日 本 数 学 会

２００２年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

11階

２００２年３月

於　明治大学駿河台校舎

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (1) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (3) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (6) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (7) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (1) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる．
   (2) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      (i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      (ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (1) 委員会は評議員が召集する．
   (2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (3) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (4) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (1) 委員会の司会をする．
   (2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

第1日　3月28日 (木)

第VII会場　函数論

9:30~12:00

1	布川　　護	(群馬大教育)	* Some properties of analytic functions at extremal points for arguments	15
	尾和　重義	(近畿大理工)		
	斎藤　　斉	(群馬高専)		
	N. E. Cho	(釜慶大理)		
	高橋　典宏	(群馬大教育)		
2	B. MacCluer	(Univ. of Virginia)	* Topological structure of the space of composition operators on H^∞	15
	大野　修一	(日本工大工)		
	R. Zhao	(Univ. of Cincinnati)		
3	G. G. Gundersen	(Univ. of New Orleans)	* Unique range sets for polynomials or rational functions	15
	藤解　和也	(金沢大工)		
4	戸田　暢茂	(名工大)	* On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, Ⅲ	15
5	二村　俊英	(広島大理)	* Tangential limits and removable sets for weighted Sobolev spaces	15
	水田　義弘	(広島大総合科)		
6	宮本　育子	(千葉大理)	* シリンダーでのボイリング-ダールベルグ-ショグレン型の定理	15
	柳下　　稔	(千葉大自然)		
7	前田　文之	(広島工大)	* Perturbation theory for nonlinear Dirichlet problems	15
	小野　太幹	(福山大)		

14:15~14:45

8	中井　三留	(名工大)	無限葉平面の調和次元	15
9	相川　弘明	(島根大総合理工)	* Hölder coutinuity of Dirichlet solution for a general domain	15

15:00~17:15　特別講演

水田　義弘	(広島大総合科)	* 距離空間上のソボレフ関数について	(15:00~16:00)
須川　敏幸	(京大理)	* 退化 Beltrami 方程式　—古典的アプローチ—	(16:15~17:15)

第2日　3月29日 (金)

第VII会場　函数論

9:30〜12:00

10 西本　勝之　(デカルト出版) * Some identities and approximate expressions derived through the Riemann's zeta function ………… 5

11 A. Alawneh　(Univ. of Jordan) * Negative power series solutions for a class of linear ordinary differential equations using *N*-fractional method ………… 15
Z. Odibat (Al-Balqa' Applied Univ.)
西本　勝之　(デカルト出版)

12 藤川　英華　(東工大理工) * The order of conformal automorphisms on Riemann surfaces of infinite type ………… 15

13 野田　洋二　(東工大理) * 可換な整関数の Julia 集合 ………… 15

14 角　大輝　(東工大理) * 有理半群の作用素の空間におけるコンパクト化 ………… 15

15 松崎　克彦　(お茶の水女大理) * Moduli spaces for non-compact Riemann surfaces ………… 15

16 宍倉　光広　(京大理) * On multiply connected wandering domains ………… 15
木坂　正史　(京大人間環境)

17 宮地　秀樹　(阪市大理) * Two theorems on degenerate groups with bounded geometry ………… 15

18 奥山　裕介　(静岡大理) * Linearization problem on structurally finite entire functions ………… 15

13:00〜13:30

19 相原　義弘　(沼津高専) * Meromorphic mappings with deficiencies into complex projective spaces ………… 15
森　正気　(山形大理)

20 野口　潤次郎 (東大数理) 準アーベル多様体内の代数曲線と因子の交叉位数の評価 ………… 15
J. Winkelmann (KIAS)

13:45〜14:45　特別講演

梅野　高司　(九州産大工) * トロイダル群 — $\bar\partial$ コホモロジーと準アーベル多様体 —

1. Some properties of analytic functions at extremal points for arguments

MAMORU NUNOKAWA (Gunma University)
SHIGEYOSHI OWA (Kinki University)
HITOSHI SAITOH (Gunma College of Technology)
NAK EUN CHO (Pukyong National University)
NORIHIRO TAKAHASHI (Gunma University)

Let $\mathcal{N}$ be the class of all functions $p(z)$ that are analytic in the open unit disc $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ with $p(0) = 1$. Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in E.

Theorem 1. *Let $p(z) \in \mathcal{N}$ and $p(z) \neq 0$ in E. If there exist two points $z_1 \in E$ and $z_2 \in E$ such that*

$$-\frac{\pi\beta}{2} = \arg p(z_1) < \arg p(z) < \arg p(z_2) = \frac{\pi\alpha}{2}$$

for some α $(\alpha > 0)$, some β $(\beta > 0)$ and for all z $(|z| < |z_1| = |z_2|)$, then we have

$$\frac{z_1 p'(z_1)}{p(z_1)} = -i\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,m$$

and

$$\frac{z_2 p'(z_2)}{p(z_2)} = i\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,m$$

where

$$m \geq \frac{1-|a|}{1+|a|},$$

and

$$a = i\,\tan\frac{\pi}{4}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

Theorem 2. *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $f(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$ and*

$$-\frac{\pi\beta}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{1-|a|}{1+|a|}\right) < \arg f'(z)$$
$$< \frac{\pi\alpha}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{1-|a|}{1+|a|}\right) \qquad (z \in E)$$

with

$$a = i\,\tan\frac{\pi}{4}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right),$$

then

$$-\frac{\pi\beta}{2} < \arg\frac{f(z)}{z} < \frac{\pi\alpha}{2} \qquad (z \in E),$$

where $\alpha > 0$ and $\beta > 0$.

Corollary 1. *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $f(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$ and*

$$|\arg f'(z)| < \frac{\pi\alpha}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\alpha \qquad (z \in E),$$

then

$$|\arg\frac{f(z)}{z}| < \frac{\pi\alpha}{2} \qquad (z \in E),$$

where $\alpha > 0$.

Theorem 3. *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $f'(z) \neq 0$ $(z \in E)$ and*

$$-\frac{\pi\beta}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{1-|a|}{1+|a|}\right) < \arg(zf'(z))'$$
$$< \frac{\pi\alpha}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{1-|a|}{1+|a|}\right) \qquad (z \in E)$$

with

$$a = i\,\tan\frac{\pi}{4}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right),$$

then

$$-\frac{\pi\beta}{2} < \arg f'(z) < \frac{\pi\alpha}{2} \qquad (z \in E),$$

where $\alpha > 0$ and $\beta > 0$.

Corollary 2. *If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $f'(z) \neq 0$ $(z \in E)$ and*

$$|\arg(zf'(z))'| < \frac{\pi}{2}\alpha + \mathrm{Tan}^{-1}\alpha \quad (z \in E),$$

then

$$|\arg f'(z)| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in E),$$

where $\alpha > 0$.

2. Topological Structure of the Space of Composition Operators on H^∞

Barbara MacCluer University of Virginia
大野 修一 日本工業大・工学部
Ruhan Zhao University of Cincinnati

Let $\mathcal{H}(D)$ be the space of all analytic functions on the unit disk D. Let $\mathcal{S}(D)$ denote the set of all analytic self maps of the unit disk D. Every analytic self-map $\varphi \in \mathcal{S}(D)$ induces through composition a linear *composition operator* C_φ from $\mathcal{H}(D)$ to itself. Thus C_φ is defined by $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ for $f \in \mathcal{H}(D)$. For a Banach space X of analytic functions on the unit disk D, let $\mathcal{C}(X)$ denote the space of composition operators on X with topology induced by the operator norm. A central problem in the investigation of composition operators is to relate function theoretic properties of φ to operator theoretic properties of the restriction of C_φ to various Banach spaces of analytic functions. Here we study the topological structure of $\mathcal{C}(H^\infty)$, where H^∞ is the space of bounded analytic functions on D.

For the Hardy space H^2, the analogous problem has been considered by several authors. In 1981, Earl Berkson has discovered that certain highly non-compact composition operators on H^2 are isolated (that is, are singleton components) in the space $\mathcal{C}(H^2)$. The result has been further generalized by Barbara D. MacCluer (1989) and Joel H. Shapiro and Carl Sundberg (1990). Then J. H. Shapiro and C. Sundberg raised the following problems:

1. *Characterize the components of* $\mathcal{C}(H^2)$.
2. *Which composition operators are isolated in* $\mathcal{C}(H^2)$*?*
3. *Which composition differences are compact on* H^2*?*

These problems seem quite hard. For the Problem 1, however, Shapiro and Sundberg suggest the following conjecture:

The set of all composition operators that differ from the given one by a compact operator forms a component in $\mathcal{C}(H^2)$.

We are not intending to solve the above problems for H^2. Instead, we will study these problems on the simpler setting H^∞. We hope that our investigation for the case of H^∞ may give some clues for solving the original problems in the setting of H^2. For the setting of H^∞, we are able to solve the above problems almost completely. A surprising result is that, a component in $\mathcal{C}(H^\infty)$ is *not* in general the set of all composition operators that differ from the given one by a compact operator. Thus, Shapiro and Sundberg's conjecture is not true for the setting of H^∞.

Our results involve the pseudo-hyperbolic metric. For $z, w \in D$, the pseudo-hyperbolic distance between z and w is given by

$$\beta(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|.$$

We will also use the hyperbolic metric which is given by the following formula:

$$\rho(z,w) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\beta(z,w)}{1-\beta(z,w)}.$$

In the next result, and throughout the paper, $\|T\|$ denotes the norm of an operator T on H^∞.

Our main results are as follows.

Theorem 1. Let φ and ψ be analytic self maps of D. Then the following conditions are equivalent:

(i) C_φ and C_ψ are in the same path component in $\mathcal{C}(H^\infty)$.

(ii) $\|C_\varphi - C_\psi\| < 2$.

The next result deals with compact composition differences on H^∞. Let $\mathcal{B}$ be the Bloch space.

Theorem 2. Let φ and ψ be analytic self maps of the unit disk D, and let $\varphi \neq \psi$. Then the following conditions are equivalent:

(i) $C_\varphi - C_\psi : H^\infty \to H^\infty$ is compact;

(ii) $C_\varphi - C_\psi : B \to H^\infty$ is compact;

(iii) one of (a) or (b) holds:

(a) $\partial\varphi(D) \cap \partial D = \partial\psi(D) \cap \partial D = \emptyset$;

(b) $\partial\varphi(D) \cap \partial D = \partial\psi(D) \cap \partial D \neq \emptyset$ and

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \beta(\varphi(z), \psi(z)) = \lim_{|\psi(z)|\to 1} \beta(\varphi(z), \psi(z)) = 0.$$

3. Unique range sets for polynomials or rational functions

Gary G. Gundersen (University of New Orleans)
Kazuya Tohge (Kanazawa University)

We discuss what is known about *unique range sets* for polynomials or rational functions. We also discuss related results, including (i) rational functions that share three values, and (ii) sets which are almost (apart from exceptional cases) unique range sets for different classes of meromorphic functions.

Let $\mathcal{F}$ be a family of non-constant meromorphic functions defined on the plane **C**. Let S be a discrete subset of **C**. For each $f \in \mathcal{F}$, we define $E_f(S) = \bigcup_{a\in S}\{z : f(z) - a = 0\}$, where a zero of $f(z) - a$ of multiplicity m appears m times. The set S is called a **URSF**, *unique range set* for the family $\mathcal{F}$, provided that the following condition holds: If $f, g \in \mathcal{F}$ satisfy $E_f(S) = E_g(S)$, then $f \equiv g$. The condition $E_f(S) = E_g(S)$ expresses that f and g *share* the set S *CM* (counting multiplicities).

We denote by $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ and $\mathcal{R}$ the families of all non-constant entire functions, meromorphic functions on **C**, polynomials and rational functions, respectively, and we denote a unique range set for $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ or $\mathcal{R}$ by a **URSE**, **URSM**, **URSP** or **URSR**, respectively. Examples of *finite* URSEs and URSMs have been obtained by Yi, Li and Yang, Mues and Reinders, Fujimoto, Frank and Reinders, Shirosaki, and Shiffman. The existence of these finite sets leads naturally to the problem of trying to minimize the number of their elements. Let

$$\lambda(\mathcal{F}) := \min\Big\{|S| \ : \ S \text{ is a unique range set for the family } \mathcal{F}\Big\},$$

where $|S|$ denotes the cardinality of S. Li and Yang, and Yi gave examples which show that $\lambda(\mathcal{M}) \geq 5$ and $\lambda(\mathcal{E}) \geq 4$, and then Hua and Yang later gave examples which show that $\lambda(\mathcal{M}) \geq 6$ and $\lambda(\mathcal{E}) \geq 5$. Therefore, we see that $6 \leq \lambda(\mathcal{M}) \leq 11$ and $5 \leq \lambda(\mathcal{E}) \leq 7$.

We will show that $\lambda(P) = 3$ and $5 \leq \lambda(\mathcal{R}) \leq 10$. Hu and Yang gave an example of a URSR with *ten* elements. Hu and Yang also proved the following result, which shows that $\lambda(\mathcal{P}) \neq 2$, that is, there cannot exist a URSP with two distinct elements.

Theorem 1 *If $f \in \mathcal{M}$, and if $g := -f-a$, then $f^2+af+b = g^2+ag+b$. Thus there cannot exist a URSP with two elements.*

Conversely, suppose that P, $Q \in \mathcal{P}$ share the set $\{z : z^2 + az + b = 0\}$ $(a^2 \neq 4b)$ CM, where $P \not\equiv Q$. Then $P \equiv -Q - a$.

Next we prove that $\lambda(\mathcal{P}) = 3$, that is, there is a three point URSP.

Theorem 2 *For any a, $b \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, the set $S := \{w : w^3 + aw + b = 0\}$ is a URSP, whenever S has three distinct elements.*

Remark 1 Theorem 2 is equivalent to a characterization of Boutabaa, Escassut and Haddad in terms of affinely rigid sets (or stiff sets).

Now we see that $\lambda(\mathcal{R}) \geq 3$, as a corollary of Theorem 1. Pakovitch gave an example which shows that $\lambda(\mathcal{R}) \geq 4$. We will show that $\lambda(\mathcal{R}) \geq 5$.

If f, $g \in \mathcal{R}$ share a set $S = \{\alpha\}$ that consists of one element α, then we say that f and g share the value α. A shared value can be by *CM* (counting multiplicities), by *IM* (ignoring multiplicities), or by *DM* (by different multiplicities at every α-point of f and g).

Gross proved that if f, $g \in \mathcal{R}$ share three values CM, then $f \equiv g$. We prove the following improvement of this theorem:

Theorem 3 *If f, $g \in \mathcal{R}$ share two values CM and one value IM, then $f \equiv g$.*

Examples show that we cannot replace "two values CM and one value IM" with "one value CM and two values IM" in the hypothesis of Theorem 3 . We also give an example of two rational functions that share three values DM.

Adams and Straus proved that if f, $g \in \mathcal{R}$ share four values IM, then $f \equiv g$.

We will now give an example of a 10-point set Φ which is *not* a URSR, but except for one exceptional pair (f, g), we will see that $f \equiv g$ whenever f, $g \in \mathcal{R}$ share Φ CM. We give several consequences of this result and related results. One of the consequences proves that $\lambda(\mathcal{R}) \geq 5$.

Theorem 4 *Let $a, b \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ be chosen so that the set $\Phi = \{z : z^{10} + az^9 + b = 0\}$ has ten distinct elements. If f, $g \in \mathcal{R}$ share Φ CM, then we have $f \equiv g$ unless*

$$f(z) = \frac{ap(z)\{p^9(z) - \omega q^9(z)\}}{q^{10}(z) - p^{10}(z)}, \quad g(z) = \frac{aq(z)\{p^9(z) - \omega q^9(z)\}}{\omega\{q^{10}(z) - p^{10}(z)\}}, \qquad (1)$$

where p and q are polynomials and ω is a 10th root of unity.

To prove this result, we apply a particular case of the Cartan-Hayman theorem.

Remark 2 1) Yi obtained a result for the family $\mathcal{M}$ that is similar in nature to Theorem 4 , and Yi used his result to give examples of finite sets which are URSEs but not URSMs.

2) The two rational functions in (1) share ∞ CM. We use this observation to show that any set of *four* elements cannot be a URSR.

4. On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, III

TODA Nobushige   Nagoya Institute of Technology

1. Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a trascendental and linearly non-degenerate holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\},$$

where n is a positive integer.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position; that is to say, (i) $\#X \geq N+1$ and (ii) any $N+1$ elements of X generate $\boldsymbol{C}^{n+1}$, where N is an integer satisfying $N \geq n$.

We denote by $T(r, f)$ the characteristic function of f and by $\delta(\boldsymbol{a}, f)$ the deficiency of $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ with respect to f.

H. Cartan([1],$N = n$) and E. I. Nochka([2],$N > n$) proved the following

Defect relation. $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1.$

We are interested in the holomorphic curves extremal in the defect relation.

Theorem A([3], [4]). Suppose that

(i) $N > n = 2m$ $(m \in \boldsymbol{N})$ and (ii) $\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1$.

Then, there are at least $[(2N - n + 1)/(n+1)] + 1$ vectors $\boldsymbol{a} \in X$ satisfying $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 1$.

The purpose of this talk is to give a theorem when $n = 2m - 1$.

2. Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a subset of X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in P\}, \quad d(P) = \dim V(P),$$

$$\mathcal{O} = \{P \subset Q \mid 0 < \#P \leq N + 1\}.$$

Further we put $\lambda = \min_{P \in \mathcal{O}} d(P)/\#P$. Then
$1/(N - n + 1) \leq \lambda \leq (n+1)/(N+1)$ and

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq \min(2N - n + 1, (n+1)/\lambda). \tag{1}$$

Theorem. Suppose that

(i) $N > n = 2m-1$ and $(N+1, m) = 1$ $(m \in N)$ and

(ii) there exist $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$ $(2N-n+1 < q < \infty)$ satisfying $\delta(\boldsymbol{a}_j, f) > 0$ $(j = 1, \cdots, q)$ and

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1.$$

Then, either (I) or (II) given below holds:

(I) There exist at least $[(2N-n+1)/(n+1)]+1$ integers $j \in Q$ satisfying $\delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 1$.

