日　本　数　学　会

１９９９年度春季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９９年３月

於　学習院大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる．
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する．
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (d) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする．
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

3月27日(土) 第V会場

9:15~12:00

1 西本 勝之 (デカルト出版) * N-fractional calculus and some identities for generalized zeta function ······ 15

2 尾和 重義 (近畿大理工) Notes on starlikeness or convexity of complex order ······ 15

3 須川 敏幸 (京大理) Y. C. Kim (Yeungnam Univ.) * Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions ······ 15

4 戸田 暢茂 (名工大) 石崎 克也 (日本工大工) * A note on uniformly differential algebraic meromorphic functions ······ 15

5 澤田 一成 (都立工業高専) $p(y)=5$ の代数型 Riemann 面について — その Picard 定数の決定法 — ······ 15

6 糸 健太郎 (東工大理工) * Exotic projective structures and boundaries of quasi-Fuchsian spaces · 15

7 宮地 秀樹 (阪市大理) * 一点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の接円座標について ······ 15

8 今吉 洋一 (阪市大理) 伊藤 学 (阪市大理) 山本 寛 (阪市大理) * リーマン面の正則族のモノドロミーと写像類群の元の Nielsen-Thurston-Bers 型の分類 ······ 15

9 小森 洋平 (阪市大理) C. Series (Warwick Univ.) * Pleating coordinates for the Earle embedding ······ 10

10 小森 洋平 (阪市大理) C. Series (Warwick Univ.) * The Riley slice revisited ······ 10

14:15~16:00

11 倉田 久靖 (米子工業高専) The Housdorff dimension of the boundary of a tree ······ 15

12 志賀 啓成 (東工大理) * 複素双曲多様体上の正則写像の剛性と有限性について ······ 15

13 志賀 啓成 (東工大理) * Julia 集合と極限集合の函数論的性質について ······ 10

14 倉 猛 (広島大理) * Riemann 多様体上の p-Green 関数の存在と非存在 ······ 15

15 相川 弘明 (島根大総合理工) 水谷 友彦 (島根大総合理工) * Boundary Harnack principles without exterior condition ······ 15

16 柴田 敬一 (国際自然科学研究所) * 調和写像のエネルギー積分について ······ 15

17 二宮 信幸 ポテンシャル論における最小変分の方法 ······ 15

16:20~17:20 特別講演

西尾 昌治 (阪市大理) α 次放物型作用素に関する調和関数

3月28日(日)　第V会場

10:15~12:00

14:10~15:05

15:20~16:20　特別講演

宮嶋　公夫　(鹿児島大教養)　孤立特異点の変形への CR-解析幾何の応用

1 N-fractional calculus and some identities for generalized Zeta function

Katsuyuki Nishimito Descartes press

Abstract

In this paper N-fractional calculus of generalized Zeta function

$$\zeta(z;a)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(a+m)^z} \qquad (\mathrm{Re}\,z>1,\ a\notin Z_0^-), \tag{1}$$

and some identities for

$$\zeta(z;a)\zeta(z;b) \qquad (a,b>0,\ \mathrm{Re}\,z>1), \tag{2}$$

$$\zeta^p(z;a)=(\zeta(z;a))^p \quad (a>0,\ \mathrm{Re}\,z>1,\ p\in Z^+) \tag{3}$$

and

$$\zeta(pz;a) \quad (a>0,\ \mathrm{Re}\,z>1,\ p\geq 1) \tag{4}$$

etc. are discussed.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5 (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century) ; Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group) , J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1-11.
[4] K. Nishimoto ; N-fractional derivatives and some identities for Rieman's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 43-47.
[5] Japan Math. Soc. (Edit.) ; Mathematical Encyclopedia (1954), 834-846, Iwanami.
[6] E.C. Titchmarsh ; The theory of the Riemann Zeta function (1951), Oxford.
[7] Y. Komatsu ; Special functions (1967),50-63, Asakura.

2 NOTES ON STARLIKENESS OR CONVEXITY OF COMPLEX ORDER

Shigeyoshi OWA (Kinki University)

Let H be the the class of functions $f(z)$ which are analytic in the open unit disk U with $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. For $f(z) \in H$ and $m \in N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$, Salagean differential operator $D^m f(z)$ is defined by

$$D^0 f(z) = f(z),$$
$$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z),$$

and

$$D^m f(z) = D(D^{m-1} f(z)) \quad (m \geqq 1).$$

Let $T(n)$ be the subclass of H consisting of all functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z - a_{n+1} z^{n+1} - a_{n+2} z^{n+2} - \cdots \quad (a_k \geqq 0,\ n \in N = \{1, 2, \cdots\}).$$

Further, let

$$T(n, m) = \{f \in T(n) : D^m f(z)/z \neq 0 \quad \text{for } z \in U - \{0\}\}.$$

With the class $T(n, m)$ of the functions $f(z)$, we define three subclasses $T(n, m; b)$, $O(n, m; b)$ and $P(n, m; b)$ of $T(n, m)$ for some complex number b with $b \neq 0$, that is,

$$T(n, m; b) = \{f \in T(n, m) : \mathrm{Re}\{1 + (D^{m+1} f(z)/D^m f(z) - 1)/b\} > 0\},$$

$$O(n, m; b) = \{f \in T(n, m) : \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m (k - 1 + |b|) a_k \leqq |b|\},$$

and

$$P(n,m;b) = \{f \in T(n,m): \sum_{k=n+1}^{\infty} k^m((k-1)\mathrm{Re}(b)/|b| + |b|)a_k \leq |b|\}.$$

Our result is contained in

Theorem. Let $n \in N$, $m \in N_0$ and b be complex number with $b \neq 0$.
Then

(i) $O(n,m;b) \subseteq T(n,m;b)$,

(ii) $T(n,m;b) \subseteq P(n,m;b)$,

(iii) if $b > 0$, then $O(n,m;b) = T(n,m;b) = P(n,m;b)$,

(iv) if $b < 0$ or $-n/2 < \mathrm{Re}(b) \leq 0$, then $P(n,m;b) \not\subseteq T(n,m;b)$,

(v) if $b < 0$, then $T(n,m;b) \not\subseteq O(n,m;b)$.

3 NORM ESTIMATES OF THE PRE-SCHWARZIAN DERIVATIVES FOR CERTAIN CLASSES OF UNIVALENT FUNCTIONS

須川 敏幸　　京都大学・理学部

YONG CHAN KIM　　YEUNGNAM UNIVERSITY

単位円板上の一様局所単葉正則函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, つまりある定数 $\rho>0$ に対して単位円板内の任意の半径 $\rho>0$ の双曲円板において単葉であるような正則函数についてその前 Schwarz 微分の双曲ノルム

$$\|T_f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|T_f(z)| < \infty$$

を通して様々な解析的性質について述べることが出来るということを前回の学会で報告した ([1])。

T_f は 1 次函数の後からの合成に関して不変なので以後では $f(0)=f'(0)-1=0$ と正規化された単位円板上の正則函数のみを考える。このような函数全体を $\mathcal{A}$ と表すことにする。

この講演では近接凸函数 (close-to-convex functions) を中心にその具体的なノルム評価について述べることにする。関連する結果が [5] にあるが我々の定式化はそれとは若干異なるものである。(一方が他方に包含されるというわけではない。)

以下は [2] の結果の一部である。まず $\mathcal{M}$ を単位円板 $\mathbb{D}$ 上の単葉函数 φ で $\varphi(z)\neq 0$ かつ $\varphi(0)=1$ を満たすもの全体のなす集合とする。さらに $\mathcal{M}_p$ をその部分族で実部が常に正であるもの全体、$\mathcal{M}_s$ でさらにその部分族で像が 1 に関して星状かつ実軸に関して対称、かつ $\varphi'(0)>0$ を満たすものとする。

$\varphi\in\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}^*(\varphi)$ および $\mathcal{K}(\varphi)$ をそれぞれ条件 $zf'(z)/f(z)\prec\varphi(z)$ および $1+zf''(z)/f'(z)\prec\varphi(z)$ を満たすもの全体として定義する。ここで記号 $\psi\prec\varphi$ はいわゆる subordination を表すものとする。すなわち、ある正則函数 $\omega:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ で $\omega(0)=0$ かつ $\psi=\varphi\circ\omega$ を満たすものが存在することを言う。今の場合は φ が単葉だからこの条件は $\psi(0)=\varphi(0)$ かつ $\psi(\mathbb{D})\subset\varphi(\mathbb{D})$ に等しい。さらに $\psi,\varphi\in\mathcal{M}$ としたとき $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ をある $h\in\mathcal{K}(\varphi)$ が存在して $f'/h'\prec\psi$ となるもの全体として定義する。

これらは星状函数、凸函数、近接凸函数の定義を一般化したものになっている。特に $\psi,\varphi\in\mathcal{M}_p$ ならば $\mathcal{S}^*(\varphi),\mathcal{K}(\varphi),\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ は単葉函数族 $\mathcal{S}$ に含まれる。また、$f\in\mathcal{S}^*(\varphi)$ とすればその Alexander 変換 $g(z)=\int_0^z t^{-1}f(t)dt$ は $\mathcal{K}(\varphi)$ に属するから $zf'/f=f'/g'\in\varphi$ より実は $\mathcal{S}^*(\varphi)\subset\mathcal{C}(\varphi,\varphi)$ となっている。従って、以下では $\mathcal{K}(\varphi),\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ に対して評価を与えることを考える。

$\varphi\in\mathcal{M}$ に対して $h_\varphi,k_\varphi\in\mathcal{A}$ を関係式

$$\frac{zh_\varphi'(z)}{h_\varphi(z)}=\varphi(z),\quad 1+\frac{zk_\varphi''(z)}{k_\varphi'(z)}=\varphi(z),$$

を満たすものとして定義すると、容易に想像されるようにしばしばこれらの函数が上記の族において極値函数としての役割を果たす。例えば [3] を参照されたい。実際、我々は次の結果を得る。

定理 1. $\varphi \in \mathcal{M}_s$ **ならば任意の** $f \in \mathcal{K}(\varphi)$ **は次の不等式を満たす。**

$$\|T_f\| \leq \|T_{k_\varphi}\|.$$

形からこの評価は best possible である。$\|T_{k_\varphi}\|$ の値は個々の φ に対して計算するしかない。少なくとも $\|T_{k_\varphi}\| \leq 4$ が成り立つことは注意しておく（以下の例で $A=1, B=-1$ とした場合）。

次に $\mathcal{C}(\psi,\varphi)$ に対しては次の結果を得る。ただし、一般には sharp かどうかは分からない。

定理 2. $\psi \in \mathcal{M}$ **かつ** $\varphi \in \mathcal{M}_s$ **とすると、任意の** $f \in \mathcal{C}(\psi,\varphi)$ **に対して次の評価式が成り立つ。**

$$\|T_f\| \leq V_{\mathbb{D}}(\psi) + \|T_{k_\varphi}\|.$$

ただしここに $V_{\mathbb{D}}(\psi) = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|\psi'(z)/\psi(z)|$ とする。

この量 $V_{\mathbb{D}}(\psi)$ については $\psi \in \mathcal{M}_p$（より一般に Gelfer 函数 ψ）に対して不等式 $V_{\mathbb{D}}(\psi) \leq 2$ が成り立つことが基本的である。（これが Macintyre の不等式から従うことを最近山下慎二氏から教わった。cf. [4]）応用上はこの値がいつ真に 2 より小さくなるかを知ることが重要であるが、このための十分条件については講演の際に述べることにしたい。また、上に述べたことと合わせてこの結果から $\psi \in \mathcal{M}_p$ に対しては $\|T_f\| \leq 6$ という単葉函数についてよく知られた結果が従うことにも注意しておこう。

上記の設定において具体例として非常に重要となるのが函数 $\varphi_{A,B}(z) = (1+Az)/(1+Bz)$ である（ただしここに $-1 \leq B < A \leq 1$ とする)。これらについては具体的に

$$\|k_{\varphi_{A,B}}\| = \frac{2(A-B)}{1+\sqrt{1-B^2}},$$
$$V_{\mathbb{D}}(\varphi_{A,B}) = \frac{2(A-B)}{1-AB+\sqrt{(1-A^2)(1-B^2)}}$$

と計算できる。この結果から、いくつかの古典的な函数族に関するノルム評価を得る。

REFERENCES

[1] KIM, Y. C. and SUGAWA, T. Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk, preprint (1998).

[2] KIM, Y. C. and SUGAWA, T. Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions, preprint (1998).

[3] MA, W. and MINDA, D. A unified treatment of some special classes of univalent functions, Proceedings of the Conference on Complex Analysis (eds.Li, Z., Ren, F., Yang, L. and Zhang, S.), International Press Inc. (1992).

[4] YAMASHITA, S. The derivative of a holomorphic function and estimates of the Poincaré density, *Kodai Math. J.*, **15** (1992), 102–121.

[5] YAMASHITA, S. Norm estimates for function starlike or convex of order alpha, to appear in Hokkaido Math. J. (1998).

