日　本　数　学　会

１９９９年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９９年9月

於　広島大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.

2. 委員会の任務
   (1) 函数論分科会評議員候補者を選出する.
   (2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.
   (3) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.
   (4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.
   (5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.
   (6) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する.
   (7) 次期委員会委員候補者の推薦.
   (8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (1) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する. 必要に応じ追加， 削減できる.
   (2) 委員の任期は春季学会から２年間とする. 再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.
   (3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.
      (i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する. その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.
      (ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.

4. 委員会の開催及び議決
   (1) 委員会は評議員が召集する.
   (2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.
   (3) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する. 必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.
   (4) 案件の議決は投票によってはならない. 決定できない時は懸案事項として次回に繰越す. 緊急事項については評議員に処置を一任する.

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (1) 委員会の司会をする.
   (2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.
   (3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.
   (4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する.

函数論分科会

9月29日(水) 第VII会場

9:20 ~ 12:00

1	西本 勝之	(デカルト出版)*	N-fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$	15
2	西本 勝之	(デカルト出版)*	N-method to nearly simple harmonic vibration equations	15
3	尾和 重義 V. Pescar	(近畿大理工) (Transilvania Univ.)	Univalency of certain integral operators	15
4	藤解 和也	(金沢大工)	Value distribution of algebroid functions with two branches	15
5	柴田 敬一	(国際自然科学研)*	円板の極値的調和写像について	15
6	戸田 暢茂 石崎 克也	(名工大)* (日本工大)	Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations	15
7	戸田 暢茂	(名工大)	On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum	15
8	小林 保幸	(北大理)*	Zalcman領域における一致の定理	15
9	林 実樹廣 中井 三留	(北大理)	一致の定理とMyrberg現象	10
10	山口 博史	(滋賀大教育)	運退ポテンシャルの一性質	15

14:15 ~ 15:45

11	中村 玄 斎藤 三郎 アドミ シャリフ	(群馬大工)* (群馬大工) (群馬大工)	半空間上の調和関数の表現と調和接続の公式	15
12	程 晋 中村 玄 山本 昌宏	(群馬大工)* (群馬大工) (東大数理)	The global uniqueness for the inverse conductivity problems with non-smooth conductivity	15
13	鈴木 紀明 N.A. Watson	(名大多元数理) (Canterbury Univ.)	A characterization of heat balls by a mean value property for temperatures	15
14	前田 文之	(広島工大)	無限ネットワーク上の非線形調和構造に関する調和化可能性	15
15	中井 三留 多田 俊政	 (大同工大)	古典リュービルの定理の一形	15
16	大津賀 信		導関数が特異積分であるようなプリサイスポテンシャルについて	15

16:00 ~ 17:00 特別講演

C. Kiselman	(Uppsala Univ.)*	Complex convexity, in particular linear convexity	16:00 ~ 17:00

9月30日(木) 第VII会場

9:00 ~ 10:45

17	野田 洋二	(東工大理工)	Holomorphic families of Möbius transformations	15
18	須川 敏幸	(京大理)*	Estimates of harmonic measures with an application to boundary regularity	15
19	糸 健太郎	(東工大理工)*	Schottky groups and Bers boundary of Teichmüller space	15

20 宮地 秀樹 (阪市大理)* On cusps in the boundary of the Maskit slice for once punctured torus groups ······ 15

21 小森 洋平 (阪市大理)* On the boundary of the Earle slice for punctured torus groups ······ 15

22 須川 敏幸 (京大理)* On computing the Bers boundary of the Teichmüller space of a
小森 洋平 (阪市大理) once-punctured torus ······ 15

11:00 ~ 12:00 特別講演 (この講演は第X会場で行われます)

C.T. McMullen (Harvard Univ.) * The geometry of Teichmüller space ······ 11:00 ~ 12:00

14:15 ~ 15:15

23 濱田 英隆 (九州共立大工)* An estimate of the growth of spirallike mappings in several complex variables ······ 15

24 濱田 英隆 (九州共立大工)* A Schwarz lemma on the Euclidean unit ball ······ 15
本田 竜広 (有明工高専)

25 清水 悟 (東北大理) ラインハルト領域に関する正則同値問題とトーラス作用の共役性 ······ 15

26 上田 賢嗣 (阪府大工) On hyperbolicity of complements of Siu-Yeung hypersurfaces ······ 10
城崎 学 (阪府大工)

15:30 ~ 16:30 特別講演

平地 健吾 (阪大理)* 強擬凸領域のソボレフ・ベルグマン核 ······ 15:30 ~ 16:30

1 # N-fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$

Katsuyuki Nishimoto   Descartes Press Co.

Abstract

In this paper, ordinary and partial N- fractional calculus of Riemann's zeta function $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$ are iscussed.

§ 2. N - Partial and fractional derivatives of $\zeta(z)$

Theorem 1. *We have*

$$\text{(i)} \qquad \zeta_{\alpha(x)}(z)=\zeta_{\alpha(x)}(x+iy)=\sum_{m=1}^{\infty}(\log m^{-1})^{\alpha}\frac{1}{m^{z}} \tag{1}$$

and

$$\text{(ii)} \qquad \zeta_{\beta(y)}(z)=\zeta_{\beta(y)}(x+iy)=\sum_{m=1}^{\infty}(i\,\log m^{-1})^{\beta}\frac{1}{m^{z}} \tag{2}$$

for $\alpha,\beta\in R^{+}$, *and* $\operatorname{Re} z=x>1$.

Note 1. We have

$$\zeta_{\alpha(x)}(z)=\frac{\partial^{\alpha}\zeta(x+iy)}{\partial x^{\alpha}} \quad \text{for} \quad \alpha\in R^{+} \tag{9}$$

and

$$\zeta_{\beta(y)}(z)=\frac{\partial^{\beta}\zeta(x+iy)}{\partial y^{\beta}} \quad \text{for} \quad \beta\in R^{+}\ . \tag{10}$$

Theorem 2. *Let*

$$\operatorname{Re}\zeta(z)=u(x,y)=u \tag{11}$$

and

$$\operatorname{Im}\zeta(z)=v(x,y)=v \tag{12}$$

we have then

$$u_{\alpha(x)}=e^{i\pi\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}(\log m)^{\alpha}\frac{1}{m^{x}}\cos(y\,\log m^{-1}) \tag{13}$$

$$u_{\beta(y)}=e^{i\pi\beta}\sum_{m=1}^{\infty}(\log m)^{\beta}\frac{1}{m^{x}}\cos(y\,\log m^{-1}+\frac{\pi}{2}\beta) \tag{14}$$

$$v_{\alpha(x)}=e^{i\pi\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}(\log m)^{\alpha}\frac{1}{m^{x}}\sin(y\,\log m^{-1}) \tag{15}$$

and

$$v_{\beta(y)}=e^{i\pi\beta}\sum_{m=1}^{\infty}(\log m)^{\beta}\frac{1}{m^{x}}\sin(y\,\log m^{-1}+\frac{\pi}{2}\beta) \tag{16}$$

for $\alpha,\beta\in R^{+}$, *and* $\operatorname{Re} z=x>1$.

Theorem 3. *We have* (Nishimoto's partial and fractional differential equation for $\zeta(z)$)

$$\zeta_{\alpha(x)}(z)-(-i)^{\alpha}\zeta_{\alpha(y)}(z)=0 \qquad (\operatorname{Re} z=x>1) \tag{24}$$

where $\alpha\in R^{+}$.

Note 2. Familier form of (24) is

$$\frac{\partial^\alpha \zeta(z)}{\partial x^\alpha} - e^{-i\alpha\pi/2} \frac{\partial^\alpha \zeta(z)}{\partial y^\alpha} = 0 \qquad (\alpha \in \boldsymbol{R}^+). \tag{28}$$

Theorem 4. *We have* (Nishimoto's partial differential equation for $\zeta(z)$)

$$\frac{\partial^n \zeta(z)}{\partial x^n} - (-i)^n \frac{\partial^n \zeta(z)}{\partial y^n} = 0 \qquad (\mathrm{Re}\, z = x > 1), \tag{29}$$

where $n \in \boldsymbol{Z}^+$.

Theorem 5. *We have* (Nishimoto's partial and fractional differential equations)

(i)
$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha} \cos\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\partial^\alpha v}{\partial y^\alpha} \sin\frac{\pi}{2}\alpha = 0 \tag{36}$$

(i i)
$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u}{\partial y^\alpha} \sin\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\partial^\alpha v}{\partial y^\alpha} \cos\frac{\pi}{2}\alpha = 0 \tag{37}$$

for $x > 1$ *and* $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$ *, where*

$u = \mathrm{Re}\,\zeta(z)$ (20) *and* $v = \mathrm{Im}\,\zeta(z)$ (21) .

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- fractional derivatives and some identities for Riemann's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, may (1999), 43 - 47.

[6] K. Nishimoto ; On the convergence of N- fractional calculus of Zeta functions, Vol 16, Nov. (1999), 51 - 54.

[7] Japan Math. Soc. (Edit.) ; Mathematical Encyclopedia (1954), 834 - 846, Iwanami.

[8] E.C. Titchmarsh ; The theory of the Riemann zeta Function (1951), Oxford.

[9] Y. Komatsu ; Special functions (1967),50 - 63. Asakura.

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

2

N- method to nearly simple harmonic vibration equations

Katsuyuki Nishimoto   Descartes Press Co.

Abstract

In this paper, some nearly simple harmonic vibration equations are discussed by means of N-fractional calculus.

§ 1. N - method to nearly simple harmonic vibration equation (I)

Theorem 1. *Let* $\varphi \in \wp^{\circ} = \{\varphi : 0 \neq |\varphi_\nu| < \infty, \nu \in R\}$, *then a homogeneous fractional order differential equation (nearly simple harmonic vibration equation for* $|\varepsilon| << 1$)

$$\varphi_{2+\varepsilon} + \varphi \cdot \omega^2 = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega \neq 0, & \varphi = \varphi(t) \\ |\varepsilon| < 1. & t, \varepsilon \in R \end{pmatrix} \tag{0}$$

has particular solutions

(i) $$\varphi = e^{At} = \varphi_{(1)}^{(\varepsilon)} \quad \text{(denote)} \tag{1}$$

(i i) $$\varphi = e^{Bt} = \varphi_{(2)}^{(\varepsilon)} \tag{2}$$

$$\textit{where} \quad A = (i\omega)^{\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon/2)^k} \quad \textit{and} \quad B = (-i\omega)^{\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon/2)^k}, \tag{3}$$

and hence, for $|\varepsilon| << 1$,

(i i i) $$\varphi \fallingdotseq e^{Y(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t}\left[\cos\left(X(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t\right) + i\sin\left(X(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t\right)\right] = \varphi_{(1)}^{*(\varepsilon)}, \tag{4}$$

(i V) $$\varphi \fallingdotseq e^{Y(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t}\left[\cos\left(X(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t\right) - i\sin\left(X(\varepsilon)\omega^{1-(\varepsilon/2)}t\right)\right] = \varphi_{(2)}^{*(\varepsilon)}, \tag{5}$$

$$\textit{where} \quad Y(\varepsilon) = \cos\tfrac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \quad \textit{and} \quad X(\varepsilon) = \sin\tfrac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{\varepsilon}{2}\right), \tag{6}$$

and ω *is a given constant.*

Note. We have $\varphi_{2+\varepsilon} = d^{2+\varepsilon}\varphi / dt^{2+\varepsilon}$ when $(2 + \varepsilon) > 0$, for example.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- method to constant coefficients linear $n(\in Z^+ \geq 2)$th order ordinary differential equations, J. Frac. Calc. Vol. 13, may (1998), 13 - 18.

[6] K. Nishimoto ; N - method to fractional differintegral equations $\varphi_{\pm m/n} + \varphi \cdot a = f$ $(a \neq 0, m < n.\ m, n \in Z^{+})$, J. Frac. Calc. Vol.14, (1998), 41 - 44.

[7] R. Gorenflo and R. Rutman ; On ultraslow and intermediate processes, Transform Methods & Special Functions, Sofia '94, Proc. of Intr. Workshop (1994), 61 - 81.

[8] F. Mainardi ; Fractional relaxation - oscillation and fractional diffusion - wave phenomena, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 7, No. 6, (1996), 1 - 17.

[9] K. B. Oldham and J. Spanier ; The Fractional Calculus (1974), Academic Press.

[10] A.C. McBride ; Fractional Calculus and integral transforms of generalized functions, Research Notes, Vol. 31, (1979), Pitman.

[11] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some Their Applications (1987), Nauka, USSR.

[12] K.S. Miller and B. Ross ; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations (1993), John Wiley & Sons, Inc.

[13] R. N. Kalia (Editor); Recent Advances in Fractional Calculus, Global Research Notes in Math. Global Pub. Co. MN (1993).

[14] V. Kiryakova ; Generalized Fractional Calculus and Applications, Pitman Research Notes in Math., Vol. 301, Longman (1994).

Katsuyuki Nishimoto
Institute of Applied Mathematics
Descartes Press Co.
2 - 13 - 10 Kaguike, Koriyama
963 - 8833 Japan

3 Univalency of Certain Integral Operators

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
V.Pescar (Transilvania University of Brasov)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

which are analytic in the open unit disk $U=\{z:|z|<1\}$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions in U. In the present talk, we consider univalency of certain integral operators of $f(z)\in\mathcal{S}$.

Theorem 1. *Let α,γ be complex numbers with* $\mathrm{Re}\alpha=a>0$. *If $g(z)\in\mathcal{A}$ satisfies* $|g''(z)/g'(z)|\leq 1/n$ *for all $z\in U$ and*

$$|\gamma|\leq\frac{n+2a}{2}\left(\frac{n+2a}{n}\right)^{\frac{n}{2a}},$$

then , for any complex number β with $\mathrm{Re}\beta\geq a$, *the function*

$$G_{\beta,\gamma,n}(z)=\left\{\beta\int_0^z u^{\beta-1}(g'(u^n))^{\gamma}du\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

is in the class $\mathcal{S}$ for all $n\in\mathbb{N}\setminus 1$.

Theorem 2. *Let α,β be complex numbers with* $\mathrm{Re}\alpha=b>0$. *If $g(z)\in\mathcal{A}$ satisfies* $|g''(z)/g'(z)|\leq 1$ *for all $z\in U$ and*

$$|\gamma|\leq\frac{1}{\max_{|z|\leq 1}\left(\frac{1-|z|^{2b}}{b}|z|\frac{|z|+2|a_2|}{1+2|a_2||z|}\right)},$$

then , for any complex number β with $\mathrm{Re}\beta \geq b$*, the function*

$$G_{\beta,\gamma}(z) = \left\{\beta \int_0^z u^{\beta-1}(g'(u))^\gamma du\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

is in the class $\mathcal{S}$.

Let $\mathcal{B}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2} - 1\right| < 1$$

for $z \in U$.

Theorem 3. *Let αbe a complex number with $|\alpha| \leq 1/3$. If $g(z) \in \mathcal{B}$ satisfies $|g(z)| \leq 1$ for $z \in U$, then the function*

$$F_\alpha(z) = \int_0^z \left(\frac{g(u)}{u}\right)^\alpha du$$

in the class $\mathcal{S}$.

Theorem 4. *Let α be a complex number with* $\mathrm{Re}\alpha \geq 3$*.If $g(z) \in \mathcal{B}$ satisfies $|g(z)| \leq 1$ for $z \in U$, then the function*

$$H_\alpha(z) = \left\{\alpha \int_0^z u^{\alpha-1}\left(\frac{g(u)}{u}\right)du\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

in the class $\mathcal{S}$.

References

[1] J.Becker:*Lownersche differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte funcktionen*, J.Reine Angew.Math. **255**(1972), 23-43.

[2] N.N.Pascu:*An improvement of Becker's univalence criterion*, Proc. Commemorative Session Simion Stoilow, Brasov (1987), 43-48.

[3] N.N.Pascu: *On a univalence criterion II*, (preprint).

[4] N.N.Pascu and V.Pescar:*On the integral operators of Kim-Merkes and Pfaltzgraff*, Studia **32** (1990), 185-192.

4 ※印は本会で記入

※番号	題	Value distribution of algebroid functions with two branches
氏名	藤解　和也	所属　金沢大・工

Let A_0, A_1 and $A_2(\not\equiv 0)$ be entire functions having no common zeros. Suppose that at least one of the ratios A_i/A_2 $(i=0,1)$ is transcendental. Let us consider an equation

(1) $$F(z,w) \equiv A_2(z)w^2 + A_1(z)w + A_0(z) = 0,$$

which is irreducible in the ring $\mathcal{M}[w]$ of polynomials over the field $\mathcal{M}$ of functions meromorphic on the plane. Then $f(z)$ defined by equation (1) is a transcendental algebroid function and has two branches.

For convenience' sake, we put $F(z,\infty) = A_2(z)$ and $1/(f-\infty) = f$. Therefore we may introduce the notion of counting functions, each multiplicity being truncated by 2,

$$N_{[2]}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \geq \frac{1}{2} N_{[2]}\left(r, \frac{1}{F(z,a)}\right),$$

whenever a is an extended complex number. By Valiron's estimation, a deficiency of f over a

$$\theta_{[2]}(a,f) := 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_{[2]}(r, 1/F(z,a))}{T(r,A)},$$

satisfies $1 \geq \theta_{[2]}(a,f) \geq \delta(a,f) \geq 0$ for any $a \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

When an identity

(2) $$F(z,a) = \alpha F(z,a'), \qquad \alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

holds, we can say that distributions of two values a and a' are equivalent for the algebroid function f. Now we call these values are *twins* under f.

Then we can prove the following theorem as an extension of results given by Niino and Ozawa [NO] and Toda [T].

