日　本　数　学　会

２００１年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

２００１年10月

於　九　州　大　学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（1））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年 3 回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

10 月 5 日 (金)　第 VII 会場

9:00 ～ 12:00

1 西本　勝之 (デカルト出版)* On an integral form of $\sum_{k=0}^{\infty}(1/p_k^x)$ for $x \gg 1$ (p_k : prime number) ‥ 10

2 西本　勝之 (デカルト出版)* On some infinite sums obtained by N-fractional calculus ………… 15

3 尾和　重義 (近畿大理工)* Partial sums of certain analytic functions ……………………… 15

4 藤解　和也 (金沢大工)* Complex difference equations of Malmguist type ………………… 15
J. Heittokangas (Joensuu 大)
R. Korhonen
I. Laine
J. Reippo

5 栗原　茂徳 (都立大理) Extremals for plane quasiconformal mappings preserving reals (1) …. 15
山下　慎二 (都立大理)

6 栗原　茂徳 (都立大理) Extremals for plane quasiconformal mappings preserving reals (2) …. 15
山下　慎二 (都立大理)

7 水田　義弘 (広島大総合科) Continuity and differentiability for weighted Sobolev spaces ……… 15
下村　哲 (広島大教育)

8 鈴木　紀明 (名大多元数理) 調和拡張と一意性定理 …………………………………… 15

9 中井　三留 (名工大) ディリクレ領域の局所化と大局化 ………………………… 15

10 佐藤　宏樹 (静岡大理) ホワイトヘツドリンクのヨルゲンセン数 ……………………… 15

11 戸田　暢茂 (名工大)* On the defect relation for exponential curves, II ………………… 15

14:15 ～ 14:45

12 藤川　英華 (東工大理工)* Limit sets and regions of discontinuity of Teichmüller modular groups · 15

13 志賀　啓成 (東工大理工)* Riemann 面の擬等角変形と調和関数の挙動について ……………… 15

15:00 ～ 16:00　特別講演

N. Papamichael (Cyprus 大)* A domain decomposition method for numerical conformal mapping onto a rectangle

16:15 ～ 17:15　特別講演

W. Bergweiler (Kiel 大)* Normal families

10 月 6 日 (土)　第 VII 会場

9:00 ～ 12:00

14 柴田　敬一 (国際自然科学研) エネルギー汎関数の変分について ………………………… 15

15 今井　淳 (九大数理)* 自己相似 N 角形上の距離について ………………………… 15

16 木坂　正史 (京大人間環境)* On the dynamics of structurally finite transcendental entire functions · 15

17 米田　力生 (都立工高専)* Essential norms of integration operators on weighted Bloch spaces について ……………………………………………… 10

18 米田　力生 (都立工高専)* Multipliers on weighted Bloch spaces について ………………… 10

19 真次　康夫（信州大理）荷重 Bergman-Privalov 空間 $(AN)^p(1/\alpha)$ の等距離写像 ……………… 15
植木　誠一郎（信州大理）

20 松島　敏夫（石川工高専）* Bounded holomorphic map with wild boundary behavior ……………… 10

21 相原　義弘（沼津工高専）* Holomorphic curves with deficiencies in complex projecture spaces …… 15
森　正気（山形大理）

22 濱田　英隆（九州共立大工）* Locally boundedness of holomorphic mappings in infinite dimensional spaces and its applications ……………… 15

23 濱田　英隆（九州共立大工）* k-convexity in several complex variables ……………… 15

24 清水　悟（東北大理）チューブ領域上の正則ベクトル場の延長 ……………… 15

25 清水　悟（東北大理）チューブ領域に関する正則同値問題についてのいくつかの注意 ……………… 15

14:15 ～ 15:10

26 山本　昌宏（東大数理）* Conditional stability in line unique continuation for analytic elliptic partial differential equations ……………… 15
程　晋（復旦大）

27 都丸　正（群馬大医）正則２次元特異点の Pencil 種数について ……………… 15

28 都丸　正（群馬大医）正規２次元特異点の巡回被覆として得られる Kodaira 特異点 ……………… 10

29 都丸　正（群馬大医）２次元巡回商特異点の Pinkham-Demazure 構成 ……………… 15

15:20 ～ 16:20　特別講演

阿部　誠（大島商船高専）非 Stein 空間上の正則アフィン束

1

On an Integral Form of $\sum_{k=0}^{\infty}(1/p_k^x)$ for $x>>1$ (p_k; Prime Number)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article an approximate integral expression

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^x}\approx\frac{(1-2^{-x})}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}e^{-2t}}{1-e^{-t}}dt\ ,\quad (x>>1)$$

is reported where $\Gamma(x)$ is the Gamma function and

$p_k^x=(p_k)^x$ *and* $p_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ is a prime of order number k.

$(p_0=2,\ p_1=3, p_2=5, p_3=7, p_4=11,\cdots,$ and so on.)

References

[1] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.18, Nov. (2000), 111 - 117.

[2] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.19, May (2001), 89 - 98.

[3] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I I I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.19, May (2001), 135 - 141.

[4] K. Nishimoto ; Some integral forms for Riemann's zeta function,, J. Frac.Calc.Vol.17, May (2000), 115 - 121.

[5] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brichikov and O.I. Marichev ; Integrals and Series, Vol. i, (1986), Gordon and Breach. (Originaly published in Russian in 1981, by Nauka.)

[6] S.J. Patterson ; An introduction to the theory of the Riemann zeta - Function (1988),Cambridge.

[7] T. Kitamura ; Introduction to the number theory (1965), Maki- shoten, Japan.

On some infinite Sums obtained by N- fractional Calculus

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this paper, some infinite sums obtained by N- fractional calculus are reported. Some of them are shown as follows, for example

(i) $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-c)^k\Gamma(k+\alpha-\lambda)}{k!\,\Gamma(\alpha-\lambda)(z-c)^k}=\left(\frac{z}{z-c}\right)^{\lambda-\alpha}\quad\left(\left|\frac{-c}{z-c}\right|<1,\ \left|\frac{\Gamma(k-\lambda+\alpha)}{\Gamma(k-\lambda)}\right|<\infty\right).$$

Where Γ is Gamma function.

(ii) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-c}{z-c}\right)^k\cdot\frac{\Gamma(\alpha-1+k)}{k!}\{(k-1)(z-b)+\alpha(c-b)\}$$

$$=\Gamma(\alpha-1)\left[\left(\frac{z-c}{z}\right)^{\alpha}\{b(1-\alpha)-z\}+\{z+\alpha(b-c)-b\}\right]$$

where

$$|\Gamma(\alpha-1+k)|<\infty\ ,\qquad |\Gamma(\alpha-1)|<\infty$$

$$\left|\frac{-c}{z-c}\right|<1\quad,\ (\ \alpha,b,c\ ;\ constants\ ).$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] S. - T. Tu and K. Nishimoto ; On the fractional calculus $(cz-a)^{\beta}$ and $\log(cz-a)$, J. Frac. Calc. Vol.5, May (1994), 35 - 43.

[6] K. Nishimoto ; Infinite sums derived by the fractional calculus of some logarithmic functions (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol.6, Nov. (1994),15 - 26.

[7] H. M. Srivastava and K. Nishimoto ; Some infinite sums derived by using fractional calculus of logarithmic functions, J. Frac. Calc. Vol.8, Nov. (1995), 57 - 61.

[8] S. Moriguchi, K. Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulae , Vol. 2 , Iwanami Zensho, (1957), pp. 37 -39. Iwanami, JAPAN.

[9] A.P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O.I. Marichev ; Integrals and Series, Vol.1, (1986), pp. 651 - 718. Gordon and Breach.

3 Partial Sums of Certain Analytic Functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions in $\mathbb{U}$. Let $\mathcal{S}^*(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which are starlike of order α in $\mathbb{U}$. Note that $S^* \equiv S^*(0)$. Also let $\mathcal{K}(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which are convex of order α in $\mathbb{U}$. Note that $K \equiv K(0)$.
The partial sum $f_n(z)$ of $f(z) \in \mathcal{A}$ is given by

$$f_n(z) = z + \sum_{k=2}^{n} a_k z^k.$$

Remark 1. We note that

(1) The function

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{k=2}^{\infty} k z^k$$

is the extremal function for the class $\mathcal{S}^*$. But

$$f_2(z) = z + 2z^2 \notin \mathcal{S}^*$$

and

$$g(z) = f(z) - 2z^2 \notin \mathcal{S}^*.$$

(2) The function

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} z^k$$

is the extremal function for the class $\mathcal{K}$. But

$$f_2(z) = z + z^2 \notin \mathcal{K}$$

and

$$h(z) = f(z) - z^2 \notin \mathcal{K}.$$

Remark 2. If $f(z) \in \mathcal{S}^*$ and $|a_2| = 2$, then $|a_n| = n$ for all $n = 3, 4, 5, \cdots$. If $f(z) \in \mathcal{K}$ and $|a_2| = 1$, then $|a_n| = 1$ for all $n = 3, 4, 5, \cdots$.

In the present talk, we discuss the radius for the classes $\mathcal{S}^*(\alpha)$ and $\mathcal{K}(\alpha)$ of partial sums of certain analytic functions in $\mathcal{A}$.

4 ※印は本会で記入

※番号	題目	Complex difference equations of Malmquist type

氏名	所属
J. Heittokangas,	Univ. of Joensuu,
R. Korhonen,	Univ. of Joensuu,
I. Laine, J. Rieppo	Univ. of Joensuu,
K. Tohge	Kanazawa Univ.

The celebrated Malmquist theorem states that a complex differential equation of the form $y' = R(z, y)$, where the right-hand side is rational in both arguments, and which admits a transcendental meromorphic solution y in the complex plane $\mathbb{C}$, reduces into a Riccati differential equation $y' = a(z) + b(z)y + c(z)y^2$ with rational coefficients.

In this talk we observe meromorphic solutions of complex difference equations related to these differential equations. This was motivated by a recent paper by Ablowitz, Halburd and Herbst [1]. They observed some difference equations closely related to Painlevé equations, as noted in [1]. Similar results are found in the work of N. Yanagihara.

In what follows, meromorphic means meromorphic in $\mathbb{C}$. For a meromorphic function y, let $\rho(y)$ be the order of growth of y and $\lambda(y)$ (resp. $\lambda(1/y)$) the exponent of convergence for zeros (resp. poles) of y.

Theorem A (Ablowitz-Halburd-Herbst) *Let $R(z, y)$ be an irreducible rational function in both arguments and put $d = \deg_y R(z, y)$.*

If a difference equation $y(z+1) * y(z-1) = R(z, y(z))$, $* := +$ or $\times$, admits a transcendental meromorphic solution of finite order, then $d \leq 2$.

Suppose that in the equation $y(z+1) + y(z-1) = a(z) + b(z)y + c(z)y^2$, the coefficients $a(z), b(z)$ are polynomials and $c(z)$ is a non-zero complex constant. Then any transcendental entire solution of this equation is of infinite order. □

The following questions will be considered in this talk:

1) What happens if some of the coefficients of the above equations are meromorphic functions other than rational functions or polynomials?

2) What happens if we replace 1 and -1 in those equations by arbitrary complex constants?

3) What happens if the left-hand sides of those equations are generalized to have n terms?

4) Is it possible to find any lower bound for the characteristic functions of transcendental meromorphic solutions of those equations?

5) Is it possible to say something about the distribution of zeros, resp. poles, of meromorphic solutions of those equations?

For example, we can show the following results [2]:

Theorem 1 *Let $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and let $m \geq 2$. Suppose y is a transcendental meromorphic solution of the difference equation*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z)y(z+c_j) = \sum_{k=0}^{m} b_k(z)y(z)^k \tag{1}$$

with rational coefficients $a_j(z), b_k(z)$. Denote $C = \max\{|c_1|, \ldots, |c_n|\}$.

If y is entire or has finitely many poles (resp. if y has infinitely many poles), then there exist constants $K > 0$ and $r_0 > 0$ such that

$$\log M(r,y) \geq K m^{r/C} \quad \left(\textit{resp.} \quad n(r,y) \geq K m^{r/C}\right)$$

holds for all $r \geq r_0$. □

Theorem 2 *Define the set $\mathcal{L}_f := \{g \text{ meromorphic} \mid T(r,g) = S(r,f)\}$. Suppose y is a transcendental meromorphic solution of*

$$\prod_{i=1}^{n} y(z+c_i) = \frac{a_0(z) + a_1(z)y + \cdots + a_p(z)y^p}{b_0(z) + b_1(z)y + \cdots + b_q(z)y^q} \tag{2}$$

with coefficients $a_j(z), b_k(z) \in \mathcal{L}_y$ normalized such that $b_q = 1$. If

$$\max\{(\lambda(y), \lambda(1/y)\} < \rho(y), \tag{3}$$

then (2) is either of the form

$$\prod_{i=1}^{n} y(z+c_i) = a_p(z)y(z)^p \quad \textit{or} \quad \prod_{i=1}^{n} y(z+c_i) = \frac{a_0(z)}{y(z)^q}. \quad \square$$

We will give some examples of difference equations of the above form and their meromorphic solutions, one of which shows that there really exist equations of the above reduced forms having meromorphic solutions.

References

[1] Ablowitz M. J., R. Halburd and B. Herbst, *On the extension of the Painlevé property to difference equations*, Nonlinearity **13** (2000), 889–905.

[2] Heittokangas, J., R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo and K. Tohge, *Complex difference equations of Malmquist type*, Preprint.

5 Extremals for Plane Quasiconformal Mappings Preserving Reals (1)

栗原 茂徳 (Kurihara, Shigenori); 山下 慎二 (Yamashita, Shinji)

都立大 (理)

Let $\mathscr{F}(K)$ be the family of K-quasiconformal mappings f from $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ onto $\overline{\mathbb{C}}$ such that $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ and $f(x) = x$ for $x = -1,\ 0,\ \infty$. Given $t \in \mathbb{R}$, we shall denote

$$\lambda(K,t) = \sup_{f \in \mathscr{F}(K)} f(t) \quad \text{and} \quad \nu(K,t) = \inf_{f \in \mathscr{F}(K)} f(t).$$

The open unit disk minus the closed interval $[0, r]$, $0 < r < 1$, is mapped onto the ring domain $\{\ z;\ 1 < |z| < e^{\mu(r)}\ \}$. The real-analytic function μ is strictly decreasing, so that it has the inverse μ^{-1}. Set $M(t) = (2/\pi)\mu\left(1/\sqrt{1+t}\right)$ for $t > 0$, $A_\lambda = K$, and $A_\nu = 1/A_\lambda$.

THEOREM 1. *For $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ the set $\{f(t); f \in \mathscr{F}(K)\}$ is exactly the closed interval $[\nu(K,t), \lambda(K,t)]$. Furthermore, $X(K,t)$ for $X = \lambda,\ \nu$, are expressed by μ^{-1} and M as follows.*

$$X(K,t) = \frac{1}{\left\{\mu^{-1}\left(\frac{\pi A_X M(t)}{2}\right)\right\}^2} - 1 \quad \textit{for} \quad t > 0.$$

$$X(K,t) = \frac{-1}{\left\{\mu^{-1}\left(\frac{\pi M(-1-t)}{2A_X}\right)\right\}^2} \quad \textit{for} \quad t < -1.$$

$$X(K,t) = -\left\{\mu^{-1}\left(\frac{\pi A_X M\left(\frac{1+t}{-t}\right)}{2}\right)\right\}^2 \quad \textit{for} \quad -1 < t < 0.$$

See [L, p. 16] and [LVV] for the case $t = 1$ and $X = \lambda$. We study the asymptotic behavior of $X(K,t)$ for $X = \lambda, \nu$ either for a fixed K or for a fixed t in

THEOREM 2. *First fix $K \geqslant 1$. Then*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-A_X} X(K,t) = 16^{A_X - 1}, \quad \textit{where} \quad X = \lambda,\ \nu;$$

$$\lim_{t \to -\infty} (-\,t)^{-A_Y} X(K,t) = -16^{A_Y - 1}, \quad \textit{where} \quad (X,Y) = (\lambda, \nu) \textit{ or } (\nu, \lambda).$$

Next, fix $t > 0$, Then

$$\lim_{K \to +\infty} \lambda(K,t) e^{\{-\pi K M(t)\}} = \frac{1}{16} \quad \textit{and} \quad \lim_{K \to +\infty} \nu(K,t) e^{\{\pi K M(\frac{1}{t})\}} = 16.$$

Fix $t < -1$. Then

$$\lim_{K\to+\infty} (\lambda(K,t)+1)e^{\{\pi KM(\frac{-1}{1+t})\}} = -16 \quad \textit{and} \quad \lim_{K\to+\infty} \nu(K,t)e^{\{-\pi KM(-1-t)\}} = -\frac{1}{16}.$$

Finally fix $-1 < t < 0$. Then

$$\lim_{K\to+\infty} \lambda(K,t)e^{\{\pi KM(\frac{1+t}{-t})\}} = -16 \quad \textit{and} \quad \lim_{K\to+\infty} (\nu(K,t)+1)e^{\{\pi KM(\frac{-t}{1+t})\}} = 16.$$

Theorem 2 actually follows from the estimate

$$1/\{\mu^{-1}(x)\}^2 = (e^x/4 + e^{-x})^2 + \Delta(x)e^{-2x}, \qquad x > 0,$$

where $0 \leqslant \limsup_{x\to+\infty} \Delta(x) \leqslant 1/2$.

We can also describe the graph $s = X(K,t)$ in the ts-plane for $X = \lambda,\ \nu$.

References

[L] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces.* Springer-Verlag, NewYork *et al.*, 1987.

[LVV] O. Lehto, K. I. Virtanen, and J. Väisälä, *Contributions to the distortion theory of quasiconformal mappings.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 273 (1959), 1–14.

6 Extremals for Plane Quasiconformal Mappings Preserving Reals (2)

栗原 茂徳 (Kurihara, Shigenori); 山下 愼二 (Yamashita, Shinji)
都立大 (理)

Making use of the previous notation we first have the formulae, where $X = \lambda, \nu$; $(X, Y) = (\lambda, \nu)$ or (ν, λ); and $X(K, t) = X(t)$.

THEOREM 3.

$$X(t)Y\big(1/t\big) = 1 \quad \textit{for} \quad t \neq 0;$$
$$X(t) + Y(-1-t) = -1 \quad \textit{for all} \quad t;$$
$$X(t) = -1\Big/\Big(X\big(-1-1/t\big)+1\Big) \quad \textit{for} \quad t \neq 0;$$
$$X(t) = -1/X\big(-1/(1+t)\big) - 1 \quad \textit{for} \quad t \neq -1;$$
$$X(t) = -Y\big(-t/(1+t)\big)\Big/\Big(Y\big(-t/(1+t)\big)+1\Big) \quad \textit{for} \quad t \neq -1.$$

Let $\sigma(z, w) = \int_z^w P(\zeta)\,|d\zeta|$ be the hyperbolic distance between z and w in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{-1,\ 0\}$ so that $\Delta \log P = 4P^2$. Set $I_1 = (0, +\infty)$, $I_2 = (-\infty, -1)$, and $I_3 = (-1, 0)$.