4 A note on uniformly differential algebraic meromorphic functions

戸田暢茂（名古屋工大）
石崎克也（日本工大）

この講演で登場する函数は複素平面上有理型なものとし、$\mathcal{M}(\mathbb{C})$ は有理型全体の集合とする。$\mathcal{L} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ をある differential field とし、$\mathcal{L}$ の要素を係数に持つ代数的な常微分方程式を考える。即ち

$$(1)\qquad \Omega(z, w, w', \dots, w^{(n)}) = \sum_{I \in \mathcal{I}} a_I(z) w^{i_0} (w')^{i_1} \cdots (w^{(n)})^{i_n} = 0,$$

ここで、$I = (i_0, i_1, \dots, i_n)$ は multindex で $\#\mathcal{I} < \infty$, $a_I \in \mathcal{L}$ である。$\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ が differentially algebraic (DA) over $\mathcal{L}$ であるとは、φ がある (1) のタイプの方程式を満たすことである。函数の集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ が uniformlly differential algebraic (UDA) over $\mathcal{L}$ とは (1) のタイプの方程式があって $\mathcal{F}$ の全ての要素がその方程式を満たしていることである。はじめに微分方程式を与えてその有理型解の集合を考えればそれはもちろん UDA である。たとえば、単項式の集合 $M = \{z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は UDA over $\mathbb{C}$ である。記号等は Rubel [2] などを参照されたい。

f, $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ に対して $T(r, f) = O(T(r, g))$, $r \notin E$ かつ $T(r, g) = O(T(r, f))$, $r \notin E$, $mE < \infty$ が成り立つとき $f \sim g$ と書くことにする。$f \sim f$ は自明, $f \sim g$ のとき $g \sim f$ であり、$h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ とし $f \sim g$, $g \sim h$ ならば $f \sim h$ である。そこで、$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ に対し $\#\{\mathcal{F}/\sim\}$ を考える。

特に、(1) のタイプの微分方程式を与えておき、その有理型解の全体を $\mathfrak{S}_\Omega$ として $\kappa_\Omega = \#\{\mathfrak{S}_\Omega/\sim\}$ を考えたい。例えば、$\Omega(w, w') = w' - (w^2 + 1) = 0$ については $\mathfrak{S}_\Omega = \{i, -i, \tan(z + c), c \in \mathbb{C}\}$ であるから $\kappa_\Omega = 2$ である。一方、$\mathcal{E} := \{e^{\frac{1}{n+1} z^{n+1}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は各要素の対数微分が M に含まれることから $\mathcal{E}$ は UDA over $\mathbb{C}$ であり $\kappa_{\mathcal{E}} = \infty$ である。これは、微分方程式によっては $\kappa_\Omega = \infty$ であることも可能であることを示している。

古典的な Malmquist–Yosida タイプの定理を考えるときには、許容解 (admissible solution) の存在を仮定して議論を進めていく。通常、許容解は係数達よりも増大度の大きな函数解として定義される。しかし、許容解達の間の関係は手つかずであった。

ここでは、Unicityの問題と関わる1つの複素微分方程式について、[1]での結果を用いて得られた次の定理を報告する。

定理. 微分方程式

$$\Omega(z,w,w') = (w')^2 - A(z)(w^2-1) = 0,$$

$(A \in \mathcal{M}(\mathbb{C}))$、について次が成り立つ。

(i) $\#\mathfrak{S}_\Omega = 2,\ 4,$ 或は ∞;

(ii) $\kappa_\Omega = 1$ （$\#\mathfrak{S}_\Omega = 2$ のとき）, $= 2$ （$\#\mathfrak{S}_\Omega = 4,$ 或は ∞ のとき）.

(ii) の証明については、先ず非定数有理型函数解 f, g に対してある定数 c があって

$$f^2 + 2cfg + g^2 = 1 - c^2 \tag{2}$$

を満たすことを示し、次に (2) から $T(r,f) = T(r,g) + O(1)$ を導く。これから (ii) を得る。

References

[1] Ishizaki, K and N. Toda: Unicity theorems for meromorphic functions sharing four small functions. Kodai Math. J., toappear.

[2] Rubel, L. A: Some research problems about algebraic differential equations II. Illinois Jour. Math. **36** (1992), 659–680.

5　$p(y)=5$ の代数型 Riemann 面について

– その Picard 定数の決定法 –

澤田　一成　　　　都立工業高専

Riemann 面 $\boldsymbol{R}$ 上の非定数有理型函数の族を $\mathfrak{M}(\boldsymbol{R})$ と表し，$f\ (\in\mathfrak{M}(\boldsymbol{R}))$ によって取られない値（$\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$）の個数を $p(f)$ と表すとき，

$$P(\boldsymbol{R})=\sup_{f\in\mathfrak{M}(\boldsymbol{R})}p(f)$$

を $\boldsymbol{R}$ の **Picard 定数**という．$\mathbb{C}$ 上の整函数 $S_i(z)\ (i=0,1,2,\cdots,n)$ を係数とする n 次代数方程式

$$S_0(z)\ y^n-S_1(z)\ y^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}(z)\ y+(-1)^nS_n(z)=0$$

で定義される函数 y を **n 価代数型函数**といい，函数 y の固有存在領域を **n 葉代数型 Riemann 面**という．ただし，すべての $S_i(z)$ に共通の零点はないものとし，さらに $S_i(z)/S_j(z)\ (i>j)$ のうち少なくとも 1 つは超越函数であるとする．特に $S_0(z)\equiv1$ である場合，函数 y を**整代数型函数**という．n 葉代数型 Riemann 面 $\boldsymbol{R}$ の Picard 定数については，一般に $2\leqq P(\boldsymbol{R})\leqq 2n$ であることが知られている．

以下，3 価整代数型函数のつくる 3 葉代数型 Riemann 面を考える．与えられた Picard 定数をもつ代数型 Riemann 面を構成する問題に関して次の結果がある；

定理 A ([1]). 方程式

$$y^3-S_1y^2+S_2y-S_3=0$$

で定義される 3 葉代数型面のうち $p(y)=5$ となるのは，次の 3 通りに限る；

$$\boldsymbol{R}_A\begin{cases}S_1=y_1,\\ S_2=y_0e^H+y_2,\\ S_3=y_3,\end{cases}\qquad \boldsymbol{R}_B\begin{cases}S_1=y_0e^H+y_1,\\ S_2=y_2,\\ S_3=y_3,\end{cases}\qquad \boldsymbol{R}_G\begin{cases}S_1=y_0e^H+a_3,\\ S_2=y_1\cdot y_0e^H,\\ S_3=y_2\cdot y_0e^H.\end{cases}$$

ただし，H は $\mathbb{C}$ 上の整函数で $H(0)=0$ である．また，y_0,y_1,y_2,y_3,a_3 は定数であるが，$\boldsymbol{R}_A,\boldsymbol{R}_B$ の場合 $y_0\neq0,y_3\neq0$ であり，$\boldsymbol{R}_G$ の場合 $y_0\neq0,y_2\neq0,a_3\neq0$ である．

さらに，$\boldsymbol{R}_A,\boldsymbol{R}_B,\boldsymbol{R}_G$ の判別式は

$$\begin{aligned}D_{\boldsymbol{R}_A}&=4{y_0}^3e^{3H}+\zeta_2{y_0}^2e^{2H}+\zeta_1y_0e^H+\zeta_0,\\ D_{\boldsymbol{R}_B}&=4y_3{y_0}^3e^{3H}+\zeta_2{y_0}^2e^{2H}+\zeta_1y_0e^H+\zeta_0,\\ D_{\boldsymbol{R}_G}&=y_0e^H\left(\zeta_3{y_0}^3e^{3H}+\zeta_2{y_0}^2e^{2H}+\zeta_1y_0e^H+\zeta_0\right).\end{aligned}$$

ただし，$\zeta_0\ (\neq 0), \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\ (\neq 0)$ は定数である.

定理 A で述べた面の Picard 定数は 5 以上であるが，さらに次の結果がある；

定理 B ([1], [2]). 定理 B で述べた 3 種の面について，$(\zeta_1, \zeta_2) \neq (0,0)$ ならば，その *Picard* 定数は 5 である.

しかしながら，$\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ の場合，その Picard 定数は未だ決定されていない. そのためには次の 3 次方程式が 1 価函数解 f_2 を持つかどうかを調べることが必要となる；

$$
\begin{aligned}
2\left(4{S_1}^3S_3 - {S_1}^2{S_2}^2 - 18S_1S_2S_3 + 4{S_2}^3 + 27{S_3}^2\right){f_2}^3 +& \\
+ 2\left({T_1}^2 - 3T_2\right)\left({S_1}^2 - 3S_2\right)f_2 +& \\
+ \left(2{S_1}^3 - 9S_1S_2 + 27S_3\right)G - \left(2{T_1}^3 - 9T_1T_2 + 27T_3\right) = 0& \quad (1)
\end{aligned}
$$

ただし，$S_i\ (i = 1,2,3)$ は定理 A で述べたものであり，$T_1 = x_0e^L + x_1, T_2 = b_1x_0e^L + x_2, T_3 = x_3, G = Ke^M$ である. この方程式が 3 価代数型函数 f_2 を定義していると考え，この式をもとにして f_2 の除外指数 $\Theta(a, f_2)$ とその総和を計算することによって，f_2 が 1 価に成り得るかどうか，換言すれば，方程式 (1) が 1 次の因数を持つかどうかが結論できる. その際，次の結果が決定的な役割を果たす；

Lemma 1. y についての既約な m 次多項式 $P(z,y)$ と n 次多項式 $Q(z,y)$ に対して，(既約ではない) $m+n$ 次方程式

$$P(z,y)\cdot Q(z,y) = 0$$

で定義される $m+n$ 価代数型函数 y に対して，次の不等式が成り立つ；

$$\sum_a \Theta(a,y) = \sum_a \left\{1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\overline{N}(r,a,y)}{T(r,y)}\right\} \leqq 2\max(m,n).$$

この結果は，超越函数を係数とする代数方程式が既約であるかどうかを調査するのに有効である.

また，この種の問題は，代数型面の Picard 定数を決定する場合だけでなく，代数型面から代数型面への解析写像の存在を調査する場合にも現れる.

参考文献

[1] M. Ozawa and K. Sawada, *Three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five*, Kōdai Math. J. **17** (1994), no. 1, 101–124.

[2] K. Sawada and K. Tohge, *A remark on three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five*, Kōdai Math. J. **18** (1995), no. 1, 142–155.

6 Exotic projective structures and boundaries of quasi-Fuchsian spaces

糸　健太郎　（東京工業大学　理工学研究科）

ここでは閉曲面上の射影構造の空間において，擬フックス群ホロノミーを持つものの配置について調べる．さらにこれを用いて，擬フックス群空間（＝フックス群の擬等角変形空間）の境界のある種の複雑性について言及する．

S を種数 $g>1$ の向き付けられた閉曲面とし，$T(S)$ を S の Teichmüller 空間とする．S 上の射影構造とは $(\hat{\mathbf{C}}, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))$-構造; すなわち，局所的に $\hat{\mathbf{C}}$ をモデルとし，その張り合わせ写像が Möbius 写像であるような極大局所座標系のことである．S 上の (marking 込みの) 射影構造全体 $P(S)$ は $T(S)$ の正則余接バンドルと同一視できる．S 上の射影構造に対して，展開写像 $f:\tilde{S}\to\hat{\mathbf{C}}$ ($\tilde{S}$ は S の普遍被覆) が定まり，この写像が誘導する準同型 $\rho:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ をホロノミー表現と呼ぶ．ここで，射影構造にそのホロノミー表現の共役類を対応させることで，ホロノミー写像

$$hol: P(S)\to V(S)=\mathrm{Hom}(\pi_1(S),\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$$

を定めると，これは局所同相な正則写像であることが知られている．像が擬フックス群となる忠実な表現全体より成る $V(S)$ の部分集合を $QF(S)$ と書き，擬フックス群空間とよぶ．

ここでは，主に $P(S)$ の部分集合 $Q(S)=hol^{-1}(QF(S))$ を考察する．$Q(S)$ の任意の連結成分 Q に対して $hol|Q: Q\to QF(S)$ は双正則写像である．さらに Goldman [2] によるフックス群ホロノミーをもつ射影構造の (grafting を用いた) 特徴付けより，$Q(S)$ の連結成分全体は measured lamination の集合 $\mathcal{ML}(S)$ の整数点全体 $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と 1 対 1 対応がつくことがわかる．ここで

$$\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)=\{\lambda\in\mathcal{ML}(S):\lambda=\sum n_jC_j,\ n_j\in\mathbf{N},\ C_j\text{は単純閉曲線}\}.$$

$Q(S)$ の元で，その展開写像が単射であるものを standard，そうでないものを exotic と呼ぶ．いま $\lambda\in\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する $Q(S)$ の連結成分を $\mathcal{Q}_\lambda$ と書くと，$\mathcal{Q}_0$ は standard な射影構造より成る唯一の連結成分である．

最近 McMullen [4] により exotic な射影構造の列で，$\partial\mathcal{Q}_0$ の点に収束するものの存在が示された．この現象はクライン群における次の現象をたくみに用いることで示される:「代数的極限が幾何学的極限に真に含まれるようなクライン群の表現列が存在する.」関連する論文として，[1], [3] を挙げておく．

注 1. 一方で松崎氏により,「∂Q_0 の点でそのホロノミー表現の像がAPTなしの全退化群となるものに対しては, exotic な元が集積しない」ということが知られている. これは「exotic な元が集積しないような点が, ∂Q_0 において dense に存在する」ことを示している.

ここでは「exotic な射影構造の列がどの成分に含まれているかは, ホロノミー表現の代数的極限が幾何学的極限にどのように含まれているかに依存している」ことに注目して次の定理を得た.

定理 1. 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_\lambda} \neq \emptyset$ が成り立つ. 特に, $P(S)$ における $Q(S)$ の閉包 $\overline{Q(S)}$ は連結である.

さらに, 代数的極限は等しいが, 幾何学的極限が異なるような複数の表現列を組織的に構成する手法を開発することで, 定理 1 は次のように拡張される.

定理 2. 有限集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ で任意の $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ が $i(\lambda_j, \lambda_k) = 0$ をみたすものに対して $\overline{\mathcal{Q}_0} \cap \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_1}} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{Q}_{\lambda_m}} \neq \emptyset$ が成り立つ. ここで $i(\cdot, \cdot)$ は幾何学的交点数を表す.

さて, ホロノミー写像 $hol : P(S) \to V(S)$ は局所同相写像であったから, ∂Q_0 における $Q(S)$ の複雑さは $\partial QF(S)$ の複雑さに遺伝する. ここでは定理 2 の系として, $\partial QF(S)$ の複雑性を示す次の性質を得る.

系 3. 任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対してある点 $[\rho] \in \partial QF(S)$ が存在して, $[\rho]$ の(十分小さな)任意の近傍 U に対して $U \cap QF(S)$ の連結成分は n 個以上となる.

References

[1] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book*, Invent. Math. **126** (1996), 205-214.

[2] W. M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 297-326.

[3] S. P. Kerckhoff and W. P. Thurston, *Non-continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmuller space*, Invent. Math. **100** (1990), 25-47.

[4] C. T. McMullen, *Complex earthquakes and Teichmuller theory*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283-320.

7　一点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の接円座標について

宮地秀樹　（大阪市立大学大学院理学研究科）

一点穴あきトーラスのタイヒミュラー空間の接円座標はタイヒミュラー空間から複素平面 $\mathbb{C}$ への正則な埋め込みの一つである（cf.[3], [2]）．この埋め込みの像 $\mathcal{M}$ はいわゆる，David Wright の絵（D.Wright's figure）として知られている（cf.[5]）．それが $\mathbb{C}$ 内の単連結領域であることは古典的によく知られていることである．最近，Minsky[4] によって，$\mathcal{M}$ がリーマン球面内のジョルダン領域であることが証明された（cf.[1]）．本講演では Minsky と異なる次のような $\mathcal{M}$ の幾何学的性質を与える．

定理　$\mathcal{M}$ は擬円板ではない．

このことは David Wright のプレプリントで本質的に示唆されていたことである（[5, Section 5]）．この講演では彼と別の方法で上の定理を証明する．その証明から，幾何学的有限な群に対応する $\mathcal{M}$ の境界点から $\mathcal{M}$ の内部に入る方向（いわゆるカスプを開く方向）に関する結果と，そのような群に対応する境界点での $\mathcal{M}$ の正則な自己同型のふるまいに関する一結果を得るので，そのことについても述べる予定である．

参考文献

[1] 糸健太郎, 小森洋平, 須川敏幸, 谷口雅彦, Punctured torus groups に対する ending lamination 予想の解決（Y.N.Minsky の仕事から）, Topics in Complex analysis (1998).

