日　本　数　学　会

２０００年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

２０００年3月

於　早稲田大学理工学部

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.

2. 委員会の任務

(1) 函数論分科会評議員候補者を選出する.

(2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.

(3) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.

(4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.

(5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.

(6) 分科会の行事 (たとえば，シンポジウムの開催等) について決定する.

(7) 次期委員会委員候補者の推薦.

(8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期

(1) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加，削減できる.

(2) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.

(3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.

(i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.

(ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.

4. 委員会の開催及び議決

(1) 委員会は評議員が召集する.

(2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.

(3) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.

(4) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する.

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務

(1) 委員会の司会をする.

(2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.

(3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.

(4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する.
付則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する.

第 IX 会場 函数論分科会

3月27日 (月)

9:30～12:00

1	西本　勝之	(デカルト出版)	*	N-fractional calculus method to a partial and fractional differintegral equation …… 15
2	西本　勝之	(デカルト出版)	*	$\zeta(-z)$ and the graphs of $\zeta(-x)$ …… 10
3	西本　勝之	(デカルト出版)	*	Some integral forms for Riemann's zeta function …… 15
4	尾和　重義 布川　護 斎藤　斉 H.M. Srivastava	(近畿大理工) (群馬大教育) (群馬工業高専) (ビクトリア大学)		Close-to-convexity, starlikeness and convexity …… 15
5	二村　俊英 岸　恭子 水田　義弘	(広島大理) (広島大理) (広島大総合科学)		多調和関数に対する Liouville 型定理について …… 15
6	二村　俊英 水田　義弘	(広島大理) (広島大総合科学)		ソボレフ関数の存在について …… 15
7	吉田　英信 宮本　育子	(千葉大自然) (千葉大理)		コーン内の希薄集合 (rarefied set) のウィナー型判定条件 …… 15
8	正岡　弘照 瀬川　重男	(京都産大理) (大同工大)		$\hat{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$ の有限葉非有界被覆面の Martin 境界 …… 15
9	柴田　敬一	(国際自然科学研究所)	*	リーマン面の調和写像について …… 15

14:15～15:45

10	須川　敏幸	(京大理)	*	A remark on Ahlfors' univalence criterion and its application …… 15
11	須川　敏幸	(京大理)	*	A conformally invariant metric on Riemann surfaces associated with integrable holomorphic quadratic differeintials …… 15
12	糸　健太郎	(東工大理工)		Distribution of projective structures whose holonomy images are function groups …… 15
13	佐藤　宏樹	(静岡大理)		Jørgensen groups of parabolic type …… 15
14	志賀　啓成	(東工大理)	*	Rigidity and finiteness theorems for holomorphic mappings on complex hyperbolic manifolds …… 15
15	中根　静男	(東京工芸大工)	*	Boundaries of capture components for parabolic cubic polynomials …… 15

16:00～17:00　特別講演

小森　洋平　(阪市大理)　* 1次元タイヒミュラー空間の複素解析 …… (16:00～17:00)

3月28日 (火)

9:00~11:55

16 Vu Kim Tuan (クェート大) * Size of support of initial heat distribution in the 1D heat equation ··· 15
斎藤 三郎 (群馬大工)
西郷 恵 (福岡大理)

17 下村 俊 (慶大理工) Painlevé 超越関数と small function ··· 15

18 村上 温 (広島工大工) * Inequalities on networks ··· 15
山崎 稀嗣 (島根大総合理工)

19 大沢 健夫 (名大多元数理) $\mathbb{P}^2$ 内の C^ω 級 Levi 平坦超曲面の非存在 ··· 20

20 大沢 健夫 (名大多元数理) コンパクトな複素軸をもつ擬凸超曲面 ··· 20
Klas Diederich (Wuppertal大)

21 大沢 健夫 (名大多元数理) 非 Kähler 軸の一例 ··· 5

22 大沢 健夫 (名大多元数理) 複素多様体上の L^2 拡張定理 ··· 20

23 大内 重樹 (東工大理工) * 可算個の代数的集合の非交和における A_p 補間問題について ··· 15

3月29日 (水)

9:45~12:00

24 足立 幸信 * Nondegenerate entire maps of $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2$ ··· 15

25 足立 幸信 * Parabolic or hyperbolic Stein manifolds of dimension 2 ··· 10

26 小林 正史 (東大数理) 領域の減少列上の不変距離の収束について ··· 15

27 城崎 学 (阪府大工) * 低次数の小林双曲的な超曲面の例 ··· 10

28 藤本 坦孝 (金沢大理) * 複素射影空間内の小林双曲的超曲面について ··· 15

29 相原 義弘 (沼津工業高専) * Criteria for algebraic dependence of meromorphic mappings ··· 15

30 松本 和子 (大阪女大理) Cohomological completeness of q-complete domains with corners ··· 15

31 神保 敏弥 (奈良教育大教育) * トーラス上の関数のグラフの多項式凸包 ··· 10

32 坪井 昭二 (鹿児島大理) Infinitesimal locally trivial deformation spaces of compact complex surfaces with ordinary singularities ··· 15

14:15~15:15 特別講演

城崎 学 (阪府大工) 超曲面による正則写像の一意性 ··· (14:15~15:15)

1 . N- fractional calculus method to a partial and fractional differintegral equation

Katsuyuki Nishimoto

Abstract

In this paper, a partial and fractional differintegral equation

$$\varphi_{\alpha(t)} = \sigma^2 \varphi_{\beta(x)} \qquad \begin{pmatrix} \varphi = \varphi(x,t), \ \sigma \neq 0 \\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} - \{0\} \end{pmatrix}$$

is discussed by means of N- fractional calculus.

When $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}^+$, the above mentioned equation has the familiar form

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial t^\alpha} = \sigma^2 \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial x^\beta} .$$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- method to constant coefficients linear $n(\in Z^+ \geq 2)$th order ordinary differential equations, J. Frac. Calc. Vol. 13, may (1998), 13 - 18.

[6] K. Nishimoto ; N - method to fractional differintegral equations $\varphi_{\pm m/n} + \varphi \cdot a = f$ $(a \neq 0, m < n.\ m, n \in Z^+)$, J. Frac. Calc. Vol.14, (1998), 41 - 44.

[7] K. Nishimoto; N -method to fractional differintegral equations of viscoelastic vibration (I), J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 73 - 82.

[8] K. Nishimoto ; N -fractional calculus method to an almost wave equation, J. Frac. Calc. Vol. 17, May (2000), 11 - 18.

[9] R.Gorenflo and R. Rutman ; On ultraslow and intermediate processes, Transform Methods & Special Functions, Sofia '94, Proc. of Intern. Workshop (1994), 61 - 81.

[10] F. Mainardi ; Fractional relaxation in an elastic solids, J. Alloys and Compounds, Vol. 211 - - 212, (1994),534 - 538.

[11] F. Mainardi; Fractional relaxation - oscillation and fractional diffusion - wave phenomena, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 7, No. 6, (1996), 1 - 17.

[12] W. Zhang and N. Shimizu ; Numerical Algorithm for Dynamic Problems Involving Fractional Operators, JSME Int., J., Ser. C, Vol.40, No.3 (1997)

[13] S. Sakakibara ; Properties of Vibration with Fractional Derivative Damping of order 1/ 2, JSME Int., J., Ser. C, Vol.41, No.3 (1998),364 - 370.

2. $\zeta(-z)$ and the graphs of $\zeta(-x)$

Katsuyuki Nishimoto

Abstract

In this paper, some identities for $\zeta(-z)$ and the prime numbers, and the graphs of $\zeta(-x)$ are reported, where $\zeta(z)$ is the famous Riemann's zeta function and $z = x + iy$ ($x, y \in \boldsymbol{R}$, $i = \sqrt{-1}$).

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- fractional derivatives and some identities for Riemann's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, may (1999), 43 - 47.

[6] K. Nishimoto ; N- fractional calculus and some identities for generalized Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, may (1999), 49 - 54.

[7] K. Nishimoto ; On the convergence of N- fractional calculus of Zeta functions, J. Frac. Calc. Vol.16, Nov. (1999), 51 - 54.

[8] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999), 75 - 84.

[9] Japan Math. Soc. (Edit.) ; Mathematical Encyclopedia (1954), 834 - 846, Iwanami.

[10] E.C. Titchmarsh ; The theory of the Riemann zeta Function (1951), Oxford.

[11] Y. Komatsu ; Special functions (1967),50 - 63. Asakura.

3. Some integral forms for Riemann's zeta function

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this paper, some integral forms for Riemann's zeta function and some identities for prime numbers are reported. Some theorems are shown as follows.

Theorem. We have

(i)
$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-(1/2)(k+1)kt}\left(1-e^{-(k+1)t}\right)}{e^t-1}\,dt \quad (\mathrm{Re}\,z>1) \tag{1}$$

and

(ii)
$$\zeta(-z)=\frac{1}{\Gamma(-z)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{t^{-z-1}e^{-(1/2)(k+1)kt}\left(1-e^{-(k+1)t}\right)}{e^t-1}\,dt \quad (\mathrm{Re}\,z<-1). \tag{2}$$

Theorem. We have

(i)
$$\frac{1-\left(\sum_{m=1}^{r}m^{-z}\right)\prod_p\left(1-p^{-z}\right)}{\prod_p\left(1-p^{-z}\right)}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-rt}}{e^t-1}\,dt \quad (\mathrm{Re}\,z>1) \tag{3}$$

and

(ii)
$$\frac{1-\left(\sum_{m=1}^{r}m^{z}\right)\prod_p\left(1-p^{z}\right)}{\prod_p\left(1-p^{z}\right)}=\frac{1}{\Gamma(-z)}\int_0^{\infty}\frac{t^{-z-1}e^{-rt}}{e^t-1}\,dt \quad (\mathrm{Re}\,z<-1) \tag{4}$$

where p are the prime numbers and $r\in Z^{+}$.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- fractional derivatives and some identities for Riemann's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 43 - 47.

[6] K. Nishimoto ; N- fractional calculus and some identities for generalized Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 49 - 54.

[7] K. Nishimoto ; Partial sums of Riemann's Zeta function and their N -fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999),7 - 12.

[8] K. Nishimoto ; Partial sums of generalized Zeta function and their N -fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999),43 - 49.

[9] K. Nishimoto ; On the convergence of N -fractional calculus of Zeta functions, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999),51 - 54.

[10] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$, J. Frac. calc. Vol. 16, Nov. (1999) 75 - 84.

[11] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of $\zeta(z;a)$ and $\zeta(-z;a)$, J. Frac. calc. Vol. 17, May (2000), 1 - 10.

[12] K. Nishimoto ; $\zeta(-z)$ and the graphs of $\zeta(-x)$, J. Frac. calc.Vol. 17, May (2000), 95 - 101.

[13] Japan Math. Soc. (Edit.) ; Mathematical Encyclopedia (1954), 834 - 846, Iwanami.

[14] E.C. Titchmarsh ; The theory of the Riemann Zeta function (1951), Oxford.

[15] Y. Komatsu ; Special functions (1967), 50 - 63, Asakura.

[16] S. Moriguchi, Y. Udagawa and S. Hitotsumatsu ; Mathematical Formulas II, Iwanami shoten, (1957).

4. CLOSE-TO-CONVEXITY, STARLIKENESS AND CONVEXITY

Shigeyoshi Owa
Department of Mathematics, Kinki University

Mamoru Nunokawa
Department of Mathematics, Gunma University

Hitoshi Saitoh
Department of Mathematics, Gunma College of Technology

and

H.M. Srivastava
Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions f *normalized* by

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

which are *analytic* in the *open* unit disk

$$\mathcal{U} := \{z : z \in \mathbb{C} \quad \text{and} \quad |z| < 1\}.$$

Also let $\mathcal{S}^*(\alpha)$, $\mathcal{K}(\alpha)$, and $\mathcal{C}(\alpha)$ denote the subclasses of $\mathcal{A}$ consisting of functions which are, respectively, *starlike, convex close-to-convex of order* α in $\mathcal{U}$ $(0 \leqq \alpha)$. Thus we have

$$\mathcal{S}^*(\alpha) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad \Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{U};\, 0 \leqq \alpha < 1) \right\},$$

$$\mathcal{K}(\alpha) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad \Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{U};\, 0 \leqq \alpha < 1) \right\},$$

and

$$\mathcal{C}(\alpha) := \left\{ f : f \in \mathcal{A} \quad \text{and} \quad \Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > \alpha \quad (z \in \mathcal{U};\, 0 \leqq \alpha < 1;\, g \in \mathcal{K}) \right\},$$

where, for convenience,

$$\mathcal{S}^* := \mathcal{S}^*(0), \quad \mathcal{K} := \mathcal{K}(0), \quad \text{and} \quad \mathcal{C} := \mathcal{C}(0).$$

Theorem 1. *Let the function $f \in \mathcal{A}$ satisfy the inequality:*

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \frac{1+3\alpha}{2(1+\alpha)} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1).$$

Then

$$\Re\{f'(z)\} > \frac{1-\alpha}{2} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1)$$

or, equivalently,

$$f \in \mathcal{C}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \quad (0 \leqq \alpha < 1).$$

Theorem 2. *If the function $f \in \mathcal{A}$ satisfies the inequality:*

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \frac{3+2\alpha}{2+\alpha} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1),$$

then

$$|f'(z)-1| < 1+\alpha \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1).$$

Theorem 3. *If the function $f \in \mathcal{A}$ satisfies the inequality:*

$$|f'(z)-1|^{\beta}\,|zf''(z)|^{\gamma} < \frac{(1-\alpha)^{\beta+\gamma}}{2^{\beta+2\gamma}} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1;\ \beta,\gamma \geqq 0),$$

then

$$\Re\{f'(z)\} > \frac{1+\alpha}{2} \quad (z \in \mathcal{U};\ 0 \leqq \alpha < 1).$$

Theorem 4. *If the function $f \in \mathcal{A}$ satisfies the inequality:*

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \begin{cases} \dfrac{5\lambda-1}{2(\lambda+1)} & (z \in \mathcal{U};\ 1 < \lambda \leqq 2) \\[2ex] \dfrac{\lambda+1}{2(\lambda-1)} & (z \in \mathcal{U};\ 2 < \lambda < 3) \end{cases}$$

for some λ $(1 < \lambda < 3)$, then

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{\lambda(1-z)}{\lambda-z}.$$

The result is sharp for the function f given by

$$f(z) = z\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)^{\lambda-1}.$$

5. 多調和関数に対する Liouville 型定理について

二村　俊英　　広島大・理学研究科
岸　　恭子　　広島大・理学研究科
水田　義弘　　広島大・総合科学部

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の実数値関数 $u \in C^{2m}$ が、 $\Delta^m u = 0$ となるとき m **調和**であるといい、$u \in H^m(\mathbf{R}^n)$ と表わす。正則関数に対する Liouville の定理が、多調和関数についていろいろと拡張されているので、それらを以下にまとめる。

定理 A.　$u \in H^m(\mathbf{R}^n)$ および $s > 2(m-1)$ と仮定する。このとき, u が高々 s 次の多項式となるための必要十分条件は、

(i) $\displaystyle \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{s+n-1}} \int_{\{x:|x|=r\}} u^+ \, dS = 0$　　([1])

(ii) $\displaystyle \liminf_{r\to\infty} \left(\max_{|x|=r} \frac{u(x)}{|x|^s} \right) < \infty$　　([2])

(iii) $\displaystyle \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{s+n}} \int_{\{x:|x|<r\}} u^+ \, dx = 0$　　([3])

のいずれかが成り立つことである。

この講演では、これら (i) ～ (iii) より弱い形の条件を報告する。

主定理.　上と同じ仮定の下で、

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^{s+n-1}} \int_{\{x:|x|=r\}} u^+ \, dS < \infty \tag{1}$$

が成り立つならば、u は高々 s 次の多項式となる。

この定理を証明するために、次の補題を使う。

補題 1 (Almansi 分解). ([4])　多調和関数 $u \in H^m(\mathbf{R}^n)$ に対して、

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} |x|^{2(i-1)} h_i(x) \tag{2}$$

となる調和関数族 $\{h_i\}_{i=1}^m \subset H^1(R^n)$ が（一意的に）存在する。

補題 2.　$u \in H^1(\mathbf{R}^n)$ とする。このとき、任意の多重指数 λ に対して、ある正定数 $C = C(\lambda, u)$ と u によって決まる高々 k 次の多項式 $P_k(r)$ が存在して、

$$\int_{\{x:|x|=r\}} ux^\lambda \, dS = Cr^{2|\lambda|+n-1} D^\lambda u(0) + P_{2|\lambda|+n-3}(r)$$

が成り立つ。

これは $|\lambda|$ についての帰納法により示すことができる。

この補題 2 によると、定理の条件 (1) と次の条件が同値であることが示される：

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-s-n+1} \int_{\{x:|x|=r\}} |u| \, dS < \infty \tag{3}$$

参考文献

[1] D. H. Armitage, A polyharmonic generalization of a theorem on harmonic functions, J. London Math. Soc. (2) **7** (1973), 251-258.

[2] M. Nakai and T. Tada, A form of classical Liouville theorem for polyharmonic functions, to appear in Hiroshima Math. J.

[3] Y. Mizuta, An intefral representation and fine limits at infinity for functions whose Laplacians iterated m times are measures, Hiroshima Math. J. **27** (1997), 415-427.

[4] M. Nicolesco, Recherches sur les fonctions polyharmoniques, Ann. Sci. École Norm Sup. **52** (1935), 183-220.

6. ソボレフ関数の存在について

二村　俊英　　　　広島大学理学研究科
水田　義弘　　　　広島大学総合科学部

ディリクレ積分が有限である調和測度が存在するかどうかについては中井による一連の研究がある ([10], [11], [12]). 本講演では，中井の研究に関連した Herron-Koskela の最近の結果 [4] を一般化する．

R^n の単位球 B 上の仮似連続関数 u で条件

$$\int_B |\mathrm{grad}\ u(x)|^p(1-|x|)^\alpha\, dx < \infty \tag{1}$$

を満足するものを考える．ここに，$1 < p < \infty$，$-1 < \alpha < p-1$ とする．この関数は，境界上の容量零の集合を除いて，角境界値（角領域からの極限値）をもつ．その境界値を $u|_{\partial B}$ と表わすと，$u|_{\partial B} \in L^p(\partial B)$ で

$$\int\int_{\partial B\times\partial B} \frac{|u|_{\partial B}(x) - u|_{\partial B}(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2-\alpha}}\, dS(x)dS(y) < \infty \tag{2}$$

を満たす ([13]).