(II) q is divisible by $N-m+1$ and $Q = \cup_{\nu=1}^{p} P_\nu$,

where (a) $p = q/(N-m+1)$, (b) $P_1, \cdots, P_p$ are mutually disjoint and (c) $d(P_\nu) = m, \# P_\nu = N - m + 1$ $(\nu = 1, \cdots, p)$.

Proof. From (1) and (ii) we obtain the inequality $\lambda \leq (n+1)/(2N-n+1)$, which is equal to $m/(N-m+1)$ by (i).

When $\lambda < m/(N-m+1)$, we have (I) and when $\lambda = m/(N-m+1)$, we have (II).

Remark. We can prove a similar result to this theorem when $q = \infty$.

References

[1] H. Cartan : Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica **7**(1933), 5-31.

[2] E. I. Nochka : On the theory of holomorphic functions. Soviet Math. Dokl., **27**-2(1983), 377-381.

[3] N. Toda : On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum. Kodai Math. J., **24**-1(2001), 134-146.

[4] N. Toda : On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, II. Proceedings of the 3rd ISAAC Congress (to appear).

5. Tangential limits and removable sets for weighted Sobolev spaces

二村俊英　広島大大学院・理学研究科
水田義弘　広島大学・総合科学部

$p > 1$, $-1 < \alpha < p-1$ に対して，

$$d\mu_\alpha(x) = |x_n|^\alpha dx \quad (x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R})$$

を重みとするソボレフ空間 $W^{1,p}(\Omega; \mu_\alpha)$ を考える．

Ω を $\mathbf{R}^n$ 内の開集合で，E を測度零の Ω 内の部分閉集合とする．このとき，集合 E が $W^{1,p}(\Omega; \mu_\alpha)$ で除去可能であるとは，$W^{1,p}(\Omega \setminus E; \mu_\alpha) = W^{1,p}(\Omega; \mu_\alpha)$ となるときを言う．すなわち，任意の $u \in W^{1,p}(\Omega \setminus E; \mu_\alpha)$ に対して，$\Omega \setminus E$ 上ほとんど至る所で $u = u_0$ となる $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mu_\alpha)$ が存在する．一般に，除去可能集合は quasiconvex であることが知られている．本講演の目的は，超平面 $\mathbf{R}^{n-1} = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$ 内にある集合 E が $W^{1,p}(\mathbf{R}^n; \mu_\alpha)$ で除去可能であるための十分条件を与えることである．

命題. $1 < p \le n + \alpha$, $-1 < \alpha < p - 1$ で，集合 E を $\mathbf{R}^{n-1}$ 内の部分閉集合とする．このとき，次は同値である．

(1) E は $W^{1,p}(\mathbf{R}^n; \mu_\alpha)$ で除去可能である;

(2) 任意の $\mathbf{R}^n \setminus E$ 上の (p, α)-仮似連続関数 $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n \setminus E; \mu_\alpha)$ に対して，$\mathcal{H}^{n-1}$- a.e. $(x', 0) \in E$ で次が成り立つ：

$$\lim_{0<t\to 0} u(x', t) = \lim_{0>t\to 0} u(x', t);$$

(3) 任意の $\mathbf{R}^n \setminus E$ 上の (p, α)-仮似連続関数 $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n \setminus E; \mu_\alpha)$ に対して，$\mathcal{H}^{n-1}$- a.e. $\xi \in E$ で次が成り立つ：

$$\lim_{\Gamma(\xi,a)\ni x\to\xi} \fint_{B(x,x_n/2)} u \, d\mu_\alpha = \lim_{\Gamma(\xi,a)\ni \hat{x}\to\xi} \fint_{B(x,-x_n/2)} u \, d\mu_\alpha \quad (\forall a > 0).$$

ここに，$x = (x', x_n)$ に対して $\hat{x} = (x', -x_n)$ とし，$\xi \in \mathbf{R}^{n-1}$, $a > 0$ に対して，

$$\Gamma(\xi, a) = \begin{cases} \{x \in \mathbf{R}^n_+ : |x - \xi|^{\frac{n-1}{n+\alpha-p}} < a x_n\} & (1 < p < n + \alpha) \\ \{x \in \mathbf{R}^n_+ : |x - \xi| \exp(-|x - \xi|^{-\frac{n-1}{n+\alpha-1}}) < a x_n\} & (p = n + \alpha) \end{cases}$$

とする．

定義. $E \subset \mathbf{R}^{n-1}$ が (p, α)-porous であるとは，$\mathcal{H}^{n-1}$- a.e. $x \in E$ に対して，次のような $r_i = r_i(x)$, $r_i \to 0$, と定数 $C_x > 0$ が存在するときを言う：

(i) $1 < p \le n + \alpha - 1$ のとき, 各 i に対して $B_i \subset B^{n-1}(x, r_i) \setminus E$ で $R_i = \mathrm{diam}(B_i) \ge C_x r_i^{(n-1)/(n+\alpha-p)}$ となる球 B_i が存在する.

(ii) $n + \alpha - 1 < p < n + \alpha$ のとき, 各 i に対して $F_i \subset B^{n-1}(x, r_i) \setminus E$ で $R_i = \mathrm{diam}(F_i) \ge C_x r_i^{(n-1)/(n+\alpha-p)}$ となる連続体 F_i が存在する.

(iii) $p = n + \alpha$ のとき, 各 i に対して $F_i \subset B^{n-1}(x, r_i) \setminus E$ で $R_i = \mathrm{diam}(F_i) \ge C_x r_i \exp(-C_x r_i^{(n-1)/(1-n-\alpha)})$ となる連続体 F_i が存在する.

ここに, $B^{n-1}(x, r) = B(x, r) \cap \mathbf{R}^{n-1}$, $B(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n : |x - y| < r\}$ とする.

主定理. $1 < p \le n + \alpha$, $-1 < \alpha < p - 1$ で, 集合 E を $\mathbf{R}^{n-1}$ 内の部分閉集合とする. このとき, E が (p, α)-porous であるならば, E は $W^{1,p}(\mathbf{R}^n; \mu_\alpha)$ で除去可能である.

注意. $p > n + \alpha$ のとき, $\mathbf{R}^n$ 上の (p, α)-仮似連続関数 $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n; \mu_\alpha)$ の超平面 $\mathbf{R}^{n-1}$ への制限 $u|\mathbf{R}^{n-1}$ は, $(p - n - \alpha)/p$ - 次の Hölder 連続な関数となるので次のことが言える : $E \subset \mathbf{R}^{n-1}$ が除去可能であるための必要十分条件は, E が内点を持たないことである.

参考文献

[1] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Oxford University Press, 1993.

[2] J. Heinonen and P. Koskela, Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry, Acta. Math. **181** (1998), 1-61.

[3] R. Kaufman and J.-M. Wu, On removable sets for quasiconformal mappings, Ark. Mat. **34** (1996), 141-158.

[4] P. Koskela, Removable sets for Sobolev spaces, Ark. Mat. **37** (1999), 291-304.

[5] S. Matsumoto and Y. Mizuta, On the existence of tangential limits of monotone BLD functions, Hiroshima Math. J. **18** (1996), 323-339.

[6] Y. Mizuta, On the behavior of potentials near a hyperplane, Hiroshima Math. J. **13** (1983), 529-542.

[7] Y. Mizuta, Boundary behavior of p-precise functions on a half space of $\mathbf{R}^n$, Hiroshima Math. J. **18** (1988), 73-94.

[8] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosyo, Tokyo, 1996.

[9] J.-M. Wu, Removability of sets for quasiconformal mappings and Sobolev spaces, Complex Variables Theory Appl. **37** (1998), 491-506.

6. シリンダーでのボイリング - ダールベルグ - ショグレン型の定理

柳下　稔　　千葉大・自然
宮本　育子　千葉大・理

D を $\mathbf{R}^{n-1}(n \geq 2)$ 上の滑らかな境界をもつ有界領域とし,

$$\Gamma_n(D) = \{(X, y) \in \mathbf{R}^n; X \in D, -\infty < y < +\infty\}$$

をシリンダーと呼ぶ.

ディリクレ問題

$$\begin{aligned}(\Delta_n + \tau)f &= 0 \quad \text{on } D\\ f &= 0 \quad \text{on } \partial D,\end{aligned}$$

の最小な正の固有値と, 正規化した固有関数をそれぞれ τ_D, $f_D(X)$ で表す.

$\Gamma_n(D)$ のマルチン境界は集合 $\partial\Gamma_n(D) \cup \{+\infty, -\infty\}$ であり, ある適当な基準点に関するマルチン核を $K(P, Q)$ $(P \in \Gamma_n(D), Q \in \partial\Gamma_n(D) \cup \{+\infty, -\infty\})$ で表す時,

$$K(P, +\infty) = e^{\sqrt{\tau_D} y} f_D(X), \quad (P = (X, y) \in \Gamma_n(D))$$

である事が知られている.

$\Gamma_n(D)$ の部分集合 E が $+\infty$ で minimally thin であるとは,

$$\hat{R}^E_{K(\cdot, +\infty)}(P) \neq K(P, +\infty),$$

なる $P \in \Gamma_n(D)$ が存在するときをいう.

$$\Gamma_n(D; 0, +\infty) = \{P = (X, y) \in \mathbf{R}^n; X \in D, y > 0\}$$

とする.

シリンダー内のボイリング - ダールベルグ - ショグレン型の次の定理を報告する.

定理 1. $\Gamma_n(D)$ のボレル部分集合 $E(\subset \Gamma_n(D; 0, +\infty))$ が $+\infty$ で minimally thin であるとき, E のルベーグ測度を $|E|$ とすれば

$$|E| < \infty \tag{$*$}$$

が成り立つ. 更に, $E(\subset \Gamma_n(D; 0, +\infty))$ が $\Gamma_n(D)$ の Whitney cube からの cube の和であるとき, $(*)$ は E が $+\infty$ で minimally thin であることの十分な条件である.

この定理の証明には, 滑らかな境界を持つ有界領域における同種の結果の証明 ([1] 参照) を参考にし, [3] を用いる.

また E が $+\infty$ で minimally thin であることの同値な条件 ([3] 参照), 及び定理 1 を用いると以下の定理 2, 定理 3 を得る.

定理 2 (ダールベルグ [2] 型の定理). ボレル可測集合 $E(\subset \Gamma_n(D))$ が

$$|E| = \infty$$

を満たすと仮定する. $v(P)$ を $\Gamma_n(D)$ 上正値優調和な関数, m を正の数で E 上で $v(P) \geq mK(P, +\infty)$ を満たすとする. このとき $\Gamma_n(D)$ 全体で不等式 $v(P) \geq mK(P, +\infty)$ を満たす.

定理 3 (ショグレン [4] 型の定理). $v(P)$ を $\Gamma_n(D)$ 上の正値優調和関数で

$$\inf_{P \in \Gamma_n(D)} \frac{v(P)}{K(P, +\infty)} = 0$$

を満たすとする. このとき

$$|M_v| < \infty,$$

ただし,

$$M_v = \{P \in \Gamma_n(D); v(P) \geq K(P, +\infty\}.$$

参考文献

[1] H. Aikawa and M. Essén, Potential Theory-Selected Topics, Lect. Notes in Math. 1633, Springer-Verlag, 1996.

[2] B. E. Dahlberg, A minimum principle for positive harmonic functions, Proc. London Math. Soc. (3) **33**(1976), 238-250.

[3] I. Miyamoto, Two criterions of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cylinder, preprint.

[4] P. Sjögren, Une propriete des functions harmoniques positives d'apres Dahlberg. Séminaire de théorie du potentiel in Math. 563, Springer-Berlin, 1976, 275-282.

7. Perturbation theory for nonlinear Dirichlet problems

Fumi-Yuki MAEDA (Hiroshima Institute of Technology)
Takayori ONO (Fukuyama University)

Let Ω be a fixed domain in $\mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ and as in [MO1] and [MO2] we consider a quasi-linear elliptic differential equation

$$(\mathrm{E}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \qquad -\operatorname{div} \mathcal{A}(x, \nabla u(x)) + \mathcal{B}(x, u(x)) = 0$$

on Ω. Here, $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ and $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfy the following conditions for $1 < p < \infty$ and a *weight* w which is *p-admissible* in the sense of [HKM]:

(A.1) $x \mapsto \mathcal{A}(x, \xi)$ is measurable on Ω for every $\xi \in \mathbf{R}^N$ and $\xi \mapsto \mathcal{A}(x, \xi)$ is continuous for a.e. $x \in \Omega$;

(A.2) $\mathcal{A}(x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha_1 w(x)|\xi|^p$ for all $\xi \in \mathbf{R}^N$ and a.e. $x \in \Omega$ with a constant $\alpha_1 > 0$;

(A.3) $|\mathcal{A}(x, \xi)| \leq \alpha_2 w(x)|\xi|^{p-1}$ for all $\xi \in \mathbf{R}^N$ and a.e. $x \in \Omega$ with a constant $\alpha_2 > 0$;

(A.4) $\big(\mathcal{A}(x, \xi_1) - \mathcal{A}(x, \xi_2)\big) \cdot \big(\xi_1 - \xi_2\big) > 0$ whenever $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^N$, $\xi_1 \neq \xi_2$, for a.e. $x \in \Omega$;

(B.1) $x \mapsto \mathcal{B}(x, t)$ is measurable on Ω for every $t \in \mathbf{R}$ and $t \mapsto \mathcal{B}(x, t)$ is continuous for a.e. $x \in \Omega$;

(B.2) For any open set $D \Subset \Omega$, there is a constant $\alpha_3(D) \geq 0$ such that $|\mathcal{B}(x, t)| \leq \alpha_3(D)w(x)(|t|^{p-1} + 1)$ for all $t \in \mathbf{R}$ and a.e. $x \in D$;

(B.3) $t \mapsto \mathcal{B}(x, t)$ is nondecreasing on $\mathbf{R}$ for a.e. $x \in \Omega$.

A continuous solution of $(\mathrm{E}_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$ in an open set $D \subset \Omega$ is called $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*harmonic* in D. We consider the following function spaces:

$$\mathcal{D}^p(\Omega; \mu) = \{f \in H^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mu) \mid |\nabla f| \in L^p(\Omega; \mu), f \text{ is bounded continuous}\},$$

$$\mathcal{D}^p_0(\Omega; \mu) = \left\{ f \in \mathcal{D}^p(\Omega; \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there exist } \varphi_n \in C_0^\infty(\Omega) \text{ such that } \varphi_n \to f \text{ a.e. ,} \\ \{\varphi_n\} \text{ is uniformly bounded, } \nabla\varphi_n \to \nabla f \text{ in } L^p(\Omega; \mu) \end{array} \right\},$$

where μ is a measure defined by $d\mu(x) = w(x)dx$. We say that Ω is (p, μ)-hyperbolic if $1 \notin \mathcal{D}^p_0(\Omega; \mu)$. In this paper, we always assume that Ω is (p, μ)-hyperbolic

We consider the following function spaces:

$$\mathcal{F}_b(\mathcal{A}) = \left\{ f \in L^1(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} f/w \text{ is locally bounded in } \Omega \text{ and} \\ -\operatorname{div} \mathcal{A}(x, \nabla u) = f \text{ has a solution in } \mathcal{D}^p_0(\Omega; \mu) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{F}_b^+(\mathcal{A}) = \{f \in \mathcal{F}_b(\mathcal{A}) \mid f \geq 0\} \text{ and } \mathcal{F}_b^-(\mathcal{A}) = \{f \in \mathcal{F}_b(\mathcal{A}) \mid f \leq 0\}.$$

For $f \in \mathcal{F}_b(\mathcal{A})$, the solution of $-\mathrm{div}\,\mathcal{A}(x, \nabla u) = f$ in $\mathcal{D}_0^p(\Omega; \mu)$ will be denoted by U^f.

In addition to (B.1), (B.2) and (B.3), we shall always assume that $\mathcal{B}$ satisfies the following condition (B.4) and (B.5):

(B.4) There exist nonnegative numbers T_1, T_2, functions $f_1 \in \mathcal{F}_b^+(\mathcal{A})$ and $f_2 \in \mathcal{F}_b^-(\mathcal{A})$ such that $\mathcal{B}^-(x, T_1) \leq f_1(x)$ and $\mathcal{B}^+(x, -T_2) \leq -f_2(x)$ a.e. in Ω.

(B.5) $\int_\Omega |\mathcal{B}(x,t)|dx < \infty$ for any $t \in \mathbf{R}$.

Theorem 1. *Let $\theta \in \mathcal{D}^p(\Omega; \mu)$. Then , there exists a unique $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-harmonic function $u_{(\mathcal{A},\mathcal{B},\theta)}$ on Ω such that $u_{(\mathcal{A},\mathcal{B},\theta)} - \theta \in \mathcal{D}_0^p(\Omega; \mu)$. Further it satisfies*

$$\min(-T_2, \inf_{\partial\Omega} \theta) + U^{f_2}(x) \leq u_{(\mathcal{A},\mathcal{B},\theta)}(x) \leq \max(T_1, \sup_{\partial\Omega} \theta) + U^{f_1}(x)$$

on Ω. Here, $\sup_{\partial\Omega} \theta = \inf\{k \mid (\theta - k)^+ \in \mathcal{D}_0^p(\Omega; \mu)\}$ *and* $\inf_{\partial\Omega} \theta = \sup\{k \mid (\theta - k)^- \in \mathcal{D}_0^p(\Omega; \mu)\}$.