THEOREM 4. *Let $t \in I_j$ for $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$. Then*

$$\big[\nu(K,t), \lambda(K,t)\big] = \big\{\ s \in I_j;\ \sigma(s,t) \leqslant \log\sqrt{K}\ \big\}.$$

A consequence of the identities

$$\int_{\nu(K,t)}^{t} P(x)\,dx = \int_{t}^{\lambda(K,t)} P(x)\,dx = \log\sqrt{K} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

for $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0\}$ is that

$$P(t) = P\big(X(K,t)\big)\frac{d}{dt}X(K,t).$$

for $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0\}$ and $X = \lambda,\ \nu$.

Let $\mathscr{G}(K)$ be the family of all the K-quasiconformal mappings f from $\overline{\mathbb{C}}$ onto $\overline{\mathbb{C}}$ such that $f(x) = x$ for $x = -1,\ 0,\ \infty$; obviously, $\mathscr{F}(K) \subsetneqq \mathscr{G}(K)$.

THEOREM 5. *For each fixed $t > 0$, the set of values $\big|f(t)\big|$ for f ranging over $\mathscr{G}(K)$ is exactly the interval $\big[\nu(K,t), \lambda(K,t)\big]$.*

The cases for $t < 0$ can be described although the formulation is somewhat unsophisticated.

One might compare Theorem 5 with Teichmüller's theorem [T] that for each fixed $z \in \mathbb{C}^*$, the set of values $f(z)$ for f ranging over $\mathscr{G}(K)$ is exactly the hyperbolic disk $\{ w \in \mathbb{C}^*;\ \sigma(w,z) \leqslant \log \sqrt{K}\ \}$.

THEOREM 6. *Let* $\mathscr{S}(t) = \lim_{K\to 1} \partial\lambda(K,t)/\partial K$ *for* $t \in \mathbb{R}$. *Then*

$$\lim_{K\to 1} \frac{\partial\nu(K,t)}{\partial K} = -\mathscr{S}(t) \quad \textit{for all} \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\mathscr{S}(1/t) = \mathscr{S}(t)/t^2 \quad \textit{for all} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$
$$\mathscr{S}(-1-t) = \mathscr{S}(t) \quad \textit{for all} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Trivially, $\mathscr{S}(t) = 0$ for $t = -1,\ 0$. More precisely, $\mathscr{S}(t) = \Phi\big(\pi M(t)/2\big)$ for $t > 0$ where $\Phi(x) = x(d/dx)\{\mu^{-1}(x)\}^{-2}$, $x > 0$.

Reference

[T] O. Teichmüller, *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale.* Abh. Preuß. Akad. Wiss. math.-naturw. Kl. 22, 197 (1939); pp.335–531 *in* Gesammelte Abhandlungen, edited by L. V. Ahlfors and F. W. Gehring, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1982.

7 Continuity and differentiability for weighted Sobolev spaces

水田　義弘　　　広島大学総合科学部

下村　哲　　　広島大学教育学部

X を距離空間, μ を X 上のボレル測度とする. 任意の開球 $B = B(x,r)$ と $B' = B(x',r')$ $(x' \in B,\ 0 < r' \leqq r)$ に対して,

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mu(B')}{\mu(B)} \geqq C\left(\frac{r'}{r}\right)^s$$

となる定数 $C > 0$ と $s \geqq 1$ が存在するとする. $u \in L^p_{loc}(X;\mu)$, $g \in L^p_{loc}(X;\mu)$ が, 円環の p-ポアンカレ不等式 $(1 \leqq p < \infty)$ を満たすとは, 任意の c_1, c_2 $(c_2 > c_1 > 1)$ に対して, $c_1 r' < r < c_2 r'$ のとき,

$$\fint_{A(r,r')} |u(y) - u_{A(r,r')}|\ d\mu \leqq Mr\left(\fint_{\sigma A(r,r')} |g|^p\ d\mu\right)^{1/p}$$

を満たす定数 $M > 0$ と $\sigma \geqq 1$ が存在するときをいう. ここに, $A(r,r') = B(x,r) - B(x,r')$, $\sigma A(r,r') = B(x,\sigma r) - B(x,\sigma^{-1}r')$, ボレル集合 $G \subset X$ に対して, $u_G = \fint_G u\ d\mu = \frac{1}{\mu(G)}\int_G u\ d\mu$ とする. ソボレフ空間

$$W^{1,p}(\mathbf{R}^n;\mu) = \{u \in L^p(\mathbf{R}^n;\mu) : |\nabla u| \in L^p(\mathbf{R}^n;\mu)\}.$$

を考える. 最近, Björn ([1]), Hajłasz-Koskela ([2]) は次の定理を証明した:

定理 A. μ を条件 (1) を満たす $\mathbf{R}^n$ 上のボレル測度とする. $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n;\mu)$ かつ $(u, |\nabla u|)$ が球の p-ポアンカレ不等式を満たすとする. $p > s$ ならば, u は $\mathbf{R}^n$ 上, 局所ヘルダー連続であり, ほとんどいたるところ全微分可能である.

本講演では, $p = s$ の場合を調べるために, 次の性質をもつ $\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ 上の関数 $\Phi_p(r)$ を考える:

(φ1) $\Phi_p(r) = r^p\varphi(r)$, $1 < p < \infty$; φ は開区間 $(0,\infty)$ 上正値かつ単調 . $\Phi_p(0) = 0$.

(φ2) $c^{-1}\varphi(r) \leqq \varphi(r^2) \leqq c\varphi(r) \quad (r > 0)$

(φ3) $\varphi^*(1) < \infty$. ここに,

$$\varphi^*(r) = \left(\int_0^r [\varphi(t^{-1})]^{-p'/p} t^{-1} dt\right)^{1/p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

定理 1. X を連結な距離空間とする. μ を条件（1）を満たす X 上のボレル測度とする. (u,g) は, X で p-ポアンカレ不等式を満たし,

$$\int_X \Phi_p(|g(x)|)\,d\mu(x) < \infty$$

を満たすとする. $s=p$ のとき, u は X 上, 局所 φ^*-ヘルダー連続である. さらに, u は, 任意の $x,\ y \in B = B(x_0,r)$ と $B_0 = B(x_0,r_0)$ $(0<r<r_0)$ に対して,

$$|u(x)-u(y)| \leqq Mr_0\,\varphi^*(r)\left(\fint_{c\sigma B_0} \Phi_p(|g|)\,d\mu\right)^{1/p} + Mr^{1-\varepsilon}$$

を満たす. ここに, $c = 2^4+1 = 17$, $0<\varepsilon<1$, M は ε に依存する正定数である.

定理 2. $1<p<\infty$, w は A_p weight で, $d\mu = wdx$ が条件（1）を満たすとする. $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^n;\mu)$ が

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Phi_p(|\nabla u(x)|)\,d\mu(x) < \infty$$

を満たすとする. $s=p$ のとき, u はほとんどいたるところ全微分可能である.

μ が n 次元ルベーグ測度で, $p=n$ のとき, 定理 2は, [4] で証明された.

本報告の結果は [6] による.

参考文献

[1] J. Björn, L^q-Differentials for weighted spaces, Michigan Math.J. **47** (2000), 151-161.

[2] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré, Mem.Amer.Math.Soc. **145** (2000).

[3] Y. Mizuta, Continuity properties of Riesz potentials and boundary limits of Beppo Levi functions, Math. Scand. **63** (1988), 238-260.

[4] Y. Mizuta, Integral representations, differentiability properties and limits at infinity for Beppo Levi functions, Potential Analysis 6 (1997), 237–276.

[5] Y. Mizuta and T. Shimomura, Differentiability and Hölder continuity of Riesz potentials of Orlicz functions, Analysis **20** (2000), 201-223.

[6] Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity and differentiability for weighted Sobolev spaces, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[7] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

8　調和拡張と一意性定理

鈴木紀明　　名大・多元数理

Ω は d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 2)$ の領域で，A を Ω の境界 $\partial\Omega$ の開部分集合とする．以後，Ω_0 は

$$\Omega \cup A \cup (\mathbf{R}^d \setminus \overline{\Omega})$$

の Ω を含む連結成分を表す．また，Ω 上の函数 f に対して，Ω_0 上の関数 f_0 を次で定める：

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x) & \text{on} \quad \Omega \\ 0 & \text{on} \quad \Omega_0 \setminus \Omega. \end{cases}$$

次の事実は良く知られている：

定理 A. Ω は $\mathbf{R}^d$ の滑らかな領域とする．Ω 上の調和関数 h が，$h \in C^1(\Omega \cup A)$ かつ

$$h(y) = \frac{\partial h}{\partial n}(y) = 0, \quad \forall y \in A, \tag{1}$$

を満たせば，実は h は恒等的に零である．なお，$n = n_y$ は境界点 $y \in \partial\Omega$ における単位外法線ベクトルである．

証明は h_0 が h の Ω_0 への調和拡張になっていることを示せばよい．調和関数の実解析性から $h \equiv 0$ が導かれるからである．

h_0 の調和性を示すためには，グリーンの公式が役に立つ：任意のテスト関数 $\varphi \in C_K^\infty(\Omega_0)$ に対して

$$\int_{\Omega_0} h_0(x) \cdot \Delta\varphi(x)dx = \int_{\Omega} h(x) \cdot \Delta\varphi(x)dx$$

$$= \int_{\Omega} \Delta h(x) \cdot \varphi(x)dx + \int_{\partial\Omega \cap A} \left(h(y) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}(y) - \varphi(y) \cdot \frac{\partial h}{\partial n}(y) \right) d\sigma(y)$$

となるが，h が Ω で調和であることと条件 (1) から上記の積分値は零である．よって，h_0 が連続関数であることに注意すれば，ワイルの補題から h_0 の調和性がわかる．

我々の目標は定理 A の結果をより一般の領域で議論することである．次の事実が成り立つ：

定理 1. Ω を $\mathbf{R}^d$ の任意の領域とし，$A \neq \emptyset$ をその境界の開部分集合とする．Ω 上の調和関数 h が

$$
\lim_{\Omega \ni x \to y} h(x) = \lim_{\Omega \ni x \to y} |\nabla h(x)| = 0, \quad \forall y \in A \tag{2}
$$

を満たせば，h_0 は Ω_0 で調和である．ここで $|\nabla h| = (\sum_{j=1}^{d} (\partial h / \partial x_j)^2)^{1/2}$ である．

領域が滑らかな境界を持てば，条件 (1) と (2) は同値であることを注意しておく．

証明の概略は，まず; h_0 とその導関数が Ω_0 上の劣調和関数の差の形で表されることから，超関数の意味の Δh_0 は実測度であり，$\mathrm{supp}(\Delta h_0) \subset A$ がわかる．さらに，劣調和関数は弱微分可能であることから，Δh_0 が Ω_0 上の 局所 L^1 関数になることが示される．最後に，弱微分可能な関数はその零点集合上では，弱微分の値も *a.e.* に零である事実から $\Delta h_0 = 0$ *a.e.* を得て h_0 の調和性が導びかれる．

一般には，$h \equiv 0$ とはならないが，$\Omega_0 \setminus \Omega$ が "大きい集合" であればこの一意性の結果が成り立つ．例えば

定理 2. 定理 1 において，$\Omega_0 \setminus \Omega$ の容量が正ならば $h \equiv 0$ である．

$\Omega_0 \setminus \Omega$ の Hausdorff 次元が $d-2$ であっても $h \equiv 0$ とは結論できない．例えば，$\Omega = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,z); 0 < z < 1\}$，$A = \{(0,0,z); 0 < z < 1\}$ として，調和関数 $h(x,y,z) = xy$ を考えよ．一方，$\mathrm{cap}(\Omega_0 \setminus \Omega) = 0$ でも $h \equiv 0$ となる場合もある．特に $d = 2$ ならば，$h \equiv 0$ となる必要かつ十分条件は $\Omega_0 \setminus \Omega$ が Ω_0 内に集積点を持つことである．

9　ディリクレ領域の局所化と大局化

中井　三留　名工大（名誉教授）

d 次元 $(d \geq 2)$ ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ の有界領域 R 上の有界調和関数が常に R の境界 ∂R 上の有界ボレル関数を境界値とする一般化ディリクレ解として表示される時，R を**ディリクレ領域**と言う．この概念を局所化する：∂R の一点 y に対し y の近傍となる或正則領域 U があって，$R \cap U$ 上の $\overline{R} \cap \partial U$ で境界値零を持つどんな有界調和関数も常に $\overline{R} \cap \partial U$ で零となる $\partial(R \cap U)$ 上の有界ボレル関数を境界値とする一般化ディリクレ解として表示されるとき，R は y に於いて（U に関し）**局所的にディリクレ領域**であると言う．上の様な一つの U があると $V \subset U$ となる様な y の近傍である任意の正則領域 V で U を置き換えて良いことが示される．従って特に R がディリクレ領域なら R は任意の $y \in \partial R$ に於いて（任意の正則領域である y の近傍 U に関し）局所的にディリクレ領域となる．重要なのはその逆も正しい事である：R が各 $y \in \partial R$ で局所的にディリクレ領域なら R は（大局的に）ディリクレ領域となる．しかし実はこれが次の様に更に一般化される ([3])：

主定理：　領域 R の境界 ∂R の R に関する調和測度零の部分集合 E があって，R が各 $y \in \partial R \setminus E$ に於いて局所的にディリクレ領域であるならば，領域 R 自身がディリクレ領域となる．

従って次の3条件は互いに同値となる：(1) R はディリクレ領域である；(2) R は ∂R の各点に於いて局所的にディリクレ領域である；(3) R は ∂R の（調和測度の意味での）殆どすべての点に於いて局所的にディリクレ領域である．

上記定理の応用としてこれを今少し具体化した幾何学的条件に置き換える．元々ディリクレ領域であるという事実は ∂R の幾何学的形状の定めるものと思われ，例え $R \subset \mathbf{R}^2$（複素平面）が単連結（等角的円板）であっても，ディリクレ領域であるものもそうでないものもある．故にディリクレ領域となる為の条件を幾何学的条件で与えることは自然であろう．$y \in \partial R$ が R に関する**グラフ点**であるとは，y の小近

傍 U と，U 上での直角座標 (x', x^d) 又は極座標 (r, ξ) と x' 又は ξ の連続関数 φ があって，$R \cap U = \{x^d < \varphi(x')\} \cap U$ 又は $\{r < \varphi(\xi)\} \cap U$ と書ける事であるとする（[1] 参照）．$y \in \partial R$ がグラフ点でない時**非グラフ点**と呼びその全体を $N(\partial R)$ と記そう．$y \in \partial R$ がグラフ点なら R は y に於いて局所的にディリクレ領域となる事が示されるので次の結果が得られる：

系 1： **非グラフ点集合 $N(\partial R)$ が R に関しての調和測度零を持つならば R はディリクレ領域である.**

境界 ∂R の点が全てグラフ点の時 R を**連続領域**と呼ぶ（[1] 参照）．これは $N(\partial R) = \emptyset$ の場合であるので上の系 1 の特別の場合として [2] で発表済みの次の結果が導かれる：

系 2： **連続領域はディリクレ領域である.**

参 照 文 献

[1] Y. Ishikawa and M. Nakai: *Regular and stable points in Dirichlet problem*, Proc. Japan Acad., Ser. A Math. Sci., **73**(1997), 1-4.

[2] M. Nakai: *Harmonic functions expressible as Dirichlet solutions*, Kodai Math. J., **22**(1999), 116-130.

[3] M. Nakai: *Local representability as Dirichlet solutions*, Preprint.

10

ホワイトヘッドリンクのヨルゲンセン数

佐藤　宏樹
静岡大学・理学部

ここではホワイトヘッドリンクのヨルゲンセン数は2であることを報告する．

LEMMA (cf. Wielenberg [4], Krushkal' [1]). ホワイトヘッドリンク G_H は次の presentation をもつ：

$$G_H = \langle A, B \mid (A^{-1}BAB^{-1})(ABA^{-1}B^{-1})(AB^{-1}A^{-1}B)(A^{-1}B^{-1}AB) = 1\rangle$$

ここで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 1 (Sato [3]). ホワイトヘッドリンク G_H の元 X は次の形で表される．

$$X = \begin{pmatrix} 1+(1-i)a & b_1+(1-i)b_2 \\ (1-i)c & 1+(1-i)d \end{pmatrix}.$$

ここで，$a, b_1, b_2, c, d \in \mathbf{Z}+i\mathbf{Z},\ a+d-b_1+(1-i)(ad-b_2c)=0.$

DEFINITION 1. A と B をメビウス変換とする．

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A)-4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1})-2|$$

を (A,B) のヨルゲンセン数という．

DEFINITION 2. G をメイビウス変換群の2元生成非初等的部分群とする．G のヨルゲンセン数 $J(G)$ は次のように定義される：

$J(G) := \inf\{J(A,B) | A$ と B は G を生成する $\}$.

PROPOSITION 2 (Sato [3]). $\langle X, Y\rangle$ を ホワイトヘッドリンク G_H の非初等的部分群とする．このとき，$\langle X, Y\rangle$ のヨルゲンセン数は 2 以上である：$J(X,Y) \geq 2$.

PROPOSITION 3 (Sato [3]). A, B を Lemma 中のものとする. $C = AB$ とおく. このとき, A, C はホワイトヘッドリンク G_H の生成元であり, $J(A, C) = 2$.

THEOREM 1 (Sato [3]) ホワイトヘッドリンク G_H のヨルゲンセン数は 2 である.

THEOREM 2 (Sato [3]). (i) ホワイトヘッドリンクは群

$$G_H^* = \langle C, D \mid DC^{-2}DCD^{-1}C^{-1}D^{-1}C^2D^{-1}C^{-1}DC = 1\rangle$$

と共役である. ここで,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/2 + i/2 & 3/4 + i/4 \\ -1 + i & 1/2 + i/2 \end{pmatrix}.$$

(ii) $J(D, C) = 2$.

THEOREM 3 (Sato [3]). G_H^* の生成元を Sato [2] の表示

$$\begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma 1 \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix}$$

で表せば $k = -1/2$, $\sigma = -1 + i$ である.

参考文献

[1] S. L. Krushkal', B. N. Apanasov and N. A. Gusevskiĭ, *Kleinian groups and uniformization in examples and problems*, Trans. math. Monographs 62, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1986.

[2] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. 256, Proc. of the First Ahlfors - Bers Colloquium, edited by I. Kra and B. Maskit, (2000), 271-287.

[3] H. Sato, *Jørgennsen number for the Whitehead link*, in preparation.

[4] N. J. Wielenberg, The structure of certain subgroups of the Picard group, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 84 (1978), 427-438.

On the Defect Relation for Exponential Curves, II

TODA Nobushige   Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. Let $f_e = [e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \cdots, e^{\lambda_{n+1} z}]$ be an exponential curve, where n is a positive integer and $\lambda_1, \cdots \lambda_{n+1}$ are distinct complex numbers. Note that f_e is transcendental and of order 1. Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ in N-subgeneral position $\underline{\underline{(N > n)}}$;

$$X^+ = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta(\boldsymbol{a}, f_e) > 0\}$$

and

d_i =the number of vectors of type $a\boldsymbol{e}_i$ $(a \neq 0)$ in X^+.

It is well-known([1], see [2], p.110) that

$$(*) \quad \sum_{\boldsymbol{a} \in X^+} \delta(\boldsymbol{a}, f_e) \leq 2N - n + 1.$$

The purpose of this talk is to give an improvement of (*) for any exponential curve f_e by using a result on the characteristic function of f_e in [3].