定理. $E \subset \partial B$, $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < p-1$ とするとき，(1) を満たし

$$u|_{\partial B} = \chi_E \qquad (E\text{の特性関数}) \tag{3}$$

となる仮似連続関数 u が存在すると仮定する．

(i) $p > n+\alpha$ ならば，E は空集合である．

(ii) $2+\alpha \le p \le n+\alpha$ ならば，E の球面測度は零である．

(iii) E の球面測度が零であれば，E は容量零である．

注意. $1 < p < 2 + \alpha$ のとき，$E \subset \partial B$ の境界がきれいであれば，(1), (3) を満たす仮似連続関数が存在する．

参考文献

[1] L. Carleson, Selected problems on exceptional sets, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[2] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[3] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Oxford Univ. Press, 1993.

[4] D. A. Herron and P. Koskela, Continuity of Sobolev functions and Dirichlet finite harmonic measures, Potential Analysis 6 (1997), 347-353.

[5] N. G. Meyers, A theory of capacities for potentials in Lebesgue classes, Math. Scand. **26** (1970), 255-292.

[6] N. G. Meyers, Continuity properties of potentials, Duke Math. J. **42** (1975), 157-166.

[7] Y. Mizuta, Integral representations of Beppo Levi functions of higher order, Hiroshima Math. J. **4** (1974), 375-396.

[8] Y. Mizuta, On removable singularities of harmonic functions in L^p, Memoirs of the Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University, Ser. IV, Vol. 9 (1984) 9-21.

[9] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosyo, Tokyo, 1996.

[10] M. Nakai, Dirichlet finite harmonic measures on Riemann surfaces, Complex Variables 17 (1991), 123-131.

[11] M. Nakai, Existence of Dirichlet finite harmonic measures in non-linear potential theory, Complex Variables 21 (1993), 107-114.

[12] M. Nakai, Existence of Dirichlet finite harmonic measures on the Euclidean balls, Nagoya Math. J. 133 (1994), 85-125.

[13] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.

7. コーン内の希薄集合 (rarefied set) のウィナー型判定条件

吉田　英信　千葉大・自然科学
宮本　育子　千葉大・理

$\mathbf{S}^{n-1}$($\mathbf{R}^n$ 内の単位球面) 上のなめらかな境界をもつ領域 Ω に対して、$\mathbf{R}^n$ 内の点 P の極座標表示を (r,Θ) で表わす時、

$$C_n(\Omega) = \{P = (r,\Theta) \in \mathbf{R}^n; (1,\Theta) \in \Omega\}$$

をコーンとよぶ。半空間は、$\Omega = \mathbf{S}_+^{n-1}$(上半単位球面) の時の特別なコーンである。

ラプラシアン Δ_n の球面部分 Λ_n

$$\Delta_n = \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-2}\Lambda_n$$

に関する、Ω でのディイリクレ問題

$$\begin{aligned} (\Lambda_n + \lambda)f &= 0 \quad on\ \Omega \\ f &= 0 \quad on\ \partial\Omega, \end{aligned}$$

の最小な正の固有値と固有関数を λ_Ω, $f_\Omega(\Theta)$ で表わす。

$$t^2 + (n-2)t - \lambda_\Omega = 0$$

の 2 根を $\alpha_\Omega, -\beta_\Omega$　$(\alpha_\Omega, \beta_\Omega > 0)$ とする。

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E に対して

$$E_k = E \cap \{P = (r,\Theta) \in C_n(\Omega);\ 2^k \le r < 2^{k+1}\}$$

とおき、$C_n(\Omega)$ 上の調和関数

$$K(P,\infty) = r^{\alpha_\Omega} f_\Omega(\Theta) \quad (P = (r,\Theta) \in C_n(\Omega))$$

の E_k への掃散 (balayage) を $\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}(P)$, $C_n(\Omega)$ のグリーン関数を $G(P,Q)$ で表わす時、

$$\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot,\infty)}(P) = \int_{C_n(\Omega)} G(P,Q)d\lambda_{E_k}(Q) \quad (P \in C_n(\Omega))$$

なる $C_n(\Omega)$ 上の測度 λ_{E_k} の全測度 $\lambda_{E_k}(C_n(\Omega))$ を $\lambda(E_k)$ で表わす。

$C_n(\Omega)$ の部分集合 E が ∞ で希薄である (rarefied) とは、$C_n(\Omega)$ 上の正値優調和関数 $v(P)$ で

$$\inf_{P\in C_n(\Omega)} \frac{v(P)}{K(P,\infty)} = 0$$

かつ

$$E \subset \{P = (r,\Theta) \in C_n(\Omega);\ v(P) \geq r^{\alpha_\Omega}\}$$

なるものが存在するときをいう。

$C_n(\Omega)$ が半空間のときの Essén and Jackson [1] 等の結果が、コーンに対して次のように一般化されることを報告する。

定理 1. $C_n(\Omega)$ の部分集合 E が ∞ で希薄であるための必要十分条件は

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\beta_\Omega}\lambda(E_k) < +\infty.$$

定理 2. $v(P)$ を $C_n(\Omega)$ での正値優調和関数とする。

$$\inf_{P\in C_n(\Omega)} \frac{v(P)}{K(P,\infty)} = c$$

とおくとき、∞ で希薄な集合 E で、$C_n(\Omega) - E$ 上では $r \to +\infty$ につれて $v(P)r^{-\alpha_\Omega}$ が $cf_\Omega(\Theta)$ に一様収束する、ものが存在する。

参考文献

[1] M. Essén, H. L. Jackson: On the covering properties of certain exceptional sets in a half-space, Hiroshima Math. J. **10**(1980), 233–262.

8. $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ の有限葉非有界被覆面の Martin 境界

瀬川 重男　大同工業大学
正岡 弘照　京都産業大学理学部

W を $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ の m 葉非有界被覆面 $(1 < m < \infty)$ とし，π を W から $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ への射影とする．$\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ の Martin compact 化は $\hat{\mathbf{C}}$ と同一視されることはよく知られている．W^* を W の Martin compact 化，$\Delta^\sim$ を W の Martin 境界，$\Delta_1^\sim$ を W の minimal 境界とする．$\Delta^\sim$ の形状を考察したい. 以下では, W として, 次のようにして構成される **Heins の m 葉非有界被覆面**を考察する. $\{\epsilon_n\}$ を $0 < \epsilon_n < 2^{-n}$, $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ をみたす数列とする.
$C = \hat{\mathbf{C}} \setminus (I \cup \{0\})$ $(I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n = [2^{-n}, 2^{-n} + \epsilon_n])$ とおく.
$C_1, \cdots, C_m$ を C の copy とする. $j = 1, \cdots, m$ に対し, C_j 上の切り口 I の下岸と C_{j+1} 上の切り口 I の上岸を溶接して $(j \bmod. m)$ 得られる $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$ の m 葉 cyclic 非有界被覆面を Heins の m 葉非有界被覆面と言う. このとき, 次がなりたつ.

命題 1([M-S 1, M, M-S 2]).
1) I **が** 0 **で thin であるならば,** $\sharp\Delta_1^\sim = m$.
2) I **が** 0 **で thin でないならば,** $\sharp\Delta_1^\sim = 1$.

$D_0 = \{0 < |z| < 1\}, D_0^\sim = \pi^{-1}(D_0)$ とおくと, $D_0^\sim$ の Martin 境界は $\Delta^\sim \cup \pi^{-1}(\partial D)$ と同一視され, $D_0^\sim$ の minimal 境界は $\Delta_1^\sim \cup \pi^{-1}(\partial D)$ と同一視される. $p^\sim \in \Delta_1^\sim$ で極をもつ $D_0^\sim$ 上の Martin 関数を $k_p^\sim$ と記すことにする. 命題 1 より, $\sharp\Delta_1^\sim = m$ あるので, $\Delta_1^\sim = \{p_1^\sim, \cdots, p_n^\sim\}$ とおく. このとき, 命題 1 と $\Delta^\sim$ の連結性より, 容易に, $m = 2$ に対しては, 次が従う.

命題 2. $m = 2$ **とする.**
1) I **が** 0 **で thin であるならば,** $\Delta^\sim = [p_1^\sim, p_2^\sim]$. **ここで,**
$[p_1^\sim, p_2^\sim] = \{p^\sim \in \Delta^\sim | k_{p^\sim}^\sim = t\tilde{k}_{p_1^\sim} + (1-t)k_{p_2^\sim}^\sim \quad (t \in [0,1])\}$.
2) I **が** 0 **で thin でないならば,** $\Delta^\sim = \{1$ **点**$\}$.

$m > 2$ のときの $\Delta^\sim$ の形状が問題になる. $a^\sim$ は $\pi(a^\sim) = 2^{-1}$ をみたす

点とする. $k_{p_j^\sim}^\sim(a^\sim) = 1(j = 1, \cdots, m)$ をみたすとする. $p_0^\sim$ を それを極にもつ Martin 関数が $\frac{1}{m}(k_{p_1^\sim}^\sim + k_{p_2^\sim}^\sim \cdots + k_{p_m^\sim}^\sim)$ で与えられる $\Delta^\sim$ の元とする. このとき, 次を得る.

主定理. $m > 2$ **とする.**
1) I **が** 0 **で thin であるならば,** $\Delta^\sim = [p_0^\sim, p_1^\sim] \cup [p_0^\sim, p_2^\sim] \cdots \cup [p_0^\sim, p_m^\sim]$.
2) I **が** 0 **で thin でないならば,** $\Delta^\sim = \{1$ **点** $\}$.

参考文献

[H] M. Heins, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[M-S1] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.

[M] H. Masaoka, *Harmonic dimension of covering surfaces, II*, Kodai Math. J., **18**(1995), 487-493.

[M-S2] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, Osaka J. Math., **34**(1997), 659-672.

9. リーマン面の調和写像について

柴田　敬一　国際自然科学研究所

相等しい種数 $g(>0)$ をもつ, marking のついた 閉リーマン面 の 1 対 R, S, が与えられたとし R 及び S の局所座標をそれぞれ z 及び w とする. S 上の conformal metric $ds^2 = \rho(w)|dw|^2$ (ただし, $\rho(w)$ は正値連続とする) に対し, R から S への向きを保つ写像 f であって且つそれから誘導される対応 $w_f : z \to w$ がディリクレ積分

$$I[f] = \frac{1}{4i}\iint_R \rho \circ w_f(z)[|\partial w_f/\partial z|^2 + |\partial w_f/\partial \bar{z}|^2]dz \wedge d\bar{z} \geq 0$$

を有限ならしめるものが少なくとも 1 つ存在することがわかり、したがってこのような写像の族のなかで $I[f]$ の極小問題が意味を持つことになり、その解として R から S への調和写像が定義される.

今回の講演は調和写像の応用を主とし、解析函数論・実解析で基本的な定理の一般化について述べ、新しい結果をも報告する.

10. A REMARK ON AHLFORS' UNIVALENCE CRITERION AND ITS APPLICATION

須川 敏幸　　京都大学・理学部

Ahlforsはその有名な論文[1]において普遍Teichmüller空間のBers埋め込みが空間$B(\mathbb{D})$において開集合であることを証明したが、Lehtoは[4]においてその証明が実際にはより具体的に、quasidisk Dに対する単葉性内半径$\sigma(D)$の次のような評価を含んでいることを指摘した。

$$\sigma(D) \geq 2 \inf_{z \in D'} \frac{|\bar{\partial}\lambda(z)| - |\partial\lambda(z)|}{|\lambda(z) - z|^2 \rho_D(z)^2},$$

ただしここで$\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$は$\partial D$に関する擬鏡映(qc reflection)で、$\partial D$を除いては$C^1$級であるものとする。単葉性内半径とは、$D$上の非定数有理型函数$f$が

$$\|S_f\|_{B(D)} = \sup_{z \in D} \rho_D(z)^{-2} |S_f(z)| \leq \sigma$$

を満たすならばfがD上で単葉となるような定数$\sigma \geq 0$の最大値のことを言う。ここにρ_DはDの双曲計量の密度とし、S_fはfのSchwarz微分を表すとする。$\sigma(D)$は、普遍Teichmüller空間のBers埋め込み$T(1) \subset B(\mathbb{D})$において、$D$のRiemann写像が表す点と$T(1)$の境界との距離を表すとも考えられる。

しかしながら、この評価自体はそのような一般のquasidiskおよび擬鏡映に対して正しいことを示すのはそれほど易しいわけではない。実際、その後Lehtoは教科書[5]において、この結果をDがある意味で星形に近い（正確には、$0 \in D$として、さらに$rD (0 < r < 1)$の形の領域の可算列でDが内部から埋め尽くされる）という仮定の下で上の不等式を証明している。また、最近ではBetker [3]が与えられたLöwner chainに付随するような特別な擬鏡映ついて、同様の評価式を与えている。しかし、この不等式自体はより一般の状況の下で成り立つであろうということは誰しも疑わないであろう。実際に、次のことが証明できたので報告したい。

定理 1. λ **を** quasidisk D **の境界に関する擬鏡映とすれば、**

$$\sigma(D) \geq 2 \operatorname*{ess.\,inf}_{z \in D} \frac{|\bar{\partial}\lambda(z)| - |\partial\lambda(z)|}{|\lambda(z) - z|^2 \rho_D(z)^2}$$

が成り立つ。

証明には、Bersによる近似定理[2, Lemma 1]を本質的に用いる他、擬正則写像に関する鏡像原理、quasidiskのGehringによる特徴付けなどを本質的に用いる。

講演では、この結果を用いて具体的に長方形がどのような単葉性内半径を持つかなど、いくつかの応用についても触れたい。

REFERENCES

[1] AHLFORS, L. V. Quasiconformal reflections, *Acta Math.*, **109** (1963), 291–301.

[2] BERS, L. A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings, *Acta Math.*, **116** (1966), 113–134.

[3] BETKER, T. Univalence criteria and Löwner chains, *Bull. London Math. Soc.*, **23** (1991), 563–567.

[4] LEHTO, O. Remarks on Nehari's theorem about the Schwarzian derivative and schlicht functions, *J. Analyse Math.*, **36** (1979), 184–190.

[5] LEHTO, O. *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag (1987).

11. A CONFORMALLY INVARIANT METRIC ON RIEMANN SURFACES ASSOCIATED WITH INTEGRABLE HOLOMORPHIC QUADRATIC DIFFERENTIALS

須川 敏幸　　京都大学・理学部

この講演では可積分正則2次微分の空間から定まる等角不変計量を定義し、その計量の持つ性質について概観する。

まず、R を任意のリーマン面として $A(R)$ を R 上の可積分正則2次微分全体のなす複素バナッハ空間とし、

$$A_0(R) = \{\$\varphi \in A(R); \|\varphi\|_{A(R)} := \iint_R |\varphi| = \iint_R |\varphi(z)|dxdy \leq \pi\}$$

と定める。局所座標を固定した上で、

$$q_R(z) = \sup_{\varphi \in A_0(R)} |\varphi(z)|^{1/2}$$

と定めれば、$q_R(z)|dz|$ は R 上の擬計量となる。より詳しくは、$A(R)$ が正の次元を持つ（つまり R が自明でない複素構造の変形を許す）ならば、q_R は実際に計量となり、それ以外の場合は恒等的に0になる。リーマン面 R について $A(R) = 0$ となる場合を例外型、そうでない場合を一般型と呼ぶことにする。

極値的な二次微分について次のことが言える。

定理 1. R を一般型リーマン面とし、その上の局所座標 z を一つ固定する。$z_0 = z(p_0)$ とすると、これに対してある $\varphi_0 \in A_0(R)$ が一意的に存在して

$$q_R(z_0)^2 = \varphi_0(z_0)$$

を満たす。しかもこの φ_0 は次の再生公式を満たす：

$$\psi(z_0) = \frac{q_R(z_0)^2}{\pi} \iint_R \frac{|\varphi_0|}{\varphi_0}\psi \quad (\forall \psi \in A(R)).$$

逆にこの再生公式を満たす任意の φ_0 に対し、$\pi\varphi/\|\varphi\|_{A(R)}$ と正規化したものは上の極値問題の解になっている。

また、この計量について次の評価式が成立する。

補題 2.

$$\sqrt{\pi K_R(z,z)} \leq q_R(z) \leq h_R(z).$$

ただし、ここで K_R は R の Bergman 核、h_R は R の Hahn 計量とする。

以下では R は双曲的とする。$B(R)$ を R 上の双曲的有界な正則2次微分全体のなすバナッハ空間とし、そのノルムを $\|\varphi\|_{B(R)} = \sup \rho_R^{-2}|\varphi|$ によって定義する。ただし、ここに

$\rho_R = \rho_R(z)|dz|$ は R の双曲計量とする。そこで $\kappa(R) = \sup\{\|\varphi\|_{B(R)}; \varphi \in A_0(R)\}$ と定める。特に $A(R) \subset B(R) \Leftrightarrow \kappa(R) < +\infty$ であることに注意する。実は次のことが言える。

補題 3.

$$\kappa(R) = \sup_{p\in R} \left(\frac{q_R}{\rho_R}(p) \right)^2 .$$

従って、q_R/ρ_R は大域的な量 $\kappa(R)$ を局所化した量だと思うことが出来る。$\kappa(R)$ については松崎克彦氏 [1] による具体的評価が知られているが、q_R を詳しく解析することにより、それを再生することが出来る。

講演では、具体的な q_R の評価や、一様完全性との関連についても言及する予定である。

References

[1] Matsuzaki, K. The Petersson series for short geodesics, XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium (Joensuu, 1995), de Gruyter, Berlin (1997).