Theorem 2. *Suppose $\mathcal{B}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ and $\mathcal{B}$ all satisfy* (B.4) *with the same T_1, T_2, $f_1 \in \mathcal{F}_b^+(\mathcal{A})$, $f_2 \in \mathcal{F}_b^-(\mathcal{A})$. Let $\theta \in \mathcal{D}^p(\Omega; \mu)$. Assume further that there exists a nonnegative measurable function $b(x)$ on Ω such that $b(x)/w(x)$ is locally bounded in Ω and*

$$\mathcal{B}_n^+(x, M_1) + \mathcal{B}_n^-(x, -M_2) \leq b(x) \quad a.e.\ on\ \Omega$$

for all n, where $M_1 = \max(T_1, \sup_{\partial\Omega} \theta) + \sup_\Omega U^{f_1}$ and $M_2 = \max(T_2, -\inf_{\partial\Omega} \theta) - \inf_\Omega U^{f_2}$. If

$$\int_\Omega \sup_{-M_2 \leq t \leq M_1} |\mathcal{B}_n(x,t) - \mathcal{B}(x,t)|\, dx \to 0 \quad (n \to \infty) \quad ,$$

then $u_{(\mathcal{A},\mathcal{B}_n,\theta)} \to u_{(\mathcal{A},\mathcal{B},\theta)}$ as $n \to \infty$ locally uniformly on Ω.

References

[HKM] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, Clarendon Press, 1993.

[MO1] F-Y. Maeda and T. Ono, Resolutivity of ideal boundary for nonlinear Dirichlet problems, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 561-581.

[MO2] F-Y. Maeda and T. Ono, Properties of harmonic boundary in nonlinear potential theory, Hiroshima Math. J. **30** (2000), 513-523.

8. 無限葉平面の調和次元

中井　三留　　名工大 (名誉教授)

開リーマン面Rのマルチン極小境界点の全体$\Delta_1(R)$の濃度card $\Delta_1(R)$をRの**調和次元**と呼び（Heins [4]）記号dim Rで表す（即ち，dim $R :=$ card $\Delta_1(R)$）と，常に$1 \leq$ dim $R \leq \aleph$（連続体濃度）であるので，dimは開リーマン面の族から濃度の閉区間$[1, \aleph]$（即ち，$1 \leq \xi \leq \aleph$となる濃度ξの全体）への写像と考えられる．だから開リーマン面のある族$\mathcal{F}$の写像dimの値域をdim $\mathcal{F}$とかく（即ち，dim $\mathcal{F} := \{\text{dim } R : R \in \mathcal{F}\}$）．理想境界成分が唯一つである放物面（即ち，族$O_G$に入る面）$R$を**Heins 面**と呼びその全体を$\mathcal{H}$と記すとき，dim $\mathcal{H}$を決定せよと言うのが**Heins の問題**であり現時点での最良の結果は

$$\text{(1)} \qquad \text{dim } \mathcal{H} \supset \mathrm{N} \cup \{\aleph_0, \ \aleph\}$$

である（発表順に[4],[5],[3],[2],[9],[7]等の結果の綜合；統一的証明については[8]参照），但し，Nは正整数の全体で，$\aleph_0$は可算無限濃度とする．

複素平面Cの正規被覆面R，詳しくは三揃え(R, C, π)，の集合を$\mathcal{C}$とかく．ここで正規性は射影πが次の性質を持つ事とする（Ahlfors-Sario [1])）：各$a \in \mathrm{C}$に対し，中心a半径$0 < r < \infty$の適当な円板$V := \Delta(a, r)$で，$\pi^{-1}(V)$の各成分が相対完閉となるものがとれる．この時各$R \in \mathcal{C}$の葉数$\sigma(R)$が定まり，葉数$\xi \in \mathrm{N} \cup \{\aleph_0\}$のCの正規被覆面の全体を$\mathcal{C}_\xi := \{R \in \mathcal{C} : \sigma(R) = \xi\}$と記すと．$\mathcal{C} = (\cup_{p \in \mathrm{N}} \mathcal{C}_p) \cup \mathcal{C}_{\aleph_0}$．今回は**多葉平面の Heins 問題**を論ずる：$\text{dim}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C})$を決定せよ．これに関しては，$p \in \mathrm{N}$のとき，Heins [4]自身による結果

$$\text{(2)} \qquad \text{dim}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_p) \subset [1, p]$$

及びMasaoka-Segawa [6]に代表される上の結果(2)の精密化

$$\text{(3)} \qquad \text{dim}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_p) = [1, p]$$

に係わる一連の詳しい研究がある．しかし調和次元については，有限葉平面族$\mathcal{C}_p$ ($p \in \mathrm{N}$) の場合に較べて無限葉平面族$\mathcal{C}_{\aleph_0}$の場合は大変難しくあまり成果の集積は多くないように思われるが，ここでは上の (2) と (3)，特に，(3) に注目した素朴な疑問として，その形式的な類似（類推）（即ち，(3) の$p \in \mathrm{N}$を単に$\aleph_0$に置き換えた）

$$(?) \qquad \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{\aleph_0}) = [1, \aleph_0]$$

は正しいか否かを問題にする．答えは否であり，次の結果を得たので報告する：

主定理：　族$\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{\aleph_0}$は葉数$\aleph_0$を越えた調和次元$\aleph$を持つCの正規被覆Heins面を含み，更に次の (1) の精密化が成り立つ：

$$(4) \qquad \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{\aleph_0}) \supset \mathrm{N} \cup \{\aleph_0, \aleph\}.$$

無論 (1) 同様 (4) でも，包含関係は連続体仮説の成立を仮定すると等号で置き換えられ，限定的な場合も含めてHeinsの問題は完全な解決を見るが，仮定しない時は全然未解決であり，(1) より (4) の方が具体性が高い分御し易いのではないかとの期待が，$\mathcal{H}$の代わりに$\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$を考える動機の一つである．

参　照　文　献

[1] L. V. Ahlfors and L. Sario: *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.

[2] C. Constantinescu und A. Cornea: *Über einige Problem von M. Heins*, Rev. Math. pures Appl., **3**(1959), 277-281.

[3] A. Cornea: *Über eine Formel in der Extremisierungstheorie*, Rev. Math. pures Appl., **3**(1958), 431-436.

[4] M. Heins: *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[5] Z. Kuramochi: *An example of a null-boundary Riemann surface*, Osaka J. Math., **6**(1954), 83-91.

[6] H. Masaoka and S. Segawa: *Hrmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, Osaka J. Math., **34**(1997), 659-672.

[7] M. Nakai and L. Sario: *Harmonic and relative harmonic dimension*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser A.I. Math., **10**(1985), 419-432.

[8] M. Nakai and T. Tada: *Harmonic dimensions and continuum hypothesis*, Lecture Notes in Seminar on Potential Theory at Aichi Inst. Tech., 2000, 141-148.

[9] S. Segawa: *A duality relation for harmonic dimensions and its applications*, Kodai Math. J., **4**(1981), 508-514.

9. Hölder continuity of Dirichlet solution for a general domain

相川弘明　島根大学

Let $0 < \alpha \le 1$. For an arbitrary set $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, we consider the family $\Lambda_\alpha(E)$ of all bounded α-Hölder continuous functions on E. The norm of $f \in \Lambda_\alpha(E)$ is given by

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha(E)} = \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y \in E \\ x \ne y \\ |x-y| \le 1}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Let D be a bounded domain. By $\mathscr{H}(D)$ we denote the family of all harmonic functions on D. For a function f on ∂D we denote by $H_D f$ the Dirichlet (PWB-) solution of f over D, provided the solution exists. It is well known that if D is regular, then H_D maps $C(\partial D)$ to $\mathscr{H}(D) \cap C(\overline{D})$. It may be natural to think that the better continuity of a boundary function f ensures the better continuity of $H_D f$. In this paper we investigate conditions for H_D to map $\Lambda_\alpha(\partial D)$ to $\mathscr{H}(D) \cap \Lambda_\alpha(D)$ with the same Hölder exponent α. In other words, we study the conditions for $\|H_D\|_\alpha < \infty$, where

$$\|H_D\|_\alpha = \sup_{\substack{f \in \Lambda_\alpha(\partial D) \\ \|f\|_{\Lambda_\alpha(\partial D)} \ne 0}} \frac{\|H_D f\|_{\Lambda_\alpha(D)}}{\|f\|_{\Lambda_\alpha(\partial D)}}.$$

Hinkkanen [1] and Sugawa [2] considered similar problems mainly for planar domains in somewhat different context.

We observe that the Lipschitz continuity cannot be preserved by H_D. Sugawa [2, Example 6.1] observed this for a unit disc $D = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$: If $f(\xi) = f(\xi_1, \xi_2)$ is the Lipschitz continuous function $|\xi_2|$ on ∂D, then

$$H_D f(x_1, 0) = \frac{1 - x_1^2}{\pi x_1} \log \frac{1 + x_1}{1 - x_1}$$

and the Lipschitz continuity of $H_D f$ breaks down near $(\pm 1, 0)$. A similar example applies to the higher dimensional case. More strongly, however, we can show the following assertion.

Theorem 1. *There is no bounded domain for which* $\|H_D\|_1 < \infty$.

We write $\omega(\cdot, E, U)$ for the harmonic measure over an open set U of $E \subset \partial U$. Define a boundary function $\varphi_{a,\alpha}$ for $a \in \partial D$ by $\varphi_{a,\alpha}(\xi) = \min\{|\xi - a|^\alpha, 1\}$ for $\xi \in \partial D$. Then we have the following.

Theorem 2. *Let $0 < \alpha < 1$ and let D be a bounded regular domain. Consider the following conditions:*

(i) $\|H_D\|_\alpha < \infty$.

(ii) *For every $a \in \partial D$, $H_D\varphi_{a,\alpha}(x) \le M|x-a|^\alpha$.*

(iii) *For every $a \in \partial D$ and $r > 0$*

$$\omega(x, D \cap S(a,r), D \cap B(a,r)) \le M\left(\frac{|x-a|}{r}\right)^\alpha \quad \text{for } x \in D \cap B(a,r).$$

(iv) *For every $a \in \partial D$ and $r > 0$*

$$\omega(x, \partial D \setminus B(a,r), D) \le M\left(\frac{|x-a|}{r}\right)^\alpha \quad \text{for } x \in D.$$

Then we have

$$\text{(i)} \iff \text{(ii)} \implies \text{(iii)} \iff \text{(iv)}.$$

If (iii) *holds with some $\alpha' > \alpha$, then* (i) *holds.*

Corollary 1. *Let D be a bounded regular domain. Then $\|H_D\|_\alpha < \infty$ for some $\alpha > 0$ if and only if ∂D satisfies the capacity density condition, which is equivalent to the* uniform perfectness *of ∂D if $n = 2$.*

参考文献

[1] A. Hinkkanen, *Modulus of continuity of harmonic functions*, J. Analyse Math. **51** (1988), 1–29.

[2] T. Sugawa, *On boundary regularity of the Dirichlet problem for plane domains*, preprint (1999).

特別講演

距離空間上のソボレフ関数について

水田 義弘　（広島大学総合科学部）

2002 年 3 月，明治大学

目 次

1　ポアンカレの不等式

$\mathbf{R}^n$ の球体 B 上の**ソボレフ関数** $u \in W^{1,p}(B)$ に対して，不等式

$$\fint_B |u-u_B|^p dx \le C(n,p)(\mathrm{diam}\ B)^p \fint_B |\nabla u|^p dx \tag{1.1}$$

は，通常，**ポアンカレの不等式**と呼ばれる。ここに，$1 \le p < \infty$ で

$$u_B = \fint_B u dx = \frac{1}{|B|}\int_B u dx$$

は積分平均を表す。また，不等式

$$\left(\fint_B |u-u_B|^{np/(n-p)} dx\right)^{(n-p)/np} \le C(n,p)(\mathrm{diam}\ B)\left(\fint_B |\nabla u|^p dx\right)^{1/p} \tag{1.2}$$

は，**ソボレフ-ポアンカレの不等式**と呼ばれる。ここに，$1 \le p < n$ である。

定理 1.1 （ソボレフの定理）　$p \ge 1$，$u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ とすると，

(1) $1/q > 1/p - 1/n \ge 0$ ならば，$u \in L^q_{loc}(\mathbf{R}^n)$

(2) $1/q = 1/p - 1/n > 0$ ならば，$u \in L^q(\mathbf{R}^n)$

(3) $p > n$ ならば，u は任意の球 B 上ヘルダー連続で

$$|u(x)-u(x')| \le C|x-x'|^{1-n/p}\left(\int_B |\nabla u|^p dy\right)^{1/p} \qquad (\forall x, x' \in B) \tag{1.3}$$

$p = n$ のとき，定理 1.1 の (1) と (3) の間を埋めるような結果も知られている。すなわち，

$$\int_B |\nabla u|^n \varphi(|\nabla u|) dx < \infty \tag{1.4}$$

を満たすような（**ソボレフ-オーリッツ関数**） u について，φ の増大度に応じて (1)，(2) または (3) のタイプの性質が成り立つことが示される (cf. [12])。

2 距離空間上のソボレフ関数

(X,d) を距離空間とし，その上のボレル測度 μ を考える。測度 μ は次の条件を満たすものとする：ボレル集合 A とそれに含まれる球 B に対して，

$$\frac{\mu(B)}{\mu(A)} \geq C\left(\frac{\text{diam } B}{\text{diam } A}\right)^Q \tag{2.1}$$

が成り立つ。ここに，Q と C は正の定数である。とくに，μ は **doubling** である：

$$\mu(B) \leq \mu(2B) \leq C\mu(B) \tag{2.2}$$

ここに，$B = B(x,r)$，$2B = B(x,2r)$，C は正の定数である。

X 上のボレル関数の組 (u,g) が **p-ポアンカレ不等式**を満たすとは，任意の球 B に対して，

$$⨍_B |u - u_B| d\mu \leq C(\text{diam } B)\left(⨍_{\sigma B} g^p d\mu\right)^{1/p} \tag{2.3}$$

が成り立つ。ここに，g は非負，$\sigma \geq 1$，C は正の定数で $p > 0$ である。(2.3) と次は同値である。

$$\inf_c ⨍_B |u - c| d\mu \leq C(\text{diam } B)\left(⨍_{\sigma B} g^p d\mu\right)^{1/p} \tag{2.4}$$

注 2.1 (1) $0 < p < 1$ のとき，(2.3) を満たさないソボレフ関数が存在する。

(2) 調和関数はすべての $p > 0$ に対して (2.3) を満足する。

定理 2.1 (cf. [4]) $1 \leq p < Q$ とする。(u,g) が p-ポアンカレ不等式を満たすならば，$0 < q < pQ/(Q-p)$ に対して，

$$\left(⨍_B |u - u_B|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C(\text{diam } B)\left(⨍_{5\sigma B} g^p d\mu\right)^{1/p} \tag{2.5}$$

注 2.2 (1) 定理 2.1 において，さらに "truncation property" を仮定すれば，$q = pQ/(Q-p)$ とすることもできる。

(2) 定理 2.1 において，球でうまく覆える領域 A に置きかえて，不等式

$$\left(\fint_A |u-u_A|^q d\mu\right)^{1/q} \le C(\mathrm{diam}\ A)\left(\fint_A g^p d\mu\right)^{1/p} \tag{2.6}$$

を得ることが可能である。ここで，雑にいうなら，A は境界がきれいな集合ということもできる。実際には，次のような領域なら O.K. である。

定義 2.1 $\lambda \ge 1$,` $M \ge 1$，$a > 1$ とする。有界集合 A が（球 B_0 に関して）(λ, M, a)-**連結条件**を満たすとは，任意の $x \in A$ に対して，球の列 $\{B_1, B_2, B_3, ...\}$ で次の条件を満たすものが存在する：

(i) $\lambda B_i \subset A \qquad (\forall i \ge 0)$

(ii) $x \in B_i \qquad (i$：十分大)

(iii) $M^{-1}a^{-i}\mathrm{diam}\ A \le \mathrm{diam}\ B_i \le Ma^{-i}\mathrm{diam}\ A \qquad (\forall i \ge 0)$

(iv) $\exists B_i'$：球 s.t. $B_i' \subset B_i \cap B_{i+1}$ かつ $B_i \cup B_{i+1} \subset MB_i' \qquad (\forall i \ge 0)$

(2.6) の証明には，次の補題を利用する。

補題 2.1 $\alpha > 0$ で

$$\mu(\{x \in X : |u(x)| > t\}) \le C_0 t^{-\alpha} \tag{2.7}$$

ならば，$0 < q < \alpha$ に対して

$$\|u\|_q \le 2^{1/q}\left(\frac{\alpha C_0}{\alpha - q}\right)^{1/\alpha} \mu(X)^{(\alpha-q)/\alpha q} \tag{2.8}$$

$p \ge Q$ のときには，次の結果が知られている。

定理 2.2（Trudinger の不等式） X は連結で $Q > 1$ とする。関数組 (u, g) が Q-ポアンカレ不等式を満たすならば，定数 C_1，C_2 で次の条件を満たすものが存在する：任意の球 B に対して

$$\fint_B \exp\left(\frac{C_1\mu(B)^{1/Q}|u-u_B|}{(\mathrm{diam}\ B)\|g\|_Q}\right)^{Q/(Q-1)} d\mu \le C_2 \tag{2.9}$$

定理 2.3　$p > Q$ とする。(u,g) が p-ポアンカレ不等式を満たすならば，u はヘルダー連続である：任意の x，$y \in B$，$B \subset B_0$ に対して

$$|u(x) - u(y)| \leq C r_0^{Q/p} |x-y|^{1-Q/p} \left(\fint_{5\sigma B_0} g^p d\mu \right)^{1/p} \tag{2.10}$$

ここに，$|x-y| = d(x,y)$，r_0 は B_0 の半径である。

定理 2.1，2.2，2.3 についてはHajłasz-Koskela [4] を参照して欲しい。

注 2.2　$p = Q$ のとき，定理 2.2 と定理 2.3 の間を埋める結果も示される (cf. [13])。

3　いろいろなソボレフ空間

$u \in C^1(\mathbf{R}^n)$ に対して，不等式

$$|u(x) - u_B| \leq C(n) \int_B \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{n-1}} dz \tag{3.1}$$

が成り立つ。ここに，$B = B(x,r)$ 。極大関数を用いると

$$|u(x) - u_B| \leq C(n) r M |\nabla u|(x) \tag{3.2}$$

したがって，

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n)|x-y| \{M|\nabla u|(x) + M|\nabla u|(y)\} \tag{3.3}$$