2. Result. (I) In general we have the following theorem.

δたではダメ

Theorem 1. $\sum_{\boldsymbol{a} \in X^+} \delta(\boldsymbol{a}, f_e) < 2N - n + 1.$ 仮定 $N > n$

We have more sharp inequalities for some special cases. Let D be the convex polygon surrounding the points $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$.

(II) The case when D is an $n+1$-gon. We number the vertices $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ in ascending sequence as one goes arround D in the positive direction. Put for $i = 1, \cdots, n+1$

$$|\lambda_i - \lambda_{i+1}| = \ell_i, \quad |\lambda_i - \lambda_{i+2}| = s_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = \ell.$$

Theorem 2.

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X^+} \delta(\boldsymbol{a}, f_e) \leq 2N - n + 1 - \sum_{i=1}^{n+1} (N - n + 1 - d_i)(\ell_{i-1} + \ell_i - s_{i-1}),$$

where $\ell = 1$.

(III) The case when D reduces to a line segment. We number the points $\lambda_j (j = 1, \cdots, n+1)$ as follows:

(i) The points λ_1 and λ_{n+1} are the endpoints of D.

(ii) The points $\lambda_j (j = 1, \cdots, n+1)$ are in ascending sequence as one goes from λ_1 to λ_{n+1}.

We put for $i = 1, \cdots, n+1$

$$|\lambda_i - \lambda_{i+1}| = \ell_i \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = \ell.$$

Theorem 3.

$$\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) \leq 2N - n + 1 - 2\{(N - n + 1 - d_1)\ell_1 + (N - n + 1 - d_{n+1})\ell_n\},$$

where $\ell = 1$.

References

[1] E. I. Nochka : On the theory of meromorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

[2] H. Fujimoto : Value distribution theoryof Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspect of Math., E 21, Vieweg 1993.

[3] H. Weyl and J. Weyl : Meromorphic functions and analytic curves. Ann. Math. Studies 12, Princeton Univ. Press 1943.

12

LIMIT SETS AND REGIONS OF DISCONTINUITY OF TEICHMÜLLER MODULAR GROUPS

EGE FUJIKAWA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Let R be a Riemann surface of hyperbolic type, and $T^{\#}(R)$ the reduced Teichmüller space of R. The reduced Teichmüller modular group $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is a group of a biholomorphic automorphisms of $T^{\#}(R)$ and an isometry with respect to Teichmüller distance d_T. If R is of finite type, then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ acts faithfully and properly discontinuously on $T^{\#}(R)$. If R is of infinite type, then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ acts also faithfully. However, $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ does not act properly discontinuously on $T^{\#}(R)$, in general.

We introduce a new notion of the limit set and the region of discontinuity of the Teichmüller modular group for a Riemann surface of infinite type as an analogy to the theory of Kleinian groups, and observe their properties.

Definition 1. We say that a point p in $T^{\#}(R)$ is a *limit point* for a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ if there exists a sequence $\{\chi_n\}$ of distinct elements of G such that $\lim_{n\to\infty} d_T(\chi_n(p), p) = 0$. The set of limit points is called the *limit set* of G, and denoted by $\Lambda(G)$. The complement of the limit set $T^{\#}(R) - \Lambda(G)$ is denoted by $\Omega(G)$, and called the *region of discontinuity* of G.

Proposition 1. *For a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$, the limit set $\Lambda(G)$ is closed and G-invariant.*

Definition 2. For a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$, we define two subsets $\Lambda_1(G)$ and $\Lambda_2(G)$ of the limit set $\Lambda(G)$. We say that a point $p \in \Lambda(G)$ belongs to $\Lambda_1(G)$ if there exists a sequence $\{\chi_n\}$ of distinct elements of G such that $\lim_{n\to\infty} d_T(\chi_n(p), p) = 0$ and that $\chi_n(p) \neq p$ for all n, and we say that a point $p \in \Lambda(G)$ belongs to $\Lambda_2(G)$ if $\mathrm{Stab}_G(p)$ consists of infinitely many elements. Note that $\Lambda_1(G) \cap \Lambda_2(G) = \emptyset$ does not necessarily hold. Furthermore we divide $\Lambda_2(G)$ into two disjoint subsets $\Lambda_2'(G)$ and $\Lambda_2''(G)$. We say that a point $p \in \Lambda_2(G)$ belongs to $\Lambda_2'(G)$ if there exists an element in $\mathrm{Stab}_G(p)$ which is of infinite order, and we say that a point $p \in \Lambda_2(G)$ belongs to $\Lambda_2''(G)$ if there exist no elements in $\mathrm{Stab}_G(p)$ which are of infinite order.

Definition 3. For a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$, the *exceptional set* is defined by $E(G) = \Lambda_2''(G) - \Lambda_1(G)$. Further a point in $E(G)$ is called *exceptional point.*

Theorem 1. *For a subgroup $G \subset \mathrm{Mod}^{\#}(R)$ such that $\Lambda(G) - E(G)$ is not empty, $\Lambda(G) - E(G)$ does not have an isolated point. Further, the limit set $\Lambda(G)$ is an uncountable set.*

Theorem 2. *Let G be a subgroup of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$. For any point p in $T^{\#}(R) - \Lambda_1(G)$, there exists a constant $r > 0$ such that $\chi(B(p,r)) \cap B(p,r) = \emptyset$ for any $\chi \in G - \mathrm{Stab}_G(p)$. In particular, G acts on $\Omega(G)$ properly discontinuously.*

Definition 4. For a subgroup G of $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$, we say that G is of the *first kind* if $\Omega(G) = \emptyset$, and otherwise of the *second kind.*

Proposition 2. Let R be a Riemann surface which has a sequence $\{c_n\}$ of disjoint simple closed geodesics that are not peripheral (i.e., that are not freely homotopic to a boundary component) and that these hyperbolic lengths tend to 0. Then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is of the first kind.

Definition 5. For a given $M > 0$, we say that a point p of R belongs to a subset R_M of R if there exists a non-trivial simple closed curve c_p containing p such that the hyperbolic length of c_p is less than M. The set R_ϵ is called the *ϵ-thin part* of R if $\epsilon > 0$ is smaller than the Margulis constant.

Theorem 3. *Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. Suppose that R satisfies the following two conditions:*

1. *There exists an $\epsilon > 0$ such that the ϵ-thin part of R consists only of cusp neighborhoods. (i.e., the ϵ-thin part equals to the ϵ-cuspidal part.)*
2. *There exist a constant $M > 0$ and a connected component R_M^* of R_M such that a homeomorphism of $\pi_1(R_M^*)$ to $\pi_1(R)$ which is induced by the inclusion map of R_M^* into R is surjective.*

Then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ *is of the second kind.*

Theorem 4. ([1]) *Let R be a Riemann surface satisfying the conditions in Theorem 3. Suppose that either the genus of R, the number of cusps or the number of holes of R is positive finite. Then* $\Lambda(\mathrm{Mod}^{\#}(R)) = \emptyset$.

Conjecture 1. Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ is of the second kind if and only if there exists an $\epsilon > 0$ such that the ϵ-thin part of R consists only of cusp neighborhoods.

We aim to solve this conjecture. Giving a more general condition than that in Theorem 3, we show a partial solution.

Theorem 5. *Let R be a Riemann surface with the non-abelian fundamental group. Suppose that R satisfies the following two conditions:*

1. *There exists an $\epsilon > 0$ such that the ϵ-thin part of R consists only of cusp neighborhoods. (i.e., the ϵ-thin part equals to the ϵ-cuspidal part.)*
2. *There exists a constant $M > 0$ such that all the connected components V of the complement of R_M are simply connected and $R - \bar{V}$ consists of finitely many connected components.*

Then $\mathrm{Mod}^{\#}(R)$ *is of the second kind.*

REFERENCES

[1] E. Fujikawa, H. Shiga and M. Taniguchi, On the action of the mapping class group for Riemann surfaces of infinite type, preprint.

13

Riemann面の擬等角変形と調和函数の変動について

東工大大学院・理工学研究科　志賀　啓成

1　問題設定

open Riemann 面 S_0, S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ および擬等角写像 $\varphi_n : S_0 \to S_n$ が与えられ，さらに φ_n の maximal dilatation $K_n = K(\varphi_n)(\geq 1)$ が $\lim_{n\to\infty} K_n = 1$ を満たしているとする．このとき次のような問題を考える．

Question : S_n 上の等角不変量はどのような挙動をするか？

本講演では調和函数，とくに Dirichlet 問題の解の動きについて考える．

一般に擬等角写像 $\varphi : S \to S'$ は S, S' 上の Dirichlet 函数の空間（あるいは Sobolev 空間）$D(S), D(S')$ の間のノルムが $K(\varphi)$ 以下の同型写像 $\varphi_{\#}$ を導く．ただし，$v \in D(S)$ に対して

$$\varphi_{\#}(v) = v \circ \varphi^{-1} \in D(S')$$

と定める．S 上の Dirichlet 積分有限な調和函数の空間 $HD(S) \subset D(S)$ に属する函数 u を考え，$\varphi_{\#}(u)$ に対して Royden 分解

$$\varphi_{\#}(u) = u_{\varphi} + v_{0,\varphi}$$

を行う．ここに $u_{\varphi} \in HD(S')$ で $v_{0,\varphi}$ は S' の Dirichlet potential である．このように $u \in HD(S)$ に $u_{\varphi} \in HD(S')$ を対応させる写像を P_{φ} と書くことにする．$P_{\varphi} : HD(S) \to HD(S')$ は連続線型同型である．$P_{\varphi}(u)$ は S' の Royden コンパクト化において φ より induce された境界値写像による Dirichlet 問題の解の変形と見なせる．我々は最初に挙げた状況において $P_n(u) := P_{\varphi_n}(u)$ の挙動を問題にする．また同様の観点から，S_0, S_n が境界付き Riemann 面であるとき，∂S_0 上の連続函数 f に対して，f を境界値にもつ S_0 上の Dirichlet 問題の解 $H_f^{S_0}$ と $f \circ \varphi_n^{-1}$ を境界値にもつ S_n 上の Dirichlet 問題の解 $H_{f\circ\varphi_n^{-1}}^{S_n}$ の比較を問題にする．

2 一様収束性

定理 2.1 §*1* の仮定のもとで，任意の $u \in HD(S_0)$ に対して $\{P_n(u) \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は u に S_0 上広義一様収束する．

定理 2.2 S_0, S_n を *compact bordered Riemann* 面とする．このとき，§*1* の仮定のもとで ∂S_0 上の任意の連続函数 f に対して，$\{H^{S_n}_{f\circ\varphi_n^{-1}} \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $H^{S_0}_f$ に S_0 上一様収束する．

S_0 が（したがって S_n も）parabolic end(s) であるとき，双対境界 ∂S_0 上の任意の連続函数 f に対して，一般化された Dirichlet 問題の解 $H^{S_0}_f$ が f により一意的に定義される．擬等角写像 $\varphi_n : S_0 \to S_n$ は ∂S_0 から ∂S_n の上への同相写像を与えるとみなせるから，$H^{S_n}_{f\circ\varphi_n^{-1}}$ も同様に定義される．このとき次のことが成り立つ．

定理 2.3 上の仮定のもとで ∂S_0 上の任意の連続函数 f に対して，$\{H^{S_n}_{f\circ\varphi_n^{-1}} \circ \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $H^{S_0}_f$ に S_0 上理想境界の任意の近傍を除き一様収束する．また，S_0 が *Heins end* でその調和次元が 1 であるとき，この収束は S_0 全体で一様である．

また，S_0 が nodes をもった境界付き有限型 Riemann 面で，$\{S_n\}$ が S_0 への「退化族」である場合も同様の問題を考える．

3 可微分性

S_0 を compact bordered Riemann 面または parabolic end とし，μ を S_0 上の Beltrami 微分とする．$t \in [-1, 1]$ に対して $t\mu$ が定める擬等角写像を $\varphi_t : S_0 \to S_t$ とする．このとき次のことが成立する．

定理 3.1 μ の台が ∂S_0 の点を含まないとき，任意の $p \in S_0$ および ∂S_0 上の任意の連続函数 f に対して，t の函数と見て，$H^{S_t}_{f\circ\varphi_t^{-1}} \circ \varphi_t(p)$ は $t = 0$ で微分可能である．

参考文献

[1] H. Shiga, On the quasiconformal deformation of open Riemann surfaces and variations of some conformal invariants, J. Math. Kyoto Univ. **22** (1982), 463–480.

特別講演

Normal families

Walter Bergweiler

Mathematisches Seminar,

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel,

Ludewig-Meyn-Str. 4, D-24098 Kiel,

Germany

Email: bergweiler@math.uni-kiel.de

Abstract: We discuss some aspects of the theory of normal families, and in particular the associated heuristic Bloch principle. Here we describe some recent applications of a rescaling principle for (non-)normal families first formulated by Zalcman, and later extended by Pang and others, which gives a rigorous foundation to the heuristic principle in many cases. We mainly focus on results concerning exceptional values of derivatives. For example, we discuss how the result that the family of all meromorphic functions f for which f and $f' - 1$ have no zeros is normal can be extended to the case that the zeros of f and $f' - 1$ have sufficiently high multiplicity. We also consider whether these results have extensions in the context of Ahlfors's theory of covering surfaces. Finally we describe how the rescaling principle can be used to obtain a new proof of Langley's result characterizing the meromorphic functions f such that f and f'' have no zeros, and we obtain a normal family analogue of this result.

特別講演

A Domain Decomposition Method for Numerical Conformal Mapping onto a Rectangle

Nicolas Papamichael
University of Cyprus

Let $Q := \{\Omega; z_1, z_2, z_3, z_4\}$ be a quadrilateral consisting of a Jordan domain Ω and four points z_1, z_2, z_3, z_4, in counterclockwise order on $\partial\Omega$ and let $m(Q)$ be the conformal module of Q. Also, let $R_{m(Q)}$ denote a rectangle of base 1 and height $m(Q)$, i.e.

$$R_{m(Q)} := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < 1,\ 0 < \eta < m(Q)\}.$$

Then, Q is conformally equivalent to the rectangular quadrilateral

$$\{R_{m(Q)}; 0, 1, 1 + im(Q), im(Q)\},$$

in the sense that there exists a unique conformal map $f : \Omega \to R_{m(Q)}$ that takes the four points z_1, z_2, z_3, z_4, respectively onto the four vertices 0, 1, $1 + im(Q)$, $im(Q)$ of $R_{m(Q)}$.

As is well-known, the conformal module $m(Q)$ admits the following physical interpretation: Let Ω represent a thin plate of homogeneous electrically conducting material, of specific resistance 1, and assume that constant voltages are applied on the two boundary segments (z_1, z_2) and (z_3, z_4) while the remainder of $\partial\Omega$ is insulated. Then, the conformal module $m(Q)$, of the quadrilateral $Q := \{\Omega; z_1, z_2, z_3, z_4\}$, gives the resistance of the conducting plate. This physical interpretation of $m(Q)$ provides the link between the problem of computing conformal modules and that of measuring resistance values of electrical networks.

In this talk we present a review of the theory and application of a domain decomposition method (DDM) for computing approximations to the conformal module $m(Q)$ and the associated conformal map $f : \Omega \to R_{m(Q)}$, in cases where the quadrilateral Q is long. The method is based on the following three steps:

(i) Decomposing the original quadrilateral $Q := \{\Omega; z_1, z_2, z_3, z_4\}$(by means of appropriate crosscuts l_j, $j = 1, 2, \ldots$) into two or more component quadrilaterals Q_j, $j = 1, 2, \ldots$; see e.g. Figure 1.

(ii) Approximating the conformal module $m(Q)$ of the original quadrilateral by the sum $\sum_j m(Q_j)$ of the conformal modules of the component quadrilaterals. (Note that

$$m(Q) \geq \sum_j m(Q_j)$$

and equality occurs only when the images of all the crosscuts l_j under the conformal map $f : \Omega \to R_{m(Q)}$ are straight lines parallel to the real axis. This follows from the well-known composition law for modules of curve families; see e.g. [1, pp. 54–56] and [5, pp. 437–438].)

(iii) Approximating the conformal map $f : \Omega \to R_{m(Q)}$, of the original domain Ω, by the conformal maps $f_j : \Omega_j \to R_{m(Q_j)}$ of the subdomains Ω_j, where

$$R_{m(Q_1)} := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < 1,\ 0 < \eta < m(Q_1)\}$$

and

$$R_{m(Q_j)} := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < 1, \sum_{k=1}^{j-1} m(Q_k) < \eta < \sum_{k=1}^{j} m(Q_k)\},\ j = 2, 3, \ldots .$$

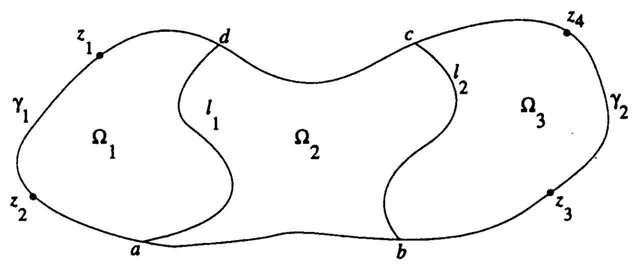


Figure 1

The specific objectives for using the above process are as follows:

(a) To overcome the crowding difficulties associated with the problem of computing the conformal maps of long quadrilaterals, i.e. the difficulties associated with the conventional approach of seeking to determine $m(Q)$ and $f : \Omega \to R_{m(Q)}$ by going via the unit disc or the half plane (see e.g. [7, §3.1] and [11, §1]).

(b) To take advantage of the fact that in many applications (for example in VLSI applications, in connection with the measurement of resistances of integrated circuit networks) a complicated original quadrilateral Q can be decomposed into very simple components Q_j (see e.g. [12, §3] and [13, §4, §5]).

The DDM was introduced in [8], [9], for the purpose of computing the conformal modules and associated conformal maps of a special class of quadrilaterals, viz. quadrilaterals where: (a) the defining domain Ω is bounded by two parallel straight lines and two Jordan arcs; (b) the points z_1, z_2, z_3, z_4 are the four corners where the two boundary arcs meet the two parallel straight lines. For the same special class of quadrilaterals, the method was also studied by Gaier and Hayman [3], [4], in connection with the computation of conformal modules, and by Laugesen [6], in connection with the determination of the conformal maps. These three papers contain several important results that enhance considerably the associated DDM theory. In particular, the results of Gaier and Hayman provided the necessary tools for extending the application of the DDM to the computation of the conformal modules of a much wider class of quadrilaterals than that considered initially in [8] and [9] (see [10], [11], [12], [13]). Similarly, the results of Laugesen provided the necessary basis for extending the DDM theory, associated with the full conformal map $f : \Omega \to R_{m(Q)}$, to more general quadrilaterals than those having the special form described above. This was done recently in [2].

The theory of the method concerns the determination of appropriate crosscuts of subdivision (for the decomposition of the original domain Ω) and the derivation of error estimates for the resulting DDM approximations to the conformal module $m(Q)$ and the associated conformal map $f : \Omega \to R_{m(Q)}$. Let $\tilde{m}(Q)$ and $\tilde{f}$ denote respectively two such DDM approximations to $m(Q)$ and f. Then, typically, the DDM theory leads to computable error estimates of the form

$$0 \leq m(Q) - \tilde{m}(Q) \leq C_m e^{-2\pi m^*}$$

and

$$\max_{z\in\bar{\Omega}} |f(z) - \tilde{f}(z)| \le C_f e^{-\pi m^*},$$

where C_m and C_f are known numbers and m^* denotes the smallest of the conformal modules of the component quadrilaterals Q_j involved in the decomposition, i.e. $m^* := \min_j\{m(Q_j)\}$. (Note that the error for the conformal map is one power of πm^* worst than the corresponding error for the conformal module.)