12. Distribution of projective structures whose holonomy images are function groups

糸　健太郎　（東京工業大学　理工学研究科）

コンパクトなリーマン面上の射影構造の空間において，ホロノミー写像の像が function group になるものの分布を調べる．

S を種数 g が 2 以上の閉曲面とする．既約なコンパクト 3 次元多様体 M が S に関する compression body であるとは，M が次のように構成されたときをいう：$S\times[0,1]$ の $S\times\{1\}$ に沿って幾つかの 2 −ハンドルを貼り，境界に S^2 ができたらそこに 3 −ハンドルを貼る．$S\times\{0\}$ に対応する ∂M の成分を exterior boundary と呼び $\partial_0 M$ と書く．S に関する compression body 全体を $CB(S)$ と書く．$M_1, M_2\in CB(S)$ に対して，embedding $f: M_1\hookrightarrow M_2$ は $f|\partial_0 M_1 : \partial_0 M_1\to\partial_0 M_2$ が同相写像のとき admissible であるという．

Γ を上半平面 $\mathbf{H}$ に作用するフックス群で $S\cong\mathbf{H}/\Gamma$ となるものとする．Γ に関する $\mathbf{H}$ 上の正則 2 次微分の空間を $B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ と書く．$\varphi\in B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ に対して，その developing map と holonomy 表現をそれぞれ $f_\varphi:\mathbf{H}\to\hat{\mathbf{C}}$, $\rho_\varphi:\Gamma\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ と書く．$B_2(\mathbf{H},\Gamma)$ の部分集合を次のように定義する：

$$\begin{aligned}
C(\Gamma) &= \{\varphi | f_\varphi \text{ は covering map}\}\\
&\cup\\
C_0(\Gamma) &= \{\varphi\in C(\Gamma) | \rho_\varphi(\Gamma) \text{ は torsoin free で } \mathbf{H}/\Gamma\cong f_\varphi(\mathbf{H})/\rho_\varphi(\Gamma)\}\\
&\cup\\
C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma) &= \{\varphi\in C_0(\Gamma) | \rho_\varphi(\Gamma) \text{ は geometrically finite}\}\\
&\cup\\
T(\Gamma) &= \{\varphi | f_\varphi \text{ は単射で } \hat{\mathbf{C}} \text{ 上の擬等角写像に拡張できる}\}.
\end{aligned}$$

また

$$S_0(\Gamma) = \{\varphi\in C_0(\Gamma) | \rho_\varphi(\Gamma) \text{ は Schottky group}\}$$

と定める．$S_0(\Gamma)\subset C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ である．

$C(\Gamma), C_0(\Gamma)$ はコンパクトである．$\varphi\in C(\Gamma)$ に対して，$\rho_\varphi(\Gamma)$ は function group で $f_\varphi(\mathbf{H})$ がその不変成分となる．(Torsion free な) function group は topologically tame なので，$\varphi\in C_0(\Gamma)$ に対してあるコンパクト 3 次元多様体 M_φ が存在して $\mathrm{int}(M_\varphi)\cong\mathbf{H}^3/\rho_\varphi(\Gamma)$ となる．$M_\varphi\in CB(S)$ である．$\varphi\in T(\Gamma)$ に対して $M_\varphi\cong S\times[0,1]$ であり，$\varphi\in S_0(\Gamma)$ に対して $M_\varphi\cong H_g$ (H_g は種数 g の handle body) である．

$\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ を含む $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の連結成分を $CC(\varphi)$ と書く．また $\varphi \in C(\Gamma)$ の擬等角変形空間を $QC(\varphi)$ と書く．$\varphi \in C(\Gamma)$ が minimally parabolic であるとは，$\rho_\varphi(\Gamma)$ が rank 1 parabolic subgroup を含まないときをいう．$\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，$CC(\varphi)$ は minimally parabolic な元 φ_0 を含み，$CC(\varphi) = \overline{QC(\varphi_0)} \cap C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ となる [2]．この φ_0 を用いて $\partial CC(\varphi) = \overline{QC(\varphi_0)} - QC(\varphi_0)$ と定める．($CC(\varphi) = \{\varphi\}$ のときは $\partial CC(\varphi) = \{\varphi\}$ とする．)

$C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の連結成分に関しては，次の決定的な結果がある．

命題 1 (Matsuzaki [2])．$\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ とする．φ と ψ が $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の同じ連結成分に含まれる必要十分条件は $\ker \rho_\varphi = \ker \rho_\psi$ が成り立つことである．

また，次のことは容易にわかる．

補題 2. $\ker \rho_\varphi \neq \ker \rho_\psi$ のとき，すなわち $CC(\varphi) \cap CC(\psi) = \emptyset$ のとき $\overline{CC(\varphi)} \cap \overline{CC(\psi)} = \emptyset$ が成り立つ．

上の補題より，ある連結成分 $CC(\varphi)$ に $CC(\varphi)$ の外から $C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ の点列が収束するならば，その点列は無限個の連結成分を経由しなくてはならないことがわかる．

$\mathrm{Mod}(S)$ を S の写像類群とする．$\mathrm{Mod}(S)$ は自然に左から $C_0(\Gamma)$ に作用する．$\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ が $\varphi \in C_0(\Gamma)$ に作用したものを φ^σ と書く．$\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ に対して，$M_\varphi \cong M_{\varphi^\sigma}$ や $\ker \rho_{\varphi^\sigma} = \sigma_*(\ker \rho_\varphi)$ などが成り立つ．

次が主定理である．

定理 3. $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して次の条件は同値である．

(1) ある $\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ が存在して $\ker \rho_\varphi \subset \sigma_*(\ker \rho_\psi)$ が成り立つ，
(2) admissible embedding $M_\varphi \hookrightarrow M_\psi$ が存在する，
(3) 軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial CC(\varphi)$ を含む，
(4) 軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包と $CC(\varphi)$ の閉包の共通部分は空ではない．

主定理の本質的な部分は，(2) から (3) を示すことにある．

任意の $\varphi, \psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，admissible embedding $S \times [0,1] \hookrightarrow M_\psi$ と $M_\varphi \hookrightarrow H_g$ が存在するので，上の定理より次の 2 つの系を得る．

系 4. 任意の $\psi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ に対して，軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial T(\Gamma)$ を含む．

系 5. 任意の $\varphi \in C_0^{\mathrm{gf}}(\Gamma)$ と任意の $\psi \in S_0(\Gamma)$ に対して，軌道 $\{\psi^\sigma\}_{\sigma \in \mathrm{Mod}(S)}$ の閉包は $\partial CC(\varphi)$ を含む．

References

[1] K. Ito, *Schottky groups and Bers boundary of Teichmüller space*, preprint.
[2] K. Matsuzaki, *Projective structures inducing covering maps*, Duke Math. J. **78** (1995), 413–425.

13. Jørgensen groups of parabolic type

Hiroki SATO
Department of Mathematics
Shizuoka University

1. In this talk we will consider Jørgensen groups of parabolic type.

DEFINITION 1. Let A and B be Möbius transformations. The *Jørgensen number* $J(A,B)$ is

$$J(A,B) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|.$$

DEFINITION 2. Let G be a non-elementary two-generator subgroup of Möb. The *Jørgensen number* $J(G)$ for G is defined as follows:

$J(G) := \inf\{J(A,B) \mid A \text{ and } B \text{ generate } G\}.$

DEFINITION 3. A non-elementary two-generator subgroup G of Möb is a *Jørgensen group* if G is a discrete group with $J(G) = 1$.

THEOREM A (Jørgensen-Kikka [1]). *If $G = \langle A, B\rangle$ is a Jørgensen group, then A is parabolic or elliptic of order at least* 7.

2. Here we will consider the case where A is parabolic, that is, we will consider two-generator groups $G_{\sigma,ik} = \langle A, B_{\sigma,ik}\rangle$ generated by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\sigma,ik} = \begin{pmatrix} ik\sigma & -k^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & ik\sigma \end{pmatrix},$$

where $\sigma \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ and $k \in \mathbf{R}$.

Let C be the following cylinder:

$C = \{(\sigma, ik) \mid |\sigma| = 1,\ k \in \mathbf{R}\},$

THEOREM B (Sato [2]).
(i) *For each point inside the cylinder C, the corresponding group $G_{\sigma,ik}$ is not a Kleinian group and not a Jørgensen group.*
(ii) *Every Jørgensen group of type $G_{\sigma,ik}$ lies on the cylinder C.*

Last time we considered the following two kinds of one-parameter families:
(1) $\{G_{1,ik}\}$ $(k \in \mathbf{R})$ (Sato-Yamada [4]).
(2) $\{G_{\sigma,\sqrt{3}i/2}\}$ where $\sigma = -e^{i\theta}$ $(0 \le \theta < 2\pi)$ (Sato [2]).

THEOREM 1 (Sato [3]) *Let $G_{-e^{i\theta},ik} = \langle A, B_{-e^{i\theta},ik}\rangle$ be the group generated by A and $B_{-e^{i\theta},ik}$.*

(i) *If* $0 < \theta < \pi/6$ or $\pi/3 < \theta < \pi/2$, *then* $G_{-e^{i\theta},ik} = \langle A, B_{-e^{i\theta},ik}\rangle$ *is not a Kleinian group for every* $k \in \mathbf{R}$.

(ii) *If* $|k| < 1/2$, *then* $G_{-e^{i\theta},ik} = \langle A, B_{-e^{i\theta},ik}\rangle$ *is not a Kleinian group for every* θ $(0 \le \theta < 2\pi)$ *and not a Jørgensen group.*

THEOREM 2 (Sato [3]). *Let*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

and let $G_\theta = \langle A, B_\theta\rangle$ *be the group generated by* A *and* B_θ $(0 \le \theta \le \pi/2)$. *Then the following hold.*

(i) *In the case of* $\theta = 0, G_0$ *has the following properties:*

(1) G_0 *is a Kleinian group of the second kind.*

(2) G_0 *is a Jørgensen group.*

(3) $\Omega(G_0)/G_0$ *is a single Riemann surface with signature* $(0; 2, 3, \infty)$.

(ii) *In the case of* $\theta = \pi/2$, $G_{\pi/2}$ *has the following properties:*

(1) $G_{\pi/2}$ *is a Kleinian group of the second kind.*

(2) G_0 *is a Jørgensen group.*

(3) $\Omega(G_{\pi/2})/G_{\pi/2}$ *is a union of two Riemann surfaces with signature* $(0; 2, 3, \infty)$.

(iii) *If* $0 < \theta < \pi/4$ *or* $\pi/4 < \theta < \pi/2$, *then* G_θ *is not a Kleinian group and not a Jørgensen group.*

References

[1] T. Jørgensen and M. Kiikka, *Some extreme discrete groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. 1 (1975), 245-248.

[2] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. (The Second Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. Kra and B. Maskit, to appear.

[3] H. Sato, *Jørgensen groups of parabolic type*, in preparation.

[4] H. Sato and R. Yamada, *Some extreme Kleinian groups for Jørgensen's inequality*, Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ. **27** (1993), 1-8.

14. Rigidity and finiteness theorems for holomorphic mappings of complex hyperbolic manifolds

東工大大学院・理工学研究科　志賀　啓成

1　正則写像の剛性

昨年の春の学会に引き続き，複素多様体 M, N に対し $M \to N$ の非定数正則写像の剛性を考える．すなわち，次の問題を考察する．

問題. どのような条件のもとで，ホモトピックな非定数正則写像 $f_j : M \to N$ $(j = 1, 2)$ に対して $f_1 = f_2$ が結論されるか？

複素多様体上の正則写像の剛性に関しては多くの研究（例えば Borel-Narashimhan，砂田，野口，今吉 etc.）があるが，ここでは発散型の複素双曲多様体上で定義された正則写像の剛性について考える．ただし，複素双曲多様体とは，複素単位球 $B^m \subset \mathbf{C}^m$ の automorphisms よりなる離散群 Γ の商空間として表現される m 次元複素多様体のこととする．また，発散型 (divergence type) は orbit に関してある種の条件を満たす群として定義される．例えば，$M = B^m/\Gamma$ がコンパクトならば発散型である．特に $m = 1$ の場合 Γ は Fuchs 群になり，Γ が発散型ということと Γ があらわす Riemann 面 B^1/Γ が Green 函数を持たないことと同値である．この時次のことが証明される．

定理 1.1 $M = B^m/\Gamma$ を発散型双曲多様体とする．また，$\mathbf{C}^n$ 内のある有界領域 $\tilde{N}/G$ の商空間（G は $\tilde{N}$ の双正則自己同型からなるある離散群）として表現される複素多様体 $N = \tilde{N}/G$ に対して，$\ell(\tilde{N})$ を境界に含まれる解析空間の次元の最大値とすると $\dim Hol(M, N) \leq \ell(\tilde{N})$ が成り立つ．ここに，$Hol(M, N)$ は M から N への非定数正則写像全体である．

注意 1.1 M がコンパクトケーラー多様体で $\tilde{N}$ が有界対称領域であるとき，定理の主張は *[3]* で示されている．

上記の定理の証明から次のことが分かる．

系 1.2 M, N は定理 *1.1* と同じものとする．このとき，$f \in Hol(M, N)$ で $f(M)$ が N 内で開集合を含むものは，その *monodromy* だけで決まる．また，$\ell(\tilde{N}) = 0$ であるとき，$f \in Hol(M, N)$ もその *monodromy* だけで決まる．

2 正則写像の有限性

前節で示した正則写像の剛性を用いて次の有限性定理を証明することができる．

定理 2.1 $M = B^m/\Gamma$，N は前定理と同じもので，さらに Γ が有限生成で N はコンパクトであると仮定する．このとき，M から N への正則写像で像が開集合を含むものは高々有限個である．また，$\ell(\tilde{N}) = 0$ であるとき $Hol(M, N)$ は高々有限個である．

また，$\tilde{N}$ が既約な有界対称領域である場合の正則写像の剛性・有限性も論じる．

参考文献

[1] S. Kamiya, Discrete subgroups of convergence type of $U(1, n; \mathbf{C})$, Hiroshima Math. J. **21** (1991), 1–21.

[2] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1980.

[3] T. Sunada, Holomorphic mappings into a compact quotient of symmetric bounded domain, Nagoya Math. J. **64** (1976), 159–175.

15. Boundaries of capture components for parabolic cubic polynomials

中根静男　　　　東京工芸大学

固有値 1 の放物的な不動点を持つような 3 次多項式の族 $Per_1(1)$ を考える。その不動点を平行移動によって 0 に写すことにより $P_a(z) = z^3 + az^2 + z$, $a \in \mathbf{C}$ を考えればよい。P_a の危点は

$$c_{\pm}(a) = \frac{1}{3}\left(-a \pm \sqrt{a^2-3}\right) = \frac{a}{3}\left(-1 \pm \sqrt{1-3/a^2}\right),$$

であり、$a = \pm\sqrt{3}$ で分岐するので注意を要する。この族の中で両危点が放物的な不動点 0 の鉢 $\mathcal{B}_a(0)$ に含まれるようなパラメータ a の全体を parabolic set, その連結成分を parabolic component と呼ぶ。両危点がともに 0 の直接鉢 $\mathcal{B}_a^*(0)$ に含まれるような parabolic component を adjacent component, そうでないものを capture component と呼ぶ。以下では capture component W を考える。W 内では二つの危点は分離されるので $\mathcal{B}_a^*(0)$ に含まれる危点を $c_+(a)$ とする。$P_a^k(c_-(a)) \in \mathcal{B}_a^*(0)$ を満たす最小の $k \geq 1$ を W の preperiod という。$a \in W$ ならば K_a は局所連結なので $c_+(a)$ を K_a 内で $c_-(a)$ に結ぶ道 γ がとれる。γ が最初に $\partial\mathcal{B}_a^*(0)$ と交わる点を z_a とかく。道の取り方は一意的ではないが, K_a は full なので z_a は一意的に定まる。

補題 0.1 $a \in W$ ならば z_a は P_a の周期点である。

このとき $z_a \in \partial\mathcal{B}_a^*(0)$ より z_a での combinatorial rotation number は 0 でなくてはならない。従って z_a に着地する外射線は丁度2本ある。この周期点を $a \in \partial W$ まで接続したものをやはり z_a とかく。

補題 0.2 z_a は 0 でなければ ∂W でも反発的である。

補題 0.3 W 上 $z_a \neq 0$ ならば z_{a_0}, $a_0 \in \partial W$ に着地する外射線の外周角は $a \in W$ のときのそれと一致する。

従って $z_a \neq 0$ のとき $\overline{W}$ のある近傍 U の各点 a に対し z_a とそれに着地する外射線は $c_-(a)$ と $\mathcal{B}_a^*(0)$ を分離する。そこで z_a とその軌道に着地する外射線で囲まれるセクター領域 $W(z_j)$ 達を除いた領域を U_a'、その逆像 $P_a^{-1}(W(z_j))$ 達を除いた領域を U_a とおくと $P_a : U_a \to U_a'$ は2次の proper な正則写像になる。更に適当な等ポテンシャル曲線で囲まれた puzzle piece 上で考えても同様である。従って、thickening により quadratic-like map $P_a : V_a \to V_a'$ が定義できる。Straightening Theorem より, これはある2次多項式 P に hybrid 同値

になるが、固有値 1 の放物的不動点を持つので $Q(z) = z^2 + 1/4$ でなくてはならない。$z_a = 0$ のときは thickening は使えないが，次の補題より同じ結論を得る。

補題 0.4 *W 上 $z_a = 0$ とする。P_a の 0 でない不動点 $-a$ と 0 を K_a 内で結ぶ道 γ' をとる。すると γ' 上に, 0 に収束する $-a$ の inverse orbit 上の点列 $z_j,\ j \geq 1$ が取れる。*

$-a$ は J_a の端点ではないので2本以上の外射線が着地する。従って z_j にもその逆像である外射線が着地するが、それらの外射線の中には 0 に着地する外射線に収束するものがある。更に補題 0.2 の証明と同様にして $-a$ が ∂W 上でも反発的であることが示される。従って stability よりこの性質は W の閉包のある近傍まで保たれる。これらの外射線を用いて上と同様にして quadratic-like map $P_a : V_a \to V_a'$ を定義できる。今度は thickening は必要ない。これはやはり $Q(z) = z^2 + 1/4$ に hybrid 同値になる。特に $\partial \mathcal{B}_a^*(0)$ は $J(Q)$ と同相なので次が示された。

命題 0.1 *W を capture component とすると $\overline{W}$ のある近傍上で $\partial \mathcal{B}_a^*(0)$ は局所連結である。*

従って $\mathcal{B}_a^*(0)$ の Riemann 写像 $\psi_a : D \to \mathcal{B}_a^*(0)$ を $\psi_a(0) = c_+(a),\ \psi_a(1) = 0$ と正規化すると ψ_a は $\partial \mathcal{B}_a^*(0)$ まで連続に延ばされて $\psi_a \circ \psi_{a_0}^{-1} : \partial \mathcal{B}_{a_0}^*(0) \to \partial \mathcal{B}_a^*(0)$ は W をパラメータ空間とする $\partial \mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ の holomorphic motion を与える。

補題 0.5 *この holomorphic motion はパラメータを W のある近傍 U まで holomorphic motion として延ばせる。特に $\partial \mathcal{B}_a^*(0)$ は U 上 Hausdorff distance に関して連続である。*

補題 0.6 *W を preperiod k の capture component とすると $a \in \partial W$ ならば $P_a^k(c_-(a)) \in \partial \mathcal{B}_a^*(0)$ が従う。*