が成り立つ。

測度距離空間 $(X, d; \mu)$ において，関数 u が **Hajłasz のソボレフ関数**とは，次の条件を満足する $g \in L^p_+(X)$ が存在する：任意の x，$y \in X$ に対して

$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y| \{g(x) + g(y)\} \tag{3.4}$$

ここに，$|x-y| = d(x,y)$ である。このような関数 u の全体を $M^{1,p}(X)$ と表し，そのノルムを

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \inf \|g\|_p \tag{3.5}$$

で定める。

定理 3.1　$1 < p < \infty$ で B が $\mathbf{R}^n$ の球のとき，

$$M^{1,p}(B) = W^{1,p}(B) \tag{3.6}$$

関数 u の微分と直結するものを次のように与えることもできる：x と y を結ぶ長さが有限の曲線 γ に沿って

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma g ds \tag{3.7}$$

そのノルムは (3.5) のように定義される。

4　リースポテンシャル

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ において，**リースポテンシャル**は

$$I_\alpha g(x) = c_{\alpha,n} \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} g(y) dy \tag{4.1}$$

で定義される。この一般化として，測度距離空間 $(X, d; \mu)$ においては，

$$I_\alpha g(x) = \int_X \frac{g(y)|x-y|^\alpha}{\mu(B(x,|x-y|))} d\mu(y) \tag{4.2}$$

と定めよう。

X が **geodesic** とは，任意の 2 点 x，$y \in X$ に対して，次の性質をもつ曲線 $\gamma : [0,1] \to X$ が存在する：

(i) $\gamma(0) = x$，$\gamma(1) = y$

(ii) $\ell(\gamma) = |x-y|$

ここに，$\ell(\gamma)$ は γ の長さを表す。

定理 4.1 (cf. [5])　X が geodesic とする。関数組 (u, g) が 1-ポアンカレ不等式を満たすならば，任意の球 $B = B(x, r)$ に対して

$$|u(x) - u_B| \leqq C I_1 g(x) \tag{4.3}$$

5　単調関数

R^n の領域 G 上の連続関数が **Lebesgue の意味で単調**であるとは，任意の領域 $D \Subset G$ に対して

$$\max_{D\cup\partial D} u = \max_{\partial D} u \qquad \text{かつ} \qquad \min_{D\cup\partial D} u = \min_{\partial D} u \tag{5.1}$$

が成立するときをいう (cf. [7])。

単調関数に対する基本的な性質は次の不等式である。

定理 5.1 (cf. [15])　$1 \le p < \infty$，$p > n-1$ かつ u は G 上単調とする。このとき，任意の x，$x' \in B$ に対して

$$|u(x) - u(x')| \le Cr \left(⨍_{2B} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{1/p} \tag{5.2}$$

ここに，$B = B(x_0, r)$，$2B = B(x_0, 2r) \subset G$ である。

単調関数の例

(1) f は区間 $[0,\infty)$ 上の単調な連続関数で $\xi \in \partial G$ とすると，
$u(x) = f(|x - \xi|)$ は G 上単調である。

(2) G 上の調和関数は単調である。

(3) G 上の p-調和関数は単調である。

(4) G 上の擬等角写像の各成分は単調である。

注 5.1 (1) $p < n-1$ のとき，(5.2) を満たさない単調関数が存在する。
(2) 調和関数 u はすべての $p > 0$ に対して，(5.2) を満たす。
(3) $D \subset$ **R**^{n} 上の有界擬等角写像 f は

$$\int_D |\nabla f|^n dx < \infty$$

定理 5.2 $p > n-1$ かつ $u \in W^{1,p}(G)$ は G 上単調とする。このとき，u はほとんどいたるところ微分可能である：ほとんどすべての $x_0 \in G$ に対して

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|u(x) - P(x)|}{|x - x_0|} = 0 \tag{5.3}$$

となる一次式 $P(x) = a_0 \cdot (x - x_0) + u(x_0)$ が存在する。

6 s-John 領域

(X, d) は距離空間とし，その上のボレル測度 μ は，任意の球 B に対して，

$$\mu(B) \sim (\mathrm{diam}\ B)^Q \tag{6.1}$$

を満たす。

X の領域 D が s-John であるとは，（**John 中心**）$x^* \in D$ と（**John 定数**）$c_J > 0$ が存在し，任意の $x \in D$ は次の性質をもつ曲線 γ によって x^* と結ばれる：

$$\rho_D(z) \ge c_J \ell(\gamma(x, z))^s \qquad (\forall z \in \gamma) \tag{6.2}$$

ここに，$\rho_D(z)$ は z から境界までの距離，$\gamma(x, z)$ は x から z までの部分弧，$\ell(\gamma(x, z))$ はその長さを表す。

条件 (6.2) によって，任意の $\lambda > 1$ に対して，球の列 $B(z_0)$，$B(z_1)$，...，$B(z_N)$ でつぎの性質をもつものがとれる：

(i) $x = z_0$，$z_j \in \gamma(x, x^*)$ $(1 \le j \le N)$ かつ $x^* \in B(z_N)$

(ii) $B(z_i) \cap B(z_j) \ne \emptyset \iff |i - j| \le 1$

(iii) $\sum_{i=0}^N \chi_{\lambda B(z_i)}(w) \le C$

(iv) $\rho_D(x) + |x - w| \le C\rho_D(w)^{1/s} \qquad (\forall w \in \bigcup_{i=0}^N \lambda B(z_i) \subset D)$

測度距離空間 $(X, d; \mu)$ の領域 D 上の連続関数 u に対して，

$$|u(x) - u(x')| \le Cr \left(\fint_{\sigma B} g(y)^p d\mu(y) \right)^{1/p} \tag{6.3}$$

$(\forall x, x' \in B = B(x_0, r); \sigma B \subset D)$ となる関数 $g \in L^p_+(D)$ と定数 $C > 0$, $\sigma \geq 1$ が存在するならば, u は D 上**単調**であるという。

定理 6.1 関数 u は有界 s-John 領域 D 上単調とする。このとき,

(1) $\alpha = sp(Q-1) - Q(p-1) > 0$ ならば,

$$\lim_{x \to \partial D} \rho_D(x)^{\alpha/p} u(x) = 0 \tag{6.4}$$

(2) $\alpha = 0$ ならば,

$$\lim_{x \to \partial D} \left(\log \frac{1}{\rho_D(x)} \right)^{(1-p)/p} u(x) = 0 \tag{6.5}$$

さらに, 単調関数に対する **Fatou 型定理**を示すこともできる。

参考文献

[1] J. Björn, L^q-Differentials for weighted spaces, Michigan Math. J. **47** (2000), 151–161.

[2] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[3] T. Futamura and Y. Mizuta, Boundary limits of weakly monotone BLD functions in s-John domains, preprint.

[4] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré, Mem. Amer. Math. Soc. **145** (2000).

[5] J. Heinonen, Lectures on analysis on metric spaces, Springer, 2001.

[6] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, 1993.

[7] H. Lebesgue, Sur le probléme de Dirichlet, Rend. Cir. Mat. Palermo **24** (1907), 371–402.

[8] J. J. Manfredi, Weakly monotone functions, J. Geom. Anal. **4** (1994), 393–402.

[9] J. J. Manfredi and E. Villamor, Traces of monotone Sobolev functions, J. Geom. Anal. **6** (1996), 433–444.

[10] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosho, 1996.

[11] 水田義弘，実解析入門ー測度・積分・ソボレフ空間，培風館，1999.

[12] Y. Mizuta, Multiple exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Advances in Math. Sci. and Applications **9** (1999), 621–631.

[13] Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity and differentiability for weighted Sobolev spaces, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[14] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.

[15] M. Vuorinen, Conformal geometry and quasiregular mappings, Lectures Notes in Math. **1319**, Springer, 1988.

広島大学 総合科学部
数理情報科学講座
E-mail : mizuta@mis.hiroshima-u.ac.jp

特別講演

退化 BELTRAMI 方程式　～古典的アプローチ～

須川 敏幸　　京都大学大学院・理学研究科

この講演では V. Gutlyanskiĭ, O. Martio, M. Vuorinen との共同研究 [10] に基づいて、複素平面上の退化 Beltrami 方程式が同相解を持つための非常に精密な十分条件について、およびその解が（本質的に）一意的であるための特殊な状況下での十分条件について述べる。その前に、Beltrami 方程式の重要性とその歴史的展開について見ておきたい。

1. BELTRAMI 方程式

今日 Beltrami 方程式と呼ばれるものは次の形で表される平面領域上の偏微分方程式である：

$$\bar{\partial} f = \mu \partial f \tag{1.1}$$

ただしここに f は複素数値の未知関数で、μ はしばしば Beltrami 係数と呼ばれる $|\mu| < 1$ を満たす与えられた複素数値関数であり、記号 $\partial f, \bar{\partial} f$ は

$$\partial f = f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \bar{\partial} f = f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad z = x + iy$$

により定義される。ここに $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す。f を実部・虚部に分ければ、この方程式は偏微分方程式系に書き換えられるが、条件 $|\mu| < 1$ は系の楕円性を意味する（詳しくは [5, Chap. 6] 参照）。(1.1) において、等号の意味について厳密に定式化する必要があるが、右辺において各点ごとの掛け算が必要なため、考えられるもっとも一般な状況は μ が可測で f が（局所）Sobolev 空間 $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属することであろう。つまり、$\partial f, \bar{\partial} f$ は超関数の意味で考えるが、それらは局所可積分であり本質的有界関数 μ との積もまた局所可積分となるので方程式(1.1) が a.e. の意味で理解できることになる。以下において、f をこの方程式(1.1) の領域 Ω 上の**同相解**と呼ぶ場合は、f は Ω からある平面領域 Ω' への同相写像でなおかつ $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ であり方程式(1.1) を上の意味で満たすことを意味するものとする。なお、以下において領域について明言しない場合は、$\Omega = \Omega' = \mathbb{C}$ であると約束する。このような同相解はしばしば μ-**同相写像**などと呼ばれる。なお、無限遠点をそれ自身に対応させることにより、このような f は自然にリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ からそれ自身への同相写像ともみなせることに注意しておく。

容易に分かるように、f が(1.1) の $\mathbb{C}$ 上の同相解であれば、定数 a, b に対して $af + b$ も(1.1) の解である。よって同相解としては $f(0) = 0, f(1) = 1$ の形に正規化されているもののみを考えても一般性を失わない。以下では、方程式(1.1) の同相解は本質的に一意的である、という場合にはこのように正規化された同相解が一意であることを意味することとする。実は上の相似変換だけではなく、任意の解析関数 φ との合成 $\varphi \circ f$ も局所的には同じ Beltrami 方程式を満たすことが分かるが、このことは Beltrami 方程式が Riemann 面の moduli を記述する上で重要であることを示唆している。より一般に方程式(1.1) がそ

の解のクラス $\mathcal{G}$ に対して **Stoïlow 性を持つ**とは、任意の $g \in \mathcal{G}$ が正規化された同相解 f および解析関数 φ との合成 $\varphi \circ f$ の形に分解できることを言う。

2. Beltrami 方程式の歴史

Beltrami 方程式は滑らかな μ に対して、曲面上の等温座標 (isothermal coordinates) を構成するのに 1820 年代に Gauss によって用いられたのが最初であると言われている。その後、Beltrami によって彼の 1867 年頃に始まる Lobachevsky 幾何学における重要な研究において本質的に用いられたことから、この方程式に彼の名が冠されるようになったようである（[11] 序文参照)。Beltrami 方程式の幾何的な意味については、例えば [21, §1.1] や [17, II.3] などを参照されたい。

前節のように可測な μ について重要な研究を行ったのは Morrey によるのが最初であろう。彼は 1930 年代後半に一様楕円性条件 $\|\mu\|_\infty < 1$ の下で Beltrami 方程式の $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解の存在と一意性を確立した。一方、1928 年頃に Grötzsch によって研究が始められ、Ahlfors, Teichmüller らにより重要な研究に本質的に用いられていた擬等角写像という概念が、実はこの一様楕円な Beltrami 方程式の $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解と全く同じであることを最初に指摘したのは Bers (1957) であった（[14, p. 24])。擬等角写像が、極値的長さに関係する幾何的な定義と、Beltrami 方程式による解析的定義の、見た目には全く異なる二つの側面を持つことが認識されたことが、今日擬等角写像が非常に広く複素解析学全般で用いられるようになったきっかけと言っても良いであろう。その記念碑的な文献が Lehto-Virtanen による [15]（オリジナルはドイツ語で 1965 年公刊）である。なお、この Morrey による定理は現在では " 可測型 Riemann 写像定理 " (the measurable Riemann mapping theorem) と呼ばれ、平面擬等角写像論における基本的結果となっている（[1] 参照)。なお、擬等角写像は自然に Riemann 面上でも定義できることに注意しておく。

その後、この一様楕円性条件 $\|\mu\|_\infty < 1$ があまりにも当然な前提となってしまったので、この条件抜きで何が言え、何の役に立つのか、多くの人々はあまり考えなくなったようにみえる。しかし、文献を紐解いてみると、このような退化した場合でもいくつか重要な研究が散発的に現れていることが分かる。

まず、退化した場合を考える意味であるが、擬等角写像による面の変形はそれほど劇的ではない。例えば、単位円板 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ と全平面 $\mathbb{C}$ が等角同値ではないのと同様に、これらは擬等角同値ではない。また、Riemann 面全体を擬等角同値類で分類してもなお非可算無限個の類が存在する（より強いことが大沢氏 [18] により示されている)。従って、Riemann 面の退化を理解したり、Riemann 面をより大雑把に分類するには、擬等角写像より広いクラスの写像を考察することが重要となるであろう。他にも、向き付けられた 2 次元 Riemann 多様体の等角構造の型を決定する型問題、亜音速の流体が音速に近づく場合の空力学（Bers [3] 参照）など、応用の可能性はいくつかある。

次に退化 Beltrami 方程式の研究の歴史についてみてみたい。μ を平面上の可測関数とし、ある除外集合を除いて $|\mu| < 1$ が成り立つとする。$\mathrm{Reg}(\mu) = \{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}; \exists V : z_0$ の近傍 s.t. $\|\mu\|_{L^\infty(V)} < 1\}$ とし、$\mathrm{Sing}(\mu) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Reg}(\mu)$ とする。作り方から $\mathrm{Sing}(\mu)$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の閉集合である。Beltrami 方程式(1.1) が $\mathrm{Reg}(\mu)$ 上で $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解を持つことは Riemann 面の一意化の議論から比較的容易に従う（[2], [4] 参照)。問題は、そのような同相解がいつ複素平面全体に同相に拡張できるかである。$\mathrm{Sing}(\mu)$ が全不連結である場合には比較的扱いが簡単で、Lehto [12], [13] が非常に鋭い、しかし複雑な十分条件を与えている。そうでない場合は、このようなアプローチは簡単には適用できない（たとえば、$|\mu| < 1$ a.e. かつ $\mathrm{Sing}(\mu) = \widehat{\mathbb{C}}$ となる例が簡単に構成できる)。

より一般の状況における解の存在について最初の重要なステップは Pesin [19] により得られた。Beltrami 係数 μ に対して dilatation K_μ を

$$K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$$

により定義する。すると、[19] の主結果は、ある $p > 1$ に対して

$$\iint_{\mathbb{D}} \exp\left(K_\mu(z)^p\right) dxdy < \infty \tag{2.1}$$

ならば(1.1) の同相解 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ で $f \in W^{1,q}(\mathbb{D}), \forall q \in [1,2)$, かつ $f^{-1} \in W^{1,2}(\mathbb{D})$ を満たすものが存在することを主張する。また Miklyukov-Suvorov [16] は、ある $K_0 \in W_0^{1,2}(\mathbb{D})$ と定数 C_0 が存在して $K_\mu \leq K_0 + C_0$ となるとき、(1.1) は単位円板上で本質的に一意的な $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ を持ち、しかも $f, f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ となることを示した。

次の breakthrough は、David [8] により得られた。David の主結果は、ある定数 $c > 0$ に対して

$$\iint_{\mathbb{C}} \exp\left(cK_\mu(z)\right) dxdy < \infty \tag{2.2}$$

が成り立つならば(1.1) は本質的に一意的な $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-同相解を持つことを主張している。([22] も参照のこと。）ついで、Brakalova-Jenkins [7] の結果は少し修正すれば、

$$\iint_{\mathbb{C}} \exp\left(\frac{K_\mu(z)}{1+\log K_\mu(z)}\right) \frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2} < \infty \tag{2.3}$$

の仮定の下で $f \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}), \forall q \in [1,2)$, を満たす同相解の存在を意味する。この結果の別のアプローチについては、[11] を参照されたい。

4 節で説明する我々の結果は、このような発展の流れに対して、ある意味で最終的な存在定理を与えるものと考えられる。なお、David や、Iwaniec やその共著者らの方法は、主に Bojarski [6] によって見いだされた、特異積分作用素（Hilbert 変換）の詳しい性質を用いるもので、主に実解析的な手法に頼っており、Orlicz-Sobolev 空間に関する議論や Jacobian に関する逆 Hölder 不等式など、非常に高度な結果を必要とする。それに対して、Pesin, Brakalova-Jenkins らの方法は、Ahlfors により開拓された“長さと面積の方法”を基礎としており、ある意味で古典的・幾何的である。我々の手法も基本的にはそのような古典的な流れを汲むものである。

3. 準備

我々の主張を最も一般の形で述べるためには、いくつか準備が必要である。

開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上に与えられた Beltrami 係数 μ に対して、μ の $z_0 \in \mathbb{C}$ における**角歪曲度** (angular dilatation) $D_{\mu,z_0}(z)$ を

$$D_{\mu,z_0}(z) = \frac{\left|1-\mu(z)\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}, \quad z \in \Omega, \tag{3.1}$$

によって定義する。また、$z_0 = \infty$ に対しては $D_{\mu,\infty}(z) = D_{\mu,0}(z)$ と定める。三角不等式から容易に分かるように $1/K_\mu \leq D_{\mu,z_0} \leq K_\mu$ a.e. が成り立つ。例えばある非負可測関数 $\rho(z)$ があって、$\mu(z) = \rho(z)z/\bar{z}$ と表せるならば、$D_{\mu,0} = (1-\rho)/(1+\rho) \leq 1$ となり、仮に