The general plan of the talk is as follows: (i) to present a review of the theory of the DDM and to explain why such a method is needed; (ii) to present numerical examples illustrating the application of the method; (iii) to make use of the associated theory, in order to investigate the quality of certain heuristic rules that we have come across in the engineering literature, in connection with the measurement of resistance values of integrated circuit networks.

References

[1] L. V. AHLFORS, *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[2] M. I. FALCÃO, N. PAPAMICHAEL, AND N. S. STYLIANOPOULOS, *Approximating the conformal maps of elongated quadrilaterals by domain decomposition*, Constr. Approx., (in press).

[3] D. GAIER AND W. K. HAYMAN, *Moduli of long quadrilaterals and thick ring domains*, Rend. Mat. Appl. (7), 10 (1990), pp. 809–834.

[4] ——, *On the computation of modules of long quadrilaterals*, Constr. Approx., 7 (1991), pp. 453–467.

[5] P. HENRICI, *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. III, Wiley, New York, 1986.

[6] R. LAUGESEN, *Conformal mapping of long quadrilaterals and thick doubly connected domains*, Constr. Approx., 10 (1994), pp. 523–554.

[7] N. Papamichael, *Numerical conformal mapping onto a rectangle with applications to the solution of Laplacian problems*, J. Comput. Appl. Math., 28 (1989), pp. 63–83.

[8] N. Papamichael and N. S. Stylianopoulos, *On the numerical performance of a domain decomposition method for conformal mapping*, in Computational Methods and Function Theory 1989, St. Ruscheweyh, E. B. Saff, L. C. Salinas, and R. S. Varga, eds., vol. 1435 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1990, pp. 155–169.

[9] ——, *A domain decomposition method for conformal mapping onto a rectangle*, Constr. Approx., 7 (1991), pp. 349–379.

[10] ——, *A domain decomposition method for approximating the conformal modules of long quadrilaterals*, Numer. Math., 62 (1992), pp. 213–234.

[11] ——, *On the theory and application of a domain decomposition method for computing conformal modules*, J. Comput. Appl. Math., 50 (1994), pp. 33–50.

[12] ——, *Domain decomposition for conformal maps*, in Computational Methods and Function Theory 1994, R. M. Ali, St. Ruscheweyh, and E. B. Saff, eds., vol. 5 of Ser. Approx. Decompos., World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995, pp. 267–291.

[13] ——, *The asymptotic behavior of conformal modules of quadrilaterals with applications to the estimation of resistance values*, Constr. Approx., 15 (1999), pp. 109–134.

14

エネルギー汎函数の変分について

柴田敬一　国際自然科学研究所

Dirichlet 積分を汎函数と見るとき、函数論で 取り扱われるものの変函数においては独立及び従属変数のうちのすくなくとも一方は C の部分領域を変域としてもつ。従ってわれわれの考察の対象となるべきデリクレ積分の第 1 変分には (I) Euler-Lagrange の変分　のほか、(II) Gerstenhaber-Rauch の変分　がある。考えようとする問題ごとに、要求される境界條件に適した (I) 型, または　(II) 型の変分が有効に利用される様子を解説する。

自己相似 N 角形上の距離について

今井　淳*†

以下, N は 3 以上の自然数で 4 の倍数ではないものとする.

正 N 角形の頂点を不動点とする, 相似比 $R_N := (2\sum_{j=0}^{[N/4]} \cos \frac{2j\pi}{N})^{-1}$ の相似変換の反復操作によって, 自己相似 N 角形 $\mathcal{F}(N)$ が作られることは, 周知の事実である. 特に $\mathcal{F}(3)$ は「シルピンスキー・ガスケット」として, $\mathcal{F}(5)$ は「ペンタクン」としてよく知られている.

一方, N 個の文字からなる集合 $\mathcal{A}(N) := \{0, 1, \dots, N-1\}$ を, 足し算 $\oplus$ を入れた mod N の加群とする. 更に $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して $\mathcal{A}(N)^n$ を, $\mathcal{A}(N)$ の n 個の片側直積とする. この時 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を, 正数列で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ を充たすものとすれば $\mathcal{A}(N)^\infty \times \mathcal{A}(N)^\infty$ の上の, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を重みとする写像:

$$d(\{a_n\}_n|\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1 - \delta_{x_n, y_n}), \quad \text{for } \mathbf{x} := \{x_n\}_n, \ \mathbf{y} := \{y_n\}_n \in \mathcal{A}(N)^\infty \tag{1}$$

は $\mathcal{A}(N)^\infty$ 上の距離になり, 更に $\mathbf{x} \in \mathcal{A}(N)^\infty$ に対して, $\mathbf{x}$ の共役 $\mathbf{x}^\#$ を

$$\mathbf{x}^\# := \begin{cases} \mathbf{x}_0 \left(a \oplus \frac{k}{|k|}\right) \left(a \oplus \frac{k}{|k|} - k\right)^\infty & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 a (a \oplus k)^\infty, \quad k = \pm(1 + [N/4]) \\ \mathbf{x} & \text{otherwise} \end{cases}$$

(ただし, $a \in \mathcal{A}(N)$, $\mathbf{x}_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$, $x^n := \underbrace{xx\cdots x}_{n\text{-times}}$ where $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) で定義し, $\mathcal{A}(N)^\infty$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \overset{\text{定義}}{\iff} \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ or } \mathbf{x} = \mathbf{y}^\#$$

で定めると $S(N) := \mathcal{A}(N)^\infty/\sim$ は $\mathcal{F}(N)$ と同相となる.

そこで上述の d を用いて $\mathfrak{d}$ を

$$\mathfrak{d}(\{a_n\}_n|\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} d(\{a_n\}_n|\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{if } \mathbf{x} \not\sim \mathbf{y} \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \end{cases}$$

とし, 更に $x, y \in S(N) = \mathcal{F}(N)$ に対して

$$\mathbb{D}(\{a_n\}_n|x, y) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{d}(\{a_n\}_n|w^{k-1}, w^k) \,\middle|\, m \in \mathbb{N} : \begin{matrix} w^0 \in p^{-1}(x), w^m \in p^{-1}(y) \\ w^1, w^2, \dots, w^{m-1} \in \mathcal{A}(N)^\infty \end{matrix} \right\} \tag{2}$$

とする. ここで $p : \mathcal{A}(N)^\infty \to S(N)$ は自然射影.

Denker/Sato は $a_n := 2^{-n} = (R_3)^n$ として, $N = 3$ の場合, つまり $S(3)$ とシルピンスキー・ガスケット $\mathcal{F}(3)$ が双リプシッツ同相であること:

定理 0.1. Denker/Sato [1]　或る定数 c_1, c_2 $(0 < c_1 \le c_2 < \infty)$ が存在して, 任意の $x, y \in S(3) = \mathcal{F}(3)$ に対して

$$c_1 \mathbb{D}(\{(R_3)^n\}_n|x, y) \le \|x - y\| \le c_2 \mathbb{D}(\{(R_3)^n\}_n|x, y) \tag{3}$$

が成り立つ. ただし $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^2$ の距離 (を $\mathcal{F}(3)$ 上に制限したもの).

*所属及び住所: 九州大学大学院数理学府, 研究生, 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1
†電子メール: aimai@math.kyushu-u.ac.jp

を得た. ところが (3) が得られたのは,

(I)　$\mathcal{F}(3)$ を作る相似変換の相似比は $R_3 = 1/2$ である.

(II)　$(\mathcal{A}(3)^\infty \ni)\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 ab^\infty\ (a \neq b \in \mathcal{A}(3))$ の共役 $\mathbf{x}^\#$ が $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}_0 ba^\infty$ で与えられる.

(III)　(I) と (II) が, 関係:

$$(R_3)^j = \sum_{\ell=j+1}^{\infty} (R_3)^\ell, \quad \text{for } \forall j \in \mathbb{N}$$

で深く結び付いている.

ことから得られたものであった.

そこで本講演では (出発点として), 上述のアプローチで $\mathcal{F}(N)$ と同相な $S(N)$ の上でも (2) が距離として実現することを中心に以下の事柄を述べる.

定理 0.2.

(A)　重み $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を,

$$a_j \geq \sum_{\ell=j+1}^{\infty} a_\ell > 0, \quad \text{for } \forall j \in \mathbb{N} \tag{4}$$

を充たすように採れば $\mathbb{D}(\{a_n\}_n|\cdot,\cdot)$ は $S(N)$ 上の距離になる.

この (A) によって, 次の (B), (C) が成立することもわかる.

以下 $\{a_n\}_n$ は (4) を充たしているものとする.

(B)　或る定数 $c_1 > 0$ が 存在して, 任意の $x, y \in \mathcal{F}(N) = S(N)$ に対して

$$c_1 \mathbb{D}(\{a_n\}_n|x, y) \leq \|x - y\|$$

が成り立つ為の必要十分条件は $0 < a_n \leq (R_N)^n$ である.

(C)　或る定数 $c_2 > 0$ が 存在して, 任意の $x, y \in \mathcal{F}(N) = S(N)$ に対して

$$\|x - y\| \leq c_2 \mathbb{D}(\{a_n\}_n|x, y)$$

が成り立つ為の必要十分条件は $a_n \geq (R_N)^n$ である.

(B) と (C) により

(D)　$S(N)$ と $\mathcal{F}(N)$ が双リプシッツ同相になる為の必要十分条件は $a_n = (R_N)^n$ である.

References

1. M. Denker and H. Sato: Sierpiński gasket as a Martin boundary I: Martin kernels. *Potential Anal.* **14** (2001), 211–232.

16

On the dynamics of structurally finite transcendental entire functions

木坂 正史 (京都大学大学院 人間・環境学研究科)

We investigate the dynamics of structurally finite transcendental entire functions, which was defined by Taniguchi ([**2**]). We say that an entire function is *structurally finite* if it can be constructed from a finite number of building blocks by Maskit surgeries. Here, a *building block* is either a *quadratic block*: $az^2 + bz + c : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad (a = 0)$ or an *exponential block*: $a\exp(bz) + c : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad (ab = 0)$. We omit the details here and just recall the following Representation Theorem :

Theorem (Representation Theorem, [2]) Every structurally finite entire function has the form

$$\int^z P(t)e^{Q(t)}dt$$

with suitable polynomials P and Q.

Let $f(z)$ be a structurally finite transcendental entire function. Since we are interested in the dynamics of f, by the Representation Theorem and some suitable linear conjugation, we can assume that $f(z)$ has the following form:

$$f(z) := a\int_0^z P(t)e^{Q(t)}dt + b,$$

where $a,\ b \in \mathbb{C}$ and $P,\ Q$ are monic polynomials with $\deg P = p \geq 0,\ \deg Q = q \geq 1$. In what follows we consider only transcendental case, we assume here $q \geq 1$. Then it is easy to see that f has p critical values and q asymptotic directions which correspond to some finite asymptotic values. In particular, f has only finite number of singular values. So we take a disk $D := \{z \mid |z| < C\}$ which contains all the singular values of f. Then $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus D)$ has exactly q components and each one by one lies in one of the q domains which are divided by the q asymptotic paths

$$e^{\frac{(2k-1)\pi}{q}i}t \quad (t \geq 0), \quad k = 1, 2, \cdots, q,$$

which correspond to some finite asymptotic value. Let Γ be one of these paths, say

$$\Gamma(t) := e^{\frac{\pi}{q}i}t \quad (t \geq 0)$$

for example. Then each connected component of $f^{-1}(\Gamma)$ is a curve which tends to ∞ and its argument tends to one of $\frac{2k\pi}{q}$ $(k = 0, 1, \cdots, q-1)$, which is the argument of asymptotic paths which corresponds to the asymptotic value ∞. Let $\mathcal{S}$ be one of the components of $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus D)$. Then we make a partition of $\mathcal{S}$ by using $f^{-1}(\Gamma)$ so that $\mathcal{S} = \coprod_{k\in\mathbb{Z}} R_k$. (See Figure 1). For a point $z \in \mathcal{S}$ such that $f^n(z) \in \mathcal{S}$ for any $n \in \mathbb{N}$, we can define its itinerary $\mathcal{S}(z)$ by

$$\mathcal{S}(z) := \underline{s} = s_0 s_1 \cdots s_n \cdots, \quad \text{if} \ \ f^n(z) \in R_{s_n}.$$

In what follows, for simplicity, we assume that $\mathcal{S}$ is the component of $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus D)$ which has an intersection with $\mathbb{R}^+$.

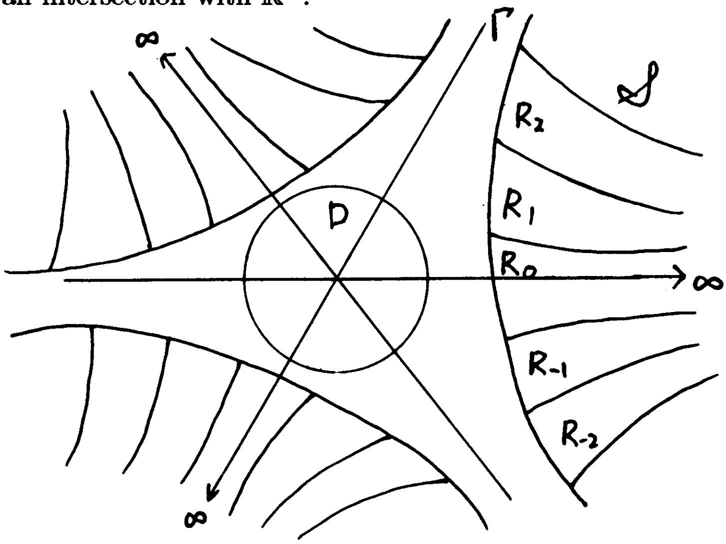


Figure 1 : Domain $\mathcal{S}$ and its partition by $f^{-1}(\Gamma)$ (The case $q = 3$).

Main Theorem Let f be a structurally finite transcendental entire function. For an itinerary $\underline{s} = s_0 s_1 \cdots s_n \cdots$ satisfying $|s_n| \leq F^n(x)$, where $x > 0$ is some constant and

$$F(z) := \sum |a_n| z^n, \quad f(z) = \sum a_n z^n,$$

there exists a continuous curve

$$h_{\underline{s}}(t) \subset \mathcal{S} \quad (t \geq {}^{\exists}t_0)$$

such that

(1) All the points $h_{\underline{s}}(t)$ for fixed t has the itinerary $\underline{s}$.
(2) $f^n(h_{\underline{s}}(t)) \in \mathcal{S}$ for every n.
(3) $f^n(h_{\underline{s}}(t)) \to \infty$ $(n \to \infty)$. In particular, $h_{\underline{s}}(t) \in J(f)$.
(4) $\lim_{t \to \infty} h_{\underline{s}}(t) = \infty$.
(5) $h_{\underline{s}}(t)$ is injective with respect to t.

References

[1] D. Schleicher and J. Zimmer, Dynamic Rays for Exponential Maps, *Preprint SUNY Stony Brook, 1999/9.*

[2] M. Taniguchi, Maskit surgery of entire functions, *Preprint.*

17 ※印は本会で記入

※番号	題	Essential Norms Of Integration Operators On Weighted Bloch Spaces について

氏名 米田 力生　　所属 都立高専

Dを　複素平面上の開単位円板とする。$\omega:[0,1]\to R_+$ を continuous non-increasing function で$\omega(1)=0$, $\omega(r)>0$ ($r\in]0,1[$) を満たすものとする。 $\omega: D\to R_+$ は the radial extention $\omega(z)=\omega(|z|)$ とする。 そのとき weighted Bloch space B_ω　は

$$\| f \|_{B_\omega} := \sup_{z\in D} \omega(z)\,|f'(z)| < +\infty$$

を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。The associated weighted $\tilde{\omega}$は

$$\frac{1}{\tilde{\omega}(z)} := \sup_{\|f\|_{B_\omega}\le 1} |f(z)|$$

として定義する。D上の解析関数gに対して, 作用素I_g , J_g は

$$I_g(h)(z) := \int_0^z g(\zeta)h'(\zeta)d\zeta\ ,\ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

と定義される。本研究ではこれらの　essential　norm　について研究する。そして、次のような結果を得た。

定理 1. $\omega:[0,1]\to R_+$は continuous non-increasing function で $\omega(1)=0$, $\omega(r)>0$　($r\in]0,1[$) を満たすものとする。 $\omega: D\to R_+$ は radial extention $\omega(z)=\omega(|z|)$ とし, $\sup_{z\in D}\omega(z)n|z|^{n-1}\dfrac{1}{\tilde{\omega}(z)}<+\infty$ for any n と仮定する。 もし J_g is bounded on B_ωならば、そのとき

$$\| J_g \|_e \sim \lim_{s\to 1^-} \sup_{|z|>s} \frac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)}|g'(z)|,$$

すなわち、$C\cdot \lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\dfrac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)}|g'(z)| \le \| J_g \|_e \le \lim_{s\to 1^-}\sup_{|z|>s}\dfrac{\omega(z)}{\tilde{\omega}(z)}|g'(z)|$ を満たす定数Cが存在する。

定理 2. $\omega : [0,1] \to R_+$ は continuous non-increasing function で $\omega(1) = 0$, $\omega(r) > 0$ $(r \in]0,1[)$ を満たすものとする。 $\omega : D \to R_+$ は radial extention $\omega(z) = \omega(|z|)$ とし、 $c_n := \omega(r_n) n r_n^{n-1} = \max_{z \in D} \omega(z)|nz^{n-1}|$ and that $\{c_n\}$ converges to some positive constant c as $n \to \infty$ を満たす列 $\{r_n\} \subset [0,1)$ が存在するものと仮定する。 そのとき、もし I_g is bounded on B_ω ならば、

$$\| I_g \|_e = \lim_{s \to 1^-} \sup_{|z|>s} |g(z)|.$$

References

[1] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149- 158.

[2] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1997),337-356.

[3] A. Montes-Rodriguez, The essential norm of composition operators on Bloch spaces, Pacific J.Math.188(1999),339-351.

[4] A. Montes-Rodriguez, Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, J.London Math.Soc.(2)61(2000),872-884.

[5] A.G.Siskakis and R.Zhao, A Volterra type operator on spaces of analytic functions, Contemporary Mathematics.232(1999),299-311.

[6] R.Yoneda, Integration operators on weighted Bloch space, in preprint.

[7] R.Yoneda, Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch spaces, in preprint.

[8] R.Yoneda, Essential Norms Of Integration Operators And Multipliers On Weighted Bloch Spaces, in preprint.