従って preperiod k の capture component W に対し conformal position map $m : W \to D$ を $m(a) = \psi_a^{-1}(P_a^k(c_-(a)))$ と定義すると m は W の境界まで連続関数として拡張されるが、もし ∂W が局所連結ならば Caratheodory の定理より $m : \overline{W} \to \overline{D}$ は同相写像を与える。つまり conformal position map が ∂W の parametrization を与えることがわかる。∂W の局所連結性に関しては最近 Buff-Henriksen によって研究されている。

特別講演

1次元タイヒミュラー空間の複素解析

小森洋平（大阪市立大学理学部）

1 擬フックス群の空間の ベアス・マスキット スライス

1.1 穴あきトーラス群

S を向きが与えられた1点穴あきトーラスとする。基本群 $\pi_1(S)$ の生成系 α, β を S の標識という。生成系の交換子 $[\alpha, \beta]$ を放物的元に移す $\pi_1(S)$ から $PSL_2(\mathbf{C})$ への表現全体にコンパクト開位相を入れて、さらにその空間を $PSL_2(\mathbf{C})$ の共役の作用で割って得られる商空間を、表現空間といい $\mathcal{R}(\pi_1(S))$ と表わすことにする。特に単射かつ像が $PSL_2(\mathbf{C})$ の離散部分群（クライン群）になるような表現全体から成る部分空間を、穴あきトーラス群の空間といい $\mathcal{D}(\pi_1(S))$ と表わすことにする。像が擬フックス群になるような表現全体から成る $\mathcal{D}(\pi_1(S))$ の部分空間を、擬フックス群の空間といい $\mathcal{QF}$ と表わすことにする。このとき、$\mathcal{D}(\pi_1(S))$ は $\mathcal{R}(\pi_1(S))$ の閉部分集合となり、$\mathcal{QF}$ は $\mathcal{D}(\pi_1(S))$ の開部分集合となる ([4])。さらにミンスキーの結果から、$\mathcal{QF}$ の $\mathcal{R}(\pi_1(S))$ での閉包は $\mathcal{D}(\pi_1(S))$ に一致することもわかる ([6])。

1.2 1点穴あきトーラス上の射影的測度付測地線層の空間

S 上で穴にホモトピックでなく可縮でもないような、向きの与えられていない単純閉曲線の自由ホモトピー類の全体を $\mathcal{C}(S)$ とする。このとき、$\mathcal{C}(S)$ と有理数全体 $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cup \{1/0\}$ との間に自然な全単射が存在する ([2, 6])。S に完備な双曲構造を指定すると、$\mathcal{C}(S)$ の各元にただ1つ単純閉測地線が定まる。よってこの測地線と対応する有理数を以下しばしば同一視する。

$\hat{\mathbf{Q}}$ の自然な完備化が $\hat{\mathbf{R}}$ であるが、対応する $\mathcal{C}(S)$ の自然な完備化として、射影的測度付測地線層の空間 $\mathcal{PML}(S)$ が考えられる ([8])。以下しばしば $\mathcal{PML}(S)$ と $\hat{\mathbf{R}}$ を同一視する。また $\hat{\mathbf{R}}$ は上半平面 $\mathbf{H}^2$、すなわち1点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の境界と思えるので、この同一視により $\mathcal{PML}(S)$ をタイヒミュラー空間 $\mathbf{H}^2$ の境界と思うことができる。これをサーストン境界という。

1.3 ミンスキーの終端層定理

まず、穴あきトーラス群 $[\rho] \in \mathcal{D}(\pi_1(S))$ に対し、その終端不変量の対 (ν_-, ν_+) を定義する。穴あきトーラス群 $[\rho] \in \mathcal{D}(\pi_1(S))$ に対し、クライン群 $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ に附随する双曲 3 次元多様体 $\mathbf{H}^3/\Gamma$ を考える。$\mathbf{H}^3/\Gamma$ は位相的には $S \times \mathbf{R}$ と同相であるので 2 つの終端 $e_\pm$ が存在する ([1, 8])。Ω を $\hat{\mathbf{C}}$ での Γ の不連続領域とすると、各終端に対応して Γ 不変な 2 つの部分集合 Ω_-, Ω_+ に分かれる。このとき、Ω_s $(s = \pm)$ は次の 3 つに場合のいずれかに分かれ、それぞれの場合に終端不変量 $\nu_\pm$ が次のように定まる。

1. Ω_s が位相的円板のとき：Ω_s/Γ は 1 点穴あきトーラスの標識付きリーマン面になる。よってそのタイヒミュラー空間 $\mathbf{H}^2$ での座標が定まるので、これを $\nu_s \in \mathbf{H}^2$ と定義する。
2. Ω_s が無限個の円板の和集合のとき：Ω_s/Γ は 3 つ穴あき球面の標識付きリーマン面になる。これは、標識つき穴あきトーラスからある $\mathcal{C}(S) = \hat{\mathbf{Q}}$ の元 $p/q \in \hat{\mathbf{Q}}$ をトーラスから引き抜いた面と思うことができる。よって $\nu_s = p/q$ と定義する。
3. Ω_s が空集合のとき：このとき終端 e_s を出ていくような $\mathbf{H}^3/\Gamma$ の閉測地線の列 $\{p_n/q_n\} \subset \mathcal{C}(S) = \hat{\mathbf{Q}}$ がとれて、$\mathcal{PML}(S)$ 内である射影的測度付測地線層 $r \in= \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ に収束する。よって $\nu_s = r$ と定義する。

以上から次のような写像

$$\nu : \mathcal{D}(\pi_1(S)) \to \bar{\mathbf{H}}^2 \times \bar{\mathbf{H}}^2 - \Delta, \;\; \nu([\rho]) := (\nu_-, \nu_+)$$

が定義できる。ここで $\bar{\mathbf{H}}^2 := \mathbf{H}^2 \cup \hat{\mathbf{R}}$ として、Δ は $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}}$ の対角線集合とする。ミンスキーの終端層定理から、ν は全単射で連続ではないが、逆写像 ν^{-1} は連続であることがわかる ([6])。特に写像 ν を $\mathcal{QF}$ に制限すると双正則になっていて、これはベアスの同時一意化に対応していることに注意する。

1.4 ベアス・マスキットスライス

擬フックス群 $[\rho] \in \mathcal{QF}$ に対し、$\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ の極限集合 Λ の $\mathbf{H}^3$ での凸包を $C \subset \mathbf{H}^3$ として、その境界を ∂C とする。C は Γ の $\mathbf{H}^3$ への等長的な作用に関して不変なのでその境界 ∂C も Γ 不変である。∂C は Γ 不変な 2 つの不連続領域 Ω_s $(s = \pm)$ に対応して、Γ 不変な 2 つの面 ∂C_s に分かれる。商曲面 $\partial C_s/\Gamma \subset \mathbf{H}^3/\Gamma$ は所謂プリーツ面の構造を持ち、その折れ目線 $PL^s(\Gamma)$ という ∂C_s 上の測度付測地線層が定まる ([4, 8])。

∂C_s 上の測度付測地線層 γ が折れ目線になっているとすると、γ の ∂C_s 上での双曲的長さは $\mathbf{H}^3/\Gamma$ 内での双曲的長さと一致するので、$l_\gamma(\Gamma)$ と表わすことにする 。このとき $\mathcal{QF}$ のベアス・マスキットスライスを次のように定義する ([2, 7])。

$$BM^s_{\gamma,\lambda} := \{[\rho] \in \mathcal{QF} | PL^s(\Gamma) = \gamma,\ l_\gamma(\Gamma) = \lambda\}$$

つまり、∂C_s 上の測度付測地線層 γ が折れ目線になっていて、その双曲的長さが $\lambda > 0$ であるような擬フックス群の全体が $BM^s_{\gamma,\lambda}$ である。以下では、$s = -$, $\gamma \in \mathcal{C}(S)$ と仮定する。このとき、次の補題は基本的である。

補題 1 $[\rho] \in BM^-_{\gamma,\lambda}$ に対し、$\gamma \in \mathcal{C}(S)$ に対応する $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ の元 A は純双曲的である。特にそのトレース $\mathrm{Tr}A$ は関係式 $\mathrm{Tr}A = 2\cosh\frac{\lambda}{2}$ を満たす。

さらに γ との交点数が 1 であるような $\mathcal{C}(S)$ の元に対応する Γ の元 B のトレース $\mathrm{Tr}B$ を用いて、$BM^-_{\gamma,\lambda}$ を右半平面 $\mathbf{C}^+$ に正則に埋め込むことができる。この $\mathbf{C}^+$ は $\mathrm{Tr}A \equiv 2\cosh\frac{\lambda}{2}$ で定義されたアフィン空間 $\mathbf{C}$ の右半平面と思うことができる。

2 ベアス・マスキットスライスの構造

まず、ベアス・マスキットスライスの等角構造について述べる。$\mathrm{Proj}_+ : \mathbf{H}^2 \times \mathbf{H}^2 \to \mathbf{H}^2$ を $\mathrm{Proj}_+(\nu_-, \nu_+) = \nu_+$ で定義する。このとき、[5] の結果を用いて次が示される。

命題 1 $\mathrm{Proj}_+ \circ \nu$ の $BM^-_{\gamma,\lambda}$ への制限は、$BM^-_{\gamma,\lambda}$ と $\mathbf{H}^2$ の境円板の外部 $\mathbf{H}_\lambda := \{\nu_+ \in \mathbf{H}^2 | l_\gamma(\mu_+) > \lambda\}$ との間の等角写像である。ここで、$l_\gamma(\mu_+)$ は $\nu_+ \in \mathbf{H}^2$ に対応する 1 点穴あきトーラスのリーマン面での $\gamma \in \mathcal{C}(S)$ に対応する測地線の双曲的長さとする。

系 1 $BM^-_{\gamma,\lambda}$ は連結かつ単連結である。

この系は [2] において、$BM^-_{\gamma,\lambda}$ のプリーツ座標を用いて示されている。

次にベアス・マスキットスライスの境界の位相的構造について述べる。$\nu(BM^-_{\gamma,\lambda})$ の $\bar{\mathbf{H}}^2 \times \bar{\mathbf{H}}^2 - \Delta$ での閉包を $\overline{\nu(BM^-_{\gamma,\lambda})}$ と表わすことにする。

命題 2 Proj_+ の $\overline{\nu(BM^-_{\gamma,\lambda})}$ への制限は、$\overline{\nu(BM^-_{\gamma,\lambda})}$ と $\{\nu_+ \in \mathbf{H}^2 | l_\gamma(\mu_+) \geq \lambda\} \cup (\hat{\mathbf{R}} - \{\gamma\})$ との間の同相写像である。

ミンスキーの終端層定理を用いて次が示される。

定理 2.1 ν^{-1} の $\overline{\nu(BM^-_{\gamma,\lambda})}$ への制限は固有写像である。

系 2 ν^{-1} の $\overline{\nu(BM^-_{\gamma,\lambda})}$ への制限は、$\overline{\nu(BM^-_{\gamma,\lambda})}$ と $BM^-_{\gamma,\lambda}$ の $\mathcal{D}(\pi_1(S))$ での閉包 $\overline{BM^-_{\gamma,\lambda}}$ との間の同相写像である。特に境界 $\partial\overline{BM^-_{\gamma,\lambda}}$ は2つのジョルダン曲線から成る。

3 ベアス・マスキットスライスのマスキットスライスへの退化

$\gamma \in \mathcal{C}(S) = \hat{\mathbf{Q}}$ に対し、

$$\mathcal{M}_\gamma := \nu^{-1}(\{\gamma\} \times \mathbf{H}^2)$$

と定義して、これを $\mathcal{QF}$ のマスキットスライスという ([3, 6, 7])。γ との交点数が1であるような $\mathcal{C}(S)$ の元に対応するクライン群の元 B のトレース $\mathrm{Tr}B$ を用いて $\mathcal{M}_\gamma$ を右半平面 $\mathbf{C}^+$ の単連結領域として実現することができる。

$\mathbf{H}^2$ から $\mathcal{M}_\gamma$ への等角写像 $g_0 : \mathbf{H}^2 \to \mathcal{M}_\gamma$ を $g_0(\nu_+) := \nu^{-1}(\gamma, \nu_+)$ で定義して、境円板の外部 $\mathbf{H}_\lambda$ から $BM^-_{\gamma,\lambda}$ への等角写像 $g_\lambda : \mathbf{H}_\lambda \to BM^-_{\gamma,\lambda}$ を $\mathrm{Proj}_+ \circ \nu$ の $BM^-_{\gamma,\lambda}$ への制限の逆写像として定義する。このとき正規族の議論から次が成り立つ。

命題 3 $\mathbf{H}^2$ の任意の点 p に対し、$\mathbf{H}^2$ での p の近傍 $U_p \subset \mathbf{H}^2$ と正の実数 $\lambda_p > 0$ が存在して、$\lambda < \lambda_p$ なる任意の $\lambda > 0$ に対し、$U_p \subset \mathbf{H}_\lambda$ かつ、g_λ は g_0 に U_p 上一様収束する。

定理 3.1 右半平面 $\mathbf{C}^+$ の領域として、$BM^-_{\gamma,\lambda}$ は $\mathcal{M}_\gamma$ にカラテオドリー収束する。すなわち

1. $\mathcal{M}_\gamma$ の任意のコンパクト部分集合 K に対し、ある正の実数 $\lambda_K > 0$ が存在して、$\lambda < \lambda_K$ なる任意の $\lambda > 0$ に対し、$BM^-_{\gamma,\lambda}$ は K を含む。
2. 開部分集合 O が無限個の $BM^-_{\gamma,\lambda}$ に含まれるならば、$\mathcal{M}_\gamma$ は O を含む。

4 ベアス・マスキットスライス以外の成分について

$BM^\pm_{\gamma,\lambda}$ は、$\mathrm{Tr}A \equiv 2\cosh\frac{\lambda}{2}$ で定義されたアフィン空間 $\mathbf{C}$ と $\mathcal{QF}$ の交わり $\mathbf{C} \cap \mathcal{QF}$ に含まれる。それでは、$\mathbf{C} \cap \mathcal{QF}$ には $BM^\pm_{\gamma,\lambda}$ 以外に成分が

あるだろうか。すなわち、A が純双曲的であるにもかかわらず、A に対応する測地線が $\mathbf{H}^3/\Gamma$ の凸芯の境界面の折り目線になっていないような擬フックス群 Γ は存在するであろうか。

定理 4.1 *1.* ある $\lambda_0 > 0$ が存在して、$\lambda < \lambda_0$ なる任意の $\lambda > 0$ に対し、$\mathbf{C} \cap Q\mathcal{F}$ は $BM^{\pm}_{\alpha,\lambda}$ に一致する。

2. ある $\lambda_1 > 0$ が存在して、$\lambda > \lambda_1$ なる任意の $\lambda > 0$ に対し、$\mathbf{C} \cap Q\mathcal{F}$ は $BM^{\pm}_{\alpha,\lambda}$ 以外に成分を持つ。

3. $\mathbf{C} \cap Q\mathcal{F}$ の任意の連結成分は単連結である。

参考文献

[1] F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, Ann. of Math. 124 (1986), 71-158.

[2] L. Keen and C. Series, Pleating invariants for punctured torus groups, Warwick University preprint, 10/1998.

[3] I. Kra, Horocyclic coordinates for Riemann surfaces and moduli spaces I: Teichmüller and Riemann space of Kleinian groups, J. Amer. Marh. Soc. 3 (1990), 499-578.

[4] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups, Oxford (1998).

[5] C. McMullen, Complex earthquakes and Teichmüller theory, J. Amer. Marh. Soc. 11 (1998), 283-320.

[6] Y. Minsky, The classification of punctured-torus groups, Ann. of Math. 149 (1999), 559-626.

[7] J. Parker and J. Parkkonen, Coordinates for Quasi-Fuchsian Punctured Torus Groups, Geometry and Topology Monographs 1 (1998), 451-478.

[8] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University Lecture Notes (1982).

16. SIZE OF SUPPORT OF INITIAL HEAT DISTRIBUTION IN THE 1D HEAT EQUATION

V. K. TUAN, S. SAITOH AND M. SAIGO [1]

Let $u(x,t)$ be the temperature distribution in the point x at the time t of a stretched string of homogeneous material, infinite in both directions, without sources and sinks, and with the initial heat distribution $F(x)$ at the time $t=0$. By scaling, if necessary, the conductivity coefficient can be assumed to be 1, and the temperature $u(x,t)$ satisfies the 1D heat equation

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in R \times R^+, \tag{1}$$

subject to the initial condition

$$u(x,0) = F(x), \quad x \in R. \tag{2}$$

It is a well-known fact that $u(x,t)$ can be represented through $F(x)$ by the Weierstrass transformation:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_R F(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) d\xi. \tag{3}$$

In [2] one of the authors shows that if $F \in L_2(R)$, then the following isometrical identities hold

$$\int_R |F(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\int_{R^2} |u(x+iy,t)|^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dx\, dy \tag{4}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2t)^j}{j!} \int_R \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right|^2 dx, \tag{5}$$

for any $t > 0$, where $u(z,t) = u(x+iy,t)$ is the analytic extension of $u(x,t)$ with respect to the variable x onto the whole complex plane. Moreover,

$$\lim_{t \to 0+} \|u(x,t) - F(x)\|_{L_2(R)} = 0. \tag{6}$$

Conversely, if $u(x,t)$ is a trace on $R \times R^+$ of an entire function $u(z,t)$ with respect to z such that the integral on the right hand side of (4) converges for a $t > 0$, or if $u(x,t)$ has partial derivatives with respect to x of any order such that the series in (5) is finite for a $t > 0$, then $u(x,t)$ is a temperature distribution at t resulting from some initial heat

[1] 1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35K05, 46E22, 80A23
Key words and phrases. Heat Equation, Paley-Wiener Theorem, Analytic Extension, Bergman-Selberg Space, Infinite Order Sobolev Space, Inverse Problem

distribution $F(x)$, square integrable on R.

Recently, another Parseval's identity for the heat equation (1)-(2) has been established in [1], for any fixed x,

$$\begin{aligned}\int_R |F(\xi)|^2 d\xi &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j+2}\sqrt{\pi}}{(2j+1)!} \int_0^{\infty} \left|\partial_t^j \left[t\partial_t u(x,t)\right]\right|^2 t^{2j-1/2} dt \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j+4}\sqrt{\pi}(j+1)}{(2j+3)!} \int_0^{\infty} \left|\partial_t^j \left[t\partial_t\partial_x u(x,t)\right]\right|^2 t^{2j+1/2} dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Again, if $u(x,t)$ and $\partial_x u(x,t)$ have partial derivatives with respect to t of any order such that the two series in (7) are finite for any fixed x, then $u(x,t)$ is a temperature distribution resulting from some initial heat distribution $F(x)$, square integrable on R.