$\|\rho\|_\infty = 1$ であっても $D_{\mu,0}$ は本質的有界となる。この量の重要性は次の関係式から来る：f を μ-同相とし、$z = z_0 + re^{i\theta}$ と表記すると

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \theta}(z)\right|^2 = r^2 D_{\mu,z_0}(z) J_f(z) \tag{3.2}$$

である。ただしここに $J_f = |\partial f|^2 - |\bar{\partial} f|^2 = (1 - |\mu|^2)|\partial f|^2$ は f の Jacobian である。

次に、関数 $H : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ が**支配因子**であるとは次の 2 性質が成り立つこととする：

1. ある $x_0 \geq 0$ があって、$H(x)$ は $[x_0, +\infty)$ 上で連続かつ狭義単調増大で、$[0, x_0]$ 上では一定、つまり $H(x) = H(x_0)$ である。
2. 関数 $\exp \circ H$ は $[0, +\infty)$ において凸である。

このとき、特に $x \to +\infty$ の時 $H(x) \to +\infty$ であることが分かる。以下では、H^{-1} を $H : [x_0, \infty) \to [H(0), +\infty)$ の逆関数として定義することとする。支配因子 H が**発散型**であるとは

$$\int_1^{+\infty} \frac{H(x)dx}{x^2} = +\infty, \tag{3.3}$$

が成り立つことを意味し、発散型でないとき**収束型**と呼ぶ。簡単な計算により H が発散型であるためには十分大きな t_1 に対して

$$\int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{H^{-1}(t)} = +\infty \tag{3.4}$$

であることが必要十分であることが分かる。$H(x)$ を支配因子とするとき、任意の正数 $\eta > 0$ に対して関数 $H(\eta x)$ および $\eta H(x)$ もともに同じ型の支配因子となることに注意しておく。

支配因子の典型的な例を構成するため、いくつか初等的な関数を定義しておく。

$$\log_0 x = x, \quad \log_n x = \log(\log_{n-1} x) \quad (n = 1, 2, \dots),$$
$$\Pi_{n,\alpha}(x) = x(\log_1 x) \cdots (\log_{n-1} x)(\log_n x)^\alpha, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \alpha \in \mathbb{R}).$$

整数 $n \geq 0$ および $\alpha \in \mathbb{R}$ を固定する。このとき、十分大きな正数 x_0 をとって、関数 $H = H_{n,\alpha}$ を $H(x) = x^2/\Pi_{n,\alpha}(x)$, $x \geq x_0$, $H(x) = H(x_0)$, $0 \leq x \leq x_0$ によって定義すれば、H が支配因子になることが分かる。さらに、簡単な計算によって次のことが分かる。

補題 1. 支配因子 $H_{n,\alpha}$ が発散型 $\Leftrightarrow$ $\alpha \leq 1$.

また、$H(x) = x$, $H(x) = x/(1 + \log^+ x)$ などが発散型支配因子であることも容易に分かる。

区間 $(0, \delta)$ 上で定義された正値関数 $m(r)$ が発散型支配因子 H に対する **modulus bound** であるとは、

$$\liminf_{r \to 0} \int_0^{m(r)} \frac{dt}{H^{-1}(2t - 2\log r)} > 0 \tag{3.5}$$

が成り立つことをいう。コンパクト集合 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ が $z_0 \in E$ において **H-疎**であるとは、H に対する modulus bound $m(r)$ が存在して、任意の小さい数 $\varepsilon > 0$ に対してある $0 < r < \varepsilon$ が存在して $A_m(z_0, r) \cap E = \emptyset$ となることをいう。ただし、ここに $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して $A_m(z_0, r) = \{z; re^{-m(r)} < |z - z_0| < r\}$ とし、$z_0 = \infty$ に対しては $A_m(\infty, r) = \{z; 1/r < |z| < e^{m(r)}/r\}$

とする。また、$m(r)$ を正定数に置き換えて同様の条件が成り立つとき、E は z_0 において**径疎**であるという。

4. 主定理

我々の存在定理のもっとも一般的な形は次のようなものである。相当複雑な十分条件であるが、各点ごとの条件であることに注意して頂きたい。なお、以下では $z_0 \in \mathbb{C}$ に対しては $B(z_0, r) = \{z; |z - z_0| < r\}$ とし、$z_0 = \infty$ に対しては $B(\infty, r) = B(0, 1/r)$ とする。

定理 1. **μ を平面上定義された Beltrami 係数とする。ある $p > 1$ が存在して $K_\mu \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ であるとし、さらに各点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して、ある正定数 $M = M(z_0)$, $r_0 = r_0(z_0)$ が存在して、次の条件のうちいずれかが成立するとする：**

1) **$B(z_0, r_0)$ 上ほとんどいたるところ $D_{\mu,z_0} \le M$ である。**
2) **ある発散型支配因子 $H = H_{z_0}$ が存在して、**

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ の時、} \quad \iint_{B(z_0,r_0)} \exp(H(D_{\mu,z_0}(z)))dxdy \le M,$$

$$z_0 = \infty \text{ の時、} \quad \iint_{B(\infty,r_0)} \exp(H(D_{\mu,0}(z)))\frac{dxdy}{|z|^4} \le M.$$

このとき、正規化された μ-同相写像 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で、$f \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$, $q = 2p/(1+p)$, および $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ を満たすものが存在し、$|z - z_0| < r_1$, $|z_0| \le R_0$ に対して場合 1) および 2) に応じてそれぞれ次の連続度評価を満足する：$|f(z) - f(z_0)| \le C|z - z_0|^{1/M}$ または

$$|f(z) - f(z_0)| \le C \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{1+c}^{2m+c} \frac{dt}{H_{z_0}^{-1}(t)}\right\},$$

ただし、ここに $r_1 \le \min\{r_0(z_0), R_0\}$, $m = \log(r_1/|z - z_0|)$, $c = \log(M(z_0)/\pi r_1^2)$ とし、C は μ および R_0 のみに依存する定数とする。

定理における条件はチェックするのが非常に難しそうであるが、特殊な状況下ではそれほど難しくはない。たとえば、$\mathrm{Sing}(\mu)$ が 1 点からなる場合でも十分に興味深い。f_1, f_2 は単位円板の外側では恒等写像で、$\mathbb{D} \setminus \{0\}$ では

$$f_1(z) = \frac{z}{|z|^2}e^{2(1-1/|z|)}, \quad f_2(z) = \frac{z}{|z|(2 - |z|)}$$

で定義すると、$\bar{\partial} f_1/\partial f_1 = -\bar{\partial} f_2/\partial f_2 = (1 - |z|)z/\bar{z}, |z| < 1,$ であるが、f_1 が原点まで同相に拡張できるのに対して、f_2 については $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ の像が $|z| > 1/2$ となり「空洞化現象」が起こる。これらの例を上の定理に当てはめて考えてみて頂きたい。別の特別な状況は、ある発散型支配因子 H に対して、

$$\iint_{\mathbb{C}} \exp(H(K_\mu(z)))\frac{dxdy}{(1 + |z|^2)^2} < \infty \tag{4.1}$$

が成り立つ場合で、この時は定理から解の存在などが従うことになる。一方、H が収束型の場合には Iwaniec-Martin [11] が「空洞化現象」を起こす（従って同相解を持たない）ような Beltrami 係数の例を与えている。従って、上の結論は H に関しては最良であるとも言える。

特に、前節で挙げた具体的な形の H を当てはめれば、次の結果を得る。

定理 2. **与えられた可測関数 $H : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ が、ある整数 $n \geq 1$ および定数 $c > 0$, $\alpha \in (-\infty, 1]$ に対して $H(t) \leq ct/(\log t)(\log_2 t) \cdots (\log_{n-1} t)(\log_n t)^\alpha$ を十分大きな t について満足するとする。平面上に与えられた Beltrami 係数 μ が条件**

$$\iint_{\mathbb{C}} \exp\left(H(K_\mu(z))\right) \frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2} < +\infty \tag{4.2}$$

を満たすとすると、μ-同相写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で、$f \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}) \forall q \in [1,2)$ かつ $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ を満たし、さらに $\alpha < 1$（かつ $n = 1$ のときは $0 < \alpha$）であれば、f は不等式

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C \exp\left(-\frac{c}{2(1-\alpha)}\left(\log_{n+1}\frac{1}{|z-z_0|}\right)^{1-\alpha}\right), \quad |z - z_0| < \delta_0,$$

を満たす。ここに、$C > 0, \delta_0 > 0$ は局所一様に取ることができる。$n = 1, \alpha \leq 0$ の場合は、定数 $c/2(1-\alpha)$ を任意のそれより大きな定数に置き換えれば、やはり不等式が成立する。上記不等式において、定数 $c/2(1-\alpha)$ および指数 $1-\alpha$ はそれ以上小さい定数で置き換えることはできない。さらに、$\alpha > 1$ ならば、ある H に対して同相解を持たないような Beltrami 係数 μ で、条件式(4.2) を満たすものが存在する。

以上の定理において、解の正則性（たとえば、$f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ か？）や一意性については今のところこれ以上のことは言えていない。ただ、特異性集合 $\mathrm{Sing}(\mu)$ に強い制約条件を付けると、強い意味での一意性が言える。

定理 3. **μ を平面上で与えられた Beltrami 係数とし、$E = \mathrm{Sing}(\mu)$ とする。各点 $z_0 \in E$ に対して次の条件のうちいずれか一つが成立すると仮定する：**

1) **$D_{\mu,z_0}(z)$ は z_0 の近傍において本質的有界で、E は z_0 において径疎である。**
2) **ある発散型支配因子 $H = H_{z_0}$ が存在して、E は z_0 において H-疎であり、しかも z_0 のある近傍 V に対して**

$$\iint_V \exp(H(D_{\mu,z_0}(z))) \frac{dxdy}{(1+|z|^2)^2} < +\infty$$

が成立する。

この時、ある同相写像 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が存在して $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ において局所擬等角となり(1.1) を満たす。さらに、$\hat{f}$ を任意の Ω 上の μ-同相写像とすると、ある Möbius 変換 h が存在して $\hat{f} = h \circ f$ と表すことができる。特に $\hat{f}$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の同相写像に拡張することができる。

5. 証明のアイデア

最後に、証明のアイデアについて簡単に説明しておく。Beltrami 方程式の解の存在を言うには、まず μ を性質の良い μ_n で近似する。今の場合は例えば $\mu_n = \chi_n \cdot \mu$ とする。ただし、ここに χ_n は集合 $\{z; |\mu(z)| < 1 - 1/n\}$ の定義関数とする。すると可測型 Riemann 写像定理により、正規化された μ_n-同相 $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が一意に存在することが分かる。あとは族 $\{f_n\}$ の正規性を何とかして示せばよい。（極限関数の正則性や実際に Beltrami 方程式を満たすことなどは [19] や [7] の方法に従えばよい。）

$A(z_0, r, R) = B(z_0, R) \setminus \bar{B}(z_0, r)$ とする。定理 1 の条件 2) に対して、Reich-Warczak の不等式 [20] や、Jensen の不等式、Chebyshev の不等式などを用いれば、最終的に $f(A(z_0, r, R))$ の modulus が R を固定して r を 0 に近づければ大きくなることが評価込みで示される。一方、任意の $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $f(A(z_0, r, R))$ の modulus が与えられた関数 $\rho(z_0, r, R)$

で下から押さえられるような正規化された同相写像の族を考えると、その関数が条件 $\lim_{r\to 0}\rho(z_0,r,R)=\infty$ を各 z_0, R ごとに満たせば、そのような族は正規になることが分かる。なお、連続度評価については、Teichmüller の定理を基礎とする、円環領域とその modulus に関する具体的評価を用いる。

定理 3 は、上で述べた modulus の評価と、後藤-谷口による結果 [9] を用いればよい。

REFERENCES

1. L. V. Ahlfors and L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 385–404.
2. P. P. Belinskiĭ, *General properties of quasiconformal mappings* (Russian), Izdat. "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1974.
3. L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1958, Surveys in Applied Mathematics, Vol. 3.
4. ———, *Uniformization by Beltrami equation*, Commun. in Pure and Appl. Math. **14** (1961), 215–228.
5. L. Bers and M. Schechter, *Elliptic equations*, in Partial Differential Equations (Proc. Summer Seminar, Boulder, Col., 1957), Interscience, New York, 1964, pp. 131–299.
6. B. V. Bojarski, *General solutions of a system of differential equations of the first order and of elliptic type with discontinuous coefficients* (Russian), Mat. Sb. N.S. **43 (85)** (1957), 451–503.
7. M. A. Brakalova and J. A. Jenkins, *On solutions of the Beltrami equation*, J. Anal. Math. **76** (1998), 67–92.
8. G. David, *Solutions de l'équation de Beltrami avec* $\|\mu\|_\infty = 1$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **13** (1988), 25–70.
9. Y. Gotoh and M. Taniguchi, *A condition of quasiconformal extendability*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **75** (1999), 58–60.
10. V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, T. Sugawa, and M. Vuorinen, *On the degenerate Beltrami equation*, University of Helsinki, Preprint 282 (2001), 1–32. (http://www.cajpn.org/complex/pp01/0103.html)
11. T. Iwaniec and G. Martin, *The Beltrami equation - In memory of Eugenio Beltrami (1835–1900), 100 years on*, Memoires of the AMS, American Mathematical Society, to appear.
12. O. Lehto, *Homeomorphisms with a given dilatation*, Proceedings of the Fifteenth Scandinavian Congress (Oslo, 1968), Springer, 1970, pp. 58–73.
13. ———, *Remarks on generalized Beltrami equations and conformal mappings*, Proceedings of the Romanian-Finnish Seminar on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings (Braşov, 1969), Publ. House of the Acad. of the Socialist Republic of Romania, Bucharest, 1971, pp. 203–214.
14. ———, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, 1987.
15. O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane, 2nd Ed.*, Springer-Verlag, 1973.
16. V. M. Miklyukov and G. D. Suvorov, *The existence and uniqueness of quasiconformal mappings with unbounded characteristics* (Russian), Studies in the theory of functions of a complex variable and its applications, Vidannja Inst. Mat. Akad. Nauk Ukraïn. RSR, Kiev, 1972, pp. 45–53.
17. J. C. C. Nitsche, *Lectures on Minimal Surfaces, Vol. 1*, Cambridge University Press, 1989.
18. T. Ohsawa, *On the analytic structure of certain infinite dimensional Teichmüller spaces*, Nagoya Math. J. **141** (1996), 143–156.
19. I. N. Pesin, *Mappings which are quasiconformal in the mean* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **187** (1969), 740–742, English translation in Soviet Math. Dokl. **10** (1969), 939–941.
20. E. Reich and H. Walczak, *On the behavior of quasiconformal mappings at a point*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 338–351.
21. M. Schiffer and D. C. Spencer, *Functionals of Finite Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1954.
22. P. Tukia, *Compactness properties of μ-homeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **16** (1991), 47–69.

10. Some Identities and Approximate Expressions derived through the Riemann's zeta Function

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article, some identities and approximate expressions derived through the Riemann's zeta function are reported. Some of them are shown as follows, for example.

$$\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{(2^k)^z}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^z}\right)\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^z}\quad\begin{pmatrix}1\ll r(\in Z^+)<\infty,\\ \operatorname{Re} z>1\end{pmatrix},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2^k)^z}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^z}\quad(\operatorname{Re} z>1).$$

References

[1] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.18, Nov. (2000), 111 - 117.

[2] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.19, May (2001), 89 - 98.

[3] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I I I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.19, May (2001), 135 - 141.

[4] K. Nishimoto ; Some integral forms for Riemann's zeta function,, J. Frac.Calc.Vol.17, May (2000), 115 - 121.

[5] K. Nishimoto ; On an Integral Form of $\sum_{k=1}^{\infty}(1/p_k^x)$ for $x \gg 1$ (p_k ; Prime Number), J. Frac. Calc. Vol. 20, Nov. (2001), 113 - 114.

[6] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brichikov and O.I. Marichev ; Integrals and Series, Vol. i, (1986), Gordon and Breach. (Originaly published in Russian in 1981, by Nauka.)

[7] S.J. Patterson ; An introduction to the theory of the Riemann zeta - Function (1988),Cambridge.

[8] T. Kitamura ; Introduction to the number theory (1965), Maki- shoten, Japan.

11. Negative Power Series Solutions for a Class of Linear Ordinary Differential Equations using N-Fractional Method

Ahmed Alawneh , Univ. of Jordan
Zaid Odibat, Al-Balqa' Applied Univ. (Jordan)
and
Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this paper, series solutions in negative powers for a class of linear second order ordinary differential equations

$$\Phi_2 \cdot (x^2 + Ax) + \Phi_1 \cdot (Bx + C) + \Phi \cdot E = 0$$
$$\left(\begin{array}{l} \Phi_k = d^k\Phi / dx^k \;\; (k = 0, 1, 2), \quad \Phi_0 = \Phi = \Phi(x) \\ \quad A, B, C, E \text{ ;constants .} \end{array} \right)$$

are obtained by N- fractional calculus operator.

References

[1] K.Nishimoto;Fractional Calculus, Vol.1(1984), Vol.2(1987), Vol.3(1989), Vol.4(1991), Vol.5(1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K.Nishimoto; Some Properties of N-Transformation, J. Frac. Calc., Vol.8 :1-10, (1995).

[3] K.Nishimoto; Applications to N-Transformation to Some Linear Ordinary Differential Equations, J. Frac. Calc., Vol.8, 11-23, (1995).

[4] K.Nishimoto; Applications of N-Transformation and N-Fractional Calculus Method to Nonhomgeneous Bessel Equations (I), J. Frac. Calc., Vol.8, 25-30, (1995).

[5] K.Nishimoto; Operator N^{ν} Method to Nonhomogeneous Gauss and Bessel Equations, J. Frac. Calc., Vol.9, 1-15, (1996).