[2] 伊藤学, 今吉洋一, 小森洋平, 宮地秀樹, 山本寛, Riemann 面とその変形空間の接円座標およびモジュライ空間, 研究集会資料集 (1998).

[3] I. Kra, Horocyclic coordinates for Riemann surfaces and Moduli spaces I: Teichmüller and Riemann spaces of Kleinian groups, Jour. of Amer. Math. Soc. Vol 3 (1990), p499-578.

[4] Y.N.Minsky, The classification of punctured torus groups, SUNY Preprint (1997).

[5] D.J.Wright, The shape of the boundary of Maskit's embedding of the Teichmüller space of once punctured tori, preprint (1988).

8　リーマン面の正則族のモノドロミーと写像類群の元の Nielsen-Thurston-Bers 型の分類

今吉洋一　大阪市立大・大学院理学研究科
伊藤　学　大阪市立大・大学院理学研究科
山本　寛　大阪市立大・大学院理学研究科

(g,n) 型のリーマン面の正則族を (M,π,S) とする．すなわち，2 次元複素多様体 M，リーマン面 S，および正則写像 $\pi\colon M\to S$ に対して，$\forall t\in S$ 上のファイバー $X_t=\pi^{-1}(t)$ は (g,n) 型のリーマン面で，パラメータ t に関して正則に動くものとする．しかも，$2g-2+n>0$ とする．

(g,n) 型のタイヒミュラー空間を $T_{(g,n)}$，そのタイヒミュラー・モデュラー群（= 写像類群）を $\mathrm{Mod}_{(g,n)}$ と書く．また，リーマン面 S の普遍被覆を $\rho\colon\tilde{S}\to S$ とし，その被覆変換群を Γ とする．自然に，$\tilde{S}\cong\mathbf{H}$(=上半平面)，$\Gamma\cong\pi_1(S,t_0)$(=基本群) である．このとき，正則族 (M,π,S) の表現 Φ，すなわち，正則写像 $\Phi\colon\tilde{S}\to T_{(g,n)}$ で，$\forall\tau\in\tilde{S}$ に対し，$\Phi(\tau)\in T_{(g,n)}$ の表すリーマン面が $t=\rho(\tau)$ 上のファイバー X_t に双正則同値になるものを考える．この表現 Φ に対し，準同型写像 $\Phi_*\colon\Gamma\to\mathrm{Mod}_{(g,n)}$ で次の条件を満たすものが定まる．

$$\Phi\circ\gamma=\Phi_*(\gamma)\circ\Phi,\quad\forall\gamma\in\Gamma.$$

我々の考察したい問題は，$\gamma\in\Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}$ に対して，$\Phi_*(\gamma)\in\mathrm{Mod}_{(g,n)}$ を Nilsen-Thurston-Bers の観点から分類することである．本講演では，特に小平曲面と呼ばれる 2 次元複素多様体 M から自然に定まる，リーマン面の正則族 (M,π,S) に対して得られた結果を報告する．

小平曲面 M の構成法の基本的な考え方は，ある閉リーマン面 R に分岐点と切り口を与えて，有限葉の分岐被覆面を作ることである．ここで，分岐点だけでは分岐被覆面の双正則同値類を一意的に作ること出来ず，分岐点の間の切り口を指定する必要がある．そのために，R 上の分岐点とそれらの間の切り口を指定するパラメータの空間である，リーマン面 R の有限葉の不分岐被覆 $\varpi\colon S\to R$ をうまく構成することが必要になる．このとき，リーマン面の正

則族 (M, π, S) で，$\forall t \in S$ 上のファイバー $X_t = \pi^{-1}(t)$ は $\varpi(t) \in R$ から一定の手順によって得られる，R の分岐被覆面である．小平曲面の構成法の詳細は論文 [2, 3, 5] を参照せよ．

得られた主要な結果を Bers の分類法の言葉で述べれば次のようになる．

Theorem. 小平曲面 M の定めるリーマン面の正則族 (M, π, S) と小平曲面の構成のときの不分岐被覆 $\varpi\colon S \to R$ を考える．このとき，正則族 (M, π, S) の表現 $\Phi\colon \tilde{S} \to T_{(g,n)}$ から定まる準同型写像（モノドロミー）$\Phi_*\colon \Gamma \to \mathrm{Mod}_{(g,n)}$ と任意の $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ に対して，次が成立する．

(1) $\Phi_*(\gamma)$ は楕円型でない，すなわち有限位数ではあり得ない．

(2) $\Phi_*(\gamma)$ は放物型である．$\Longleftrightarrow$ $\varpi_*(\gamma)$ は放物型か，または単純双曲型である．

(3) $\Phi_*(\gamma)$ は双曲型である．$\Longleftrightarrow$ $\varpi_*(\gamma)$ は本質的な双曲型である．

(4) $\Phi_*(\gamma)$ は擬双曲型である．$\Longleftrightarrow$ $\varpi_*(\gamma)$ は放物型，単純双曲型，あるいは本質的な双曲型のいずれでもない．

この定理の主張に使われている用語の楕円型，放物型，双曲型，擬双曲型，本質的については [1, 4] を参照せよ．また，Bers の分類法と Thurston の分類法の関係についても [1, 4] を参照せよ．本講演では，これらの用語と上記の結果の具体例を [5] における小平曲面の例を用いて説明する．

References

1. L. Bers, *An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston*, Acta Math. **141** (1978), 73–98.
2. A. Kas, *On deformations of a certain type irregular algebraic surfaces*, Amer. J. Math. **90** (1968), 789–804.
3. K. Kodaira, *A certain type irregular algebraic surfaces*, J. d'Analyse Math. **19** (1967), 207–215.
4. I. Kra, *On the Nielsen-Thurston-Bers type of some self-maps of Riemann surfaces*, Acta Math. **146** (1981), 231–270.
5. G. Riera, *Semi-direct products of Fuchsian groups and uniformization*, Duke Math. J. **44** (1977), 291–304.

※印は本会で記入

※番号	題	Pleating coordinates for the Earle embedding
9		

氏名 小森 洋平 / Caroline Series

所属 阪市大 理 / Warwick Univ.

リーマン面をクライン群で一意化することによりタイヒミュラー空間を複素アフィン空間に正則に埋め込むことがBersやMaskitにより考えられた。Earleにより、正則な対合を持つ擬フックス群を用いてリーマン面を一意化することによりタイヒミュラー空間を複素アフィン空間に正則に埋め込むことができて、これをEarle埋め込みということにする。この講演では擬フックス群の極限集合の双曲３次元空間内での凸閉包の境界面の折れ曲がり具合から定まるpleating座標がEarle埋め込みの大域的座標になることを、リーマン面が(1,1)型、すなわち穴あきトーラスの場合に示す。

※印は本会で記入

※番号 10

題 The Riley slice revisited

氏名 小森洋平
Caroline Series

所属 阪市大理
Warwick Univ.

２つの放物的なメビウス変換で生成されるクライン群で不連続領域の商曲面が４つ穴あき球面になるようなもの全体のパラメーター空間は複素平面の２重連結領域になりRiley sliceとよばれる。このクライン群の極限集合の双曲３次元空間内での凸閉包の境界面の折れ曲がり具合が一定の集合をpleating ray というが、一般にpleating ray は連結でないことを示す。これは対応する双曲３次元多様体と４つ穴あき球面の基本群が一致しないことから生じることを説明する。

11 The Hausdorff Dimension of the Boundary of a Tree

Hisayasu KURATA Yonago National College of Technology

Let $(X, \mathcal{A})$ be a tree, where X is the set of points and $\mathcal{A}$ is the set of arcs. For $x, y \in X$ with $x \neq y$ let $\rho(x,y)$ be the number of arcs which join x to y.

Fix a point $p_0 \in X$. Let

$$X_n := \{x \in X; \rho(x, p_0) = n\} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots .$$

Let Ω be the set of all paths, where a path is a sequence of points $(p_0, x_1, x_2, \dots)$ such that $x_n \in X_n$ and $\rho(x_j, x_{j+1}) = 1$.

Let $\ell(x)$ be a positive function defined on X such that, for any $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \Omega$, $\ell(x_n)$ strictly decreases to 0 as $n \to \infty$. For $\xi = (x_0, x_1, x_2, \dots), \eta = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \Omega$ we define

$$d(\xi, \eta) := \begin{cases} \ell(x_n) & \text{if } x_0 = y_0, \dots, x_n = y_n, x_{n+1} \neq y_{n+1}, \\ 0 & \text{if } \xi = \eta. \end{cases}$$

Then d is a distance in Ω, and Ω is a compact space. For $x \in X$ we take $\xi \in \Omega$ which passes through x and define

$$B(x) := \{\eta \in \Omega; d(\xi, \eta) \leq \ell(x)\}.$$

It is easy to see that $B(x)$ is independent of the choice of ξ. Also we see that $B(x)$ is the set of paths which pass through x.

For $\alpha > 0$ and $E \subset \Omega$ we define

$$\Lambda_\alpha^r(E, \ell) := \inf\left\{\sum_j \ell(x_j)^\alpha ; E \subset \bigcup_j B(x_j), \ell(x_j) < r\right\} \quad \text{for } r > 0,$$

$$\Lambda_\alpha(E, \ell) := \lim_{r \to 0} \Lambda_\alpha^r(E, \ell).$$

Since $\Lambda_\alpha^r(E,\ell)$ increases when $r \searrow 0$, $\Lambda_\alpha(E,\ell)$ is well defined. Λ_α is called the α-dimensional Hausdorff measure.

It is easy to see that there is a number α_0 such that

$$\Lambda_\alpha(E,\ell) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha > \alpha_0, \\ \infty & \text{if } \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

The number α_0 is called the Hausdorff dimension of E with distance function ℓ and is denoted by $\dim(E,\ell)$.

Now we define a function $\phi(x)$ as follows : First let $\phi(p_0) = 1$. For $x \in X_n$, $n \geq 1$, we take $y \in X_{n-1}$ such that $\rho(x,y) = 1$ and let

$$\phi(x) = \phi(y) / \#\{z \in X_n; \rho(y,z) = 1\}.$$

Theorem 1.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{\log 1/\phi(x)}{\log 1/\ell(x)}; x \in \bigcup_{k\geq n} X_k \right\} \\ &\quad \leq \dim(\Omega,\ell) \\ &\quad \leq \lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \frac{\log 1/\phi(x)}{\log 1/\ell(x)}; x \in \bigcup_{k\geq n} X_k \right\}. \end{aligned}$$

This inequality is sharp ; For α, β, γ with $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \infty$ we can construct a tree such that

$$\lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{\log 1/\phi(x)}{\log 1/\ell(x)}; x \in \bigcup_{k\geq n} X_k \right\} = \alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \frac{\log 1/\phi(x)}{\log 1/\ell(x)}; x \in \bigcup_{k\geq n} X_k \right\} = \gamma$$

and

$$\dim(\Omega,\ell) = \beta.$$

References

[1] H. Aikawa and M. Essén. *Potential theory – selected topics.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1633. Springer, 1996.

12　複素双曲多様体上の正則写像の剛性と有限性について

東工大・理工学研究科　志賀　啓成

1　正則写像の剛性

複素多様体上の正則写像の剛性に関しては多くの研究 (Borel-Narashiman, 砂田，野口，今吉 etc.) があるが，ここでは複素双曲多様体上で定義された正則写像の剛性について考える．ただし，ここで複素双曲多様体とは，複素単位球 B^n の商空間として表現される多様体のこととする．

定義 1.1 複素双曲多様体 $N = B^n/\Gamma$ が発散型 *(divergence type)* とは任意の $z \in B^n$ に対して

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}(1 - |\gamma(z)|)^n = +\infty$$

が成立するときをいう．

例えば，$N = B^n/\Gamma$ がコンパクトならば発散型である．

本講演では正則写像は発散型の複素双曲多様体で定義されていると仮定する．Target となる多様体 M は $\tilde{M}/G$ の形であるものとする．ただし $\tilde{M}$ は C^m 内のある有界領域で，G は $\tilde{M}$ の双正則自己同型からなるある離散群である．

定理 1.1 $N = B^n/\Gamma$ を発散型双曲多様体とする．また，複素多様体 $M = \tilde{M}/G$ が次の条件 *(A)* を満たすと仮定する．

(A) $\tilde{M}$ 内の任意のコンパクト集合 K と，異なる元からなる任意の無限列 $\{g_k\} \subset G$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} diam(g_k(K)) = 0.$$

ただし，$diam$ はユークリッドの直径を表す．

このとき，非定数正則写像 $f_1, f_2 : N \to M$ がホモトピックならば $f_1 = f_2$ である．

注意 1.1 条件 *(A)* は，例えば M の基本領域の *orbit* が境界に近づくとき，その直径が 0 になるような *covering* であれば満たされている．

2 正則写像の有限性

前節で示した正則写像の剛性を用いて次の有限性定理を証明することができる．

定理 2.1 $N = B^n/\Gamma$，M は前定理と同じもので，さらに Γ が有限生成で M はコンパクトであると仮定する．このとき，N から M への非定数正則写像は高々有限個である．

3 応用

定理 1.1 の証明（およびその結果の直接の応用）から次を得る．

系 3.1 発散型複素双曲的多様体上には非定数有界正則関数は存在しない．

定理 1.1 の条件 (A) に関連して次の条件 (B) を考える．

(B) $\tilde{M}$ にある invariant distance d が存在して，境界の異なる任意の 2 点 p, q に収束する任意の点列 $\{p_k\}$，$\{q_k\}$ に対して

$$\lim_{k \to \infty} d(p_k, q_k) = +\infty$$

が成り立つ．

このとき次が成立する．

定理 3.2 有界領域 $\tilde{M}$ 上に，条件 *(B)* を満たす *invariant distance* d が存在するならば，正則自己同型からなる任意の離散無限部分群 G に対して条件 *(A)* が成立する．従って，定理 *1.1* が成り立つ．

