日　本　数　学　会

２００１年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

２００１年３月

於　慶応義塾大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務

   (1) 函数論分科会評議員候補者を選出する．

   (2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．

   (3) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．

   (4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．

   (5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．

   (6) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．

   (7) 次期委員会委員候補者の推薦．

   (8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期

   (1) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる．

   (2) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．

   (3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．

      (i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い， その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．

      (ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決

   (1) 委員会は評議員が召集する．

   (2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．

   (3) 年３回 (春季， シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．

   (4) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務

   (1) 委員会の司会をする．

   (2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．

   (3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．

   (4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

第IX会場　函数論

3月27日（火）

9:30~12:00

1	西本　勝之	(デカルト出版)	* On the Prime Numbers (II) (The Structure of Prime Numbers)	15
2	西本　勝之	(デカルト出版)	* On the Prime Numbers (III) (The Structure of Prime Numbers)	15
3	尾和　重義 M.Obradovič	(近畿大理工) (ベオグラード大)	* Notes on analytic functions of non-Bazilevič type	15
4	大野　修一	(日本工大工)	* H^∞ と Bloch 空間の間の荷重合成作用素	15
5	斎藤　三郎	(群馬大工)	* Representations of meromorphic functions in terms of Laurent expansions and partial boundary values	15
6	天野　一男 M. Asaduzzaman 斎藤　三郎	(群馬大工) (群馬大工) (群馬大工)	* Representations of analytic functions on typical domains in terms of local values and truncation error estimates	15
7	柴　雅和	(広島大工)	理想境界を越える解析接続	15
8	戸田　暢茂	(名工大)	* On the defect relation for exponential curves	15

3月28日（水）

9:30~11:30

9	柴田　敬一	(国際自然科学研)	Dirichlet 積分の停留点について (続報)	15
10	二村　俊英 岸　恭子 水田　義弘	(広島大理) (広島大理) (広島大総合科)	sub-多調和関数に対する Bôcher 型理論について	15
11	水田　義弘 下村　哲	(広島大総合科) (広島大教育)	On semi-fine limits at infinity for Riesz potentials and monotone BLD functions	15
12	二村　俊英 水田　義弘	(広島大理) (広島大総合科)	s-John 領域上の weakly monotone BLD 関数の境界挙動	15
13	柳下　稔 宮本　育子 吉田　英信	(千葉大自然) (千葉大理) (千葉大自然)	コーン内の minimally thin set のボイリング-ダールベルグ-ショグレン型の定理	15
14	中井　三留 多田　俊政	(名工大) (大同工大)	ハインズ型リーマン面の調和次元	15
15	渡辺　ヒサ子	(お茶の水女大人間文化)	* フラクタルな境界上のベゾフノルムの内部領域による評価とその応用	15

14:15~15:10

16	松崎　克彦	(お茶の水女大理)	Indecomposable continua and the limit sets of Kleinian groups	15
17	松崎　克彦	(お茶の水女大理)	Patterson–Sullivan 測度に関するクライン群の作用の保存性について	15

18 宮地　秀樹　(阪　市　大　理) * Similarities at one-dimensional Bers boundaries ······ 15

15:20~16:20　特別講演

糸　健太郎 (名 大 多 元 数 理) * 曲面上の射影構造と擬フックス群空間の自己接触について

3月29日 (木)

10:00~11:30

19 春日　一浩　(新 潟 大 自 然) * There are no codimension 1 linear isometries on the ball and polydisk algebras ······ 15

20 足立　幸信　* Nondegenerate entire maps of $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2$ (II) ······ 15

21 金京　南　(九　大　数　理) * 線形化不可能性とコホモロジーの非ハウスドルフ性 ······ 15

22 田島　慎一　(新　潟　大　工) * 2 変数 unimodal 例外型 singularity に付随する局所コホモロジー類の計算 ······ 15
中村　弥生　(お茶の水女大大学院)

23 田島　慎一　(新　潟　大　工) * 多変数留数計算とホロノミックな D-加群 III
— アルゴリズムの局所化 — ······ 15

14:15~15:15　特別講演

相原　善弘　(沼　津　高　専) * 有理型写像の一意性問題

1. On the Prime Numbers (II) (The Structure of Prime Numbers)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In the previous paper, some relationships of the prime numbers and polynomials

$$\varphi(2, m) = \sum_{k=0}^{m} 2^k \qquad (m \in \mathbf{Z}^+)$$

are reported together with some illustrative examples (Tables 1 ~ 3) for $m = 1 \sim 7$.

In this article , the illustrative examples (Tables 4 ~ 5) for $m = 8$ and 9 are reported.

Theorem 1. We have

(i) $$r_m < r_{m+1} \quad \text{and} \quad s_m < s_{m+1} , \tag{1}$$

(ii) $$r_m < s_m \tag{2}$$

and

(iii) $$q_m = r_m / s_m < 1 \quad \text{and} \quad q_m > q_{m+1} , \tag{3}$$

for $m = 4 \sim 10$, where

s_m ; Element number of the set $\{\varphi^*(2, m)\}$ for a m ,

and

r_m ; Prime element number in the set $\{\varphi^*(2, m)\}$ for a m .

References

[1] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.18, Nov. (2000),111 - 117.

[2] T. Kitamura ; Introduction to the number theory (1965), Maki -shoten, Japan.

[3] S. J. Patterson ; An introduction to the theory of the Riemann Zeta -Function (1988), Cambridge.

2. On the Prime Numbers (III)
(The Structure of Prime Numbers)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this paper,

$$P(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p_k)^x} \qquad (1 < x \in \boldsymbol{R}^+)$$

is discussed, where p_k ($k = 1, 2, \cdots$) is the prime of order number k .

That is,

$p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7, \cdots\cdots$, and so on (Refer to Tables in [1] and [2]).

References

[1] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.18, Nov. (2000),111 - 117.

[2] K. Nishimoto ; On the Prime Numbers (I I) (The Structure of Prime Numbers), J. Frac. Calc. Vol.19, May (2001),89 - 98.

[3] K. Nishimoto ; Some integral forms for Riemann's zeta function, J. Frac.Calc. Vol.17, May (2000),115 - 121.

[4] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev ; Integrals and Series, Vol. 1, (1986), Gordon and Breach. (Originaly published in Russian in 1981, by Nauka.

[5] S. J. Patterson ; An introduction to the theory of the Riemann Zeta -Function (1988), Cambridge.

[6] T. Kitamura ; Introduction to the number theory (1965), Maki -shoten, Japan.

3. Notes on analytic functions of non-Bazilević type

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Milutin Obradović (University of Belgrade)

Let $\mathcal{A}_n$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

which are analytic in the open unit disk $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let D_α denote the operator defined by

$$D_\alpha = 1 + \alpha_1 z \frac{d}{dz} + \alpha_2 z^2 \frac{d^2}{dz^2} + \cdots + \alpha_k z^k \frac{d^k}{dz^k},$$

where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$. For $0 < \mu < 1$ and $0 < \lambda \leqq 1$, we introduce the subclass $\mathcal{B}_n(\mu, \alpha, \lambda)$ of $\mathcal{A}_n$ by

$$\mathcal{B}_n(\mu, \alpha, \lambda) = \left\{ f \in \mathcal{A}_n : \left| D_\alpha \left\{ f'(z) \left(\frac{z}{f(z)} \right)^{1+\mu} \right\} - 1 \right| < \lambda, z \in U \right\}.$$

Further, for $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$, the polynomial $p_\alpha(x)$ is given by

$$p_\alpha(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x(x-1) + \cdots + \alpha_k x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

Theotem 1. *If $f(z) \in \mathcal{B}_n(\mu, \alpha, \lambda)$ with $(n-\mu)p_\alpha(n) - \lambda n > 0$ and $0 < \mu < 1$, then*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \beta \qquad (z \in U),$$

where $\dfrac{\lambda n}{(n-\mu)p_\alpha(n) - \lambda n} \leqq \beta$, *and*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1 \qquad (z \in U),$$

where $\lambda \leqq p_\alpha(n)\left(\dfrac{n-\mu}{n+\mu}\right)$.

Theorem 2. *Let $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfy*

$$\left|f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1+\mu} - 1\right| < \lambda \quad (z \in U)$$

for $0 < \mu < 1, 0 < \lambda \leqq 1$, and $n > \mu(1+\lambda)$. Then, if $\dfrac{\lambda n}{n - \mu - \lambda\mu} \leqq \beta$,

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \beta \qquad (z \in U),$$

and if $\lambda \leqq \dfrac{n-\mu}{\sqrt{(n-\mu)^2 + \mu^2}}$.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (z \in U).$$

4. H^∞ と Bloch 空間の間の荷重合成作用素

大野　修一　　　日本工業大・工学部

[1] H^∞ を単位円板 D 上の有界な解析関数からなる Hardy 空間, $\mathcal{B}$ を

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)|<\infty$$

を満たす D 上の解析関数 f からなる Bloch 空間とする. また, $\mathcal{B}_o$ を $f\in\mathcal{B}$ で

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|f'(z)|=0$$

を満たすものとする. この空間は little Bloch 空間と呼ばれ, norm

$$\|f\|_{\mathcal{B}}=|f(0)|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)|$$

により, $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}_o$ は Banach 空間となる. また, $H^\infty\subset\mathcal{B}$ である.

いま, u を D 上の解析関数, φ を D から D への解析的な写像とする. このとき, D 上の解析関数 f に対して,

$$uC_\varphi f=u(f\circ\varphi)$$

と定義すると, uC_φ は荷重合成作用素と呼ばれる線形作用素となる. 荷重合成作用素は乗法作用素と合成作用素の拡張とみなせる. これら2つの作用素については, D 上のいろいろな関数空間において, その関数解析的性質が, いかに u,φ の持つ関数的性質で特徴付けられるか, という問題を中心に, ここ３０年間活発に研究されてきている. ここでは,H^∞ と Bloch,little Bloch 空間の間の荷重合成作用素の有界性と compact 性を特徴付ける.

[2] まず, Bloch,little Bloch 空間から H^∞ への作用素としての特徴付けをみる.

定理 1 次のことはすべて同値である：

(i) $uC_\varphi:\mathcal{B}\to H^\infty$ は有界である；

(ii) $uC_\varphi:\mathcal{B}\to H^\infty$ は *compact* である；

(iii) $uC_\varphi:\mathcal{B}_o\to H^\infty$ は有界である；

(iv) $uC_\varphi:\mathcal{B}_o\to H^\infty$ は *compact* である；

(v) $uC_\varphi : H^\infty \to H^\infty$ は compact である；

(vi) $u \in H^\infty$ でかつ，$|\varphi(z_n)| \to 1 (n \to \infty)$ であるような D の点列 $\{z_n\}$ に対して，$u(z_n) \to 0$.

[3] H^∞ から Bloch,little Bloch 空間への作用素としてみると，次のような結果が成り立つ．

定理 2 $uC_\varphi : H^\infty \to \mathcal{B}$ が有界であるための必要十分条件は次の 2 つの条件が成り立つことである：

(i) $u \in \mathcal{B}$；

(ii) $\sup\{((1-|z|^2)|u(z)\varphi'(z)|)/(1-|\varphi(z)|^2) : z \in D\} < \infty$.

定理 3 $uC_\varphi : H^\infty \to \mathcal{B}$ が有界であると仮定する．このとき，uC_φ が compact であるための必要十分条件は次の 2 つの条件が成り立つことである：

(i) $\lim_{|\varphi(z)| \to 1}(1-|z|^2)|u'(z)| = 0$;

(ii) $\lim_{|\varphi(z)| \to 1}((1-|z|^2)|u(z)\varphi'(z)|)/(1-|\varphi(z)|^2) = 0$.

定理 4 次のことはすべて同値である：

(i) $uC_\varphi : H^\infty \to \mathcal{B}_o$ は有界である；

(ii) $uC_\varphi : H^\infty \to \mathcal{B}_o$ は compact である；

(iii) $u \in \mathcal{B}_o$ でかつ，$\lim_{|z| \to 1}((1-|z|^2)|u(z)\varphi'(z)|)/(1-|\varphi(z)|^2) = 0$.

5. REPRESENTATIONS OF MEROMORPHIC FUNCTIONS IN TERMS OF LAURENT EXPANSIONS AND PARTIAL BOUNDARY VALUES

斎藤　三郎　（群馬大工）

We consider a meromorphic function f with an isolated singularity on any domain S on the complex Z plane. Without loss of generality we fix an isolated singular point of f as $0 \in S$. Then, for an annulus domain with centre 0, we have the Laurent expansion

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z^n, \quad \varepsilon < |Z| < \delta \tag{0.1}$$

where, for any analytic Jordan curve γ surrounding 0 on the annulus domain

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \zeta^{-n-1} d\zeta. \tag{0.2}$$

Our purpose in this paper is to represent $f(Z)$ for any regular point Z of f in terms of $\{a_n\}$ in some "good" way. For this purpose we shall use a conformal mapping from a doubly-connected domain on S onto an annulus domain. If 0 is a regular point of f, then we discussed a similar problem in [10], but the basic concept and results in [10] will be different from those in this paper. However, in the viewpoint of representations of meromorphic and analytic functions by using local data, this paper will give a generalized formula of [10] in a sense, since in the Laurent expansion (0.1) if $a_n = 0$ for $n < 0$ then we have a Taylor expansion in (0.1).

We have given the representations of meromorphic functions by using a Taylor expansion around a regular point and a Laurent expansion around an isolated singularity, respectively. So, we shall refer to a representation of meromorphic functions $f(Z)$ on S by using partial boundary values by using the Carleman's integral formula [4]. It seems that this formula is less familiar than the Carleman's estimate [4] based on the maximum principle.

References

1. K. Amano. *A bidirectional method for numerical conformal mapping based on the charge simulation method.* Journal of Information Processing, **14**(1991), 473–482.

2. _____. A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains. *J. of Computational and Applied Mathematics*, **53**(1994), 353–370.

3. _____. *A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains.* **19**(1998), 1169–1187.

4. T. Carleman. *Les fonctions quasi analytiques,* Gauthier-Villars, Paris, 1926, pp. 3-6.

5. P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol 1. John Wiley & Sons, New York, (1974).

6. _____. *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol 3. John Wiley & Sons, New York, (1993).

7. Z. Nehari. *Conformal Mapping.* McGraw Hill Book Company Inc., New York, (1952).

8. S. Saitoh. *Representations of inverse functions.* Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), 3633–3639.

9. _____. *Integral transforms, reproducing kernels and their applications.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, **369**. Addison Wesley Longman Limited, UK., (1997).

10. S. Saitoh and M. Mori. Representations of analytic functions in terms of local values by means of the Riemann mapping function. Complex Variables (to appear).

Department of Mathmatics, Faculty of Engineering, Gunma University, Kiryu 376-8515, Japan

E-mail address: `ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp`

6. Representations of Analytic Functions on Typical Domains in Terms of Local Values and Truncation Error Estimates

天野　一男　（群馬大工）
Md. Asaduzzaman（群馬大工）
斎藤　三郎（群馬大工）

For any analytic function f on a Riemann surface S, S. Saitoh and M. Mori([5]) gave a new and good formula representing f on a large simply-connected domain containing any given point $p \in S$ in terms of the Taylor coefficients of f around any fixed point $p_0 \in S$, by using some Riemann mapping function. In this paper, on typical simply-connected domains, concrete representation formulas and truncation error estimates in the representations by means of the Taylor series of f around p_0 are given.

Let D be a non-degenerate simply-connected domain on the complex $Z = X + iY$ plane and without loss of generality we assume that $0 \in D$. Let φ be a Riemann-mapping function of D satisfying

$$\varphi : D \to \Delta = \{|z| < 1\},$$
$$\varphi(0) = 0,$$

which is analytic on D and a one-to-one mapping from D onto Δ. Then, we set its inversion which is analytic on Δ as follows:

$$\varphi^{-1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \qquad \text{on} \quad \Delta \tag{1.1}$$

by the Taylor expansion around 0. In ([3], [4]), we in particular see that the Taylor coefficients $\{b_n\}$ are represented by the Riemann mapping function $z = \varphi(Z)$.

For any analytic function $f(Z)$ on D, we set the Taylor expansion of f around 0 as follows:

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n, \quad |Z| < \delta. \tag{1.2}$$

Then, from (1.1) and (1.2) we have

$$\begin{aligned} f(\varphi^{-1}(z)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m\Big)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{on} \quad \Delta, \end{aligned} \tag{1.3}$$

by the Taylor expansion of $f(\varphi^{-1})$ around $z = 0$. Then, $\{c_k\}$ are represented by the Takahasi-Mori algorithm in terms of $\{a_n\}$ and $\{b_m\}$.

Then, we obtain the representation formula of $f(Z)$ on D:

PROPOSITION 1.1([5]). *For any analytic function f(Z) on D, f(Z) is represented by*

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(Z)^k \quad on \quad D, \tag{1.4}$$

in terms of the Taylor coefficients $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ and using the Takahasi-Mori algorithm.