18 ※印は本会で記入

※番号	題	Multipliers On Weighted Bloch Spaces について

氏名 米田力生　所属 都立高専

Dを　複素平面上の開単位円板とする。$\omega : [0,1] \to R_+$ を continuous non-increasing function で$\omega(1)=0$, $\omega(r)>0$ $(r \in]0,1[)$ を満たすものとする。 $\omega : D \to R_+$ は the radial extention $\omega(z)=\omega(|z|)$ とする。 そのとき weighted Bloch space B_ω は $\| f \|_{B_\omega} := \sup_{z\in D} \omega(z)\,|f'(z)| < +\infty$ を満たすD上の解析関数全体からなる空間とする。D上の解析関数gに対して, 作用素I_g , J_g は

$$I_g(h)(z) := \int_0^z g(\zeta)h'(\zeta)d\zeta\ ,\ J_g(f)(z) := \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta$$

と定義される。X, YをBanach空間とする。関数fに対して、 multiplier of X into Yは $fg \in Y$ for all g in Xを満たすものと定義される。 このとき $fX \subset Y$と書く。本研究では 荷重付きBloch空間上のmultiplier について研究する。$\sup_{z\in D} \omega(z)n|z|^{n-1}\dfrac{1}{\tilde{\omega}(z)} < +\infty$ for any n で$c_n := \omega(r_n)nr_n^{n-1} = \max_{z\in D}\omega(z)|nz^{n-1}|$ and that $\{c_n\}$ converges to some positive constant c as $n\to\infty$を満たす列$\{r_n\} \subset [0,1)$が存在するものと仮定する。そして、次のような結果を得た。

Theorem 1. $B_{\omega_1} \subset B_{\omega_2} \subset H^\infty$と仮定する。 そのとき、次は同値である：

(*i*) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;

(*ii*) $J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

(*iii*) $\lim_{s\to 1^-} \sup_{|z|>s} \omega_2(z)|g'(z)| < +\infty$.

Theorem 2. $B_{\omega_1} \subset H^\infty \subset B_{\omega_2}$ で $\dfrac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)^\beta$ $(\beta > 0)$ と仮定する。そのとき、次は同値である：

(i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;

(ii) $J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

(iii) $\lim_{s\to 1^-} \sup_{|z|>s} \omega_2(z)|g'(z)| < +\infty$.

Theorem 3. 次は同値である：

(i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_1}$;

(ii) $I_g, J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_1}$ are bounded operators ;

(iii) $g \in H^\infty$, $\lim_{s\to 1^-} \sup_{|z|>s} \dfrac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)}|g'(z)| < +\infty$.

Theorem 4. $\dfrac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)} \le \gamma(1-|z|^2)^\alpha$ $(\alpha \ge 1)$ を満たすある定数$\gamma > 0$が存在すると仮定する。そのとき、次は同値である：

(i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_1}$;

(ii) $I_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_1}$ is bounded operator ;

(iii) $g \in H^\infty$.

Theorem 5. $\beta > 0$とする。そして $B_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$ 、$\dfrac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)^\beta$ 、$\dfrac{\omega_1(z)}{\tilde{\omega_1}(z)}$ is comparable to $(1-|z|^2)$ を満たすものとする。そのとき、つぎは同値である：

(i) $gB_{\omega_1} \subset B_{\omega_2}$;

(ii) $J_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

(iii) $I_g : B_{\omega_1} \to B_{\omega_2}$ is bounded operator ;

(iv) $\lim_{s\to 1^-} \sup_{|z|>s} \dfrac{\omega_2(z)}{\tilde{\omega_1}(z)}|g'(z)| < +\infty$;

(v) $\lim_{s\to 1^-} \sup_{|z|>s} \dfrac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)}|g(z)| < +\infty$.

References

[1] R.Yoneda, Essential Norms Of Integration Operators And Multipliers On Weighted Bloch Spaces, in preprint.

19

※印は本会で記入

※番号	題	荷重 Bergman-Privalov 空間 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ の等距離写像

氏名		所属
真次康夫		信州大学理学部
植木誠一郎		信州大学理学部

$B \equiv B_n$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球とする。$H(B)$ は B 上の正則関数全体を表す。ν は B 上の正規化された Lebesgue 測度を表す。各 $\alpha \in (-1, \infty)$ に対して、$d\nu_\alpha(z) = c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha d\nu(z)$, $z \in B$ とおく。但し、定数 c_α は $\nu_\alpha(B) = 1$ を満たすように定める。各 $\alpha \in (-1, \infty)$, $p \in [1, \infty)$ に対して、B 上の荷重 Bergman-Privalov 空間 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ を次のように定義する：

$$(AN)^p(\nu_\alpha) = \{f \in H(B) : \|f\|_{(AN)^p(\nu_\alpha)} \equiv \left[\int_B \{\log(1+|f|)\}^p \, d\nu_\alpha\right]^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

更に B 上の Privalov 空間 $N^p(B)(1 < p < \infty)$ を次のように定義する：

$$N^p(B) = \{f \in H(B) : \|f\|_{N^p(B)} \equiv \sup_{0<r<1} \left[\int_S \{\log(1+|f_r|)\}^p \, d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

ここで、$S \equiv S_n$ は $\mathbb{C}^n$ の単位球面であり、σ は S 上の正規化された Lebesgue 測度を表す。

Privalov 空間 $N^p(B)$ の等距離写像については最近、Y.Iida-N.Mochizuki [1]、A.V.Subbotin [3] により決定された。我々は荷重 Bergman-Privalov 空間 $(AN)^p(\nu_\alpha)$ の等距離写像について以下の結果を得た：

定理 1 ([2]). $1 \le p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ とする。 T を $(AN)^p(\nu_\alpha)$ から $(AN)^p(\nu_\alpha)$ への等距離写像とすれば、$|k| = 1$ を満たす複素数 k と B から B への正則写像 Φ が存在し、 次を満たす：

1. B 上の任意の正値 Borel 関数 h に対して、

$$\int_B h \circ \Phi \, d\nu_\alpha = \int_B h \, d\nu_\alpha. \qquad (1)$$

2. 各 $f \in (AN)^p(\nu_\alpha)$ に対して、

$$Tf = k \cdot (f \circ \Phi). \qquad (2)$$

逆に、(1) を満たす B から B への正則写像 Φ、及び $|k|=1$ を満たす複素数 k が与えられたとき、(2) によって写像 T を定義すれば、T は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ から $(AN)^p(\nu_\alpha)$ への等距離写像である。

定理 2 ([2]). T を $(AN)^p(\nu_\alpha)$ から $(AN)^p(\nu_\alpha)$ の上への等距離写像とすれば、$|k|=1$ を満たす複素数 k と $\mathbb{C}^n$ 上のユニタリー変換 U が存在し、

$$Tf = k\cdot(f\circ U) \qquad (f\in(AN)^p(\nu_\alpha)) \tag{3}$$

逆に、$k\in\mathbb{C}$、$|k|=1$、U を $\mathbb{C}^n$ 上のユニタリー変換とするとき、(3) により写像 T を定義すれば、T は $(AN)^p(\nu_\alpha)$ から $(AN)^p(\nu_\alpha)$ の上への等距離写像である。

参考文献

[1] Y. Iida and N. Mochizuki. Isometries of some F-algebras of holomorphic functions. *Arch. Math.*, Vol. 71, pp. 297–300, 1998.

[2] Y. Matsugu and S.Ueki. Isometries of weighted Bergman-Privalov spaces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$. *J. Math. Soc. Japan*. to appear.

[3] A. V. Subbotin. Linear isometry groups of Privalov's spaces of holomorphic functions of several variables. *Doklady Math.*, Vol. 60, pp. 77–79, 1999.

20

BOUNDED HOLOMORPHIC MAP WITH WILD BOUNDARY BEHAVIOR

(複雑な境界挙動をとる有界正則写像)

松島　敏夫　（石川工業高専）

複素平面の単位円内で定義された有界正則関数が、単位円周上のほとんどすべての点で極限値（nontangential limit）をもつことは、Fatou の定理としてよく知られている（[2]）。２次元以上の複素単位球においても同様の結果が得られている。このことは「有界正則関数の境界挙動はおとなしい」というイメージを与える。このイメージが“Inner function conjecture”（２次元以上の複素単位球においては、内部関数は存在しないであろうという予想）の、ひとつの根拠であった（[6]）。
ところがこの予想は、１９８０年代初めに否定的に解決された（[1], [3]）。この事実は、複雑な境界挙動をとる有界正則関数の存在性や性質に対する関心をもたらした。このような動機づけからいくつかの結果を得たが（[4], [5]）今回の講演のおおもとは、次の結果である（[5]）。

Theorem.
$\{\zeta_k\}$ を、n 次元複素単位球の境界上で任意に与えた高々可算個の点の集合とする。このとき、各 ζ_k における radial cluster set

$$\bigcap_{T<1} \overline{\{f(t\zeta_k) : T < t < 1\}}$$

が半径が正の閉円板をふくむような、単位球上の有界正則関数が存在する。

この結果の一つの拡張が今回の話題である。はじめに主結果を述べるために必要な定義を挙げる。以下、Ω は $\mathbb{C}^n$ の領域とし、$\zeta \in \partial\Omega$ とする。

Definition 1.
(1) ζ が linearly accessible であるとは、ζ が Ω 内の線分の端点になっていることをいう。すなわち、

$$\{z \in \mathbb{C}^n : z = \zeta + sv,\ 0 < s \leq 1\} \subset \Omega$$

をみたすノンゼロベクトル v が存在することをいう。
(2) Ω 上の関数 f と linearly accessible な点 ζ 、および (1) の v について

$$\mathrm{CL}(f : \zeta, v) = \bigcap_{T<1} \overline{\{f((1-t)v + \zeta) : T < t < 1\}}$$

を、ζ における f の linear cluster set という。写像についても同様に考える。

Definition 2.

ζ を通り、かつ Ω と交わらないような $\mathbb{C}^n$ の超平面が存在するとき、ζ を C-convex point という。

Definition 3.

D を $\mathbb{C}$ の領域とする。つぎの３条件がみたされるとき、D は L-connected であるという。

(1) D は単連結。

(2) D は 0 をふくまない。

(3) D の任意の元 z について、$\arg z \leq \Theta$ をみたす定数 Θ が存在する。

Definition 4.

ζ は C-convex point であるとする。

$$H = \{z = (z_1, \cdots z_n) \in \mathbb{C}^n : c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n + c_0 = 0\}$$

を、ζ を通り Ω と交わらない $\mathbb{C}^n$ の超平面とし、$\Pi_\zeta(z) = c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n + c_0$ とする。ζ が H による CL-condition をみたすとは、$\Pi_\zeta(\Omega) = \{w \in \mathbb{C} : w = \Pi_\zeta(z), z \in \Omega\}$ が L-connected であることをいう。

主結果はつぎの２つである。

Theorem 1.

$\{\zeta_k\}$ を、高々可算個の linearly accessible な Ω の境界点からなる集合とする。各 ζ_k は超平面 H_k による CL-condition をみたし、さらに H_k が $k \neq l$ のとき $H_k \cap H_l \not\ni \zeta_k, \zeta_l$ または $H_k = H_l$ をみたすとする。このとき、各 ζ_k における linear cluster set が、半径正の閉円板または正の厚みをもつ円環をふくむような Ω 上の有界正則関数が存在する。

Theorem 2.

$\{\zeta_k\}$ は Theorem 1 と同様とする。このとき、各 ζ_k における linear cluster set が、半径正の閉円板または正の厚みをもつ円環の直積をふくむような Ω から $\mathbb{C}^g$ （g は任意）への有界正則写像が存在する。

References

[1] A. B. Aleksandrov, Existence of inner functions, Mat. Sb., **117** (1982), 147-163.

[2] P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., **30** (1906), 335-400.

[3] E. Löw, A construction of inner functions on the unit ball in $\mathbb{C}^p$, Invent. Math., **67** (1982), 223-229.

[4] T. Matsushima, Image of a radius by a holomorphic function and map in the unit disc of $\mathbb{C}$, Math. J . of Toyama Univ., **18** (1995), 97-106.

[5] T. Matsushima, Bounded holomorphic function with some boundary behavior in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, to appear in Kodai Math. J., **24** (2001).

[6] W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1980.

[7] E. M. Stein, Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables, Mathematical Notes, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1972.

21

Holomorphic Curves with Deficiencies in Complex Projective Spaces

YOSHIHIRO AIHARA AND SEIKI MORI

Numazu College of Technology and Yamagata University

The defect relation for holomorphic curves yields that the set of Nevanlinna's deficient divisors for f is at most countable. Furthermore, holomorphic curves with no Nevanlinna's deficient divisor is dense in the space of all transcendental holomorphic curves $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ with respect to a certain kind of distance. It therefore seems that the construction of holomorphic curves with preassigned deficiencies is very difficult. There have been several studies on the construction of holomorphic curves with deficient hyperplanes. So far, we do not know the existence of examples of holomorphic curves with a deficient hypersurface of high degree whose deficiency is less than one. We give examples of holomorphic curves $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ and irreducible hypersurfaces D in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ such that the deficiencies $\delta_f(D)$ are arbitrary positive real numbers less than one. In particular, we have the existence of a holomorphic curve f and a smooth hypersurface S of an arbitrary degree d with $0 < \delta_f(S) \leq C/d$, where C is a positive constant independent of f and d. These results give examples concerning a conjecture due to Griffiths. Our results are rather pathological, but they suggest that the smoothness of divisors is a delicate matter to get good bound for deficiencies. The method used in our construction is based on the theory of entire functions of one complex variable, especially, on some properties of entire functions of order zero due to Valiron. When a divisor is a hyperplane in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, we have the following:

Theorem 1. *Let α be an arbitrary positive real number less than one. Then there exist a holomorphic curve $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ with the Zariski dense image and a hyperplane H_0 in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ such that $\delta_f(H_0) = \alpha$.*

We next deal with the case where a given divisor is an irreducible hypersurface of degree d not less than two. We denote by $\zeta = (\zeta_0, \cdots, \zeta_n)$ a homogeneous coordinate system in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. We first assume $n \geq 3$. We define an irreducible hypersurface D_d of degree d in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ by

$$\zeta_1^d + \cdots + \zeta_n^d = 0.$$

Note that D_d has just one singular point $(1, 0, \cdots, 0)$.

Theorem 2. *Let α be an arbitrary positive real number less than one. Then there exists a holomorphic curve with the Zariski dense image $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ such that $\delta_f(D_d) = \alpha$.*

We now consider the case $n = 2$. In this case, we define an irreducible curve C_d by

$$\zeta_0\zeta_2^{d-1} - \zeta_1^d = 0.$$

Note that C_d also has just one singular point $(1,0,0)$, if $d \geq 3$. Then we have the following:

Theorem 3. (1) *For each positive integer* d *not less than two, there exists a holomorphic curve with the Zariski dense image* $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ *such that* $\delta_f(C_d) = 1/d$.

(2) *Let* α *be a positive real number less than one. Suppose that* $\alpha + 1/d < 1$. *Then there exists a holomorphic curve with the Zariski dense image* $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ *such that* $\delta_f(C_d) = \alpha$.

The hypersurfaces D_d and C_d constructed above are singular divisors. We finally deal with the nonsingular case. In this case, we have an example for which the Griffiths conjecture holds. We define a nonsingular hypersurface S_d in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ of degree $d \geq 2$ by

$$\zeta_0^{d-1}\zeta_2 - \zeta_1^d + \zeta_1\zeta_2^{d-1} + \sum_{j=3}^{n} \zeta_j^d = 0.$$

In this case, we have the following:

Theorem 4. (1) *Let* α *be a positive real number less than* $1/d$. *Then there exists a holomorphic curve with the Zariski dense image* $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ *such that* $\delta_f(S_d) = \alpha$.

(2) *For each positive integer* d *not less than two, there exists a holomorphic curve* $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ *such that*

$$\frac{1}{d} \leq \delta_f(S_d) \leq \frac{2d-1}{d^2}.$$

22

Locally boundedness of holomorphic mappings in infinite dimesional spaces and its applications

濱田　英隆　　　　　　　九州共立大学工学部

Let $\mathbf{B}$ be the unit ball in a complex Banach space X. For each $x \in X\backslash\{0\}$, we define $T(x) = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1, x^*(x) = \|x\|\}$. Let

$$\mathcal{N} = \{g \in \mathcal{H}(\mathbf{B}) \; : g(0) = 0, \Re x^*(g(x)) > 0 \text{ for } \forall x \in \mathbf{B} \setminus \{0\}, x^* \in T(x)\}.$$

Gurganus [1] showed the following theorem.

Theorem 1 *Let $f : \mathbf{B} \to Y$ be a locally biholomorphic mapping with $f(0) = 0$. Then f is starlike if and only if $[Df(x)]^{-1} f(x) \in \mathcal{N}$.*

For spirallike mappings, Suffridge [4] showed the following result.

Theorem 2 *Let $f : \mathbf{B} \to X$ be a normalized locally biholomorphic mapping. Let $A \in \mathcal{L}(X, X)$ such that*

$$\inf\{\Re x^*(A(x)) : \|x\| = 1, x^* \in T(x)\} > 0.$$

Then f is spirallike relative to A if and only if $[Df(x)]^{-1} A(f(x)) \in \mathcal{N}$.

For the proof, they used the following lemma (Gurganus [1]).

Lemma 1 *Let $h \in \mathcal{N}$. Then for each $x \in \mathbf{B}$, the initial value problem*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v), \quad v(0) = x,$$

has a unique solution $v(t) = v(x, t)$ defined for all $t \geq 0$.

For the proof of this lemma, we need to show that $h(x)$ is bounded on $\mathbf{B}_r = r\mathbf{B}$ for each r with $0 < r < 1$ (cf. Pfaltzgraff [3, Theorem 2.1]). In general, a holomorphic mapping on $\mathbf{B}$ is not necessarily bounded on $\mathbf{B}_r$.

We will show that every $h \in \mathcal{N}$ is bounded on $\mathbf{B}_r$ for $0 < r < 1$.

Lemma 2 *Let $h \in \mathcal{N}$. Then for each r with $0 < r < 1$, there exists a constant $M(r)$ such that $\|h(x)\| \leq M(r)$ on $\mathbf{B}_r$.*

Using Lemma 2, we can give a complete proof of Lemma 1.

Theorem 3 *If $f : \mathbf{B} \to X$ is convex and normalized, then*

$$\|x\|(1+\|x\|)^{-1} \leq \|f(x)\| \leq \|x\|(1-\|x\|)^{-1}, \quad x \in \mathbf{B}$$

and $f(\mathbf{B})$ contains the ball $\mathbf{B}_{1/2}$.

When X is a complex Hilbert space, we obtain the following results.

Theorem 4 *Let $f : \mathbf{B} \to Y$ be a locally biholomorphic mapping. Then f is a convex mapping if and only if*

$$\|[Df(x)]^{-1}(f(x)-f(y))\| \leq M_r, \quad x, y \in \mathbf{B}_r,$$

$$\Re\langle [Df(x)]^{-1}(f(x)-f(y)), x\rangle > 0, \quad x, y \in \mathbf{B} \text{ with } \|x\| > \|y\|.$$

Theorem 5 *If $f : \mathbf{B} \to Y$ is convex, then*

$$\|x\|^2 - \Re\left\langle [Df(z)]^{-1}D^2f(z)(x,x), z\right\rangle \geq 0$$

for $z \in \mathbf{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in X$ with $\Re\langle x, z\rangle = 0$.

Theorem 6 *Let $f : \mathbf{B} \to Y$ be a locally biholomorphic mapping. Assume that, for any r with $0 < r < 1$, there exists an M_r such that*

$$\|[Df(x)]^{-1}(f(x)-f(y))\| \leq M_r, \quad x, y \in \mathbf{B}_r,$$

$$\|x\|^2 - \Re\left\langle [Df(z)]^{-1}D^2f(z)(x,x), z\right\rangle > 0$$

for $z \in \mathbf{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $x \in X \setminus \{0\}$ with $\Re\langle x, z\rangle = 0$. Then $f(\mathbf{B}_r)$ is a convex domain for any r with $0 < r < 1$.