実際にこのような条件 (A), (B) を満たす多様体の例について考察する．更にいくつかの改良を試みる．

13　Julia集合と極限集合の函数論的性質について

東工大・理工学研究科　志賀　啓成

有理函数のJulia集合やクライン群の極限集合は自己相似性を持った集合である．この自己相似性を用いてこれらの集合の函数論的性質，特にMartin境界としての性質・函数論的零集合としての性質を見る．

1　Martin 境界

R を Green 関数が存在するような Riemann 面とする．R の Martin コンパクト化を R^M と書くことにする．また，その境界 $R^M - R$ を Martin 境界といい，$\Delta(R)$ と書くことにする．

境界の各点 $q \in \Delta(R)$ に対して q に極を持つ Martin 函数 $k_q(\cdot) = k(\cdot, q)$ は R 上の正値調和函数になるが，これが minimal であるような点を minimal point と呼び，その全体を $\Delta_1(R)$ で表す．

よく知られているように Martin のコンパクト化は次のようによい性質を持っている．

定理 1 *R^M は距離付け可能である．単位円板 D の Martin コンパクト化 D^M はユークリッド空間での閉包 $\bar{D}$ に等しく，その境界は minimal points のみからなる．*

R が平面領域であるとき，その（平面位相での）境界点 $p \in \partial R$ 上の $\Delta_1(R)$ の点の個数（濃度）を $\dim \Delta_1(p)$ とあらわす．

2　不連続領域の Martin 境界

R がクライン群の不連続領域であるときに，その Martin 境界を考える．まず，Fuchs 群の場合を考える．Γ を Fuchs 群とする．Γ が第一種ならば定理 1 からその不連続領域の Martin コンパクト化はよく分かっている．したがって，(非初等的) 第 2 種 Fuchs 群の場合が問題である．

定理 2 *Λ を非初等的第 2 種 Fuchs 群 Γ の極限集合とする．$p \in \Lambda$ が Γ の放物的固定点ならば，$\dim \Delta_1(p) = 2$ である．また，p が conical limit point ならば，$\dim \Delta_1(p) = 1$ である．*

また，第2種 Fuchs 群の擬等角変形で得られるクライン群に対しても同様の主張が成立する．

3 Fatou 集合の Martin 境界

この節では，R が有理関数の Fatou 集合であるときに，その Martin 境界を考える．

定理 3 $P_c(z) = z^2 + c$ とする．$c \in \mathbf{C}$ がマンデルブロー集合の外部の点であるとき，P_c の *Fatou* 集合 $F(P_c)$ の *Martin* コンパクト化は $\hat{\mathbf{C}}$ に等しい．

定理 4 前定理において，$P_c(z)$ の代わりに *Julia* 集合が非連結であるような *Blaschke* 積 $B(z)$ を考える．このとき，*Julia* 集合が *parabolic fixed point* を含まないならば，前定理の主張が成立する．

4 函数論的零集合

平面領域 W の境界成分 γ が W に関して *weak* とは，W で定義された任意の等角写像による γ の像が 1 点になるときをいう．

定理 5 G が第 2 種 *Fuchs* 群であるとき，G の *conical limit point* は G の不連続領域に関して *weak* である．

定理 6 定理 3 または 4 の条件を満たす有理関数 R に対して，R の *Julia* 集合の各点は R の *Fatou* 集合に関して *weak* である．

参考文献

[1] L. Carleson and T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

[2] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder der Riemannschen Flächen*, Springer, 1963.

[3] L. Sario and K. Oikawa, *Capacity Functions*, Springer, 1969.

[4] S. Segawa, *Martin boundary of Denjoy domains and quasiconformal mappings*, J. Math. Kyoto Univ., 1990, 297–316.

14　Riemann 多様体上の p-Green 関数の存在と非存在

倉　猛　　　広島大・理

M は非コンパクト連結で境界のない滑らかな $n(\geq 2)$ 次元完備リーマン多様体、$1 < p \leq n$ は定数、$a \in M$ は定点、a での injectivity radius=∞ とする。[1] に従って M の p-Green 関数を定義する。a を含む M の有界で滑らかな領域 D に対し関数 g が a を極に持つ D の p-Green 関数とは次が成立する事とする。

g is p-harmonic in $D \setminus \{a\}$, $\ -\mathrm{div}(|\nabla g|^{p-2}\nabla g) = \delta_a$ in D,
$\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, $\ \lim_{x\to y} g(x) = 0$ for every y $\in \partial D$.

D_l は M の有界で滑らかな領域で,$a \in D_1$, $D_l \subset D_{l+1}$, $M = \cup_l D_l$ とする。D_l の p-Green 関数 g_l で $\{g_l\}$ が非減少なものがある ([1])。$g = \lim_{l\to\infty} g_l$ は $M \setminus \{a\}$ で p-harmonic または $g = +\infty$in M である。前の場合が成り立つとき g を M の p-Green 関数と言う。

本講演の目的は、M の p-Green 関数が存在または非存在になるための、曲率の条件を与えることである ([5] 参照)。

$\mathrm{K_M}$, $\mathrm{Ric_M}$ は M の sectional, Ricci 曲率、$h(x) = d(a,x)$ in M. SM は M の unit tangent bundle、 $v \in S_xM$ に対し $\alpha_v(t) = \exp(tv)$ and $N(v) = \{w \in S_xM | \langle v, w\rangle = 0\}$ とする。$R \in C^0([0,\infty))$, f は次の正値解とする。

$$\begin{cases} f'' + R(t)f = 0 \quad \text{in } (0,\infty), \\ \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \end{cases}$$

次の結果が得られた。

Theorem 1. *Suppose that R satisfies*

$$\mathrm{K_M}(\alpha_v'(t), w) \leq R(t) \quad \textit{for} \quad v \in S_qM,\ 0 < t < \infty,\ w \in N(\alpha_v'(t)).$$

Let

$$\int_T^\infty f(t)^{\frac{1-n}{p-1}} dt < \infty \quad \textit{for some } T > 0.$$

Then the p-Green function g of M satisfies

$$g(x,a) \leq k_p c_2 \int_{h(x)}^\infty f(t)^{\frac{1-n}{p-1}} dt \quad \textit{in } M.$$

In particular, M has a p-Green function.

Theorem 2. *Suppose that R satisfies*

$$\mathrm{Ric_M}(\alpha_v'(t), \alpha_v'(t)) \geq (n-1)R(t) \quad \textit{for } v \in S_qM,\ 0 < t < \infty.$$

Then the p-Green function g of M satisfies

$$g(x,a) \geq k_p c_1 \int_{h(x)}^{\infty} f(t)^{\frac{1-n}{p-1}} dt \quad \textit{in } M.$$

In particular, if

$$\int_T^{\infty} f(t)^{\frac{1-n}{p-1}} dt = \infty, \quad \textit{for some } T > 0,$$

then M has no p-Green function.

上でk_p, c_1, c_2はa, p, nによって定まる正定数。特に$p=2$のとき上の結果は[2]に一致する。定理は[3, 4]を使って示される。

参考文献

[1] I. Holopainen. Nonlear potential theory and quasiregular mappings on Riemannian manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A I Math. Diss.*, Vol. 74, pp. 1–45, 1990.

[2] K. Ichihara. Curvature, geodesics and the Brownian motion on a Riemannian manifold I. *Nagoya Math. J.*, Vol. 87, pp. 101–114, 1982.

[3] A. Kasue. A Laplacian comparison theorem and function theoretic properties of a complete Riemannian manifold. *Japan J. Math.*, Vol. 8, pp. 309–341, 1982.

[4] J. Serrin. Isolated singularities of solutions of quasilinear equations. *Acta Math.*, Vol. 113, pp. 219–240, 1965.

[5] 田中 博. 放物性と曲率. 日本数学会秋季総合分科会, 1998.

15 Boundary Harnack principles without exterior condition

相川弘明　島根大学総合理工学部
水谷友彦　島根大学総合理工学部

この講演では外部条件を使わずに境界 Harnack 原理を示す．
Jerison-Kenig [4] が NTA 領域を導入して，その上で境界 Harnack 原理を確立し，Martin 境界を決定していった．NTA 領域は非常に複雑な領域になり得るが，彼らの証明方法は Hunt-Wheeden [3]，さらに元にもどれば，Carleson [2] にたどり着ける．そこでは，内側と外側の条件を巧みに用い，いわゆる Carleson 評価を重要な鍵として使う．
ところが，Bass-Burdzy [1] は John 領域に対して，境界 Harnack 原理を証明した．John 領域は内部条件しか満たさないので，非正則境界点もあるし，今までの Carleson 評価の証明方法は使えない．ところが，Bass-Burdzy は Carleson 評価の代りに，確率論的手法（条件付き Brown 運動，time reversal 等）を用いて，境界 Harnack 原理を示したのである．我々の知る範囲では彼らの結果の解析的証明は今まで無い．
この仕事の最初の動機は深い確率論的議論を避けて，Bass-Burdzy の易しい別証明を与えたいと言うことである．

定理 1. *John 領域 D に対して境界 Harnack 原理が成立する．すなわち，V を開集合，K を V 内のコンパクトで ∂D と交わるものとすると，正の定数 A があって，D 上の正の調和関数 u, v で $V \cap \partial D$ 上 q.e. に 0 で $D \cap V$ で有界なものに対して，*

$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le A \quad \text{for } x, y \in K \cap D.$$

Bass-Burdzy は座標を重要に考えていたが，この証明の中で座標にとらわれない考え方，擬双曲距離などが用いられた．難解な確率論的議論は実は単純な Green 関数の評価に置き換えられることが分かった．と同

時に定理1の問題点もはっきりしてきた．すなわち，この境界Harnack原理は一様でない，scale-invariantでないと言うことである．
実際，Jerison-Kenig [4] によって，一様な境界Harnack原理が Martin境界の決定や，核関数の Hölder 連続性にとって大切な事が認識されている．そこで我々の証明をより詳しく眺めることにより，一様領域においては一様な境界Harnack原理が成立し，そのMartin境界が位相境界と一致することが分かった．

定理 2. 一様領域 D に対して一様境界 *Harnack* 原理が成立する．すなわち，V を開集合，K を V 内のコンパクトで∂Dと交わるものとすると，正の定数 A とεがあって，D 上の正の調和関数 u, v で $V\cap\partial D$上 *q.e.* に *0*で $D\cap V$ で有界なものに対して，

$$\left|\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)}-1\right|\le A|x-y|^{\varepsilon}\quad \text{for } x,y\in D\cap K.$$

さらに，D の *Maritn* 境界は位相境界と一致し，核関数は *Hölder* 連続である．

外部条件を仮定しないので，surface ballがpolarになることさえあり，Green関数と調和測度を結ぶ，Dahlbergの評価は成り立たないし，調和測度はdoublingでもない．したがって，核関数を調和関数の比として捉えることはせず，あくまでGreen関数の比を調べていく．そして，そちらの方が実はずっと易しいことなのであった．

参考文献

[1] R. F. Bass and K. Burdzy, *A boundary Harnack principle in twisted Hölder domain*, Ann. of Math. **134** (1991), 253–276.
[2] L. Carleson, *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. Mat. **4** (1961), 393–399.
[3] R. R. Hunt and R. L. Wheeden, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **147** (1970), 505-527.
[4] D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), 80–147.

URL: `http://www.math.shimane-u.ac.jp/`
E-mail address: haikawa@math.shimane-u.ac.jp

16 調和写像のエネルギー積分について

柴田敬一　国際自然科学研

円板の周上に境界値を与えてディリクレ問題を解くことは古くから行われてきたが，今回の講演では有界変分且つ連続な境界値が或る幾何的な意味を持つようにそれを定義し，内部での解の性質を述べる。

17　ポテンシャル論における最小変分の方法

二宮信幸

局所コムパクトなハウスドルフ空間 Ω において，

$K(P, Q)$ は

(1) 二点 P と Q について下半連続，$P=Q$ では ∞ であってもよいが，$P \neq Q$ では必ず有限，

(2) P と Q が互に素なコムパクト集合の中にあるときには上に有界，

であるような関数とする．又，$f(P, Q)$ は

(1) 二点 P と Q について上半連続，$P=Q$ では ∞ であってもよいが，$P \neq Q$ では必ず有限，

(2) P と Q が一つのコムパクト集合の中にあるときには $\inf f(P, Q) > 0$，

であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に対して，ポテンシャル $K(P, \mu)$，$K(\mu, P)$，エネルギー積分 $K(\mu, \mu)$，$K(\mu, \nu)$ 等を考える．f に関しても，同様に $f(P, \mu)$，$f(\mu, P)$，$f(\mu, \mu)$，$f(\mu, \nu)$ 等を考える．これらの量がポテンシャル論において有効であるためには，例えば，

Ωのどんな開集合もその上にエネルギー積分が有限であるような正の測度が存在する，というような条件が必要である．

ボレル集合Eの上の正の測度の全体を$\mathfrak{M}(E)$，それに属する二つの測度で全質量が等しいものの組の全体を$(\mathfrak{M}\times\mathfrak{M})(E)$で表わす．

正の常数s_1, s_2, t_1, t_2と二つの互いに素なコムパクト集合F_1とF_2が与えられたとき，$(\mu_1, \mu_2)\in(\mathfrak{M}\times\mathfrak{M})(F_1)$と$(\nu_1, \nu_2)\in(\mathfrak{M}\times\mathfrak{M})(F_2)$に対して，量

$$\frac{K}{f}(\mu_1, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) = \frac{\max\begin{pmatrix}K(s_1\mu_1+s_2\mu_2, \mu_1)\\ K(s_1\mu_1+s_2\mu_2, \mu_2)\end{pmatrix}\times\max\begin{pmatrix}K(t_1\nu_1+t_2\nu_2, \nu_1)\\ K(t_1\nu_1+t_2\nu_2, \nu_2)\end{pmatrix}}{\{f(s_1\mu_1+s_2\mu_2, t_1\nu_1+t_2\nu_2)\}^2}$$

を考える．このとき

Lemma.

$$\inf\frac{K}{f}(\mu_1, \mu_2 ; \nu_1, \nu_2) = \frac{1}{(s_1+s_2)(t_1+t_2)}\inf\frac{K(\mu, \mu)\times K(\nu, \nu)}{\{f(\mu, \nu)\}^2}$$

が成立つ．infは$(\mathfrak{M}\times\mathfrak{M})(F_1)$と$(\mathfrak{M}\times\mathfrak{M})(F_2)$，及び$\mathfrak{M}(F_1)$と$\mathfrak{M}(F_2)$に関してとられる．

このLemmaにより，$K\equiv f$なる場合を考えて，正の連続核ポテンシャルの理論を展開して行くことができる．

特別講演

α 次放物型作用素に関する調和関数

西尾　昌治　　　　大阪市大・理

$0 < \alpha \leq 1$ に対し, ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ 上の放物型作用素

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^\alpha$$

を考える. ここで, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ 上の点を $(x,t) = (x_1, \cdots, x_n, t)$ であらわし, $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ とする. $\alpha = 1$ のとき, $L^{(1)}u = 0$ は熱方程式である. $0 < \alpha < 1$ に対しては, $L^{(\alpha)}$ は非局所的作用素になる. そのため $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の開集合で $L^{(\alpha)}$-調和 $(L^{(\alpha)}u = 0)$ な関数は, 一般に $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ 全体で定義されている必要がある. ここでは, そのような作用素 $L^{(\alpha)}$ に関するポテンシャル論的性質特に掃散測度, 容量について調べ, $L^{(\alpha)}$-調和関数の平均値の性質やディリクレ問題に関する境界点の正則性, 帯状領域の平均値の性質による特徴づけについて述べる.

