかえて議論したらどうなるかという問題が考えられる. そのためにはまず, X が代数的集合の場合には無条件で $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的であることがわかる (cf., [Bj], [Ho3], [O3]) ことが重要である. この結果を用いて, 代数的部分集合の可算個の非交和の特別な場合である離散的集合の多項式写像による逆像について一つの十分条件を与えることができた.

定理 3.6. ([O3]) $X = \{\zeta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$ を離散点列とする．また，$\mathbb{C}^m$ から $\mathbb{C}^n$ $(m \geq n)$ の多項式写像 $F = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]^n$ に対し，$d = \max_{j=1,\ldots,n} \deg F_j$ とおく．このとき，

(1) X は，$A_{|\cdot|^a}(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的である．

(2) 正定数 ε, C と有限部分集合 $E \subset \mathbb{N}$ が存在して，任意の $\nu \in \mathbb{N} \setminus E$, $z \in F^{-1}(\zeta_\nu)$ に対し

$$\sum_{\kappa=1}^{\binom{m}{n}} |\triangle_\kappa^F(z)| \geq \varepsilon \exp(-C|z|^{ad})$$

をみたす．ただし，左辺は F の Jacobi 行列 JF のすべての $n \times n$ 小行列式の絶対値の和である．

ならば，$F^{-1}(X)$ は任意の $b \geq ad$ に対して，$A_{|\cdot|^b}(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体である．

また，解析的部分集合 X の余次元が 1 のときには，Nevanlinna の個数関数を用いた 1 つの十分条件が示されている (cf., [BCL])．

重複度多様体 $V = \{(z_k, m_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対しては，$\{z_k\}$ の「管状近傍」$S_p(F;\varepsilon,C)$ の形状によって次のように必要十分条件が与えられる．

定理 3.7. ([LV1]) $V = \{(z_k, m_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を (離散的) 重複度多様体とする．このとき，V が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的であるための必要十分条件は，$m(\geq n)$ 個の整関数 $f_1, \ldots, f_m \in A_p(\mathbb{C}^n)$ と正定数 ε, C が存在して，$V \subset V(f_1, \ldots, f_m)$ であって，$S_p(F;\varepsilon,C)$ の各連結成分には高々 1 個の $\{z_k\}$ の点を含み，そのような連結成分の直径が高々 1 となることである．

また，カレントと Nevanlinna の個数関数を用いた一つの十分条件が与えられている．$\Theta = i\partial\bar{\partial}|z|^2$ を $\mathbb{C}^n$ 上の標準 Kähler 形式とする．

定理 3.8. ([HM]) p を 2 倍条件をみたすウエイトとするとき，重複度多様体 $V = \{(z_k, m_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，

(1) $(1,1)$-カレント $C|z|^2(i\partial\bar{\partial}p(z)) - \Theta n(|z|, z, V)$ は正である．

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し，$N(|z_k|, z_k, V) \leq Cp(z_k)$．

をみたす正定数 C が存在するとき，$A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的である．

この定理は，ウエイト p が放射状でないときも有効なので，その意味でも重要である．

§4. 擬凸領域における補間問題

A_p補間問題の $\mathbb{C}^n$ の特殊性を認識するため，Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸領域とし，X を Ω 上の解析的部分集合，V を Ω 上の重複度多様体として A_p補間問題を議論した．ただし，ここでの p は Ω-ウエイト，つまり，

(1) $\log(1 + |z|^2) = O(p(z))$ (Ω が非有界で，$|z| \to \infty$, $z \in \Omega$ のとき)

(2) $z \in \Omega$, $|z - \zeta| \leq \exp(-K_1 p(z) - K_2)$ のとき，$\zeta \in \Omega$, $p(\zeta) \leq K_3 p(z) + K_4$ となる正定数 K_1, K_2, K_3, K_4 が存在する (p が与えられたときには，これらの正定数は固定されたものとする)

を満たす非負値多重劣調和関数であり (以降, Ω-ウエイト p が与えられたときには, (2) 内の正定数は固定されたものとする), Ω-ウエイトが存在するための必要十分条件は Ω が擬凸であることである. ($\Omega = \mathbb{C}^n$ のとき, p が §3 までで定義したウエイトであるならば, $\mathbb{C}^n$-ウエイトでもある.)

実のところ, Ω 上の解析的部分集合 X に対する解析的条件 (例えば, 定理 3.1 など) については, $\mathbb{C}^n$ のときと同様の結果が得られた. よって, ここでは重複度多様体の場合を議論する.

まず, V を Ω 上の重複度多様体とするとき, §3 までと同じように $A_p(\Omega)$ や $A_p(V)$ は定義することはでき, 命題 1.2 の (1), (2), (4) に対応したものはそのまま成立するが, (3) に対応したものは成立しないことに注意する. 従って, 一般の擬凸領域 Ω に対しては必ずしも$\rho_X(A_p(\Omega)) \subset A_p(X)$ となっているとは限らず, これは, $\zeta \in \Omega$ を Ω との境界距離が 1 未満となる点とするとき, その ζ における Taylor 級数が中心 ζ 多重半径 $(1, \dots, 1)$ の多重円板で収束しない Ω 上の正則関数 f が存在することに起因する.