In Proposition 1.1, if the Taylor coefficients $\{b_n\}$ are concretely given and $\{c_k\}$ are calculated concretely in terms of $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$, then we can obtain the explicit representation formula (1.4). In this paper, on five typical domains we shall give concrete representation formulas (1.4). Furthermore, we shall consider the truncation error estimate in the representation (1.4) such that

$$\left| f(Z) - \sum_{n=0}^{m} c_n \varphi(Z)^n \right| \tag{1.5}$$

by means of the original Taylor expansion

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n||Z|^n. \tag{1.6}$$

These results will be very fundamental and applicable in many concrete problems. For example, see the real inversion formulas of the Laplace transform ([1], [4]) and the principle of telethoscope ([6]). At the same time, we see a deep and mysterious open problem in the Takahasi-Mori algorithm. We shall state this clearly in the last part of this paper.

References

1. Byun, D.-W., and Saitoh, S., *A real inversion formula for the Laplace transform*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **12** (1993), 597–603.
2. Mori, M., *Analytic continuation and accelerations of convergence of series*, RIMS Kokyuroku **1155** (2000), 104–119 (in Japanese).
3. Saitoh, S., *Representations of inverse functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3633–3639.
4. Saitoh, S., *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, **369**, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Addison Wesley Longman Limited, UK., 1997.
5. Saitoh, S., and Mori, M., *Representations of analytic functions in terms of local values by means of the Riemann mapping function*, Complex Variables (to appear).
6. Saitoh, S., *Representations of the solutions of partial differential equations of parabolic and hyperbolic types by means of time observations*, Applicable Analysis (to appear).
7. Takahashi, H., and Mori, M., *Accelerations of convergence of Taylor series by using variable transformations*, RIMS Kokyuroku **172** (1973), 78–87.
8. Takahashi, H., and Mori, M., *Analytic continuation of some special functions by variable transformation*, Japan J. Appl. Math. **1** (1984), 337–346.

7. 理想境界を越える解析接続

柴　雅　和　　　　　広島大学工学部

古典的に解析接続として知られたことは次のように定式化される：— 平面領域 G とその上の解析関数 f が与えられているときに，G を含む領域 $\tilde{G}$ とその上の解析関数 $\tilde{f}$ で $\tilde{G}$ 上で $\tilde{f}=f$ となるものを探せ．なお，ここでは解析関数という語を適当に広く解釈しておく．

いうまでもなく，G は $\tilde{G}$ の部分領域であり，G や $\tilde{G}$ は予め大きな領域 (多くの場合 Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$) の部分領域として考えられている．言い換えれば境界 ∂G の等角構造は (もしあるとすれば) 予め固定されている．しかしながら，解析関数の存在場としての領域あるいはもっと一般に Riemann 面の境界は，予め定まった等角構造をもつとは仮定しない方が自然である．実際，Riemann 写像定理やそれに類した定理は，後述するように，この事情を明らかにする結果である．これを踏まえて，

定義. Riemann 面 R とその上の解析的な微分 ψ について，もしも

$$\psi=\iota^*(\psi) \quad \text{on } R$$

満たす Riemann 面 $\tilde{R}$，等角的埋め込み $\iota: R \to \tilde{R}$，および $\tilde{R}$ 上の解析的な微分 $\tilde{\psi}$ が存在するならば，$\tilde{\psi}$ は ψ の，“Riemann 面 $\tilde{R}$ の上への R の理想境界を越える解析接続” であるという．ここに，$\iota^*(\psi)$ は ι による ψ の引き戻しである．

R 上の (一価な) 解析関数 f については上の定義を $\psi=df$ について考えるものとし，$\tilde{\psi}=d\tilde{f}$ もまた完全な微分 (すなわち $\tilde{f}$ もまた一価) と考えるのが自然であろうけれども，必ずしもその必要があるわけでもない．しかし今はこれに立ち入らないでおく．

古典的な解析接続の概念は上の定義において $\iota=\mathrm{id.}$ の場合だけを考えたものであり，従って新しい定義は古典的な定義を含む．すなわち，古典的な意味で解析接続可能な微分や関数はすべて新しい意味でも解析接続可能である．

Riemann 写像関数は，単連結領域における解析関数で理想境界を越えて解析接続可能な例であるが，これは古典的な意味で解析接続とは限らない．単位円板の内部または外部で考えた Joukowski 変換は理想境界を越えて解析接続可能な関数であり，同時に古典的な意味で解析接続可能な関数でもあるが，

接続によって得られた関数は互いに異なる．同様のことは平面型 Riemann 面上で考えた Koebe の一般一意化関数についても成り立つ．もっと一般に，有限種数開 Riemann 面の上の半完全標準微分 ([2]) や主関数 ([1]) 等は理想境界を超えて解析接続可能な関数である ([4])．

与えられた関数が理想境界を越えて接続可能か否かを判定することは一般には容易ではない．困難は，f(ないしは ψ) と R とにのみよって記述できる条件を探さねばならぬところにある．以下では，R を種数有限と仮定し，さらに $\tilde{R}$ は R と同じ種数な閉 Riemann 面であると要求する．

ここでは種数を 1 としたときのごく簡単な場合についての考察を報告するが，まず必要な準備を最小限に留めて述べる：

Homology の意味での marked noncompact torus(R,χ) について，その (任意の torus への) 等角的埋め込み $\iota:(R,\chi)\to(\tilde{R},\tilde{\chi})$ と $(\tilde{R},\tilde{\chi})$ の正則正規微分 $\tilde{\varphi}=d\tilde{\Phi}$ を考えるとき，$\delta:=\sup \operatorname{diam}_{\mathbb{C}}\tilde{\Phi}(\tilde{R}\setminus\iota(R))$ は有限である ([3])．また，異なる任意の 2 点 $p,q\in R$ に対し，積分は常に p,q を結ぶ固定された道に沿って行うならば，正数 $\kappa(p,q),K(p.q)$ を選んで

$$\kappa(p,q)<\left|\int_p^q\tilde{\varphi}\right|<K(p,q)$$

となるようにできる．最後に，[5] の結果から

$$\eta(R,\chi):=\inf\{|m+n\tau|\ \tau=\text{modulus of }(\tilde{R},\tilde{\chi}),\quad (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}>0.$$

定理． R 上に 1 対の単純な極 p_0 と単純な零点 q_0 をもつ一価な有理型関数 f は，

$$\mu\delta<\kappa(p_0,q_0),\qquad K(p_0,q_0)+\mu\delta<\eta(R,\chi)$$

の条件下では，理想境界を越える位数 $\mu(>1)$ の有理型接続をもたない．

ただし，理想境界を越える位数 $\mu(>1)$ の有理型接続とは，接続によって得られた解析関数が，位数が μ の有理型関数であるときをいう．

証明には閉リーマン面上の Abel の定理を用いる．最後に，Riemann 写像定理や Koebe の定理との比較として，Schwarz の鏡像原理や Painlevé の接続定理などが古典的な意味での解析接続を目指したものであることを注意する．

References

[1] Ahlfors, L. V. and L. Sario: Riemann surfaces. Princeton Univ. Press.

[2] Kusunoki, Y.: Theory of Abelian integrals and its applications to conformal mappings. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. Math. **32**(1959).

[3] Schmieder, G. und M. Shiba: Realisierungen des idealen Randes einer Riemannschen Fläche unter konformen Abschließungen. Archiv Math. **68**(1997).

[4] Shiba, M.: The Riemann-Hurwitz relation, parallel slit covering map, and continuation of an open Riemann surface of finite genus. Hiroshima Math. J. **14**(1984).

[5] Shiba, M.: The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one. Trans. Amer. Math. Soc. **301**(1987).

8. On the Defect Relation for Exponential Curves

TODA Nobushige Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. Let $f_e = [e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \cdots, e^{\lambda_{n+1} z}]$ be an exponential curve, where n is a positive integer and $\lambda_1, \cdots \lambda_{n+1}$ are distinct complex numbers. Note that f_e is transcendental and of order 1. Let X be a subset of $C^{n+1} - \{0\}$ in general position;

$$X^+ = \{a \in X \mid \delta(a, f_e) > 0\}$$

and

d_i =the number of vectors of type ae_i $(a \neq 0)$ in X^+.

It is well-known([1]) that

(a) $\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) \leq n + 1$;

(b) $\sum_{j=1}^{n+1} \delta(e_j, f_e) = n + 1$.

The purpose of this talk is to give an improvement of (a) for some f_e by using a result on the characteristic function of f_e in [2] and to give X^+ for which the equality holds in (a) for these f_e.

2. Result. Let D be the convex polygon surrounding the points $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$.

(I) The case when D is an $n + 1$−gon. We number the vertices $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ in ascending sequence as one goes arround D in the positive direction. Put for $i = i, \cdots, n+1$

$$|\lambda_i - \lambda_{i+1}| = \ell_i, \quad |\lambda_i - \lambda_{i+2}| = s_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n+1} = \ell.$$

Theorem 1. $\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) \leq n + 1 - \sum_{j=1}^{n+1} (1 - d_i)(\ell_{i-1} + \ell_i - s_{i-1})$, where $\ell = 1$.

Corollary 1. If $\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) = n + 1$, then $X^+ = \{a_1 e_1, \cdots, a_{n+1} e_{n+1}\}$, where $a_1 \cdots a_{n+1} \neq 0$.

(II) The case when D reduces to a line segment. We number the points $\lambda_j (j = 1, \cdots, n + 1)$ as follows:

(i) The points λ_1 and λ_{n+1} are the endpoints of D.

(ii) The points $\lambda_j (j = 1, \cdots, n + 1)$ are in ascending sequence as one goes from λ_1 to λ_{n+1}.

We put for $i = 1, \cdots, n + 1$

$$|\lambda_i - \lambda_{i+1}| = \ell_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = \ell.$$

Theorem 2. $\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) \leq n + 1 - 2\{(1 - d_1)(\ell_1 + (1 - d_{n+1})\ell_n\}$, where $\ell = 1$.

Corollary 2. Suppose that

$$\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) = n + 1. \tag{1}$$

Then, (a) $d_1 = d_{n+1} = 1$; (b) There exist more than one X^+ which satisfy (1).

(III) The case when $n = 3$ and D is a triangle. We suppose that the points λ_1, λ_2 and λ_3 are the vertices of D and the points λ_4 is on the line segment $\lambda_1\lambda_3$ or in the interior of D. We put

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = \ell_1, \quad |\lambda_2 - \lambda_3| = \ell_2, \quad |\lambda_3 - \lambda_1| = \ell_3, \quad |\lambda_i - \lambda_4| = s_i \ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Theorem 3. $\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) \leq 4 - \sum_{i-1}^{3}(1 - d_i)(\ell_i + \ell_{i-1} - s_{i+1} - s_{i+2})$, where $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 1$.

Corollary 3. If $\sum_{a \in X^+} \delta(a, f_e) = 4$, then $X^+ = \{a_1 e_1, \cdots, a_4 e_4\}$, where $a_1 \cdots a_4 \neq 0$.

References

[1] H. Cartan : Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes donneés. Mathematica(cluj), 7(1933), 5-31.

[2] H. Weyl and J. Weyl : Meromorphic functions and analytic curves. Ann. Math. Studies 12, Princeton Univ. Press 1943.

9. Dirichlet 積分の停留点について（続報）

柴田敬一　国際自然科学研究所

単位開円板を Δ であらわす。Clo Δ で連続で Δ で ACL^2 且つデイリクレ積分有限な実数値函数の全体を $\mathcal{F}$ とする。　$\mathcal{F}$ の元のうちで特に　$\partial\Delta$ で充分滑らかな境界値　$\gamma(e^{i\theta})$ を取り Δ で調和な函数を $u(z)$ とし、また $\partial\Delta$ で恒等的に　0 となるものを　$h(z)$ とすれば、この両者は Δ での　デイリクレ内積に関して直交することが知られている。

この設定を modify して、R_z, R_w を 1 組の長方形とし、R_z から R_w　への向きを保つ連続な onto 写像 $w = f(z)$ が　R_z の内部で　ACL^2 なる場合に、上記の直交性の意味を考察し、その応用について述べるのが講演の目的である。

10. sub-多調和関数に対する Bôcher 型定理について

二村 俊英　(広島大学理学研究科)
岸 恭子　(広島大学理学研究科)
水田 義弘　(広島大学総合科学部)

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内の単位球を $\mathbf{B}$ で, 原点を除いた単位球 $\mathbf{B}-\{0\}$ を $\mathbf{B}_0$ で表す. また, $\mathbf{R}^n$ の開集合 G 上の実数値関数 $u \in C^{2m}$ が $\Delta^m u = 0$ を満たすとき m **調和**であるといい, $u \in H^m(G)$ と表す.

Δ^m の基本解を R_{2m} とし, 整数 L に対して $R_{2m,L}$ を次のように定義する：

$$R_{2m,L}(\zeta, x) = R_{2m}(\zeta - x) - \sum_{|\lambda| \le L} \frac{\zeta^\lambda}{\lambda!} \left(D^\lambda R_{2m}\right)(-x).$$

この講演では, 最初に, 多調和関数に対する Bôcher の定理を紹介する (see [3],[4]).

定理 A.　多調和関数 $u \in H^m(\mathbf{B}_0)$ と非負の整数 s について, 積分条件

$$\int_{\mathbf{B}_0} u(x)^+ |x|^s \, dx \ < \ \infty \tag{1}$$

が成り立っているとする. このとき, 定数 $c(\mu)$ 及び $h \in H^m(\mathbf{B})$ が存在して, u は次のように分解される：

$$u = \sum_{|\mu| \le s+2m-1} c(\mu)\, D^\mu R_{2m} + h.$$

次に, 定理 A を $\mu = \Delta^m u$ が $\mathbf{B}_0$ 上の非負測度となるような関数 $u \in L^1_{loc}(\mathbf{B}_0)$ に対して拡張することを考える. これに関して, 今回我々は次の定理を得ることができた.

定理 B.　関数 $u \in L^1_{loc}(2\mathbf{B}_0)$ は $\mu = \Delta^m u$ が $2\mathbf{B}_0$ 上の非負測度となるものとする. さらに, また $s \ge \max\{-2m, -n\}$ である実数 s に対して, 積分条件

$$\int_{2\mathbf{B}_0} |u(x)|\, |x|^s \, dx \ < \ \infty \tag{2}$$

が成り立つとする．このとき，定数 $C(\lambda)$ 及び多調和関数 $h \in H^m(\mathbf{B})$ が存在して，（$\mathbf{B}_0$ 上ほとんどいたるところ）

$$u(x) = \int_{\mathbf{B}_0} R_{2m,L}(\zeta, x)\, d\mu(\zeta) + h(x) + \sum_{|\lambda| \le L} C(\lambda) D^\lambda R_{2m}(x). \tag{3}$$

ここに、L は $s + 2m - 1 < L \le s + 2m$ を満たす整数である．

この定理は定理 A の拡張である．

定理 B を示すには，定理の条件を満たす関数 u に対して，非負整数 s' と $s'+2m-1 \le L' \le s' + 2m$ となる整数 L' をとれば

$$u(x) - \int_{\mathbf{B}_0} R_{2m,L'}(\zeta, x)\, d\mu(\zeta)$$

が $\mathbf{B}_0$ 上 m 調和でかつ $s' \ge 0$ に対して条件 (1) を満足することをみる．すると、定理 A によって，

$$u(x) - \int_{\mathbf{B}_0} R_{2m,L'}(\zeta, x)\, d\mu(\zeta) = \sum_{|\mu| \le s'+2m-1} c(\mu)\, D^\mu R_{2m}(x) + h(x)$$

と分解できることがわかり，(3) を得る．これより，求める定理が容易に示される．

参考文献

[1] D. H. Armitage, On polyharmonic functions in $R^n - \{0\}$, J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 561-569.

[2] N. Aronszajn, T. M. Creese, and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon Press, 1983.

[3] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, 1992.

[4] T. Futamura, K. Kishi, and Y. Mizuta, A generalization of Bôcher's theorem for polyharmonic functions, to appear in Hiroshima Math. J. **31** (2001).

[5] W. K. Hayman and P. B. Kennedy, Subharmonic functions, Vol. 1, Academic Press, London, 1976.

[6] Y. Mizuta, An integral representation and fine limits at infinity for functions whose Laplacians iterated m times are measures, Hiroshima Math. J. **27** (1997), 415-427.

11. On semi-fine limits at infinity for Riesz potentials and monotone BLD functions

水田　義弘　　　　広島大学総合科学部

下村　哲　　　　広島大学教育学部

Kurokawa-Mizuta [1], Siegel-Talvila [6], Mizuta [2], [3] の研究に関連して, リースポテンシャルの無限遠点での semi-fine limits と, その応用として, monotone 関数の無限遠点での semi-fine limits について報告する.

α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy$$

を考える. ここに, f は非負可測関数で $U_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する. 集合 E が無限遠点で (α, p)-semi-thin であるとは,

$$\lim_{r\to\infty} r^{\alpha p - n} C_{\alpha,p}(E \cap B(0,r) - B(0,r/2); B(0,2r)) = 0$$

を満たすときをいう. ここに, $C_{\alpha,p}$ はリース容量, $1 < p < \infty$, $B(x_0, r) = \{x : |x - x_0| < r\}$ とする.

$0 < \beta < n - \alpha p$ として, 次の条件を考える:

$$\lim_{r\to\infty} r^{\alpha p - n + \beta} \int_{B(0,r)} f(y)^p dy = 0 \tag{1}$$

定理 1. 条件 (1) を満たす関数 f に対して, 無限遠点で (α, p)-semi-thin で

$$\lim_{|x|\to\infty, x\in\mathbf{R}^n - E} |x|^{\beta/p} U_\alpha f(x) = 0$$

となる $E \subset \mathbf{R}^n$ が存在する.