In this paper we demonstrate how the isometries (4), (5), and (7) can be applied to determine whether $u(x,t)$ is the temperature distribution resulting from some initial heat distribution with compact support. Precisely, we solve the inverse source problem of determining the size of the support of the initial heat distribution $F(x)$ from the heat flow $u(x,t)$ observed either at any fixed time t or at any fixed position x.

References

[1] G. Nakamura, S. Saitoh and A. Syarif: Representations of initial heat distributions by means of their heat distributions as functions of time. *Inverse Problems* (*to appear*).

[2] S. Saitoh: *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications.* Longman, Harlow, 1997.

[3] Vu Kim Tuan: Paley-Wiener-type theorems. *Fractional Calculus & Applied Analysis* **2**(1999), no. 2, pp. 135-143.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE, FACULTY OF SCIENCE, KUWAIT UNIVERSITY, P. O. Box 5969, Safat 13060, Kuwait
E-mail address: **vu@mcc.sci.kuniv.edu.kw**

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF ENGINEERING, GUNMA UNIVERSITY, KIRYU 376-8515, JAPAN
E-mail address: **ssaitoh@eg.gunma-u.ac.jp**

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, FUKUOKA UNIVERSITY, FUKUOKA 814-0180, JAPAN
E-mail address: **msaigo@sm.fukuoka-u.ac.jp**

17. Painlevé 超越関数と small function

下村 俊　　　慶応大，理工

有理型関数 $f(z), g(z)$ を考える. $T(r,g)=S(r,f)$ が成立するとき, $g(z)$ は $f(z)$ に関する small function であるという. 関数 $f(z)$ について, その small function $g(z)$ の deficiency, ramification index を

$$\delta(g,f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{m(r,1/(f-g))}{T(r,f)},$$
$$\vartheta(g,f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{N_1(r,1/(f-g))}{T(r,f)}$$

により定義する.

Painlevé 方程式

$$\text{(I)}\qquad w''=z+6w^2\qquad ('=d/dz),$$
$$\text{(II)}\qquad w''=\alpha+zw+2w^3$$

の任意の解は全平面で有理型である. それらの解のうちで超越関数であるものは Painlevé 超越関数と呼ばれるが, その値分布論的な性質は (I), (II) については H.Schubart, H.Wittich により調べられている. 例えば (I) の任意の解 $\phi(z)$ は超越有理型関数であり, 任意の複素数 $a\in\mathbf{C}$ に対して $\delta(a,\phi)=0$, $\vartheta(a,\phi)\le 1/6$ であることが知られている.

本講演では (I), (II) を満たす Painlevé 超越関数に関して, small function の deficiency および ramification index の評価をあたえる.

$\phi(z)$, $\psi(z)$ をそれぞれ (I) および (II) の任意の超越有理型関数解とする. (方程式 (II) は $\alpha\in\mathbf{Z}$ のとき有理関数解をもつ.) これらについて次の結果を得た.

Theorem 1. $g(z)$ が $\phi(z)$ に関する small function であるならば, $\delta(g,\phi)\le 1/2$, $\vartheta(g,\phi)\le 5/12$.

Theorem 2. $g(z)$ が $\psi(z)$ に関する small function であるならば，$\delta(g,\psi) \leq 1/2$.

Remark 1. 方程式 (II) に対しては，ramification index の評価 $\vartheta(g,\psi) \leq 1/2$ は比較的簡単に得られる．

Remark 2. $\alpha = \mp 1/2$ のとき，方程式 (II) の有理型関数の解の族 $\{\chi_c(z) \mid c \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}\}$ で次のような性質をもつものが存在する．

(1) ある正数 $C_1 = C_1(c)$, $C_2 = C_2(c)$ が存在して

$$C_1 r^{3/2} \leq T(r, \chi_c) \leq C_2 r^{3/2}.$$

(2) $c_1 \neq c_2$ ならば

$$N(r, 1/(\chi_{c_1} - \chi_{c_2})) = 0.$$

18. Inequalities on Networks

広島工業大学　　村上　温
島根大学総合理工　　山崎　稀嗣

$n+1$ 個の実数 $u_0, u_1, \cdots, u_n$; $u_0 = 0$ に対し次の２つの形の不等式：

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 \leq C_1 \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1})^2 \quad \text{Wirtinger}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{u_k}{k}\right)^2 \leq C_2 \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1})^2 \quad \text{Hardy}$$

は古典的であるが，これらの名前の付いた離散型及び連続型不等式については様々な一般化があり最近でも Hardy の不等式というキーワードの付いた論文が発表されている (文献 [5], [7], [9])．これらに関連する不等式をネットワーク上の不等式として定式化して，離散ポテンシャル論的な手法を用いて，無限ネットワークの性質を調べる。

ネットワークの定義と記号: X を点の高々可算集合, Y を線の高々可算集合, K を点と線の結合行列とするとき, $\mathcal{G} = \{X, Y, K\}$ を無限グラフという．以下では, グラフ $\mathcal{G}$ は局所有限, 連結で自己閉ループを持たないと仮定する．Y 上の正の実数値関数 r を抵抗関数とよび, $N = \{\mathcal{G}, r\}$ をネットワークという．m を X 上の正の実数値関数とする．

$L(X)$: X 上の実数値関数の全体
$L_0(X)$: 台が有限集合である X 上の実数値関数の全体

$$D(u) := \sum\nolimits_{y \in Y} r(y)^{-1} [\sum\nolimits_{x \in X} K(x,y) u(x)]^2 \quad \text{(ディリクレ和)}$$

$$\Delta u(x) := \sum\nolimits_{y \in Y} K(x,y) du(y) \quad \text{(離散ラプラシアン)}$$

$$\|u\|_m^2 := \sum\nolimits_{x \in X} m(x) u(x)^2$$

$A_0 (\neq X)$ を空でなく $X \setminus A_0$ が連結な X の有限部分集合とする．Wirtinger の不等式と Hardy の不等式は $L(X)$ 上の関数 $\chi_m(u) := D(u)/\|u\|_m^2$ を，制約条件:「$u(x) = 0$ on A_0」の下で最小化するときの以下の最良値を求める問題と捉えることができる．

$$\lambda_m^{(2)}(A_0) := \inf\{\chi_m(u); u \in L_0(X; A_0)\},$$

ただし, $L_0(X; A_0)$ は A_0 上で値 0 をとる $u \in L_0(X)$ の全体．更に，ポアンカレ・ソボレフの不等式に関連した次の最適問題の値を考える:

$$\lambda_m^{(1)} := \inf\{\chi_m(u); u \in L_0(X)\}.$$

一般には, $0 \leq \lambda_m^{(1)} \leq \lambda_m^{(2)}(A_0)$ が成り立つ.
本講演では,
(1) $\lambda_m^{(1)}$ 及び $\lambda_m^{(2)}(A_0)$ が正となるか否か
(2) $\lambda_m^{(1)}$ 及び $\lambda_m^{(2)}(A_0)$ の評価式
(3) 離散ラプラシアンの最小固有値との関連
について報告する。

参考文献

[1] N.L. Biggs, B. Mohar and J. Shawe-Taylor, The spectral radius of infinite graphs, Bull. London Math. Soc. 20(1988), 116-120.

[2] J. Dodziuk, Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks, Trans. Amer. Math. Soc. 284(1984), 787-794.

[3] J. Friedman, Some geometric aspects of graphs and their eigenfunctions, Duke Math. J. 69(1993), 487-525.

[4] K. Fujiwara, Growth and the spectrum of the Laplacian of an infinite graph, Tôhoku Math. J. 48(1996), 293-302.

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1964.

[6] P. Gerl, Random walks on graphs, Lecture Notes in Math. 1210(1986), 285-303, Springer, Berlin.

[7] G. V. Milovanović, Recent progress in inequalities, Kluwer Academic Publishers,1998.

[8] B. Mohar and W. Woess, A survey on spectra of infinite graphs, Bull. London Math. Soc. 21(1989), 209-234.

[9] B. Opic and A. Kufner, Hardy-type inequalities, Pitman Research Notes in Math. 219, Longman Science & Technical, 1990.

[10] Y. Shogenji and M. Yamasaki, Hardy's inequality on finite networks, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser B: Mathematical Science 32(1999), 75–84.

[11] H. Urakawa, Eigenvalue comparison theorems of the discrete Laplacians for a graph, Geom. Dedicata 74(1999), 95-112.

19. $\mathbb{P}^2$内のC^ω級 Levi平坦超曲面の非存在

大沢健夫　名大多元数理

n次元複素多様体M内のC^1級実超曲面Sが、$n-1$次元の複素解析的部分集合で埋めつくされるとき、SはMのLevi平坦超曲面であるという。(このときSのふくむ$n-1$次元解析集合芽は特異点をふくまない)

Stein領域の境界としてあらわれるLevi平坦超曲面を特徴づけることは、複素多様体上の関数論における基本的な問題であると思われる。簡単な考察により、2次元以上のStein多様体はコンパクトなLevi平坦超曲面をふくみ得ないことがわかるが、他方、ある種の2次元のコンパクト複素多様体が、Levi平坦超曲面を境界とするStein領域をふくむことが知られている。ところが、射影空間$\mathbb{P}^n$ ($n \geq 2$)がコンパクトなLevi平坦超曲面をふくみうるかどうかは、まだ完全にはわかっていない。

$n \geq 3$のときには、Lins-Netoにより実解析的な場合の非存在が示され、SiuによりC^r級(ただし$r = r(n) \gg 1$)の場合に非存在が示された。

定理　$\mathbb{P}^2$ はコンパクトな実解析的Levi平坦超曲面をふくまない。

証明の大略：　$\mathbb{P}^2$ がもしそのような超曲面 S をふくんだとすると、

① (武内の定理より) $\mathbb{P}^2 \setminus S$ は２つの連結成分をもち、その各々はSteinである。とくに S は連結である。

② S の正則法ベクトル束 ($=(T^{1,0}_{\mathbb{P}^2}|S)/T^{1,0}_S$) は正である。これを N_S と書く。

③ S の実解析性により、N_S は S のある近傍上の正則直線束へと延長される。それを $\tilde{N}_S$ と書く。

④ $\tilde{N}_S$ の定義より明らかに、S のある近傍上で $\tilde{N}_S$ はベキ根 $\tilde{N}_S^{1/k}$ をもつ。ただし k は任意の自然数。

⑤ $\tilde{N}_S^{1/k}$ には $H^1(S, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ だけの任意性があり、そのうちの一つは $\mathbb{P}^2$ 上の正則直線束として拡張可能である。それを $\hat{N}_S^{1/k}$ と書く。

⑥ しかしこれは N_S が正であることに反する。実際、劣調和関数の最大値原理より、$\deg \hat{N}_S^{1/k} > 0$ でなければならないが、すると $\deg \hat{N}_S = k \deg \hat{N}_S^{1/k} \geq k$ となり、不合理である。

要するに⑤がポイントである。

20. コンパクトな複素軸をもつ擬凸超曲面

Klas Diederich　　Wuppertal大学
大沢健夫　　名大多元数理

複素多様体の局所擬凸領域については、H. Grauertにより強擬凸領域の正則凸性が知られているが、Levi形式が退化する点が次元をもつ領域の関数論的構造についてははっきりとした結果がない。実際、重要な第一歩となるべき予想「滑らかな境界をもつ相対コンパクトな領域が、局所擬凸であり、かつその境界の一部で強擬凸ならば、非定数正則関数をもつ」(Narasimhan)さえも未解決である。とはいえ、Grauertにより Narasimhan予想の仮定をみたす3次元以上の領域が必ずしも正則凸ではないことが指摘され、一方では2次元の場合に肯定的な結果が出されるなど、一定の構造論が成立する可能性が示唆されている。また、Levi平坦な境界をもつ領域で、Stein多様体の構造をもつものの例として、コンパクトなRiemann面上のある種の円盤束のように美しいものが存在するので、その中には将来表舞台に立つようなものもあるかもしれない。

さて、Mをn次元複素多様体、DをM内の局所擬凸領域とする。(何らかの結果を得たいので)境界∂Dは実解析的超曲面であると仮定する。Levi形式が退化する点の近傍でMの正則局所座標系を選んで∂Dの定義関数を一定の標準型に帰着させようと考える。これは退化点xが、∂DにふくまれるMの複素部分多様体Xに属する場合、次の形で実現される。

補題 M、Dを上の通りとし、∂DのLevi形式がXに沿ってあらゆる方向にq次以上の位数で退化しておれば、xのまわりの局所座標$(w, z) = (w, z_1, \cdots, z_{n-1})$を適当にとって、$\partial D$の定義関数$\rho$のTaylor展開が

$$\rho(w, z) = \mathrm{Im}\, w + C(z)\cdot(\mathrm{Re}\, w)^q + \sum_{\mu+\nu=0}^{q} f_{\mu\nu}(z) w^\mu \bar{w}^\nu + o(|w|^q)$$

ただし $f_{\mu\nu}(z)|X = 0$, $C(z)$は多重劣調和, となるようにできる。

この補題にもとずき、次の構造定理が得られる。 $X \subset M$ compact Kähler mfd

定理 DはM内の実解析的境界をもつ擬凸領域、Xは∂D内にあるMのコンパクト複素解析的部分集合とし、$\partial D \setminus X$には次元をもつ複素解析的部分集合はふくまれないとする。さらにXはKähler的非特異~~モデルをもつ~~と仮定する。このとき、$\dim X < 2$ でなければならない。

U は $N_{X/M}$ の 0-section の近傍に同型

21. 非Kähler軸の一例

大沢健夫　　名大多元数理

主Hopf曲面 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/\mathbb{Z}$ を境界にふくむ局所擬凸領域 D で、$\partial D \setminus \mathcal{H}$ のすべての点が強擬凸境界点であるようなものを構成する。これにより、前報告(Diederich-大沢)の定理の仮定から、複素軸 X の Kähler 性が除けないことがわかる。

D を構成するには、複素半平面を $\mathcal{H}$ 方向に多重調和に回転させて得られる領域を縮小変形する。

具体的には、図式

$$\begin{CD} \pi^*\mathcal{O}(-2) @>>> \mathcal{O}(-2) \\ @VVV @VVV \\ \mathcal{H} @>{\pi}>> \mathbb{P}^1 \end{CD}$$

において、

$$\pi^*\mathcal{O}(-2) = \left\{ (z_1, z_2, \zeta_1) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 \neq 0 \right\} \cup \left\{ (w_1, w_2, \zeta_2) \in \mathbb{C}^3 \mid w_2 \neq 0 \right\} \Big/ \sim$$

但、$(z_1, z_2, \zeta_2) \sim (w_1, w_2, \zeta_2) \ :\Longleftrightarrow\ \exists\, a \in \mathbb{Z}$ s.t.、

$$z_1 = 2^a w_1, \quad z_2 = 2^a w_2, \quad \zeta_1 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 \zeta_2$$

とおき、

$$D_0 := \left\{ \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta_1}{z_1^2}\right) < 0 \right\} \cup \left\{ \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta_2}{z_2^2}\right) < 0 \right\}$$

により $\pi^*\mathcal{O}(-2)$ 内の領域 D_0 を定義し、D を

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta_i}{z_i^2}\right) + \frac{\|z\|^2}{|z_i|^4}|\zeta_i|^2 < 0 \quad (i=1,2)$$

によって定めればよい。

ノート：① D_0, D は正則凸ではない。② $\mathcal{H}^n = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}/\mathbb{Z}$ に対しても同様の構成ができる。
③ D の定義式を

$$\left| \frac{\zeta_i}{z_i^2} - \|z\|^{-2} \right|^2 < \|z\|^{-4}$$

と書けば、$\mathcal{H}$ に外接する円盤が $\mathcal{H}$ に沿って半径を変えながら動くことにより D ができる様子がよくわかる。局所座標を用いたので中心は半直線 $(0, \infty)$ 上に来たが、$\mathcal{H}$ 上大域的にはこれらの円盤は回転しながら動いていると思った方が自然であろう。

22. 複素多様体上のL^2拡張定理

大沢健夫　　名大多元数理

多変数の正則関数の、L^2条件つきの拡張定理は、はじめ$\mathbb{C}^n$の有界擬凸領域に対して、L^2ノルムは多重劣調和荷重関数つきで、超平面断面からの拡張可能性定理として知られた。(大沢・竹腰'87 Math. Z.) その後、除去可能荷重関数をゆるす方向に一般化が進み(大沢、'95 Math. Z.) これにより、一変数の場合にも新しい知見が得られた。(大沢、'95 Nagoya Math. J.) ここまでは、1994年の春の学会(神戸)で発表ずみである。

表題の話で新しい点は、① n次元擬凸多様体上で、ベクトル束に値をとる正則n形式に対するL^2拡張定理を定式化することにより、拡張定理と割算定理の直接的な関係が発見できたこと。② 一般化されたGreen関数を導入することにより、一変数の理論との連絡がよくなったことである。記号だが、体積要素つき複素多様体(M, dV_M)、M上のHermite束(E, h)に対し、$A^2(M, E, h, dV_M)$でE値L^2正則切断の空間を表す。またK_MはMの標準直線束とする。

主定理　Mは正直線束をもつ擬凸多様体、(E,h)はM上の、中野の意味で半正値な曲率をもつHermiteベクトル束、SはMの複素部分多様体、dV_MはM上の連続な体積要素とする。Sに付随する標準的荷重関数Ψで、Eの特異ファイバー計量$he^{-\Psi}$の曲率カレントが中野の意味で半正値であるものに対し、補間作用素

$$I : A^2(S, E\otimes K_M, h\otimes(dV_M)^{-1}, dV_M[\Psi]) \longrightarrow A^2(M, E\otimes K_M, h\otimes(dV_M)^{-1}, dV_M)$$

で、ノルムが$2^4\pi^{\frac{1}{2}}$を越えないものが存在する。

ただし、

① Mが擬凸多様体 :$\Longleftrightarrow$ Mは連続な多重劣調和皆既関数をもつ.

② ΨがSに付随する標準的荷重関数 :$\Longleftrightarrow$ Sの局所定義方程式系を$z_1=\cdots=z_k=0$とすると、$\Psi - k\log\sum_{j=1}^{k}|z_j|^2 \in L^\infty_{loc}$

③ $dV_M[\Psi]$はS上の測度であり、
$0 \le {}^\forall f \in C_0^\infty(M)$に対して

$$\int_S f\,d\mu \ \ge\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{2k}{\sigma_{2k-1}}\int_M f e^{-\Psi}\chi_{R(\Psi,t)}\,dV_M$$

をみたす測度$d\mu$の集合の最小元として定義される. ただし、$\sigma_{2k}=2\pi^k/k!$. χは特性関数で、

$$R(\Psi,t) := \{x\in M \mid -t-1 < \Psi(x) < -t\}.$$

21までの話ではケーラー性が大事
22ではケーラー条件なし.