Theorem *Let $f(z)$ be an algebroid function defined by $F(z,f)=0$ as in (1). According to the coefficients A_i, we distinguish two cases:*

(I) *If $\{A_0, A_1, A_2\}$ is linearly independent, then for any $q(\geq 4)$ different values $a_j \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$,*

$$(q-3)T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{q} N_{[2]}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r,f)$$

holds. Especially we have

$$\sum_{a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}} \theta_{[2]}(a,f) \leq 3.$$

(II) *Suppose that* $\{A_0, A_1, A_2\}$ *is linearly dependent, that is, there exist three complex constant* α, β, γ *with* $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ *and* $\beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$ *such that*

$$\alpha A_2(z) + \beta A_1(z) + \gamma A_0(z) \equiv 0 .$$

Take a Möbius transformation $M_o(w)$ *by*

$$M_o(w) := \frac{\beta w - \alpha}{\gamma w - \beta},$$

which is, of course, an automorphism of the Riemann sphere and has exactly two fixed points, say w_j $(j = 1, 2)$. *Choose any subset* S *of*

$$\mathbf{C}^o := (\mathbf{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{w_1, w_2\}$$

satisfying the condition

$$M_o(S) \cap S = \emptyset \quad \text{and} \quad M_o(S) \cup S = \mathbf{C}^o .$$

Then we have the followings:

a) for evey $c \in S$, *two values* c *and* $M_o(c)$ *are twins under* f, *that is,*

$$F(z, c) \equiv \alpha(c) F(z, M_o(c)) ,$$

with the constant $\alpha(c)$ *given by*

$$\alpha(c) := (\gamma c - \beta)^2 / (\beta^2 - \alpha\gamma) ;$$

b) the fix points of $M_o(w)$, w_1 *and* w_2 *are the only images of all the branch points of* f *by itself ; i.e.,*

c) the mapping $M_o(w)$ *keeps the image Riemann surface of* f *invariant ; and*

d) for any $q(\geq 1)$ *values* $a_i \in S$ $(1 \leq i \leq q)$,

$$qT(r, f) \leq \sum_{i=1}^{q} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) + \sum_{j=1,2} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - w_j}\right) + S(r, f) .$$

Statement (I) is verified by applying Cartan's theory on holomorphic curves, while the proof of (II) goes along the way of discussion due to Toda [T].

References

[NO] Niino, K. and M. Ozawa, Deficiencies of an entire algebroid function. *Kōdai Math. Sem. Rep.* **22** (1970), 98–113.

[T] Toda, N., Sur les valeurs déficientes de fonctions algébroides à 2 branches. *Kōdai Math. Sem. Rep.* **22** (1970), 501–514.

5

円板の極値的調和写像について

柴田敬一　　国際自然科学研

円板の周上に，或る幾何的な意味をもたせるように，有界変分且つ連続な境界値を与えてディリクレ問題を考える。前回（春学会）での講演内容を補足し，解の一意性と多意性について述べる。

6 Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations

戸田暢茂（名古屋工大）
石崎克也（日本工大）

この講演で登場する函数は複素平面上有理型なものとし, 代数的な常微分方程式を考える. 即ち

$$(1) \quad \Omega(z, w, w', \ldots, w^{(n)}) = \sum_{I \in \mathcal{I}} a_I(z) w^{i_0} (w')^{i_1} \cdots (w^{(n)})^{i_n} = 0,$$

ここで, $I = (i_0, i_1, \ldots, i_n)$ は multindex で $\#\mathcal{I} < \infty$, $a_I \in \mathbb{C}(z)$ である. 方程式 (1) が超越的有理型解を持つときに (1) の形を特定する研究 (Malmquist–Yosida の定理周辺の研究, Laine [4] 等に詳しい) の中では Steinmetz [5], Bank and Kaufman [1] の binomial 方程式における結果が有名である. 即ち, 方程式

$$(2) \qquad (y')^n = R(z, y),$$

ここで, n は正の整数で $R(z, y)$ は z, y についての有理函数, が超越的有理型な解 y を持つとすれば, 適当な一次変換 $v = (\alpha y + \beta)/(\gamma y + \delta)$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ によって以下の 6 つの方程式のいずれかに帰着される:

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & (v')^2 = a_2(z)v^2 + a_1(z)v + a_0(z) \\
\text{(II)} & (v')^2 = a(z)(v - b(z))^2(v - \tau_1)(v - \tau_2) \\
\text{(III)} & (v')^2 = a(z)(v - \tau_1)(v - \tau_2)(v - \tau_3)(v - \tau_4) \\
\text{(IV)} & (v')^3 = a(z)(v - \tau_1)^2(v - \tau_2)^2(v - \tau_3)^2 \\
\text{(V)} & (v')^4 = a(z)(v - \tau_1)^2(v - \tau_2)^3(v - \tau_3)^3 \\
\text{(VI)} & (v')^6 = a(z)(v - \tau_1)^3(v - \tau_2)^4(v - \tau_3)^5
\end{array}$$

ここで, $\tau_1, \ldots, \tau_4$ は異なる定数で, $a_j(z)$, $j = 0, 1, 2$, $a(z)$, $b(z)$ は有理函数である. また, 上記の 6 つの方程式については特別な $a(z)$ については超越的有理型解が存在することが知られている. 今後の課題として, (i) 超越的有理型解がどのくらい存在するのか, (ii) 複数個存在するときにそれらに代数的関係はあるのか, (iii) それらの増大の関係はどうなのか, などが考えられる. この講演では, 方程式 (III) についてこれらの問題 (i), (ii), (iii) ついての研究結果を紹介する [2, 3]. 簡単のため (III) を適当な一次

1

変換で次の形に変形しておく:

(3) $$(f')^2 = A(z)(4f^3 - g_2 f - g_3) = A(z)G(f),$$

ここで, $A(z) \not\equiv 0$ は有理函数.

定理 方程式 (3) が (少なくとも) 2つのどんな一次変換でもうつり合わない超越的有理型解を持つとする. このとき次が成り立つ:

[*i] ある多項式 $a(z)$ があって $a'(z)^2 = A(z)$ を満たす.

[*ii] 全ての (3) の超越的有理型解 $f(z)$ は

(4) $$f(z) = \wp(a(z) + c), \quad c \in \mathbb{C},$$

と書ける, ここで $\wp$ は Weierstrass の $\wp$ 函数で (3) で $(f')^2 = G(f)$ を満たすものである.

[*iii] $u(z)$, $v(z)$ を任意の異なる (3) の超越的有理型解とする. このとき, ある定数 $d_0 \in \mathbb{C}$ があって, $u_0 = u - d_0$, $v_0 = v - d_0$ は

(5) $$u_0^2 v_0^2 - G_2 u_0 v_0 - G_1(u_0 + v_0) - G_0 = 0,$$

を満たす, ここで G_0, G_1, G_2 は定数である.

逆に, 超越的有理型函数 u_0, v_0 が (5) を満たすとする. このとき

(6) $$\frac{(u_0')^2}{K(u_0)} = \frac{(v_0')^2}{K(v_0)},$$

が成り立つ, ここで K は以下にあたえられる多項式である

(7) $$K(x) = 4x^3 + \left(4\frac{G_0}{G_1} + \frac{G_2^2}{G_1}\right)x^2 + 2G_2 x + G_1.$$

References

[1] S. B. Bank and R. P. Kaufman : On the growth of meromorphic solutions of the differential equation $(y')^m = R(z, y)$. Acta Math., 144 (1980), 223-248.

[2] K. Ishizaki and N. Toda: Unicity theorems for meromorphic functions sharing four small functions. Kodai Math. J., 21 (1998) 350–371.

[3] K. Ishizaki and N. Toda: Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations, Preprint.

[4] I. Laine : Nevanlinna theory and complex differential equations, W. Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[5] N. Steinmetz : Eigenschaften eindeutiger Losungen gewohnlicher Differentialgleichungen im Komplexen. Doctoral Dissertation, Karlsruhe 1978.

7 On the Deficiency of Holomorphic Curves with Maximal Deficiency Sum

TODA Nobushige　Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a nondegenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}.$$

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ in N-subgeneral position such that $\# X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n \geq 1$.

We denote by $T(r, f)$ the characteristic function of f and by $\delta(\boldsymbol{a}, f)$ the deficiency of $\boldsymbol{a}$ with respect to f. The following Nochka's result is well-known(see [1]):

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1. \tag{1}$$

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j : j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j : j \in P\}, \quad d(P) = \dim V(P).$$

and we put $\mathcal{O} = \{P \subset Q : 0 < \# P \leq N + 1\}$.

Definition. We put

$$\lambda = \min_{P \in \mathcal{O}} \frac{d(P)}{\# P}.$$

Note that $1/(N - n + 1) \leq \lambda \leq (n + 1)/(N + 1)$.

Lemma([2]). $\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq \min\{2N - n + 1, \frac{n+1}{\lambda}\}$.

The purpose of this talk is to give some results on $\delta(\boldsymbol{a}, f)$ when the equality holds in (1) and $N > n$.

2. Result. We suppose that

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1.$$

Theorem 1([2]). If $(n+1, 2N-n+1) = 1$, there are at least

$$[(2N-n+1)/(n+1)] + 1$$

vectors $\boldsymbol{a}$ in X such that $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 1$.

$N > n \geqq 2$

Theorem 2([2]). If there are $N-n+1$ vectors $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{N-n+1}\}$ in X such that the dimension of the vector space spanned by them is equal to 1, then

$$\delta(\boldsymbol{b}_j, f) = 1 \quad (j = 1, \cdots, N-n+1).$$

References.

[1] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, VieWeg 1993.

[2] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum. NIT Sem. Rep. on Math., No. 149(1999), pp.10.

8　Zalcman 領域における一致の定理

小林 保幸　　　　北大・理 (D3)

複素平面における単位円板から原点を除いた領域を Δ_0 と表す。Δ_0 から互いに交わらない小閉円板 $\bar{\Delta}(c_n, r_n)$ を除いた領域 $R(c_n, r_n) = \Delta_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\Delta}(c_n, r_n)$ を考える。但し、中心 c_n は実軸の正の部分にあり、原点に収束しているものとする。このような領域 $R(c_n, r_n)$ を Zalcman 領域と呼ぶことにする。

$R = R(c_n, r_n)$ 上の有界正則関数全体 $H^\infty(R)$ について、$z = 0$ で**一致の定理**が成り立つとは次の性質が成り立つことである ([1])：

$$f \in H^\infty(R), \lim_{z<0, z\to 0} f^{(n)}(z) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \Longrightarrow f \equiv 0 \tag{1}$$

また [1] では、中心 $c_n = 2^{-n}$、半径については正数列 $\{N(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を導入し $r_n = 2^{-nN(n)}$ とした場合に次の定理 A、B を示している。

定理 A　$R = R(2^{-n}, 2^{-nN(n)})$ のとき

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z - 2^{-n}} \in H^\infty(R) \Longleftrightarrow \sup_n n\left(N(n) - \frac{n+1}{2}\right) < \infty$$

定理 B　$R = R(2^{-n}, 2^{-nN(n)})$ のとき $H^\infty(R)$ について

$$z = 0 \text{ で一致の定理が成り立つ} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} N(n) = \infty.$$

本講演では、これらの結果を

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \tag{2}$$

をみたす c_n に一般化した結果を報告する。$c_n = 2^{-\nu_n}, r_n = 2^{-\nu_n N(n)}$ により $\{\nu_n\}, \{N(n)\}$ を定め、$\nu_n^* = n - \dfrac{\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1}}{\nu_n}$ とおく。

定理 1　$R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)})$ のとき

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z - c_n} \in H^\infty(R) \Longleftrightarrow \sup_n \nu_n(N(n) - \nu_n^*) < \infty$$

定理 2　$R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)})$ のとき $H^\infty(R)$ について

$$z = 0 \text{ で一致の定理が成り立つ } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} N(n) = \infty.$$

定理2の証明には、次の補題を使う。

補題　$\{c_n\}$ は条件(2)をみたすとする。このとき、$\lim_{n\to\infty}(\nu_n^* - N(n)) = \infty$ ならば、関数$p(z) \in H^\infty(R)$ について一致の定理の性質(1)が成り立たない。

定理 1 は ∂R 上で $|p(z)|$ の評価を計算することで示す。定理 2 は対偶を示す。つまり $N(n_k) \le \mu$ (定数)となる部分列があったとして、$\nu_k' = \nu_{n_k}, N'(k) = \max(\mu, \nu_{n_k}^*/2)$ とおいて、補題を $R(2^{-\nu_k'}, 2^{-\nu_k' N'(k)})$ に対して使う。

References

[1] M. Hayashi and M. Nakai, *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon*, J. d'Analyse Math. **76** (1998), 109-136.

9　一致の定理と Myrberg 現象

林　実樹廣　　北大・理
中井　三留

穴あき単位開円板 $\Delta_0 : 0 < |z| < 1$ 上の unlimited な２葉の分岐被覆面 $\widetilde{\Delta}_0$ で, $\{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ に分岐点を持つものを考え，φ を被覆写像とする．Myrberg の有名な例として，$\widetilde{\Delta}_0$ 上の有界正則関数全体 $H^\infty(\widetilde{\Delta}_0)$ は$\pi^{-1}(z) = \{z^+, z^-\}$ $(z \in \Delta_0 \setminus \{a_n\})$ の２点を分離しない $(f(z^+) = f(z^-), \forall f \in H^\infty(\widetilde{\Delta}_0))$．即ち，$H^\infty(\widetilde{\Delta}_0) = H^\infty(\Delta_0) \circ \varphi$ となることが知られている..

しかし，分岐点を中心とする半径 r_n の閉小円板$\Delta_n = \bar{\Delta}(2^{-n}, r_n)$ を互いに交わらないように取り，$D = \Delta_0 \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ とおき，$\widetilde{D} = \pi^{-1}(D)$ を考えると，r_n の大きさにより、$H^\infty(\widetilde{D})$ は$\widetilde{D}$の異なる２点を分離したり，しなかったりすることは幾つかの場合について既に何度かご報告させて頂いた.

ここでは、点分離しない場合，即ち，

$$H^\infty(\widetilde{D}) = H^\infty(D) \circ \varphi$$

が成り立つとき，被覆面 $\widetilde{D}$ について **Myrberg 現象**が成り立つということにする．[1] において示したように、このための十分条件として，**一致の定理**と称するつぎの性質がある：

$$f \in H^\infty(D),\ \lim_{z<0, z\to 0} f^{(n)}(z) = 0\ (n = 0, 1, 2, \ldots)\ ならば\ f \equiv 0.$$

当時これは必要条件にもなるのではと期待したが，その反例があることが分かったので報告する．すなわち，

[定理１] Myrberg 現象が起こるような上記の２葉被覆面 $\widetilde{D}$ であって，$H^\infty(D)$ については一致の定理が成り立たないものが存在する．

$r_n = 2^{-nN(n)}$ により正数 $N(n)$ を定めと，一致の定理が成り立てば、$N(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ が成り立つことが分かっている．従って，定理 1 を示すには，つぎのことを示せばよい：$\widetilde{D}$ について Myrberg 現象が成り立つが，$N(n) \not\to \infty$ $(n \to \infty)$ となるものが存在する．

その証明には正規族の論法を使う。その論法を一般化することでつぎ定理も示せる．

[定理 2] D を $H^\infty(D) \neq \{\text{constants}\}$ なる任意の平面領域として、D 上の unlimited な 2 葉の（分岐）被覆面 $\widetilde{D}$ を考える．$\widetilde{D}$ に含まれる互いに交わらないコンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ で，$\widetilde{D} \setminus \cup_n K_n$ が連結，K_n から一点ずつ選んで出来る数列は $\widetilde{D}$ 内に集積点を持たないとする．このとき，$\widetilde{D}$ について Myrber 現象が起こっていれば、部分列 $\{K_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ があって，$\widetilde{D} \setminus \cup_k K_{n_k}$ についても Myrber 現象が起こる．

これは，Myrberg 現象は境界成分の大きさよりも成分が疎らに分布することにより起こることを示している．

定理 2 の証明にはつぎの補題を示せばよい．

[補題] $D, \widetilde{D}$ は定理 2 と同じとする．$\widetilde{D}$ に含まれる任意のコンパクト集合　K に対して，$H^\infty(\widetilde{D} \setminus K)$ が点分離ならば，$H^\infty(\widetilde{D})$ も点分離である．

References

[1] M. Hayashi and M. Nakai, *A uniquness theorem and the Myrberg phenomenon*, J. d'Analyse Math. 76 (1998), 109-136.

10　遅退ポテンシャルの一性質

山口博史　(滋賀大学教育学部)

$\varphi(t,\boldsymbol{x})$ を 4 次元空間 $\mathbf{R}^4=\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^3$ での C_0^∞ 級実関数とする。積分

$$\mathcal{R}\varphi(t,\boldsymbol{x}):=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{\varphi(t-\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|,\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|}\,dv_y\,,\qquad (t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^4$$

を 密度 φ の Retarted Potential (遅退ポテンシャル) と言う。これは波動方程式 $\Box\mathcal{R}\varphi=-\varphi$ を満たし, 特殊相対性理論と緊密に関係していることが知られているが ここでは数学的にも面白い対象であることを示す。

空間 $\mathbf{R}^4$ での C_0^∞ 級ベクトル場 $\widetilde{J}=(\rho,J)$ $(\equiv(\rho,f_1,f_2,f_3))$ が電流条件:

$$\operatorname{div}\widetilde{J}(t,\boldsymbol{x})=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=0$$

を満たすとき, $\widetilde{J}$ を 4 元電流と言う。ベクトル積分

$$\widetilde{A}(t,\boldsymbol{x})\;:=\;\mathcal{R}\widetilde{J}(t,\boldsymbol{x})=(\mathcal{R}\rho,\mathcal{R}f_1,\mathcal{R}f_2,\mathcal{R}f_3)$$

を電磁ポテンシャルと言う。更に,

$$\begin{aligned}\widetilde{p}\;&:=\;-\mathcal{R}\rho dt+\mathcal{R}f_1dx+\mathcal{R}f_2dy+\mathcal{R}f_3dz\\ \widetilde{\omega}\;&:=\;d\widetilde{p}=a_1dt\wedge dx+a_2dt\wedge dy+a_3dt\wedge dz+b_1dy\wedge dz+b_2dz\wedge dx+b_3dx\wedge dy\\ \widetilde{B}\;&:=\;(E,B)=(a_1,a_2,a_3,-b_1,-b_2,-b_3)\end{aligned}$$

と置くと ρ,J,E,B は Maxwell 方程式を満たす。E を 電荷 ρ より生じる電場, B を電流 J より生じる磁場と言う。

さて 上で作った電磁ポテンシャル $\widetilde{A}$ は $\mathbf{R}^4$ で C^∞ 級であって, その台は ($\mathbf{R}^4$ でのコンパクト集合ではないが) ある上半円錐領域 $\mathbf{D}^+_{t_0,x_0}=\{(t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^4\mid t-t_0\geq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\}$ に含まれ, 電流条件を満たす。よって $\widetilde{J}_1:=\widetilde{A}$ を 4 元電流とみなす。従って, $\widetilde{J}_1$ は有限値電磁ポテンシャル $\widetilde{A}_1=\mathcal{R}\widetilde{J}_1$ および 電磁場 $\widetilde{B}_1$ を生じる。

同様に $\widetilde{A}_1$ は $\mathbf{R}^4$ で C^∞ 級であって, しかも その台は同じ円錐領域 $\mathbf{D}^+_{t_0,x_0}$ に含まれ, 電流条件を満たす。従って, $\widetilde{J}_2 = \widetilde{A}_1$ と置けば J_2 は $\mathbf{R}^4$ での4元電流と見なされる。よって これより $\mathbf{R}^4$ に電磁ポテンシャル $\widetilde{A}_2$ および電磁場 $\widetilde{B}_2$ が生じる。以下 同様の操作を順次 行うことによって $\mathbf{R}^4$ 内に

$$\begin{cases} \text{4元電流の列} & \{\widetilde{J}_n\}_n \\ \text{電磁ポテンシャルの列} & \{\widetilde{A}_n\}_n \\ \text{電磁場の列} & \{\widetilde{B}_n\}_n \end{cases} \qquad \text{但し}\ \ \widetilde{J}_{n+1} = \widetilde{A}_n\ (n = 1, 2, \ldots)$$