定理 2. 集合 E が無限遠点で (α, p)-semi-thin であるための必要かつ十分な条件は, 条件 (1) と

$$\lim_{|x|\to\infty, x\in E} |x|^{\beta/p} U_\alpha f(x) = \infty$$

を満たす関数 f が存在することである.

調和関数の一般化として，最大値・最小値の原理を満たす連続関数は monotone と呼ばれる．２階の楕円型偏微分方程式の解ばかりでなく，非線形方程式の解も monotone となる場合がある．例えば，擬等角写像の各成分は $\mathcal{A}$ 調和で，したがって, monotone である ([4], [7]).

ソボレフ関数 u が, 条件

$$\lim_{r\to\infty} r^{p-n+\beta}\int_{B(0,r)}|\nabla u(x)|^p dx = 0 \tag{2}$$

を満足するものとする．

定理 3．$p > n-1$, $-\ell < \beta/p \leqq 1-\ell$ とする．ソボレフ関数 u が, あるコンパクト集合の外で monotone で条件（2）を満たせば，

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\beta/p}u(x) = 0 \qquad (-\ell < \beta/p < 1-\ell)$$

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{\beta/p}(\log|x|)^{-1}u(x) = 0 \qquad (\beta/p = 1-\ell)$$

となる．

参考文献

[1] T. Kurokawa and Y. Mizuta, On the order at infinity of Riesz potentials, Hiroshima Math. J. **9** (1979), 533-545.

[2] Y. Mizuta, Semi-fine limits and semi-fine differentiability of Riesz potentials of function in L^p, Hiroshima Math. J. **8** (1981), 515-524.

[3] Y. Mizuta, On semi-fine limits of potentials, Analysis **2** (1982), 115-139.

[4] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosho, Tokyo, 1996.

[5] Y. Mizuta, Integral representations, Differentiability properties and limits at infinity for Beppo Levi functions, Potential Analysis **6** (1997), 237-267.

[6] D. Siegel and E. Talvila, Pointwise growth estimates of the Riesz potential, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, **5** (1999), 185-194.

[7] M. Vuorinen, Conformal geometry and quasiregular mappings, Lecture Notes in Math. **1319**, Springer-Verlag, 1988.

12. s-John 領域上の weakly monotone BLD 関数の境界挙動

二村俊英　広島大大学院・理学研究科
水田義弘　広島大学・総合科学部

(X,d) をボレル測度 μ をもつ距離空間とする．本講演では次のような性質をもつ X の部分領域 D 上のボレル可測関数 u の境界挙動を考察する：D 上の非負関数 $g \in L^p_{loc}(D;\mu)$ と定数 $M>0$, $\lambda \geq 1$ が存在して, $\lambda B \subset D$ となる半径 $r>0$ の任意の開球 B に対して

$$|u(x)-u(x')| \leq Mr\left(\frac{1}{\mu(\lambda B)}\int_{\lambda B} g^p d\mu\right)^{1/p} \qquad (\forall x, x' \in B) \tag{1}$$

が成り立つ．以下，測度 μ は任意の $x \in D$ と $r \leq r_0$ に対して

(μ1)　$\mu(B(x,2r)) \leq A_1\mu(B(x,r))$

(μ2)　$A_2 r^{q_1} \leq \mu(B(x,r)) \leq A_3 r^{q_2}$

を満たすと仮定する．

定義. 領域 D のみに依存する定数 $c_J>0$ と点 $x^* \in D$ が存在して, 任意の $x \in D$ と x^* を結ぶ D 内の曲線が取れて

$$\rho_D(z) \geq c_J d(x,z)^s \qquad (\forall z \in \gamma)$$

を満たすとき, D を weak s-John 領域 $(s \geq 1)$ という．ただし, $\rho_D(z)$ は z と境界 ∂D との距離を表す．

定理 A. D を X の相対コンパクトな weak s-John 領域とする．(u,g) は条件 (1) を満たし, ある実数 α に対して

$$\int_D g(w)^p \rho_D(w)^\alpha d\mu(w) < \infty \tag{2}$$

とする．ここで $\beta = s(pq_1+\alpha-p) - q_2(p-1)$ とおく．

(i) $\beta>0$ かつ $p \geq 1$ ならば, $\lim_{x\to\partial D} \rho_D(x)^{\beta/p}u(x) = 0$.

(ii) $\beta = 0$ かつ $p>1$ ならば, $\lim_{x\to\partial D} (\log(1/\rho_D(x)))^{(1-p)/p}\, u(x) = 0$.

(iii) "$\beta<0$ かつ $p>1$"もしくは"$\beta \leq 0$ かつ $p=1$"ならば, u は D 上有界である．

定義. $\xi \in \partial D$ と D 内のある点 x_0 を結ぶ D 内の曲線 γ があって,

$$\rho_D(z) \geq c_0 \ell(\gamma(\xi,z))^s \qquad (\forall z \in \gamma)$$

が成り立つとき, D は ξ で s-John condition を満たすという. ただし, $\gamma(\xi, z)$ は ξ と z を結ぶ曲線 γ の部分曲線で, $\ell(\gamma(\xi, z))$ はその曲線の長さを表す.

定理 B. D を X の相対コンパクトな領域で, (u, g) は条件 (1) と (2) を満たすとする. ここで $q > 0$ に対して

$$G_q = \left\{\xi \in \partial D : \limsup_{r \to 0} r^{-q} \int_{D \cap B(\xi, r)} g(w)^p \rho_D(w)^\alpha d\mu(w) > 0\right\}$$

とおく. このとき, ある $q > s(\alpha + pq_1 + q_1 - p) - pq_2$ に対して $\xi \in \partial D \setminus G_q$ かつ D は ξ で s-John condition を満たすならば, u は $E_\gamma(\xi)$ に沿って ξ で有限な極限をもつ. ただし, $E_\gamma(\xi) = \cup_{z \in \gamma} B(z, \rho_D(z)/(2\lambda))$.

注意. $X = R^n$, $d(x, y) = |x - y|$, $\mu = \mathcal{L}^n$(n 次元ルベーグ測度) のときの条件 (1) を満たす関数 u の例:

(i) $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ かつ $p > n$ のとき, u は $g = |\nabla u|$ に対して (1) を満たす (ソボレフの定理).

(ii) u は調和関数で $p > 0$ のとき, u は $g = |\nabla u|$ に対して (1) を満たす (平均値の定理).

(iii) $u \in W^{1,p}_{loc}(D)$ は (weakly) monotone BLD 関数で $p > n - 1$ のとき, u は $g = |\nabla u|$ に対して (1) を満たす.

参考文献

[1] P. Hajłasz and P. Koskela, Sobolev met Poincaré, Mem. Amer. Math. Soc. **145** (2000), no. 688.

[2] P. Koskela, J. J. Manfredi and E. Villamor, Regularity theory and traces of $\mathcal{A}$-harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 755-766.

[3] J. J. Manfredi, Weakly monotone functions, J. Geom. Anal. **4** (1994), 393-402.

[4] J. J. Manfredi and E. Villamor, Traces of monotone Sobolev functions, J. Geom. Anal. **6** (1996), 433-444.

[5] Y. Mizuta, On the existence of weighted boundary limits of harmonic functions, Ann. Inst. Fourier **40** (1990), 811-833.

[6] Y. Mizuta, Boundary limits of polyharmonic functions in Sobolev-Orlicz spaces, Complex Variables **27** (1995), 117-131.

[7] Y. Mizuta, Tangential limits of monotone Sobolev functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **20** (1995), 315-326.

13. コーン内の minimally thin set のボイリング - ダールベルグ - ショグレン型の定理

柳下　稔　千葉大・自然
宮本　育子　千葉大・理
吉田　英信　千葉大・自然

$\mathbf{R}^n$ 内の単位球面上の滑らかな境界をもつ領域 Ω に対して、 $\mathbf{R}^n$ 内の点 P の極座標表示を (r, Θ) で表す時、

$$C_n(\Omega) = \{P = (r, \Theta) \in \mathbf{R}^n; (1, \Theta) \in \Omega\}$$

をコーンと呼ぶ。

ラプラシアン Δ_n の球面部分 Λ_n

$$\Delta_n = \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-2}\Lambda_n$$

に関する、 Ω でのディリクレ問題

$$\begin{aligned} (\Lambda_n + \lambda) f &= 0 \quad \text{on } \Omega \\ f &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

の最小な正の固有値と、正規化した固有関数を λ_Ω、 $f_\Omega(\Theta)$ で表す。

$$t^2 + (n-2)t - \lambda_\Omega = 0$$

の 2 根を $\alpha_\Omega, -\beta_\Omega (\alpha_\Omega, \beta_\Omega > 0)$ とする。

$C_n(\Omega)$ のマルチン境界は集合 $\partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$ であり、ある適当な基準点に関するマルチン核を $K(P, Q)$ $(P \in C_n(\Omega), Q \in \partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\})$ で表す時、

$$K(P, \infty) = r^{\alpha_\Omega} f_\Omega(\Theta) \quad (P \in C_n(\Omega))$$

である事が知られている。

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E に対して

$$E_k = E \cap \{P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega); 2^k \leq r < 2^{k+1}\}$$

とおき、 $C_n(\Omega)$ 上の調和関数

$$K(P, \infty) = r^{\alpha_\Omega} f_\Omega(\Theta) \quad (P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega))$$

の E_k への掃散 (balayage) を $\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}(P)$、$C_n(\Omega)$ のグリーン関数を $G(P,Q)$ で表す時、

$$\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}(P) = \int_{C_n(\Omega)} G(P,Q)d\lambda_{E_k}(Q) = G\lambda_{E_k}(P) \quad (P \in C_n(\Omega))$$

なる $C_n(\Omega)$ 上の測度 λ_{E_k} が存在する。また $K(\cdot,\infty)$ に関する E_k のグリーンエネルギーを

$$\gamma_{K(\cdot,\infty)}(E_k) = \int_{C_n(\Omega)} G\lambda_{E_k}(P)d\lambda_{E_k}(P)$$

で表す。

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E が ∞ で minimally thin であるとは、

$$\hat{R}^{E}_{K(\cdot,\infty)}(P) \neq K(P,\infty),$$

なる $P \in C_n(\Omega)$ が存在するときをいう。

この講演では、コーン内の minimally thin set のボイリング - ダールベルグ - ショグレン型の次の定理を報告する。

定理. $C_n(\Omega)$ のボレル部分集合 E が ∞ で minimally thin であるとき、

$$\int_E \frac{dP}{(1+|P|)^n} < \infty. \qquad (*)$$

が成り立つ。更に、E が Whitney cube の和である時、$(*)$ は E が ∞ で minimally thin であることの十分な条件である。

この定理の証明には、滑らかな境界を持つ有界領域における同種の結果の証明 ([2] 参照)、をもとにして [1] を用いる。

参考文献

[1] I. Miyamoto, H. Yoshida: Two criterions of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cone, preprint

[2] H. Aikawa, M. Essén: Potential Theory-Selected Topics, Lect. Notes in Math. 1633, Springer-Verlag, 1996.

14.　ハインズ型リーマン面の調和次元

中井　三留　　名工大(名誉教授)
多田　俊政　　大同工大

開リーマン面 R の極小マルチン境界 $\Delta_1(R)$ の濃度 card $\Delta_1(R)$ を R の**調和次元**とよび $\dim R$ としるす：

(1)　$$\dim R := \mathrm{card}\ \Delta_1(R).$$

次に理想境界成分が唯一つで O_G に入る開リーマン面 R をハインズ型リーマン面或いは簡単に**ハインズ面**とよび，その全体を $\mathscr{H}$ と記す（無論 $\mathscr{H} \subset O_G$）．典型的なハインズ面 $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$（穴空き複素球面）に於いては，理想境界成分 $\{0\}$ の周りの有界正則関数の $\{0\}$ での集積値集合が一点となると言う意味でのリーマンの定理が成り立ち，又夫れとピカールの原理（$\dim(\widehat{\mathbb{C}}\backslash\{0\}) = 1$）が同等となる．一般の $R \in \mathscr{H}$ は $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$ に内部に集積せぬ高々可算個の把手達を十分希薄に付与したものとして表現出来ることから，一般の $R \in \mathscr{H}$ に於いてもリーマンの定理は成立し続けるので，ピカールの原理（$\dim R = 1$）もそうではあるまいかと言う素朴な疑問が生じ，それに端を発したものが，**ハインズの問題**：$\mathscr{H}$ の写像 dim による値域である濃度の集合

(2)　$$\Delta := \{\dim R : \ R \in \mathscr{H}\}$$

を決定せよ，である．此の問題を念頭に置きつつしかし一応は此を離れて一般に，開リーマン面 R に，一定の条件と手順に従って，高々可算個の内部には集積しない把手群を付与して構成する新たな開リーマン面 W_R を付随させる．すると次の結果が成立する：

主定理：　任意の $R \in O_G$ に対して，$W_R \in \mathscr{H}$ かつ $\dim W_R = \dim R$，となる．

此の W_R を $R \in O_G$ の**随伴標準ハインズ面**と呼ぶのが印象的であろう．此の定理の直接の系として，上記のハインズの問題の $\mathscr{H}$ の dim による値域集合 Δ の新たな表現

(3)　$$\Delta = \{\dim R : \ R \in O_G\}$$

が得られる，つまり Δ の定義 (2) の $\mathscr{H}$ を遥かに大きな O_G で置き換えて良い．此を利用すると，現在の所，ハインズの問題への最良の寄与である次の結果

定理 A: $\boldsymbol{\Xi \subset \Delta \subset [1, \aleph]}$.

に直接的，統一的，かつ簡明な証明を与える事が出来る，但し，$\aleph_0 = \mathrm{card}\ \mathbb{N}$（$\mathbb{N}$ は自然数全体），$\aleph = \mathrm{card}\ \mathbb{R}$（$\mathbb{R}$ は実数体），$\Xi = \mathbb{N} \cup \{\aleph_0, \aleph\}$ とし，$[1, \aleph]$ は $1 \leq \xi \leq \aleph$ となる濃度 ξ の全体とする．上記定理 A の第 2 の包含は自明，第 1 の包含の $\mathbb{N} \subset \Delta$ の部分は [3]，$\aleph_0 \in \Delta$ は [4]（又 [2], [6], [5] に別証），$\aleph \in \Delta$ は [1] に依る．此等 6 個のばらばらの部分的証明を合わせて定理 A の証明としている現状が，(3) より得られる次の事実によって一挙に結着する：

(4) $$\Delta \supset \{\dim(\widehat{\mathbb{C}} \backslash K) : K \in \mathscr{K}\} = \{\mathrm{card}\ K : K \in \mathscr{K}\} = \Xi,$$

但し，$\mathscr{K}$ は対数容量零（$\mathrm{cap}(K) = 0$）の $\mathbb{C}$ 内の完閉集合 K 全体の族とする．

参 照 文 献

[1] C. Constantinescu-A. Cornea: *Über einige Probleme von M. Heins*, Rev. Math. pures Appl., **3**(1959), 277-281.

[2] A. Cornea: *Über eine Formel in der Extremisierungstheorie*, Rev. Math. pures Appl., **3**(1958), 431-436.

[3] M. Heins: *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[4] Z. Kuramochi: *An example of a null-boundary Riemann surface*, Osaka J. Math., **6**(1954), 83-91.

[5] M. Nakai-L. Sario: *Harmonic and relative harmonic dimensions*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser A.I. Math., **10**(1985), 419-432.

[6] S. Segawa: *A duality relation for harmonic dimensions and its applications*, Kodai Math. J., **4**(1981), 508-514.

15. フラクタルな境界上のベゾフノルムの内部領域による評価とその応用

渡辺ヒサ子　　　お茶の水女子大人間文化研究科

D は $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 2)$ 上の有界領域で $d-1 \leq \beta < d$ とする．また，D の境界 ∂D は β-集合とする．すなわち，次の性質を持つ正 Radon 測度 μ と正数 r_0, b_1, b_2 が存在する；

$$b_1 r^\beta \leq \mu(B(x,r) \cap \partial D) \leq b_2 r^\beta \quad (\forall r \leq r_0,\ \forall x \in \partial D)$$

が $r \leq r_0$ と $x \in \partial D$ に対して成り立つことである．そのような測度 μ は β-測度と呼ばれる．　ここでは β-測度 μ を固定して考える．また，$\overline{D} \subset B(0,R/2)$ $(R \geq 1)$ である R を固定する．

正数 p, α は $p > 1$, $1-(d-\beta) < \alpha < 1$ を満すとする．∂D 上の Besov 空間 $\Lambda_\alpha^p(\partial D)$ は

$$\iint \frac{|f(x)-f(z)|^p}{|x-z|^{\beta+p\alpha}} d\mu(x) d\mu(z) < \infty$$

を満す $L^p(\mu)$ の関数 f の全体で，$f \in \Lambda_\alpha^p(\partial D)$ に対するノルムは

$$\|f\|_{\alpha,p} = \left(\int |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\iint \frac{|f(x)-f(z)|^p}{|x-z|^{\beta+p\alpha}} d\mu(x) d\mu(z)\right)^{1/p}$$

で定義される．

このような $\Lambda_\alpha^p(\partial D)$ 上の作用素の有界性を証明することは大変むずかしいことが多いが，境界上のノルムを内部領域の体積積分に移行することにより，作用素の有界性を証明できることがある．

また，有界領域 D が一様領域であるというのは，D の任意の 2 点 x_1, x_2 に対し，x_1 と x_2 を結ぶ長さのある曲線 $\gamma \subset D$ があり，

$$l(\gamma) \leq a|x_1 - x_2|, \quad \min_{j=1,2} l(\gamma(x_j, z)) \leq b\, dist(z, \partial D)$$

が γ 上のすべての点 z に対し成り立つことである．ただし、a, b は正数，$l(\gamma)$ は γ の長さ、$\gamma(x_j, z)$ は γ の x_j から z までの部分を表す．

このとき、次の定理が成り立つ．

定理 1. D は一様領域とし、$1 < p < \infty$, $1 - (d - \beta) < \alpha < 1 - (d - \beta)/p$ とする. u は $\overline{D}$ 上の Lipschitz 関数ならば,

$$\iint \frac{|\overset{u}{\cancel{f}}(x) - \overset{u}{\cancel{f}}(z)|^p}{|x - z|^{\beta + p\alpha}} d\mu(x) d\mu(z) \leq c \int_D |\nabla u(y)|^p \delta(y)^{p - p\alpha - d + \beta} dy$$

が成り立つ. ここで、c は u に無関係な定数である.