1　掃散測度と容量

$L^{(\alpha)}$に関するポテンシャル論について基本的なことを準備する. $0 < \alpha < 1$ のとき, $(-\Delta)^\alpha$ は, $-C_{n,\alpha}\mathrm{p.f.}|x|^{-n-2\alpha}$ による convolution operator すなわち,

$$(-\Delta)^\alpha \varphi(x,t) = -C_{n,\alpha} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|y-x|>\delta} (\varphi(y,t) - \varphi(x,t))|y-x|^{-n-2\alpha}\, dy.$$

である. ここで $C_{n,\alpha} = -4^\alpha \pi^{-n/2}\Gamma((n+2\alpha)/2)/\Gamma(-\alpha) > 0$ は定数である.

$L^{(\alpha)}$の基本解は

$$W^{(\alpha)}(x,t)=\begin{cases}(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp(-t|\xi|^{2\alpha}+\sqrt{-1}\,x\cdot\xi)d\xi & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

である. $\tilde{W}^{(\alpha)}(x,t):=W^{(\alpha)}(x,-t)$ とおけば $\tilde{W}^{(\alpha)}$は $L^{(\alpha)}$の adjoint operator $\tilde{L}^{(\alpha)}=\partial_t+(-\Delta)^\alpha$ の基本解になる. $\alpha=1,1/2$ のときには $t>0$ に対し

$$W^{(1)}(x,t)=(4\pi t)^{-n/2\alpha}\exp(-|x|^2/4t),$$
$$W^{(1/2)}(x,t)=\Gamma((n+1)/2)t\{\pi(|x|^2+t^2)\}^{-(n+1)/2}$$

と具体的な形がわかっている. 一般の $0<\alpha<1$ に対しては簡単な関数で表示することはできないが, $W^{(\alpha)}\ge 0$, $|x|$ について単調減少で $|x|\to\infty$ での order が $|x|^{-n-2\alpha}$ であることなどがわかっている.

次に, 掃散測度の構成について簡単に説明する ([7]). Radon 測度 $\mu\ge 0$ を用いて $W^{(\alpha)}*\mu$(resp.$\tilde{W}^{(\alpha)}*\mu$) と表される関数はほとんどいたるところ有限な値をとるとき potential (resp. copotential) という. potential は $-L^{(\alpha)}$ を生成作用素とする convolution semigroup $(W^{(\alpha)}(x,s)dx\otimes\varepsilon_s)_{s>0}$ に関して excessive になる. ここで ε_s は $\{s\}$ での Dirac 測度である. そこで, 下半連続でほとんどいたるところ有限な nonnegative excessive functions 全体を S_α で表す. 集合 $A\in\mathbf{R}^{n+1}$ に対し $W^{(\alpha)}*\mu$ の S_α の元を用いた reduced function は $\overline{A}$ に support をもつ測度 μ_A' の potential となる. この測度を掃散測度という. また copotential を用いて同様に構成した掃散測度は μ_A'' で表すことにする. 掃散測度の性質には

$$W^{(\alpha)}*\mu\ge W^{(\alpha)}*\mu_A'\quad\text{on}\quad\mathbf{R}^{n+1}$$

$$W^{(\alpha)}*\mu=W^{(\alpha)}*\mu_A'\quad\text{on}\quad\mathrm{Int}(A)$$

$$\int W^{(\alpha)} * \mu \, d\nu''_A = \int W^{(\alpha)} * \mu'_A \, d\nu$$

など Laplacian のときと類似の性質もあるが, 一般には $(\mu'_A)'_A = \mu'_A$ とはならない点などに注意が必要である.

最後に Wiener criterion に必要な容量を導入する. ここでは, 次の形の容量のみを扱う.

一般に核 $K(x,y) \geq 0$ に対し, 集合 A の容量を

$$C(A) := \sup\{\int d\mu \,; \mathrm{supp}(\mu) \subset\subset A, \int K(x,y)\, d\mu \leq 1\}$$

で定義する. われわれの場合は次のように非常によい性質を持った容量となる.

定理 1. $W^{(\alpha)}$と $\tilde{W}^{(\alpha)}$に対する集合 $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の容量は一致する. その値を $\mathrm{cap}^{(\alpha)}(A)$ で表すと, $\mathrm{cap}^{(\alpha)}(\cdot)$ は*Choquet* 容量になる.

2 $L^{(\alpha)}$-調和関数

定義 1. D を $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合とする. $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の可測関数 h は, 次を満たすとき D の $L^{(\alpha)}$-調和関数という:

(a) h は D 上連続,

(b) 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対し $\iint h \cdot \tilde{L}^{(\alpha)}\varphi \, dxdt = 0$.

このように, $0 < \alpha < 1$ のときには D の $L^{(\alpha)}$-調和関数は少なくとも $D^* := \{(x,t);$ ある $y \in \mathbf{R}^n$に対し $(y,t) \in D\}$ 上で定義されている必要がある. これに関して次が成り立つ.

定理 2. $0 < \alpha < 1$ とする. $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合 D 上の $L^{(\alpha)}$-調和関数 h_1, h_2 が D 上 $h_1 = h_2$ ならば D^* 上 $h_1 = h_2$ である.

定理 3. $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合 D と D 上で連続な $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の可測関数 h に対し, 以下は同値:

(a) h は D 上 $L^{(\alpha)}$-調和,

(b) 任意の $X_0 \in \omega \subset\subset D$ に対し $h(X_0) = \int h\, d\varepsilon''_{X_0,\omega^c}$,

(c) 任意の *cylinder* $V = \{(x,t); |x-x_0| < r, |t-t_0| < s\} \subset\subset D$ に対し $h(X_0) = \int h\, d\varepsilon''_{X_0,V^c}$.

ここで $\omega \subset\subset D$ は ω が D で *relatively compact* であることをあらわす.

これにより, 掃散測度 ε''_{X,D^c} は $L^{(\alpha)}$-調和測度と考えることができる.

3 境界点の正則性

調和関数の Dirichlet 問題に関して, 開集合の境界点が正則であるための条件として, Poincaré の cone 条件や Wiener criterion, Kuran の判定条件などがある. ここでは, $L^{(\alpha)}$-調和関数に対してこれらのことを考えてみる.

定義 2. 開集合 $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の境界点 $X_0 \in \partial D$ に対し,

$$\mathrm{w}^* - \lim_{D \ni X \to X_0} \varepsilon''_{X,D^{\wedge}} = \varepsilon_{X_0}$$

のとき X_0 は D の正則境界点であるという.

3.1 Wiener criterion について

$L^{(\alpha)}$ に対する Wiener criterion として次の 2 つの切り方を考える. $X_0 \in \mathbf{R}^{n+1}$ と定数 $\lambda > 1, \rho > 1$ に対し,

$$A_k(X_0, \lambda) = \{Y \in \mathbf{R}^{n+1}; \lambda^k \le W^{(\alpha)}(X_0 - Y) \le \lambda^{k+1}\}$$

$$A_{k,m}(X_0, \lambda, \rho) = \{X_0 + (x, -t); t_{k+1} \le t \le t_k, r_m \le t^{-1/2\alpha}|x| \le r_{m+1}\}$$

とおく．ここで，$t_k = \lambda^{-2\alpha k/n}$, $r_m = \rho^{m/(n+2\alpha)}$ $(m \geq 1)$, $r_0 = 0$ とする．そのとき，熱方程式に対する Wiener criterion は

定理 4. ([5]) D を $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合とする．そのとき，$X_0 \in \partial D$ が $L^{(1)}$ に関して正則点であるための必要十分条件は

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathrm{cap}^{(1)}(A_k(X_0, \lambda) \setminus D) = \infty \tag{w}$$

である．

である．この定理は α 次放物型作用素に対しても，全く同じ形で成立するが，$0 < \alpha < 1$ の場合には，さらに外部を分割することができて 定理 4 の条件 (w) を次の (w') で置き換えることができる ([10]).

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda^k \rho^{-m} \mathrm{cap}^{(\alpha)}(A_{k,m}(X_0, \lambda, \rho) \setminus D) = \infty \tag{w'}$$

3.2 Tusk condition

Wiener criterion は正則点であるための必要十分条件ではあるけれども，capacity の評価はが必要になる．十分条件ではあるが，Poincaré の cone condition の放物型方程式版である次の tusk 条件の方が適用しやすいことも多い．

頂点 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 基 $E \subset \mathbf{R}^n$ の α-tusk を

$$T^{(\alpha)}_{(x_0,t_0)}(E, s_0) = \{(x_0 + s^{1/2\alpha}x, t_0 - s); x \in E, 0 \leq s \leq s_0\}$$

とおく．

定理 5. 開集合 $D \in \mathbf{R}^{n+1}$ の境界点 X_0 に対し，n 次元 *Lebesgue* 測度が正の閉集合 $E \in \mathbf{R}^n$ と $s_0 > 0$ が存在し，$T^{(\alpha)}_{X_0}(E, s_0) \cap D = \emptyset$ となれば，X_0 は $L^{(\alpha)}$に関する D の正則点である．

Wiener criterion を用いて平衡分布を評価することにより，これを次のように精密化することができる．

定理 6. $\mathbf{R}^n$の開集合 E に対し，X_0 が $\mathbf{R}^{n+1} \setminus T^{(\alpha)}_{X_0}(E, s_0)$ の正則境界点になるための必要十分条件は $C_{2\alpha}(E) > 0$ である．ここで，$C_{2\alpha}$ は下の核 $K_{2\alpha}$ に関する容量である．

$$K_{2\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1 & (n = 1, \alpha > 1/2) \\ \max(0, -\log|x-y|) & (2\alpha = n) \\ |x-y|^{2\alpha - n} & (1 \leq 2\alpha \leq n) \\ \min(|x|^{2\alpha-2}, |y|^{2\alpha-2}) & (n = 1, \alpha < 1/2) \\ |x-y|(|x-y|\theta(y, x-y) + |x-y|^{1/2\alpha})^{1-n-2\alpha} & (n \geq 2, \alpha = 1/2) \end{cases}$$

$1/2 \leq \alpha \leq 1$ のときは $C_{2\alpha}$ は 2α 次 Riesz 容量である．

3.3 Kuran の判定条件

Kuran は Dirichlet 問題に関する正則性を基本解の準有界性で判定できることを示した ([8]. その結果は, Suzuki によって harmonic space や balayage space 拡張されている．$L^{(\alpha)}$は balayage space の枠組みで考えることもできる ([3]) ので我々の場合に当てはめれば

定理 7. ([14]) 開集合 $D \in \mathbf{R}^{n+1}$ の境界点 X_0 が $L^{(\alpha)}$に関する D の正則点であるための必要十分条件は $\tilde{W}^{(\alpha)} * \varepsilon_{X_0}$ が D 上で $\tilde{L}^{(\alpha)}$に関して準有界になることである．

4　帯状領域の特徴付け

平均値の性質で領域の形を特徴付ける問題は, 以前から論じられてきた. たとえば, 球の特徴付けとして,

定理 8. ([9]) 体積有限で原点を含む $\mathbf{R}^n$の開集合 D が, 任意の D 上の可積分な調和関数 h に対して平均値の性質

$$h(0) = \frac{1}{|D|} \int_D h(x)\, dx$$

をもてば, D は原点中心の球である.

がある. また, 次のような帯状領域上の調和関数に対する平均値の定理

定理 9. ([1]) 帯状領域 $\mathbf{R}^n \times (-1, 1)$ で可積分な調和関数 h に対し次が成り立つ.

$$2 \int_{\mathbf{R}^n} h(x, 0)\, dx = \iint_{\mathbf{R}^n \times (-1,1)} h(x, t)\, dxdt$$

が得られれば, その平均値の性質で帯状領域を特徴付けることが考えられ, 実際, [2] で結果が得られている. そして, Watson は調和関数のかわりに熱方程式の基本解に関する平均値の性質で帯状領域を特徴付けた. これらは, Lebesgue 測度の copotential の性質を調べることによって導かれている. 我々は全く別の考察によって次を得た.

定理 10. 開集合 $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ は平面 $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ を含み任意の $\tau \in \mathbf{R}$ に対し, $\mathbf{R}^n \times (-\infty, \tau) \not\subset D$ とする. そのとき, 任意の D 上 $L^{(\alpha)}$-調和な関数 $h \geq 0$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}^n} h(x, 0)\, dx = \iint_D h(x, t)\, dxdt$$

ならば, D は帯状領域 $D = \mathbf{R}^n \times (a, a+1)$, $(-1 < a < 0)$ である.

参考文献

[1] D.H. Armitage and M. Goldstein, *Qudrature and harmonic approximation of subharmonic functions in strip*, J. London Math.Soc., 46(1992), 171–179.

[2] D.H. Armitage and C.S. Nelson, *A harmonic quadrature formula characterizing open strip*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 113(1993), 147–151.

[3] M. Brzezina, *Tusk type conditions and thinness for the parabolic operator of order* α, Manuscripta Math. 80 (1993), no. 1, 21–26.

[4] E. Effros and J. Kazdan, *On the Dirichlet problem for the heat equation*, Indiana Univ. Math. J., 20(1971), 683–693.

[5] L. Evans and R. Gariepy, *Wiener criterion for the heat equation*, Arch. Rational Mech. Anal., 78(1981), 293–314.

[6] M. Itô, α*-harmonic functions*, Nagoya Math. J. 26(1966), 205–221.