[6] K.Nishimoto and S.Remero; N-Fractional Calculus Operator N^{ν} Method to Nonhomogeneuos and Homogeneous Whittaker Equations (I), J. Frac. Calc., Vol.9, 17-22, (1996).

[7] N.T.Shawagfeh; An Application of Fractional Calculus to the Solution of a Class of Linear Ordinary Integro-Differential Equations, J. Frac. Calc., Vol.8, 127-131, (1995).

12. The order of conformal automorphisms on Riemann surfaces of infinite type

Ege Fujikawa
Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology

On a compact Riemann surface R of genus $g \geq 2$, it is well known that the number of conformal automorphisms on R is not greater than $84(g-1)$ (Hurwitz cf. [2]). In particular, the order of a conformal automorphism on R is not greater than $84(g-1)$. Since the hyperbolic area of R is $4\pi(g-1)$, the injectivity radius at any point in R is not greater than some constant depending on g. This means that the order of a conformal automorphism on R is estimated by the supremum of the injectivity radius at each point in R. We extend this result to the case of Riemann surfaces of infinite type. That is, for a Riemann surface R of infinite type such that the injectivity radius at any point in R is less than a positive constant M, if a conformal automorphism f on R fixes a compact subset in R, then the order of f is estimated by M.

Theorem 1 *Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. Suppose that there exists a positive constant M such that the injectivity radius at any point in R is less than M. Let c be a simple closed geodesic on R with length less than M. Then there exists a constant $N \in \mathbf{N}$ depending only on M such that, for a conformal automorphism f on R that satisfies $f(c) = c$, the order of f is less than N.*

In the case that f fixes either a puncture of R or a point in R, the similar result are obtained.

Theorem 2 *Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. Suppose that R has at least one puncture p, and that there exists a positive constant M such that the injectivity radius at any point in R is less than M. Then there exists a constant $N \in \mathbf{N}$ depending only on M such that, for a conformal automorphism f on R that satisfies $f(p) = p$, the order of f is less than N.*

Theorem 3 *Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. Suppose that there exists a positive constant M such that the injectivity radius at any point in R is less than M. Then there exists a constant $N \in \mathbf{N}$ depending only on M such that, for a conformal automorphism f on R that satisfies $f(p) = p$ for a point p in R, the order of f is less than N.*

The proofs of these theorems are based on the Jørgensen inequality and its application to the collar, cusp and cone lemmas (cf. [1], [3], [4]).

References

[1] P.Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surface*, Progress in Mathematics **106**, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1992.

[2] H. Farkas and I. Kra, *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980.

[3] N. Halpern, A proof of the collar lemma, Bull. London Math Soc., **13**, 1981, 141-144.

[4] J. P. Matelski, A compactness theorem for Fuchsian groups of the second kind, Duke Math. J. **43**, 1976, 829-840.

13. 可換な整函数の Julia 集合

野田　洋二　　　　東京工業大学・理学部

二つの可換な有理函数の Julia 集合は一致することが，Fatou [2], Julia [3] によって示されているが，Baker [1] は可換な超越整函数の Julia 集合についても同様の事が成り立つかという問題を提起して，次の結果を得ている．

補題（[1]）．f を超越整函数，$g = cf^n + d$ $(n \geq 1,\ c, d \in \mathbf{C},\ c \neq 0)$, $f \circ g = g \circ f$ とするとき，$J(f) = J(g)$ である．

この結果によると，f と可換な整函数全体を $C(f)$ で表すとき，
$C(f) \subset \{cf^n + d : n \geq 0,\ c, d \in \mathbf{C},\ c \neq 0\}$ ならば，f に関して Baker の問題は肯定的に成り立つことが分る．

講演者は [5] で，殆ど全ての超越整函数は合成による分解が不可能であることを示した．最近 Ng [4] は，$C(f)$ について上式が成り立つための，f の（分解不可能性を含む）条件を求めた．Ng の方法と [5] の結果を合せることにより次の結果を得た．

定理１．f を超越整函数，m を正整数とする．$f_a(z) = f(z) + az^m$ $(a \in \mathbf{C})$ とおくとき，高々可算個の $a \in \mathbf{C}$ を除いて $C(f_a) \subset \{cf_a{}^n + d : n \geq 0,\ c, d \in \mathbf{C},\ c \neq 0\}$ が成り立つ．

定理２．f を超越整函数とする．$f_a(z) = (z - a)f(z)$ $(a \in \mathbf{C})$ とおくとき，高々可算個の $a \in \mathbf{C}$ を除いて $C(f_a) = \{f_a{}^n : n \geq 0\}$ が成り立つ．

定理３．φ を $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上の正則函数，$0, \infty$ を真性特異点，$m \neq 0$ を整数とする．$\varphi_a(w) = \varphi(w) + aw^m$, $f_a(z) = \varphi_a(e^z)$ $(a \in \mathbf{C})$ とおくとき，高々可算個の $a \in \mathbf{C}$ を除いて $C(f_a) = \{f_a{}^n : n \geq 0\}$ が成り立つ．

参考文献

[1] I. N. Baker, *Wandering domains in the iteration of entire functions,* Proc. London Math. Soc., (3) **49** (1984), 563–576.

[2] P. Fatou, *Sur l'itélation analytique et les substitutions permutables,* J. Math., (9) **2** (1923), 343–384.

[3] G. Julia, *Mémoire sur la permutabilité des fractions rationelles,* Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) **39** (1922), 131–215.

[4] T. W. Ng, *Permutable entire functions and their Julia sets,* (preprint)

[5] Y. Noda, *On factorization of entire functions,* Kodai Math. J., **4** (1981), 480–494.

14. 有理半群の作用素の空間における コンパクト化

角　大輝
東京工業大学理学部数学教室
〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1
e-mail; sumi@math.titech.ac.jp

リーマン球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上の非定数有理写像で生成された写像の合成を積とする半群を有理半群とよぶ ([HM])。G を有理半群とする。$\overline{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合 K 上の複素数値連続関数全体を $B(K)$ とかき、一様ノルムで $\mathbb{C}$ 上のバナッハ空間と思う。もし「任意の $g \in G$ について $g^{-1}(K) \subset K$ 」ならば各元 $g \in G$ について $B(K)$ 上の連続線形作用素 $A(g)$ が

$$(A(g)(\varphi))(z) = \frac{1}{\deg(g)} \sum_{w \in g^{-1}(z)} \varphi(w)$$

で定義され（上で重複度は込める）、$g \mapsto A(g)$ は G から $B(K)$ 上の連続線形作用素のなす半群への半群準同形である。この準同形の像を $A(G)$ とかく。$B(K)$ 上の連続線形作用素全体に各点収束の位相 (strong operator topology) を入れたものを $L(B(K))$ とかく。また、一般に $\overline{\mathbb{C}}$ 上の有理写像 h に対し、$E(h) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \sharp(\cup_{n \in \mathbb{N}} h^{-n}(z)) < \infty\}$ とおく。（これは $\deg(h) \geq 2$ なら高々2点しかない。）また $m \in \mathbb{N}$ に対し $\Sigma_m = \{1, 2, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ とおく。

定理 1. 以上のもとで、$\sharp K \geq 3$ とし、G が有限個の次数2以上の元 $h_1, \ldots, h_m$ で生成されているとき、次の条件は互いに同値。

1. 任意の $z \in K$ と任意の $j = 1, \ldots, m$ に対し、$E(h_j) \cap K = \emptyset$.
2. $A(G)$ の $L(B(K))$ での閉包 $\overline{A(G)}$ がコンパクトである。(このとき $\overline{A(G)}$ はコンパクト位相半群になる。)
3. 任意の $x \in \Sigma_m$ に対し、ある $L_x \in L(B(K))$ が存在して　$L(B(K))$ で

$$A(h_{x_n} \circ \cdots \circ h_{x_1}) \to L_x$$

となり、かつこの L_x は K 上のあるボレル確率測度 μ_x を用いて $L_x(\varphi)(z) = \mu_x(\varphi)$ (右辺は K 上の定数関数) と表される。 ただし、$x = (x_1, x_2, \ldots)$.

また上のいずれかが成り立つとき、3について $A(G) \bigcup \bigcup_{x \in \Sigma_m} \{L_x\}$ が $A(G)$ の $L(B(K))$ での閉包に等しい。

注意 1.
- $m = 1$ のときは [L].
- $x \mapsto \mu_x$ は確率測度の空間の弱位相に関して連続。$\Sigma_m \times \overline{\mathbb{C}}$ 上の歪積写像 $f(x, y) = (\sigma(x), h_{x_1}(y))$ (ただし $\sigma(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$) を考える。$\Sigma_m$ にベルヌイ測度 τ があるとき、$\mu(\tau) = \int_{\Sigma_m} \mu_x d\tau(x)$ とおくとこれは $\Sigma_m \times \overline{\mathbb{C}}$ 上の確率測度だが、$\mu(\tau)$ は f の τ に関しての相対エントロピー測度を最大にさせるような唯一の確率測度である ([S1],[S2])。

定理 1 の 1 から他を示すとき、
「任意の $\varphi \in B(K)$ に対して $\{A(g)(\varphi) \mid g \in G\}$ は K 上同等連続」
を示すことが問題となる。それには、[B], [S1] にある方法を発展させたものを使う。

参考文献

[B] D.Boyd, An invariant measure for finitely generated rational semigroups, Complex Variables, **39** (1999), No.3, 229-254.

[HM] A.Hinkkanen and G.J.Martin, *The Dynamics of Semigroups of Rational Functions I*, Proc.London Math.Soc. (3)**73**(1996), 358-384.

[L] M.Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere,* Ergod.Th.and Dynam.Sys., **3**, 1983, 351-385.

[S1] H.Sumi, *Skew product maps related to finitely generated rational semigroups,* Nonlinearity, **13**, (2000), 995-1019.

[S2] H.Sumi, *Semi-hyperbolic fibered rational maps and rational semigroups,* preprint.

15. MODULI SPACES OF NON-COMPACT RIEMANN SURFACES

KATSUHIKO MATSUZAKI

Department of Mathematics, Ochanomizu University

For a compact Riemann surface R of genus greater than one, it is well known that the Teichmüller modular group (or mapping class group) $\mathrm{Mod}(R)$ acts on the finite dimensional Teichmüller space $T(R)$ isometrically and properly discontinuously. In more details, although $\mathrm{Mod}(R)$ has fixed points on $T(R)$, the isotropy group $\mathrm{Stab}(p)$ at any $p \in R$ is a finite group. Hence an orbifold structure on the moduli space $M(R)$ is induced from $T(R)$ as the quotient space by $\mathrm{Mod}(R)$. However, this is not always true for non-compact Riemann surfaces such as R of infinite genus or of the infinite number of punctures, for which the Teichmüller space $T(R)$ is infinite dimensional. In this case, the orbit of a point in $T(R)$ under $\mathrm{Mod}(R)$ may be non-discrete and the isotropy group $\mathrm{Stab}(p)$ may be infinite.

We formulate a condition for the discreteness of the orbit allowing isotropy groups to be infinite, for the latter situation is natural and occurs in many cases, for instance, in cases where R are infinite normal covers of compact Riemann surfaces. Weakening proper discontinuity, we make a new criterion for the action of $\mathrm{Mod}(R)$ to be discontinuous, which should be suitable for infinite dimensional cases:

Definition 1. We say that the Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}(R)$ acts on $T(R)$ *weakly discontinuously* if, for any point $p \in T(R)$, there exists an open ball U centered at p such that U is equivariant under the isotropy group $\mathrm{Stab}(p)$, meaning that $\varphi(U) = U$ for any $\varphi \in \mathrm{Stab}(p)$ and $\varphi(U) \cap U = \emptyset$ for any $\varphi \in \mathrm{Mod}(R) - \mathrm{Stab}(p)$.

We consider moduli spaces of non-compact Riemann surfaces. No matter how the action of $\mathrm{Mod}(R)$ is far from proper discontinuity, the moduli space is a topological space by the quotient topology induced by the projection

$$\pi : T(R) \to M(R) = T(R)/\mathrm{Mod}(R).$$

Moreover a pseudo-metric d_M on $M(R)$ is always defined as

$$d_M(\pi(p), \pi(q)) = \inf\{d_T(\varphi(p), q) \mid \varphi \in \mathrm{Mod}(R)\}.$$

We investigate necessary and sufficient conditions on the action of $\mathrm{Mod}(R)$ under which the moduli space $M(R)$ becomes a complete metric space with the metric d_M, like moduli spaces of compact Riemann surfaces do. However, if we deal with non-compact Riemann surfaces in general, we may encounter a situation that a neighborhood of $p \in T(R)$ splits into two directions according to whether the action of $\mathrm{Mod}(R)$ is discontinuous or not, and hence d_M becomes a metric even if $\mathrm{Mod}(R)$ acts properly discontinuously nowhere on $T(R)$. In order to avoid that and make our situation simpler, we need to impose a certain geometric assumption on the base Riemann surface R.

Definition 2. A hyperbolic Riemann surfaces R is of *bounded geometry* if the injectivity radius at any point of R is uniformly bounded away from zero except in cusp neighborhoods and if there exists a subdomain R^* of R such that the injectivity radius at any point of R^* is uniformly bounded from above and that the homotopy classes of simple closed curves in R^* carry the fundamental group of R.

We are ready to state our result in the following way:

Theorem 1. *Let $T(R)$ be the Teichmüller space of a Riemann surface R of bounded geometry,* $\mathrm{Mod}(R)$ *the Teichmüller modular group and $M(R) = T(R)/\mathrm{Mod}(R)$ the moduli space. Then the following conditions are equivalent:*

(1) $\mathrm{Mod}(R)$ *acts on $T(R)$ weakly discontinuously;*
(2) *the orbit of any point $p \in T(R)$ under* $\mathrm{Mod}(R)$ *is a discrete set in $T(R)$;*
(3) *the pseudo-metric d_M on $M(R)$ is a metric;*
(4) *$M(R)$ satisfies the first (Fréchet) separation axiom.*

However, as we can see in the next theorem, the difference between the two discontinuities appears in a very restricted case.

Theorem 2. *If* $\mathrm{Mod}(R)$ *acts on $T(R)$ weakly discontinuously but not properly discontinuously, then in an isotropy group* $\mathrm{Stab}(p)$, *there exists a finitely generated infinite group T whose proper subgroups are all finite.*

The existence of such a group T as in Theorem 2 is known as a counterexample to the Burnside problem and it is called Tarski monster.

16. On multiply connected wandering domains

Mitsuhiro Shishikura
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University

Masashi Kisaka
Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University

Definition. For a domain D of $\mathbb{C}$, the connectivity $conn(D)$ is defined to be the number of connected components of $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$, which may be ∞.

We investigate the connectivity of Fatou components of the Fatou set of a transcendental entire function f. It is known that if the Fatou component D is multiply-connected, then it must be a wandering domain. First we show the following:

Theorem A. *For a wandering domain D of a transcendental entire function f, the connectivity $conn(f^n(D))$ is constant for large n and it is either* 1, 2 *or* ∞.

So we define the *eventual connectivity* of the Fatou component D as follows:

Definition. We define the *eventual connectivity* to be $conn(f^n(D))$ for sufficiently large n.

The first example of a multiply-connected wandering domain was constructed by Baker **[B1]**. Also there is an example of wandering domain with infinite connectivity **[B2]**. So far there seems to be no examples of wandering domain with finite connectivity and we construct such an example.

Theorem B. *There exists a transcendental entire function f with a wandering domain D such that $f^n(D)$ are doubly connected for all $n \geq 0$, i.e. the eventual connectivity is* 2.

Also we have some result on the injectivity radius of a multiply-connected wandering domain.

Definition. Let f be a transcendental entire function and F_f its Fatou set. For a point $z \in F_f$, let $inj(z)$ be the *injectivity radius* of F_f (with respect to the Poincaré metric), i.e., $inj(z)$ is the supremum of $r > 0$ such that the Poincaré disk of radius r centered at z is embedded in F_f.

Theorem C. *If D is a multiply connected wandering domain of a transcendental entire function f, then $inj(f^n(z)) \to 0$ $(n \to \infty)$ for $z \in D$.*

References

[**1**] I. N. Baker, *Multiply-connected domains of normality in iteration theory* , Math. Z. **81** (1963), 206–214.

[**2**] I. N. Baker, *Some entire functions with multiply-connected wandering domains* , Ergod. Th. & Dynam. Sys. **8** (1988), 503–507.

E-mail address: `mitsu@kusm.kyoto-u.ac.jp`, `kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp`

17. Two theorems on degenerate groups with bounded geometry

宮地秀樹（大阪市立大学理学研究科）

G を閉軌道体（closed orbifold）の基本群 π_1 と同型な幾何学的無限群とする。G が有界幾何（bounded geometry）をもつとは、G の位数が無限の元の実移動距離（translation length）が G にのみ依存する正数で下から押さえられる時にいう。G の不連続領域が空でない時、その極限集合 Λ_G は樹状突起（dendrite）であることが知られている。従って、Λ_G の任意の二点は唯一一本の閉弧で結ぶことができる。また、その極限集合のハウスドルフ次元は 2 であることも知られていて、平面上の集合としては非常に複雑なものであることが想像できる。

樹状突起集合 K の端点とは K がその点を（相対位相で）内点に含む弧を含まない時にいう。Λ_G からその端点の集合を除いた集合を $\check{\Lambda}_G$ と書く。W.Abikoff と Y.Minsky は、$\check{\Lambda}_G$ には G の終層（ending lamination）（正確にはねじれのない位数有限の G の部分群の終層）を台に持つ横断的測度から定まる距離が入り R-樹の構造を持つことを示した。

定理 1. G を閉軌道体（closed orbifold）の基本群と同型な幾何学的無限群で、有界幾何をもちそしてその不連続領域は空でないとする。このとき次が成立する。

(1) R-樹 $\check{\Lambda}_G$ の任意の二点は擬弧（quasi-arc）で結ぶことができる。

(2) 斜航的元 $g \in G$ の固定点は擬弧で結ぶことができる。

さらに、非可算無限個の本質的に異なる擬弧を含むこともわかる。

H を単位円板に作用する π_1 と同型なフックス群とし、G を上のような幾何学的無限群とする。ここで G の不連続領域は空でも良い。$\rho : H \to G$ を同型とする。このとき、Y.Minsky は Cannon-Thurston 写像と呼ばれる $F : S^1 \to \Lambda_G$ で、$F \circ h = \rho(h) \circ F$ を満たす連続写像があることを証明した。この連続写像に関して次が成立する。

定理 2. Cannon-Thurston 写像 $F : S^1 \to \Lambda_G$ は次のような連続性を持つ:

$$d_e(F(x, F(y)) \leq A\ |\log[x, y]|^{-B}, \quad [x, y] \leq \delta$$

ここで、$[x, y]$, $x, y \in S^1$ は x と y を結ぶ円弧の長さ、d_e は球面距離である。

この定理の系として次を得る：

系. $E \subset \Lambda_G$ に対して次が成立する：$E' \subset S^1$ を $F(E') = E$ を満たすものとする。このとき、

(1) $\mathrm{Hdim}(E) > 0$ であれば、ある B について $|\log t|^{-B}$ をゲージ関数に持つ E' のハウスドルフ測度は正である。

(2) $|\log\log t|^{-1}$ をゲージ関数に持つ E' のハウスドルフ測度は 0 であれば、$\mathrm{Hdim}(E) = 0$ である。

参考文献

[1] Abikoff W., Kleinian groups—geometrically finite and geometrically perverse. Contemp. Math. **74**,(1988), 1–50.