この定理を用いて, 2 重層ポテンシャルに関連した次の作用素 K_1 の有界性を証明する.

$$K_1 f(z) = \int_{\mathbf{R}^d \setminus \overline{D}} \langle \nabla_y \mathcal{E}(f)(y), \nabla_y N(z - y) \rangle dy.$$

参考文献

[W1] H. Watanabe, The double layer potentials for a bounded domain with fractal boundary, Potential Theory-ICPT94, 463-471, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1996.

[W2] H. Watanabe, Double layer potentials of functions in a Besov space for a bounded domain with fractal boundary, Proceedings of the Fifth International Colloquium on Complex Analysis (1997), 337-343.

[W3] H. Watanabe, Besov spaces on fractal sets, Josai Math. Monographs **1** (1999), 121-134.

16. Indecomposable continua and the limit sets of Kleinian groups

KATSUHIKO MATSUZAKI

Department of Mathematics, Ochanomizu University

Rogers [1], [2] studied on indecomposability of boundaries of Siegel disks for complex dynamics and obtained a dichotomy saying that they are indecomposable or have such tame properties as Jordan curves have. Here, a continuum (a compact connected subset in the plane) Λ is meant to be *decomposable* if there exist proper subcontinua Λ_1 and Λ_2 such that $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, and otherwise *indecomposable*. Further, Mayer and Rogers [3] applied similar arguments to the investigation of the structure of Julia sets of polynomials.

In this talk, we consider indecomposability of the limit sets of Kleinian groups and report that they never possess the possibility of having such a wild nature once they admit the invariance under a Möbius transformation. The basic fact in our arguments is the following result:

Theorem. *Let Λ be a continuum on the Riemann sphere that is invariant under a loxodromic Möbius transformation. Then Λ is decomposable.*

Corollary 1. *Any connected component of the limit set $\Lambda(\Gamma)$ of a Kleinian group Γ that is not a single point and that contains a loxodromic fixed point is decomposable.*

In case a Kleinian group acts on a simply connected domain D, we can assert certain results concerning the relationship between the Euclidean boundary and the Carathéodory boundary of D, as Rogers obtained them for the boundary of a Siegel disk.

Corollary 2. *Suppose that a Kleinian group Γ acts on a simply connected domain D such that the Fuchsian model of (Γ, D) is of the first kind. Further suppose that the limit set $\Lambda(\Gamma)$ coincides with the boundary ∂D. Then the following are satisfied:*

(1) *For any prime end e of D, the impression $I(e)$ does not have non-empty interior in $\Lambda(\Gamma)$ with respect to the relative topology.*

(2) *If a subset E of the Carathéodory boundary of D is of first category, then*

$$I(E) := \bigcup_{e \in E} I(e) \subsetneqq \Lambda(\Gamma).$$

A totally degenerate group is, by definition in this talk, a Kleinian group Γ such that $\Lambda(\Gamma)$ is connected, the complement $\Omega(\Gamma) = S^2 - \Lambda(\Gamma)$ is (simply) connected and the Fuchsian model of $(\Gamma, \Omega(\Gamma))$ is of the first kind. The investigation of limit sets of totally degenerate groups is one of the difficult problems in the theory of Kleinian groups and in particular, for finitely generated groups, it is conjectured that the limit sets are locally connected. The following results support this conjecture weakly (without any effects of proving it), for they are easily obtained if the limit sets are known to be locally connected.

Corollary 3. *A totally degenerate Kleinian group Γ satisfies the following:*

(1) *For any subdomain $W(c)$ separated by a crosscut c of $\Omega(\Gamma)$, the interior of the closure $\overline{W(c)}$ is strictly larger than $W(c)$;*

(2) *In any open interval of the Carathéodory boundary of $\Omega(\Gamma)$, there exist distinct prime ends e_1 and e_2 such that the impressions $I(e_1)$ and $I(e_2)$ $(\subset \Lambda(\Gamma))$ have non-empty intersection.*

References

1. R. T. Rogers, Jr., *Singularities in the boundaries of local Siegel disks,* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **12** (1992), 803–821.
2. R. T. Rogers, Jr., *Intrinsic rotations of simply connected regions and their boundaries,* Complex Variables **23** (1993), 17–23.
3. J. C. Mayer and R. T. Rogers, Jr., *Indecomposable continua and the Julia sets of polynomials,* Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 795–802.

※印は本会で記入

※番号	題	
17.		Patterson-Sullivan測度に関するクライン群の作用の保存性について

氏名 松崎克彦　所属 お茶の水女子大学

n+1次元双曲空間の単位球モデルを$\mathbb{B}^{n+1}$とし、その向きを保つ等長変換からなる離散部分群Γをクライン群という。クライン群の作用は$\mathbb{B}^{n+1}$の境界S^nに拡張する。S^n上の正規化された球面測度をμ_nとし、μ_nに関するΓの作用のdissipative part $\mathcal{D}(\Gamma)$, conservative part $\mathcal{R}(\Gamma)$を次のように定義する：

$\mathcal{D}(\Gamma)$：ΓのS^n上の基本領域(w.r.t. μ_n)がとれるような最大の可測集合

$\mathcal{R}(\Gamma) := S^n - \mathcal{D}(\Gamma)$

このようにすると、$\mathcal{R}(\Gamma)$は次の性質で特徴づけられる：

$\forall A \subset \mathcal{R}(\Gamma)$ s.t. $\mu_n(A) > 0$に対して

$\#\{\gamma \in \Gamma \mid \mu_n(\gamma(A) \cap A) > 0\} = \infty$

SullivanはMostow剛性定理の拡張として、クライン群Γは$\mathcal{R}(\Gamma)$上では擬等角変形を許さないこと、特に$\mathcal{R}(\Gamma) = S^n$ (a.e. μ_n)となるクライン群は剛性をもつことを証明した。このようなΓをμ_nに関して保存的なク

ライン群という。また同時に、極限集合による $R(\Gamma)$ の特徴づけも与えている。つまり、$R(\Gamma)$ は horospherical な極限点の集合 $\Lambda_h(\Gamma)$ と a.e. μ_n に一致する。

体積有限ではないが、幾何学的有限であるようなクライン群の極限集合上の作用を考える上では、n 次元測度よりは、収束指数 $\delta(\Gamma)$ 次元の群不変性をもつ確率測度を用いるほうが有効な場合が多い。これを PS 測度という。$\delta(\Gamma)$ 次元のポアンカレ級数が発散するようなクライン群 Γ に対しては、PS 測度は一意的に定まり、μ_δ とかく。conical な極限点の集合 $\Lambda_c(\Gamma)$ は μ_δ に関して全測度をもつ。また、Tukia は μ_δ に関する conservative part $R_\delta(\Gamma)$ がやはり $\Lambda_h(\Gamma)$ と a.e. μ_δ で一致することを示した。この講演では、μ_n に関して既に示していた次の結果が、μ_δ についてもやはり成立することを報告する。

<u>定理</u>　Γ を発散型クライン群とし、μ_δ をその PS 測度とする。H を非自明な Γ の正規部分群とするとき、H は μ_δ に関して保存的である。

18. Similarities at one-dimensional Bers boundaries

Hideki Miyachi*
Department of Mathematics, Osaka City University

Let G be a fuchsian group of type $(1,1)$ acting on upper half plane $\mathbb{H}$. Let $Q(G)$ denote the Banach space of holomorphic automorphic forms of weight -4 on the lower half plane with bounded hyperbolic L^∞-norm. Since $\dim Q(G) = 1$, we can identify $Q(G)$ with the complex plane canonically. For $\phi \in Q(G)$, we denote by $G_\phi \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ the image of holonomy representation for ϕ.

Let $B_G \subset Q(G)$ be the image of the Bers embedding. It is known that B_G is a Jordan domain (Minsky). A boundary point $\phi \in \partial B_G$ is called *rational* if G_ϕ is geometrically finite. In this case G_ϕ has an accidental parabolic transformation.

The main theorem of this talk is the following:

Theorem (1) *G' is a fuchsian group of type $(1,1)$. Then there exists a quasiconformal mapping h from $Q(G)$ to $Q(C')$ so that $h(B_G) = B_{G'}$.*

(2) *Every Teichmüller modular transformation ω acting on B_G admits a quasiconformal extension to $Q(G)$ with maximal dilatation $\exp(d(0,\omega(0)))$, where 0 is the origin of $Q(G)$ and $d(\cdot,\cdot)$ is the Teichmüller distance on B_G.*

(3) *Each extensions in (1) and (2) are $C^{1+\alpha}$-conformal at any rational boundary points. The exponents $\alpha > 0$ depend only on G, G' (in (1)) or G, ω (in (2)).*

A quasiconformal mapping $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is said to be $C^{1+\alpha}$-*conformal* at $z_0 \in \mathbb{C}$ if the limit $A = \lim_{z\to z_0}(g(z) - g(z_0))/(z - z_0)$ exists and

$$g(z) = g(z_0) + A(z - z_0) + O(|z - z_0|^{1+\alpha}), \quad \text{as } z \to z_0.$$

Since the Teichmüller modular group acts transitively on the set of rational boundary points, (3) in Theorem tells that for given two rational boundary points (possibly, lying on different slices), the shapes of Bers boundaries around them are infinitesimally similar each other.

*Partially supported by Research Fellowships of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

特別講演

曲面上の射影構造と擬フックス群空間の自己接触について

糸 健太郎 (名古屋大学大学院多元数理研究科)

1 導入

$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の離散部分群をクライン群という．M を向き付け可能な境界付きコンパクト3次元多様体で，その内部 $\mathrm{int}M$ には完備な双曲構造が入るとする．すなわち，あるクライン群 $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ が存在して $\mathrm{int}M \cong N_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma$ であるとする．表現空間

$$R(M) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

の中で，忠実で離散的な表現の共役類から成る部分集合を $AH(M)$ と書く．これは複素力学系におけるマンデルブロー集合に対応するものと思うことができる．ここで $R(M)$ には代数的位相（各点収束の位相）を入れておく．$AH(M)$ は閉集合でその内点集合 $\mathrm{int}AH(M)$ は複素多様体である．明らかに $\overline{\mathrm{int}AH(M)} \subset AH(M)$ であるが $\overline{\mathrm{int}AH(M)} = AH(M)$ であろうと予想されている（Bers-Thurston 予想）．近年 $\overline{\mathrm{int}AH(M)}$ の境界挙動は複雑であることが分かってきた．以下では $\overline{\mathrm{int}AH(M)}$ のトポロジーに注目して話を進める．

$\mathrm{int}AH(M)$ は一般には幾つかの（場合によっては無限個の）連結成分を持つ．まず Anderson-Canary [1] によって，Book of I-bundle M に関して $\mathrm{int}AH(M)$ の異なる連結成分の閉包が接触することが示された．その後，Anderson-Canary-McCullogh [2] は一般の（boundary incompressible な）M に対して $\mathrm{int}AH(M)$ の2つの連結成分の閉包が接するためのトポロジカルな必要十分条件が与えた．また同論文 [2] において $\mathrm{int}AH(M)$ が無限個の連結成分を持つための必要十分条件も得られている．さらに最近，Bromberg-Holt [3] によって $\mathrm{int}AH(M)$ の各連結成分が自己接触 (self-bumping) するための十分条件が与えられた．ここで $\mathrm{int}AH(M)$ の連結成分 B が自己接触するとは，ある元 $[\rho] \in \partial B$ が存在して $[\rho]$ の十分小さな任意の近傍 U に対して $U \cap B$ が非連結になるときをいう．

以上の状況のもとで，以下ではもっぱら M が曲面と閉区間の積 $S \times [0,1]$ の場合を考える．このとき $\mathrm{int}AH(M)$ は唯一つの連結成分から成る．歴史的には，まず McMullen が Anderson-Canary [1] の手法を用いて $\mathrm{int}AH(M)$ の自己接触を示した．この証明において曲面上の射影構造が大きな役割を果たしている．その後，前述の Bromberg-Holt [3] によって，射影構造を用いない手法で $\mathrm{int}AH(M)$ の自己接触が示されている．しかしここでは McMullen の流れに沿って，射影構造を用いてより精密に $\mathrm{int}AH(M)$ の自己接触の様子を調べることにする．

2　曲面上の射影構造と擬フックス群空間

S は向き付け可能な種数 2 以上の閉曲面とする．表現空間

$$R(S) = \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

において，忠実で離散的な表現の共役類の集合を $AH(S)$ と書く．ここでクライン群 Γ が擬フックス群であるとは，Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ がジョルダン曲線で，Γ が $\hat{\mathbf{C}} - \Lambda(\Gamma)$ の各成分を不変にするときをいう．擬フックス群空間

$$QF(S) = \{[\rho] \in AH(S) | \rho(\pi_1(S)) \text{は擬フックス群}\}$$

は $\mathrm{int}AH(S)$ と一致する．$QF(S)$ は唯一つの連結成分から成り，Teichmüller 空間 $T(S)$ の直積からの自然な同相写像

$$\mathrm{qf} : T(S) \times T(S) \to QF(S)$$

が存在する．$R(S)$ における $QF(S)$ の境界挙動を調べるには，$R(S)$ の「普遍被覆もどき」である射影構造空間 $P(S)$ に持ち上げて考えることがしばしば有用である．

S 上の射影構造とは $(\hat{\mathbf{C}}, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))$-構造; すなわち，局所的に $\hat{\mathbf{C}}$ をモデルとし，その張り合わせ写像が Möbius 写像であるような極大局所座標系のことである．S 上の marking 込みの射影構造全体の空間 $P(S)$ は $T(S)$ の正則余接バンドルと同一視できる．$Y \in P(S)$ に対して, developing map $f_Y : \tilde{Y} \to \hat{\mathbf{C}}$ ($\tilde{Y}$ は Y の普遍被覆) が定まり，この写像が誘導する準同型 $\rho_Y : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ をホロノミー表現と呼ぶ．ここで $Y \in P(S)$ にそのホロノミー表現の共役類 $[\rho_Y]$ を対応させることで, ホロノミー写像

$$\mathrm{hol} : P(S) \to R(S) = \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

を定めると，これは局所同相な正則写像であることが知られている．ここでは, 主に $P(S)$ の部分集合 $Q(S) = \mathrm{hol}^{-1}(QF(S))$ を考察する．$Q(S)$ の任意の連結成分 $\mathcal{Q}$ に対して $\mathrm{hol}|\mathcal{Q} : \mathcal{Q} \to QF(S)$ は双正則写像である．さらに Goldman [4] によるフックス群ホロノミーをもつ射影構造の (grafting を用いた) 特徴付けより, $Q(S)$ の連結成分全体は measured lamination の集合 $\mathcal{ML}(S)$ の整数点全体 $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と 1 対 1 対応がつくことがわかる．ここで

$$\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) = \{\lambda \in \mathcal{ML}(S) : \lambda = \sum k_i C_i,\ k_i \in \mathbf{N},\ C_i \text{は単純閉曲線}\}$$

である．$Q(S)$ の元で, その developing map が単射であるものをスタンダード，そうでないものをエキゾチックと呼ぶ．いま $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する $Q(S)$ の連結成分を $\mathcal{Q}_\lambda$ と書くと，$Q(S)$ の連結成分分解

$$Q(S) = \coprod_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)} \mathcal{Q}_\lambda$$

を得る．$\mathcal{Q}_0$ はスタンダードな射影構造より成る唯一の連結成分である．$Q(S)$ の異なる成分が接していると，ホロノミー写像 hol : $P(S) \to R(S)$ の局所同相性から $QF(S)$ の自己接触がいえることに注意されたい．

3 定理の主張

まず McMullen [8] の結果を紹介する．

定理 1 (McMullen [8]). エキゾチックな射影構造の列で，$\partial\mathcal{Q}_0$ の点に収束するものが存在する．従って $QF(S)$ は自己接触する．

以下の結果は McMullen の結果を精密化したものである．

定理 2 ([5]). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda} \neq \emptyset$ が成り立つ．特に，$P(S)$ における $Q(S)$ の閉包 $\overline{Q(S)}$ は連結である．