[7] M. Itô and M. Nishio, *Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order* α, Nagoya Math. J., 115(1989), 1–22.

[8] Ü. Kuran, *A new criterion of Dirichlet regularity via the quasi-boundedness of the fundamental superharmonic function*, J. London Math. Soc. (2) 19 (1979), no. 2, 301–311.

[9] Ü. Kuran, *On the mean-value property of harmonic functions*, Bull. London Math. Soc. 4 (1972), 311–312.

[10] M. Nishio, *The Wiener criterion of regular points for the parabolic operator of order α*, Nagoya Math. J., 116(1989), 163–179.

[11] M. Nishio, *Riesz capacity and regular points for the parabolic operator of order α*, Nagoya Math. J., 139(1995), 185–196.

[12] M. Nishio and N. Suzuki, *A characterization of strip domains by a mean value property for the parabolic operator of order α*, preprint.

[13] L. Stoica, *On the thinness of a set at a point*, Stud. Cerc. Mat. 38 (1986), no. 4, 382–391.

[14] N. Suzuki, 掃散空間における Dirichlet 正則性, ポテンシャル論研究集会アブストラクト, 1992.

[15] N.A. Watson, *Thermal capacity*, Proc. London Math. Soc., 37(1978), 342–362.

[16] N.A. Watson, *Characterizations of open strips by temperatures and harmonic functions*, New Zealand J. Math., 25(1996), 243–248.

18　多変数の解析的形成体について

三宮照久　（早慶外語ゼミ）

一昨年の春の年会（1997年）で次の結果を報告した。[illegible]とする。

（正則包の基本定理）

分岐リーマン領域 $\Phi : R \to \mathbb{C}^n$ について，その Φ-正則包，$\tilde{\Phi} : \tilde{R} \to \mathbb{C}^n$ と K-正則包 $\Psi : \hat{R} \to \mathbb{C}^n$ の $\hat{R} \setminus \tilde{R}$ は，$\tilde{\Phi} : \tilde{R} \to \mathbb{C}^n$ の分岐面の接続として $\hat{R}$ 内の高々余次元2の孤立点を含まない解析的集合となる。

（注）一般に $\tilde{R} \subset \hat{R}$ で，$\hat{R} \setminus \tilde{R}$ で $\hat{\Phi}$ は退化する。

今回は上の現象を解析接続の立場から解釈する。
重要な事は，$\tilde{\Phi} : \tilde{R} \to \mathbb{C}^n$ は Φ-正則域であるが，$\tilde{R}$ を $\hat{R}$ の解析空間として部分領域と見れば正則領域ではない！という事である。なぜなら K-正則包の定義から $\mathcal{O}(\tilde{R})$ は $\mathcal{O}(\hat{R})$ まで一意的に解析接続されてしまうからである。

“ $\hat{R} \setminus \tilde{R}$ 上の解析性をどの様に考えれば良いのか？ ”

イメージ的には Φ-正則包（又は Φ-正則域）はワイエルシュトラス的に Φ についての函数要素の最大接続域に分岐点を付加した領域と考えられるが，一変数と多変数では事情が異なっている。
一変数の“解析的形成体”は分岐点のまわりで Puiseux 級数が与えられ，H. Weyl に見た様に1次元複素多様体の構造が入る。2次元以上の分岐リーマン領域 $\Phi : R \to \mathbb{C}^n$ 上では，

分岐面上での正則函数の正則性は単なる連続性である。
（注；分岐点のまわりで $\tilde{R}$ が解析空間となる様に座標近傍を入れれば，特異点を除いて多様体的に正則である。）

一変数で Puiseux 級数を考える事を H. Weyl 的に新しい座標近傍をとって新しい"解析性"を付加すると解釈すると，若干位相的な分岐リーマン領域の定義は"多変数解析的形成体"としては不十分であると思われる。もともとワイエルシュトラスの解析接続の理論は「正則性の確認の手段」として導入されたものであって，正則性をどの様に考えるか，という問題が先にあるのである。（Riemann は代数函数の存在域として閉リーマン面を先に考えた。）

ここで正則性の問題を根本的に扱う２つの手段は，"正則不変性"と"擬凸性"である。

元々，岡潔は擬凸性の定義で正則不変性を要請している。$f \in \mathcal{O}(\tilde{R})$ は別な射影 Φ をとれば $f \circ \varphi^{-1}$ は $\hat{R}$ まで解析接続される。従って $\hat{R} \setminus \tilde{R} \neq \phi$ のとき，$\tilde{\Phi} : \tilde{R} \to \mathbb{C}^n$ は $\hat{R} \setminus \tilde{R}$ で擬凸とは言えない。従って"正則領域"と言うのは上の立場からはおかしいのである。あるいは正則不変性をもった K-正則包（又は K-正則域）も，"完備正則域"と呼ぶ方が自然ではないかと思われる。

K-正則包は Kerner の下の論文で導入された。

H. Kerner "Holomorphiehülen zu K-vollständigen komplexen Räumen". Math. Ann. 138 p316 ~ 328 (1959)

19 A remark on generalized complex ellipsoids with spherical boundary points

AKIO KODAMA

Dept. of Math., Fac. of Sci., Kanazawa University

In the case where $n > 1$, it is well-known that there are many simply connected domains D in $\mathbf{C}^n$ that are not biholomorphically equivalent to the unit ball B^n in $\mathbf{C}^n$. Therefore, an interesting question is to find sufficient conditions for domains D to be biholomorphically equivalent to B^n. In connection with this, we have the following results due to Pinchuk [3] and Huang-Ji [1]. First, recall that the boundary point $p \in \partial D$ is said to be *spherical* if there exist an open neighborhood U of p in $\mathbf{C}^n$ and a biholomorphic mapping $f : U \to f(U) \subset \mathbf{C}^n$ such that $f(U \cap \partial D) \subset \partial B^n$ and $f(U \cap D) \subset B^n$. Moreover, we say that ∂D is *algebraic* if it is defined by real polynomials. Then their results may be stated as follows:

Theorem P-H-J. *Let D be a bounded strictly pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$ with connected real analytic boundary ∂D. Then we have:*

(I) (Pinchuk [3]). *If ∂D is simply connected and D has a spherical boundary point p, then D is biholomorphically equivalent to B^n.*

(II) (Huang-Ji [1]). *If ∂D is algebraic and D has a spherical boundary point p, then D is biholomorphically equivalent to B^n.*

In view of these results, it would be natural to ask the following question: *Given a domain D in $\mathbf{C}^n$ with a spherical boundary point, under what conditions* *can we prove that D is biholomorphically equivalent to B^n?* Here let us study this question in the case where D is a *generalized complex ellipsoid*

$$E(n; n_1, \dots, n_s; p_1, \dots, p_s) = \left\{ (z_1, \dots, z_s) \in \mathbf{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_s} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{s} |z_i|^{2p_i} < 1 \right\}$$

in $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_s}$, where $0 < p_1, \dots, p_s \in \mathbf{R}$, $0 \leqq n_1, \dots, n_s \in \mathbf{Z}$ with $n = n_1 + \cdots + n_s$ and $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm on $\mathbf{C}^{n_i}$. Here, without loss of generality, we always assume that

$$p_1 = 1 \quad \text{and} \quad p_i \neq 1,\ n_i > 0 \quad \text{for} \quad i = 2, \dots, s.$$

Also, it is understood that $p_1 = 1$ does not appear if $n_1 = 0$ and this domain is the unit ball B^n if $s = 1$. Then we can prove the following theorem, which is a natural extension of the key lemma in [2]:

Theorem. *Let E be a generalized complex ellipsoid in $\mathbf{C}^n$ as above. Assume that $s \geqq 2$ and $n_2, \dots, n_s \geqq 2$. Then E does not have a spherical boundary point. In particular, among the class of all generalized complex ellipsoids in $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_s}$ with $n_1, \dots, n_s \geqq 2$, the unit ball B^n is the only one that has a spherical boundary point.*

Finally, it should be remarked that, in the theorem above, the boundary ∂E of E is not smooth, in general; and also, the assumption $n_2, \dots, n_s \geqq 2$ cannot be dropped as one may see in the examples such as $E(\alpha) = \{(z, w) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C} \mid |z|^2 + |w|^{2\alpha} < 1\}$ with arbitrary $0 < \alpha \neq 1$. Indeed, every point $p_o = (z_o, w_o) \in \partial E(\alpha)$ with $w_o \neq 0$ is a spherical boundary point, but obviously we have $E(\alpha) \neq B^n$ in this case.

References. [1] X. Huang and S. Ji; to appear in Math. Research Letter. [2] A. Kodama; to appear in Tôhoku Math. J. 51 (1999). [3] S. I. Pinchuk; Math. USSR Sb. 27 (1975), 375–392.

※印は本会で記入

※番号 20

題 特異点と特異ファイバー

氏名 高村 茂

所属 京都大学 数理解析研究所

孤立特異点(V, P)が与えられたとき，変形により，一般に(V, P)よりも単純な特異点が現われる。
このとき，新しく現われた特異点を(V, P)に隣接するという。
特に，(V, P)が有理2重点の場合，V. I. Arnoldにより，隣接関係は完全に記述されている。

さて，$\pi : M \to \Delta$を複素曲面Mから単位円Δへの固有な全射で，原点上でのみ特異ファイバーXをもち，一般ファイバーが滑らかな複素曲線であるものとする。
このとき，特異点の隣接問題と類似な問題を考えることができる。
本講演では，特異ファイバーの隣接問題についての結果を報告する。

21 THE POLYNOMIAL PERIODICITY OF THE PLURIGENERA OF SURFACE SINGULARITIES

奥間 智弘 (群馬高専)

Let (X,x) be a normal surface singularity over the complex number field $\mathbb{C}$, and $f\colon (M,A) \to (X,x)$ the minimal good resolution of the singularity (X,x) with the exceptional set A. Let K be the canonical divisor on M. Then the m-th L^2-plurigenus $\delta_m(X,x)$ is computed as

$$\delta_m(X,x) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(M\backslash A, \mathcal{O}_M(mK))/H^0(M, \mathcal{O}_M(m(K+A)-A)).$$

A singularity (X,x) is said to be $\mathbb{Q}$-Gorenstein if there exists an integer n such that nK_X is a Cartier divisor. The index of a $\mathbb{Q}$-Gorenstein singularity is defined by

$$\mathrm{Ind}(X,x) = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, nK_X \text{ is Cartier}\}.$$

Let $P+N$ be the Zariski decomposition of $K+A$, where P and N are $\mathbb{Q}$-divisors supported in A, P is f-nef and $N \geq 0$. Then we have the following

Theorem 1. *There exists a function $\sigma(m)$ which is periodic for $m >> 0$ such that*

$$\delta_{m+1}(X,x) = -(P\cdot P)m^2/2 - (K\cdot P)m/2 + \sigma(m).$$

Assume that (X,x) is a $\mathbb{Q}$-Gorenstein singularity of index s, which is not log-canonical. Then $\sigma(m)$ is periodic for $m \geq 0$ and

(1) *if the function $\sigma(m)$ is constant, then $K+A$ is f-nef;*

(2) *if $s \leq 2$, then the converse of (1) holds.*

There is an example of a $\mathbb{Q}$-Gorenstein singularity of index $s \geq 3$ such that $K+A$ is f-nef but the function $\sigma(m)$ is not constant.

22 Grothendieck duality と Hermite-Jacobi の多変数補間積分 I
——多変数剰余定理——

田島　慎一　　　新潟大学工学部

1 Jacobi 積分と再生核

多項式の regular sequence $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ が与えられたとする。イデアル $I = \langle f_1, f_2, ..., f_n \rangle$ の零点集合を $V = V(I)$ で表す。多項式 f_i たちの Hefer 分解

$$f_i(z) - f_i(\zeta) = \sum_j q_{i,j}(z,\zeta)(z_j - \zeta_j)$$

を取り, $q(z,\zeta) = det(q_{i,j}(z,\zeta))$ とおく。正則関数 $\varphi \in \mathcal{O}_X$ $(X = \mathbf{C}^n)$ に対し

$$K\varphi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \cdots \int \frac{q(z,\zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)} d\zeta$$

$$= Res\left(q(z,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta,\ [\frac{1}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)}] \right) \in \mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$$

を対応させる Hermite-Jacobi の積分変換 K を考える。但し Res は Grothendieck residue map

$$\Omega_X / I \times \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I,\ \mathcal{O}_X) \to \mathbf{C}$$

である。 明らかに $\varphi \in I$ の時, $K\varphi = 0$ であり, 更に

$$K : \mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/I \to \mathbf{C}[z_1, z_2, ... z_n]/I$$

は恒等写像となる (Berenstein, 80 年)。従って

$$[\frac{q(z,\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)}]$$

は再生核とみなすことが出来る。

2 剰余定理

多項式環 $\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ に項順序を入れ, 以下 fix する。この項順序による Gröbner 基底を取り標準的方法で, 剰余 $\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/I$ を単項式 $b_i(z)$ $(i = 1, 2, ..., N)$ を基底とするベクトル空間とみなし, そのベクトル空間を E とおく。ただし $N = dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/I)$。

さて, 多項式 φ の, イデアル I による剰余を $Nf(\varphi) \in E$ とおくと

$$Nf(\varphi)(z) = \sum_i c_i(\varphi) b_i(z)$$

なる表現を持つので, c_i 達は明らかに E の双対ベクトル空間 E^* の要素であり, b_i の双対基底となる。多変数剰余定理を具体的な形で得るには, 超関数 c_i を計算すればよいことになる。

定理 $q(z,\zeta)$ を（変数 z に関して）イデアル I による剰余を取ったものを $Nf(q)(z,\zeta) = \sum q_i(\zeta)b_i(z)$ とおく。このとき $\{b_i\}$ の双対基底の定義関数は

$$[\frac{q_i(\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)\cdots f_n(\zeta)}] \in H^n_{[V]}(\mathcal{O}_X)$$

で与えられる。

3 計算法の概略

双対基底 c_i たちは, イデアル I の零点集合 V に台を持つような超関数となる。零点の重複度が高いときは, デルタ関数の高階の偏微分の一次結合の形で表現される。イデアル I の準素イデアル分解を求めてホロノミックな D-加群の理論を用いると, このような場合にも c_i の具体的表現を計算できる。更に, Laplace 変換をして方程式系を変換することで計算を簡素化することも可能である。以下に, 原点のみに零点を持つ場合の例を載せる（この場合は, 様々な方法で計算することができる)。