[2] Minsky Y., On rigidity, limit sets, and end invariants of hyperbolic 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), no. 3, 539–588.

18. Linearization problem on structurally finite entire functions

Yûsuke Okuyama
Faculty of Science, Shizuoka University
syokuya@ipc.shizuoka.ac.jp

Structurally finite entire functions are constructed from finitely many quadratic blocks and exponential blocks by (Klein and) Maskit surgeries connecting two functions. For the precise definition, see [2]. For examples, polynomials of degree d are constructed from d quadratic blocks so they are structurally finite.

We shall study:

Question. We suppose that a structurally finite entire function has a cycle whose multiplier is $\lambda = e^{2\pi i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (then this cycle is said to be *irrationally indifferent*). If it is a Siegel cycle, then does α satisfies the Brjuno condition?

Brjuno condition is defined by

$$\sum_{n>0} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty,$$

where $\{q_n\}$ is the sequence of denominators of the approximating rational numbers defined by continued fraction expansion of α. An irrationally indifferent cycle of an entire function f of period p with multiplier $e^{2\pi i\alpha}$ is *Siegel* if on a neighborhood of a point of it, $f^{\circ p}$ is conformally conjugate to the $2\pi\alpha$-rotation around the origin on a disk.

The converse of Question is true from the Brjuno Theorem. Yoccoz proved in [3] that if a *quadratic* polynomial has a Siegel *fixed point* whose multiplier is λ, then α satisfies the Brjuno condition. Pérez-Marco proved it for *structurally stable* polynomials with Siegel *fixed points*. In [1], we have proved it for a class of *n-subhyperbolic* polynomials with Siegel *cycles*. As a corollary, we have that Question is true for Siegel cycles of quadratic polynomials.

Definition (Omega limit set and recurrence). Let f be an entire function. For $c \in \mathbb{C}$, the *omega limit set* $\omega(c)$ is the set of $z \in \mathbb{C}$ such that $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(c) = z$ for some $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$.

c is *recurrent* if $\omega(c) \ni c$.

Definition (corresponding). Let $\mathcal{C}$ be an irrationally indifferent cycle of an entire function f. Let $\Gamma \subset \mathbb{C}$ be the union of the boundaries of Siegel disks of $\mathcal{C}$ if it is Siegel, and otherwise be $\mathcal{C}$ itself.

A point $c \in \mathbb{C}$ *corresponds to* $\mathcal{C}$ if $\omega(c) \supset \mathcal{C}$. A trancendental singularity A of f^{-1} *corresponds to* $\mathcal{C}$ if the asymptotic value under A satisfies $\omega(a) \supset \mathcal{C}$.

Definition (n-subhyperbolicity). For a non-negative integer n, a structurally finite entire function f is *n-subhyperbolic* if

(i) there exist exactly n recurrent critical points of f or transcendental singularities of f^{-1} corresponding to irrationally indifferent cycles,

(ii) every critical point in $J(f)$ other than such ones as (i) and asymptotic values in $J(f)$ over which there is no such transcendental singularities of f^{-1} as (i) is eventually periodic, and

(iii) no orbits of singular values in $F(f)$ accumulate to $J(f)$.

An n-subhyperbolic f is *n-hyperbolic* if it has no such ones as (ii).

Theorem. *If a 1-hyperbolic structurally finite entire function of type $(p, q) \neq (0, 1)$ has a Siegel fixed point whose multiplier is $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, then α satisfies the Brjuno condition.*

References

[1] OKUYAMA, Y. Non-linearizability of n-subhyperbolic polynomials at irrationally indifferent fixed points, *J. Math. Soc. Japan*, **53**, 4 (2001), 847–874.

[2] TANIGUCHI, M. Explicit representation of structurally finite entire functions, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **77**, 4 (2001), 68–70.

[3] YOCCOZ, J.-C. Théorèm de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques, *Astérisque*, **231** (1996), 3–88.

19. Meromorphic Mappings with Deficiencies into Complex Projective Spaces

YOSHIHIRO AIHARA AND SEIKI MORI
Numazu College of Technology and Yamagata University

Let $D_1, \cdots, D_q$ be nonsingular hypersurfaces of degree d in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ intersecting normally and $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ a dominant meromorphic mappings. Then the following defect relation for f is due to Griffiths's school:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_f(D_j) \leq \frac{n+1}{d}.$$

Griffiths ([1, p. 379]) also conjectured that the above defect relation holds for meromorphic mappings $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ with an appropriate nondegeneracy condition. Furthermore, there has been a well-known conjecture that the following estimate

$$\delta_f(D) \leq \frac{C}{d}$$

holds under a generic condition for D, where C is a positive constant independent of f and D (cf. Siu [2, p. 289]). So far, we know only few examples of meromorphic mappings with a deficient hypersurface of high degree whose deficiency is less than one. We construct meromorphic mappings with deficiency for each irreducible hypersurface in complex projective spaces, that is, we have the following result concerning a conjecture due to Griffiths:

Theorem 1. *Let D be an arbitrary irreducible hypersurface of degree d in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Then there exists a meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ with the Zariski dense image such that*

$$\delta_f(D) = \frac{\lambda(D)}{d} < 1,$$

where $\lambda(D)$ is a positive constant depending only D. Furthermore, if $m \geq n$, then there exists a dominant meromorphic mapping with the above property.

The method used in our construction is based on the theory of entire functions of one complex variable, especially, on some properties of entire functions of order zero due to Valiron [3]. We note that, for a singular divisor D, there exist examples of f for which such estimates as the above type do not hold. We now consider the case $n = 2$. Denote by $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ a homogeneous coordinate system in $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$. We define an irreducible curve C_d by

$$\zeta_0 \zeta_2^{d-1} - \zeta_1^d = 0 \quad (d \geq 3).$$

Note that C_d also has just one singular point $\mathrm{P}_0(1,0,0)$. Then we have the following:

Theorem 2. *Let α be a positive real number less than one. Suppose that $\alpha + 1/d < 1$. Then there exists a meromorphic mappings $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ with the Zariski dense image such that $\delta_f(C_d) = \alpha$.*

Corollary. *There exists a meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ with the Zariski dense image such that $\delta_f(C_d) = (d-2)/d$.*

We now investigate how affects the resolution of singularities of divisors to deficiencies. If $\pi : \tilde{\mathbf{P}}_2(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ is a monoidal transformation with center P_0, then this gives a resolution of singularity of C. Let $\bar{C}$ is the proper transform of C. We define holomorphic curve $\tilde{f} : \mathbf{C} \to \tilde{\mathbf{P}}_2(\mathbf{C})$ by $\tilde{f} = \pi^* f$. Then we have an estimate of the Griffiths type for $\delta_{\tilde{f}}(\bar{C})$ as follows.

Theorem 3. *Let α be a positive real number such that $\alpha + 1/d < 1$ and let f be as in Theorem 2. Let $\bar{C}$ be as above. Then*

$$\frac{1}{d} \quad \cancel{\frac{1}{2d}} < \delta_{\tilde{f}}(\bar{C}) < \cancel{\frac{3}{d}} \cdot \frac{d-1}{2d-1}$$

References

[1] P. A. Griffiths, Holomorphic mappings: Survey of some results and discussion of open problems, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 374–382.

[2] Y.-T. Siu, Nonequidimensional value distribution theory, Proc. Complex Analysis, Joensuu 1987 (eds. I. Laine et al.), 285–311, Lect. Notes in Math. **1351**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[3] G. Valiron, Sur valueres déficientes des fonctions algebroïdes méromorphes d'ordre null, J. d'Analyse Math. **1** (1951), 28–42.

20. 準アーベル多様体内の代数曲線と因子の交叉位数の評価

野口潤次郎　　東大・数理
Jörg Winkelmann　KIAS

A. Buium ([94], [98]) は，イロハ予想 (abc-Conjecture) の類似をアーベル多様体に対し考えその関数体版とし次のような結果を得た．C を $\mathbf{C}$ 上のコンパクト滑らかな代数曲線としその関数体を $K = \mathbf{C}(C)$ とする．K 上のアーベル多様体 $\mathcal{A}$ とその因子を $\mathcal{D}$ とする．

定理-I ([B94]) $\mathcal{A}$ の $K/\mathbf{C}$-跡は自明とする．ある定数 $N = N(C, \mathcal{A}, \mathcal{D})$ があって，任意の K-有理点 $\sigma \in \mathcal{A}(K) \setminus \mathcal{D}$ に対し，それを切断 $\sigma : C \to \mathcal{A}$ と見たとき，$\sigma(C)$ と $\mathcal{D}$ の交わりの位数 $\mathrm{ord}_x \sigma^* \mathcal{D} \leqq N$, $\forall x \in C$.

$\mathcal{A}$ の $K/\mathbf{C}$-跡が自明でないとき，極端な場合としてそれが $\mathcal{A}$ 全体になる場合については，

定理-II ([B98]) A を $\mathbf{C}$ 上のアーベル多様体，D が正次元部分群の平行移動を含まない因子（小林双曲性と同値）とする．このときある定数 $N = N(C, A, D)$ があって，任意の正則写像 $\sigma : C \to A$, $\sigma(C) \not\subset D$ に対し，

$$\mathrm{ord}_x \sigma^* \mathcal{D} \leqq N, \quad \forall x \in C.$$

注意であるが，$\sigma(x) \in D$ となる $x \in C$ をある有限集合 $S \subset C$ に限定すると ((S, D)-整元)，上の条件下で $A \subset D$ は完備双曲的で A に双曲的に埋め込まれているので，かかる σ のモジュライ空間が準射影代数的になり ([N88])，$\mathrm{ord}_x \sigma^* \mathcal{D}$ の有界性は，それより直ちに従う．微妙な点だが，S を指定しないところがこの定理の要点である．

A. Buium の証明は，Kolchin の微分代数 (differential algebra) の理論によるもので，特に定理-II について古典的（標準的？）代数幾何的方法による証明を与えることと，D の双曲性の仮定は強すぎ，豊富性の仮定で証明できるかということを問題とした．

ここでは，この２つの問題についてより一般的かつ N の依存についてより普遍的なかたちで解答を与える．

主定理. X を $\mathbf{C}$ 上の準アーベル多様体とし，その滑らかな X-同変コンパクト化 $\bar{X}$ をとり固定する．$\bar{D}$ を $\bar{X}$ の豊富因子とし，$D = \bar{D} \cap A$ とする．$B \subset C$ をアフィン開集合を固定する．このとき，ある定数 N があって，任意の $f : B \to X$ に対し，$f(B) \subset D$ であるか，または

$$\mathrm{ord}_x f^* D \leqq N, \quad \forall x \in B.$$

ここで N は次のデータにのみ依る．

(i) C の種数 g と，$|C \setminus B|$,

(ii) $\dim X$,

(iii) X の極大アフィン群 $T = (\mathbf{C}^*)^t$ の $\bar{X}$ 内でのトーリックコンパクト化 $\bar{T}$,

(iv) 交点数 $\bar{D}^h \cdot B_{i_1} \cdots B_{i_k}$. ただし，$B_{i_j}$ は A-軌跡の閉包で次元 n_j で，$h + \sum n_j = n$ をみたすもの全てにわたる．

アーベル多様体のば場合に特化すれば，

定理 1. A を $\mathbf{C}$ 上の n 次元アーベル多様体とし，D を X の豊富因子とする．C の種数を g とする．このとき，ある定数 $N(g, n, D^n)$ があって，任意の $f : C \to A$ に対し，$f(C) \subset D$ であるか，または

$$\mathrm{ord}_x f^* \mathcal{D} \leqq N(g, n, D^n), \quad \forall x \in C.$$

我々の証明は，正則曲線の第二主要定理を準アーベル多様体の場合に証明するのに有効であったジェット束を用いる ([NWY00], [NWY99]).

応用として次の様な有限性定理を得る．

定理 2. $S \subset C$ を有限集合とする．A を $\mathbf{C}$ 上の n 次元アーベル多様体とし，D を X の豊富因子とする．もし非定写像 $f : C \to D$ が存在しないならば，正則写像 $f : C \to A$, $f^{-1} D \subset S$ であるものは有限しか存在しない．

参考文献

[B94] Buium, A., The abc theorem of abelian varieties, Intern. Math. Res. Notices **5** (1994), 219-233.

[B98] Buium, A., Intersection Multiplicities on abelian varieties, Math. Ann. **310** (1998), 653-659.

[N88] J. Noguchi, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces, Invent. Math. **93** (1988), 15-34.

[NWY00] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The value distribution of holomorphic curves into semi-Abelian varieties, C.R. Acad. Sci. Paris t. **331** (2000), Serié I, 235-240.

[NWY99] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties, preprint UTMS 99-49, math/9912086, 1999, to appear in Acta Math.

特別講演

トロイダル群

－$\bar{\partial}$-コホモロジーと準アーベル多様体－

梅野高司　（九州産業大学）

1 Introduction

連結な複素リー群 X が非定数正則関数をもたないときに トロイダル群 という. 定義より X は複素可換リー群であり, 複素次元を n とすると, $\mathbb{C}^n$ の離散的部分加群 Γ が存在して, $X \cong \mathbb{C}^n/\Gamma$ となる.

Proposition 1.1 複素可換リー群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ がトロイダル群 $\Leftrightarrow$

(1.1) $\sigma \in \mathbb{C}^n$, $<\sigma, \lambda> \in \mathbb{Z}$ for all $\lambda \in \Gamma$ imply $\sigma = 0$.

$r = \operatorname{rank}\Gamma$ とすると, (1.1) より, $n+1 \leq r \leq 2n$ かつ $\mathbb{C}\{\Gamma\} = \mathbb{C}^n$ である. 特に $r = 2n$ のとき, $\mathbb{C}^n/\Gamma$ は複素トーラスとなりコンパクトであるが, ここではコンパクトでない場合を主な考察の対象とする. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を Γ の basis とするとき $\Gamma = \mathbb{Z}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ と書く. 行列 $P = [\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$ を $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の 周期行列 という. $\mathbb{R}_\Gamma = \mathbb{R}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ とすると, $K = \mathbb{R}_\Gamma/\Gamma$ は $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の極大コンパクト群である. $\mathbb{C}_\Gamma = \mathbb{R}_\Gamma \cap \sqrt{-1}\mathbb{R}_\Gamma$ を $\mathbb{R}_\Gamma$ の最大複素部分空間とする. 松島 - 森本 [8] により, 複素可換リー群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が Stein 群であるためには $\mathbb{C}_\Gamma = \{0\}$ が必要十分である. 従ってトロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ に対しては, $\dim_C \mathbb{C}_\Gamma > 0$ となる.

Definition 1.1. トロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が

$$\dim_C \mathbb{C}_\Gamma = q \,(q > 0)$$

となるとき type q という.

定義よりトロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が type q $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\Gamma = n + q$ である.

Definition 1.2. トロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が 準アーベル多様体 とは Hermitian form H on $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ が存在して

(1.2) $H \,|\, \mathbb{C}_\Gamma \times \mathbb{C}_\Gamma > 0$ かつ

(1.3) $E := \operatorname{Im} H \,|\, \Gamma \times \Gamma$ が整数値歪対称形式

となるときにいう.

H を ample Riemann form という. 定義より, $2q \leq E \leq n + q$ である.

Definition 1.3. type q の準アーベル多様体 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が kind s $(0 \leq 2s \leq n - q)$ とは $\operatorname{rank} E = 2q + 2s$ のときにいう.

2 トロイダル群の $\bar{\partial}$-コホモロジー

$\mathbb{C}^n/\Gamma$ を type q のトロイダル群とする. $\mathbb{C}^n$ の適当な線形変換により $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の周期行列を $P = [I_n, V]$, ここに $I_n = [e_1, \ldots, e_n]$ は n 次の単位行列で $V = [v_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q] = [v_1, \ldots, v_q]$ は $n \times q$ 行列, とすることが出来る. $V_1 = [v_{ij}; 1 \leq i, j \leq q]$, かつ $V_2 = [v_{ij}; q+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q]$ とおく. $\det(\operatorname{Im} V_1) \neq 0$ と仮定してよい. さらに $v_i = \sqrt{-1} e_i \, (q+1 \leq i \leq n), \beta_i = \operatorname{Im} v_i \, (1 \leq i \leq n)$ とすると $\beta_1, \ldots, \beta_n$ は $\mathbb{C}$-独立である.