Theorem 7 *If $f : \mathbf{B} \to X$ is convex and normalized, then*

$$(1+\|x\|)^{-2} \leq \|Df(x)\| \leq (1-\|x\|)^{-2}, \quad x \in \mathbf{B}.$$

References

[1] K. R. Gurganus, *Φ-like holomorphic functions in $\mathbf{C}^n$ and Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., **205** (1975), 389–406.

[2] H. Hamada and G. Kohr, *Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces,* to appear in Rev. Roumaine Math. Pures Appl.

[3] J. A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbf{C}^n$.* Math. Ann., **210** (1974), 55–68.

[4] T.J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 599, Springer, Berlin New York Heidelberg, 1976, pp.146–159.

k-convexity in several complex variables

濱田 英隆　　九州共立大学工学部

Mejia [3], Mejia-Minda [4] and Ma-Mejia-Minda [2] studied k-convex regions in $\mathbf{C}$ and k-convex functions on the unit disc in $\mathbf{C}$.

We define the notion of k-convexity for domains in $\mathbf{C}^n$ and also that of k-convex mappings on the Euclidean unit ball $\mathbb{B}$ in $\mathbf{C}^n$. Then, we will investigate k-convex domains in $\mathbf{C}^n$ and k-convex mappings on $\mathbb{B}$.

Suppose that $k > 0$, $a, b \in \mathbf{C}^n$, $a \neq b$ and $\|a - b\| < 2/k$. Let L be the complex line through a and b. Then there are two distinct closed disks $\overline{U}_1$ and $\overline{U}_2$ of radius $1/k$ in L such that $a, b \in \partial\overline{U}_j$ $(j = 1, 2)$. Let $E_k[a, b] = \overline{U}_1 \cap \overline{U}_2$. We also let $E_0[a, b] = [a, b]$, and for $\|a - b\| = 2/k$, $E_k[a, b]$ is the closed disk in L with center $(a + b)/2$ and radius $1/k$.

Definition 1 A domain $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ is called k-convex provided $\|a - b\| < 2/k$ for any pair of points $a, b \in \Omega$ and $E_k[a, b] \subset \Omega$.

Example 1 Let $k = 1/\max\{r_1, \ldots, r_n\}$. Then, the ellipsoid

$$E = \left\{ z \in \mathbf{C}^n : \frac{|z_1|^2}{r_1^2} + \cdots + \frac{|z_n|^2}{r_n^2} < 1 \right\}$$

is k-convex, but is not k'-convex for any $k' > k$.

Theorem 1 *Let Ω be a bounded domain in $\mathbf{C}^n$ with C^2-boundary. Let φ be a defining function. Then Ω is k-convex if and only if*

$$\Re\left[v' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(c) v \right] + \overline{v}' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z} \partial z}(c) v \geq k \left| \left\langle v, \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(c) \right\rangle \right| \|v\|$$

for all $c \in \partial\Omega$ and $v \in T_c(\partial\Omega)$.

Definition 2 $K(k, \alpha)$ denotes the family of all biholomorphic mappings f on $\mathbb{B}$ such that $f(0) = 0$, $Df(0) = \alpha I$ and $f(\mathbb{B})$ is k-convex.

Theorem 2 *Suppose that $f \in K(k, \alpha)$ with $\alpha > 0$. Then $\alpha k \leq 1$ and the Euclidean ball $B(0, \alpha/(1 + \sqrt{1 - \alpha k}))$ is contained in $f(\mathbb{B})$.*

Example 2 Let $k, \alpha > 0$. For $u \in \mathbf{C}^n$ with $\|u\| = 1$, let $f_{k,u}(z) = \alpha z/(1 - \sqrt{1 - \alpha k}\langle z, u\rangle)$. Then $f_{k,u} \in K(k, \alpha)$.

Theorem 3 *Let $f : \mathbb{B} \to \mathbf{C}^n$ be a locally biholomorphic mapping. If*

$$\|v\|^2 - \Re\left\langle [Df(z)]^{-1} D^2 f(z)(v, v), z \right\rangle \geq k|\langle z, v\rangle| \|Df(z)v\|$$

for all $z \in \mathbb{B}$, $v \in \mathbf{C}^n$ with $\Re\langle z, v\rangle = 0$, then f is a k-convex mapping.

Example 3 For $z = (z_1, z_2)' \in \mathbf{C}^2$, let $f(z) = (z_1 + a z_2^2, z_2)'$. Suffridge [5, Example 9] showed that if $|a| \leq 1/2$, then $f \in K$. We can show that if $|a| < 1/2$, then $f \in K(k, 1)$, where $k = (1 - 2|a|)/(1 + 2|a|)$.

Theorem 4 *Let $f \in K(k, \alpha)$ with $k, \alpha > 0$. Then*

$$\frac{\alpha\|z\|}{1 + \sqrt{1 - \alpha k}\|z\|} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\alpha\|z\|}{1 - \sqrt{1 - \alpha k}\|z\|} \quad z \in \mathbb{B}.$$

Theorem 5 *Let $f \in K(k, \alpha)$, where $k, \alpha > 0$. Assume that f is a quasiregular strongly starlike mapping. Then f extends to a quasiconformal homeomorphism of $\mathbf{R}^{2n}$ onto itself.*

References

[1] H. Hamada and G. Kohr, *k-convexity in several complex variables,* submitted.

[2] W. Ma, D. Mejia and D. Minda, *Distortion theorems for Euclidean k-convex functions,* Complex Variables **19** (1992), 259–269.

[3] D. Mejia, *The hyperbolic metric in k-convex regions*, Ph. D. dissertation, University of Cincinnati, 1986.

[4] D. Mejia and D. Minda, *Hyperbolic geometry in k-convex regions,* Pacific J. Math. **141** (1990), 333–354.

[5] T.J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes in Math., **599**(1976), 146–159.

チューブ領域上の正則ベクトル場の延長

清水　悟

東北大学大学院理学研究科

よく知られた H. Cartan の定理は，$\mathbf{C}^n$ 内の有界領域 D の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(D)$ が，コンパクトー開位相に関して，リー群の構造をもつことを主張する．この事実は複素有界領域の研究において基本的であり，リー群 $\mathrm{Aut}(D)$ のリー環は D 上の完備正則ベクトル場全体のなすリー環 $\mathfrak{g}(D)$ と標準的に同一視されることから，ベクトル場の完備性が複素有界領域の研究において一つの重要な位置を占めることになる．ベクトル場の完備性の判定は，一般にはかなり難しいことである．実際，ベクトル場が与えられたとき，その積分曲線 $x(t)$ がすべての $t \in \mathbf{R}$ に対して定義されるかどうかということは，常微分方程式における自励系の解の問題として複雑な様相をもつ．しかし，ある幾何学的設定の下では，ベクトル場の完備性のうまい判定法が成立することがある．この講演では，チューブ領域上の正則ベクトル場の場合におけるそのような判定法の一つを報告する．我々が関心をもつ対象は，特にチューブ領域 T_Ω 上の多項式ベクトル場であり，低い次数の T_Ω 上の完備多項式ベクトル場に関する情報を基にして，より高い次数の T_Ω 上の完備多項式ベクトル場を決定する一方法を与える．

1. 延長定理．$T_\Omega = \mathbf{R}^n + \sqrt{-1}\Omega$ を $\mathbf{C}^n$ 内のチューブ領域とし，その底Ω は $\mathbf{R}^n$ 内の直線を含まない凸領域であるとする．T_Ω 上の 2 次の多項式ベクトル場 Z に対して，

$$Z = \sum_{k=0}^{2} \left(X^{(k)} + \sqrt{-1}Y^{(k)} \right)$$

と書き，

$$Z_{[b]} = X^{(2)} + \sqrt{-1}Y^{(1)}, \quad Z_{[a]} = X^{(1)} + \sqrt{-1}Y^{(0)}, \quad Z_{[s]} = X^{(0)}$$

とおく．ここで $X^{(k)}, Y^{(k)}$ は多項式ベクトル場で，その$\partial_j = \partial/\partial z_j$, $j = 1, \cdots, n$, についての成分が，$z_1, \cdots, z_n$ に関する実係数 k 次同次多項式であるものである．

<u>延長定理</u> ([4]) Z が T_Ω 上完備であるための必要十分条件は，$Y^{(2)} = 0$ かつベクトル場 $[\partial_i, Z]$, $i = 1, \cdots, n$, および $Z_{[a]}$ がすべて T_Ω 上完備であることである．

この定理は村上[2] において用いられる考察に基づいて証明される．またその系として，[2, Theorem 7.3] の部分的一般化が得られる．

系　T_Ω を上のようとし，さらに $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ の各元が高々2 次の多項式ベクトル場であると仮定する．このとき T_Ω が等質ならば，T_Ω はアフィン等質である．

2. 多項式無限小自己同型をもつチューブ領域. T_Ω を前節のようとし，さらに T_Ω が $\mathbf{C}^n$ の原点を含み，$\mathfrak{g}(T_\Omega)$ が T_Ω 上完備な多項式ベクトル場全体からなると仮定する．このときベクトル空間 $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ の部分空間 $\mathfrak{q}, \mathfrak{s}, \mathfrak{a}_*, \mathfrak{b}$ を

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{q} &= \left\{ Z \in \mathfrak{g}(T_\Omega) \;\middle|\; Z = \sum_{k=0}^{2} \left(X^{(k)} + \sqrt{-1} Y^{(k)} \right) \right\}, \\
\mathfrak{s} &= \{\partial_1, \cdots, \partial_n\}_{\mathbf{R}}, \\
\mathfrak{a}_* &= \left\{ Z \in \mathfrak{g}(T_\Omega) \;\middle|\; Z = X^{(1)} + \sqrt{-1} Y^{(0)} \right\}, \\
\mathfrak{b} &= \left\{ Z \in \mathfrak{g}(T_\Omega) \;\middle|\; Z = X^{(2)} + \sqrt{-1} Y^{(1)} \right\}
\end{aligned}
$$

により定義すると，延長定理は $\mathfrak{q}$ が直和分解

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a}_* + \mathfrak{b}$$

をもつことを示す（松島[1] 参照）．ここで $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ の原点における等方部分環に含まれることに注意すべきである．これらの事実は，多項式無限小自己同型をもつチューブ領域に関する正則同値問題を調べる際，基本的であると同時に非常に有用である（[3], [5], [6]）．

参考文献

1. Y. Matsushima, *On tube domains*, in Symmetric Spaces, Pure and Appl. Math., Vol. 8, Dekker, New York, 1972, pp. 255–270.
2. S. Murakami, *On Automorphisms of Siegel Domains*, Lect. Notes in Math. 286, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
3. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for two-dimensional tube domains with polynomial infinitesimal automorphisms*, in Geometric Complex Analysis, Proceedings of the third international research institute, the Mathematical Society of Japan, Hayama, 1995 (J. Noguchi, H. Fujimoto, J. Kajiwara, T. Ohsawa, ed.), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996, pp. 563–568.
4. S. Shimizu, *Prolongation of holomorphic vector fields on a tube domain*, preprint.
5. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for two-dimensional tube domains with polynomial infinitesimal automorphisms*, in preparation.
6. S. Shimizu, *Structure and equivalence of a class of tube domains with solvable groups of automorphisms*, in preparation.

チューブ領域に関する正則同値問題についてのいくつかの注意

清水　悟

東北大学大学院理学研究科

1. チューブ領域に関する正則同値問題の一般的定式化．加法群$\Sigma := \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{C}^n$ 内のチューブ領域 T_Ω 上に実平行移動の群として自然に作用する．チューブ領域の間の双正則写像でΣ-作用に関して同変なものは，チューブ領域のカテゴリーにおける自然な射と考えられるが，そのような双正則写像は複素アフィン変換でその線形部分が実線形変換であるものとして特徴付けられる．このことに注意して，$\mathbf{C}^n$ 内の２つのチューブ領域を，それらの間に $GL(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{C}^n$ の元によって与えられる双正則写像があるとき，アフィン的に同値であると呼ぶ．ここで $GL(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{C}^n$ は $\mathbf{C}^n$ の複素アフィン変換でその線形部分が実線形変換であるもの全体のなす群を表す．

チューブ領域の研究において次の結果は基本的である：

構造定理（[2]）T_Ω を $\mathbf{C}^n$ 内のチューブ領域とし，その底Ω は $\mathbf{R}^n$ 内の直線を含まない凸領域であるとする．このとき T_Ω とアフィン的に同値なチューブ領域 $T_{\tilde\Omega}$ があって，リー環 $\mathfrak{g}(T_{\tilde\Omega})$ は直和分解 $\mathfrak{g}(T_{\tilde\Omega}) = \mathfrak{p} + \mathfrak{e}$ をもつ．ここで

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}(T_{\tilde\Omega}) \,|\, X\text{は多項式ベクトル場}\},$$

$$\mathfrak{e} = \sum_{i=1}^{r} \left\{ e^{z_i} \left(\partial_i + \sum_{j=r+1}^{n} \sqrt{-1} a_i^j \partial_j \right), e^{-z_i} \left(\partial_i - \sum_{j=r+1}^{n} \sqrt{-1} a_i^j \partial_j \right) \right\}_{\mathbf{R}}$$

であり，r は 0 と n の間の整数，a_i^j は実定数である．

整数 r が T_Ω から一意的に定まることに注意して，r をチューブ領域 T_Ω の指数的階数と呼び，$e(T_\Omega)$ で表す．$e(T_\Omega) = 0$ のとき，$\mathfrak{g}(T_\Omega)$ の各元 Z は多項式ベクトル場である．このとき Z の成分として与えられる多項式の次数の最大値を $\deg Z$ とおき，Z が $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ 上を動くときの $\deg Z$ の最大値を $d(T_\Omega)$ で表す．

さてチューブ領域に関する正則同値問題とは，チューブ領域に関する２つの同値性－双正則同値性とアフィン同値性－の間の関係を調べる問題として定式化できる：

問題（チューブ領域に関する正則同値問題）$\mathbf{C}^n$ 内の２つのチューブ領域 T_{Ω_1} と T_{Ω_2} が双正則同値ならば，それらはアフィン的に同値になるか？

Ω_1 とΩ_2 が $\mathbf{R}^n$ 内の凸錐体であるときは，この問題への肯定的解答が与えられている（松島[1] を見よ）．他方，Ω_1 とΩ_2 が必ずしも凸錐体でないときは，$T_{\Omega_1} = T_{(0,\infty)} = \{x+\sqrt{-1}y \in \mathbf{C} \,|\, x \in \mathbf{R},\, y > 0\}$, $T_{\Omega_2} = T_{(0,\pi)} = \{x + \sqrt{-1}y \in \mathbf{C} \,|\, x \in \mathbf{R},\, 0 < y < \pi\}$ として得られる単純な反例がある．構造定理はなぜこのようなことが生ずるかを説明する．

$T_{\Omega_1}, T_{\Omega_2}$ を $\mathbf{C}^n$ 内の２つのチューブ領域とし，それらの底Ω_1, Ω_2 はそれぞれ $\mathbf{R}^n$ 内の直線を含まない凸領域であるとする．チューブ領域の指数的階数はアフィン不変量なので，チューブ領域に関する正則同値問題を次のように再定式化するのが自然であろう：

問題 (*) $e(T_{\Omega_1})=e(T_{\Omega_2})$ とするとき，もし T_{Ω_1} と T_{Ω_2} が双正則同値ならば，それらはアフィン的に同値になるか？

上に述べた反例は $e(T_{\Omega_1})\neq e(T_{\Omega_2})$ の場合に相当する．実際，$e(T_{(0,\infty)})=0$, $e(T_{(0,\pi)})=1$ である．Ω_1,Ω_2 が特に $\mathbf{R}^n$ 内の有界領域のときは，T_{Ω_1} と T_{Ω_2} が双正則同値ならば，$e(T_{\Omega_1})=e(T_{\Omega_2})$ であって，T_{Ω_1} と T_{Ω_2} はアフィン的に同値になるということが示される（[4]）．
問題 (*) の典型的な場合として次の問題を考えよう：

問題 (**) $e(T_{\Omega_1})=e(T_{\Omega_2})=0$ とするとき，もし T_{Ω_1} と T_{Ω_2} が双正則同値ならば，それらはアフィン的に同値になるか？

Ω_1 とΩ_2 が $\mathbf{R}^n$ 内の凸錐体であるときは，$e(T_{\Omega_1})=e(T_{\Omega_2})=0$ であって（松島[1] を見よ），先に述べたように問題 (**) への肯定的解答が与えられている．問題 (**) を一般的に解決する試みにおいて，延長定理はチューブ領域に関する分類結果[5] なども援用して，種々の結果を得ることを可能にする（[3], [7], [8]）．この講演では延長定理の直接的帰結として得られる，問題 (**) への解答を報告する．

2. アフィン正則自己同型のみを許容するチューブ領域に関する正則同値問題．問題 (**) を作業仮説として，$d(T_{\Omega_1})=d(T_{\Omega_2})$ の場合に正則同値問題を考える．このとき延長定理は $d(T_{\Omega_1})=d(T_{\Omega_2})=1$ の場合に対して問題 (**) へ肯定的解答をもたらす．実際，それは延長定理から従う次の補題に基づく：

補題 ([6]) T_Ω を $\mathbf{C}^n$ 内のチューブ領域とし，その底Ω は $\mathbf{R}^n$ 内の直線を含まない凸領域であるとする．このとき $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ の各元が高々1 次の多項式ベクトル場であるという仮定の下に，$\mathfrak{s}(T_\Omega):=\{\partial_1,\cdots,\partial_n\}_{\mathbf{R}}$ は $\mathrm{Aff}(T_\Omega)$ のリー環 $\mathfrak{a}(T_\Omega)$ 内の一意的な n 次元可換イデアルとして特徴付けられる．ここで $\mathrm{Aff}(T_\Omega)$ は $\mathbf{C}^n$ の複素アフィン変換で T_Ω を不変にするもの全体のなす群を表す．

参考文献

1. Y. Matsushima, *On tube domains*, in Symmetric Spaces, Pure and Appl. Math., Vol. 8, Dekker, New York, 1972, pp. 255–270.
2. S. Shimizu, *Automorphisms of tube domains*, in Geometry and Analysis on Complex Manifolds, Festschrift for Professor S. Kobayashi's 60th Birthday (T. Mabuchi, J. Noguchi, T. Ochiai, ed.), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1994, pp. 198–241.
3. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for two-dimensional tube domains with polynomial infinitesimal automorphisms*, in Geometric Complex Analysis, Proceedings of the third international research institute, the Mathematical Society of Japan, Hayama, 1995 (J. Noguchi, H. Fujimoto, J. Kajiwara, T. Ohsawa, ed.), World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996, pp. 563–568.
4. S. Shimizu, *Automorphisms and equivalence of tube domains with bounded base*, Math. Ann. **315** (1999), 295–320.
5. S. Shimizu, *A classification of two-dimensional tube domains*, Amer. J. Math. **122** (2000), 1289–1308.
6. S. Shimizu, *Prolongation of holomorphic vector fields on a tube domain*, preprint.
7. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for two-dimensional tube domains with polynomial infinitesimal automorphisms*, in preparation.
8. S. Shimizu, *Structure and equivalence of a class of tube domains with solvable groups of automorphisms*, in preparation.