を得る。

即ち, 1つの4元電流 $\widetilde{J}$ を $\mathbf{R}^4$ 内に与えると 無限の4元電流 $\widetilde{J}_n$ および 無限の電磁場 $\widetilde{B}_n$ が空間 $\mathbf{R}^4$ に現れる。従って 次の予想が立つ（もし そうでなければ世の中は 無限に大きい磁場で満たされることになる）:

定理

1. 全電流 $\mathcal{J} := \widetilde{J} + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{J}_n$ は空間 $\mathbf{R}^4$ で有限値広義一様収束する。
2. 全電磁場 $B := \widetilde{B} + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{B}_n$ も空間 $\mathbf{R}^4$ で有限値広義一様収束する。

この証明のためには 次の補題が有用である。

補題　任意の $f \in C^\infty(\mathbf{R}^4)\ s.t.\ \mathrm{Supp}\, f \subset D^+_{t_0,x_0}$ について, 次が成立する：

1. $\mathcal{R}^n f \in C^\infty(\mathbf{R}^4)\ s.t.\ \mathrm{Supp}\, \mathcal{R}^n f \subset D^+_{t_0,x_0}\ (n = 1, 2, \cdots)$
2. $\forall K \subset\subset \mathbf{R}^4,\ 0 < \forall r < 1$ に対して,

$$\exists N\ \ s.t.\ \ |\mathcal{R}^n f(t, \boldsymbol{x})| < r^n \qquad \text{for}\ \ \forall n \geq N,\ \ \forall (t, \boldsymbol{x}) \in K.$$

定理の逆についても論じる。

11 半空間上の調和関数の表現と調和接続の公式

群馬大工　中村玄
群馬大工　斎藤　三郎
群馬大工　アドミ　シャリフ

Let $\mathrm{R}^{n+1}_{+} = \{(y,x); y > 0, x \in \mathrm{R}^n\}$ be the half space, where $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \cdots, x_n)$. We consider the Poisson integral

$$U(y,x) = \int_{R^n} F(\xi) P(x-\xi, y) d\xi \tag{1}$$

for

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-y|t|} e^{-ix\cdot t} dt \\ &= C_n \frac{y}{(y^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \end{aligned}$$

where

$$C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

and for functions $F \in L^2(\mathrm{R}^n, d\xi)$. Then, $U(y,x)$ are harmonic functions on R^{n+1}_{+} and $U(y,x)$ have nontangential boundary values a.e. on R^n and

$$\lim_{y \to 0} U(y,x) = F(x) \quad \text{on } \mathrm{R}^n.$$

For the properties of the Poisson integral (1), see, for example, [4] and [5]. For these harmonic functions $U(y,x)$, we shall show that :

(A) *F and so, $U(y,x)$ are determined and reasonably represented by the functions*

$$\frac{\partial U(y, x_1, x')}{\partial x_1}|_{x_1=0} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 U(y, x_1, x')}{\partial x_1^2}|_{x_1=0} \tag{2}$$

for $y > 0$ *and for* $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, *by using Fourier's integral and real inversion formulas for the Laplace transform,*

and

(B) *characterization of the two functions in (2) on the hyperplane* $x_1 = 0$ *which are obtained from* $U(y, x)$ *in (1), by means of Fourier's transform and Laplace's transform; this will give a harmonic extension formula to* $U(y, x)$ *in (1) from the hyperplane* $x_1 = 0$.

References

[1] Amano, K., Saitoh, S., and Yamamoto, M. (1998). Error estimates of the real inversion formulas of the Laplace transform, *Preprint Series* **98-29**, Graduate School of Math. Sci. The University of Tokyo.

[2] Byun, D.-W, and Saitoh, S. (1993). A real inversion formula for the Laplace transform, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* **12**, 597-603.

[3] Saitoh, S. (1997). Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **369**, Addison Wesley Longman, UK.

[4] Stein, E.M. (1970). Singular Integrals and Differentiability of Functions , (Princeton University Press).

[5] Stein, E.M. and Weiss, G. (1971). Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces , (Princeton University Press).

(to appear in Complex Variables)

12

THE GLOBAL UNIQUENESS FOR THE INVERSE CONDUCTIVITY PROBLEMS WITH NON-SMOOTH CONDUCTIVITY

J. CHENG, G. NAKAMURA, AND M. YAMAMOTO

ABSTRACT. By the inverse scattering method for the Beltrami equations and some results of generalized analytic functions, we prove the global uniqueness for the inverse problem of determining non-smooth conductivity from Dirichlet to Neumann map in two dimension.

Let Ω be a simply connected domain in $\mathcal{R}^2$ with the C^2-boundary $\partial\Omega$. Suppose that $1 < p < 2$ is a constant and $\gamma \in B^{\frac{2}{p}}_{p,1}$ (the Besov space) which satisfies $\gamma \geq c_0 > 0$ where c_0 is a constant.

We consider the following Dirichlet problem for $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0, \quad in \quad \Omega \tag{1}$$

$$u = f, \quad on \quad \partial\Omega. \tag{2}$$

The Dirichlet to Neumann map Λ_γ is defined by

$$\Lambda_\gamma : f \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \tag{3}$$

where ν is the outer normal unit with respect to $\partial\Omega$.

The inverse conductivity problem is to recover the conductivity γ from Λ_γ.

We can prove the following result:

Theorem 1. *Suppose that $\gamma_j \in B^{\frac{2}{p}}_{p,1}$, $j = 1, 2$ and $\gamma_j \geq c_0 > 0$ where c_0 is a constant. If*

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}, \tag{4}$$

then we have

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad in \quad \Omega. \tag{5}$$

Outline of the method

1. Transform the elliptic equation to a Beltami equation

We can find a conjugation $v \in H^1(\Omega)$ such that $w = u + iv$ satisfies the following Beltrami equation:

$$\partial_{\bar{z}} w + q\overline{\partial_z w} = 0 \tag{6}$$

where $q = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$.

1

Let

$$Tf = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}|d\zeta| \tag{7}$$

where $z = x_1 + ix_2$ and $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$.

2. Introduce a complex number

Let $k \in C$ be a complex parameter. We introduce a new function $\alpha = e^{\frac{1}{2}\bar{k}z}w$. By the equation (6), we have that α satisfies

$$\partial_{\bar{z}}\alpha + q\overline{\partial_z(e_k(z)\alpha)} = 0 \tag{8}$$

where $e_k(z) = e^{\frac{1}{2}(\bar{k}z + k\bar{z})}$.

3. Special solutions for Beltrami equation

We consider the special solution $(\alpha_1(z,k), \alpha_2(z,k))$ which satisfy

$$\alpha_1(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{q(\zeta)\overline{\partial_\zeta(e_k(\zeta)\alpha_2(\zeta))}}{\zeta - z}|d\zeta| \;=\; 1 \tag{9}$$

$$\alpha_2(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{q(\zeta)\overline{\partial_\zeta(e_k(\zeta)\alpha_1(\zeta))}}{\zeta - z}|d\zeta| \;=\; 0 \tag{10}$$

4. The complex equations in k-space

Let

$$G_1(k) = \frac{i}{2\pi}\iint_{\Omega} q(\zeta)\overline{\partial_\zeta(e_k(\zeta)\alpha_1(\zeta,k))}|d\zeta| \tag{11}$$

Lemma 1. *For any $k \in C$, $G_1(k)$ depends only on the boundary value of $\alpha_2(z,k)$.*

We can verify that $\alpha_j(z,k)$, $j = 1,2$ satisfy the following elliptic system in k-space.

$$e^{-\frac{1}{2}\bar{k}z}\frac{\partial}{\partial k}(e^{\frac{1}{2}\bar{k}z}\alpha_2(z,k)) \;=\; G_1(k)\alpha_1(z,k) \tag{12}$$

$$\frac{\partial\alpha_1(z,k)}{\partial k} \;=\; \overline{G_1(k)}\alpha_2(z,k) \tag{13}$$

For $k = 0$, we have

$$\alpha_1(z,0) = 1, \qquad \alpha_2(z,0) = 0. \tag{14}$$

5. Proof of the global uniqueness

By the Liouville Theorem for generalized analytic functions and Lemma 1, we can obtain $\alpha_j(z,k)$, $j = 1,2$ from the Dirichlet to Neumann map. Then from $\alpha_j(z,k)$, $j = 1,2$ we can get q.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Gunma University, Kiryu 376-8515, Japan

E-mail address: jcheng@math.sci.gunma-u.ac.jp, nakamura@math.sci.gunma-u.ac.jp

Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Komaba, Meguro, Tokyo 153, Japan.

E-mail address: myama@ms.u-tokyo.ac.jp

13

A characterization of heat balls by a mean value property for temperatures

鈴木紀明 名大・多元数理

Neil A. Watson Canterbury Univ.

We discuss the inverse mean value property of solutions of the heat equation. It is shown that under some assumption, a cetain mean value identity characterizes a heat ball.

For a point P in the $(n+1)$-dimensional Euclidean space $\mathbf{R}^{n+1}$, we write

$$P = (x,t) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, t).$$

If H denotes the heat operator and H^* its adjoint, then

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{and} \quad H^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

The letter W will denote the Gauss-Weierstrass kernel, defined by

$$W(x,t) := \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{\|x\|^2}{4t}) & t > 0 \\ 0 & t \le 0, \end{cases}$$

where $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

Let $P_0 = (x_0, t_0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ and $c > 0$. We consider two kind of balls with center at P_0 and radius c. The first is the usual open ball

$$B(P_0, c) := \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x - x_0\|^2 + |t - t_0|^2 < c^2\}.$$

The second is the heat ball $\Omega(P_0, c)$ defined by

$$\Omega(P_0, c) := \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; W(x_0 - x, t_0 - t) > (4\pi c)^{-n/2}\}.$$

It is easily check that $\Omega(P_0,c)$ is a bounded convex domain satisfying $\Omega(P_0,c) \subset \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x - x_0\|^2 < 2nc/e,\ t_0 - c < t < t_0\}$.

It is known that solutions of the heat equation (temperatures) have a mean value property on heat balls. We will show the following inverse assertion. Here and subsequent, χ_A denote the characteristic function of a set A in $\mathbf{R}^{n+1}$.

Theorem. Let $c > 0$ and let D be a bounded open set in $\mathbf{R}^{n+1}$. If the following two conditions satisfy, then D coinsides with the heat ball $\Omega(c)$ with center at the origin and radius c:

(i) the function

$$f(x,t) := (\chi_D(x,t) - \chi_{\Omega(c)}(x,t))\frac{\|x\|^2}{t^2}$$

belongs to $L^p(\mathbf{R}^{n+1})$ for some $p > n/2 + 1$, and

$$\text{(ii)} \qquad \iint_D W(x-y, t-s)\frac{\|x\|^2}{t^2}dxdt = 2^{n+2}(\pi c)^{n/2}W(y,-s)$$

for all $(y,s) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus D$.

There are many papers concerning the such inverse mean value property for harmonic functions (see a good reference [1]). But, by the fact that the center of heat ball lies on the boundary, the direct analogous method can not be carried out for temperatures. Our proof is based upon an argument in [2].

参考文献

[1] I. Netuka and J. Veselý, Mean value property and harmonic functions, Classical and modern potential theory and applications (Chateau de Bonas, 1993) 359–398, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[2] H. S. Shapiro, The Schwarz function and its generalization to higher dimensions, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1992.

[3] N.A. Watson, A theory of subtemperatures in several variables, Proc. London Math. Soc. (3) **26** (1973), 385–417.

14　無限ネットワーク上の非線形調和構造に関する調和化可能性

前田文之　　広島工業大学

$N = \{X, Y, K, r\}$ を無限ネットワーク, $L(X)$ を X 上の実数値関数の全体とする。２つの関数 $a : Y \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と $b : X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は次の条件をみたすとする。

(a.1)　各 $y \in Y$ に対し, $a(y, \cdot)$ は連続, 狭義単調増加;

(a.2)　各 $y \in Y$ に対し, $a(y, 0) = 0$, $\lim_{t \to \pm\infty} a(y, t) = \pm\infty$ (複号同順);

(b.1)　各 $x \in X$ に対し, $b(x, \cdot)$ は連続, 非減少.

これらに対し, 非線形作用素 $\mathcal{L}^{(a,b)} : L(X) \to L(X)$ を

$$\left(\mathcal{L}^{(a,b)}u\right)(x) = \sum_{y \in Y} K(x, y)a(y, \nabla u(y)) + b(x, u(x))$$

で定義する。ここで, $\nabla u(y) = r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x, y)u(x)$. X 上で $\mathcal{L}^{(a,b)}u = 0$ (≥ 0, ≤ 0) のとき u は X で (a, b)-調和 ((a, b)-優調和, (a, b)-劣調和) という。

$f \in L(X)$ に対し, 次の２つの族を考える:

$$\mathcal{U}_f^{(a,b)} = \{u \in L(X) \mid X \text{ 上 } (a, b)\text{-優調和}, u \geq f \text{ a.e. }\},$$

$$\mathcal{V}_f^{(a,b)} = \{v \in L(X) \mid X \text{ 上 } (a, b)\text{-劣調和}, v \leq f \text{ a.e. }\}.$$

ただし, a.e. は除外集合が有限集合であることを表す。$\mathcal{U}_f^{(a,b)} \neq \emptyset$, $\mathcal{V}_f^{(a,b)} \neq \emptyset$ かつ $\inf \mathcal{U}_f^{(a,b)} = \sup \mathcal{V}_f^{(a,b)}$ であるとき、f は (a, b)-**調和化可能**という。

今, $t \geq 0$ に対し, $\hat{a}(y,t) = \max\{a(y,t), -a(y,-t)\}$, $\hat{A}(y,t) = \int_0^t \hat{a}(y,\tau)\,d\tau$ と定義し, $f \in L(X)$ に対し f の a-Dirichlet 和を

$$D^{(a)}[f] = \sum_{y \in Y} r(y)\hat{A}(y, |\nabla f(y)|)$$

で定義する。このとき、次の定理が成り立つ:

定理 以下の条件 (a.3), (a.4), (b.2), (S), (H) の下で, a-Dirichlet 和が有限な有界関数は (a,b)-調和化可能である:

(a.3) 定数 $\sigma \geq 1$ があって, a.e. $y \in Y$ とすべての $t \in \mathbf{R}$ に対し, $\hat{a}(y,|t|) \leq \sigma|a(y,t)|$.

(a.4) 定数 $\rho \geq \rho' > 1$ があって, a.e. $y \in Y$ と $t \in (0, T(y)]$ に対し, $\rho'\hat{A}(y,t) \leq \hat{a}(y,t)t \leq \rho\hat{A}(y,t)$; ここで, $T(y)$ は $r(y)\hat{A}(y,T(y)) = 1$ をみたす正数.

(b.2) すべての $s \in \mathbf{R}$ に対し, $\sum_{x\in X} |b(x,s)| < \infty$.

(S) X 上, 有界な (a,b)-優調和関数と, 有界な (a,b)-劣調和関数が存在.

(H) N が a-双曲型であるか, あるいは, ある $x_0 \in X$ に対し $b(x_0,\cdot)$ が狭義単調増加; ここで, N が a-双曲型とは、次の性質をもつ台が有限集合である関数の列 $\{f_n\}$ は存在しないことをいう: ある $\lambda > 0$ に対し $D^{(a)}[\lambda f_n] \leq 1,\ n = 1, 2, \cdots$ かつ $f_n \to 1$.

15 古典リュービルの定理の一形

中井三留
多田俊政　大同工業大学

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 2)$ 上の m 位 $(m \geq 1)$ の多重調和関数の全体を $H^m(\mathbf{R}^d)$ と記す. $H^1(\mathbf{R}^d)$ 係数の $|x|$ の多項式 $u(x)$, 即ち

$$(1)\quad u(x) = \sum_{0 \leq i \leq n} h_i(x)|x|^i \quad (h_i \in H^1(\mathbf{R}^d)\ (0 \leq i \leq n)),$$

の全体を $H^*(\mathbf{R}^d)$ と記す. (1) の表示は一意的である. すると ([5])

定理. $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^*(\mathbf{R}^d)$ **が (1) の形をもつとする. 実数** $\boldsymbol{s} > \boldsymbol{n}$ **に対し**

$$(2)\qquad \limsup_{r \uparrow \infty}\left(\min_{|x| = r} \frac{u(x)}{|x|^s}\right) \geq 0$$

となる為の必要十分条件は, $\boldsymbol{h_i(x)}$ **が多項式で**

$$(3)\qquad \deg h_i < s - i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

となることである.

上の結果に於て (2) を, 実数 $s > n$ に対し

$$(2')\qquad \limsup_{r \uparrow \infty}\left(\min_{|x|=r} \frac{u(x)}{|x|^s}\right) > -\infty$$

で置き換え (3) を

$$(3')\qquad \deg h_i \leq s - i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

で置き換えたものが成り立つ([2])ことが上の定理の系として出る.

アルマンジー分解により $H^m(\mathbf{R}^d) \subset H^*(\mathbf{R}^d)$ $(m = 1, 2, \cdots)$ であるから, 上の定理の系として, $u \in H^m(\mathbf{R}^d)$ とすると, 実数 $s > 2m-2$ に対し(2) (又は(2′))は, u が多項式で $\deg u < s$ (又は $\deg u \leq s$)となることと同値となる. これは古典的なリュービルの定理の一形と考えられる ([6], [3], [1], [4] 等).

参照文献

[1] D. H. Armitage: A polyharmonic generalization of a theorem on harmonic functions, J. London Math. Soc., **7**(1973), 251–258.

[2] T. Futamura, K. Kishi and Y. Mizuta: A generalization of the Liouville theorem to polyharmonic functions, Preprint.

[3] R. R. Huilgol: On Liouville's theorem for biharmonic functions, SIAM J. Appl. Math., **20**(1971), 37–39.

[4] Y. Mizuta, An integral representation and fine limits at infinity for functions whose Laplacians iterated m times are measures, Hiroshima Math. J., **27**(1997), 415–427.

[5] M. Nakai and T. Tada, A form of classical Liouville theorem for polyharmonic functions, Preprint.

[6] M. Nicolesco, Recherches sur les fonctions polyharmoniques, Ann. Sci. École Norm. Sup., **52**(1935), 183–220.