例 $I = \langle x^3, y^2 + 2x^2 + 3x\rangle$
剰余 $\mathbf{C}[x,y]/I$ を $E = span\{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$ と同一視する。
$Nf = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3y + c_4xy + c_5x^2y$ とおく。計算すると

$$c_0(\varphi) = \varphi(0),\ c_1(\varphi) = -\frac{3}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0)$$
$$c_2(\varphi) = \frac{3}{8}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}(0) - \frac{3}{2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}(0) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0)$$
$$c_3(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0),\ c_4(\varphi) = -\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}(0) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(0)$$
$$c_5(\varphi) = \frac{3}{40}\frac{\partial^5\varphi}{\partial y^5}(0) - \frac{1}{2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x\partial y^3}(0) - \frac{1}{3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}(0)$$

を得る。さて, 超関数 c_5 は原点のみに台を持つので, Laplace 変換すれば多項式

$\mathcal{L}(c_5) = \frac{3}{40}y^5 - \frac{1}{2}xy^3 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2y$ となる。核関数の式から

$\mathcal{L}(c_4) = \frac{\partial\mathcal{L}(c_5)}{\partial x} = -\frac{1}{2}y^3 + xy\ \mathcal{L}(c_3) = \frac{\partial^2\mathcal{L}(c_5)}{\partial x^2} = x$ 等が従う。

つまり c_5 の計算を先に行えば, 後の計算は微分だけ。

23 Grothendieck duality と Hermite-Jacobi の多変数補間積分 II

——ホロノミック D-加群を用いた計算——

田島　慎一　　　新潟大学工学部

1　記号と準備

計算の一部に偏微分方程式系のラプラス変換を用いるので、いままでと記号を変え, 多項式の変数はギリシャ文字を使うことにする。$\Xi = \{\xi \mid \xi = (\xi_1, \xi_2, .., \xi_n) \in \mathbf{C}^n\}$ とおく。

イデアル $I = \langle f_1, f_2, ..., f_n \rangle$ による多項式環の剰余 $E = \mathbf{C}[\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n]/I$ の双対空間 E^* の要素は, 零次元の零点集合 $V = V(I)$ に台を持つ超関数となるが, その定義関数は次により特徴付けられる。

補題　$i : \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_\Xi}(\mathcal{O}_\Xi/I,\ \mathcal{O}_\Xi) \to H^n_{[V]}(\mathcal{O}_\Xi)$ を自然な写像とする。このとき, 次が成り立つ。

$$i(\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_\Xi}(\mathcal{O}_\Xi/I,\ \mathcal{O}_\Xi)) = \{h \in H^n_{[V]}(\mathcal{O}_\Xi) \mid Ih = 0\}$$

また, $m = [\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}]$ とおくと, ベクトル空間 $\{h \in H^n_{[V]}(\mathcal{O}_\Xi) \mid Ih = 0\}$ は $\mathcal{O}_\Xi$ 上 m で生成される。

注意　イデアル I の辞書式項順序によるグレブナ基底がいわゆる shape lemma をみたすような場合は, 我々の問題は一変数的であり, ユークリッドの互除法で m の計算が可能である。また, V の単純点での m の計算も容易である。しかし, 一般には重複度の高い零点での m の表示を求めることは可換環の枠では困難を伴う。

2　ホロノミック D-加群を用いた計算

領域Ξ上の正則関数を係数に持つ線型微分作用素全体のなす環の層を $\mathcal{D}_\Xi$で表す事にする。この時 $\mathcal{H}^n_{[V]}(\mathcal{O}_\Xi)$ は連接な左 $\mathcal{D}_\Xi$加群の構造を持ち、更に、佐藤-河合-柏原の意味で極大過剰決定系となる。そこで, 代数的局所コホモロジー群の要素 m に対し m を annihilate する偏微分作用素全体のなす左 $\mathcal{D}_\Xi$イデアルを $\mathcal{J} = \{R \in \mathcal{D}_\Xi | Rm = 0\}$ と置く。

代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[V]}(\mathcal{O}_\Xi)$ の直和分解

$$\mathcal{H}^n_{[V]}(\mathcal{O}_\Xi) = \mathcal{H}^n_{[A_1]}(\mathcal{O}_\Xi) \oplus \mathcal{H}^n_{[A_2]}(\mathcal{O}_\Xi) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^n_{[A_\ell]}(\mathcal{O}_\Xi)$$

に応じて次の部分分数展開が存在する。

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_\ell, \quad m_k \in \mathcal{H}^n_{[A_k]}(\mathcal{O}_\Xi)\ (k = 1, 2, ..., \ell)$$

基本定理　各点 A_k において $\{h \mid Ph = 0, h \in H^n_{[A_k]}(\mathcal{O}_\Xi), P \in \mathcal{J}\} = \{cm_k \mid c \in C\}$ が成立する。

多項式 $f_1, f_2, ... f_n$ のヤコビ行列式を J とおき, 点 $A_k \in V$ の重複度を μ_k とおく。点 A_k に台をもつデルタ関数を δ_{A_k} であらわせば, $Jm_k = \mu_k \delta_{A_k}$ がなりたつ。このことを基本定理と組み合わせて使えば $m = \sum p_k(D_\xi)\delta_{A_k}$ のような微分作用素を用いた具体的表示を求めることが出来る。

3 グレブナ双対空間と Ehrenpreis-Palamodov の基本原理

多項式 $f(\xi) = \sum a_\gamma \xi^\gamma$ に対し $X = \{x | x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{C}^n\}$ 上の微分作用素 $F(D) = \sum a_\gamma D^\gamma$ を対応させる。ただし $D^\gamma = \dfrac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} \cdots \partial x_n^{\gamma_n}}$。

零次元イデアル $I = \langle g_1, g_2, .., g_m \rangle$ に対しラプラス変換を施し, ホロノミックな定数係数の偏微分方程式系 $G_1(D)u = G_2(D)u = \cdots G_m(D)u = 0$ を対応させる。剰余 $\mathbf{C}[\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n]/I$ の双対空間を E^* とおき, 上の偏微分方程式系の解空間を S とおけば, E^* と S とはラプラス変換で対応する。例えば, 点 A_k の座標を $(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, ..., \alpha_{k,n})$ とおくと $m \in E^*$ には $\sum p_k(x) e^{\alpha_{k,1}x_1 + \alpha_{k,2}x_2 + \cdots \alpha_{k,n}x_n} \in S$ が対応する。

4 Grothendieck duality の計算

Jacobi の積分変換 K の積分核を $\kappa(\eta, \xi) = [\dfrac{q(\eta, \xi)}{f_1(\xi) f_2(\xi) \cdots f_n(\xi)}]$ とおき $q(\eta, \xi)$ のイデアル I による剰余を（変数 η に関して）取ったものを $Nf(q)(\eta, \xi) = \sum q_i(\xi) b_i(\eta)$ とおく。多項式 q_i に対応する微分作用素を $Q_i(D)$ で表す。

定理　超関数 $m \in E^{ast}$ をラプラス変換したものを $\mathcal{L}(m)$ とおく。このとき, (基底 $\{b_i\}$ の双対基底である) 超関数 c_i のラプラス変換は $Q_i(D)(\mathcal{L}(m))$ と一致する。

例　$I = \langle \xi^3, \eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi \rangle$

代数的局所コホモロジー群 $m = [\dfrac{1}{\xi^3(\eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi)}]$ は次の方程式系の解として特徴付けられる。

$$\xi^3 m = 0, (\eta^2 + 2\xi^2 + 3\xi)m = 0,$$

$$(6\xi D_\xi + 3\eta D_\eta + 24 + 2\xi\eta D_\eta + 4\xi)m = 0$$

この方程式系をラプラス変換すれば

$$D_x^3 u = 0, (D_y^2 + 2D_x^2 - 3D_x)u = 0,$$

$$(-6D_x x - 3D_y y + 24 - 2D_x D_y y + 4D_x)u = 0$$

となり, この方程式系の多項式解を求めることで m のラプラス変換が簡単にもとまる。これが c_5 に対応している。他の双対基底の計算は微分と逆ラプラス変換で出来る。

24 Grothendieck duality と Hermite-Jacobi の多変数補間積分 III

——多変数 Hermite 補間定理——

田島 慎一　　新潟大学工学部

1 記号

多項式の regular sequence $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathrm{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ が定めるイデアル $I = \langle f_1, f_2, ..., f_n \rangle$ の零点集合を $V = V(I)$ で表す。V は ℓ 個の点 $A_1, A_2, ..., A_\ell$ から成るとする。各 A_k の重複度を μ_k とおく。

多項式環 $\mathrm{C}[z_1, z_2, ..., z_n]$ に項順序を入れ, 以下 fix する。この項順序による Gröbner 基底を取り標準的方法で, 剰余 $\mathrm{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/I$ を単項式 $b_i(z)$ $(i = 1, 2, ..., N)$ を基底とするベクトル空間とみなし, そのベクトル空間を E とおく。ただし $N = dim_C(\mathrm{C}[z_1, z_2, ..., z_n]/I) = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\ell$。

ベクトル空間 E の双対空間 E^* の要素は, V に台をもつような超関数で I により annihilate されるようなものとして特徴つけられる。

$$E_k^* = \{h \in E^* \mid supp(h) \subset A_k\}$$

とおくと, E_k^* は μ_k 次元のベクトル空間となる。このベクトル空間の基底を選び $e_{k,1}^*, e_{k,2}^*, ..., e_{k,\mu_k}^*$ とおく。これらの $e_{k,j}^*$ らは, 点 A_k に台を持つ超関数なので, 関数 φ に対して,

$$e_{k,j}^*(\varphi) = \sum a_\gamma \frac{\partial^\gamma \varphi}{\partial z^\gamma}(A_k)$$

のように作用する。

2 再生核

多項式 f_i の Hefer 分解 $f_i(z) - f_i(\zeta) = \sum_j q_{i,j}(z, \zeta)(z_j - \zeta_j)$ を用いて, $q(z, \zeta) = det(q_{i,j}(z, \zeta))$ とおく。さらに, 変数 z に関して $q(z, \zeta)$ のイデアル I による剰余を取ったものを $Nf(q)(z, \zeta) = \sum q_i(\zeta) b_i(z)$ とおく。

正則関数 $\varphi \in \mathcal{O}_X$ $(X = \mathbf{C}^n)$ に対する積分変換

$$K\varphi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \cdots \int \frac{Nf(q)(z, \zeta)\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta) f_2(\zeta) \cdots f_n(\zeta)} d\zeta$$

は, ベクトル空間 E から自分自身への恒等写像となる。積分核

$$\left[\frac{Nf(q)(z, \zeta)}{f_1(\zeta) f_2(\zeta) \cdots f_n(\zeta)}\right]$$

は, ベクトル空間 E に値を持つ超関数とみなすことが出来る。それを $\kappa(z, \zeta) \in E \otimes E^*$ で表すことにする。

3　多変数 Hermite 補間定理

超関数 $\kappa(z,\zeta)$ を, 基底 $e^*_{k,j}$ $(k=1,2,...,\ell, j=1,2,...,\mu_k)$ に関して展開しなおしたときの $e^*_{k,j}$ の係数を $e_{k,j}$ とおく。$e_{k,j}$ はベクトル空間 E に属するような z の多項式となる。次の補題は明かである。

補題　　$\{e_{k,j}\}$ たちは, 基底 $\{e^*_{k,j}\}$ の双対基底である。

従って, 次の結果を得る。

定理

$e^*_{k,j}(f)=f_{k,j}$　$k=1,2,...,\ell,\ j=1,2,...,\mu_k,\ f_{k,j}\in \mathrm{C}$ をみたす $f\in E$ は一意に存在し, $f=\sum e_{k,j}(z)f_{k,j}$ であたえられる。

まとめ

零次元イデアル I が complete intersection である場合は, Jacobi の多変数補間積分を解析することにより, Grothendieck duality が具体的に計算出来る。特に, 多項式の係数が有理数体の場合は, 数式処理を用いて計算が可能となる。Grothendieck duality を使えば, 多変数剰余定理や多変数 Hermite 補間定理の具体的なかたちを求めるアルゴリズムも構成可能となる。一般の零次元イデアルの場合も, 双対空間 E^* を計算することは可能である。実際これはホロノミックな定数係数の偏微分方程式系を解くことと同値である。線形代数等により双対性を求めてあれば, 剰余定理や補間定理が従う。

25　正則写像の一意性を導く超曲面について

城崎　学　　大阪府立大学

工学部

S を $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の超曲面とする．次の条件を考える：

(UA) 代数非退化な正則写像 $f, g : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ が $f^*S = g^*S$ をみたせば，$f = g$.

(BH) 正則写像 $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の像が S に含まれるならば，f は定数写像.

(BHC) 正則写像 $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の像が S と交わらないならば，f は定数写像.

以前に上記 3 条件を満たすものを与えたが，その次数は d^n $(d \geq 13)$ であり，また，その超曲面は少なくとも d 個の成分をもっていた．ここでは，(UA) よりも強い条件

(UL) 線形非退化な正則写像 $f, g : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ が $f^*S = g^*S$ をみたせば，$f = g$

をみたす超曲面を紹介する．

$P(w_0, w_1)$ は w_0，w_1 の d 次同次多項式で次をみたすものとする：

(U1) 線形非退化な正則写像 $f = (f_0 : f_1)$, $g = (g_0 : g_1) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ がある有理形関数 h により, $P(f_0, f_1) = h^d P(g_0, g_1)$ をみたせば, $f_j = \omega h g_j$ $(j = 0, 1)$ が成り立つ. ここで, $\omega^d = 1$.