定理 3 ([5]). 有限集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ で任意の $j,k \in \{1,\ldots,m\}$ が $i(\lambda_j,\lambda_k) = 0$ をみたすものに対して $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_1}} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_m}} \neq \emptyset$ が成り立つ．ここで $i(\cdot,\cdot)$ は幾何学的交点数を表す．

系 4 ([5]). 任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対してある点 $[\rho] \in \partial QF(S)$ が存在して，$[\rho]$ の十分小さな任意の近傍 U に対して $U \cap QF(S)$ の連結成分は n 個以上となる．

定理２より $\mathcal{Q}_\lambda$ は $\mathcal{Q}_0$ に接触するが，次の定理は $\mathcal{Q}_\lambda$ から $\mathcal{Q}_0$ に（少なくとも）腕が２本伸びていることを示している（図１参照）．

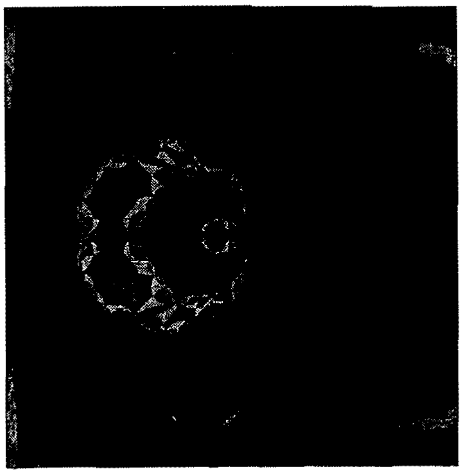

図 1: １点穴あきトーラス上の正則２次微分の空間：中心のスタンダードな成分にエキゾチックな成分が近づいている様子をあらわしている（小森，須川，山下，和田４氏による）

定理 5 ([6]). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ に対してある $Y \in \overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ が存在して，Y の十分小さい任意の近傍 U に対して $U \cap \mathcal{Q}_\lambda$ は非連結となる．特に $\mathcal{Q}_\lambda$ は自己接触する．

この定理より $QF(S)$ の自己接触は $P(S)$ に持ち上げたときにすべて解消されているわけではないことが分かる．$\mathcal{Q}_0$ が自己接触するかどうかは未解決の問題である．定理3と定理5より次の定理を得る．

定理 6 ([6]). 任意の $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_\lambda} \cap \overline{\mathcal{Q}_\mu} \neq \emptyset$ が成り立つ．

4 クライン群の代数的極限と幾何的極限

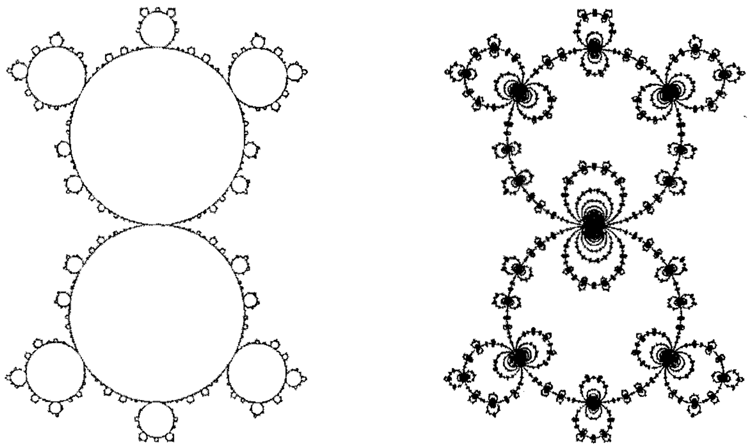

図 2: 代数的極限 Γ の極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ と幾何的極限 $\hat{\Gamma}$ の極限集合 $\Lambda(\hat{\Gamma})$ （Brock による）

クライン群 Γ に対して $N_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma$ とする．Γ の不連続領域を $\Omega(\Gamma)$, 極限集合を $\Lambda(\Gamma)$ と書く．クライン群 Γ が b-group であるとは，$\Omega(\Gamma)$ が唯一つの Γ-不変成分 $\Omega_0(\Gamma)$ をもち，$\Omega_0(\Gamma)$ が単連結のときをいう．

クライン群の列 Γ_n が $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束するとは，$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ の中で Γ_n が $\hat{\Gamma}$ に Hausdorff 収束するときをいう．G は torsion-free で非可換な有限生成群であるとし，忠実で離散的な表現の列 $\rho_n : G \to \Gamma_n$ が $\rho : G \to \Gamma$ に代数的に収束するとする．このとき，部分列をとれば Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束し，$\hat{\Gamma}$ はクライン群で $\Gamma \subset \hat{\Gamma}$ が成り立つ．ここで Kerckhoff-Thurston [7] による代数的極限 Γ が幾何的極限 $\hat{\Gamma}$ に真に含まれる例を紹介する．C を S の単純閉曲線とし，$\tau = \tau_C$ を C に関する Dehn twist とする．$(X, X') \in T(S) \times T(S)$ を1つとり $[\rho_n] = \mathrm{qf}(X, \tau^n X') \in QF(S)$ という列を考えると，この列は収束する部分列を持ち，その極限を $[\rho] \in \partial QF(S)$ とす

る．いま代表元 $\rho_n : \pi_1(S) \to \Gamma_n$ が $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ に代数的に収束するとしてよい．必要なら部分列をとれば Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束する．Γ は幾何的有限な b-group で，$\hat{\Gamma}$ は rank 2 parabolic subgroup を含んでいて $N_{\hat{\Gamma}} \cong \mathrm{int}(S \times [0,1] - C \times \{1/2\})$ となる（図２参照）．

5　定理の証明のアウトライン

5.1　定理２の証明

$\lambda = \sum k_i C_i \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ を１つ固定する．幾何的有限なクライン群 $\hat{\Gamma}$ で

$$\overline{N_{\hat{\Gamma}}} = (\mathbf{H}^3 \cup \Omega(\hat{\Gamma}))/\hat{\Gamma} = S \times [0,1] - \cup_i (C_i \times \{1/2\})$$

となるものをとる．$N_{\hat{\Gamma}}$ において $C_i \times \{1/2\}$ の近傍は rank 2 cusp に対応する．各 rank 2 cusp において同時に $(1,n)$-Dehn filling を施すことにより，準同型 $\beta_n : \hat{\Gamma} \to \Gamma_n \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ が存在して，Γ_n は擬フックス群で，β_n は代数的に id に収束し，Γ_n は幾何的に $\hat{\Gamma}$ に収束する．

次に曲面 S から $N_{\hat{\Gamma}}$ の中への immersion $f_\lambda : S \to N_{\hat{\Gamma}}$ で，$f_\lambda|(S - \cup_i \mathrm{nbd}(C_i))$ は $S \times \{1/4\}$ への埋め込みで，$f_\lambda|\mathrm{nbd}(C_i)$ は $C_i \times \{1/2\}$ を k_i 回まわっているものをとる（図３参照）．この immersion f_λ を λ に関する wrapping map という．

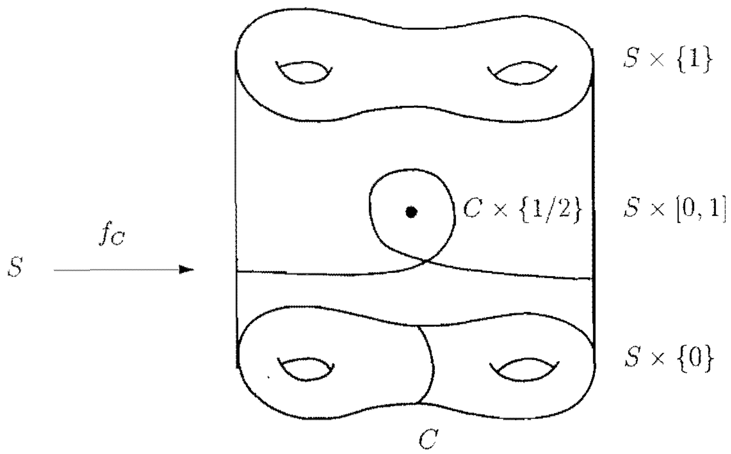

図 3: λ が単純閉曲線 C のときの wrapping map f_C

表現

$$\rho_n = \beta_n \circ (f_\lambda)_* : \pi_1(S) \to \Gamma_n$$

は擬フックス群 Γ_n への同型写像であり，$|n| \to \infty$ のとき

$$\rho_\infty := (f_\lambda)_* : \pi_1(S) \to \Gamma_\infty := (f_\lambda)_*(\pi_1(S)) \subset \hat{\Gamma}$$

に代数的に収束する．

次に $Y_\infty \in \partial \mathcal{Q}_0 \subset P(S)$ で $\mathrm{hol}(Y_\infty) = [\rho_\infty]$ となるものをとる．ホロノミー写像 $\mathrm{hol} : P(S) \to R(S)$ は局所同相なので，収束列 $Y_n \to Y_\infty$ で $\mathrm{hol}(Y_n) = [\rho_n]$ となるものが存在する．以上の構成，及び $\{Y_n\}$ がエキゾチックであることの証明は McMullen による．ここで $Y_n \in \mathcal{Q}_\lambda(|n| \gg 0)$ を示すために次の記号と補題を準備する．$Y \in Q(S)$ に対して，Y への極限集合の引き戻しを $\Lambda_Y = \pi_Y \circ f_Y^{-1}(\Lambda(\rho_Y(\pi_1(S))))$ と定める．ここで $\pi_Y : \tilde{Y} \to Y$ は普遍被覆である．

補題 7. $Y \in Q(S), \lambda = \sum_i k_i C_i \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して $Y \in \mathcal{Q}_\lambda$ となる必要十分条件は $\Lambda_Y \subset Y$ が C_i にホモトピックな k_i 個の単純閉曲線の和集合になることである．

補題 8. 上の状況で $\Lambda_{Y_n} \subset Y_n$ は $\hat{\Lambda}_{Y_\infty} := \pi_{Y_\infty} \circ f_{Y_\infty}^{-1}(\Lambda(\hat{\Gamma})) \subset Y_\infty$ に *Hausdorff* 収束する．

ここで $\hat{\Lambda}_{Y_\infty} \subset Y_\infty$ の概形が分かるので（図 4 参照），補題 8 より $\Lambda_{Y_n} \subset Y_n$ の形が分かり，従って補題 7 より $Y_n \in \mathcal{Q}_\lambda$ が示される．

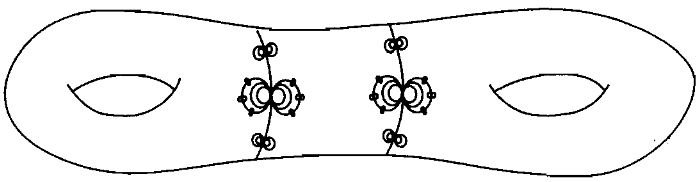

図 4: $\hat{\Lambda}_{Y_\infty} \subset Y_\infty$ の概形

5.2 $\langle \lambda, \mu \rangle_\sharp, \langle \lambda, \mu \rangle_\flat \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ の定義

定理 5 の証明のために，ここで $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して新たな元 $\langle \lambda, \mu \rangle_\sharp, \langle \lambda, \mu \rangle_\flat \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ を定義する．まず λ と μ をその重みの数だけ単純閉曲線で S 上に実現する．すなわち $\lambda = \sum_i k_i C_i$ ならば C_i にホモトピックな k_i 個の互いに交わらな

い単純閉曲線を S 上に実現する．このとき λ と μ を実現した曲線族の交点数は最小にしておく．次に λ と μ を実現した曲線をアミダ状にたどって新しい曲線族を作る：$\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp$ を構成するときは λ から μ にぶつかったら右に，μ から λ にぶつかったら左に曲がる．$\langle\lambda,\mu\rangle_\flat$ を構成するときは λ から μ にぶつかったら左に，μ から λ にぶつかったら右に曲がる（図 5 参照）．最後に新しい曲線族において平行な成分があったらその数を重みとして勘定することで $\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp, \langle\lambda,\mu\rangle_\flat \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ を得る（図 6 参照）．

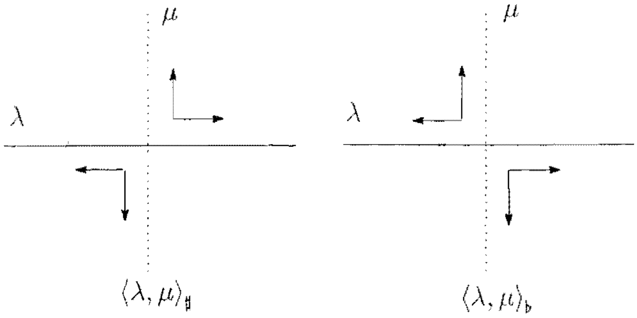

図 5: $\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp, \langle\lambda,\mu\rangle_\flat$ 構成のルール

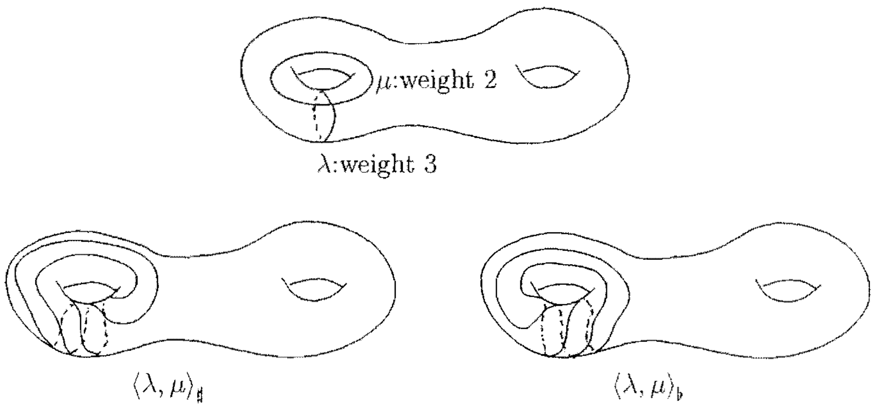

図 6:

ここで $i(\lambda,\mu)=0$ ならば $\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp = \langle\lambda,\mu\rangle_\flat = \lambda+\mu$ が成り立ち，$i(\lambda,\mu)\neq 0$ ならば $\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp \neq \langle\lambda,\mu\rangle_\flat$ が成り立つ．

5.3 定理 5 の証明

任意の $\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して grafting map と呼ばれる双正則写像 $\mathrm{Gr}_\mu : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q}_\mu$ が存在し $\mathrm{hol}\circ\mathrm{Gr}_\mu(Y) = \mathrm{hol}(Y) \quad (\forall Y \in \mathcal{Q}_0)$ が成り立つ．いま，始めにとっ

た $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して，λ とホモトピックな成分をもたない元 $\mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ をとる．このとき $\mathrm{Gr}_\mu : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q}_\mu$ は $Y_\infty \in \overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ の近傍まで定義域を拡張することができる．これによって収束列 $Y_{\pm n} \to Y_\infty \quad (n \to +\infty)$ を写すと収束列 $Z_{\pm n} := \mathrm{Gr}_\mu(Y_{\pm n}) \to Z_\infty := \mathrm{Gr}_\mu(Y_\infty) \quad (n \to +\infty)$ を得る．ここで $\mathrm{hol}(Y_{\pm n}) = \mathrm{hol}(Z_{\pm n}) = [\rho_{\pm n}]$, $\mathrm{hol}(Y_\infty) = \mathrm{hol}(Z_\infty) = [\rho_\infty]$ が成り立つことに注意する．

定理 9. $n \in \mathbf{N}$ が十分大きいとき $Z_n \in \mathcal{Q}_{\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp}$, $Z_{-n} \in \mathcal{Q}_{\langle\lambda,\mu\rangle_\flat}$ である．

特に $i(\lambda,\mu) \neq 0$ のとき $\mathcal{Q}_{\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp} \neq \mathcal{Q}_{\langle\lambda,\mu\rangle_\flat}$ に注意する．

系 10. $[\rho_\infty]$ の十分小さな任意の近傍 U に対して $n \in \mathbf{N}$ が十分大きければ $\{[\rho_n]\}$ と $\{[\rho_{-n}]\}$ は $U \cap QF(S)$ の異なる連結成分に含まれる．

従って U を $Y_\infty \in \overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda}$ の任意の近傍とするときに，$n \in \mathbf{N}$ を十分大きくとれば $\{Y_n\}$ と $\{Y_{-n}\}$ は $U \cap \mathcal{Q}_\lambda$ の異なる連結成分に含まれることが分かる．このことから定理５が従う．

定理９の証明においても $\hat{\Lambda}_{Z_\infty} := \pi_{Z_\infty} \circ f_{Z_\infty}^{-1}(\Lambda(\hat{\Gamma})) \subset Z_\infty$ の解析が重要になる．次に $\Lambda(\Gamma_{\pm n})$ が $\Lambda(\hat{\Gamma})$ に Hausdorff 収束することから $\Lambda_{Z_{\pm n}} \subset Z_{\pm n}$ が $\hat{\Lambda}_{Z_\infty} \subset Z_\infty$ に Hausdorff 収束する（補題８）．従って Λ_{Z_n} と $\Lambda_{Z_{-n}}$ の形が分かり，補題７より $Z_n \in \mathcal{Q}_{\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp}$, $Z_{-n} \in \mathcal{Q}_{\langle\lambda,\mu\rangle_\flat}$ が分かる．ここで $n \to +\infty$ のとき，$\Lambda(\Gamma_n)$ も $\Lambda(\Gamma_{-n})$ も渦を巻きながら $\Lambda(\hat{\Gamma})$ に Hausdorff 収束するのであるが，渦を巻く向きが異なることから Λ_{Z_n} と $\Lambda_{Z_{-n}}$ は異なる元 $\langle\lambda,\mu\rangle_\sharp$ と $\langle\lambda,\mu\rangle_\flat$ に対応することになる（図７参照）．