16

導関数が特異積分であるようなプリサイス ポテンシャルについて

大津賀 信

空間R^dの次元$d \geq 2$, $1<p<\infty$, $\omega \in A_p$, $f \in L^{p,\omega}(R^d)$, αは次数$|\alpha| \geq 0$の多重指数とする。$0<a<d$に対するリース核$|x|^{a-d}$を$k_a(x)$, $1 \leq i \leq d$に対する$\partial D^\alpha k_{1+|\alpha|}(x)/\partial x_i$を$K^{i,\alpha}(x)$としるすと，$\lim_{r \to 0} \int_{|x-y|>r} K^{i,\alpha}(x-y) f(y) dy$が$L^{p,\omega}(R^d)$内で存在することは，特異積分の理論としてよく知られている。この極限関数を$T^{i,\alpha}f$としるす。なお$\partial D^\alpha k_{1+|\alpha|}(x)/\partial x_i$も核とよばれる。これは$\alpha=0$の場合には$-(d-1)x_i|x|^{-d-1}$である。

定理．ポテンシャル$U_1^{|f|}(x)=k_1 * |f|(x) \not\equiv \infty$であるための必要十分条件である$\int_{R^d}(1+|x|)^{1-d}|f(x)|dx<\infty$を仮定すると，

(1) $D^\alpha k_{1+|\alpha|} * f$は$(p,\omega)$-プリサイスである，

(2) $(\partial D^\alpha k_{1+|\alpha|} * f)/\partial x_i = T^{i,\alpha} f$ a.e. in R^d for each i,

(3) $\| \mathrm{grad}(D^\alpha k_{1+|\alpha|} * f) \|_{p,\omega} \leq \mathrm{const.} \|f\|_{p,\omega}$

である。又$0<r \leq p$なら$D^\alpha k_{1+|\alpha|} * f$は局所的に$(r,\omega^{r/p})$-プリサイスである。

同様なことがベッセル核 G_a, $a>0$, の場合にも言える。ただ，最初の $\lim_{r\to 0}\int_{|x-y|>r}\frac{\partial D^\alpha G_{1+|\alpha|}}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy$ の存在の証明は今の所2種類の方法があるが，リース核の場合と同様というわけには行かない。上の(1),(2),(3)に対応する部分の証明も似ているが夫々行わねばならない。

上述の定理の証明について一言するなら，核 $D^\alpha k_{1+|\alpha|} = D^\alpha |x|^{1+|\alpha|-d}$ を mollify する代りに，それを $D^\alpha(|x|^2+\frac{1}{n^2})^{\frac{1+|\alpha|-d}{2}}$ で近似し，$n\to\infty$ として極限を調べる方法をとる。

特別講演

Complex convexity, in particular lineal convexity

Christer Kiselman (Uppsala University, Sweden)

Abstract:

Real convexity is important for many reasons, in particular because it enables us to pass from local properties to global properties with great ease (a local minimum of a convex function is necessarily a global minimum). Complex convexity is different in this respect; passage from local to global properties is not so easy.

For a connected open set in a real vector space the following three conditions are equivalent:
(1R) The set cuts every line in a contractible set (i.e., an interval).
(2R) The complement of the set is a union of hyperplanes.
(3R) Through every boundary point of the set there passes a hyperplane which does not cut the set.

For an open connected set in a complex vector space, the corresponding conditions are all different. The properties are then called:
(1C) **C**-convexity: The domain cuts every complex line in a contractible set.
(2C) Lineal convexity: The complement is a union of complex hyperplanes.
(3C) Weak lineal convexity: Through every boundary point there passes a complex hyperplane which does not cut the set.

In my lecture I will discuss various notions of complex convexity, starting with pseudoconvexity, which is a notion closely related to the plurisubharmonic functions (pseudoconvex functions) introduced by Oka and Lelong in 1942. Convexity as well as pseudoconvexity for smooth open sets can be characterized by a differential condition applied at every boundary point. Weak lineal convexity can be similarly characterized, although there is no known class of functions which is related to this notion as in the case of plurisubharmonic functions.

17

Holomorphic families of Möbius transformations

野田 洋二 東工大・理工

Let G be a domain in the complex plane. We say that a holomorphic map $\varphi : G \times \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ is a holomorphic family of Möbius transformations, if $\varphi(z, w)$ is biholomorphic for each fixed $z \in G$. $\varphi(z, w)$ is represented by a Möbius transformation $\dfrac{x_0 w + x_1}{x_2 w + x_3}$ with holomorphic functions $x_0, \dots, x_3$. Therefore we have a holomorphic curve $f : G \to \mathbf{P}_3 - D_0$, where $D_0 = \{x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0\}$. In this talk we consider the case of $G = \mathbf{C}$. In [1] we proved the following result.

Theorem A ([1]). Let $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_2$ be a holomorphic curve of finite order, D_0 be a conic and D_1, D_2 be lines in $\mathbf{P}_2$. Assume that $D_0 \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $f(\mathbf{C}) \cap (D_0 \cup D_1 \cup D_2) = \emptyset$. Then there is a homogeneous polynomial $P(x_0, x_1, x_2)$ of degree at most three satisfying $f(\mathbf{C}) \subset \{P(x_0, x_1, x_2) = 0\}$.

The purpose of this talk is to extend this result to three dimensional space. In [1] we proved that, if $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_3$ is a holomorphic curve of finite order omitting $\{x_0 x_1 x_2 (x_0{}^n + \cdots + x_3{}^n) = 0\}$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$), then $f(\mathbf{C})$ is contained in a hypersurface. By making use of the results of [1] and [2], we obtain the following theorems.

Theorem 1. Let x_0, x_1, x_2, x_3 be entire functions satisfying that $x_0(z)x_3(z) - x_1(z)x_2(z) \neq 0$ $(z \in \mathbf{C})$ and $\int_0^{2\pi} \log \|x(re^{i\theta})\|\, d\theta < Ar^B$ for some positive constants A, B, where $\|x\| = (\sum_{j=0}^{3} |x_j|^2)^{1/2}$. Let α_1, α_2, α_3 be distinct points of $\hat{\mathbf{C}}$. Assume that the Möbius transformation $\dfrac{x_0 w + x_1}{x_2 w + x_3}$ does not have any fixed point in $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ for each fixed $z \in \mathbf{C}$. Then there exists a homogeneous polynomial P such that $P(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv 0$ $(z \in \mathbf{C})$.

Theorem 2. Let x_0, x_1, x_2, x_3 be entire functions satisfying the assumption of Theorem 1. Let α_1, α_2 be distinct points of $\hat{\mathbf{C}}$. Assume that the Möbius transformation $\dfrac{x_0 w + x_1}{x_2 w + x_3}$ does not have any fixed point in $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ and is not an elliptic transformation of order two for each fixed $z \in \mathbf{C}$. Then there exists a homogeneous polynomial P such that $P(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv 0$ $(z \in \mathbf{C})$.

Theorem 3. Let $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}_3$ be a holomorphic curve of finite order, D_0 be a hypersurface of degree two and D_1, D_2, D_3 be hyperplanes in $\mathbf{P}_3$. Assume that $D_0 \cap \cdots \cap D_3 = \emptyset$ and $f(\mathbf{C}) \cap (D_0 \cup \cdots \cup D_3) = \emptyset$. Then there exists a hypersurface D in $\mathbf{P}_3$ such that $f(\mathbf{C}) \subset D$.

References

1. Noda Y.: On the functional equation $f^n = e^{P_1} + \cdots + e^{P_m}$ and rigidity theorems for holomorphic curves, Kodai Math. J. **16**, 90–117 (1993).
2. Noda Y.: On the functional equation $f^n = \exp(P_1) + \cdots + \exp(P_m)$, II, (to appear).
3. Ritt J. F.: Algebraic combinations of exponentials, Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 654–679 (1929).

18 ESTIMATES OF HARMONIC MEASURES WITH AN APPLICATION TO BOUNDARY REGULARITY

須川 敏幸　京都大学・理学部

この講演では、平面領域の有限な境界点に対して局所調和測度という量を導入し、その境界点における減衰の度合いから Dirichlet 問題に関する境界正則性についての情報が得られることを説明する。

まず Ω をリーマン球面の部分領域で境界が 2 点以上からなるものとし、a を境界 $\partial\Omega$ の有限点とする。(境界は常にリーマン球面内で考えるものとする。)

点 a を中心とする半径 $r>0$ の閉円板を $B(a,r)$ と書くことにする。開集合 $\Omega\cap B^\circ(a,r)$ における $\Omega\cap\partial B(a,r)$ の調和測度を $\omega_{a,r,\Omega}$ と書き、これをここでは閉円板 $B(a,r)$ に関する Ω の局所調和測度と呼ぶことにする。$0<\alpha\le 1$ を定数として、ある定数 $C>0$ と $r_0>0$ が存在して

$$\omega_{a,r,\Omega}(z)\le C\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^{\alpha},\quad \forall r\in(0,r_0) \tag{1}$$

が成り立つ時、Ω は点 a において指数 α の局所調和測度減衰性（略して LHMD 性- Local Harmonic Measure Decay property）を持つと言うことにする。さらに、Ω の各有限境界点 a において指数 α の LHMD 性を持ち、しかも(1) における定数 C, r_0 が a によらず一定に取れる場合には領域 Ω は指数 α の一様 LHMD 性を持つと言うことにする。

定理 1. 平面領域 Ω が有限境界点 a において指数 α の LHMD 性を持つとすると、定数 M,N に対して $|\varphi|\le M$ かつ $|\varphi(\zeta)|\le N|\zeta-a|^\gamma$ を満たす函数 $\varphi:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ に対して u をその D における Dirichlet 問題の上解または下解とすれば

$$|u(z)|\le AC\left(\frac{M}{r_0^\gamma}+\frac{N}{\alpha-\gamma}\right)|z-a|^\gamma,\qquad z\in\Omega$$

が成り立つ。ただし、ここに C,r_0 は式(1) に現れる定数で A は絶対定数である。さらに、φ が $B(a,r_1)\cap\partial\Omega$ において 0 であるならば、

$$|u(z)|\le CM\left(\frac{|z-a|}{r_2}\right)^{\alpha},\qquad z\in\Omega$$

を得る。ただし、ここに $r_2=\min\{r_0,r_1\}$ とする。

E を平面集合としてその上の指数 α の Lipschitz 空間 $\Lambda_\alpha(E)$ を次のノルムが有限となるようなその上の函数 f 全体からなる実 Banach 空間とする：

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha(E)}=\sup_{x\in E}|f(x)|+\sup_{x,y\in E,x\ne y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

一般に $E\subset\widehat{\mathbb{C}}$ の場合は $\Lambda_\alpha(E):=\Lambda_\alpha(E\setminus\{\infty\})$ と定義しておく。すると、先の定理から直接次の結果を得る。

定理 2. 平面領域 Ω が指数 α の一様 LHMD 性を持つならば、任意の $\gamma < \alpha$ に対して調和拡張写像 H^Ω は $\Lambda_\gamma(\partial\Omega)$ から $\Lambda_\gamma(\Omega)$ への有界線型作用素となり、その作用素ノルムは

$$\|H^\Omega\|_{\Lambda_\gamma} \le AC\left(r_0^{-\gamma} + \frac{1}{\alpha-\gamma}\right)$$

で評価される。ただしここに C, r_0 は式(1) における定数であり A はある絶対定数である。

また、定理 1 の後半の主張からは、次の Green 函数についての結果を得る。

定理 3. 境界が有界であるような平面領域 Ω がある指数 α の一様 LHMD 性を持つならばその Green 函数は境界の近傍で指数 α の Hölder 連続性を持つ。

一様 LHMD 性に関しては次の特徴付けがある。

定理 4. 平面開集合 Ω が一様 LHMD 性を持つための必要十分条件は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ が一様完全であることである。

ここで $\widehat{\mathbb{C}}$ 内の 2 点以上からなるコンパクト集合 E が一様完全であるとは、ある定数 $c > 0$ が存在して、任意の $a \in E \setminus \{\infty\}$ および $0 < r < \operatorname{diam} E$ に対して $E \cap \{z;\ cr < |z-a| < r\} \neq \emptyset$ が成り立つことをいう。このような集合の様々な性質については [1] およびその参考文献を参照されたい。

ただ、一様完全性からは直接指数 α の評価をすることは一般には容易ではない。そこで、以下ではいくつかの十分条件を与えることにする。次は外部円条件が指数 1 の LHMD 性を導くことを意味している。

定理 5. Ω を平面領域として、a をその有限境界点とする。もし半径 ρ の閉円板 B で $B \cap \Omega = \emptyset$ かつ $a \in \partial B$ なるものが存在すれば、局所調和測度について $\omega_{a,r,\Omega}(z) \le 2|z-a|/r$ が任意の $0 < r < 2\rho$ および $z \in B^\circ(a,r) \cap \Omega$ について成立する。

次に、外部錐条件をより一般化した次の条件もやはり LHMD 性を導くことを見よう。平面領域 Ω とその有限境界点 a に対して次の量を考える。

$$L_\Omega(a,r) = \begin{cases} -\infty & \partial B(a,r) \subset \Omega \text{ の時、} \\ |\partial B(a,r) \setminus \Omega|/r & \text{そうでない時、} \end{cases}$$

ただし、ここで $|\cdot|$ は円周上の 1 次元 Lebesgue 測度を表すものとする。従って特に $0 \le L_\Omega(a,r) \le 2\pi$ または $L_\Omega(a,r) = -\infty$ である。

定理 6. $\beta \in [0,\pi]$ とする。平面領域 Ω およびその有限境界点 a に対して $L_\Omega(a,r) \ge \beta$ が $0 < r < \rho$ に対して成り立つならば

$$\omega_{a,r,\Omega}(z) \le \frac{4}{\pi}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\beta}} \tag{2}$$

が $0 < r < \rho$ および $z \in B^\circ(a,r) \cap \Omega$ に対して成り立つ。従って、点 a において Ω は指数 $\pi/(2\pi-\beta)$ の LHMD 性を持つ。

References

[1] Sugawa, T. Various domain constants related to uniform perfectness, *Complex Variables* (1998), 311–345.

19 Schottky groups and Bers boundary of Teichmüller space

糸　健太郎　（東京工業大学　理工学研究科）

ここでは, タイヒミュラー空間の境界の各点が, Schottky 群の列の代数的極限になっていることを報告する. 詳細は [3] を参照されたい.

S を双曲型コンパクト曲面とし, 境界 ∂S があってもよいとする. タイヒミュラー空間 $T(S)$ （S 上の有限面積な完備双曲構造の空間）の点 X に対して $B_2(X)$ を X 上の有界正則 2 次微分の空間とすると, これは X 上の射影構造の空間ともみなせる. $B_2(X)$ の元 φ に対して, そのホロノミー表現を $\rho_\varphi : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ と書く. タイヒミュラー空間 $T(S)$ は Bers 埋め込みによって $B_2(X)$ の有界領域 B_X と同一視され, B_X には自然に S の写像類群 $Mod(S)$ が作用する. この作用は Bers [1] によって B_X の閉包にまで拡張されているが, ここではこの作用をさらにより大きなクラス C_X にまで拡張し, その性質を調べた.

ここでクライン群 G に対して, その不連続領域を $\Omega(G)$ と書く. クライン群 G が函数群であるとは, $\Omega(G)$ が G-不変な領域 $\Omega_0(G)$ をもつときをいう. このとき

$$C_X = \{\varphi \in B_2(X) | G = \rho_\varphi(\pi_1(S)) \text{ は函数群で } X = \Omega_0(G)/G\}$$

である. ここでは $\sigma \in Mod(S)$ が $\varphi \in C_X$ に作用したものを φ^σ と書くことにする. まず, $Mod(S)$ の作用が連続となる C_X の点の十分条件を得た.

定理 1. C_X の点 φ に対して $G = \rho_\varphi(\pi_1(S))$ とするとき, $\Omega(G)/G$ の $X = \Omega_0(G)/G$ 以外の全ての成分の複素構造が剛性をもてば, $Mod(S)$ の作用は φ において連続である：即ち, C_X において $\varphi_n \to \varphi$ であれば, 任意の $\sigma \in Mod(S)$ に対して $(\varphi_n)^\sigma \to \varphi^\sigma$ である.

B_X の相対境界 ∂B_X の元 φ が maximal cusp であるとは, $G = \rho_\varphi(\pi_1(S))$ が maximal cusp （即ち, $\Omega(G)/G$ の $X = \Omega_0(G)/G$ 以外の各成分が (0,3)-type）であるときをいう. ここで maximal cusp は上の定理の条件を満たしていることに注意する. McMullen によって maximal cusp の集合は ∂B_X において稠密であることが知られており, この集合は有限個の軌道に分解される. ここでは定理 1 を用いて, その各軌道が ∂B_X において稠密となることを示した.

定理 2. 任意の maximal cusp $\varphi \in \partial B_X$ に対して, その軌道 $\{\varphi^\sigma\}_{\sigma \in Mod(S)}$ は ∂B_X の中で稠密である.

以下では, S は閉曲面であるとする. ここで

$$S_X = \{\varphi \in C_X | G = \rho_\varphi(\pi_1(S)) \text{ は Schottky 群 }\}$$

とおく. S_X の各元は C_X の中で孤立点であることが知られている. このとき, 定理1と2を用いて, 次の結果を得た.

定理 3. S_X は唯一つの軌道より成り, S_X の集積点の集合は ∂B_X を含む.

即ち, タイヒミュラー空間 B_X の境界の各点に, Schottky 群が集積することがわかった. 上の2つの定理の証明は, いずれも $B_2(X)$ を, より高次元な空間; $\pi_1(S)$ の $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$-表現空間 $V(S)$, に埋め込んで, $B_2(X)$ に垂直な方向に関しても写像類群の作用を考えることで得られる. $B_2(X)$ に垂直な方向の軌道の収束を示すために, Thurston の収束定理を用いた.

注 1. S が種数2の閉曲面であるときは, S_X の集積点集合が ∂B_X を含むことは Gallo [2] によって知られている. しかしここで用いた証明の手法は, Gallo のものとは本質的に異なる.

References

[1] L. Bers, *The action of the modular group on the complex boundary*, Ann. of Math. Stud. **97** (1981), 33–52.
[2] D. M. Gallo, *Schottky groups and the boundary of Teichmüller space: genus 2*, Contemporary Math. **169** (1994), 283–305.
[3] K. Ito, *Schottky groups and Bers boundary of Teichmüller space*, preprint.