(2.1)
$$\begin{aligned} z = \; & z_1\beta_1 + \cdots + z_n\beta_n \\ = \; & t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n + t_{n+1} v_1 + \cdots + t_{2n} v_n \end{aligned}$$

とおくと

(2.2)
$$\begin{aligned} t_i &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(-\sum_{j=1}^{n} \bar{v}_{ij} z_j + \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \bar{z}_j\right) \\ t_{n+i} &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(z_i - \bar{z}_i) \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

従って

(2.3)
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\sum_{j=1}^{n} v_{ji} \frac{\partial}{\partial t_j} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial t_{n+i}}\right) \quad (1 \leq i \leq q) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial t_{n+i}}\right) \quad (q+1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

$z = w_1 e_1 + \ldots + w_n e_n$ に対して

$$\pi_q : \mathbb{C}^n \ni z = {}^t(w_1, \ldots, w_n) \longmapsto z^* = {}^t(w_1, \ldots, w_q) \in \mathbb{C}^q$$

とすると

$$\pi_q : \mathbb{C}^n/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^q/\pi_q(\Gamma)$$

は主 $(\mathbb{C}^*)^{n-q}$ バンドルである. 各開集合 $U \subset \mathbb{C}^n/\Gamma$ に対し

$$\mathcal{F}(U) := \{f \mid f : C^\infty \text{ in } U \text{ and } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0, \text{ for } i = q+1, \cdots, n\},$$

$\mathcal{F}$ を準層 $\{\mathcal{F}(U)\}$ で定義された層とする. $f \in H^0(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F})$ は C^∞ で各ファイバー上で正則な関数である.

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^{n+q}} c^m(t'') \exp(2\pi\sqrt{-1} < m, t' >) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^{n+q}} f^m(t)$$

とおく. ここで $t = {}^t({}^t t', {}^t t'') \in \mathbb{R}^{2n}, t' \in \mathbb{R}^{n+q}, t'' \in \mathbb{R}^{n-q}$ である. 各 $m \in \mathbb{Z}^{n+q}$ に対し, $K_{mi} := {}^t m v_i - m_{n+i} \; (1 \leq i \leq q)$ とおくと, (2.3) により

(2.4)
$$\frac{\partial f^m(t)}{\partial \bar{z}_i} = \pi K_{mi} c^m(t'') \exp(2\pi\sqrt{-1} < m, t' >), \quad (1 \leq i \leq q).$$

Proposition 2.1 周期行列を $P = [I_n, V]$ とする複素可換リー群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ がトロイダル群 $\Leftrightarrow$

$$(2.5) \qquad m \in \mathbb{Z}^{n+q},\ \ K_{mi} = 0 \ \text{for all i}\ (1 \le i \le q)\ \text{imply}\ m = 0.$$

結局,

$$(2.6) \qquad f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{n+q}} c^m \exp(-2\pi \sum_{i=q+1}^{n} m_i t_{n+i}) \exp(2\pi \sqrt{-1} < m, t' >)$$

となる. ここで, c^m は定数であり, 次の式を満たす. 任意の実数 $R > 0$ と任意の正の整数 k に対し,

$$(2.7) \qquad C(k,R) := \sup\{|c^m|\, \|m'\|^k R^{\|m''\|}; m \in \mathbb{Z}^{n+q}\} < \infty$$

ここで, $\|m'\| = \max\{|m_i|, |m_{n+i}|; 1 \le i \le q\}$, $\|m''\| = \max\{|m_j|; q+1 \le j \le n\}$. 逆に (2.7) を満たす関数 (2.6) は $H^0(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F})$ の元である.

B をトロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上のベクトルバンドル, $\Omega^r(B)$ を B に値をもつ正則 r-forms の層, $\mathcal{F}^{r,p}$ を $\mathcal{F}$ に係数をもつ (r,p)-forms の層, そして $\mathcal{F}^{r,p}(B) := \mathcal{F}^{r,p} \otimes \Omega^0(B)$ とすると次の補題を得る ([7]).

Lemma 2.2 $H^k(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{r,p}(B)) = 0, \quad k \ge 1.$

Lemma 2.3

$$0 \to \Omega^r(B) \to \mathcal{F}^{r,0}(B) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{F}^{r,1}(B) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{F}^{r,q}(B) \to 0$$

は exact で

$$H^p(\mathbb{C}^n/\Gamma, \Omega^r(B)) \cong \frac{Z_{\bar\partial}(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{r,p}(B))}{B_{\bar\partial}(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{F}^{r,p}(B))}.$$

以上より次の定理を得る ([5],[6]).

Theorem 2.4 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を周期行列を $P = [I_n, V]$ とする type q のトロイダル群とすると次の条件は同値である.

(1) $\exists a > 0$ s.t. $\sup_{m \in \mathbb{Z}^{n+q} \setminus 0} \exp(-a\|m^*\|)/K_m < \infty$,

ここに, $\|m^*\| = \max\{|m_i|; 1 \le i \le n\}$, $\quad K_m := \max\{|K_{mi}|; 1 \le i \le q\}$.

(2) $H^p(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{O}) \cong \bigwedge^p \mathbb{C}\{d\bar z_1, \ldots, d\bar z_q\}\ (1 \le p \le q)$

$\qquad = 0\ (p > q)$.

3 トロイダル群の de Rham コホモロジー

$\mathbb{C}^n/\Gamma$ を周期行列を $P = [I_n, V]$ とする type q のトロイダル群とする. §2 と同様に $\det(\mathrm{Im}\, V_1) \neq 0$ とする.

$\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の $C^\infty d$-closed p-forms φ_1 と φ_2 が d-コホモローグのとき $\varphi_1 \sim \varphi_2$ と書く. (2.1) において $t_{n+i}\quad(q+1 \leq i \leq n)$ は $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の関数である. (2.2) より

$$\text{(3.1)}\qquad dt_i = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Big(-\sum_{j=1}^{q}\overline{v}_{ij}dz_j + \sum_{j=1}^{q}v_{ij}d\overline{z}_j\Big)\quad (1 \leq i \leq q)$$

$$dt_i \sim \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Big(-\sum_{j=1}^{q}\overline{v}_{ij}dz_j + 2\sqrt{-1}dz_i + \sum_{j=1}^{q}v_{ij}d\overline{z}_j\Big)\quad (q+1 \leq i \leq n)$$

$$dt_{n+i} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(dz_i - d\overline{z}_i)\quad (1 \leq i \leq n)\ \text{そしてとくに}$$

$$\text{(3.2)}\qquad dz_i \sim d\overline{z}_i\quad (q+1 \leq i \leq n)$$

以下 [9] を引用する.

Lemma 3.1 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を周期行列 $P = [I_n, V]$ をもつ type q のトロイダル群とする. $\varphi = \sum_{m\in\mathbb{Z}^{n+q}}\varphi^m$ を $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の $C^\infty d$-closed p-form とすると唯一つの定数値 p-form

$$\chi = \frac{1}{p!}\sum_{1\leq i_1,\cdots,i_p\leq n+q} c_{i_1\cdots i_p}dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_p},$$

と $C^\infty(p-1)$-form $\psi = \sum_{m\in\mathbb{Z}^{n+q}}\psi^m$ があって

$$\varphi = \chi + d\psi,$$

を満たす. ここで各 $m \in \mathbb{Z}^{n+q}\backslash\{0\}$ に対し, $\varphi^m = d\psi^m$ であり, $m = 0$ に対しては, $\varphi^0 = \chi + d\psi^0$ となる.

Lemma 3.1 と (3.1), (3.2) により次の定理を得る.

Theorem 3.2 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を周期行列 $P = [I_n, V]$ をもつ type q のトロイダル群とする.

(1) $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の任意の d-closed p-form φ のコホモロジー類は

$$\chi(\varphi) \in \bigwedge^p\mathbb{C}\{dt_1,\ldots,dt_{n+q}\}\ \text{と}\ \chi_C(\varphi) \in \bigwedge^p\mathbb{C}\{dz_1,\ldots,dz_n,d\overline{z_1},\ldots,d\overline{z_q}\}$$

で代表される. さらに, これらの定数値形式 $\chi(\varphi)$ と $\chi_C(\varphi)$ は φ に対し唯一つ定まる.

(2)
$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{C}^n/\Gamma,\mathbb{C}) &\cong \bigwedge^p\mathbb{C}\{dt_1,\ldots,dt_{n+q}\}\\ &\cong \bigwedge^p\mathbb{C}\{dz_1,\ldots,dz_n,d\overline{z}_1,\ldots,d\overline{z}_q\}\ \text{for}\ 1\leq p\leq n+q\\ &= 0\ \ for\ \ p \geq n+q+1.\end{aligned}$$

Corollary 3.3 φ と ψ をトロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 上の２つの定数値 2-forms とすると次の３つの条件は同値である.

(1) $\varphi \sim \psi$

(2) $\chi(\varphi) = \chi(\psi)$

(3) $\varphi = \psi$ on $T_\Gamma \times T_\Gamma$

ここで T_Γ は極大コンパクト群 K の原点における接空間である.

Theorem 3.2 と Corollary 3.3 により, 対応 $\varphi \mapsto \chi(\varphi)$ は次の同型を与える.

$$H^2(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathbb{C}) \cong \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}). \tag{3.3}$$

4 準アーベル多様体の周期行列

$\mathbb{C}^n/\Gamma$ を周期行列 $P = [I_n, V]$ をもつ type q の準アーベル多様体とする. まずアーベル多様体に対する Riemann conditions I(cf.[4]) の拡張を与える次の定理を得る ([10]).

Theorem 4.1 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を周期行列 $P = [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+q}] = [I_n, V]$ をもつ type q のトロイダル群とする.

(1) $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が H を ample Riemann form とする準アーベル多様体とすると, $E := \mathrm{Im}\, H|\Gamma\times\Gamma$ は次の条件を満足する:

$$ {}^tVE_1V + {}^tE_2V - {}^tVE_2 + E_3 = 0 \quad \text{であり} \tag{4.1}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}({}^t\overline{V}E_1V + {}^tE_2V - {}^t\overline{V}E_2 + E_3) > 0, \tag{4.2}$$

ここで $E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ -{}^tE_2 & E_3 \end{bmatrix}$, $E_1 \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, そして $E_3 \in \mathbb{Z}^{q\times q}$.

(2) 逆に (4.1) と (4.2) を満たす整数値歪対称行列 $E = [E_{ij}; 1 \le i, j \le n+q] \in \mathbb{Z}^{(n+q)\times(n+q)}$ があるとすると $\mathbb{C}^n/\Gamma$ は $\mathrm{Im}\, H|\Gamma \times \Gamma = E$ を満たす ample Riemann form H をもつ準アーベル多様体である.

この証明から ample Riemann form H は $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ 上, 正定値となるようにとれることがわかる. 実際,

$[H(\beta_i,\beta_j); 1 \le i, j \le n] = \begin{bmatrix} A & B \\ {}^t\overline{B} & C \end{bmatrix}$, ここで

$$
\begin{aligned}
(4.3) \qquad A &= [A_{ij}; 1 \le i, j \le q] = \frac{\sqrt{-1}}{2}({}^t\overline{V}E_1V + {}^tE_2V - {}^t\overline{V}E_2 + E_3), \\
B &= [B_{ij}; 1 \le i \le q, q+1 \le j \le n] = -({}^t\overline{V_1}F_2 + {}^t\overline{V_2}F_3 + {}^tF_5), \\
C &= [C_{ij}; q+1 \le i, j \le n] = \sqrt{-1}F_3 + S, \\
E_1 &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ -{}^tF_2 & F_3 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

ただし $F_1 \in \mathbb{Z}^{q\times q}, F_3 \in \mathbb{Z}^{(n-q)\times(n-q)}, F_4 \in \mathbb{Z}^{q\times q}$, そして $S \in \mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$ は任意の実対称行列である. S の固有値を十分大きな正の数とすれば H は正定値 Hermite 行列となる. すると kind 0 の準アーベル多様体の周期行列の標準形が得られる.

Theorem 4.2 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ をトロイダル群とする. $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が type q かつ kind 0 の準アーベル多様体であるためには, Γ の basis $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+q}$ と $\mathbb{C}^n$ の複素基底 $e_1, \ldots, e_n$ が存在してその周期行列が

$$P = [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+q}] = [\Delta(q,n), W],$$

と書けることが必要十分である. ただし

$\Delta(q,n) := [\delta_1 e_1, \ldots, \delta_q e_q, e_{q+1}, \ldots, e_n] \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, $\delta_1|\delta_2|\cdots|\delta_q$ は正の整数であり $W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times q}$ とおくと $W_1 \in \mathbb{C}^{q\times q}$ は対称行列で $\operatorname{Im} W_1 > 0$ である.

この Theorem 4.2 は $q = n$ のときアーベル多様体に関する Riemann conditions III ([4]) と一致する. さらに次の定理を得る.

Theorem 4.3 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を type q かつ kind $s\,(s > 0)$ の準アーベル多様体で, ample Riemann form H は $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ 上正定値であり, $\Gamma = \mathbb{Z}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+q}\}$ とする. すると $\lambda_{n+q+1}, \ldots, \lambda_{n+q+s} \in \mathbb{C}^n \backslash \mathbb{R}_\Gamma$ が存在して次を満たす:

(1) $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+q+s}$ は $\mathbb{R}$-独立.

(2) $\Gamma_s := \mathbb{Z}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+q+s}\}$ とおくと $\mathbb{C}^n/\Gamma_s$ は type $(q+s)$ のトロイダル群.

(3) $\operatorname{Im} H|\Gamma_s \times \Gamma_s$ は $\operatorname{rank}(\operatorname{Im} H)|\Gamma_s \times \Gamma_s = \operatorname{rank}(\operatorname{Im} H)|\Gamma \times \Gamma = 2q + 2s$ を満たす整数値歪対称形式.

したがって $\mathbb{C}^n/\Gamma$ は kind 0 の準アーベル多様体 $\mathbb{C}^n/\Gamma_s$ の被覆群である.

この定理において $\mathbb{C}^n/\Gamma$ と $\mathbb{C}^n/\Gamma_s$ は同じ ample Riemann form をもっていることに注意する. これより次の定理が得られる.

Theorem 4.4 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ をトロイダル群とする. $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が type q かつ kind $s\,(s \ge 0)$ の準アーベル多様体であるためには, Γ の basis $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+q}$ と $\mathbb{C}^n$ の複素基底 $e_1, \ldots, e_n$ が存在してそ

の周期行列が

$$P = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n+q}] = [\Delta(q+s, n-s), W]$$

と書けることが必要十分である. ただし

$\Delta(q+s, n-s) := [\delta_1 e_1, \dots, \delta_{q+s} e_{q+s}, e_{q+s+1}, \dots, e_{n-s}] \in \mathbb{Z}^{n\times(n-s)}$, $\delta_1|\delta_2|\cdots|\delta_{q+s}$ は正の整数であり $W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times(q+s)}$ とおくと $W_1 \in \mathbb{C}^{(q+s)\times(q+s)}$ は対称行列で $\operatorname{Im} W_1 > 0$ である.

Theorem 4.4 にあらわれる周期行列の標準形は Abe([1], [2]) によって最初に得られた. Abe はこの標準形を使って Fibration Theorem を証明した.

5 Fibration Theorems

Fibration Theorem は Gherardelli-Andreotti[3] によって得られ, Abe [1] が証明した. ここでは、§4 の Theorem 4.3 と Theorem 4.4 の応用として得られることを述べる.

Theorem 5.1 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を type q のトロイダル群とする. $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が kind 0 の準アーベル多様体であるためには, 次の完全系列を満たす q 次元のアーベル多様体 $\mathbb{T}^q$ が存在することが必要十分である:

$$0 \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n-q} \longrightarrow \mathbb{C}^n/\Gamma \longrightarrow \mathbb{T}^q \longrightarrow 0.$$

さらに $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の ample Riemann form は $\mathbb{T}^q$ から得られる.

上記の定理と Theorem 4.3 を用いて次の定理を得る.

Theorem 5.2 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ を type q のトロイダル群とする. $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が kind $s\,(0 \le 2s \le n-q)$ の準アーベル多様体であるためには, 次の完全系列を満たす $(q+s)$ 次元のアーベル多様体 $\mathbb{T}^{q+s}$ が存在することが必要十分である:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^s \times (\mathbb{C}^*)^{n-q-2s} \longrightarrow \mathbb{C}^n/\Gamma \longrightarrow \mathbb{T}^{q+s} \longrightarrow 0.$$

さらに $\mathbb{C}^n/\Gamma$ の ample Riemann form は $\mathbb{T}^{q+s}$ から得られる.

参考文献

[1] Y. Abe: Homomorphisms of toroidal groups, Mathematics Reports, Toyama University 12 (1989), 65–112.

[2] Y. Abe and K. Kopfermann: Toroidal Groups, Lecture Notes in Mathematics 1759, Springer (2001).

[3] F. Gherardelli and A. Andreotti: Some remarks on quasi-abelian manifolds, Global analysis and its applications, Intern. Atomic. Energy Agency, Vienna, vol. II, 1974, 203–206

[3] F. Gherardelli and A. Andreotti: Some remarks on quasi-abelian manifolds, Global analysis and its applications, Intern. Atomic. Energy Agency, Vienna, vol. II, 1974, 203–206

[4] P. Griffiths and J. Harris: Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons (1978).

[5] H. Kazama: $\bar{\partial}$ Cohomology of (H, C)-Groups, Publ.RIMS.Kyoto Univ. 20 (1984), 297–317

[6] H. Kazama and T. Umeno: Complex abelian Lie groups with finite-dimensional cohomology groups, J.Math.Soc.Japan 36 (1984), 91–106

[7] H. Kazama and T. Umeno: Dolbealt isomorphisms for holomorphic vector bundles over holomorphic fiber spaces and applications, J.Math.Soc.Japan 45 (1993), 121–130

[8] Y. Matsushima and A. Morimoto: Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variéte de Stein, Bull.Soc.math.France 88 (1960), 137–155

[9] T. Umeno: de Rham cohomology of toroidal groups and Chern classes of the complex line bundles, Pusan Kyŏngnam Math.J. 9(1993), 295–311.

[10] T. Umeno: Period matrices for quasi-Abelian varieties, to appear.

Department of Mathematics
Kyushu Sangyo University
Fukuoka 813-8503
Japan
E-mail : umeno@ip.kyusan-u.ac.jp