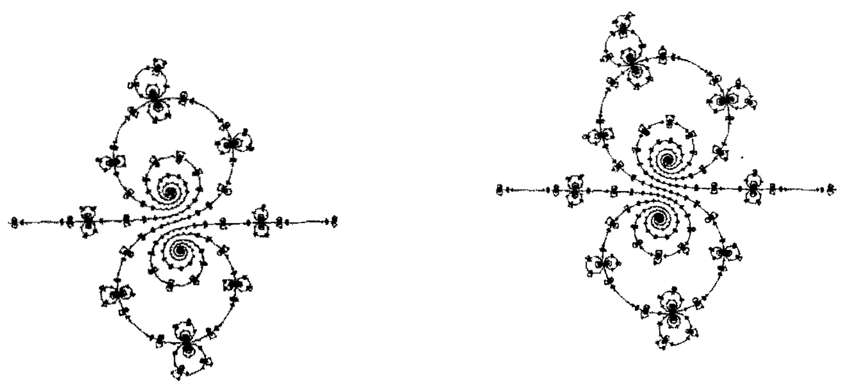

図 7: ある２つの擬フックス群の極限集合のそれぞれ一部．それぞれ幾何的極限 $\hat{\Gamma}$ の極限集合 $\Lambda(\hat{\Gamma})$ に非常に近い形をしている（図２参照）が渦の向きが反対である．(和田氏のソフト OPTi により作成)

5.4 定理６の証明

定理３と定理９をあわせて定理６を証明する．任意の２つの元 $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ をとる．λ, μ の分解 $\lambda = \lambda' + \lambda'', \mu = \mu' + \mu''$ で $i(\lambda', \mu) = i(\lambda, \mu) = i(\lambda, \mu')$ が成り立つものをとる．$i(\lambda, \mu'') = 0, i(\mu', \mu'') = 0$ なので $i(\langle\lambda, \mu'\rangle_\flat, \mu'') = 0$ が成り立つ．ここで定理３より $\mathcal{Q}_0 \cap \mathcal{Q}_{\langle\lambda,\mu'\rangle_\flat} \cap \mathcal{Q}_{\mu''} \neq \emptyset$ がいえる．より厳密には $Y_\infty \in \partial\mathcal{Q}_0$ に収束する２つの列 $\{Y_n\} \subset \mathcal{Q}_{\langle\lambda,\mu'\rangle_\flat}$ と $\{Y'_n\} \subset \mathcal{Q}_{\mu''}$ が存在する．Y_∞ の近傍で定義された写像 $\mathrm{Gr}_{\mu'}$ で写すことにより $Z_\infty = \mathrm{Gr}_{\mu'}(Y_\infty)$ に収束する２つの列 $Z_n = \mathrm{Gr}_{\mu'}(Y_n)$ と $Z'_n = \mathrm{Gr}_{\mu'}(Y'_n)$ を得る．定理９から $n \to +\infty$ のとき $Z_n \in \mathcal{Q}_{\langle\langle\lambda,\mu'\rangle_\flat,\mu'\rangle_\sharp} = \mathcal{Q}_\lambda$ と $Z'_n \in \mathcal{Q}_{\mu'+\mu''} = \mathcal{Q}_\mu$ が分かる．従って $\overline{\mathcal{Q}_\lambda} \cap \overline{\mathcal{Q}_\mu} \neq \emptyset$.

6 今後の課題

5.1 節では McMullen に従って，スタンダードな成分 $\mathcal{Q}_0$ の境界に収束するエキゾチックな射影構造の列を具体的に構成した．逆にスタンダードな成分 $\mathcal{Q}_0$ の境界に収束するエキゾチックな射影構造の列はこのようなものしかないかが問題になる．ここでは次の状況を考える：

「忠実な表現 $\rho_n : \pi_1(S) \to \Gamma_n$ が $\rho_\infty : \pi_1(S) \to \Gamma_\infty$ に代数的に収束するとする．Γ_n は擬フックス群で，Γ_∞ は b-group とする．さらに Γ_n は $\hat{\Gamma}$ に幾何的に収束するとする．このとき $\Gamma_\infty \subset \hat{\Gamma}$ であり，対応する被覆写像を $\pi : N_{\Gamma_\infty} \to N_{\hat{\Gamma}}$ と書く．$Y_\infty \in \partial\mathcal{Q}_0 \subset P(S)$ を $\mathrm{hol}(Y_\infty) = [\rho_\infty]$ となるようにとり，$Y_n \in P(S)$ は $Y_n \to Y_\infty$ $(n \to \infty)$ かつ $\mathrm{hol}(Y_n) = [\rho_n]$ をみたす列とする.」

このとき次の条件は同値である [5]：

(1) n が十分大きいとき Y_n はエキゾチック，
(2) $\Omega_0(\Gamma_\infty) \cap \Lambda(\hat{\Gamma}) \neq \emptyset$.

さらに次の条件も同値であろうと予想される：

(3) N_{Γ_∞} の compact core M で $\pi|M$ が埋め込みとなるものは存在しない．

(3) $\Rightarrow$ (2) は正しい．従って (2) $\Rightarrow$ (3) が問題となる．(3) であるならば，N_{Γ_∞} の compact core は $N_{\hat{\Gamma}}$ の rank 2 cusp に巻きつかざるを得ないことも分かるので，上の予想が正しければ，スタンダードな成分 $\mathcal{Q}_0$ の境界に収束する全てのエキゾチックな射影構造の列は 5.1 節と同様の方法で構成されることになる．

次にある $\hat{\Gamma}$ とある $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する wrapping map $f_\lambda : S \to N_{\hat{\Gamma}}$ に対して 5.1 節と同様にして構成されたエキゾチックな列が $\mathcal{Q}_\lambda$ に含まれることを示すことが問題になる.（定理２の証明が成功したのは $\hat{\Gamma}$ として特別に扱いやすいものを用いたからである.）以上の問題が解決されると，例えば「$i(\lambda, \mu) \neq 0$ ならば $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda} \cap \overline{\mathcal{Q}_\mu} = \emptyset$」などが分かる（定理３と比較されたい）．

最後に代数的極限 Γ_∞ が幾何的極限 $\hat{\Gamma}$ の中に rank 2 cusp に巻きついて入っているならば，Γ_∞ の不変成分 $\Omega_0(\Gamma_\infty)$ に対応するリーマン面 $\Omega_0(\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$ のモジュライは限定されたものになることが示せると思われる．すなわち $\Omega_0(\Gamma_\infty)/\Gamma_\infty$ において（rank 2 cusp に巻きついている）accidental parabolic element に対応する測地線の長さは上から評価されるであろうと思われる．以上のことが示されると $\overline{Q_0} \cap \overline{Q_\lambda}$（これは non-compact set）の分布がより明らかになる．

参考文献

[1] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book*, Invent. Math. **126** (1996), 205-214.

[2] J. W. Anderson, R. D. Canary and D. McCullough, *On the topology of deformation spaces of Kleinian groups*, to appear, Ann. of Math. http://front.math.ucdavis.edu/math.GT/9806079

[3] K. Bromberg and J. Holt, *Self-bumping of deformation spaces of hyperbolic 3-manifolds*, preprint. http://front.math.ucdavis.edu/math.GT/0009151

[4] W. M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 297-326.

[5] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-Fuchsian space*, Duke Math. J. **105** (2000), 185–209.

[6] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-Fuchsian space II*, in preparation.

[7] S. P. Kerckhoff and W. P. Thurston, *Non-continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmuller space*, Invent. Math. **100** (1990), 25-47.

[8] C. T. McMullen, *Complex earthquakes and Teichmuller theory*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283-320.

19. There are no codimension 1 linear isometries on the ball and polydisk algebras

春日一浩　新潟大学　自然科学研究科

E を Banach 空間とする。Linear isometry $\psi : E \to E$ が余次元 1 であるとは ψ の値域が E の中で余次元 1 である時にいう。

B_n を複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ の単位球とする。S_n を単位球面とする。$A(S_n)$ を ball algebra とする。すなわち S_n 上の複素数値連続関数で B_n 上へ正則に拡張される関数の全体とする。

$n = 1$ の時 $A(S_1)$ は円板環である。円板環上の余次元 1 の linear isometry は存在する。D を単位円板とし T を単位円周とする。$M_a(z) = (z-a)/(1-\bar{a}z)$ $(a \in D)$ と定める。

定理([6]) $A(T)$ を円板環とする。ψ を $A(T)$ 上の余次元 1 の linear isometry とする。この時 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $(|\alpha| = |\beta| = 1)$ と $a, b \in D$ が存在し $(\psi f)(z) = \alpha M_a(z) f(\beta M_b(z))$ $(f \in A(T),\ z \in T)$ を満たす。

D^n を複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ の単位多重円板とする。T^n をトーラスとする。$A(T^n)$ を polydisk algebra とする。すなわち T^n 上の複素数値連続関数で D^n 上へ正則に拡張される関数の全体とする。

Ball algebra $A(S_n)$ は S_n 上の関数環、polydisk algebra $A(T^n)$ は T^n 上の関数環である。関数環上の余次元 1 の linear isometry についてはAraujo と Font によりタイプ分けがなされている。これによると ball algebra $A(S_n)$, polydisk algebra $A(T^n)$ ともに同じタイプに属する。

我々の得た結果は次である。

定理　A は ball algebra $A(S_n)$ または polydisk algebra $A(T^n)$ を表すものとする。$n > 1$ の時、A 上の余次元 1 の linear isometry は存在しない。

$n > 1$ とする。∂A は S_n または T^n を表すものとする。A 上の余次元 1 の linear isometry ψ が存在したとする。[1] より ∂A から ∂A への同相写像 h と任意の $x \in \partial A$ に対して $|a(x)| = 1$ を満たす連続写像 $a : \partial A \to \mathbb{C}$ が存在して

$$(\psi f)(x) = a(x)f(h(x)) \qquad (x \in \partial A,\ f \in A)$$

が成り立つ。これを用いて後に矛盾を出し定理を得る。

References

[1] J. Araujo and J. J. Font, *Codimension 1 linear isometries on function algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 2273-2281.

[2] K. Izuchi, *Douglas algebras which admit codimension 1 linear isometries,* Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[3] K. Kasuga, *There are no codimension 1 linear isometries on the ball and polydisk algebras,* preprint

[4] W. Rudin, *Function Theory in Polydiscs,* Benjamin, New York, 1969.

[5] ———, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer, New York, 1980.

[6] T. Takayama and J. Wada, *Isometric shift operators on the disc algebra,* Tokyo. J. math. 21 (1998), 115-120.

20. Nondegenerate entire maps of $\mathbf{C}^2$ to $\mathbf{C}^2$ (II)

足立幸信

2000年度年会において、$\mathbf{C}^2$ から $\mathbf{C}^2$ への非退化（像がある開集合を含む）整写像を分類し、それらの性質のいくつかを述べた。各クラスの定義を思い出しておくと、

[定義1]. $F: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ を非退化整写像 $(F \in (E))$、$P(x,y)$ を非定数多項式としたとき、

（1）$\forall P(\exists P)$ に対し、$P \circ F$ が双曲型の整関数のとき、F は強双曲型 (resp. 双曲型) の整写像と呼ぶ。$(F \in (SH))(resp.(H))$

（2）$\forall P$ に対し、$P \circ F$ が放物型（特殊放物型、代数型）の整関数のとき、F は放物型 (resp. 特殊放物型、代数型) の整写像と呼ぶ。$(F \in (P)(resp.(SP),(A))$

[注意2]. 各種の二変数整関数の定義は西野による。(西野による論説；数学32巻第3号(1980)又は前回のアブストラクト参照のこと。) 簡単にわかることとして、$(E) = (H) \cup (P), (H) \cap (P) = \emptyset, (SH) \subsetneqq (H), (A) \subsetneqq (SP) \subsetneqq (P)$.

ここでまず分類の意義について述べておこう。まず $F \in (E)$ は一変数の整関数の一般化ということである。(二変数の整関数は一般化といえなくもないが、中途半端なものである。) F の値分布を考えると、Fatou-Bieberbach 現象（$\mathbf{C}^2 - F(\mathbf{C}^2)$ が内点を持つ）を顕著な例として、一筋縄ではいかない自然に遭遇する。一変数整関数においては Picard の小定理が成立するが、リファインされた一般化はさておき、１－１Ｆ－Ｂ写像 $(\in (SH))$ や、超越的自己同型 $(\in (A))$ は超越的でありながら Picard の小定理のオリジナルな形の一般化を阻むものである。こういうような状況においては、対象を分類することからとりかかるのが、常套手段ではないかと思えるのである。

[命題3]. $(e^x, e^y) \in (H)$.　（若林氏のご教示に負う）

従って前回問題として提起した $F_1, F_2 \in (P) \Rightarrow F_1 \circ F_2 \in (P)$? は成立しないし、$f, g$ を代数型整関数とし、$(f,g) \in (E)$ としても $(f,g) \in (P)$ とは必ずしもならない。

さて Heins(1955) により導入され研究された、リーマン面 R からリーマン面 R' への非定値正則写像がＢＬー（Blaschke）型という概念があり、その値分布が調べられている。（楠著、函数論,p280-281,291-293 参照。）

この理論を使うと次のことがいえる。

［定理４］． $F=(f(x,y),g(x,y))\in(E), f,g$ は共に放物型整関数とする。するとあるルベーグ測度 0(in $\mathbf{R}^4$) の集合 E と数 N $(\leq\infty)$ があって $\forall p'\in\mathbf{C}^2-E$ に対して $\sharp\{F^{-1}(p')\}=N$. $F^{-1}(p')$ が曲線を含むような p' の集合を E_0 とすると、$p'\in E-E_0$ に対して $\sharp\{F^{-1}(p')\}<N$.

［系５］． 上の写像 F において、一点 p' があって、$\sharp\{F^{-1}(p')\}=\infty$ なら、高々ルベーグ測度０の集合を除いて $\sharp\{f^{-1}(p')\}=\infty$.

［注意６］． 一変数の超越整関数 $\varphi(x)$ は、$(\varphi(x),y)\in(P)-(SP)$ と自然に考えられるが、$\varphi(x),y$ は二変数の代数型（従って放物型）整関数であるから、系５は一変数の Picard の小定理の一般化と考えられる。双曲型の整写像の一変数の対応物はないから、それについては新たな別の研究を必要とするであろう。しかし、命題３から上の F は双曲型の整写像を含んではいるのであるが。

［定理７］． $F\in(SP)$ なら定理４の N は $N<\infty$ をみたす。

［注意８］． $F=(x,y^2e^x+y)\in(P)-(SP)$ であるが、$N=2$ で $E=\emptyset$ である。

［定理９］． 定理４と同じ F は Iversen の性質を持つ。すなわち、$p'\in\mathbf{C}^2$ に対し、$U'(p')$ という近傍と、$F^{-1}(U')$ の任意の連結成分の１つを U とし、$p\in U$ とする。すると F^{-1} の $F(p)$ における分枝は、U' 内の曲線に沿って p' または p' の直前まで正則に延長できる。

［注意１０］． 上記定理は、一変数の Iversen の定理の拡張と考えられる。

21. 線形化不可能性とコホモロジーの非ハウスドルフ性

金　京南　九州大学数理

$\mathbb{T} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}\{1, \omega\}$ を複素 1 次元トーラスとする。$\mathbb{T}$ 上の 位相的自明な直線束の同値類全体、所謂 Picard variety $Pic^0(\mathbb{T})$ は、$\mathbb{T}$ 自身に同型であることが知られている。この同型対応を

$$\mathbb{T} \ni [z] = z + \mathbb{Z}\{1, \omega\} \mapsto L([z]) \in Pic^0(\mathbb{T})$$

と書く。　このとき、次をえる。

Theorem　無理数 x $(0 < x < 1)$ に対して、その連分数展開による有理数近似を

$$x = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n}$$

とするとき、次は同値である。

1.

$$\sup\{\frac{\log q_{n+1}}{q_n} : n \in \mathbb{N}\} = \infty$$

2. $L([x]) \in Pic^0(\mathbb{T})$ に対して、コホモロジー群

$$H^1(L([x]),\ \mathfrak{O}_{L([x])})$$

が非ハウスドルフ位相線形空間になる。

証明は、ある種の形式的べき級数の収束問題に帰着され、線形化可能性問題に対する Bryuno-Rüssmann-Yoccoz の結果との類似性が見られる。

22. 2変数unimodal例外型singularityに付随する局所コホモロジー類の計算

田島慎一（新潟大学工学部）中村弥生（お茶の水女子大学大学院）

—Milnor algebra の双対空間の生成元である代数的局所コホモロジー類 σ が満たす偏微分方程式系を構成し，σ の具体的な表現を計算する.—

2 変数の **unimodal singularities** で **quasihomogeneous** とならないものは，以下の8つの標準形で与えられる.(これらは全て例外型特異点に属す.)

$$
\begin{array}{lcl}
E_{12} & : & f(x,y) = x^3 + y^7 + axy^5 \\
E_{13} & : & f(x,y) = x^3 + xy^5 + ay^8 \\
E_{14} & : & f(x,y) = x^3 + y^8 + axy^6 \\
Z_{11} & : & f(x,y) = x^3y + y^5 + axy^4 \\
Z_{12} & : & f(x,y) = x^3y + xy^4 + ax^2y^3 \\
Z_{13} & : & f(x,y) = x^3y + y^6 + axy^5 \\
W_{12} & : & f(x,y) = x^4 + y^5 + ax^2y^3 \\
W_{13} & : & f(x,y) = x^4 + xy^4 + ay^6
\end{array}
$$

これらに対し，$f_x = \partial f(x,y)/\partial x$, $f_y = \partial f(x,y)/\partial y$ とおき，$f(x,y)$ の特異点である原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類 $\sigma = [1/f_xf_y]_{(0,0)}$ の $\mathcal{D}_X$ 上の **annihilating ideal** を $\mathcal{A}nn$ とおく．但し，$X = \mathbb{C}^2$ であり，$\mathcal{D}_X$ は X 上の線形偏微分作用素の層とする．また，高々j 階の **annihilator** の生成する左イデアルを $\mathcal{A}nn^{(j)}$ とおく．これらに対し，次の結果を得た．

Proposition 1

(i) $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}$ の原点における重複度 $= 2$

(ii) $\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(2)}$ の原点における重複度 $= 1$

Theorem 2 $\mathcal{A}nn^{(2)} = \mathcal{A}nn$

Theorem 3

(i) $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(1)}, \mathcal{H}^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{\delta_{(0,0)}, \sigma\}$,
ここで，$\delta_{(0,0)}$ は原点に台を持つデルタ関数である．

(ii) $Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X/\mathcal{A}nn^{(2)}, \mathcal{H}^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Span}\{\sigma\}$.