20 On cusps in the boundary of the Maskit slice for once punctured torus groups

宮地秀樹　（大阪市立大学大学院理学研究科）

この講演では，一点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の接円座標の像の境界の一性質について論じる．接円座標はタイヒミュラー空間の点を終端 b 群を対応させることにより定義される．タイヒミュラー空間の大域座標の一つである (cf.[1],[3])．この定義からこの座標はしばしば Maskit 埋め込みを表わすときに用いられる．接円座標による像 $\mathcal{M}$ は D.Wright の絵としてよく知られている (cf.[5])．像 $\mathcal{M}$ は複素平面内の単連結な Jordan 領域であり (cf.[4])，さらに $\mathcal{M}$ の複素平面内の境界点には一点穴あきトーラス群と呼ばれるクライン群が対応する．

今年の春季関数論分科会において $\mathcal{M}$ が擬円板でないことを説明したが，その方法は $\mathcal{M}$ の境界点に $\mathcal{M}$ の inward-pointing cusp が存在することを示すことであった．ここで，この講演でいう inward-pointing cusp は次のように定義される領域の境界点である：D を複素平面内の開集合とする．このとき $z \in \partial D$ に対し，ある開円板 B で，$0 \in \partial B$ かつ $z + t^2 \in D,\ t \in B$ を満たすものが存在するときに z は D の inward-pointing cusp であるといわれる．

本講演では上の結果の拡張である次の定理を説明する．

主定理　幾何学的有限な群の対応する $\mathcal{M}$ の境界点は，$\mathcal{M}$ の inward-pointing cusp である．

この定理には，Keen-Series [2] により導入された pleating ray の理論が重要な役割を果たす．主定理の仮定を満たす点は境界内に稠密に存在することが知られているので，この定理は $\mathcal{M}$ の境界の複雑性も与えている．

参考文献

[1] 伊藤学, 今吉洋一, 小森洋平, 宮地秀樹, 山本寛, Riemann 面とその変形空間の接円座標およびモジュライ空間, 研究集会資料集 (1998).

[2] L. Keen and C.Series, *Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of puncture tori*, Topology Vol 32, no 4 (1993), 719-749.

[3] I. KRA, Horocyclic coordinates for Riemann surfaces and Moduli spaces I: Teichmüller and Riemann spaces of Kleinian groups, Jour. of Amer. Math. Soc. Vol 3 (1990), p499-578.

[4] Y.N.Minsky, *The classification of punctured torus groups*, to appear in Ann.of Math.

[5] D.J.WRIGHT, The shape of the boundary of Maskit's embedding of the Teichmüller space of once punctured tori, preprint (1988).

21 ※印は本会で記入

※番号	題	On the boundary of the Earle slice for punctured torus groups

氏名	小森 洋平	所属	大阪市立大学 理学部 数学

氏名 小森 洋平

所属 大阪市立大学 理学部 数学

Let (α, β) be a canonical homotopy basis of $\pi_1(\mathcal{T}_1)$ where $\mathcal{T}_1$ is an analytically finite Riemann surface homeomorphic to a once-punctured torus S. Let θ be an involution of $\pi_1(\mathcal{T}_1)$ defined by $\theta(\alpha) = \beta$. C. Earle shows that up to conjugation in $PSL_2(\mathbf{C})$, there exists a unique marked quasifuchsian group $\Gamma = \langle A, B\rangle$ such that $(\mathcal{T}_1, \alpha, \beta)$ is conformal to $(\Omega_+/\Gamma; A, B)$ and $(\Omega_-/\Gamma; B, A)$. This defines a holomorphic embedding of the Teichmüller space Teich(S) of once-punctured tori into the space of marked quasifuchsian punctured torus groups $\mathcal{QF}$. This is called the *Earle embedding*. We can realize the image of the Earle embedding in the complex plane $\mathbf{C}$, which is denoted by $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ is in the right half plane $\{z \in \mathbf{C} | Re\, z > 0\}$ and symmetric under the complex conjugation (see figure 1: Courtesy of Peter Liepa).

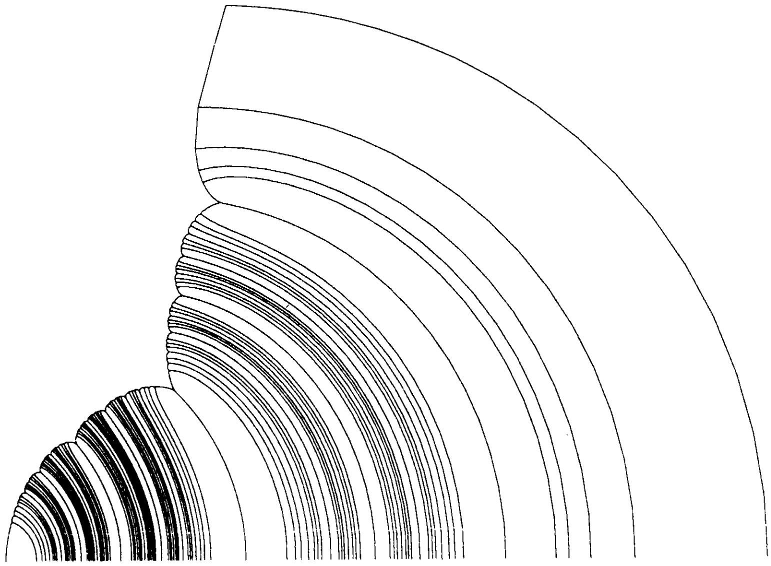

Figure 1: The upper half of the Earle Slice.

In this talk we will show that

1. The boundary of the Earle slice $\mathcal{E}$ is a Jordan curve.

2. There is a right half region in $\mathcal{E}$.

22 ON COMPUTING THE BERS BOUNDARY OF THE TEICHMÜLLER SPACE OF A ONCE-PUNCTURED TORUS

須川 敏幸　　京都大学・理学部

小森 洋平　　大阪市立大学・理学部

この講演では、穿孔トーラス (once-punctured torus) の Bers 埋め込みの境界を数値計算によって求めるための一つの方法について説明する。これまで Porter や Keen による楕円函数を用いたアプローチは知られているが、以下で述べる方法は文献には現れていないように思われる。

X を 1 次元トーラスから 1 点を抜いて得られる $(1,1)$ 型のリーマン面とすると、これはある格子群 $L=\langle 1,\tau\rangle_{\mathbb{Z}}$ を用いて（ただし $\mathrm{Im}\tau>0$）、$X=(\mathbb{C}\setminus L)/L$ と表すことが出来る。この X は次のようにして得られる 4 点穿孔球面 Y と通約可能 (commensurable) である：まず $L'=\langle 1/2,\tau/2\rangle_{\mathbb{Z}}$ として、$Z=(\mathbb{C}\setminus L')/L$ とすればこれは 4 点穿孔トーラスで、写像 $z\mapsto 2z$ が $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$-被覆 $Z\to X$ を導く。一方、L に関する Weierstrass $\wp$-函数は $\mathbb{C}$ からリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への分岐被覆としてちょうど L' を分岐点集合として持つことから、これは 2 葉の不分岐被覆写像 $Z\to\mathbb{C}\setminus\{\wp(1/2),\wp(\tau/2),\wp((1+\tau)/2)\}$ を導く（これはもちろん elliptic involution による商写像にほかならない）。Affine 写像で正規化することにより、これから不分岐被覆写像 $Z\to Y:=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty,\lambda\}$ が得られる。ただし、ここに $\lambda=(\wp((1+\tau)/2)-\wp(\tau/2))/(\wp(1/2)-\wp(\tau/2))$ とする。もちろん、これは古典的なラムダ函数の値 $\lambda(\tau)$ である。

Γ を単位円板に作用する Fuchs 群で X を一意化するものとする。Γ' をそれと commensurable な Fuchs 群で Y を一意化するものとする。$B_2(\mathbb{D},\Gamma), B_2(\mathbb{D},\Gamma')$ をそれぞれ単位円板上の Γ,Γ' に関する重さ -4 の正則な穿点形式 (cusp form) のなす空間とすると、これらはともに 1 次元であることが知られているが、commensurability から実は $B_2(\mathbb{D},\Gamma)=B_2(\mathbb{D},\Gamma')=B_2(\mathbb{D},\Gamma\vee\Gamma')$ となっていることが分かる。($\Gamma\vee\Gamma'$ は $(0;2,2,2,\infty)$-型の orbifold を一意化する Fuchs 群である。)

各 $\varphi\in B(\mathbb{D},\Gamma)$ に対してそれを Schwarz 微分として持つ局所単葉有理型函数 $f_\varphi:\mathbb{D}\to\widehat{\mathbb{C}}$ が（Möbius 同値を除いて）定まるが（つまり f_φ は φ の展開写像である）、それは φ の保型性から次のような形の函数方程式を満足する。すなわちある準同型写像 $\chi_\varphi:\Gamma\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ に対して

$$f_\varphi\circ\gamma=\chi_\varphi(\gamma)\circ f_\varphi,\quad \forall\gamma\in\Gamma$$

が成り立つ。この χ_φ を φ のモノドロミー準同型と呼ぶ。Γ の Teichmüller 空間の Bers 埋め込み $T(\Gamma)$ は $\varphi\in B_2(\mathbb{D},\Gamma)$ の元で f_φ が上の関係式を保つような $\widehat{\mathbb{C}}$ 全体の擬等角自己同相写像に拡張できるもの全体の集合として定義される。

これは最近 Y. Minsky により Jordan 領域であることが示されたが、実際にどのような形なのかいまだによく分かっていないようである。まず X 内の非自明な単純閉曲線は穴を埋めたトーラス $\bar{X}$ におけるそのホモロジー類 $p\alpha-q\beta$（ただしここに α,β は $\bar{X}$ の標準

ホモロジー基底とする）として、$p/q \in \widehat{\mathbb{Q}}$ と同一視することができて、しかもこれは全単射な対応を与える。p/q（ただし p,q は互いに素な整数）に対応する単純閉曲線を代表する X の基本群の元を $\gamma_{p/q}$ としておく。よく知られているように、Farey 三角形分割を用いれば例えば $\gamma_{0/1}, \gamma_{1/0}, \gamma_{1/1}$ のモノドロミー準同型 χ_φ による像のトレースから帰納的に他の $\gamma_{p/q}$ のトレースも計算できることになる。

実はモノドロミーのトレースが計算できれば $T(\Gamma)$ の概形が次のようにして分かる。

$$H(p/q) = \left\{\varphi \in B_2(\mathbb{D}, \Gamma);\ \mathrm{tr}^2(\chi_\varphi(\gamma_{p/q})) \in [4, \mathrm{tr}^2(\gamma_{p/q})]\right\}$$

とおく。$\mathrm{tr}^2\chi_0(\gamma) = \mathrm{tr}^2\gamma$ に注意すれば $0 \in H(p/q)$ であるから、0 を含む $H(p/q)$ の連結成分を $H_0(p/q)$ と書くことにしよう。これはもしモノドロミーのトレースがコンピュータなどで計算できたとすれば、数値的に求めることが可能な図形であることに注意しておく。すると実は $H_0(p/q)$ は $\gamma_{p/q}$ に沿った pleating locus であることが分かるので、McMullen による結果（"Complex earthquakes and Teichmüller theory", J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283–320）を用いて次のことが示される。

定理 1. **弧** $H_0(p/q)$ **は原点を出発する** Jordan **閉弧であり、端点を除いた内部** $I(p/q)$ **は** $T(\Gamma)$ **に含まれ他方の端点は** $\partial T(\Gamma)$ **のカスプに対応する。しかも、自然な同相写像** $h : \widehat{\mathbb{R}} \times (0,1) \to T(\Gamma) \setminus \{0\}$ **が存在して** $h(\{p/q\} \times (0,1)) = I(p/q)$ **となっている。**

さて、一方モノドロミー χ_φ を計算するには次の方法を用いればよい。まず $B_2(Y)$ を Y 上の正則な 2 次微分で穿孔においては高々1 位の極しか持たないようなもの全体からなる Banach 空間とすると、実はこれは $B_2(\mathbb{D}, \Gamma')$ とは一意化写像 $p : \mathbb{D} \to \mathbb{D}/\Gamma' = Y$ による引き戻し p^* を通して同型になっている。従って 1 次元のはずだが、実際に例えば

$$\psi_0(z)dz^2 = \frac{dz^2}{z(z-1)(z-\lambda)}$$

が $B_2(Y)$ の基底になっている。一方、p^{-1} の Schwarz 微分は実は一意化写像 p や逆写像の分枝の取り方に依存せず Y のみによって定まることが知られている。これを $\theta_Y(z)dz^2$ と書くことにすると、穿孔の近傍では留数 1/2 を持つことからある定数 $c = c(\lambda)$ を用いて

$$\theta_Y(z) = \frac{1}{2z^2(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-\lambda)^2} + c\psi_0(z)$$

と表せる。定数 $c(\lambda)$ はしばしばアクセサリパラメータと呼ばれており求めるのは一般には非常に難しいが、対称性の強い X については具体的に求めることも可能である。仮に求めることが出来なくても、$T(\Gamma)$ の原点の位置がはっきりしなくなるだけなので影響は少ない。我々の主定理は次のものである。$z_0 = p(0)$ としておこう。γ と p による $[0, \gamma(0)]$ の像を対応させることにより Γ' と基本群 $\pi_1(Y, z_0)$ とは同一視出来る。

定理 2. $\varphi = p^*(t\psi_0) \in B_2(\mathbb{D}, \Gamma)$ **とする。**Fuchs **型 2 階線型微分方程式** $2y'' + (\theta_Y + t\psi_0)y = 0$ **の解のモノドロミー群** $\tilde{\chi}_t : \pi_1(Y, z_0) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ **は** χ_φ **と** $\Gamma \cap \Gamma'$ **上では** Möbius **同値である。**

一般に $\gamma \in \Gamma$ に対しては $\gamma^2 \in \Gamma'$ であり、$\mathrm{tr}(\gamma^2) = \mathrm{tr}^2\gamma - 2$ という関係式に注意すれば、$\mathrm{tr}^2\gamma$ を求めることは上の定理に帰着される。モノドロミー群を求めることは微分方程式の数値解法により十分可能である。なお、もう少し工夫することにより Γ のモノドロミーそのものを求めることも可能である。

23

An estimate of the growth of spirallike mappings in several complex variables

濱田　英隆　九州共立大学工学部

Let f be a univalent mapping in the unit disc Δ with $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. Then the classical growth theorem is as follows:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

It is well known that the above growth theorem cannot be generalized to normalized biholomorphic mappings on the Euclidean unit ball $\mathbf{B}^n$ in $\mathbf{C}^n$ $(n \geq 2)$. Barnard, FitzGerald and Gong [1] and Chuaqui [2] extended the above growth theorem to normalized starlike mappings on $\mathbf{B}^n$. Dong and Zhang [3] generalized the above result to normalized starlike mappings on the unit ball in complex Banach spaces.

In this talk, we will consider about the growth of spirallike mappings in the sense of Suffridge [5].

Definition Let $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{C}^n$ be a normalized biholomorphic mapping. Let $A \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n)$ such that $\inf\{\Re\langle Az, z\rangle : \|z\| = 1\} > 0$. We say that f is spirallike relative to A if $e^{-tA}f(\mathbf{B}^n) \subset f(\mathbf{B}^n)$ for all $t \geq 0$.

Then f is starlike if and only if f is spirallike relative to I.

Proposition 1 ([5]) *Let $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{C}^n$ be a normalized biholomorphic mapping and let A be as above. Then f is spirallike relative to A if and only if $\Re\langle[Df(z)]^{-1}Af(z), z\rangle > 0$ on $\mathbf{B}^n \setminus \{0\}$.*

Example Let $f((z_1, z_2)^t) = (z_1, z_2 + az_1^2)^t$ and let $A(z_1, z_2)^t = (z_1, 2z_2)^t$. Then $[Df(z)]^{-1}Af(z) = (z_1, 2z_2)^t$. Therefore, f is a normalized spirallike mapping relative to A for any $a \in \mathbf{C}$. Let $z^0 = (1/2, 0)^t$. Then $f(z^0) = (1/2, a/4)^t$ and $\|f(z^0)\| \to \infty$ as $|a| \to \infty$. Therefore, the growth of normalized spirallike mappings cannot be estimated from above.

Theorem 1 *Let $A = (a_i^j)$ be a diagonal matrix. Assume that*

$$0 < \Re a_1^1 = \cdots = \Re a_l^l < \Re a_{l+1}^{l+1} \leq \ldots \leq \Re a_n^n.$$

Let $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{C}^n$ be a normalized spirallike mapping relative to A. Then

$$\|(f_1, \ldots, f_l, 0, \ldots, 0)\| \leq \frac{\|z\|}{(1 - \|z\|)^2}.$$

Corollary 1 *Let A be a normal matrix and let $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ be the eigenvalues of A. Assume that $\Re\lambda_1 = \cdots = \Re\lambda_n > 0$. Let $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{C}^n$ be a normalized spirallike mapping relative to A. Then*

$$\frac{\|z\|}{(1 + \|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1 - \|z\|)^2}.$$

Corollary 2 ([4]) *Let B be the unit ball in an arbitrary complex Banach space X. Let $A = aI$ with $\Re a > 0$. Let $f : B \to X$ be a normalized spirallike mapping relative to A. Then*

$$\frac{\|z\|}{(1 + \|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1 - \|z\|)^2}.$$

参考文献

[1] R. W. Barnard, C. H. FitzGerald and S. Gong, *The growth and 1/4-theorems for starlike mappings in* $\mathbf{C}^n$, Pacific J. Math. **150** (1991), 13–22.

[2] M. Chuaqui, *Application of subordination chains to starlike mappings in* $\mathbf{C}^n$, Pacific J. Math. **168** (1995), 33–48.

[3] D. Dong and W. Zhang, *Growth and 1/4-theorem for starlike maps in the Banach space,* Chin. Ann. Math. Ser.A **13**, No.4 (1992), 417–423.

[4] H. Hamada and G. Kohr, *Subordination chains and the growth theorem of spirallike mappings,* submitted.

[5] T. J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 599, Springer, Berlin New York Heidelberg, 1976, pp.146–159.

24 A Schwarz lemma on the Euclidean unit ball

濱田　英隆　九州共立大学工学部
本田　竜広　有明工業高等専門学校

Let $\Delta = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$ denote the open unit disc in the complex plane $\mathbf{C}$. Let $f : \Delta \to \Delta$ be a holomorphic map with $f(0) = 0$. By the classical Schwarz lemma, if there exists a single point $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ such that the equality $|f(z_0)| = |z_0|$ holds, then $f(z) = \lambda z$ with a complex number λ such that $|\lambda| = 1$ for all $z \in \Delta$. Namely, f is a linear automorphism of Δ.

Let $\|\cdot\|$ be a norm on $\mathbf{C}^n$. In this talk, we will consider about a generalization of the above Schwarz lemma to the unit ball $B = \{z \in \mathbf{C}^n; \|z\| < 1\}$ in $\mathbf{C}^n$. Let $f : B \to B$ be a holomorphic map with $f(0) = 0$.