26

※印は本会で記入

※番号

題 CONDITIONAL STABILITY IN LINE UNIQUE CONTINUATION FOR ANALYTIC ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

氏名 山本 昌宏（まさひろ）
程 晋

所属 東大・数理
Fudan Univ.

§1. Introduction.
In Cheng and Yamamoto ("Inverse Problems",**14** (1998), pp.869–882), we proved conditional stability in unique continuation along line for a harmonic function in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: Suppose that Ω is a domain in $\mathbb{R}^2$ where L is a straight line satisfying

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{aligned} &L \text{ intersects } \partial\Omega \text{ at two points and} \\ &\Gamma = L \cap \Omega \text{ is a segment.} \end{aligned}$$

We further assume that two segments γ and Γ_1 satifsy

$$\text{(1.2)} \qquad \gamma \subset \Gamma_1 \subset \overline{\Gamma_1} \subset \Gamma, \quad \overline{\Gamma_1} \neq \Gamma.$$

We consider a harmonic functionu $= u(x)$ in Ω:

$$\text{(1.3)} \qquad \Delta u(x) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Theorem 0. *Suppose that a straight line L satisfies (1.1) and Γ_1, γ satisfy the assumption (1.2). Let $u \in C^2(\Omega)$ be a harmonic function. If there exists a constant $M > 0$ such that $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le M$, then*

$$\|u\|_{C(\overline{\Gamma_1})} \le C\|u\|^{\alpha}_{C(\overline{\gamma})}.$$

Here $C = C(M, \gamma, \Gamma_1) > 0$ is a constant which depends on M, γ and Γ_1, and $\alpha \in (0,1)$ depends on Γ_1 and γ.

In this unique continuation along the line, we do not require any non-tangential derivatives for the harmonic function on the smaller part of the line.

The main purpose of this report is to extend Theorem 0 to an elliptic partial differential operator with analytic coefficient of the form:

$$(\Delta^m u)(x) + \sum_{|\alpha| \le 2m-1} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = 0$$

in a simply connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ where a_α, $|\alpha| \le 2m-1$, satisfy conditions on analyticity.

§2. Formulation and the main result.

Let $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ and $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$. We set

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \ 1 \le j \le n, \quad D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2.$$

We assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a simply connected domain. By $I(z^0)$ we denote the isotropic cone with vertex at $z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0) \in \mathbb{C}^n$:

$$I(z^0) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n; \sum_{j=1}^n (z_j - z_j^0)^2 = 0 \right\}. \tag{2.1}$$

We define the kernel of harmononicity hull $N(\Omega)$ of Ω by

$$N(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}^n; \mathrm{CH}\,(\mathbb{R}^n \cap I(z)) \subset \Omega\}. \tag{2.2}$$

Here $\mathrm{CH}\,(A)$ denotes the convex hull of a set $A \subset \mathbb{R}^n$.

We consider an elliptic partial differential operator:

$$P(x, D)u(x) = \Delta^m u(x) + \sum_{|\alpha| \le 2m-1} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Throughout this paper, we assume

(2.4) a_α, $|\alpha| \le 2m - 1$, are extended as holomorphic function in $N(\Omega)$.

For sufficiently small $\delta > 0$, we set

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > \delta\}.$$

Let L be a straight line such that

(2.5) $\Gamma = L \cap \Omega_\delta$ is a non-empty segment.

Moreover we assume that two segments γ and Γ_1 satisfy

$$\gamma \subset \Gamma_1, \quad \overline{\Gamma_1} \subset \Gamma, \quad \overline{\Gamma_1} \ne \Gamma. \tag{2.6}$$

Now we are ready to state our main result.

Theorem 1. *Let $u \in C^{2m}(\Omega)$ satisfy*

$$P(x, D)u(x) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{2.7}$$

If

$$\|u\|_{C^{2m-1}(\overline{\Omega_\delta})} \le M, \tag{2.8}$$

then

$$\|u\|_{C(\overline{\Gamma_1})} \le C \|u\|^\alpha_{C(\overline{\gamma})}. \tag{2.9}$$

Here $C = C(M, \gamma, \Gamma_1) > 0$ is a constant which depends on M, γ and Γ_1, and the constant $\alpha \in (0, 1)$ depends on Γ_1 and γ.

27

※印は本会で記入

※番号	題	正規2次元特異点の pencil 種数について
	氏名 都丸 正	所属 群馬大学 医学部

はじめに、正規2次元特異点とコンパクト代数曲線の退化族との関係の簡単な歴史について述べます。まず、V.I.Arnold による Modality なる不変量の導入と Modality $\mu = 0, 1, 2$ の場合の分類があります。$\mu = 0$ の場合は有理2重点の定義式に対応します。次に、V.Kulikov による Modality=1,2 の特異点と Kodaira による楕円曲線の退化族との関係の観察があり、U.Karras による Kodaira 特異点の定義とその研究 [1] があります。ここで、Kodaira 特異点とは曲線の退化族に最も近い特異点と言えます。一方、M.Reid は今日、最小楕円型特異点と呼ばれるもので超曲面の場合を分類し、楕円曲線の退化族との関係を示唆しています。

このような事を踏まえ、より一般の正規2次元特異点とコンパクト代数曲線の退化族との関係を探ることを考え、以下のような結果を得られましたので報告致します。。

定義 1. (i) (X, o) を正規2次元特異点とする。このとき、種数 g のコンパクト代数曲線の退化族 $p : S \to \Delta$ で、S が (X, o) のある特異点解消空間を含むようなものを全て考えその種数 g の最小値を (X, o) の pencil 種数と名付け、$p_e(X, o)$ と表す。

(ii) さらに、$f \in \mathfrak{m}$（極大イデアル）を $\mathcal{O}_{X,o}$ の non-multiple な元（つまり、$\mathfrak{m}$ の他の元の n ($\geqq 2$ 乗で書けない) とする。このとき、コンパクト代数曲線の退化族 $p : S \to \Delta$ で、$S \supset \tilde{X}$ で $f \circ \pi = p|_{\tilde{X}}$ を満たすもの全てを考え、その種数 g の最小値を (X, o) と f の対の pencil 種数と名付け $p_e(X, o, f)$ と表す。

これらは有限の値を取るが、実はさらに次のような強い結果が言える。

定理.1 $\pi : (\tilde{X}, E) \to (X, o)$ を $(f \circ \pi)_{\tilde{X}}$ が単純正規交叉因子となるような、特異点解消とする。このとき、次が言える。

(i) コンパクト代数曲線の退化族 $p : S \to \Delta$ で、$S \supset \tilde{X}$ で $f \circ \pi = p|_{\tilde{X}}$ を満たすもので、$Supp(S_o) \backslash E$ の任意の連結成分が E から発する $\mathbb{P}^1$-string となるようなものが存在する。

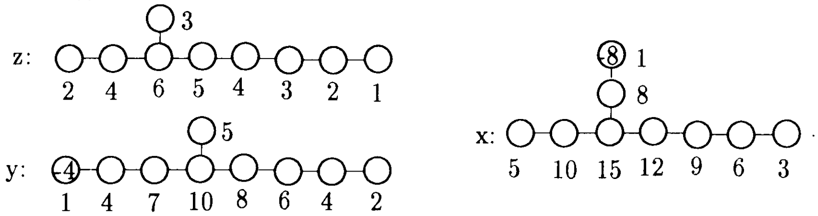
(ii) この退化族の特異フイバーの numerical データ（weited dual graph と各既約成分の係数）は、$(f \circ \pi)_{\tilde{X}}$ なる因子の numerical データから決まる。

(iii) この退化族の種数は $p_e(X, o, f)$ となる。

証明は (X, o) と適当な巡回商特異点の特異点解消を貼り合わせ、同時にその上の正則関数を貼り合わせて退化を構成する事で得られる。

例 1 .$(X,o)=(\mathbb{C}^2,o)$ とし、$f=x^2+y^3$ とする。平面上に適当に blowing-up して、下図左のような例外集合を持つ特異点解消を得る。これに、右図のように貼り合わせを行い、楕円曲線の退化を得る。よって、$p_e(\mathbb{C}^2,o,x^2+y^3)=1$.

例 2. Let $(X,o)=\{x^2+y^3+z^5=0\}$ とする。これは E_8 型の有理 2 重点。計算で $p_e(X,o,z)=1$ and $p_e(X,o,y)=2$ and $p_e(X,o,x)=4$ であることがすぐ分かる。次のような具合になる。



次のような $p_e(X,o)$ の評価式が得られる。

定理 2. $p_f(X,o)\leqq p_e(X,o)\leqq p_a(\mathbb{M}_X)+mult(X,o)-1$.

ただし、$p_f(X,o)$ は基本サイクルの算術種数、$mult(X,o)$ は重複度で、どちらも特異点の解析不変量。

定理 3. $(X,o)=\{z^n=f(x,y)\}$ なる正規超曲面特異点について、

$$p_e(X,o,z)=p_e(\mathbb{C}^2,o,f)=\frac{\mu(f)-r+1}{2},$$

ただし、$\mu(f)$ と r は、各々平面曲線 $C=\{f=0\}$ の原点での Milnor 数と既約成分の個数。

系 4. $(X,o)=\{x^a+y^b+z^c=0\}$ なる超曲面特異点について、

$$p_e(X,o,x)=\frac{(b-1)(c-1)-g.c.d.(b,c)+1}{2},$$

上式の右辺は、[2] において c の値が十分大のときに見いだされたものである。

参考文献

[1]. U. Karras, On pencils of curves and deformations of minimally elliptic singularities, Math. Ann., 247 (1980), 43-65.

[2]. T. Tomaru, On Gorenstein surface singularities with fundamental genus $p_f \geqq 2$ which satisfy some minimality conditions, Pacific J. Math., 170 (1995), 271-295.

[3]. T.Tomaru, On Kodaira singularities defined by $z^n=f(x,y)$. Math.Z., 236 (2001),133-149.

[4]. T.Tomaru, Pencil genus of normal surface singularities.(Preprint).

28 ※印は本会で記入

※番号	題目	正規2次元特異点の巡回被覆として得られる Kodaira 特異点

氏名	都丸 正	所属	群馬大学 医学部

種数 g のコンパクト代数曲線の退化族 $p: S \to \Delta$ を考える。その時、その特異ファイバーの非特異点（その support の非特異点で係数 $=1$ の成分上の点）を何個か選び、それらを blowing-up しておく。そのとき、元の特異ファイバーの stirict transform をつぶして得られる特異点を Kodaira 特異点という。このとき、以下のような事が言える。

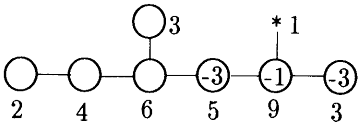
$(Y, o) \subset (\mathbb{C}^k, o)$ を正規2次元特異点、$f \in \mathfrak{m}_{Y,o}$ を被約な元とする。(X, o) を $z^n = f(x_1, \cdots, z_k)$ で与えられる n-cyclic covering of (Y, o) とする。このとき、(X, o) は正規特異点となる（泊昌孝ー渡辺敬一)。

定理 1. $\varphi: (\tilde{Y}, E) \longrightarrow (Y, o)$ を $(f \circ \varphi)_{\tilde{Y}} = \sum_{i=1}^{r} f_i E_i + \sum_{j=1}^{s} C_j$ が単純正規交叉因子になるような、特異点解消とする。ただし、$\sum_{j=1}^{s} C_j$ は例外集合の外側の部分をあらわす。ここで、$N = max\{f_{i,j} | E_{i,j} C_j \neq 0\}$ として、$n \geqq N$ とすると、次が言える。

(i) (X, o) は種数 $p_e(Y, o, f)$ のコンパクト代数曲線の退化族に付随した Kodaira 特異点である。ここで、z が退化族を与える関数となる。

(ii) $-\mathbb{Z}_X^2 = \sum_{C_j \cap E \neq \emptyset} a_j$。ただし、$\mathbb{Z}_X$ は最小特異点解消上の基本サイクル。

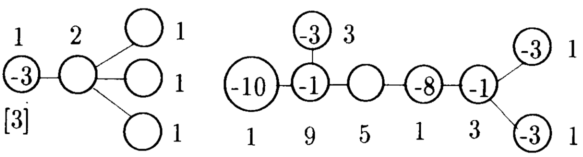
Example 1. $(Y, o) = \{z^3 = (x + y^2)(x + y^3)\} \subset (\mathbb{C}^3, o)$ とすると、これは E_6 型の有理2重点である。x は $\mathcal{O}_{Y,o}$ の被約な元である。これを特異点解消空間に引き上げて、それが単純正規交叉になるようなものを求めると、次のようになる。



ここで、*strict transform を意味する。よって、$p_e(Y, o, x) = 4$。

(i) $(X, o) = \{z^3 = (x^n + y^2)(x^n + y^3)\} \subset (\mathbb{C}^3, o)$ （$n \geqq 2$）とすると、(X, o) は $n \geqq 9$ について、Kodaira 特異点となる。$n = 9, 10$ のとき、最小特異点解消上の因子 (x) は次のようになる。

$n = 9$ $n = 10$



系 2. $(X,o)=\{z^n=f(x,y)\}$ を正規超曲面特異点とすると、十分に大きな n について次が言える。(X,o) は種数 $\dfrac{\mu(f)-r+1}{2}$ のコンパクト代数曲線の退化族に付随した Kodaira 特異点で、$\mathbb{Z}_X^2=-r$ を満たす。ただし、$\mu(f)$ と r は、各々平面曲線 $C=\{f=0\}$ の原点での Milnor 数と既約成分の個数。

種数 g のコンパクト代数曲線の退化族 $p:S\to\Delta$ を考える。その時、その特異ファイバーの非特異点（その support の非特異点で係数 = 1 の成分上の点）を何個か選び、それらを blowing-up しておく。そのとき、元の特異ファイバーの stirict transform をつぶして得られる特異点を Kodaira 特異点という。このとき、以下のような事が言える。

$(Y,o)\subset(\mathbb{C}^k,o)$ を Kodaira 特異点、$f\in \mathfrak{m}_{Y,o}$ を被約な元とする。(X,o) を $z^n=f(x_1,\cdots,z_k)$ で与えられる n-cyclic covering of (Y,o) とする。

定理 3. $\varphi:(\tilde{Y},E)\longrightarrow(Y,o)$ を $(f\circ\varphi)_{\tilde{Y}}=\sum_{i=1}^{r}f_iE_i+\sum_{j=1}^{s}e_iC_j$ が単純正規交叉因子になるような、特異点解消とする。ただし、$\sum_{j=1}^{s}C_j$ は例外集合の外側の部分をあらわす。このとき、n は $Z_E\cdot E_i<0$ なるなる i について、$Coeff_{E_i}(f\circ\sigma)$ の約数とすると次が言える。

(i) (X,o) は種数 $1+\dfrac{1}{2}\{2(g_o-1)+\sum_{i=1}^{s}d_j\}$ のコンパクト代数曲線の退化族に付随した Kodaira 特異点である。

(ii) $\mathbb{Z}_X^2=\mathbb{Z}_Y^2$.

系 4. $(X,o)=\{z^n=f(x,y)\}$ を正規超曲面特異点とすると、n は $ord(f)$ の約数とすると、(X,o) は種数 $\dfrac{(n-1)(ord(f)-2)}{2}$ のコンパクト代数曲線の退化族に付随した Kodaira 特異点で、$\mathbb{Z}_X^2=-n$ を満たす。

参考文献

[1]. T.Tomaru, Pencil genus of normal surface singularities.(Preprint).

29 ※印は本会で記

※番号	題	2次元巡回商特異点の Pinkham-Demazure 構成.

氏名 都丸 正　　所属 群馬大学 医学部

$\mathbb{C}^*$-作用を持つ2次元正規特異点については、Orlik-Wagreich による研究を経て、H.Pinkham [3] がその特異点のアフン環（次数付き環）をある代数曲線上の $\mathbb{Q}$ 係数因子を係数にもつ0次コホモロジー群を元に構成した。これは、Demazure [2] により一般の次元の場合の正規次数付き環も代数多様体上の $\mathbb{Q}$ 係数因子を用いて同様な構成が可能な事が指摘された。その後、渡辺敬一氏 [6] により、正規次数付き環について、上記の構成を Pinkham-Demazure 構成（または Demazure 構成）と呼び、この言葉をもちいて、その標準加群を求めるとともに、いつ Gorenstein 環になるかの判定条件等基本的事柄を示した。ところで、2次元特異点の Pinkham-Demazure 構成 [*] では2次元巡回商特異点は部品として使われるだけで、2次元巡回商特異点の同様な構成には言及していない。一方、2次元巡回商特異点は2変数収束巾級数環 $\mathbb{C}\{x, y\}$ において、変数 x, y に適当に重みを付けることで、可算個の次数付き環の構造が入ることが知られている。この発表では、このような可算個の次数付き環についてもすべて、$\mathbb{P}^1$ 上の適当な $\mathbb{Q}$ 係数因子を考えることで構成出来ることをが可能なことを報告する。

n, q を互いに素な自然数で $1 \leqq q < n$ を満たすとする。G を $[e_n, e_n^q] = \begin{pmatrix} e_n & 0 \\ 0 & e_n^q \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ で生成される巡回群とする。ただし、$e_n = exp(\frac{2\pi i}{n})$. G の通常の作用で $\mathbb{C}^2$ を割って出来る商特異点 $(\mathbb{C}^2/G, \{0\})$ を $C_{n,q}$ と書く。この特異点解消は次のグラフで表される。$-b_1 \quad -b_2 \quad \cdots \quad -b_k$ ここで、

$$\frac{n}{q} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_k}}} \quad (:= [[b_1, \cdots, b_k]])$$

そして $b_i \geqq 2$. いま、r, s を互いに素な自然数とする。$deg(u) = r$、$deg(v) = s$ とすることで、$deg(u^i v^j) = ri + sj$ として $\mathbb{C}[u, v]$ に、さらに、G による不変式環 $\mathbb{C}[u, v]^G$ に次数付き環の構造が入る。

定義1. $\mathbb{N}$ 非負整数全体とする。$\Gamma \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ と、Γ の元の次数、正整数 μ と λ を次のように定義する。:

$\Gamma = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i + qj \equiv 0 \ (n)\}$,

$(i, j) \in \Gamma$ について、$deg(i, j) = ri + sj$

$\mu = g.c.d.(n, qr - s)$、$\lambda = \frac{n}{\mu}$. このとき、μ は $max\{c \in \mathbb{N} \mid \ deg(i, j)$ is divisible by c for any $(i, j) \in \Gamma\}$. と一致する。よって、$R = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R_k$ 、$R_k = \bigoplus_{ri+sj=k, i+qj\equiv 0(n)} \mathbb{C}u^i v^j$ とおくと、$R_k = 0$ （$k \not\equiv 0$ (μ) ）となる。よって、次の環を考える。

$$R_{r,s} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R_k, \text{ where } R_k = \bigoplus_{ri+sj=\mu k, i+qj\equiv 0(n)} \mathbb{C}u^i v^j.$$

$q'q \equiv 1 (n)$

いま、α_1, α_2 を次の関係から決まる整数とする。

$$\alpha_1(\frac{qr-s}{\mu}) \equiv 1 \ (\lambda r) \text{ and } 0 < \alpha_1 < \lambda r,$$
$$\alpha_2(\frac{q's-r}{\mu}) \equiv 1 \ (\lambda s) \text{ and } 0 < \alpha_2 < \lambda s.$$

さらに、$b = \frac{\mu}{\lambda rs} + \frac{\alpha_1}{\lambda r} + \frac{\alpha_2}{\lambda s}$ とすると、これは整数になることが示せる。

定義 2. $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{Q}$ 因子 $D_{r,s}$ と $\mathbb{Z}$ 因子 $D_{r,s}^{(k)}$ を次で定義する。

$$D_{r,s} = bP_0 - \frac{\alpha_1}{\lambda r}P_1 - \frac{\alpha_2}{\lambda s}P_2 \text{ and } D_{r,s}^{(k)} = kbP_0 - \{\frac{\alpha_1 k}{\lambda r}\}P_1 - \{\frac{\alpha_2 k}{\lambda s}\}P_2$$

ただし、$k \in \mathbb{N}_o$ で、$P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{P}^1$. ここで、次の次数付き環を考える。

$$R(D_{r,s}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D_{r,s}^{(k)})) \cdot t^k.$$

定理 3. $R_{r,s}$ と $R(D_{r,s})$ は次数付き環として同型である。

いくつかの具体例を講演で示す。

REFERENCES

[1]. M. Demazure, Anneaux gradues normaux, in Seminaire Demazure-Giraud -Teissier, Singularites des surfaces, Ecole Polytechnique, 1979.