Example E_{12} 型特異点 $(a=1)$: $f(x,y) = x^3 + y^7 + xy^5$ の場合を計算しよう. σ に対し, $\mathcal{A}nn^{(1)}$ は, 関数 $f_x = 3x^2 + y^5$, $f_y = 7y^6 + 5xy^4$ 倍で定義される 0 階の微分作用素と, 次の 2 つの 1 階の線形偏微分作用素で生成される.

$$
\begin{aligned}
P_1 = {} & 201805967390580xy\frac{\partial}{\partial x} + (-7207355978235x + 70632088586703y^2)\frac{\partial}{\partial y} \\
& +(24117187500y^3 - 141809062500y^2 + 833837287500y - 4902963250500)x \\
& -1953125000y^7 + 11484375000y^6 - 33764062500y^5 + 198532687500y^4 \\
& -1167372202500y^3 + 6864148550700y^2 + 827404466301378y,
\end{aligned}
$$

$$
P_2 = (5xy + 7y^3)\frac{\partial}{\partial y} + 20x + 42y^2.
$$

微分方程式 $f_x\sigma = f_y\sigma = P_1\sigma = P_2\sigma = 0$ を解くと, σ に対する次の表現を得る.

$$
\begin{aligned}
\sigma = [& \boxed{?}\frac{1}{xy} - \frac{1220703125}{1483273860320763}\frac{1}{xy^2} + \frac{48828125}{10090298369529}\frac{1}{xy^3} - \frac{1953125}{68641485507}\frac{1}{xy^4} \\
& + \frac{78125}{466948881}\frac{1}{xy^5} - \frac{3125}{3176523}\frac{1}{xy^6} + \frac{125}{21609}\frac{1}{xy^7} - \frac{5}{147}\frac{1}{xy^8} - \frac{9765625}{1441471195647}\frac{1}{x^2y} \\
& + \frac{390625}{9805926501}\frac{1}{x^2y^2} - \frac{15625}{66706983}\frac{1}{x^2y^3} + \frac{625}{453789}\frac{1}{x^2y^4} - \frac{25}{3087}\frac{1}{x^2y^5} + \frac{1}{21}\frac{1}{x^2y^6} \\
& + \frac{3125}{9529569}\frac{1}{x^3y} - \frac{125}{64827}\frac{1}{xy^2} + \frac{5}{441}\frac{1}{x^3y^3} - \frac{1}{63}\frac{1}{x^4y}].
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}nn^{(1)}$ では $1/xy$ の係数を決めることができないことが分かる.

他方, $\mathcal{A}nn^{(2)}$ は関数 f_x, f_y 倍で定義される 0 階の微分作用素と, 2 階の線形偏微分作用素

$$
\begin{aligned}
P = {} & (-625x^2y - 39788xy^2 - 32095x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
& + (1750y^3 + 6250xy - 119364y^2 - 112700x)\frac{\partial}{\partial x} + (3750y^2 + 22050y)\frac{\partial}{\partial y} \\
& + 41250y + 127890
\end{aligned}
$$

で生成される. 微分方程式 $f_x\sigma = f_y\sigma = P\sigma = 0$ を解くことで, σ を完全に求めることができる. 実際, 方程式系 $\mathcal{A}nn^{(1)}$ のみでは未定であった $1/xy$ の係数 $\boxed{?}$ も $\boxed{?} = \dfrac{30517578125}{218041257467152161}$ と決定することができる.

23. 多変数留数計算とホロノミックなD-加群 III
—アルゴリズムの局所化—

田島　慎一　　　新潟大学工学部

Grothendieck residue に対しホロノミック D-加群に対する柏原の双対定理を応用することにより, 留数の値が零となるような有理形微分形式を特徴付けることが出来る (文献 (1)). 本講演では更に、中国剰余定理と偏微分作用素との関係を明かにし, Grothendieck residue の値を求めるアルゴリズムが局所化可能であることを示す.

1　記号と復習

$X = C^n$ 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ とする. 多項式 $f_1, f_2, ..., f_n \in Q[z_1, z_2, .., z_n]$ の生成するイデアルを $I = < f_1, f_2, ..., f_n > \subset \mathcal{O}_X$ とおく. ただし, $f_1, f_2, ..., f_n$ は regular sequence であるとする. 今,

$$i : \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{H}^n_{[V(\sqrt{I})]}(\mathcal{O}_X)$$

なる自然な写像による像を Σ とおく. また, 代数的局所コホモロジー類 σ を

$$\sigma = i([\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}])$$

で定める. ただし $[\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ は Grothendieck symbol である.

X 上の正則関数を係数とする正則な線形偏微分作用素全体のなす層を $\mathcal{D}_X$ とし, 代数的局所コホモロジー類 σ に対し,

$$\mathcal{A}nn = \{R \in \mathcal{D}_X \mid R\sigma = 0\}$$

と定める. 本稿では簡単の為, 以下の条件を満たすような1階の偏微分作用素 P が存在するとして議論を進める.

条件　$\mathcal{A}nn = \mathcal{D}_X < P, F_1, F_2, ..., F_n >$

ただし, ここで F_j は f_j を掛けるという作用素を零階の偏微分作用素とみなしたものを意味している.

さて, 多項式環における剰余 $Q[z_1, z_2, ..., z_n]/I$ をベクトル空間とみなし, E_I とおく. ここで $P : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ が well-defined であることを用いると, 偏微分作用素 P の形式随伴作用素 P^* がこのベクトル空間 E_I に作用することが従う.

Fact　$P^* : E_I \longrightarrow E_I$ は well-defined.

(3年程前になるが) 上記の結果を用いて, Grothendieck local residues を求めるアルゴリズムを導いた. 以上で復習を終える.

2 随伴作用素 P^* と中国剰余定理

イデアル $I \subset \mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]$ の準素イデアル分解を $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_s$ とし, 対応する Σ の直和分解を

$$\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \oplus \cdots \oplus \Sigma_s$$

とする. ただし $\Sigma_i = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{[V(\sqrt{I_i})]}(\mathcal{O}_X) \mid I_i \eta = 0\}$ である.

補題 $P : \Sigma_i \longrightarrow \Sigma_i$ は well-defined.

ここで $E_{I_i} = \mathbb{Q}[z]/I_i$ とおき, 偏微分作用素 P の形式随伴作用素 P^* を考える.

命題 $P^* : E_{I_i} \longrightarrow E_{I_i}$ は well-defined.

ヤコビ行列式を $J(z) = \dfrac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(z_1, z_2, ..., z_n)}$ とおく.

定義

(1) $K_{I_i} = \{q(z) \in E_{I_i} \mid \mathrm{Res}_\alpha(\dfrac{q(z)dz}{f_1 f_2 \cdots f_n}) = 0,\ \alpha \in V(\sqrt{I_i})\}$

(2) $L_{I_i} = \{r(z)J(z) \bmod I_i \mid r(z) \in E_{\sqrt{I_i}}\}$

ただし, $E_{\sqrt{I_i}} = \mathbb{Q}[z]/\sqrt{I_i}$ とおいた.

さて, これらのベクトル空間を具体的に決定できれば多変数留数の計算が可能となる. そこで, P^* のベクトル空間 $E_{I_i} = K_{I_i} \oplus L_{I_i}$ への作用を考えると, 次の基本的結果を得る.

定理

(i) $\mathrm{Im}(P^* : E_{I_i} \longrightarrow E_{I_i}) = K_{I_i}$.

(ii) $\mathrm{Ker}(P^* : E_{I_i} \longrightarrow E_{I_i}) = L_{I_i}$.

3 文献

(1) 田島慎一, 中村弥生: 多変数有理関数の留数計算について, 数理解析研究所講究録 **1085** (1999), 71–81.

(2) 田島慎一, 中村弥生: D-加群を用いた留数計算アルゴリズムの局所化, 数式処理 **7** (1999), 2–7.

(3) S. Tajima and Y. Nakamura: Computing point residues for a shape basis case via differential operators, 数理解析研究所講究録 **1158** (2000), 87–97.

特別講演

有理型写像の一意性問題

相原　義弘　（沼津高専）

Introduction

複素多様体上に与えられた因子の逆像に関する条件下での有理型写像の一意性問題は G. Pólya, R. Nevanlinna 及び H. Cartan 等の研究に始まる．一変数有理型関数の一意性に対する Pólya-Nevanlinna の定理，有限性に関する Cartan-Nevanlinna の定理はよく知られている (cf. [6], [13], [14], [17])．これらの定理の高次元化は様々な立場から研究されているが，特に複素射影空間上に因子として一般の位置にある超平面を与えた場合，藤本坦孝氏による一連の研究により深い結果が得られている (cf. [9], [10], [11])．本講演では初めにコンパクト複素多様体上にある種の既約な因子を与えた場合に有理型写像の family の有限性問題について考える．次に有理型写像に関する一意性定理を与える．我々はこの問題を代数的従属性の伝播という観点から考える．この様な観点は L. Smiley [19], W. Stoll [20] によって導入された．この際引き戻された因子の重複度を考慮しない．最後に非特異楕円曲線に値を持つ正則写像が楕円曲線の自己準同型で写りあうための条件を与える．

§1. Finiteness theorem for meromorphic mappings.

M をコンパクト複素多様体，$L \to M$ を M 上の正則直線バンドルとする．$\sigma_1, \cdots, \sigma_s$ を一次独立な $L \to M$ の正則セクションとする ($s \geq 2$)．以下ある正の整数 d と M 上の effective な因子 D_j が存在して $(\sigma_j) = dD_j$ $(1 \leq j \leq s)$ を満たすと仮定する．

$$\varpi = c_1\sigma_1 + \cdots + c_s\sigma_s$$

と置く．但し $c_j \in \mathbb{C}^*$ である．D を $\varpi = 0$ で定義される M 上の因子とする．有理型写像 $\Psi : M \to \mathbb{P}_{s-1}(\mathbb{C})$ を

$$\Psi = (\sigma_1, \cdots, \sigma_s)$$

で定義する．

定義 1.1. p を非負の正数とする．$\mathbb{C}^m$ 上の因子 E_1, E_2 に対して，$\mathbb{C}^m$ 上の因子 E' で $E_1 - E_2 = pE'$ を満たすものが存在する時

$$E_1 \equiv E_2 \pmod p$$

と書く; 特に $p = 0$ の場合，$E_1 \equiv E_2 \pmod 0$ と $E_1 = E_2$ は同値である．

E を $\mathbb{C}^m$ 上の effective な因子とする．Zariski 稠密な像を持つ有理型写像 $f : \mathbb{C}^m \to M$ で $f^*D \equiv E \pmod p$ を満たすもの全体からなる family を

$$\mathcal{F}^*(p; (\mathbb{C}^m, E), (M, D))$$

で表す．この時次の有限性定理が成立する (cf. [2, Theorem 5.1]):

定理 1.2. rank $\Psi = \dim M$ かつ $d > (s+1)!\,\{(s+1)! - 2\}$ を仮定する．この時 D のみに依存する計算可能な定数 $C = C(D)$ が存在して

$$\sharp\mathcal{F}^*(d; (\mathbb{C}^m, E), (M, D)) \leq C$$

が成立する．

$\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^m)$ に対し　$\gamma^j = \gamma \circ \cdots \circ \gamma$ (j-times).と置く．

系 1.3. γ を $\mathbb{C}^m$ の自己同型, $f : \mathbb{C}^m \to M$ を Zariski 稠密な像を持つ有理型写像とする．rank $\Psi = \dim M$ かつ $\gamma^* f^* D \equiv f^* D \pmod{d}$ を仮定する．もし $d > (s+1)!\,\{(s+1)! - 2\}$ であれば D のみに依存する正の整数 j_0 で $f \circ \gamma^{j_0} = f$ を満たすものが存在する．

定理 1.1 は複素射影空間に値を持つ有理型写像の場合に帰着することにより証明される．以下の定理 1.4 が本質的に重要である．$E_1, \cdots, E_{n+2}$ を $\mathbb{C}^m$ 上の effective な因子, $H_1, \cdots, H_{n+2}$ を $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ 内の一般の位置にある超平面とする．線型非退化な有理型写像 $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ で $1 \leq j \leq n+2$ に対し

$$f^* H_j \equiv E_j \pmod{p}$$

を満たすもの全体からなる family を

$$\mathcal{E}(p; (\mathbb{C}^m, \{E_j\}), (\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \{H_j\}))$$

とする．この時, 藤本の有限性定理 ([11]) の一般化が成立する (cf. [2, Theorem 4.1]):

定理 1.4. $p = 0$ または $p > (n+2)!\,\{(n+2)! - 2\}$ を仮定する．この時 n のみに依存する定数 q_n が存在して

$$\sharp\mathcal{E}(p; (\mathbb{C}^m, \{E_j\}), (\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \{H_j\})) \leq q_n$$

が成立する．

$p = 0$ の場合が藤本の定理である．有理型写像の family

$$\mathcal{F}^*((\mathbb{C}^m, E), (M, D)) := \mathcal{F}^*(0; (\mathbb{C}^m, E), (M, D))$$

に対しては次を得る (cf. [2, 定理 5.5]):

定理 1.5. rank $\Psi = \dim M$ を仮定する．もし $d > 4s(s-1)$ であれば, D のみに依存する定数 $C = C(D)$ が存在して

$$\sharp\mathcal{F}^*((\mathbb{C}^m, E), (M, D)) \leq C$$

が成立する．

ここで定理 1.1 の条件を満足する $(M,\ D)$ の例を挙げる．

例 1.6. E_1 及び E_2 を非特異楕円曲線とする. e_1 (resp. e_2) を abelian group E_1 (resp. E_2) の単位元, p_1 (resp. p_2) を E_1 (resp. E_2) の d-torsion point とする.E_i 上の正則直線バンドルを $L_i = [p_i]^{\otimes d}$ で定義する. Abel の定理により de_i と dp_i は線型同値である. よって正則なセクション $\varphi_0,\ \varphi_1 \in \Gamma(E_1,\ L_1)$ 及び $\psi_0,\ \psi_1 \in \Gamma(E_2,\ L_2)$ が存在して $(\varphi_0) = de_1,\ (\varphi_1) = dp_1,\ (\psi_0) = de_2$ and $(\psi_1) = dp_2$. $M = E_1 \times E_2$ と置き, M 上の正則直線バンドル $L \to M$ を $L = \pi_1^* L_1 \otimes \pi_2^* L_2$ で定義する. ここに $\pi_i : M \to E_i$ は自然な射影を表す. $\sigma_j \in \Gamma(M,\ L)$ を

$$\sigma_1 = \pi_1^*\varphi_0 \otimes \pi_2^*\psi_0,\ \sigma_2 = \pi_1^*\varphi_0 \otimes \pi_2^*\psi_1,\ \sigma_3 = \pi_1^*\varphi_1 \otimes \pi_2^*\psi_0,\ \sigma_4 = \pi_1^*\varphi_1 \otimes \pi_2^*\psi_1$$

で定義する. この時 M 上のある effective な因子 D_j に対し $(\sigma_j) = dD_j$ でありかつ $\operatorname{rank}\Psi = 2$ が成立する.

§2. Criteria for propagation of algebraic dependence.