Vigué [6], [7] proved that if every boundary point of B in $\mathbf{C}^n$ is a complex extreme point of $\bar{B}$ and $\|f(w)\| = \|w\|$ holds on an open subset U of B, then f is a linear automorphism of $\mathbf{C}^n$. Hamada [1], [2] generalized the above Schwarz lemma in the case the equality $\|f(w)\| = \|w\|$ holds on some local complex submanifold of codimension 1. We note that a single point $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ is a complex submanifold of codimension 1 in $\mathbf{C}$. Honda [4], [5] extended their results in the case the equality $\|f(w)\| = \|w\|$ holds on a subset mapped onto a non-pluripolar subset in the projective space. We note that an open set is non-pluripolar.

Moreover, we have the following theorems [3].

Theorem 1 *Assume that every boundary point $p \in \partial B$ is a complex extreme point of $\overline{B}$. Assume that there exist an open subset U of B and a totally real, real analytic $(n-1)$-dimensional submanifold X of U such that there exists a point $a \in X$ with $0 \notin a + T_a(X) \oplus iT_a(X)$. If $\|f(w)\| = \|w\|$ holds for every $w \in X$, then f is linear on $\mathbf{C}^n$.*

Theorem 2 *Let $\|\cdot\|_2$ be the Euclidean norm on $\mathbf{C}^n$. Let $\mathbf{B}^n = \{z \in \mathbf{C}^n; \|z\|_2 < 1\}$ be the Euclidean unit ball. If U, X, f are as in the assumption of Theorem 1, then f is a linear automorphism of $\mathbf{B}^n$.*

Example Let $f(z) = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n^2)$. Then $f(\mathbf{B}^n) \subset \mathbf{B}^n$, $f(0) = 0$.
(i) Let $X = \{(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbf{B}^n; y_1 = b, x_n = y_2 = \cdots = y_n = 0\}$, where $0 < |b| < 1$. This example shows that the condition that $0 \notin a + T_a(X) \oplus iT_a(X)$ cannot be weakened to $0 \notin a + T_a(X)$.
(ii) Let $X_{n-k} = \{x_{n-k+1} = b, x_{n-k+2} = \cdots = x_n = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0\}$ for $k \geq 2$, where $0 < |b| < 1$. This example shows that the condition that the real dimension of X is $n-1$ cannot be omitted.
(iii) In the case $n = 3$, let $X = \{(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) \in \mathbf{C}^3; x_2 = b, x_3 = y_2 = y_3 = 0\}$, where $0 < |b| < 1$. This example shows that the condition that X is totally real cannot be omitted.

参考文献

[1] H. Hamada, *A Schwarz lemma in several complex variables,* in Proceedings of the Third International Colloquium on Finite or Infinite dimensional Complex Analysis, Seoul, Korea (1995), 105–110.

[2] H. Hamada, *A Schwarz lemma on complex ellipsoids,* Ann. Polon. Math. **67** (1997), 269–275.

[3] H. Hamada and T. Honda, *A characterization of linear automorphisms of the Euclidean ball,* Ann. Polon. Math.(to appear).

[4] T. Honda, *A special version of the Schwarz lemma on an infinite dimensional domain,* Rend. Mat. Acc. Lincei **9-8** (1997), 107–110.

[5] T. Honda, *Linear isometries on Hilbert spaces,* Complex Variables **38** (1999), 193–200.

[6] J. P. Vigué, *Un lemme de Schwarz pour les domaines bornés symétriques irréductibles et certains domaines bornés strictement convexes,* Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 239–304.

[7] J. P. Vigué, *Le lemme de Schwarz et la caractérisation des automorphismes analytiques,* Astérisque **217** (1993), 241–249.

25　ラインハルト領域に関する正則同値問題とトーラス作用の共役性

清水　悟

東北大学大学院理学研究科

1. ラインハルト領域に関する正則同値問題．$U(1)$ により絶対値 1 の複素数のなす乗法群を表し，$T=(U(1))^n$ とおく．このとき n 次元コンパクトトーラス T は $\mathbf{C}^n$ 上に次の規則により正則変換群として作用する：$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in T$, $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n$に対して，$\alpha\cdot z=(\alpha_1 z_1,\cdots,\alpha_n z_n)$.

さて $\mathbf{C}^n$ 内の領域 D は，すべての$\alpha\in T$ に対して$\alpha\cdot D\subset D$ が成り立つとき，ラインハルト領域と呼ばれる．このとき T は D 上に正則変換群として作用する．T の作用から誘導される D の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(D)$ の部分群を $T(D)$ で表す．

ラインハルト領域に関する正則同値問題を論ずるためには，$(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型の概念が必要である．$(\mathbf{C}^*)^n$ の正則自己同型φ は

$$\varphi:(\mathbf{C}^*)^n\ni(z_1,\cdots,z_n)\longmapsto(w_1,\cdots,w_n)\in(\mathbf{C}^*)^n,$$
$$w_i=\alpha_i z_1^{a_{1i}}\cdots z_n^{a_{ni}},\quad i=1,\cdots,n,$$

の形をもつとき，$(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型と呼ばれる．ここで $(a_{ij})\in GL(n,\mathbf{Z})$, $(\alpha_i)\in(\mathbf{C}^*)^n$ である．$\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ により $(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型全体のなす $\mathrm{Aut}((\mathbf{C}^*)^n)$ の部分群を表す．次の命題は，ラインハルト領域の間の T-作用に関する同変双正則写像が $(\mathbf{C}^*)^n$ の代数的自己同型により与えられることを示す．

命題（[3]）$\varphi: D\to D'$ を $\mathbf{C}^n$ 内の２つのラインハルト領域 D, D' の間の双正則写像とする．このとき$\varphi T(D)\varphi^{-1}=T(D')$ となるための必要十分条件はφ が $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ のある元の制限として与えられることである．

ラインハルト領域の間の T-作用に関する同変双正則写像はラインハルト領域のカテゴリーにおける自然な射と考えられるので，次の定義と問題が導かれる．

定義　$\mathbf{C}^n$ 内の２つのラインハルト領域は，それらの間に $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg}}((\mathbf{C}^*)^n)$ のある元の制限として与えられる双正則写像が存在するとき，代数的に同値であると呼ばれる．

問題 I（ラインハルト領域に関する正則同値問題）$\mathbf{C}^n$ 内の２つのラインハルト領域 D と D' が双正則同値ならば，それらは代数的に同値になるか？

D, D' が有界なとき，あるいは D, D' が（有界とは限らない）２次元擬凸ラインハルト領域のとき，この問題には肯定的な解答が与えられている（[2]，[6]）．問題 I に密接に関連する問題として次の問題がある．

問題 II　$T=(U(1))^n$ が $\mathbf{C}^n$ 内のラインハルト領域 D 上に（必ずしも通常の作用とは限らずに）正則変換群として効果的に作用していると仮定する．T の作用から

誘導される Aut(D) の部分群を再び T で表すとき，Aut(D) のある元φ が存在して，$\varphi T\varphi^{-1} = T(D)$ となるか？

D が $\mathbf{C}^n$，あるいは $(\mathbf{C}^*)^n$ と一致するとき，問題 II は正しいことが知られている ([1] 参照)．他方 D が有界なときは，問題 II はリー群論における極大トーラスの共役性定理の帰結である．

2. $(\mathbf{C}^*)^n$ 内の擬凸ラインハルト領域． D を $(\mathbf{C}^*)^n$ 内の擬凸ラインハルト領域とする．このとき D の対数像

$$\operatorname{ord}(D) = \left\{ \left(-\frac{1}{2\pi}\log|z_1|, \cdots, -\frac{1}{2\pi}\log|z_n|\right) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, (z_1, \cdots, z_n) \in D \right\}$$

は $\mathbf{R}^n$ 内の凸領域になる．ord(D) に含まれる極大なアフィン部分空間の次元を $\ell(D)$ とおく．$\ell(D)$ は双正則不変量であり，D が有界領域に双正則同値になるための必要十分条件は $\ell(D) = 0$ である．この講演では次の２つの結果を報告する．

定理 I ([7]) D, D' を $(\mathbf{C}^*)^n$ 内の２つの擬凸ラインハルト領域とし，$\ell(D) > 0, \ell(D') > 0$ とする．もし D, D' が双正則同値ならば，それらは代数的に同値になる．

定理 II ([7]) D を $(\mathbf{C}^*)^n$ 内の擬凸ラインハルト領域で $\ell(D) > 0$ なるものとし，$T = (U(1))^n$ が D 上に正則変換群として効果的に作用していると仮定する．T の作用から誘導される Aut(D) の部分群を再び T で表すとき，Aut(D) のある元φ が存在して，$\varphi T\varphi^{-1} = T(D)$ となる．

定理 I は，$n = 2$ のときについては [4]，[5] において示された．

参考文献

1. D. Barrett, E. Bedford, and J. Dadok, *T^n-actions on holomorphically separable complex manifolds*, Math. Z. **202** (1989), 65–82.
2. S. Shimizu, *Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin*, Tohoku Math. J. **40** (1988), 119–152.
3. S. Shimizu, *Automorphisms of bounded Reinhardt domains*, Japan. J. Math. **15** (1989), 385–414.
4. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in* $\mathbf{C}^2$, Osaka J. Math. **28** (1991), 609–621.
5. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in* $\mathbf{C}^2$,II, Kodai Math. J. **15** (1992), 430–444.
6. S. Shimizu, *A classification of two-dimensional Reinhardt domains*, in preparation.
7. S. Shimizu, *Holomorphic equivalence problem for Reinhardt domains and the conjugacy of torus actions*, preprint.

26 On hyperbolicity of complements of Siu-Yeung hypersurfaces

上田賢嗣　　大阪府立大学工学部

城崎　学　　大阪府立大学工学部

Siu と Yeung は

Defects for ample divisors of abelian varieties, Schwarz lemma, and hyperbolic hypersurfaces of low degrees, Amer. J. Math. 119(1997)

の中で，$d \geq 16(n-1)^2$ なる整数 d に対して，$\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の次数 d の双曲的超曲面を挙げている．この $16(n-1)^2$ という数字は，今まで知られていた双曲的超曲面の次数よりかなり小さい．また特に，$\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{C})$ においては，$d \geq 11$ なる d について，次数 d の双曲的超曲面の具体的な例を挙げている：

$$w_0{}^d + w_1{}^d + w_2{}^d + w_3{}^{d-2}(a_0 w_0{}^2 + a_1 w_1{}^2 + a_2 w_2{}^2 + a_3 w_3{}^2) = 0.$$

ここで，a_0, a_1, a_2, a_3 は 0 でない定数で，$a_j{}^d \neq (-1)^{d+1} a_k{}^d$ $(0 \leq j < k \leq 2)$ をみたす．

注意. Siu-Yeung はもう 1 つ条件を付けているがそれは落とせる．

ここでは，$\boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C})$ における超曲面

$$w_0{}^d + w_1{}^d + w_2{}^{d-p}(a_0 z_0{}^p + a_1 w_1{}^p + a_2 w_2{}^p) = 0$$

の補集合の双曲性および$\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{C})$ における超曲面

$$
\begin{aligned}
X_1 \quad : \quad & {w_0}^d + {w_1}^d + {w_2}^d \\
& + {w_3}^{d-p}(a_0 {z_0}^p + a_1 {w_1}^p + a_2 {w_2}^p + a_3 {w_3}^p) = 0 \\
X_2 \quad : \quad & b_0 {w_0}^d + b_1 {w_1}^d + b_2 {w_2}^d \\
& + b_3 {w_3}^{d-p}(a_0 {z_0}^p + a_1 {w_1}^p + a_2 {w_2}^p + a_3 {w_3}^p) = 0
\end{aligned}
$$

の補集合 $\boldsymbol{P}^3(\boldsymbol{C}) \setminus (X_1 \cup X_2)$ の双曲性について報告する.

数学会 1999/09

強擬凸領域のソボレフ・ベルグマン核

平地 健吾　　　　大阪大学 大学院理学研究科

強擬凸領域のベルグマン核の具体的な計算に関する研究には大きく分けて2つの流れがある.

一つは Fefferman [F3] によって始められた不変式論である. これはベルグマン核を熱核の類似とみてその漸近展開を幾何的不変量を用いて記述することを目標としている ([G], [BEG], [HKN], [H]).

もう一つは柏原によるベルグマン核の超局所解析 [K] である. これはベルグマン核を単純ホロノミー系の解として特徴づけ, その代数的な計算を可能としている ([B], [HKN]).

前者はベルグマン核の双正則変換則に注目した理論であり, 後者は正則函数に対する再生性を基本としている. この二つの理論の統合がベルグマン核の理解に不可欠であると思われる.

この講演では両理論の関係を理解することを目標として双正則不変なソボレフ・ベルグマン核の構成を試みる. まずベルグマン核およびセゲー核についての柏原の理論を復習し, その自然な一般化としてソボレフ・ベルグマン核を超局所的にミクロ関数として定義する (大域的なソボレフ内積が与えられている場合にはその超局所化になっている). 次にソボレフ・ベルグマン核の双正則変換則を調べその漸近展開を Fefferman の不変式論を用いて記述する.

結果として, ソボレフ指数 $s/2$, $s \in \{0, 1, 2, \ldots, n+1\}$, の場合にのみ双正則不変なソボレフ・ベルグマン核が存在することが示される (定理 1). とくにソボレフ指数 0, 1/2 の場合がベルグマン核とセゲー核に対応する. 非存在の証明には Fefferman の不変式論の一般化 [H] を用いる. Fefferman は境界 $\partial\Omega$ の CR 不変量だけを考えたが, ここでは境界 $\partial\Omega$ とその定義関数 r の対 (Ω, r) の双正則不変量を考える. ソボレフ・ベルグマン核は対 (Ω, r) から決まり, その漸近展開は (Ω, r) の双正則不変量を用いて書き下すことができる (定理 5.2). この漸近展開表示が定理 1 の証明の主要な道具である.

この講演で述べる結果は小松玄先生との共同研究 [HK] で得られたものである.

1 ベルグマン核とセゲー核

1.1 ウエイトをもつ双正則変換則　まず変換則をもつ核関数として知られているベルグマン核とセゲー核について復習する. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の通常のル

ベーグ測度に関する自乗可積分正則関数のなすヒルベルト空間を $H_0(\Omega)$ とする．$H_0(\Omega)$ の完全正規直交系 $\{h_j\}_j$ に対して級数

$$K^B(z,\overline{w}) = \sum_j h_j(z)\,\overline{h_j(w)}$$

は $\Omega \times \overline{\Omega}$ 上で広義一様収束し $(z,\overline{w})$ に関する正則関数を与える．$K^B(z,\overline{w})$ は$\{h_j\}_j$ の選び方によらず Ω から一意的に定まる．この関数を Ω のベルグマン核とよぶ．以下では主に核関数の対角線 $z=w$ への制限を考え $K^B(z)=K^B(z,\overline{z})$ と書く．また核関数の領域 Ω への依存性を強調するときには $K^{\mathrm{B}} = K^{\mathrm{B}}_{\Omega}$ のように書く．定義から直ちに K^{B} の変換則

$$K^{\mathrm{B}}_{\Omega_1}(z) = K^{\mathrm{B}}_{\Omega_2}(\Phi(z))\,|\det\Phi'(z)|^2$$

が導かれる．ここで $\Phi\colon\Omega_1 \to \Omega_2$ は双正則写像, $\det\Phi'$ はその正則ヤコビアンである．

領域上での積分を境界上での積分に置き換えればセゲー核が定義される．境界 $\partial\Omega$ は滑らかである仮定しその上の体積要素$d\sigma$ を一つ固定する．このとき $d\sigma$ に対して自乗可積分関数で Ω 内の正則関数の L^2 境界値となっているもの全体 $H^2(\partial\Omega,d\sigma):=L^2(\partial\Omega,d\sigma)\cap\mathcal{O}(\Omega)$ はヒルベルト空間をなす．$(\partial\Omega,d\sigma)$ のセゲー核は $H^2(\partial\Omega,d\sigma)$ の完全正規直交系 $\{h_j\}_j$ を用いて

$$K^S(z,\overline{w}) = \sum_j h_j(z)\,\overline{h_j(w)},$$

で与えられる．この定義は $d\sigma$ の選び方に依存している．

Ω の強擬凸性を仮定すれば境界上に双正則不変な体積要素を与えることができる．$\rho\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ を Ω の定義関数, すなわち $\Omega=\{z\in\mathbb{C}^n;\ \rho(z)>0\}$ かつ境界上で $d\rho(z)\neq 0$ を満たすものとする．このとき境界上で

$$d\sigma\wedge d\rho = J[\rho]^{1/(n+1)}\,|dz|^2$$

を満たす体積要素 $d\sigma$ が ρ によらず一意的に定まる．この $d\sigma$ を Ω の**不変体積要素**とよぶ．ここで $J[\cdot]$ は複素 Monge-Ampère 作用素

$$J[\rho] := (-1)^n \det\begin{pmatrix} \rho & \partial\rho/\partial\overline{z}_k \\ \partial\rho/\partial z_j & \partial^2\rho/\partial z_j\partial\overline{z}_k \end{pmatrix}_{j,k=1,\dots,n}$$

である．この $d\sigma$ に関するセゲー核 K^{S} は変換則

$$K^{\mathrm{S}}_{\Omega_1}(z) = K^{\mathrm{S}}_{\Omega_2}(\Phi(z))\,|\det\Phi'(z)|^{2n/(n+1)}$$

を満たす.

これらの変換則を一般化して次のようにウエイトを定義する.

定義 1.1 領域汎関数 $K = (K_\Omega)$ が任意の双正則写像 $\Phi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ に対して

$$K_{\Omega_1}(z) = K_{\Omega_2}(\Phi(z))\,|\det \Phi'(z)|^{2w/(n+1)}$$

を満たす時 K はウエイト w の**変換則**を満たすという.

この定義によれば K^{B}, K^{S} のウエイトは順に $n+1$, n である.

1.2 Fefferman の漸近展開 強擬凸領域のベルグマン核およびセゲー核は境界で無限大に発散しその特異性は定義関数 ρ を用いて

$$K^{\mathrm{B}} = \frac{\varphi^{\mathrm{B}}}{\rho^{n+1}} + \psi^{\mathrm{B}} \log \rho, \qquad K^{\mathrm{S}} = \frac{\varphi^{\mathrm{S}}}{\rho^{n}} + \psi^{\mathrm{S}} \log \rho$$

の形に展開される ([F1], [BS]). ここで $\varphi^{\mathrm{B}}, \psi^{\mathrm{B}}, \varphi^{\mathrm{S}}, \psi^{\mathrm{S}} \in C^\infty([\Omega])$, $[\Omega] := \Omega \cup \partial\Omega$, であり境界の近くでは $\varphi^{\mathrm{B}} \neq 0$, $\varphi^{\mathrm{S}} \neq 0$ が成り立つ.