そこで, 関数空間 $A_p(V)$ を取りかえることで擬凸領域上の A_p補間問題を考えることにする. $\theta \in (0, 1]$ として $l_{p,\theta}(V)$ を

$$\sup_{\nu \in \mathbb{N}} |a_{\nu,\alpha}| \cdot \theta^{|\alpha|} \exp(-K_1 p(\zeta_\nu) - K_2) < +\infty$$

を満たす V 上の解析関数 $\{a_{\nu,\alpha}\}_{\nu \in \mathbb{N}, |\alpha| \le m_\nu - 1}$ のなす集合とする. このとき, $\theta \in [1/\sqrt{n}, 1]$ のときは重複度 m_ν に制限がつくが (実際, V があとで定義される $A_p(\Omega)$ に関して θ-補間的であるならば, 重複度 m_ν に関してこの重複度の制限よりも同等か強い必要条件が証明されるので, この重複度の制限は意味のあるものである), $\rho_V(A_p(\Omega)) \subset l_{p,\theta}(V)$ が証明される. この場合の A_p補間問題とは, V が $A_p(\Omega)$ に関して θ-補間的である, つまり, $\rho_V(A_p(\Omega)) = l_{p,\theta}(V)$ が成立するための V についての必要十分条件を見つける問題である. このとき, 次の定理が成立する.

定理 4.1. ([O4]) Ω 上の重複度多様体 $V = \{(z_k, m_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ が $A_p(\Omega)$ に関して θ-補間的であるための必要十分条件は, m 個の Ω 上の正則関数 $f_1, \dots, f_m \in A_p(\Omega)$ $(m \ge n)$ と正定数 ε, C が存在し, 以下が成立することである.

(1) 各 z_k は, 各 f_j の少なくとも m_k 位の零点である.
(2) $S_p(F; \varepsilon, C)$ の各連結成分は高々 1 つしか z_k を含まず, z_k を含む $S_p(F; \varepsilon, C)$ の連結成分の直径は高々 $\theta \exp(-K_1 p(z_k) - K_2)$ である.

この結果は, Li-Villamor による $\mathbb{C}^n$ の単位球 (具体的には $\mathcal{A}^{-\infty}$) の場合 ([LV2]) の一般化である.

References

[BCL] C. A. Berenstein, D. Chang and B. Q. Li, *Interpolating varieties and counting functions in* $\mathbb{C}^n$, Michigan Math. J. **42** (1995), 419–434.

[BG1] C. A. Berenstein and R. Gay, *Complex Variables, An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[BG2] ———, *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*, Springer, New York, 1995.

[BL1] C. A. Berenstein and B. Q. Li, *Interpolating varieties for weighted spaces of entire functions in* $\mathbb{C}^n$, Publicacions Matemàtiques (1994), 157–173.

[BL2] ———, *Interpolating varieties for spaces of meromorphic functions*, J. Geometric Analysis **5** (1995), 1–48.

[BT1] C. A. Berenstein and B. A. Taylor, *A new look at interpolation theory for entire functions of one variable*, Advances in Math. **33** (1979), 109–143.

[BT2] ———, *Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis*, J. Analyse Math. **38** (1981), 188–254.

[BT3] ———, *On the geometry of interpolating varieties*, Seminaire Lelong-Skoda (1980/1981), Lecture Notes in Math. **919**, Springer-Verlag, New York, pp. 1–25.

[Bj] J-E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[Eh] L. Ehrenpreis, *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, Interscience, New York, 1970.

[HM] A. Hartmann and X. Massaneda, *On interpolating varieties for weighted spaces of entire functions*, J. Geom. Anal. **10** (2000), 683–696.

[Ho1] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ opereator*, Acta Math. **113** (1965), 89–152.

[Ho2] ———, *Generators for some rings of analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 943–949.

[Ho3] ———, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables* 3rd ed., North-Holland, Amsterdam, 1990.

[Li] B. Q. Li, *On the Bézout problem and area of interpolating varieties in $\mathbb{C}^n$, II*, Amer. J. Math. **120** (1998), 1191–1198.

[LT] B. Q. Li and B. A. Taylor, *On the Bézout problem and area of interpolating varieties in $\mathbb{C}^n$*, Amer. J. Math. **118** (1996), 989–1010.

[LV1] B. Q. Li and E. Villamor, *Interpolating multiplicity varities in $\mathbb{C}^n$*, J. Geom. Anal. **11** (2001), 91–101.

[LV2] ———, *Interpolation in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Israel J. Math. **123** (2001), 341–358.

[O1] S. Oh'uchi, *Disjoint unions of complex affine subspaces interpolating for A_p*, Forum Math. **11** (1999), 369–384.

[O2] ———, *The number of functions defining interpolating varieties*, Kodai Math. J. **24** (2001), 66–75.

[O3] ———, *Interpolation on countably many algebraic subsets for weighted entire functions*, Osaka J. Math. **39** (2002), 1–25.

[O4] ———, *Interpolation in pseudoconvex domains*, Preprint.

[RT] L. A. Rubel and B. A. Taylor, *A Fourier series method for meromorphic and entire functions*, Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 53–96.

[S1] W. A. Squires, *Necessary conditions for universal interpolation in $\hat{\mathcal{E}}'$*, Can. J. Math. **3** (1981), 1356–1384.

[S2] ———, *Geometric conditions for universal interpolation in $\hat{\mathcal{E}}'$*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 401–413.