⇔ 共に L^2-estimate.
何処が違うのかな?

23. 可算個の代数的集合の非交和における A_p 補間問題について

大内　重樹　　（東京工業大学理工学研究科）

p を $\mathbb{C}^n$ 上の非負値多重劣調和関数とするとき,

(1) $\log(1+|z|^2) = O(p(z))$

(2) 正定数 C_0, D_0 が存在し,

$$|z-\zeta| \leq 1 \Rightarrow p(z) \leq C_0 \exp(D_0 p(\zeta))$$

が成立する.

をみたすものを, **weight** と呼ぶ. 以降, p は weight であると仮定する.

$V \subset \mathbb{C}^n$ を解析的部分集合あるいは開部分集合とする. 正定数 A, B が任意の $z \in V$ に対し

$$|f(z)| \leq A \exp(Bp(z))$$

をみたすようにとれるような V 上の正則関数 f のなす空間を $A_p(V)$ とかく. $\mathcal{O}(V)$ を V 上の正則関数のなす環とすると, $A_p(V)$ が $\mathcal{O}(V)$ の部分環になるのは明らか. そこで, $A_p(\mathbb{C}^n)$ を **Hörmander algebra** と呼ぶことがある.

$X \subset \mathbb{C}^n$ を解析的部分集合とする. このとき, 制限写像 $\rho_X : A(\mathbb{C}^n) \to A(X)$ を $\rho_X(f) = f|_X$ により定義すると, ρ_X は全射になる. また, 定義より明らかに $\rho_X(A_p(\mathbb{C}^n)) \subset A_p(X)$ となる. そこで, $\rho_X(A_p(\mathbb{C}^n)) = A_p(X)$ をみたすとき, X は $A_p(\mathbb{C}^n)$ に**関する補間多様体**であるという. **A_p 補間問題**とは, 与えられた解析的部分集合 $X \subset \mathbb{C}^n$ が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体となるための条件を見つける問題である.

2 年前のこの場で X が「可算個の複素アフィン部分空間の非交和」の場合[O] についての結果を発表した. そこで, 「各複素アフィン部分空間を代数的集合にかえて議論したらどうなるか？」という問題が考えられる. しかし, いきなり考えるのが難しいので, 「可算個の代数的集合の非交和」を「$\mathbb{C}^n$ 内の離散点列の m 変数多項式写像の逆像」(ただし, $m \geq n$) にかえて扱ってみた. その結果は以下の通りである.

主定理. $X = \{\zeta_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^n$を離散点列とする. また, $\mathbb{C}^m$から$\mathbb{C}^n$ $(m \geq n)$の多項式写像 $F = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]^n$ に対し,

$$d = \max_{j=1,\ldots,n} \deg F_j$$

とおく. このとき,

(1) Xは, $A_{|\cdot|^a}(\mathbb{C}^n)$ に関して補間多様体である.

(2) 正定数 ε, Cと有限部分集合 $E \subset \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $\nu \in \mathbb{N} \setminus E$, $z \in F^{-1}(\zeta_\nu)$ に対し

$$\sum_{\kappa=1}^{\binom{m}{n}} |\triangle_\kappa^F(z)| \geq \varepsilon \exp(-C|z|^{ad})$$

をみたす. ただし, 左辺は Fのヤコビ行列 JFのすべての $n \times n$ 小行列式の絶対値の和である.

ならば, $F^{-1}(X)$ は任意の$\boxed{b \geq ad}$に対して, $A_{|\cdot|^b}(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体である.

最後に, 主定理の中の四角でかこったところが次の未解決問題の意味で「最良」であることを示す.

未解決問題 ([BT]). p, qを $\mathbb{C}^n$上の weight とし, いたるところ $p \leq q$をみたすと仮定する. このとき, $\mathbb{C}^n$上の解析的部分集合 Xが $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間多様体であるならば, $A_q(\mathbb{C}^n)$ に関しても補間多様体となるか?

References

[BT] C. A. Berenstein and B. A. Taylor, *On the Geometry of Interpolating Varieties*, Seminaire Lelong-Skoda (1980/1981), Lecture Notes in Math. **919**, Springer-Verlag, New York, pp. 1–25.

[O] S. Oh'uchi, *Disjoint unions of complex affine subspaces interpolating for A_p*, Forum Math. **11** (1999), 369–384.

24. Nondegenrate entire maps of $\mathbf{C}^2$ to $\mathbf{C}^2$

足立幸信

定義１　（西野による）　$f(x,y)$　を非定数整関数とする。

（１）$\exists\alpha \in \mathbf{C}$ に対し、$f = \alpha$ の既約成分にその正規化が双曲型のRiemann面と正則同型なもの（略して双曲型の面という）があるとき、f を双曲型の整関数と呼ぶ。

（２）高々１個の除外値を除くすべての $\alpha \in \mathbf{C}$ に対し、$f = \alpha$ の既約成分が放物型の面であるとき、f を放物型の整関数とよぶ。

（３）（２）で“種数有限の放物型の面”としたとき、f を特殊放物型の整関数と呼ぶ。

（４）（２）で”代数型の面，即ち種数有限で有限個のpunctureを持つ面”としたとき、f を代数型の整関数とよぶ。

定理Ａ　（山口　１９７６）　$f(x,y)$ を整関数とし、$E \in \forall\alpha$ の $f = \alpha$ のある既約成分が放物型の面であり、$capE > 0 \Longrightarrow$　f は放物型の整関数。

定理Ｂ（西野一山口）　$f(x,y)$ を整関数とし、$E \ni \forall\alpha$ の $f = \alpha$ のある既約成分が代数型の面であり、$capE > 0 \Longrightarrow f$ は代数型の整関数。

定理Ｃ（西野　１９７５）　$f(x,y)$ を代数型の整関数とすると、$f = \varphi \circ P \circ T$ と書ける。ここに $\varphi(z)$ は整関数、$P(x,y)$ は多項式、$T \in Aut(\mathbf{C}^2)$。

定義２　$F : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ を非退化整写像 $(F \in (E))$、$P(x,y)$ 非定数多項式とする。

（１）$\forall P$ に対し、$P \circ F$ が双曲型の整関数のとき、F は強双曲型の整写像とよぶ。$(F \in (SH))$

（２）$\exists P$ に対し、$P \circ F$ が双曲型の整関数のとき、F は双曲型の整写像と呼ぶ。$(F \in (H))$

（３）$\forall P$ に対し、$P \circ F$ が放物型の整関数のとき、F は放物型の整写像と呼ぶ。$(F \in (P))$

（４）$\forall P$ に対し、$P \circ F$ が特殊放物型の整関数のとき、F は特殊放物型の整写像と呼ぶ。$(F \in (SP))$

（５）$\forall P$ に対し、$P \circ F$ が代数型の整関数のとき、F は代数型の整写像と呼ぶ。$(F \in (A))$

注意　$(E)=(H)\cup(P),(H)\cap(P)=\emptyset$.　$(SH)\subset(H),(A)\subset(SP)\subset(P)$.　（包含関係で＝は成立しない。）

定理１　$F\in(A)\Longleftrightarrow F$ は $F=F_0\circ T$ と書ける。ここに F_0 は非退化多項式写像　$(F_0\in(PA)), T\in Aut(\mathbf{C}^2)$.

F_0 の値分布を調べることによって、次の定理を得る。

定理２　$F\in(A)$ の必十条件は、次の（１）と（２）が成立すること。（１）ある代数曲線 E と、ある自然数 n があって、$\mathbf{C}^2-E\in\forall p$ に対し、$F^{-1}(p)$ は（重複度もこめて）丁度 n 個の点より成る。

（２）E 上の高々有限個の点より成る $E_0\ni p$ に対し、$F_0^{-1}(p)$ は $\mathbf{C}^2$ の曲線を含み、$E-E_0\ni\forall p$ に対し $F^{-1}(P)$ は高々 n 個の点より成る。

命題１　$F=(p(x),\psi(y))\in(P)-(A)$。ここで $p(x),\psi(y)$ はそれぞれ多項式、超越的整関数である。

注意　$F=(x,e^y)\in(P)-(SP)$.

注意　(P) の F でその $order=p$ が $p\in[0,\infty]$ のものが存在する。

定理３　$F\in(E)$ とする。高々可算個の点 $E_0\ni p$ に対して $F^{-1}(p)$ は $\mathbf{C}^2$ の曲線を含み $\mathbf{C}^2$ の曲線 E_1 上の点を除いて $F^{-1}(p)$ は重複度も込めて丁度 n 個の点から成る。$\Longrightarrow F\in(P)$。

系　$F_1,F_2\in(A)\Longrightarrow F_1\circ F_2\in(P)$。

問題１　$F_1,F_2\in(P)\Longrightarrow F_1\circ F_2\in(P)$?　φ,ψ を超越整関数とするとき、$(\varphi(x),\psi(y))=(\varphi(x),y)\circ(x,\psi(y))\in(P)$?　f,g を代数型整関数とするとき、(f,g) は非退化なら $(f,g)\in(P)$?

問題２　f,g が放物型整関数とするとき、(f,g) が非退化なら $(f,g)\in(P)$?

問題３　放物型整写像の除外集合を調べること。$measure0$?

25. Parabolic or hyperbolic Stein manifolds of dimension 2

足立幸信

西野スクールによる整関数論の多くの部分が 2 次元の Stein 多様体 M に拡張されている。そこで M 上の正則写像が、双曲型とか放物型とかが $\mathbf{C}^2$ と同様に定義される。

定理 1　任意の Stein 多様体 M 上に双曲型写像が存在する。

定義 2　M 上放物型の写像が存在するとき M を放物型 ($M \in \mathcal{P}$)、存在しないとき双曲型 ($M \in \mathcal{H}$) とする。

注意 3　$\mathcal{H}$ か $\mathcal{P}$ は M の双正則写像で不変な性質である。

定理 4　$\mathcal{P} \ni M$ 上有界正則関数は存在しない。

26. 領域の減少列上の不変距離の収束について

東京大学大学院 数理科学研究科

小林 正史

D を n 次元複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 内の領域とし, D 上の Carathéodory 距離を c_D, Kobayashi 距離を k_D, Kobayashi 計量を κ_D で表すことにする. 領域の増加列, または, 減少列上の c_D と k_D のふるまいを調べることにする. 増加列については, 次の結果が知られている.

定理 1. $D \subset \mathbb{C}^n$ を領域, $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$ を領域の列で, 任意の自然数 j に対して $D_j \subset D_{j+1}$ と $D = \bigcup_j D_j$ を満たしているものとする. このとき, c_{D_j} は c_D に k_{D_j} は k_D に各点で収束する.

この定理の証明は定義に戻って考えれば難しくはない. 実際, D を複素空間などとしても成り立つ. 詳しくは, Hristov [1], Jarnicki-Pflug [2], S. Kobayashi [3] などを参照されたい.

減少列の場合は増加列の場合に比べ複雑になる. まず, D に収束する減少列の定義から始めよう.

定義 2. $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$ が D に収束する領域の減少列とは,

(i) 任意の自然数 j に対して, $D_j \Supset D_{j+1}$,

(ii) $\bigcap_{j=1}^{\infty} D_j = \bar{D}$

の 2 条件を満たすときをいう. この定義のもとでは, 不変距離の収束は減少する領域のとりかたによらないことを注意しておく. ここで以下の結果を得た.

定理 3. D を強擬凸な C^2-級の境界をもつ領域で $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$ が D に収束しているとき, c_{D_j} は c_D に広義一様収束する.

定理 4. D を強擬凸な C^2-級の境界をもつ領域で $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$ が D に収束しているとき, k_{D_j} は k_D に広義一様収束する.

定理 3 と 定理 4 は非常によく似ているが, 証明法は全く異なることを注意しておく. その違いは, k_D は κ_D の積分形であるが, c_D は一般には無限小計量の積分形ではないことによる. 定理 3 の証明では D 上の有界正則関数の近似が, 定理 4 では次の定理 5 と κ_{D_j} の ∂D の各点での近傍での評価が必要となる.

定理 5. D を有界で C^1-級の境界をもつ領域とし, $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$ が D に収束しているとき, κ_{D_j} は κ_D に各点で収束する.

参考文献

[1] V. Z. Hristov, *Limits of Carathéodory and Kobayashi pseudometrics*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **29** (1976), no. 7, 951–954.

[2] M. Jarnicki and P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[3] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

27. 低次数の小林双曲的な超曲面の例

城崎　学　　　　大阪府立大学工学部

$\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ $(n = 2, 3, 4)$ の超曲面 S で，**(1)** S 自体が hyperbolic なもの，**(2)** $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})\backslash S$ が complete hyperbolic かつ hyperbolically imbedded in $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ であるもの，あるいは，**(3)** (1) と (2) の両方の性質を持つもの，の存在についてはいろいろ知られているが，その次数 $d = \deg S$ について割と小さいものをまとめると次のようになる．

	(1)	(2)	(3)
$n = 2$	$d \geq 4$	$d \geq 14$:even [AS]	$d \geq 30$:even [AS] $d \geq 5$ [Z] $d = 6k + 3 (k \geq 3)$ [N] $d = 3k (k \geq 7)$ [MN] $d = 4k (k \geq 8)$ [MN] $d = 2k (k \geq 21)$ [MN] $d \geq 19$ [K] , $d \geqq 13$
$n = 3$	$d \geq 50$:even [BG] $d = 6k + 3 (k \geq 3)$ [N] $d = 3k (k \geq 8)$ [MN] $d = 4k (k \geq 7)$ [MN] $d \geq 22$ [K]　$d \geqq 10$ even $d \geq 11$ [D]　$d \geqq 16$	$d \geq 18$:even [SU]	$d \geq 350$:even [Z] $d = 3k (k \geq 57)$ [MN] $d = 4k (k \geq 57)$ [MN] $d \geq 22$:even [SU]
$n = 4$	$d = 3k (k \geq 64)$ [MN] $d = 4k (k \geq 49)$ [MN]		$d = 4k (k \geq 183)$ [MN]
n:一般		$d = 2n + 1$ [G]	$d = 13^n$ [S]

[AS] K. Azukawa and M. Suzuki, *Some examples of algebraic degeneracy and hyperbolic manifolds*, Rocky Mountain J. Math. **10** (1980), 655–659.

[BG] R. Brody and M. Green, *A family of smooth hyperbolic hypersurfaces in* $\boldsymbol{P}_3$, Duke Math. J. **44** (1977), 873–874.

[D] J.-P. Demailly, *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp.285–360.

[K] H. H. Khoai, *Hyperbolic surface in* $\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{C})$, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3527–3532.

[G] M. L. Green, *The hyperbolicity of the complement of* $2n+1$ *hyperplanes in general position in* $\boldsymbol{P}_n$ *and related results,* J. Amer. Math. Soc. **66** (1977), 109–113.

[MN] K. Masuda and J. Noguchi, *A construction of hyperbolic hypersurface of* $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$, Math. Ann. **304** (1996), 339-362.

[N] A. M. Nadel, *Hyperbolic surfaces in* $\boldsymbol{P}^3$, Duke Math. J. **58** (1989), 749–771.

[S] M. Shirosaki, *On some hypersurfaces and holomorphic mappings,* Kodai Math. J. **21** (1998), 29–34.

[SU] 上田賢嗣, 城崎　学, *On hyperbolicity of complements of Siu-Yeung hypersurfaces,* 日本数学会 1999 年度秋期総合分科会函数論分科会講演.

[Z] M. G. Zaidenberg, *Stability of hyperbolic imbeddedness and construction of examples,* Math. USSR Sbornik **63** (1989), 351–361.

今回は次の例について報告する.

	(1)	(3)
$n=2$		$d \geq 13$
$n=3$	$d \geq 16$	$d \geq 31$
$n=4$	$d \geq 36$	$d \geq 73$

28. 複素射影空間内の小林双曲的超曲面について

藤本坦孝　　金沢大学理学部

1970 年に出版された小林昭七氏の著書 ([4]) に,「複素射影空間 $P^n(\mathbb{C})$ 内の十分高い次数の一般的な超曲面は (小林) 双曲的ではないか.」という問題が出されている. この問題は現在でも未解決であり, いくつかの例が構成されているのみといった状況である.

$P^3(\mathbb{C})$ 内の双曲的超曲面については, 1977 年, Brody-Green により, $d \geq 25$ について, 次数 $2d$ のものが作られ, その後, Nadel, Goul 及び Demailly により, 次数がそれぞれ 21, ≥ 14 及び ≥ 11 のものが構成された ([6], [3], [2]). また, 最近, 城崎氏が, 次数 10 の超曲面の具体例を与えた ([7]). 一方, 増田及び野口氏は, 任意の n に対し, 次数が十分高ければ, $P^n(\mathbb{C})$ 内に双曲的超平面が存在することを示した ([5]).

ここでは, 上記城崎氏の論文における方法を改良して, 任意の $n(\geq 3)$ に対し, $P^n(\mathbb{C})$ 内の次数 2^n 次双曲的超曲面を構成することができることを報告する.

主結果をより正確な形で述べるために, いくつかの用語を説明する.

定義 1. 正則写像 $f : \mathbb{C} \to P^n(\mathbb{C})$ に対し, $P^n(\mathbb{C})$ の斉次座標を用いた表示 $f := (f_0 : f_1 : \cdots : f_n)$ が, f の被約表示であるとは, f_i が共通零点を持たない整関数であることを意味する.

定義 2. $n+1$ 変数の d 次斉次多項式 $Q(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ が, 条件

(H1) 被約表示 $f := (f_0 : f_1 : \cdots : f_n)$ を持つ正則写像 $f : \mathbb{C} \to P^n(\mathbb{C})$ が, 或定数 c に対し $Q(f_0, f_1, \ldots, f_n) = cf_0^d$ を満たすとき, つねに, f は定数である.

(H2) 被約表示 $f := (f_1 : f_2 : \cdots : f_{n+1})$ を持つ正則写像 $f : \mathbb{C} \to P^n(\mathbb{C})$ が, 或非零定数 c に対し $Q(0, f_1, \ldots, f_n) = cf_{n+1}^d$ $(c \in \mathbb{C}, c \neq 0)$ を満たすとき, つねに, f は定数である.

を満たすとき, 条件 (H) を満たすと呼ぶことにする.