この展開の係数 $\varphi^{\mathrm{B}}, \psi^{\mathrm{B}}, \varphi^{\mathrm{S}}, \psi^{\mathrm{S}}$ は境界の幾何的な不変量 (CR 不変量) を用いて記述することができる ([F3], [G], [BEG], [HKN], [H]). その具体的な形については 3 章で説明する.

2 ソボレフ・ベルグマン核の構成

H. Boas [B] は $\mathbb{C}^n$ 内の単位球 $\Omega_0 = \{\rho_0 = 1 - |z|^2 > 0\}$ 上の通常のソボレフ内積

$$(h_1, h_2)_{s/2} = \sum_{|\alpha| \le s/2} \int_{\Omega_0} \left(\partial_z^\alpha h_1\right)\overline{\left(\partial_z^\alpha h_2\right)}\,|dz|^2$$

に関するソボレフ・ベルグマン核 $K^s_{\Omega_0}$ を具体的に計算した. とくに $K^s_{\Omega_0}$ は

$$K^s_{\Omega_0}(z, \overline{z}) = \frac{\varphi_s}{\rho_0^{n-s+1}} + \psi_s \log \rho_0$$

という展開を持ち, $s > 0$ であれば $\psi_s \neq 0$ である. $K^s_{\Omega_0}$ は $s > 0$ ではウエイトを持った双正則変換則を満たさない. 実際 Ω_0 には正則自己同型群が推移的に作用するのでウエイト w をもつ変換則を満たす核函数は ρ_0^{-w} の定数倍になる. これは $\psi_s \neq 0$ に反する.

従って変換則を満たすソボレフ・ベルグマン核を構成するには通常のソボレフ内積を使うことはできない. 今のところ大域的なソボレフノルムをどのよう

に定義すればよいのかは分かっていない．ここではソボレフ内積に関する再生性を超局所化しソボレフ・ベルグマン核を定義する．まずその基礎となる柏原[K] の結果を復習する．この章では境界 $\partial\Omega$ および定義関数 $\rho(z)=\rho(z,\overline{z})$ は常に実解析的であると仮定する．

2.1 柏原によるベルグマン核の超局所解析 Ω のベルグマン核の特異性は各境界点 $p\in\partial\Omega$ で局所的に決定される．すなわち Ω' を p の十分小さな近傍 $U\subset\mathbb{C}^n$ に対して $\Omega\cap U=\Omega'\cap U$ を満たす強擬凸領域でとすれば $K_\Omega-K_{\Omega'}\in C^\omega(U)$ が成り立つ．この K^{B} の特異性は次の2つの条件で特徴づけることができる:

(i) $K^{\mathrm{B}}(z,\overline{w})$ は次の形の展開をもつ:

$$K^{\mathrm{B}}(z,\overline{w})=\varphi(z,\overline{w})\rho^{-n-1}(z,\overline{w})+\psi(z,\overline{w})\log\rho(z,\overline{w})$$

ここで $\varphi(z,\overline{w}),\psi(z,\overline{w})$ は $(z,\overline{w})\in U\times\overline{U}$ の正則関数.

(ii) 任意の $f(z)\in H_0(\Omega\cap U)$ に対して

$$\int_{\Omega\cap U}K^{\mathrm{B}}(z,\overline{w})\,f(w)\,|dw|^2=f(z)\qquad\mathrm{mod}\ \mathcal{O}(U)$$

が成り立つ; すなわち両辺の差は U で正則である．

この二つの条件をみたす核関数を**局所ベルグマン核**とよぶ．

命題 2.1. 局所ベルグマン核は mod $\mathcal{O}(U\times\overline{U})$ で一意的である．よって条件 (i), (ii) はミクロ関数を定める．

柏原 [K] は局所ベルグマン核を特徴付ける単純ホロノミー系を具体的に与えた．柏原の定理を述べるために記号の準備をする．整数 m に対して次のような特異性を考える:

$$K=\begin{cases}\varphi\rho^{-m}+\psi\log\rho & \text{if }\ m>0,\\ \varphi\rho^{-m}\log\rho & \text{if }\ m\le 0,\end{cases}\tag{2.1}$$

ここで φ と ψ は $(z,\overline{z})$ の $(p,\overline{p})\in\mathbb{C}^n\times\overline{\mathbb{C}^n}$ の近傍での正則関数で $\varphi(p,\overline{p})\neq 0$ をみたすもである．このような特異性の全体のなす集合を $\mathcal{C}_p^\times$ と書く (すなわち $\mathcal{C}_p^\times$ の元は $\rho=0$ を台とする非退化正則ミクロ関数である)．領域 Ω への依存性を明示するときには $\mathcal{C}_{(\Omega,p)}^\times$ とも書く．一般論により各 $K\in\mathcal{C}_p^\times$ と $(p,d_z\rho)\in T^*\mathbb{C}^n$ の近傍で定義された任意のミクロ微分作用素 $P=P(z,\partial_z)$ に対して $(\overline{p},d_{\overline{z}}\rho)\in T^*\overline{\mathbb{C}^n}$ の近傍で定義されたミクロ微

分作用素 $Q = Q(\overline{z}, \partial_{\overline{z}})$ で $PK = QK$ を満たすものがただ一つ存在する．とくに $P(z, \partial_z)$ として $z_1, \ldots, z_n, \partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_n}$ をとれば $2n$ 個の関係式

$$(2.2) \qquad \begin{cases} z_j K = Q_j(\overline{z}, \partial_{\overline{z}})K, \\ \partial z_j K = Q_{n+j}(\overline{z}, \partial_{\overline{z}})K, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, n,$$

がえられる．これを方程式系とみれば K がその定数倍を除いて一意的な解になっている．(2.2) 式の両辺のミクロ微分作用素の随伴作用素をとれば方程式系

$$(2.3) \qquad \begin{cases} z_j \widehat{K} = Q_j^*(\overline{z}, \partial_{\overline{z}})\widehat{K}, \\ -\partial z_j \widehat{K} = Q_{n+j}^*(\overline{z}, \partial_{\overline{z}})\widehat{K}, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, n.$$

$K = \log \rho(z, \overline{z})$ $\xrightarrow{\text{formal adjoint}}$ Bergman

$\widehat{K} = \delta \rho \longrightarrow$ Szegö

がえられる．

柏原の定理 ([K])**.** 関係式 (2.2) を $K = \log \rho$ について考える．このとき局所ベルグマン核 K^{B} は方程式系 (2.3) の定数倍を除いて一意的な解である．

この定理は超局所再生性 (ii) をミクロ微分作用素の言葉に翻訳 (量子化) している．

以上の議論はセゲー核に対しても成り立つ．このとき (ii) での積分は境界積分に, 柏原の定理での $K = \log \rho$ を $K = \rho^{-1}$ に置き換える必要がある．定義関数 ρ の選び方が境界上の体積要素の選び方に対応する: すなわち一変数のデルタ関数 $\delta(x)$ に対して

$$\int_{\partial\Omega} f(z, \overline{z}) d\sigma = \int_{\mathbb{C}^n} f(z.\overline{z}) \delta(\rho(z, \overline{z})) |dz|^2$$

が成り立つように ρ を選ぶ必要がある．後で構成する Feffeman の定義関数はこの条件を満たしている．

任意の $K \in \mathcal{C}_p^{\times}$ に対して可逆な z 変数のミクロ微分作用素 $A(z, \partial_z)$ で

$$K(z, \overline{z}) = A(z, \partial_z) \log \rho(z, \overline{z})$$

をみたすものが一意的に存在する． このとき方程式系 (2.3) の解は $\widehat{K}(z, \overline{z}) = A^*(z, \partial_z)^{-1} K^{\mathrm{B}}(z, \overline{z})$ で与えられる．この対応

$$\mathcal{C}_p^{\times} \ni K \mapsto \widehat{K} \in \mathcal{C}_p^{\times}$$

を**柏原変換**とよぶ．定義から明らかなように $\widehat{\widehat{K}} = K$ が成り立つ．

定義. 領域 Ω の実解析的な定義関数 ρ および整数 s に対して $\rho^{\langle -s\rangle}$ の柏原変換 $K^s[\rho]=\widehat{\rho^{\langle -s\rangle}}$ をρ に関する**指数** $s/2$ **の局所ソボレフ・ベルグマン核**とよぶ. ただし

$$\rho^{\langle k\rangle}=\begin{cases}\rho^k & \text{if } k<0,\\ \rho^k\log\rho & \text{if } k\geq 0.\end{cases}$$

とくに $K^0[\rho]$ はベルグマン核, $K^1[\rho]$ はセゲー核である. 単純ホロノミー系の一般論により $K^s[\rho]$ は $m=n-s+1$ に対して (2.1) の形の展開をもつことが分かる.

2.2 双正則変換則 $K^s[\rho]$ の双正則変換則を調べる.

補題 2.2. 双正則写像 $\Phi\colon\Omega_1\to\Omega_2$ と $K_1\in\mathcal{C}^{\times}_{(\Omega_1,p)}$, $K_2\in\mathcal{C}^{\times}_{(\Omega_2,\Phi(p))}$ に対し

$$K_1=(K_2\circ\Phi)|\det\Phi'|^{2s/(n+1)}$$

が成り立つための必要十分条件は

$$\widehat{K}_1=(\widehat{K}_2\circ\Phi)|\det\Phi'|^{2w(s)/(n+1)}$$

である. ただし $w(s)=n-s+1$.

この補題により $\rho^{\langle -s\rangle}$ がウエイト s の変換則を満たせば $K^s[r]$ はウエイト $w(s)$ の変換則をみたすことが分かる. 次に $\rho^{\langle -s\rangle}$ が変換則を満たすように定義関数を選ぶ方法を説明する.

Fefferman→ **命題 2.3.** (i) 強擬凸領域 Ω の滑らかな定義関数 r で $J[r]=1+O(r^{n+1})$ を満たすものが mod $O(r^{n+2})$ で一意的に存在する. この定義関数を **Fefferman の定義関数**とよぶ.

(ii) Fefferman の定義関数は mod $O(r^{n+2})$ でウエイト -1 の変換則を満たす. すなわち補題 2.2 と同じ記号のもと

$$r_1=(r_2\circ\Phi)|\det\Phi'|^{-2/(n+1)}\quad \mathrm{mod}\ O(r_1^{n+2})$$

が成り立つ.

(ii) により $s\in\{0,1,\ldots,n+1\}$ に対して $r^{\langle -s\rangle}$ はウエイト s の変換則を満たすことがわかる. よって補題 2.2 より $K_s[r]$ はウエイト $w(s)$ の変換則を満たす.

Fefferman の定義関数は次のように具体的に計算することができる. Ω の定義関数 ρ を任意にとり $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{n+1}$ を関係式

$$\rho_1=J[\rho]^{-1/(n+1)}\rho,\qquad \frac{\rho_s}{\rho_{s-1}}=1+\frac{1-J[\rho_{s-1}]}{s(n+2-s)}$$

によって定義する．このとき $J[\rho_s]=1+O(\rho^s)$ が成り立ち，とくに ρ_{n+1} はFefferman の定義関数になっている．

Fefferman の定義関数は境界から局所的に決定されることに注意する．実解析的強擬凸超曲面は正則座標変換により

$$\rho_A = 2u - |z'|^2 - \sum_{l\geq 0,|\alpha|,|\beta|\geq 2} A^l_{\alpha\overline{\beta}}\, z'^{\alpha}\, \overline{z'}^{\beta}\, v^l = 0,$$

ただし $z=(z',z_n)\in\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$, $z_n=u+iv$, に移すことができる．テーラー係数のリストを $A=(A^l_{\alpha\overline{\beta}})$ とおきこの曲面 (の芽) を $N(A)$ と書く．定義関数 $\rho=\rho_A$ から始めて $r_A=\rho_{n+1}$ を構成すれば次の展開をえる:

$$r_A(z,\overline{z}) = \sum_{j=1}^{n+1} P_j(A;z',\overline{z}',v)\rho_A^j + O(\rho_A^{n+2}),$$

ここで $P_j(A;z',\overline{z}',v)\in\mathbb{C}[A][[z',\overline{z}',v]]$, すなわち A の多項式を係数とする $(z',\overline{z}',v)$ の形式的冪級数である (今の場合は収束している)．さらに $K^s[r_A]$ の (2.1) の形の展開を $\rho=\rho_A$ について考えればその係数 φ,ψ は $\mathbb{C}[A][[z',\overline{z}',v,\rho_A]]$ に属することがわかる．

今まで説明した $K^s[r]$ の性質をまとめて局所不変ソボレフ・ベルグマン核の定義を与える．

定義． 実解析的な境界をもつ強擬凸領域 Ω に対する領域汎関数 $K=(K_\Omega)$ で次の 3 つの条件を満たすものを**指数** $s/2$ **の局所不変ソボレフ・ベルグマン核**という．

条件 1（超幾何的特異性） K_Ω は Ω の定義関数 ρ に対して (2.1) の形の漸近展開をもつ;

条件 2（双正則不変性） K_Ω はウエイト $w(s)$ の変換則を満たす;

条件 3（多項式的依存性） $\partial\Omega$ が原点の近傍で $N(A)$ の形であるとき K_Ω の ρ_A に関する(2.1) の形の展開の係数 φ,ψ は $\mathbb{C}[A][[z',\overline{z}',v,\rho_A]]$ に属する．

$s\in\{0,1,\ldots,n+1\}$ のとき r に関する指数 $s/2$ の局所ソボレフ・ベルグマン核 $K^s[r]$ がこの 3 つの条件を満たしている．この s に関する条件が局所ソボレフ・ベルグマン核が存在するための必要条件でもある．

定理 1． 指数 $s/2$ の局所不変ソボレフ・ベルグマン核が存在する必要十分条件は $s\in\{0,1,\ldots,n+1\}$ である．

この定理の証明には不変式論についての詳しい結果が必要である．証明については 4 章で説明する．

3 Fefferman の不変式論

局所不変ソボレフ・ベルグマン核に Fefferman の不変式論を適用する.

領域 Ω のアンビエント計量 $g = g[r]$ は $\mathbb{C}^* \times \partial\Omega \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ の近傍上で $r_\#(z_0, z) = |z_0|^2 r(z)$, ただし r は Fefferman の定義関数, をポテンシャルとして定義される Lorentz-Kähler 計量

$$g = \sum_{j,k=0}^{n} g_{j\bar{k}}\, dz_j d\bar{z}_k = \sum_{j,k=0}^{n} \frac{\partial^2 r_\#}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j d\bar{z}_k.$$

である. $R = R[r]$ を g の曲率テンソル, $R^{(p,q)} = \overline{\nabla}^{q-2}\nabla^{p-2}R$ をその共変微分とする. このとき $R^{(p,q)}$ のいくつかのテンソル積の $g[r]$ に関する完全縮約

$$W_\# = \mathrm{contr}\Big(R^{(p_1,q_1)} \otimes \cdots \otimes R^{(p_m,q_m)}\Big),$$

ただし $\sum p_l = \sum q_l = 2(m+w)$, をウエイト w の**ワイル多項式**とよぶ. さらに同じウエイトをもつワイル多項式の 1 次結合もワイル多項式とよぶことにする. ワイル多項式 $W_\#$ は Fefferman の定義関数 r を与えるごとに $\mathbb{C}^* \times \partial\Omega$ の近傍での滑らかな関数 $W_\#[r]$ を与える. よって $W[r] := W_\#[r]|_{z_0=0}$ は $\partial\Omega$ の近傍で定義された関数である. この対応 $r \mapsto W[r]$ を**ワイル不変量**とよぶ.

補題 3.1. 双正則写像 $\Phi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ に対して Ω_j の定義関数 r_j がウエイト -1 の変換則をみたすとする. このときウエイト w のワイル不変量 W はウエイト w の変換則

$$W[r_1] = (W[r_2] \circ \Phi)|\det \Phi'|^{2w/(n+1)}$$

を満たす.

この変換則を見ればウエイトをもつ核関数はワイル不変量を係数として Fefferman の定義関数 r の冪に展開できると期待できる. [F3], [BEG] はベルグマン核に対してはそのような展開が少なくとも最初の n 項に対しては可能であることを示した. その一般化として次の定理が得られる.

定理 3.2. 局所ソボレフ・ベルグマン核は $K^s[r]$ はつぎの展開をもつ

$$K^s[r] = \sum_{j=0}^{n} W_j^s[r]\, r^{\langle j-w(s)\rangle} \qquad \mathrm{mod}\ O(r^{\langle n+1-w(s)\rangle}), \tag{3.1}$$

ここで W_j^s はウエイト j のワイル不変量である.

この定理で展開が n 次で止まるのは Fefferman の定義関数が一意的には決まらないという障害に起因している. この障害の克服法は 5 章で説明する.

ウエイト 0 のワイル不変量は定数のみ, ウエイト 1 のワイル不変量は 0 のみ, ウエイト 2 のワイル不変量は $\|R\|^2$ の定数倍である. したがって $W_0^s = 1$ となるように $K^s[r]$ を正規化しておけば展開 (3.1) は

$$W_1^s = 0, \quad W_2^s = c^s(n)\|R\|^2|_{z_0=1},$$

で与えられる. ここで $c^s(n)$ は領域によらない普遍定数である.

命題 3.3. $c^s(n)$ は $s \neq n-1, n$ の場合は

$$c^s(n) = \frac{1}{24(n-s-1)(n-s)},$$

$c^{n-1}(n) = -1/24$, $c^n(n) = 1/24$ である.

二次元の場合に限ればさらに詳しい計算結果が知られている ([HK]).

4 定理 1 の証明について

定理 1 の証明は Fefferman の定義関数より正確な変換則を満たす多項式的依存性をもつ定義関数の非存在の証明に帰着される. 問題の設定を正確に述べるためにいくつかの定義をする.

自然数 m に対し $\mathcal{F}^m$ を次の形の形式的冪級数全体のなす集合とする:

$$r(A; z, \overline{z}) = \sum_{j=1}^{m} P_j(A; z', \overline{z}', v)\rho_A^j, \quad P_1(0; 0, 0) \neq 0,$$

ここで $P_j(A; z', \overline{z}', v) \in \mathbb{C}[A][[z', \overline{z}', v]]$ である. $\mathcal{F}^m$ の元は $N(A)$ の形式的な定義関数である. さらに $\mathcal{F}^m_{\mathrm{inv}} \subset \mathcal{F}^m$ を $r(A; z, \overline{z}) \in \mathcal{F}^m$ でウエイト -1 の変換則

$$r(A; z, \overline{z}) = r(\widetilde{A}; \widetilde{z}, \overline{\widetilde{z}})|\det \Phi'(z)|^{-2/(n+1)} + O(\rho_A^{m+1})$$

を満たすもの全体のなす部分集合とする. ここで $\widetilde{z} = \Phi(z)$ は $\Phi(N(A)) = N(\widetilde{A})$, $\Phi(0) = 0$ を満たす双正則写像全体を動く.