本節では有理型写像が代数的に従属するための条件を与える. $\pi : X \to \mathbb{C}^m$ を有限解析的被覆空間, B を分岐因子とする. M を非特異射影的代数多様体とする. 正の整数 l に対して, $M^l = M \times \cdots \times M$ (l-times) と置く. 有理型写像 $f_1, \cdots, f_l : X \to M$ が与えられた時, 有理型写像 $f_1 \times \cdots \times f_l : X \to M^l$ を

$$(f_1 \times \cdots \times f_l)(z) = (f_1(z), \cdots, f_l(z)), \quad z \in X - (I(f_1) \cup \cdots \cup I(f_l))$$

で定義する. 但し $I(f_j)$ は各 f_j の indeterminacy locus を表す. M^l の proper algebraic subset Σ が decomposable であるとは, 正の整数による l の分割 $l = l_1 + \cdots + l_s$ と algebraic subsets $\Sigma_j \subseteq M^{l_j}$ が存在して $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_s$ となることと定義する.

定義 2.1. S を X の analytic subset とする. 非定数有理型写像 $f_1, \cdots, f_l : X \to M$ が S 上代数的に従属するとは M^l の decomposable でない albebraic subset Σ が存在して $(f_1 \times \cdots \times f_l)(S) \subseteq \Sigma$ が成立することとする. この時 $f_1, \cdots, f_l$ は S 上 Σ-related であると言うことにする.

$L \to M$ を ample な正則直線バンドル, $D_1, \cdots, D_q \in |L|$ は $D_1 + \cdots + D_q$ が単純正規交差であるものとする. $S_1, \cdots, S_q$ を X 上の超曲面で $\dim S_i \cap S_j \leq m - 2 (i \neq j)$ を満たすものとして $S = S_1 \cup \cdots \cup S_q$ と置く. E を X 上の effective な因子, k を正の整数とする. $E = \sum_j \nu_j E'_j$ である時

$$\operatorname{Supp}_k E = \bigcup_{0 < \nu_j \leq k} E'_j$$

と置く. 以下正の整数 k_j を固定する. この状況下で dominant な有理型写像 $f : X \to M$ で $\operatorname{Supp}_{k_j} f^* D_j = S_j$ を満たすもの全体からなる family を $\mathfrak{F}$ で表す. $F_1, \cdots, F_l$ を M 上の big な正則直線バンドルとして

$$\tilde{F} = \pi_1^* F_1 \otimes \cdots \otimes \pi_l^* F_l$$

とおく. 但し $\pi_j : M^l \to M$ は自然な射影を表す. $\tilde{L}$ を M^l 上の big な正則直線バンドルとする. $\tilde{L} \neq \tilde{F}$ である場合, 正の有理数 $\tilde{\gamma}$ で $\tilde{\gamma}\tilde{F} \otimes \tilde{L}^{-1}$ が big であるものが存在すると

仮定する. $\tilde{L} = \tilde{F}$ の時は, $\tilde{\gamma} = 1$ とする. $\mathcal{R}$ を X 上の超曲面 Σ の集合で次を満たすもの全体とする: $\Sigma = \mathrm{Supp}\ \tilde{D}$ ($\tilde{D} \in |\tilde{L}|$) かつ Σ は decomposable でない.

定義 2.2. Y コンパクト複素多様体とする. 有理型写像 $f : X \to Y$ が $\pi : X \to \mathbb{C}^m$ の fibers を分離するとは $z \in \mathbb{C}^m - (\mathrm{Supp}\ \pi_* B \cup \pi(I(f)))$ が存在して $f(x) \neq f(y)$ が任意の相異なる $x,\ y \in \pi^{-1}(z)$ に対して成立することである.

野口の定理により非定数有理型写像が1つでも存在すればこのような写像は必ず存在することに注意しておく (cf. [15]).

s_0 を $\pi : X \to \mathbb{C}^m$ の generic fiber の点の個数とする. $f : X \to M$ が $\pi : X \to M$ の fibers を分離すると仮定する. L は ample であるから, 正の整数 μ と $\sigma_0, \sigma_1 \in H^0(M,\ \mu L)$ が存在して $\pi : X \to \mathbb{C}^m$ の fibers を分離するような $f : X \to M$ に対し有理型関数 $f^*(\sigma_0/\sigma_1)$ が $\pi : X \to \mathbb{C}^m$ の fibers を分離する. μ_0 をこの性質を持つ最小の正の整数とする. 更に次の性質を持つ正則直線バンドルが $\{F_1, \cdots, F_l\}$ の中に存在すると仮定する (F_0 で表す): $F_0 \otimes F_j^{-1}$ は big であるかまたは自明である. $k_0 = \max_{1 \leq j \leq q} k_j$ と置く. $L_0 \in \mathrm{Pic}(M) \otimes \mathbb{Q}$ を

$$L_0 = \left(\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j + 1} - 2\mu_0(s_0 - 1) \right) L \otimes \left(-\frac{\tilde{\gamma} l k_0}{k_0 + 1} F_0 \right).$$

と定義する. この時次の基本的な補題が成立する:

補題 2.3. $f_1, \cdots, f_l$ を $\mathcal{F}$ に属する任意の有理型写像, $\Sigma \in \mathcal{R}$ とする. $f_1, \cdots, f_l$ を S 上 Σ-related とする. この時もし $L_0 \otimes K_M$ が big であれば $f_1, \cdots, f_l$ は X 全体で Σ-related である.

上記の定理の証明においては分岐因子 B の個数関数 $N(r,\ B)$ の評価が本質的である. 従来 W. Stoll 等の研究では B 及び有理型写像の増大度に関する条件の下で結果が得られていた (cf. [20]). しかしながらこの条件下では非常に限定された場合以外写像の存在が保証されない. 上記の補題の証明では野口による $N(r,\ B)$ の評価および有理型写像の algebroid reduction に関する結果が本質的に用いられる (cf. [15]). これにより増大度に関する条件を総て取り除くことが出来る.

次に上の状況をもう少し一般化する. $q_1, \cdots, q_l$ を正の整数とし $D_j = D_{j1} + \cdots + D_{jq_j} \in |q_j L|$ は高々単純正規交差とする. 但し $D_{jk} \in |L|$ である. Z を X 上の超曲面とする. $\mathcal{G}$ で dominant な有理型写像 $f : X \to M$ である j に対して $\mathrm{Supp}_{k_j} f^* D_j = Z$ を満たすもの全体からなる family を表す. $L_1 \in \mathrm{Pic}(M) \otimes \mathbb{Q}$ を

$$L_1 = \left(\min_{1 \leq j \leq l} \left\{ \frac{q_j k_j}{k_j + 1} \right\} - 2\mu_0(s_0 - 1) \right) L \otimes \left(-\frac{\tilde{\gamma} l k_0}{k_0 + 1} F_0 \right)$$

で定義する. この時もう一つの基本的結果を得る.

補題 2.4. $f_1, \cdots, f_l$ を $\mathcal{G}$ に属する有理型写像, $\Sigma \in \mathcal{R}$ とする. $f_1, \cdots, f_l$ は Z 上 Σ-related であると仮定する. もし $L_1 \otimes K_M$ が big であれば $f_1, \cdots, f_l$ は X 全体で Σ-related である.

この補題の次のような変形は応用上有用である. $F \in \mathrm{Pic}(M) \otimes \mathbb{Q}$ に対し, $[F/L]$ を

$$[F/L] = \inf \left\{ \gamma \in \mathbb{Q};\ \gamma L \otimes F^{-1} \ \text{is big} \right\}$$

で定義する. n_j, p_j, e_0 を次のように定める:

$$n_1 = q_1 - [K_M^{-1}/L] - 2\mu_0(s_0 - 1), \quad n_j = q_j - [K_M^{-1}/L] \ \ (2 \le j \le l),$$

$$p_j = \frac{q_j k_j}{1 + k_j} - [K_M^{-1}/L] - 2\mu_0(s_0 - 1), \quad e_0 = 2\mu_0(s_0 - 1) + 1.$$

この時次の系を得る:

系 2.5. $f_1, \cdots, f_l$, $\Sigma \in \mathfrak{R}$ を補題 2-2 と同様とする. $f_1, \cdots, f_l$ は Z 上 Σ-related とする. もし総ての $n_j > 0$ かつ

$$p_1 - \frac{\tilde{\gamma} l k_0}{k_0 + 1}[F_1/L] + \sum_{j=2}^{l}\left(n_1 p_j - \frac{\tilde{\gamma} l e_0 k_0}{n_j(k_0 + 1)}[F_j/L]\right) > 0$$

であれば $f_1, \cdots, f_l$ は X 全体で Σ-related である.

以上の結果は [5] による.

§3. Unicity theorems for meromorphic mappings.

本節では §2 の結果から得られる有理型写像の一意性定理を与える. $\Phi : M \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ を有理型写像で $\operatorname{rank}\Phi = \dim\ M$ を満たすものとする. H で $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ 上の超平面バンドルを表す. $l = 2$ として $F_1 = F_2 = \Phi^* H$ とおく. 更に $\tilde{L} = \tilde{F}$ とする. この時

$$L_0 = \left(\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j + 1} - 2\mu_0(s_0 - 1)\right) L \otimes \left(-\frac{2k_0}{k_0 + 1}\Phi^* H\right)$$

である. $f_0 \in \mathcal{F}$ を一つ固定する. A set $\{D_j\}_{j=1}^{q}$ of divisors は

$$f_0(X - I(f_0)) \cap \operatorname{Supp} D_j \cap \{w \in M;\ \operatorname{rank} d\Phi(w) = \dim\ M\} \ne \emptyset$$

が少なくとも 1 つの j について成立するとき f_0 と Φ に関して generic であると言われる. 以下本節ではこれを仮定する. $\mathcal{F}_1$ を $f \in \mathcal{F}$ であって S 上 $f = f_0$ を満たす写像よりなる subfamily とする. この時補題 2.1 を用いて次の一意性定理を得る (cf. [3, Theorem 2.1]):

定理 3.1. $L_0 \otimes K_M$ が big であると仮定する. この時 family $\mathcal{F}_1$ は唯 1 つの写像 f_0 よりなる.

$L_0 \otimes K_M$ が big でない場合も Nevanlinna の除外因子の存在を仮定すれば同様な結果が得られる (cf. [3, Theorem 2.15]):

定理 3.2. $[L_0^{-1} \otimes K_M^{-1}/L] = 0$ であると仮定する. もし $\delta_{f_0}(D_j) > 0$ を満たす D_j が 1 つでも存在すれば family $\mathcal{F}_1$ は唯 1 つの写像 f_0 よりなる.

関連した結果が [1], [7], [8] によっても得られている. 複素射影空間上に一般の位置にある超平面を与えた場合にも同様な結果が得られることに注意しておく (cf. [4]).

次に dim $M = 1$ の場合を考える. 以下 M は genus g_0 の compact Riemann 面であるとする. $g_0 = 0$ の場合には定理 3.1 により X 上の有理型関数に対して次の一意性定理が得られる (cf. [5, Theorem 3.2]):

定理 3.3. $f_1, f_2 : X \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ を非定数有理型関数, $a_1, \cdots, a_d$ を相異なる $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ 上の点とする. 次が成立する.

(1) $\mathrm{Supp} f_1{}^* a_j = \mathrm{Supp} f_2{}^* a_j$ かつ $d \geq 2s_0 + 3$ であれば $f_1 \equiv f_2$.

(2) $\mathrm{Supp}_1 f_1{}^* a_j = \mathrm{Supp}_1 f_2{}^* a_j$, かつ $d \geq 4s_0 + 3$ であれば $f_1 \equiv f_2$.

この結果は sharp である. $g_0 = 1$ の場合は次節で論ずる. $g_0 \geq 2$ の場合は次を得る (cf. [5, Theorem 3.4]):

定理 3.4. $f_1, f_2 : X \to M$ を非定数正則写像, $a_1, \cdots, a_d$ を M 上の相異なる点とする.

(1) $\mathrm{Supp} f_1^* a_j = \mathrm{Supp} f_2^* a_j$ かつ $d > \max\{4g_0,\ 2(g_0+1)(s_0-1)\}$ であれば $f_1 \equiv f_2$.

(2) $\mathrm{Supp}_1 f_1^* a_j = \mathrm{Supp}_1 f_2^* a_j$ かつ $d > 2(g_0+1)(2s_0+1)$ であれば $f_1 \equiv f_2$.

§4. Holomorphic mappings into smooth elliptic curves.

E を非特異楕円曲線, $f_1, f_2 : X \to E$ を非定数正則写像とする. 本節では abelian group E の endomorphism φ に対して $f_2 = \varphi(f_1)$ となるための条件を与える. 初めに $\mu_0 = 2$ となることに注意しておく (cf. [16]). $p \in E$ に対して, $F_1 = F_2 = [p]$ と置く. $\varphi \in \mathrm{End}(E)$ に対して $E \times E$ 上の曲線

$$\tilde{S} = \{(x,\ y) \in E \times E;\ y = \varphi(x)\}$$

を考える. $\tilde{L}$ を $\tilde{S}$ によって定まる正則直線バンドルとする. 本節では $\tilde{\gamma}$ は $\gamma\tilde{F} \otimes [\tilde{S}]^{-1}$ が ample となるような有理数 γ の下限とする. この時 $\tilde{\gamma} = \deg\varphi + 1$ が成立する (桂の定理, [5, §6]). 定理 3.1 により次を得る (cf. [5, Theorem 5.1]):

定理 4.1. $D_1 = \{a_1, \cdots, a_d\} \subset E$ として, $D_2 = \varphi(D_1)$ と置く. D_2 もまた d 個の点よりなると仮定する. ある k に対して $\mathrm{Supp}_k\ f_1^* D_1 = \mathrm{Supp}_k\ f_2{}^* D_2$ であるとする. もし $d > 2(\deg\varphi + 1) + 8(s_0-1)(1+k^{-1})$ であれば $f_2 = \varphi(f_1)$ が成立する.

$\sharp D_2 < d$ である場合には系 2.3 により次を得る (cf. [5, Theorem 5.2]):

定理 4.2. $X = \mathbb{C}^m$ とする. $D_1 = \{a_1, \cdots, a_d\} \subset E$, $D_2 = \varphi(D_1)$ とする. D_2 は d' 点よりなるとする. $\mathrm{Supp}_1\ f_1^* D_1 = \mathrm{Supp}_1\ f_2^* D_2$ を仮定する. もし $dd' > (d+d')(\deg\varphi + 1)$ であれば $f_2 = \varphi(f_1)$ が成立する.

定理 4.1 より次の一意性定理を得る (cf. [5, Theorem 5.5]):

定理 4.3. $a_1, \cdots, a_d$ を E の相異なる点とする. $f_1, f_2 : X \to E$ を非定数正則写像とする. $\mathrm{Supp}_1\ f_1^* a_j = \mathrm{Supp}_1\ f_2^* a_j$ を仮定する. もし $d > 16s_0 - 12$ であれば $f_1 \equiv f_2$.

この定理は Schmid の一意性定理 ([18]) の精密化でありかつ sharp である.

参考文献

[1] Y. Aihara, A unicity theorem for meromorphic mappings into compactified locally symmetric spaces, Kodai Math. J. **14** (1991), 392–405.

[2] Y. Aihara, Finiteness theorems for meromorphic mappings, Osaka J. Math. **35** (1998), 593–616.

[3] Y. Aihara, The uniqueness problem of meromorphic mappings with deficiencies, Tohoku Math. J. **51** (1999), 315–328.

[4] Y. Aihara, Unicity theorems for meromorphic mappings with deficiencies, Complex Variables **42** (2000), 259–268.

[5] Y. Aihara, Algebraic dependence of meromorphic mappings in value distribution theory, preprint, 2000.

[6] H. Cartan, Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variété linéaires lacunaires et leurs applications, Ann. Sci. École Norm. Sup. **45** (1928), 255–346.

[7] S. J. Drouilhet, A unicity theorem for meromorphic mappings between algebraic varieties, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981), 349–358.

[8] S. J. Drouilhet, Criteria for algebraic dependence of meromorphic mappings into algebraic varieties, Illinois J. Math. **26** (1982), 492–502.

[9] H. Fujimoto, The uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective spaces, Nagoya Math. J. **58** (1975), 1–23.

[10] H. Fujimoto, A uniqueness theorem for algebraically non-degenerate meromorphic maps into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, Nagoya Math. J. **64** (1976), 117–147.

[11] H. Fujimoto, On meromorphic maps into compact complex manifolds, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 527–539.

[12] R. Nevanlinna, Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math. **48** (1926), 367–391.

[13] R. Nevanlinna, Compléments aux théorèmes d'unicité dans la théorie des fonctions méromorphes, Comptes Rendus **186** (1928), 289–291.

[14] R. Nevanlinna, Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonction Méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[15] J. Noguchi, Meromorphic mappings of covering spaces over $\mathbb{C}^m$ into a projective variety and defect relations, Hiroshima Math. J. **6** (1976), 265–280.

[16] J. Noguchi, Holomorphic mappings into closed Riemann surfaces, Hiroshima Math. J. **6** (1976), 281–290.

[17] G. Pólya, Bestimmung einer ganzen Funktionen endlichen Geschlechts durch vierelei Stellen, Math. Tidsskreift B (1921), 16–21.

[18] E. M. Schmid, Some theorems on value distribution of meromorphic functions, Math. Z. **120** (1971), 61–92.

[19] L. Smiley, Geometric conditions for the unicity of holomorphic curves, Contemporary Math. **25** (1983), 149–154.

[20] W. Stoll, On the propagation of dependences, Pacific J. Math. **139** (1989), 311–337.

Numazu College of Technology
3600 Ohoka, Numazu,
Shizuoka 410,
Japan
E-mail address: aihara@la.numazu-ct.ac.jp