$n+1$ 変数 $u_0, u_1, \ldots, u_n$ の d 次斉次多項式の全体 $\mathcal{P}_{d,n}$ を考え, その中の各多項式にその多項式の係数の作るベクトルを対応させることにより, $\mathcal{P}_{d,n}$ と $\mathbb{C}^{N(d,n)} - \{0\}$ を同一視する. ここで, $N(d,n) = \binom{n+d}{d}$.

定義 3. 斉次多項式に関する或性質 (P) が, 一般の d 次斉次多項式について成り立つとは, 性質 (P) が成り立たないような斉次多項

式の全体が，$\mathcal{P}_{d,n}(=\mathbb{C}^{N(d,n)})$ 上の或非零多項式の零点集合に含まれることを意味するものとする．

主結果は，次の二つの定理にまとめられる．

定理 I u_0, u_1, u_2 を変数とする次数が 4 以上の一般の斉次多項式 $Q(u_0, u_1, u_2)$ は，条件 (H) を満たす．

定理 II $Q(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ を変数とする d 次斉次多項式とし，条件 (H) を満たすとする．このとき，一般の $2d$ 次斉次多項式 $P(u_0, u_{n+1})$ に対し， 多項式

$$(1) \qquad R(u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}) := P(u_0, u_{n+1}) - Q(u_0, u_1, \ldots, u_n)^2$$

3 でも O.K.

もまた，条件 (H) を満たす．

これらの定理を併用すれば，容易に次の系を示すことができる．

系 1．4 以上の任意の整数 d に対し，$P^3(\mathbb{C})$ 内に $2d$ 次の（小林）双曲的超曲面で，$2d-1+(d+1)(d+2)/2$ 個の代数的に独立なパラメーターで記述される族が存在する．

系 2．任意の $n(\geq 3)$ に対し，$P^n(\mathbb{C})$ 内に 2^n 次の双曲的超曲面で，$2^{n+1}+6$ 個の代数的に独立なパラメーターで記述される族が存在する．

References

[1] R. Brody and M. Green, A family of smooth hyperbolic hypersurfaces in $\mathbf{P}^3$, Duke Math. J., **44**(1977), 873 – 874.

[2] J.-P. Demailly, Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 285 – 360.

[3] J. Goul, Algebraic families of smooth hyperbolic surfaces of low degree in P^3, manuscripta math., **90**(1996), 521 – 532.

[4] S. Kobayashi, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker, 1970.

[5] K. Masuda and J. Noguchi, A construction of hyperbolic hypersurface of $P^n(\mathbb{C})$, Math. Ann., **304**(1996), 339 – 362.

[6] A. Nadel, Hyperbolic surfaces in $\mathbf{P}^3$, Duke. Math. J., **58**(1989), 749 – 771.

[7] M. Shirosaki, A hyperbolic hypersurface of degree 10, preprint.

29. Criteria for Algebraic Dependence of Meromorphic Mappings

YOSHIHIRO AIHARA

Numazu College of Technology,
3600 Ooka, Numazu, Sizuoka 410-8501, Japan
E-mail address:aihara@la.numazu-ct.ac.jp

Let M be a projective algebraic manifold. Let $\pi : X \to \mathbf{C}^m$ be an s_0-sheeted analytic covering space with the ramification divisor B. For a positive integer l, set $M^l = M \times \cdots \times M$ (l-times). A proper algebraic subset Σ of M^l is said to be *decomposable* if for some positive integer s not grater than l, there exist positive integers $l_1, \cdots, l_s$ with $l = l_1 + \cdots + l_s$ and algebraic subsets $\Sigma_j \subseteq M^{l_j}$ such that $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_s$. Let S be an analytic subset of X. Nonconstant meromorphic mappings $f_1, \cdots, f_l : X \to M$ are said to be *algebraically dependent* on S if there exists a proper algebraic subset Σ of M^l such that $(f_1 \times \cdots \times f_l)(S) \subseteq \Sigma$ and Σ is not decomposable. We fix an ample line bundle $L \to M$. We denote by μ_0 the least integer such that $\mu_0 L$ is very ample. We define $[F/L]$ to be the infimum of the set of rational number γ such that $\gamma L \otimes F^{-1}$ is big. Let $D_1, \cdots, D_q$ be divisors in $|L|$ such that $D_1 + \cdots + D_q$ has only simple normal crossings. Let $S_1, \cdots, S_q$ be hypersurfaces in X such that $\dim S_i \cap S_j \leq m-2$ for any $i \neq j$. We define a hypersurface S in X by $S = S_1 \cup \cdots \cup S_q$. Let $k_1, \cdots, k_q$ be fixed positive integers or $+\infty$. We assume that at least one dominant meromorphic mapping $f_0 : X \to M$. Suppose that the union of all irreducible components of $f_0^* D_j$ with the multiplicities at most k_j coincides with S_j for all $1 \leq j \leq q$. Let $\mathcal{F}$ be the set of all *dominant* meromorphic mappings $f : X \to M$ such that the union of all irreducible components of $f^* D_j$ with the multiplicities at most k_j is equal to S_j for each $1 \leq j \leq q$. Let $F_1, \cdots, F_l$ be big line bundles over M. We assume that there exists a line bundle, say F_0, in $\{F_1, \cdots, F_l\}$ such that $F_0 \otimes F_j^{-1}$ is either big or trivial. We define a line bundles $\tilde{F}$ over M^l by $\tilde{F} = \pi_1^* F_1 \otimes \cdots \otimes \pi_l^* F_l$, where $\pi_j : M^l \to M$ are the natural projections on j-th factor. Let $\tilde{L}$ be a big line bundle over M^l. In the case of $\tilde{L} \neq \tilde{F}$, we assume that there exists the least positive rational number $\tilde{\gamma}$ such that $\tilde{\gamma}\tilde{F} \otimes \tilde{L}^{-1}$ is big. If $\tilde{L} = \tilde{F}$, then we take $\tilde{\gamma} = 1$. Let $\mathcal{R}$ be the set of all hypersurfaces Σ in X such that $\Sigma = \operatorname{Supp} \tilde{D}$ for some $\tilde{D} \in |\tilde{L}|$ and Σ is not decomposable.

Definition. Let Y be a compact complex manifold. We say that a meromorphic mapping $f : X \to Y$ *separates the fibers of* $\pi : X \to \mathbf{C}^m$ if there exists a point z in

$\mathbf{C}^m - (\mathrm{Supp}\, \pi_* B \cup \pi(I(f)))$ such that $f(x) \neq f(y)$ for any distinct points $x,\ y \in \pi^{-1}(z)$.

Set $k_0 = \max\{k_1, \cdots, k_q\}$. For $1 \leq t \leq l$, we define $G_t \in \mathrm{Pic}(M) \otimes \mathbf{Q}$ by

$$G_t = \left(\sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j+1} - 2(l-t+1)\mu_0(s_0-1) \right) L \otimes \left(-\frac{\tilde{\gamma} l k_0}{k_0+1} F_0 \right).$$

Theorem 1. *Let $f_1, \cdots, f_l \in \mathcal{F}$ such that $(f_1 \times \cdots \times f_l)(S) \subseteq \Sigma$. Suppose that $f_{j_1}, \cdots, f_{j_t}$ separate the fibers of $\pi : X \to \mathbf{C}^m$, where $1 \leq j_1 < \cdots < j_t \leq l$. If $G_t \otimes K_M$ is big, then $f_1, \cdots, f_l$ are algebraically dependent on X.*

The method of proof of the above theorem uses the second main theorem and the ramification estimate due to J. Noguchi [2] in an essentially computational way. We now give another version of a criterion for dependence, which is obtained by a slight modification of the proof of Theorem 1. Set

$$p_0 = \sum_{j=1}^{q} \frac{k_j}{k_j+1} - [K_M^{-1}/L] - 2\mu_0(s_0-1).$$

We also define

$$r_1 = q - [K_M^{-1}/L] - 2\mu_0(s_0-1) \qquad \text{and} \qquad r_j = q - [K_M^{-1}/L] \ \ (2 \leq j \leq l).$$

Then we have the following (cf. [1] and [3]):

Theorem 2. *Let $f_1, \cdots, f_l$ be as in Theorem 1. Suppose that all r_j are positive and f_1 separates the fibers of $\pi : X \to \mathbf{C}^m$. If*

$$p_0 - \frac{\tilde{\gamma} l k_0}{k_0+1}[F_1/L] + r_1 \sum_{j=2}^{l} \left(p_0 - \frac{\tilde{\gamma} l k_0}{k_0+1}[F_j/L] \right) > 0,$$

then $f_1, \cdots, f_l$ are algebraically dependent on X.

We can prove some criteria for algebraic dependence in the case where $[D_i] \neq [D_j]$ for $i \neq j$. These extensions of the above theorems have wider ranges of applicability and some interesting results are obtained.

References

[1] S. J. Drouilhet, Criteria for algebraic dependence of meromorphic mappings into algebraic varieties, Illinois J. Math. **26** (1982), 492–502.

[2] J. Noguchi, Meromorphic mappings of covering spaces over $\mathbf{C}^m$ into a projective variety and defect relations, Hiroshima Math. J. **6** (1976), 265–280.

[3] W. Stoll, Propagation of dependences, Pacific J. Math. **139** (1989), 311–336.

30. Cohomological completeness of q-complete domains with corners

松本　和子　　　(大阪女大理)

n 次元複素多様体 M の開集合 D で定義された C^2 級の実関数 φ は, Levi form $\partial\bar{\partial}\varphi$ が少なくとも $n-q+1$ 個の正の固有値を持つとき, q-convex であるという. また, 複素多様体 D は, D 上の q-convex function φ で, 任意の $M \in \mathbf{R}$ に対し $\{P \in D : \varphi(P) < M\} \Subset D$ となるものが存在するとき, q-complete であるという.

Andreotti-Grauert により, 次の消滅定理が知られている.

Theorem A ([1]).　D が q-complete domain で, $\mathcal{F}$ が D 上の解析的連接層のとき,

$$H^j(D, \mathcal{F}) = 0, \qquad j \geqq q.$$

ところで, $D_1, D_2, \ldots, D_t$ が, 1 つの n 次元複素多様体 M に含まれる q-complete domain のとき, 共通部分 $D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_t$ は, $2 \leqq q \leqq n-1$ の場合, 一般には Andreotti-Grauert の意味の q-complete domain にはならず, Diederich-Fornaess の意味の q-complete domain with corners になる.

Diederich-Fornaess により, 次の近似定理が知られている.

Theorem B ([2]).　$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ が D 上の q-convex function のとき, 連続関数 $\varphi := \max\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t\}$ は, D 上 C^2 級の $\tilde{q}$-convex function により近似することができる. ここで, $\tilde{q} := n - [n/q] + 1$ で, [　] は Gauss 記号を表す.

したがって, Theorem A と Theorem B を組み合わせると, 直ちに次が言える.

Theorem C ([1]+[2]). $D_1, D_2, \ldots, D_t$ が M に含まれる q-complete domain で, $\mathcal{F}$ が M 上の解析的連接層のとき,

$$H^j(D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_t, \mathcal{F}) = 0,. \qquad j \geqq \widetilde{q}.$$

Theorem B において, q-convex function with corners φ を C^2 級のもので近似する場合, 任意の (n, q) に対し, $\widetilde{q}$ という数字をこれ以上落とせない $\mathbf{C}^n$ 上の関数の例も, Diederich-Fornaess によって構成されている. これに対し, cohomological completeness については, Theorem C よりも強く, 次が成り立つ.

Theorem. $D_1, D_2, \ldots, D_t$ が n 次元複素多様体 M に含まれる q-complete domain で, $\mathcal{F}$ が $H^n(M, \mathcal{F}) = 0$ を満たす M 上の解析的連接層のとき,

$$H^j(D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_t, \mathcal{F}) = 0, \qquad j \geqq \widehat{q}.$$

ここで,

$$\widehat{q} := \begin{cases} \widetilde{q} & (q \text{ が } n \text{ の約数のとき}) \\ \widetilde{q} - 1 & (q \text{ が } n \text{ の約数でないとき}) \end{cases}$$

である. さらに, 任意の (n, q) に対し, $\widehat{q}$ という数字をこれ以上落とせない $\mathbf{C}^n$ 内の領域の例も存在する.

参考文献

[1] A. Andreotti and H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 193–259.

[2] K. Diederich and J. E. Fornaess, Smoothing q-convex functions and vanishing theorems, Invent. Math., **82** (1985), 291–305.

[3] M. G. Eastwood and G. V. Suria, Cohomologically complete and pseudoconvex domains, Comment. Math. Helv., **55** (1980), 413–426.

[4] K. Matsumoto, Boundary distance functions and q-convexity of pseudoconvex domains of general order in Kähler manifolds, J. Math. Soc. Japan, **48** (1996), 85–107.

[5] G. Sorani and V. Villani, q-complete spaces and cohomology, Trans. Amer. Math. Soc., **125** (1966), 432–448.

31. トーラス上の関数のグラフの多項式凸包

神保 敏弥　　　　奈良教育大学

Kを$\mathbb{C}^n$のコンパクト部分集合とし、$C(K)$をK上の複素数値連続関数のBanach環とする。$f \in C(K)$のノルムはsup-norm $\|f\|$とする。関数$f_1, \cdots, f_m \in C(K)$の多項式によって生成される関数環を$[f_1, \cdots, f_m; K]$とおく。$K$の多項式凸包を$\hat{K}$で表す、すなわち

$$\hat{K} = \{z \in \mathbb{C}^n : |p(z)| \leq \|p\|, for\ every\ polynomial\ p\}.$$

$\hat{K} = K$を満すとき、Kは多項式凸集合といわれる。関数fのグラフをΣまたは$\Sigma(f, K)$で表す、すなわち

$$\Sigma = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^{n+1} : z \in K\}.$$

問題　K上のグラフΣの多項式凸包$\hat{\Sigma}$はどのようになっているか？

$D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$とし、$T^2 = T \times T$とする。$B = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \Sigma_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$とし、その境界を$\partial B$で表す。また$\mathbb{C}^{n+1}$から$\mathbb{C}^n$への自然な射影を$\pi$で表す。このとき次のことが知られている。

Kが円周Tの場合には、$f \in C(T)$のグラフΣについては、Wermerの maximarity theorem から、$\pi(\hat{\Sigma}) = \bar{D}$または、$\pi(\hat{\Sigma}) = T$のいづれかが起こる。

Kが超球面の場合には、$f \in C(\partial B)$のグラフΣについては常に$\pi(\hat{\Sigma}) = \bar{B}$が成立する。また、$f$が$\bar{B}$上の pluriharmonic 関数$g$の$\partial B$上への制限$f = g|_{\partial B}$ならば、$\hat{\Sigma}(f, \partial B) = \Sigma(g, \bar{B})$が成り立つ([A1])。

そこで、KをトーラスT^2とし、関数fはまず多項式の複素共役関数の場合に（阪井氏の応援のもと）調べてみたのでそれを報告する。

例　$f(z_1, z_2) = \bar{z}_1^m \bar{z}_2^n (m, n$は自然数）のときは、

$$\hat{\Sigma} = \Sigma, \quad [z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2).$$

命題　Lは$\mathbb{C}^2$のコンパクト多項式凸集合とする。f, gはLの開近傍Uで正則な関数とする。$N = \{z \in U : \bar{f}(z) - g(z) = 0\}$とし、$K$は

コンパクト集合で、$K \subset L \cap N$を満たすとする。

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{f}(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial \bar{f}(z)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial g(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial g(z)}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

とおく。このとき、 (1) $\hat{K} \subset N \cap L$, (2) 点$z^0 \in N$が$\Delta(z^0) \neq 0$を満たすならば、z^0を中心とする十分小さなball B_0をとれば、$B_0 \cap N$はtotally real 多様体である。

補題 Uを$\mathbb{C}^n$の開集合とし、NをUのC^∞ totally real submanifoldとする。以下はNが totally real set の場合 ([S1]) も正しい。

(1) z^0を中心とする十分小さなball B_0をとれば、$\bar{B}_0 \cap N$は多項式凸集合である ([NW])。

(2) KがN内のコンパクトな多項式凸集合ならば、$P(K) = C(K)$を満たす ([NW] cf. [AW2])。

これらの他、Rossi の局所最大絶対値の原理と totally real manifold(set) のグラフがまた totally real manifold(set) となることを用いて次を得る。

定理 複素数$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$と自然数$n$に対して、$J = \{j \in \{1, \cdots, n\} : |\lambda_j| = 1\}$とする。$f(z_1, z_2) = (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{z}_2) \cdots (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_n \bar{z}_2)$ $(\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0)$とおく。このとき

(1) $J = \phi$ならば、$\hat{\Sigma} = \Sigma$. さらに$[z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2)$.

(2) $J \neq \phi$ならば、

$$\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} \{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0\}$$

References

[AR] P. AHERN and W. RUDIN, 'Hulls of 3-spheres in $\mathbb{C}^3$', Contemparary Math.137(1992) 1-27.

[A1] H. ALEXANDER, 'Polynomial hulls of graphs', Pacific J. Math. 147(1991) 201-212.

[AW1] H. ALEXANDER and J. WERMER, 'Polynomial hulls with convex fibers', Math Ann. 271(1985), 99-109.

[AW2] H. ALEXANDER and J. WERMER, 'Several Complex Variables and Banach Algebras', Springer-Verlag,1998.

[JA] T. JIMBO and A. SAKAI, 'Polynomially convex hulls of graphs on the sphere', Proc. Amer. Math. Soc. 127(1999) 2759-2766.

[NW] R. NIRENBERG and R. O. WELLS, JR, 'Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold', Trans. Amer. Math. Soc. 142(1969) 15-35.

[S1] A. SAKAI, 'On totally real sets', Geometric Complex Analysis edited by J. Noguchi et. al. World Scientific Publ. Co.,(1996) 525-533.