Fefferman の定義関数の $(z', \overline{z}', v, \rho_A)$ に関するテーラー展開の ρ_A について $n+1$ 次までの部分和は $\mathcal{F}^{n+1}_{\mathrm{inv}}$ の元を与える. よって $m \leq n+1$ に対して $\mathcal{F}^m_{\mathrm{inv}} \neq \emptyset$ である. 次の定理はこの m の評価が最良であることを主張している.

定理 2. $\mathcal{F}_{\mathrm{inv}}^{n+2} = \emptyset$.

定理 2 を用いた定理 1 の証明. $s < 0$ の局所ソボレフ・ベルグマン核 $K^s = \varphi\rho^{-w(s)} + \psi\log\rho$ が存在したとすると $r = \varphi^{1/w(s)}\rho$ は mod $O(\rho^{n+3})$ で局所的でありウエイト -1 の変換則をみたす. 従って$N(A)$ に関する r を ρ_A について $n+2$ 次までテーラー展開すれば $\mathcal{F}_{\mathrm{inv}}^{n+2}$ の元が得られる. これは定理 2 に反する. $s > n+1$ の局所ソボレフ・ベルグマン核 K^s が存在すればその柏原変換 $\widehat{K}^s$ は $s < 0$ の局所ソボレフ・ベルグマン核である. よって $s < 0$ の場合に帰着できる.

5 双正則不変な定義関数族

定理 2 の主張するように $n+1$ 次以上の正確さで変換則を満たす (多項式的依存性をもつ) 定義関数は存在しない. これが局所ソボレフ・ベルグマン核の存在の障害となっている. よって一般にはソボレフ・ベルグマン核は領域汎関数と考えるより定義関数に関する汎関数, あるいは定義関数の不変量と見る方が自然である. 実際 $r \mapsto K^s[r]$ は領域によらない非線形偏微分作用素である. そこで定義関数を指定することをあきらめ定義関数の族を考えることにする. その族はできる限り小さい方がよい.

5.1 定義関数族の構成 Ω 上の関数 $u(z)$ に対して $\mathbb{C}^* \times \Omega$ 上の関数を $U(z_0, z) = |z_0|^2 u(z)$ で定義する. このとき

$$J_\#[U] = (-1)^n \det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^j \partial \overline{z}^k}\right)_{0\le j,k\le n}$$

とおけば $J_\#[U] = |z_0|^{2n} J[u]$ が成り立つ. よって方程式 $J[u] = 1$ は $J_\#[U] = |z_0|^{2n}$ と同値である. この方程式の次のような $\mathbb{C}^* \times \partial\Omega$ に沿った漸近解

$$r_\# + r_\# \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cdot (r^{n+1}\log r_\#)^k, \tag{5.1}$$

ただし r は Ω の定義関数, $r_\# = |z_0|^2 r(z)$, $\eta_k \in C^\infty([\Omega])$, を考える.

命題 5.1. 方程式 $J_\#[U] = |z_0|^{2n}$ の (5.1) の形の漸近解が存在する. さらにこの漸近解は境界条件 $X^{n+2} r|_{\partial\Omega} = f \in C^\infty(\partial\Omega)$ によって一意的に決定される. ただし X は $\mathbb{C}^n$ 上の実ベクトル場であり境界に横断的であるもの.

Fefferman の定義関数は $O(r^{n+2})$ の任意性を持っている. 命題 5.1 は次の項 $X^{n+2} r|_{\partial\Omega}$ を指定すれば漸近解が (よって r も) 完全に決定されることを主張している.

Ω に対する漸近解の平滑部分として現れる定義関数 r 全体を $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ とおくと写像

$$\mathcal{F}_{\partial\Omega} \ni r \mapsto X^{n+2}r|_{\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega)$$

は全単射であり $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ のでパラメータ付けを与える．さらに双正則写像 $\Phi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ に対して

$$\mathcal{F}_{\partial\Omega_2} \ni r_2 \mapsto r_1 = (r_2 \circ \Phi)|\det \Phi'|^{-2/(n+1)} \in \mathcal{F}_{\partial\Omega_1}$$

は全単射を与える．すなわち $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ はウエイト -1 の変換則をみたす．

$r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ からアンビエント計量およびワイル不変量を定義する．この一般化されたワイル不変量を用いると核関数の完全な漸近展開がえられる．

定理 5.2. 整数 s および $r \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ に対し $K^s[r]$ は次の展開をもつ:

$$K^s[r] = \sum_{j=0}^{\infty} W_j^s[r]\, r^{\langle j-w(s)\rangle}$$

ここで W_j^s はウエイト j のワイル不変量である．W_j^s は次元 n にのみ依存し Ω および r に依存しない．

とくにベルグマン核 $(s=0)$ の場合は

$$\varphi^{\mathrm{B}}[r] = \sum_{j=0}^{n} W_j[r]\, r^j + O(r^{n+1}), \quad \psi^{\mathrm{B}}[r] = \sum_{j=0}^{\infty} W_{j+n+1}[r]\, r^j$$

という漸近展開になる．

5.2 定理 2 の証明について 境界 $\partial\Omega$ が局所的に $N(A)$ の形になっているとする．このとき $r \in \mathcal{F}_{\mathrm{inv}}^m$ を $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ に関して展開することができる．

命題 5.3. 任意の自然数 m と $r \in \mathcal{F}_{\mathrm{inv}}^m$ に対しワイル不変量 $W_0, W_1, \ldots, W_m$ が存在して

$$r(A; z, \overline{z}) = \sum_{j=1}^{m} W_{j-1}[r]\, r^j + O(r^{m+1})$$

がすべての A および $r \in \mathcal{F}_{N(A)}$ に対して成り立つ．

この命題により不変定義関数の構成は $\sum_{j=1}^{m} W_{j-1}[r]\, r^j$ の形の有限和の $r \in \mathcal{F}_{N(A)}$ への依存性を調べるという問題に帰着される．ワイル不変量の性質を調べることにより $m = n+2$ に対してはこのような和で $O(r^{n+3})$ で r に依存しないものは存在しないことがわかり $\mathcal{F}_{\mathrm{inv}}^{n+2} = \emptyset$ が導かれる．

参考文献

[BEG] T. N. Bailey, M. G. Eastwood and C. R. Graham, *Invariant theory for conformal and CR geometry,* Ann. of Math. **139** (1994), 491–552.

[Bo] H. P. Boas, *Holomorphic reproducing kernels in Reinhardt domains,* Pacific J. Math. **112** (1984), 273–292.

[BS] L. Boutet de Monvel et J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*, Soc. Math. de France, Astérisque **34–35** (1976), 123–164.

[F1] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains,* Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[F2] C. Fefferman, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. **103** (1976), 395–416; *Correction*, ibid., **104** (1976), 393–394.

[F3] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis,* Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[G] C. R. Graham, *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel*, Complex analysis II, Lecture Notes in Math., vol. 1276, Springer, 1987.

[H] K. Hirachi, *Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel*, Ann. of Math. to appear.

[HK] K. Hirachi and G. Komatsu, *Local Sobolev–Bergman kernels of Strictly Pseudoconvex Domains*, in "Analysis and Geometry in Several Complex Variables", Trends in Math., pp. 64–96, Birkhüser, 1999.

[HKN] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, *CR invariants of weight five in the Bergman kernel*, Adv. in Math. **143** (1999), 185–250.

[K] M. Kashiwara, *Analyse micro-locale du noyau de Bergman* Sém. Goulaouic-Schwartz, École Polytech., Exposé n° VIII, 1976–77.

函数論メーリングリスト

1) １９９６年３月に函数論メーリングリストを開設して以来２００名以上の登録者がいて、順調に運営されています．このメーリングリストは電子メールを用いて函数論の研究者どうしの連絡をとりあうことが主な目的です．現在では研究集会、シンポジウム、セミナーなどの連絡も主に函数論メーリングリストを通じておこなわれています．

   函数論メーリングリストへの登録や登録の解除はどなたでも自由におこなえます．

2) **メーリングリストへの登録方法**

   メーリングリストへ登録するためには次のメールアドレス

   majordomo@math.sci.yamaguchi-u.ac.jp

   に本文の内容を

   subscribe ca-ml
   end

   と書いたメールを送ってください．自動的に登録されます．ご不明な点がございましたら下記の問合せ先へお尋ねください。

   函数論メーリングリストへのメールの投稿方法などの詳しい情報はメーリングリストへ登録をおこなった方へ、登録されたことの報告とともにメールで送られます．

3) 冒頭に書きましたように現在の登録者数は２００名をこえています．ですがこの数字は現在電子メールを使用している函数論研究者の一部であると推測されます．どうか、近隣の方で未登録の方がおられましたら登録をお勧めください．

4) 函数論ホームページが京都大学の須川さんにより開設されています．ホームページのURL は

   http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/complex/

   です．是非ご利用ください．

問合せ先：郷間知巳
gouma@math.sci.yamaguchi-u.ac.jp

特別講演

The geometry of Teichmüller space

Curtis T. McMullen
Harvard University

Let $\mathcal{M}_{g,n}$ be the moduli space of Riemann surfaces of genus g with n punctures.

From a complex perspective, moduli space is hyperbolic. For example $\mathcal{M}_{g,n}$ is abundantly populated by holomorphic disks of constant curvature -1 in the Teichmüller (=Kobayashi) metric.

When $r = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{g,n}$ is greater than one, however, $\mathcal{M}_{g,n}$ carries no complete metric of bounded negative curvature. Instead Dehn twists give chains of subgroups $\mathbb{Z}^r \subset \pi_1(\mathcal{M}_{g,n})$ $-a \leqq K \leqq -b$ 1 <0 reminiscent of flats in symmetric spaces of rank $r > 1$.

In this talk we will describe a new Kähler metric on moduli space that exhibits its hyperbolic tendencies in a form compatible with higher rank. For details, see [Mc], available at `http://math.harvard.edu/~ctm/papers.html`.

Definitions. Let (M, g) be a Kähler manifold. An n-form α is *d(bounded)* if $\alpha = d\beta$ for some bounded $(n-1)$-form β. The space (M, g) is *Kähler hyperbolic* if:

1. On the universal cover $\widetilde{M}$, the Kähler form ω of the pulled-back metric $\widetilde{g}$ is d(bounded);
2. (M, g) is complete and of finite volume;
3. The sectional curvature of (M, g) is bounded above and below; and
4. The injectivity radius of $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ is bounded below.

Note that (2-4) are automatic if M is compact.

The notion of a Kähler hyperbolic manifold was introduced by Gromov. Examples include compact Kähler manifolds of negative curvature, products of such manifolds, and finite volume quotients of Hermitian symmetric spaces with no compact or Euclidean factors [Gr].

Theorem 1 (Kähler hyperbolic) *The Teichmüller metric on moduli space is comparable to a Kähler metric $g_{1/\ell}$ such that $(\mathcal{M}_{g,n}, g_{1/\ell})$ is Kähler hyperbolic.*

Corollary 2 $\lambda_0(\mathcal{T}_{g,n}) > 0$ *in the Teichmüller metric.*

The Euler characteristic. Gromov shows the Laplacian on the universal cover $\widetilde{M}$ of a Kähler hyperbolic is also positive on p-forms, so long as $p \neq n = \dim_{\mathbb{C}} M$. The L^2-cohomology of $\widetilde{M}$ is therefore concentrated in the middle dimension n. Atiyah's L^2-index formula for the Euler characteristic (generalized to complete manifolds of finite volume and bounded geometry by Cheeger and Gromov [CG]) then yields

$$\operatorname{sign} \chi(M^{2n}) = (-1)^n.$$

In particular Chern's conjecture on the sign of $\chi(M)$ for closed negatively curved manifolds holds in the Kähler setting. See [Gr, §2.5A].

For moduli space we obtain:

Corollary 3 *The orbifold Euler characteristic of moduli space satisfies $\chi(\mathcal{M}_{g,n}) > 0$ if $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{g,n}$ is even, and $\chi(\mathcal{M}_{g,n}) < 0$ if $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{g,n}$ is odd.*

This corollary was previously known by explicit computations. For example the Harer-Zagier formula gives

$$\chi(\mathcal{M}_{g,1}) = \zeta(1-2g)$$

for $g > 2$, and this formula alternates sign as g increases [HZ].

The $1/\ell$ metric. For any closed geodesic γ on S, let $\ell_\gamma(X)$ denote the length of the corresponding hyperbolic geodesic on $X \in \mathrm{Teich}(S)$. The $1/\ell$ *metric* $g_{1/\ell}$ is then defined, for suitable small ϵ and δ, by its Kähler form

$$\omega_{1/\ell} = w_{\mathrm{WP}} - i\delta \sum_{\ell_\gamma(X)<\epsilon} \partial\overline{\partial} \,\mathrm{Log}\, \frac{\epsilon}{\ell_\gamma}. \qquad (1)$$

The sum above is over primitive short geodesics γ on X; at most $3|\chi(S)|/2$ terms occur in the sum.

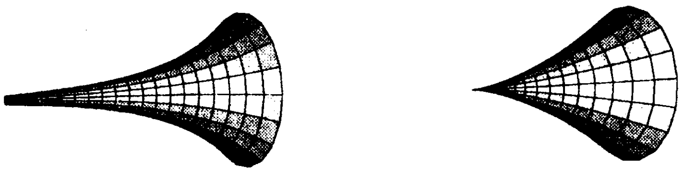

Figure 1. The cusp of moduli space $\mathcal{M}_{1,1}$ in the Teichmüller and Weil-Petersson metrics.

A quasifuchsian primitive for the Weil-Petersson form. The Weil-Petersson metric on moduli space is convex but incomplete, and its curvature tends to $-\infty$ (see Figure 1). Nevertheless the Weil-Petersson symplectic form ω_{WP} is d(bounded), and it serves as our point of departure for the construction of the Kähler hyperbolic metric $g_{1/\ell}$. To describe a bounded primitive for ω_{WP}, recall that the *Bers embedding*

$$\beta_X : \mathrm{Teich}(\overline{S}) \to Q(X) \cong \mathrm{T}^*_X \,\mathrm{Teich}(S)$$

sends Teichmüller space to a bounded domain in the space of quadratic differentials on X.

Theorem 4 *For any fixed $Y \in \mathrm{Teich}(\overline{S})$, the 1-form*

$$\theta_{\mathrm{WP}}(X) = -\beta_X(Y)$$

is bounded in the Teichmüller and Weil-Petersson metrics, and $d(i\theta_{\mathrm{WP}}) = \omega_{\mathrm{WP}}$.

The complex projective structures on X are an affine space modeled on $Q(X)$, and we can also write

$$\theta_{\mathrm{WP}}(X) = \sigma_F(X) - \sigma_{QF}(X,Y),$$

where $\sigma_F(X)$ and $\sigma_{QF}(X,Y)$ are the Fuchsian and quasifuchsian projective structures on X (the latter coming from Bers' simultaneous uniformization of X and Y). Theorem 4 is inspired by the formula

$$d(\sigma_F(X) - \sigma_S(X)) = -i\omega_{\mathrm{WP}} \qquad (2)$$

discovered by Takhtajan and Zograf, where the projective structure $\sigma_S(X)$ comes from a Schottky uniformization of X [Tak, Thm. 3], [TZ]; see also [Iv1].

Our proof of Theorem 4 is quite different and invokes a new duality for Bers embeddings.

Theorem 5 (Quasifuchsian reciprocity) *Given* $(X, Y) \in \mathrm{Teich}(S) \times \mathrm{Teich}(\overline{S})$, *the derivatives of the Bers embeddings*

$$\begin{aligned} D\beta_X : \mathrm{T}_Y \,\mathrm{Teich}(\overline{S}) &\to \mathrm{T}^*_X \,\mathrm{Teich}(S) \quad \textit{and} \\ D\beta_Y : \mathrm{T}_X \,\mathrm{Teich}(S) &\to \mathrm{T}^*_Y \,\mathrm{Teich}(\overline{S}) \end{aligned}$$

are adjoint linear operators; that is, $D\beta^*_X = D\beta_Y$.

More generally we show:

Theorem 6 (Kleinian reciprocity) *Let* $X = \Omega/\Gamma$ *be the quotient Riemann surface for a finitely generated Kleinian group* Γ, *and let* $\mu, \nu \in M(X)$ *be a pair of sufficiently smooth Beltrami differentials. Then we have:*

$$\int_X \phi_\mu \, \nu = \int_X \phi_\nu \, \mu,$$

where $\phi_\mu, \phi_\nu \in L^1(X, dz^2)$ *give the projective distortions of* μ *and* ν.

Here ϕ_μ is essentially the Schwarzian derivative of an infinitesimal *quasiconformal* map. It is defined by

$$\phi_\mu = \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \, dz^2,$$

where $\overline{\partial} v = \mu$.

References

[CG] Jeff Cheeger and Mikhael Gromov. On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume. In *Differential Geometry and Complex Analysis*, pages 115–154. Springer-Verlag, 1985.

[Gr] M. Gromov. Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory. *J. Diff. Geom.* **33**(1991), 263–292.

[HZ] J. L. Harer and D. Zagier. The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Invent. Math.* **85**(1986), 457–485.

[Iv1] N. V. Ivanov. Projective structures, flat bundles and Kähler metrics on moduli spaces. *Math. USSR Sbornik* **61**(1988), 211–224.

[Iv2] N. V. Ivanov. The rank of Teichmüller modular groups. *Math. Notes* **44**(1988), 829–832.

[Iv3] N. V. Ivanov. *Subgroups of Teichmüller Modular Groups.* American Math. Society, 1992.

[Mas] H. Masur. The extension of the Weil-Petersson metric to the boundary of Teichmüller space. *Duke Math. J.* **43**(1976), 623–635.

[Mc] C. McMullen. The moduli space of Riemann surfaces is Kähler hyperbolic. *Preprint, 1998.*

[Mum] D. Mumford. A remark on Mahler's compactness theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **28**(1971), 289–294.

[TZ] L. A. Takhtadzhyan and P. G. Zograf. On uniformization of Riemann surfaces and the Weil-Petersson metric on Teichmüller and Schottky spaces. *Math. USSR Sbornik* **60**(1988), 297–313.

[Tak] L. A. Takhtajan. Uniformization, local index theory, and the geometry of the moduli spaces of Riemann surfaces and vector bundles. In *Theta Functions — Bowdoin 1987*, volume 49, Part 1 of *Proc. Sympos. Pure Math.* Amer. Math. Soc., 1989.

[Wol1] S. Wolpert. Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves. *Invent. Math.* **85**(1987), 119–145.

[Wol2] S. Wolpert. Geodesic length functions and the Nielsen problem. *J. Diff. Geom.* **25**(1987), 275–296.

http://math.harvard.edu/~cfm/papers.html