[2]. P. Orlik and P. Wagreich, Singularities of Algebraic Surface with $\mathbb{C}^*$-action, Math. Ann., 193 (1971), 121-135.

[3]. H. Pinkham, Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Math. Ann., 227 (1977), 183-193.

[4]. T. Tomaru, Cyclic quotient of 2-dimensional quasi-homogeneous hypersurface singularities. Math. Z., 210 (1992), 225-244.

[5]. T. Tomaru, Pinkham-Demazure for 2-dimensional cyclic quotient singularities (to appear in Tsukuba J.Math.)

[6]. K-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya Math. J., 83 (1981),203-211.

20

日 本 数 学 会 25×20=500

特別講演

非 Stein 空間上の正則アフィン束

阿部 誠（大島商船高等専門学校）

考察する複素空間はつねに被約かつ第2可算と仮定する．複素空間 M 上の $\mathbb{C}^r$ をファイバーに持つ局所自明正則ファイバー束 $\pi : E \to M$ を考えるとき，M の開被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ と局所自明化の系 $(\pi, t_i) : \pi^{-1}(V_i) \tilde{\to} V_i \times \mathbb{C}^r, i \in I,$ が存在する．ベクトル値関数 t_i を E の V_i 上での**ファイバー座標** (fiber coordinate) と呼ぶ．$\pi : E \to M$ あるいは単に E が M 上の**正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束** (holomorphic affine $\mathbb{C}^r$-bundle) であるとは，任意の添え字 $i, j \in I$ に対し，正則写像 $a_{ij} : V_i \cap V_j \to GL(r, \mathbb{C})$ と $b_{ij} : V_i \cap V_j \to \mathbb{C}^r$ が存在して，$\pi^{-1}(V_i \cap V_j)$ 上で $t_i = (a_{ij} \circ \pi) \cdot t_j + b_{ij} \circ \pi$ が成り立つことである (cf. [1, 2, 3, 5])．このとき，コチェイン $\{a_{ij}\} \in Z^1(\{V_i\}_{i\in I}, \mathscr{A}_{GL(r,\mathbb{C})})$ によって定義される M 上の階数 r の正則ベクトル束 L を E の**線形部分** (linear part) と呼ぶ．ここで，$\mathscr{A}_{GL(r,\mathbb{C})}$ は一般線形群 $GL(r, \mathbb{C})$ に値を持つ正則写像の芽のなす M 上の層である．コチェイン $\left\{ \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in Z^1(\{V_i\}_{i\in I}, \mathscr{A}_{GL(r+1,\mathbb{C})})$ によって定義される M 上の階数 $r+1$ の正則ベクトル束 $\tilde{E}$ を E に付随する正則ベクトル束と呼ぶ．正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束 E が**準自明** (quasi-trivial) とは，$\tilde{E}$ が自明なことである．

$\pi_k : E_k \to M, k = 1, 2,$ を M 上の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束とする．$\pi_1 = \pi_2 \circ \lambda$ を満たす両正則写像 $\lambda : E_1 \to E_2$ が存在して，任意の $p \in M$ に対し，誘導された写像 $\lambda_p : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(p)$ が $\mathbb{C}^r$ のアフィン同型を与えるとき，E_1 と E_2 は**同型** (isomorphic) であるという．

補題 1. E を複素空間 M 上の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束，L を E の線形部分とするとき，次の 3 条件は同値である．

(1) E は大域的正則切断を持つ．

(2) E は L と同型である．

(3) E は M 上の階数 r の正則ベクトル束と同型である．

補題 2 (Lemma 1 of [3])．複素空間 M について，条件 $H^1(M, \mathscr{O}) = 0$ と $H^1(M, \mathscr{A}_{GL(r,\mathbb{C})}) = 0$ が満たされるとする．このとき，M 上の任意の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束 E は自明な階数 r の正則ベクトル束 $M \times \mathbb{C}^r$ と同型である．

複素空間 M 上の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束 $\pi : E \to M$ の全空間 E は，いかなる条件の下で Stein になるかという問題を考えたい．

先ず，底空間 M が Stein ならば，E は Stein である（Lemma 2 of [2]）．正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束の構造群は $GL(n,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^r \cong \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid g_{11} \in GL(r,\mathbb{C}), g_{12} \in \mathbb{C}^r \right\}$ なので，M が特異点を持たない場合，このことは Serre [16, p. 68] の問題に関する Matsushima-Morimoto [12] の定理，すなわち，底空間とファイバーが Stein 多様体，構造群が連結複素 Lie 群であるような任意の局所自明正則ファイバー束の全空間は Stein であるという事実の直接の結果である．また，$r = 1$ の場合は，Mok [13, 14] の定理，すなわち，底空間が Stein 空間，ファイバーが開 Riemann 面であるような任意の局所自明正則ファイバー束の全空間は Stein であるという事実の特別な場合でもある．

次に，底空間 M が Stein でない場合を考える．仮に，E が M 上の階数 r のベクトル束に同型であれば，大域的切断 $\mathfrak{s} : M \to E$ が存在する．もし E が Stein ならば，切断面 $\mathfrak{s}(M)$ も Stein であるが，$\mathfrak{s}$ によって M は $\mathfrak{s}(M)$ と正則同値なので，これは矛盾である．したがって，Stein でない複素空間 M 上の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束 E が Stein であるとすれば，少なくともそれはベクトル束に同型ではない．

実際に，底空間 M が Stein でなくても，全空間 E が Stein になることがある (cf. [1, 8, 9])．例えば，特殊線形群 $SL(2,\mathbb{C})$ は Stein 多様体であるが，$\mathbb{C}^2$ 内の Stein でない領域 $X := \mathbb{C}^2 - 0$ 上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束として実現される．ただし，$0 := (0,0)$ である．任意の $z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ に対し，$\pi(z) := (z_{11}, z_{21})$ とおくことにより，射影 $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to X$ が定義される．

Fornæss-Narasimhan [7] の方法に基づいて，次の定理 3 が証明される．また，定理 3 を用いて，ある種の必ずしも Stein でない複素空間上の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束の全空間が Stein であるための条件を与える定理 4，5 が導かれる．

定理 3（Theorem 3 of [2]）．有限次元複素空間 E について，次の 2 条件が満たされるとする．

(i) $\dim H^1(E, \mathscr{O}) < +\infty$.

(ii) 正則関数 $f \in \mathscr{O}(E)$ が存在して，任意の $t \in \mathbb{C}$ に対し，E の解析的集合 $f^{-1}(t)$ が Stein である．

このとき，E は Stein である．

定理 4 (Theorem 4 of [2]). M を有限次元複素空間とし，正則関数 $f \in \mathscr{O}(M)$ が存在して，任意の $t \in \mathbb{C}$ に対し，M の解析的集合 $f^{-1}(t)$ が Stein であるとする（例えば，M が 2 次元 K-完備複素空間ならば，この条件が満たされる）．このとき，M 上の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束 E は，条件 $\dim H^1(E,\mathscr{O}) < +\infty$ を満たせば，Stein である．

定理 5 (Theorem 5 of [2]). M を K-完備複素空間とし，位数 $\leqq 2$ の M の Stein 開被覆 $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在するものとする（例えば，S を正規 Stein 空間，f_1 と f_2 を S 上の定数でない正則関数として，$M := S - \{f_1 = f_2 = 0\}$ とおけば，この条件が満たされる）．このとき，M 上の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束 E は，条件 $\dim H^1(E,\mathscr{O}) < +\infty$ を満たせば，Stein である．

前述の例 $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to X$ は定理 4, 5 で説明される状況に含まれる．しかし，一般には，複素空間 M 上の正則アフィン $\mathbb{C}^r$-束 E が与えられたとき，コホモロジー群に関する条件 $\dim H^1(E,\mathscr{O}) < +\infty$ を満たすかどうかを調べることは容易でないと思われる．

以下では，$r = 1$ の場合を考える．一般に，Stein 空間 S から余次元が 2 以上の点を含む解析的集合 A を除いて得られる複素空間 $M := S - A$ は Stein ではない．前述の例 $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to X$ は次の定理 6 で説明される状況にも含まれる．

定理 6 (Theorem of [1]). S を正規 Stein 空間，A を S の 2 余次元既約解析的集合とし，$M := S - A$ とおく．M 上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束 $\pi : E \to M$ について，次の 2 条件が満たされるとする．

(i) E は M 上の正則直線束と同型でない．

(ii) 任意の $p \in A$ に対し，p の近傍 V_p が存在して，誘導される $V_p - A$ 上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束 $\pi : \pi^{-1}(V_p - A) \to V_p - A$ が準自明である．

このとき，E は Stein である．

準自明性に関する定理 6 の条件 (ii) は，任意の $p \in A$ に対し，p の近傍 V_p が存在して，$\tilde{E}$ の曲率が $V_p - A$ 上で 2 乗可積分ならば満たされる (Bando [6])．また，$\tilde{E}$ が M 上で半正ならば満たされる (Siu [18])．ただし，$\tilde{E}$ は E に付随する M 上の階数 2 の正則ベクトル束である．なお，複素多様体から余次元が 3 以上の解析的集合を除いて得られる複素多様体上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束について，次の命題 7 が成り立つ．

命題 7 (Proposition 5 of [1]). S を複素多様体, A を $\mathrm{codim}_p A \geqq 3$ を満たす点 $p \in A$ が存在するような S の解析的集合とし, $M := S - A$ とおく. このとき, M 上の任意の正則アフィン $\mathbb{C}$-束 E について, E は Stein でない.

以下では, $\mathbb{C}^2$ から原点 0 を除いて得られる領域 $X := \mathbb{C}^2 - 0$ 上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束に限定して考察する. $\mathbb{C}^2$ の座標を (x,y) と書く. $U_1 := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} = \{x \neq 0\}$, $U_2 := \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* = \{y \neq 0\}$ とおくと, $\{U_1, U_2\}$ は X の Stein 開被覆であり, $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{C}^*)^2$. $\pi : E \to X$ を X 上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束とする. 各 $i = 1, 2$ について, $H^1(U_i, \mathscr{O}) = 0$ と $H^1(U_i, \mathscr{O}^*) = 0$ が成り立つので, 補題 2 より, 局所自明化 $(\pi, t_i) : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, が存在する. このとき, 正則関数の対 $(a,b) \in \mathscr{O}^*((\mathbb{C}^*)^2) \times \mathscr{O}((\mathbb{C}^*)^2)$ が存在して, $\pi^{-1}((\mathbb{C}^*)^2)$ 上で, $t_1 = (a \circ \pi) \cdot t_2 + b \circ \pi$ が成り立つ. 正則アフィン $\mathbb{C}$-束 E は, 次の命題 8 の同値な条件の一方を満たすとき, **代数的** (algebraic) と呼ばれる (cf. [3, 4]).

命題 8 (Proposition 2 of [3]). $\pi : E \to X$ を $X = \mathbb{C}^2 - 0$ 上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束とする. このとき, 次の 2 条件は同値である.

(1) E の U_i 上でのファイバー座標 t_i, $i = 1, 2$, を選んで, 次のように書くことができる. $\pi^{-1}((\mathbb{C}^*)^2)$ 上で $t_1 = (a \circ \pi) \cdot t_2 + b \circ \pi$, $a \in \mathscr{O}^*((\mathbb{C}^*)^2) \cap \mathscr{M}(\mathbb{C}^2)$, $b \in \mathscr{O}((\mathbb{C}^*)^2) \cap \mathscr{M}(\mathbb{C}^2)$.

(2) E の U_i 上でのファイバー座標 t_i, $i = 1, 2$, を選んで, 次のように書くことができる. $\pi^{-1}((\mathbb{C}^*)^2)$ 上で $t_1 = t_2 + g \circ \pi$, $g(x,y) = R(x,y)/(x^m y^n)$, $R \in \mathbb{C}[x,y]$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\deg_x R < m$, $\deg_y R < n$, $R = 0$ または R は $\mathbb{C}[x,y]$ において x, y を因数として持たない.

定義により, $X = \mathbb{C}^2 - 0$ 上の任意の代数的アフィン $\mathbb{C}$-束の線形部分は自明である. しかし, X 上の任意の正則アフィン $\mathbb{C}$-束の線形部分が自明というわけではない. 例えば, $\mathrm{e}^{1/(xy)} \in \mathscr{O}^*((\mathbb{C}^*)^2)$ を変換関数とする X 上の正則直線束は自明ではない (Lemma 1 of Kajiwara [11], Serre [17, p. 372], Hartshorne [10, p. 230]).

特殊線形群 $SL(2,\mathbb{C})$ は $X = \mathbb{C}^2 - 0$ 上の自明でない代数的アフィン $\mathbb{C}$-束として実現される最も簡単な複素多様体である. 射影は $\pi : SL(2,\mathbb{C}) \to X$, $z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \mapsto (z_{11}, z_{21})$. 各 $i = 1, 2$ について, $t_i(z) := -z_{i2}/z_{i1}$, $z \in \pi^{-1}(U_i)$, は U_i 上のファイバー座標であり, $\pi^{-1}(U_1 \cap U_2)$ 上での座標変換の式は $t_1 = t_2 + 1/(xy)$.

補題 9 (Lemma 4 of [3]). $\pi : E \to X$ を $X = \mathbb{C}^2 - 0$ 上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束とする. E の U_i 上でのファイバー座標 t_i, $i = 1, 2$, を選んで, $\pi^{-1}((\mathbb{C}^*)^2)$ 上で $t_1 = t_2 + g \circ \pi$, $g(x,y) = R(x,y)/(x^m y^n)$, $R \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^2)$, $R \neq 0$, $m, n \geqq 0$ と書けると

き，次の 2 条件は同値である．

(1) $\mathbb{C}^2$ における 0 の近傍 W が存在して，誘導される $W-0$ 上の正則アフィン $\mathbb{C}$-束 $\pi:\pi^{-1}(W-0)\to W-0$ は準自明である．

(2) $\mathbb{C}^2$ における 0 の近傍 W と正則関数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,u,v\in\mathscr{O}(W)$ が存在して，W において $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^m\\y^n\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ かつ $\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{vmatrix}=R$.

補題 10 (Lemma 6 of [3])．任意の冪級数 $P, Q, R\in\mathbb{C}\{x,y\}$ に対し，$q\in\mathbb{N}$ と冪級数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,u,v\in\mathbb{C}\{s,y\}$ が存在して，$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(s^q,y)\\Q(s^q,y)\end{pmatrix}=R(s^q,y)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ かつ $\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{vmatrix}=R(s^q,y)$.

定理 6，補題 9，10 および Narasimhan [15] の定理を用いて，次の定理 11 が導かれる．

定理 11 (Theorem 7 of [3])．$\pi:E\to X$ を $X=\mathbb{C}^2-0$ 上の代数的アフィン $\mathbb{C}$-束とし，R を命題 8 の条件 (2) を満たす多項式とする．このとき，次の 3 条件は同値である．

(1) E は Stein である．

(2) E は自明な正則直線束 $X\times\mathbb{C}$ と同型でない．

(3) $R\neq 0$.

参考文献

[1] M. Abe, *Holomorphic affine bundles on the complement of an analytic set*, Math. Z. **229** (1998), 539–546.

[2] M. Abe, *Some results on the Steinness of the total space of a holomorphic affine $\mathbb{C}^r$-bundle*, Kyushu J. Math. **53** (1999), 395–406.

[3] M. Abe, *Holomorphic affine $\mathbb{C}$-bundles on the punctured complex affine plane*, Proceedings of the Third International Workshop on Real and Complex Analysis, Seoul, Korea, June 8–9, 2000 (Y. Mizuta, H. Kazama, M. Furushima, and S. Y. Lee, eds.), The Institute of Mathematical Sciences, Ewha Womans University, Seoul, 2000, pp. 71–74.

[4] M. Abe, *Steinness of the total space of a non-trivial algebraic affine $\mathbb{C}$-bundle on the punctured complex affine plane*, preprint.

[5] M. F. Atiyah, *Complex fiber bundles and ruled surfaces*, Proc. London Math. Soc. **3** (1955), 407–418.

[6] S. Bando, *Removable singularities for holomorphic vector bundles*, Tôhoku Math. J. **43** (1991), 61–67.

[7] J. E. Fornæss and R. Narasimhan, *The Levi problem on complex spaces with singularities*, Math. Ann. **248** (1980), 47–72.

[8] M. Furushima and N. Nakayama, *The family of lines on the Fano threefold* V_5, Nagoya Math. J. **116** (1989), 111–122.

[9] M. Furushima and N. Nakayama, *A new construction of a compactfication of* $\mathbb{C}^3$, Tôhoku Math. J. **41** (1989), 543–560.

[10] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math. 156, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[11] J. Kajiwara, *On Thullen's example of a Cousin-II domains*, Sci. Rep. Kanazawa Univ. **9** (1964), 1–8.

[12] Y. Matsushima and A. Morimoto, *Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein*, Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 137–155.

[13] N. Mok, *Le problème de Serre pour les surfaces de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **290** (1980), 179–180.

[14] N. Mok, *The Serre problem on Riemann surfaces*, Math. Ann. **258** (1981), 145–168.

[15] R. Narasimhan, *A note on Stein spaces and their normalizations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **16** (1962), 327–333.

[16] J.-P. Serre, *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables tenu à Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, Centre belge de Recherches mathématiques, Librairie universitaire, Louvain, 1954, pp. 57–68.

[17] J.-P. Serre, *Prolongement de faisceaux analytiques cohérents*, Ann. Inst. Fourier **16** (1966), 363–374.

[18] Y.-T. Siu, *A Thullen type extension theorem for positive holomorphic vector bundles*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 775–776.

Makoto Abe
Oshima National College of Maritime Technology
Komatsu, Oshima-cho, Oshima-gun, Yamaguchi 742-2193, Japan
e-mail address: abe@c.oshima-k.ac.jp