32. Infinitesimal Locally Trivial Deformation Spaces of Compact Complex Surfaces with Ordinary Singularities

Shoji Tsuboi (坪井昭二), Kagoshima University (鹿児島大学)

コンパクト、既約な2次元複素解析空間を**複素曲面**と呼ぶことにする。複素曲面 S が「**通常特異点を持つ**」とは、S が S の全ての点に於いて、$\boldsymbol{C}^3$ の原点に於ける次の超曲面の解析空間の芽のいずれかと同型となることである:

$$\begin{cases} (i)\ z=0\ (\text{単純点}) & (ii)\ yz=0\ (\text{通常2重点}) \\ (iii)\ xyz=0\ (\text{通常3重点}) & (iv)\ xy^2-z^2=0\ (\text{尖点}), \end{cases}$$

ここで、(x,y,z) は $\boldsymbol{C}^3$の座標を表す。記号を次の様に定める。

S: 通常特異点を持つ複素曲面 ; D_S : S の特異点集合 (S の **2 重曲線**と言う) ; Σt_S: S の **3 重点**の集合 (Σt_S は2重曲線 D_S の特異点集合と一致することに注意) ; Σc_S: S の**尖点**の集合 ; $f : X \to S$: S の**正規化** (X は**非特異**であることに注意) ; $D_X := f^{-1}(D_S)$; $\Sigma t_X := f^{-1}(\Sigma t_S)$; $n_S : D_S^* \to D_S$ 、$n_X : D_X^* \to D_X$ はそれぞれ D_S 、D_X の正規化 ; $\nu_S : D_S^* \to S$、$\nu_X : D_X^* \to X$ はそれぞれ写像 n_S、n_X と包含写像 $D_S \hookrightarrow S$、$D_X \hookrightarrow X$ との合成写像 ; $g : D_X^* \to D_S^*$ は写像 $f_{|D_X} : D_X \to D_S$ の正規化モデルへの「持ち上げ」; $\Sigma t_S^* := n_S^{-1}(\Sigma t_S)$; $\Sigma t_X^* := n_X^{-1}(\Sigma t_X)$ (Σt_X^* は、合成写像 $n_S \circ g : D_X^* \to D_S$ による Σt_S の逆像と一致することに注意) ; $\Sigma c_S^* := n_S^{-1}(\Sigma c_S)$。更に、各種の解析的層を次の様に定義する。

$\Theta_S := \underline{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^1, \mathcal{O}_S)$: S の上の**正則ベクトル場**の層、

$\Theta_X(-logD_X)$: X の上の D_X に沿った**対数的ベクトル場**の層、

$\Theta_{D_S^*}(-\Sigma c_S^* - \Sigma t_S^*)$: Σc_S^* および Σt_S^* でゼロになる D_S^* の上の正則ベクトル場の層、

$\Theta_{D_X^*}(-\Sigma t_X^*)$: Σt_X^* でゼロとなる D_X^* の上の正則ベクトル場の層。

コホモロジー群 $H^1(S, \Theta_S)$ を、通常特異点を持った複素曲面 S の「**局所自明な変形の無限小空間**」と呼ぶことにする。これは、S の「局所自明」な1次のオーダーの無限小変形がこの空間の中に存在することによる。ここで、「**局所自明な変形**」とは、局所的な特異点の解析的なタイプを保つ変形を意味する。

定理 1 次の $\mathcal{O}_S$-加群 の完全列が存在する:

$$0 \to \Theta_S \xrightarrow{\widehat{\omega f} \oplus \widehat{\omega \nu_S}} f_*\Theta_X(-logD_X) \oplus \nu_{S*}\Theta_{D_S^*}(-\Sigma c_S^* - \Sigma t_S^*)$$
$$\xrightarrow{\widehat{\omega \nu_X} - \widehat{\omega g}} \nu_*\Theta_{D_X^*}(-\Sigma t_X^*) \to 0$$

ここで、$\nu := f \circ \nu_X = \nu_S \circ g$。

系 1 もし、写像

$$H^0(X,\Theta_X(-logD_X))\oplus H^0(D_S^*,\Theta_{D_S^*}(-\Sigma c_S^*-\Sigma t_S^*))\to H^0(D_X^*,\Theta_{D_X^*}(-\Sigma t_X^*))$$

が全射ならば、次の同型が存在する：

$$\begin{aligned}&H^1(S,\Theta_S)\\&\simeq Ker\{H^1(X,\Theta_X(-logD_X))\oplus H^1(D_S^*,\Theta_{D_S^*}(-\Sigma c_S^*-\Sigma t_S^*))\\&\qquad\to H^1(D_X^*,\Theta_{D_X^*}(-\Sigma t_X^*))\}\text{。}\end{aligned}$$

定理 2 写像

$$H^1(D_S^*,\Theta_{D_S^*}(-\Sigma c_S^*-\Sigma t_S^*))\to H^1(D_X^*,\Theta_{D_X^*}(-\Sigma t_X^*))$$

は単射である。

この定理の証明には、**2重被覆写像** $g:D_X^*\to D_S^*$ が $J.N.Mather$ の意味で **局所安定**な正則写像 であることが本質的に用いられる。

系 2 もし、写像

$$H^0(X,\Theta_X(-logD_X))\oplus H^0(D_S^*,\Theta_{D_S^*}(-\Sigma c_S^*-\Sigma t_S^*))\to H^0(D_X^*,\Theta_{D_X^*}(-\Sigma t_X^*))$$

が全射ならば、自然な写像

$$H^1(S,\Theta_S)\to H^1(X,\Theta_X(-logD_X))$$

は単射である。

ここで、$H^1(X,\Theta_X(-logD_X))$ は、**非特異曲面** X と、その中の高々**結節点**を持つ曲線 D_X の組 (X,D_X) の局所自明な変形の無限小空間であることを注意しておく。

参考文献

[1] F. Guillén, V. Navarro Aznar, P. Pascual-Gainza and F. Puerta: Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique, Lecture Notes in Math. 1335, 1988, Springer, Berlin

[2] V. P. Paramodov: Tangent fields on deformations of complex spaces, Mathematics of USSR Sbornik (English Translation),71, No.1, 163-182, 1992

[3] S. Tsuboi: Cubic hyper-equisingular families of complex projective varieties, I, II, Proc. Japan Acad. 71A, 207-209, 210-212, 1995

[4] S. Tsuboi: Infinitesimal locally trivial deformation spaces of compact complex surfaces with ordinary singularities, Proc. Japan Acad. 75A, 99-102, 1999

[5] S. Tsuboi: Infinitesimal mixed Torelli problem for algebraic surfaces with ordinary singularities I, preprint

[6] J. J. Wavrik: Deformations of banach coverings of complex manifolds, Amer. J. Math. 90, 926-960, 1968

特 別 講 演

超曲面による正則写像の一意性

城崎　学　　　　　　　　大阪府立大学工学部

$\mathcal{F}$ を $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ への正則写像からなるある族とする．また，S を $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の超曲面とする．ここで，S の非特異性や既約性は要求しない．

定義．$f, g \in \mathcal{F}$ が因子として $f^*(S) = g^*(S)$ をみたすとき，常に $f = g$ ならば，S は族 $\mathcal{F}$ **に対する一意性を持つ**という．

また，C の疎な集合で非定数整関数族に対する一意性を持つものを**整関数対するに一意性値域集合** (URSE または URS) といい，$\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ の有限集合で非定数有理形関数に対する一意性を持つものを**有理形関数に対する一意性値域集合** (URSM) とよぶ．

URS は Gross と Yang ([GY]) が $e^z + z$ の零点集合を例として与えたが，その後，Yi ([Y2]) により有限要素のものが与えられた．また，上記一意性値域集合の定義では，重複度も考慮しているが，これを無視したものの例についても，Yi ([Y3]) により与えられている．

この講演では，主に代数的非退化正則写像や線形非退化正則写像に対して一意性をもつ集合の例について述べる．また，特に断らな

い限り，写像の定義域は複素平面全体とする．

§1. Nevanlinna の一意性定理と Gross の問題

Nevanlinna([N]) は次の 2 つの一意性集合を与えた：

定理 1.1. f, g を非定数有理形関数とし，a_j $(1 \leq j \leq 5)$ を $\overline{C}$ の相異なる 5 点とする．このとき，

$$f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j) \quad (1 \leq j \leq 5)$$

が成り立つならば，$f = g$.

定理 1.2. f, g を相異なる非定数有理形関数とし，a_j $(1 \leq j \leq 4)$ を $\overline{C}$ の相異なる 4 点とする．このとき，重複度を込めて

$$f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j) \quad (1 \leq j \leq 4)$$

が成り立つならば，g は f の 1 次分数変換である．また，a_j のうち 2 つ（例えば，a_3, a_4 ）は f と g の Picard 除外値であり，非調和比 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = -1$.

非定数有理形関数 f と集合 $S \subset \overline{C}$ に対し，

$$E_f(S) := \bigcup_{a \in S} \{(z, m(f, z)); f(z) = a\}$$

とおく．ここで，$m(f,z)$ は関数 $f-f(z)$ の z での重複度である．任意の置換 σ に対して $(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},a_{\sigma(3)},a_{\sigma(4)})\neq -1$ となる 4 点 $a_j\in\overline{\boldsymbol{C}}$ をとり，$S_j=\{a_j\}$ とおけば，定理 2.2 により，

非定数有理形関数 f と g が $E_f(S_j)=E_g(S_j)$ $(1\leq j\leq 4)$ をみたせば，$f=g$.

整関数に対しては，$a_4=\infty$ としておけば良いので，どの点も他の 2 点の中点でないような 3 点 a_1,a_2,a_3 をとれば，同様の結論が得られる．

そこで，Gross ([Gro]) は次の問題を提起した：

Gross' Problem(1976). 2 つ（あるいは 1 個）の有限集合 $S_j\subset\boldsymbol{C}$ で，$E_f(S_j)=E_g(S_j)(j=1,2)$ をみたす 2 つの非定数整関数 f と g は必ず一致するという性質を持つものはあるか？

§2. Yi による一連の結果.

Gross の問題に対して，H.-X. Yi ([Y1]) は 1994 年に次を示した.

2 つの正整数 n,m をとり，$w=\exp\,(2\pi i/n),u=\exp\,(2\pi i/m)$ とおく.

定理 2.1. $S_1=\{a+b,a+bw,\cdots,a+bw^{n-1}\}$, $S_2=\{c\}$ とおく.

ただし，$n>4$ で a, b および c は $b \neq 0, c \neq a$，$(c-a)^{2n} \neq b^{2n}$ をみたす定数とする．このとき，非定数整関数 f と g が $E_f(S_j) = E_g(S_j)$ $(j=1,2)$ をみたすならば，$f=g$.

定理 2.2. $S_1 = \{a_1+b_1, a_1+b_1w, \cdots, a_1+b_1w^{n-1}\}$，$S_2 = \{a_2+b_2, a_2+b_2u, \cdots, a_2+b_2u^{m-1}\}$ とおく．ただし，$n>4, m>4$ で a_1, b_1, a_2 および b_2 は $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$，$a_1 \neq a_2$ なる定数である．このとき，非定数整関数 f と g が $E_f(S_j) = E_g(S_j)$ $(j=1,2)$ をみたすならば，$f=g$.

Yi はまた，Gross の問題の有理形関数版の解として次を示している：

定理 2.3. $S_1 = \{a_1+b_1, a_1+b_1w, \cdots, a_1+b_1w^{n-1}\}, S_2 = \{a_2+b_2, a_2+b_2u, \cdots, a_2+b_2u^{m-1}\}$ および $S_3 = \{\infty\}$ とおく．ただし，$n>6, m>6$，で a_1, b_1, a_2 および b_2 は $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$，$a_1 \neq a_2$ なる定数である．このとき，非定数有理形関数 f と g が $E_f(S_j) = E_g(S_j)$ $(j=1,2,3)$ をみたせば，$f=g$.

更に，Yi は，1995 年に次のような有限要素の URS の例を与えた：

定理 2.4([Y2]). n, m を $n > 2m+4$ なる互いに素な正整数とし，

多項式 $P(w) := w^n + aw^{n-m} + b = 0$ が重根をもたないように 0 でない定数 a, b をとる．このとき，$S = \{w : P(w) = 0\}$ は URS である．

例えば，$S = \{w : w^7 + w^6 + 1 = 0\}$ は URS で，要素の個数で言えば，今のところ知られている最小の URS の一つである．

§3. 複素射影空間への正則写像の一意性.

ここでは，$\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^n((C)$ への正則写像の一意性定理について述べる．そこで，Fujimoto による次の 2 つの一意性定理を紹介する．

f と g を $\boldsymbol{C}^m$ から $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ への正則写像とし，H_j $(1 \leq j \leq q)$ を $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の一般の位置にある超平面とする．今，因子とみて

$$f^*(H_j) = g^*(H_j)\ (1 \leq j \leq q).$$

が成り立っていると仮定する．

定理 3.1([F2]). f または g が線形非退化で $q \geq 3n + 2$ ならば，$f = g$.

定理 3.2([F3]). f または g が代数的非退化で $q \geq 2n + 3$ ならば，$f = g$.

今度は，定理 2.4 を基に $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ への非定数正則写像に対する一意性を持つ集合を得る．ただし，この場合は，非定数，線形非退化，代数的非退化はすべて一致する事を注意しておく．

p と d を $d > 2p+8$ および $p \geq 2$ をみたす互いに素な整数として，$P(w_0, w_1) = {w_0}^d + {w_0}^p {w_1}^{d-p} + {w_1}^d$ とおく．

定理 3.3([S1]). $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ における $P(w_0, w_1)$ の零点集合は $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ への非定数正則写像に対する一意性を持つ．実際，f と g がそれぞれ既約表現 (f_0, f_1) および (g_0, g_1) をもつ $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ への非定数正則写像で，零点を持たないある整関数 α により

$$P(f_0, f_1) = \alpha P(g_0, g_1)$$

が成り立っているならば，

$$f_0 = \beta g_0, \quad g_1 = \beta f_1$$

が成立する．ここで，β は $\beta^d = \alpha$ となる整関数である．

次に，$P_1(w_0, w_1) = P(w_0, w_1)$ とし，$n \geq 2$ に対しては帰納的に

$$P_n(w_0, \cdots, w_n) = P_{n-1}(P(w_0, w_1), P(w_1, w_2), \cdots, P(w_{n-1}, w_n))$$

により，同次多項式 $P_n(w_0, \cdots, w_n)$ を定義する．また，S_n を $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ における $P_n(w_0, \cdots, w_n)$ の零点集合とする．

定理 3.4([S2]). S_n は $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ への代数的非退化正則写像に対する一意性を持つ.

また, Gross の定理の $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ への正則写像の類似として次の結果が得られた.

行列 $(a_{jk})_{0\leq j,k\leq n} \in GL(n+1,\boldsymbol{C})$ をとり, S_1 および S_2 をそれぞれ

$$w_0{}^{p_1} + \ldots + w_n{}^{p_1} = 0$$

および

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{jk}w_k\right)^{p_2} = 0$$

で定義される $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の超曲面とする. ここで, p_1 と p_2 は正整数である.

定理 3.5([SU]). $p_1, p_2 \geq (2n+1)^2$ とし, 相異なる (j,k) と (μ,ν) に対して,

$$(a_{jk})^{2p(n+1)} \neq (a_{\mu\nu})^{2p(n+1)}$$

が成り立つものとを仮定する. ただし, p は p_1 と p_2 の最小公倍数とする. このとき, $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ への線形非退化正則写像 f と g に対し, $f^*(S_j) = g^*(S_j)$ $(j=1,2)$ ならば, $f=g$.

この定理は, Yi の定理（定理 2.1 ）の類似でもある.

定理 3.4 では, 正則写像は代数的非退化であった. また, 定理 3.5

では，写像は線形非退化だが，一意性を言うためには 2 個の集合が必要である．

そこで次に，線形非退化正則写像に対して一意性を持つ超曲面を構成する．

$$Q_n(w_0, \cdots, w_n) = P(w_0, w_1)^q + \cdots + P(w_{n-1}, w_n)^q.$$

とおく．

定理 3.6([S3])． $q \geq (2n-1)^2$ とすると，． $Q_n(w_0, \cdots, w_n)$ の零点集合は $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ への線形非退化正則写像に対する一意性を持つ．

この証明には，Borel の補題が使われる（[F] または [Gre] を参照）．

§4．小林双曲性．

f および g をそれぞれ既約表現 $(f_0, \cdots, f_n)$ および $(g_0, \cdots, g_n)$ をもつ $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ への正則写像とする．ここで，今一度 $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の超曲面 S がある族に対して一意性を持つということを書き出してみる事にする．

S が同次多項式 $P(w_0 \cdots, w_n)$ の零点集合であるとする．このとき，

我々の言う一意性は，ある零を持たない整関数 α に対し，

$$P(f_0, \cdots, f_n) = \alpha P(g_0, \cdots, g_n)$$

が成り立っているならば，$f = g$ であるということである．一方，S が小林双曲的ということは，

$$P(f_0, \cdots, f_n) = 0$$

ならば，f は定数ということであり，更に $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \setminus S$ が Brody 双曲的ということは，ある零を持たない整関数 α に対して，

$$P(f_0, \cdots, f_n) = \alpha$$

ならば，f は定数ということである．

これらの性質には関連がありそうな感じもするが，少なくとも手法的にはかなり通ずるものがある．そこで，この節では S_n の小林双曲性について述べる．

定理 4.1([S2]). S_n は小林双曲的である．

定理 4.2([S2]). $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C}) \setminus S_n$ は完備双曲的であり，$\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ に双曲的に埋め込まれている．

References

[F1] H. Fujimoto, *On meromorphic maps into the complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 272–288.

[F2] H. Fujimoto, *The uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective space*, Nagoya Math. J. **58** (1975), 1–23.

[F3] H. Fujimoto, *A uniqueness theorem of algebraically non-degenerate meromorphic maps into* $\boldsymbol{P}^N(\boldsymbol{C})$, Nagoya Math. J. **64** (1976), 117–147.

[Gre] M. L. Green, *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties,* Amer. J. Math. **97** (1975), 43–75.

[Gro] F. Gross, *Factoriztion of meromorphic functions and some open problems,* Complex Analysis (Proc. Conf. Univ. Kentucky, Lexington, Ky. 1976), Lecture Notes in Math., vol.**599**, Springer–Verlag, Belrin, 1977, pp.51–69.

[N] R. Nevanlinna, *Einige Eindeutigkeitssäteze in der Theorie der meromrphen Funktionen,* Acta Math. **48** (1926), 367–391.

[S1] M. Shirosaki, *On polynomials which determine holomorphic mappings,* J. Math. Soc. Japan **49** (1997), 289–298.

[S2] M. Shirosaki, *On some hypersurfaces and holomorphic mappings,* Kodai Math. J. **21** (1998), 29–34.

[SU] M. Shirosaki and M. Ueda, *An analogue of Yi's theorem to holomorphic mappings,* Preprint.

[Y1] H.-X. Yi, *Unicity theorem for entire functions,* Kodai Math. J. **17** (1994), 133–141.

[Y2] H.-X. Yi, *A question of Gross on the uniqueness of entire functions,* Nagoya Math. J. **138** (1995), 169–177.

[Y3] H.-X. Yi, *The reduced unique range sets for entire or entire functions,* Complex Variables **32** (1997), 191–198.