このとき, $q \geq (2n-1)^2$ に対して, 次の多項式の零点集合 S は (UL) をみたす:

$$P(w_0, w_1)^q + P(w_1, w_2)^q + \cdots + P(w_{n-1}, w_n)^q.$$

26　Nondegenerate entire maps of $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2$

足立幸信

定義１（西野による）　$f(x,y)$ を非定数整関数とする。

（１）$\exists\alpha\in\mathbb{C}$ に対し、$f=\alpha$ の既約成分にその正規化が双曲型の Riemann 面と正則同型なもの（略して双曲型の面という）があるとき、f を双曲型の整関数と呼ぶ。

（２）高々１個の除外値を除くすべての $\alpha\in\mathbb{C}$ に対し、$f=\alpha$ の任意の既約成分が放物型の面であるとき、f を放物型の整関数と呼ぶ。

（３）（２）で"種数有限の放物型の面"としたとき、f を特殊放物型の整関数と呼ぶ。

（４）（２）で"代数型の面、即ち種数有限で有限個の puncture をもつ面"としたとき、f を代数型の整関数と呼ぶ。

定理Ａ（山口　１９７６）　$f(x,y)$ を整関数とし、$E\ni\forall\alpha$ の $f=\alpha$ のある既約成分が放物型の面であり、$capE>0\Longrightarrow f$ は放物型の整関数。

定理Ｂ（西野－山口）　$f(x,y)$ を整関数とし、$E\ni\forall\alpha$ の $f=\alpha$ のある既約成分が代数型の面であり、$capE>0\Longrightarrow f$ は代数型の整関数。

定理Ｃ（西野　１９７５）　$f(x,y)$ を代数型の整関数とすると、$f=\varphi\circ P\circ T$ と書ける。ここに $\varphi(z)$ は整関数、$P(x,y)$ は多項式、$T\in Aut(\mathbb{C}^2)$。

定義２　$F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ を非退化整写像、$P(x,y)$ は多項式とする。

（１）$\forall P$ に対し、$P\circ F$ が双曲型の整関数のとき、F は強双曲型の整写像と呼ぶ　$(F\in(SH))$。

（２）$\exists P$ に対し、$P\circ F$ が双曲型の整関数のとき、F は双曲型の整写像と呼ぶ　$(F\in(H))$。

（３）$\forall P$ に対し、$P\circ F$ が放物型の整関数のとき、F は放物型の整写像と呼ぶ　$(F\in(P))$。

（４）$\forall P$ に対し、$P\circ F$ が特殊放物型の整関数のとき、F は特殊放物型の整写像と呼ぶ　$(F\in(SP))$。

（５）$\forall P$ に対し、$P\circ F$ が代数型の整関数のとき、F は代数型の整写像と呼ぶ　$(F\in(A))$。

注意　非退化整写像$= (H) \cup (P), (H) \cap (P) = \emptyset$. $(SH) \subset (H), (SH) \neq (H), (A) \subset (SP) \subset (P), (A) \neq (SP), (SP) \neq (P)$.

定理１　$F \in (A) \iff F$は$F = F_0 \circ T$と書ける。ここにF_0は非退化多項式写像、$T \in Aut(\mathbb{C}^2)$。

F_0の値分布を調べることによって、次の定理を得る。

定理２　$F \in (A)$の必十条件は、次の（１）と（２）が成立すること。

（１）ある代数曲線Eとある自然数nがあって、$\mathbb{C}^2 - E \ni \forall p$に対し、$F^{-1}(p)$は（重複度もこめて）丁度$n$個の点より成る。

（２）E上の高々有限個の点より成る$E_0 \ni p$に対し、$F_0^{-1}(p)$は$\mathbb{C}^2$の曲線を含み、$E - E_0 \ni \forall p$に対し$F^{-1}(p)$は高々n個の点より成る。

命題１　$F = (p(x), \psi(y))$は代数型でない放物型整写像である。ここで$p(x)$,$\psi(y)$はそれぞれ多項式、超越的整関数である。

注意　$F = (x, e^y)$は特殊放物型でない放物型整写像である。

注意　放物型整写像でそのorderが$p \in [0, \infty]$のものが存在する。

定理３　Fを非退化整写像とする。高々可算個の点$E_0 \ni p$に対して$F^{-1}(p)$は$\mathbb{C}^2$の曲線を含み、高々可算個の$\mathbb{C}^2$の曲線E_1上の点を除いて$F^{-1}(p)$は重複度もこめて丁度n個の点から成る　$\Longrightarrow F$は特殊放物型整写像である。

系　$F_i (i = 1, 2)$を代数型整写像とすると、$F_1 \circ F_2$は特殊放物型整写像である。(必ずしも代数型とは限らない。)

問題１　$F_i (i = 1, 2)$を放物型整写像とするとき、$F_1 \circ F_2$は放物型か?
φ, ψを超越整関数とするとき、$(\varphi(x), \psi(y)) = (\varphi(x), y) \circ (x, \psi(y))$は放物型か?　f, gを代数型整関数とするとき、$(f, g) = (\varphi(x), \psi(y)) \circ (P \circ S, Q \circ T)$は非退化のとき放物型か?　(P,Qは多項式、$S, T \in Aut(\mathbb{C}^2)$)

問題２　f, gが放物型の整関数のとき、(f, g)が非退化なら放物型の整写像か？

問題３　放物型整写像の除外集合を調べること。measure 0か？

27　$\mathbf{C}^2$ の極小コンパクト化について

古島 幹雄 (広島大学総合科学部)
太田 友明 (九州大学大学院数理学研究科)

複素数体 $\mathbf{C}$ 上の射影的正規 Gorenstein 曲面 X が $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化であるとは、X の代数的部分集合 Y が存在して $X - Y$ が $\mathbf{C}^2$ と双正則同値であるときに言う。簡単のため、そのコンパクト化を対 (X, Y) であらわす。Riemann の拡張定理から、境界 Y は純余次元 1 すなわち X 上の Weil 因子である。$\mathbf{C}^2$ のコンパクト化 (X, Y) が**非特異**であるとは X が非特異曲面であるときに言い、**極小**であるとは第 2 Betti 数 $b_2(X) = \dim H_2(X, \mathbf{R}) = 1$ (これは Y が既約であることと同値) のときに言う。次の問題を考える。

問題：$\mathbf{C}^2$ の極小コンパクト化であるような $\mathbf{P}^3$ の超曲面をすべて決定せよ。

以下、(X, Y) は $\mathbf{C}^2$ の極小コンパクト化であるような $\mathbf{P}^3$ の次数 $d \geq 1$ の超曲面と仮定する。いくつか記号を導入する。$x := \mathrm{Sing}X = \{x_1, \ldots, x_t\}$ $(t \geq 0)$ とおく。$X - Y \cong \mathbf{C}^2$ は非特異だから、$x \subset Y$ である。$p_g(x) := \sum_i p_g(x_i)$ とおく、ただし $p_g(x_i)$ は 特異点 x_i の幾何種数である。$\pi : M \longrightarrow X$ を X の最小特異点解消とし、$E = \bigcup_i E_i := \pi^{-1}(x)$ を π の例外集合とする。$\widehat{Y}$ を Y の π による固有変換とし、$A := \widehat{Y} \cup E$ とおく。このとき $\pi : M - E \cong X - x$ だから、(M, A) は $\mathbf{C}^2$ の非特異なコンパクト化である。今、$d = 1, 2$ については容易である。実際、$d = 1$ のとき $(X, Y) = $ (超平面, 直線)、$d = 2$ のとき $(X, Y) = $ (二次錐, 母線) である。

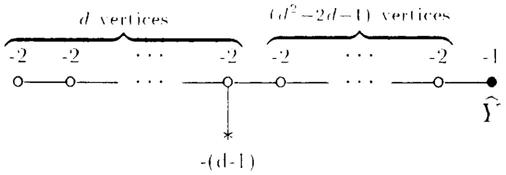
予想： $d \geq 3$ を仮定する。このとき、次が成立する：

(C1) Y は $\mathbf{P}^3$ の直線である.

(C2) x は 1 点であり、 $p_g(x) = (d-1)(d-2)(d-3)/6$ である.

(C3) $\mathrm{mult}_x X = d - 1$.

(C4) A の荷重双対グラフは



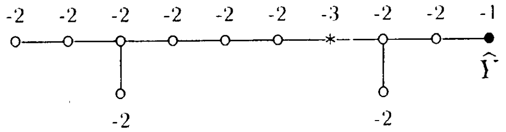
ここで、●. o. $*$ は非特異有理曲線をあらわす.

(C5) $(X, Y) \cong (V_d, \Delta_d)$ (up to deformation). ただし

$$\begin{aligned} V_d &:= \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbf{P}^3 : z_0^d = z_1^{d-1} z_2 + z_2^{d-1} z_3\} \\ \Delta_d &:= \{z_0 = z_2 = 0\}. \end{aligned}$$

この予想に対して、$d = 3, 4$ のとき、次の定理1を得た。

定理1：(1) $d = 3$ について、予想は正しい。
(2) $d = 4$ について、(X, Y) は 条件 **(C1)-(C2)** を満たし、さらに **(C3)-(C5)** と **(C3*)-(C5*)** のいずれか一方を満たす：
(C3*) $\mathrm{mult}_x X = 2$.
(C4*) A の荷重双対グラフは



(C5*) $(X, Y) \cong (V_4^*, \Delta_4^*)$ (up to deformation), ただし

$$V_4^* := \{(z_1 z_2 + z_3^2)^2 = z_0^3 z_2 + z_2^3 z_3\}$$
$$\Delta_4^* := \{z_2 = z_3 = 0\}.$$

この結果から、予想には仮定『X は $(d-1)$ 重点をもつ』が必要になる。実際、この仮定の下で予想は正しいことがわかる (定理3)。$d \geq 4$ については、次の定理2, 3を得た。

定理2：$d \geq 4$ を仮定する。このとき、次が成立する：
(1) Y は $\mathbf{P}^3$ の直線である.
(2) $x = \{x_1\}$ or $\{x_1, x_2\}$. ただし $p_g(x_1) = (d-1)(d-2)(d-3)/6$、$x_2$ は A_* 型の有理2重点である.
(3) A の荷重双対グラフは図1にある非特異有理曲線からなる樹状グラフであり、$\hat{Y}^2 = -1$ かつ $E_i^2 \leq -2$ $(\forall i)$ である. ここで $\alpha\beta = 0$ も許す.
(4) $\phi : M \longrightarrow M^*$ を A 上の有限回のブローダウンであって、$(M^*, \phi(A))$ が $\mathbf{C}^2$ の (Morrow の意味での) 最小正規コンパクト化であるものとする. このとき、$A^* := \phi(A)$ の荷重双対グラフは $\overset{1}{\circ}$ または $\overset{0}{\circ}\!-\!\overset{-m}{\circ}$ $(m \geq 2)$ のいずれかである. 特に、$\mathbf{P}^1$ 上の $\mathbf{P}^1$-fibration $f : M \longrightarrow \mathbf{P}^1$ と E の既約成分 E_{i_s} が存在して、f は唯一つの特異ファイバー F を持ち E_{i_s} は f の切断であり $A = E_{i_s} \cup F$ が成り立つ.

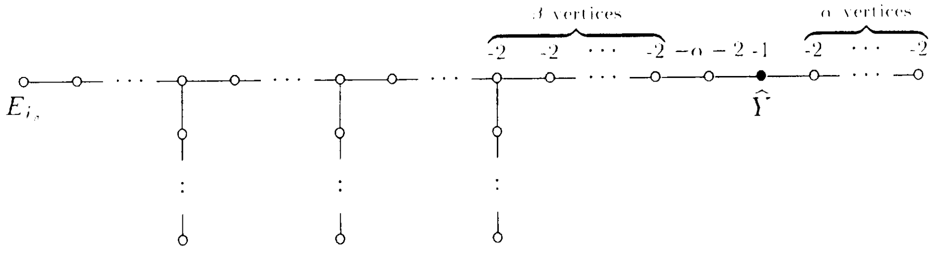


図1

定理3：$d \geq 4$ かつ X が $(d-1)$ 重点をもつならば、予想は正しい。

28　$\mathbf{C}^2$から$\mathbf{C}^3$への代数的埋め込みの構造 (正規 4 次超曲面の場合)

太田 友明 (九州大学大学院数理学研究科)

問題：任意の代数的埋め込み $f:\mathbf{C}^2 \hookrightarrow \mathbf{C}^3$ は線型な埋め込みと同値であるか？ すなわち、各 f に対して、$\mathbf{C}^3$ の代数的自己同型 α が存在して $\alpha \circ f$ は線型な埋め込みになるか？

この問題を $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化による方法で調べるために、$\mathbf{C}^3$ を $\mathbf{P}^3$ のアフィン開集合と自然に同一視する。X_f を $f(\mathbf{C}^2)$ の $\mathbf{P}^3$ における閉包とし、$Y_f := X_f - f(\mathbf{C}^2)$ とおく。対 (X_f, Y_f) はその境界 Y_f が X_f の超平面切断であるような $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化である。前回の講演で次の結果を報告した。

定理 A： $f:\mathbf{C}^2 \hookrightarrow \mathbf{C}^3$ を代数的埋め込みとする。$\deg X_f \leq 3$ を仮定する。このとき、$\mathbf{C}^3$ の代数的自己同型 α が存在して $\alpha \circ f$ は線型な埋め込みになる。

X_f が正規 4 次曲面の場合にこの結果がどうなるのか調べる。

以下、X は $\mathbf{P}^3$ の正規 4 次曲面、Y は Xの超平面切断であって、$X-Y$ が $\mathbf{C}^2$ と双正則同値であると仮定する。X は有理的な正規 4 次曲面だから、$x := \mathrm{Sing}X$ はただ一つの最小楕円型特異点 x_1 と高々有理 2 重点からなる。$\pi : M \longrightarrow X$ を X の最小特異点解消とし、$E = \bigcup_i E_i := \pi^{-1}(x)$ を π の例外集合とする。$\pi^{-1}(x_1)$ の定める基本サイクル Z とすると、Laufer により、$Z^2 = -1, -2, -3$ が知られている。$\widehat{Y}$ を Y の π による固有変換とすると、$(M, \widehat{Y} \cup E)$ は $\mathbf{C}^2$ の非特異なコンパクト化である。

定理 1： $\widehat{Y} \cup E$ の双対グラフは図 1 にある 2 4 種類に分類される。
(ただし、$\odot$. ●. o. △. □ はそれぞれ自己交点数 0. −1. −2. −3. −4 の非特異有理曲線であって、特に何も書かない限り、$\odot$. ● は $\widehat{Y}$ の既約成分であり、o. △. □ は E の既約成分である。)

$Z^2 = -2, -3$ については、線形系を計算して (X, Y) を up to $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^3)$ で explicit に書き下した。また、アフィン曲面 $X - Y \hookrightarrow \mathbf{C}^3$ を超平面の上にうつす $\mathbf{C}^3$ の代数的自己同型を explicit に構成した。$Z^2 = -1$ については現在計算中である。次の定理が得られる。

定理 2： $f:\mathbf{C}^2 \hookrightarrow \mathbf{C}^3$ を代数的埋め込みとする。X_f は正規 4 次曲面とし、$Z_f^2 = -2, -3$ を仮定する。このとき、$\mathbf{C}^3$ の代数的自己同型 α が存在して $\alpha \circ f$ は線型な埋め込みになる。ただし、Z_f は X_f が持つただ一つの最小楕円型特異点の最小特異点解消の定める基本サイクルである。

24種類

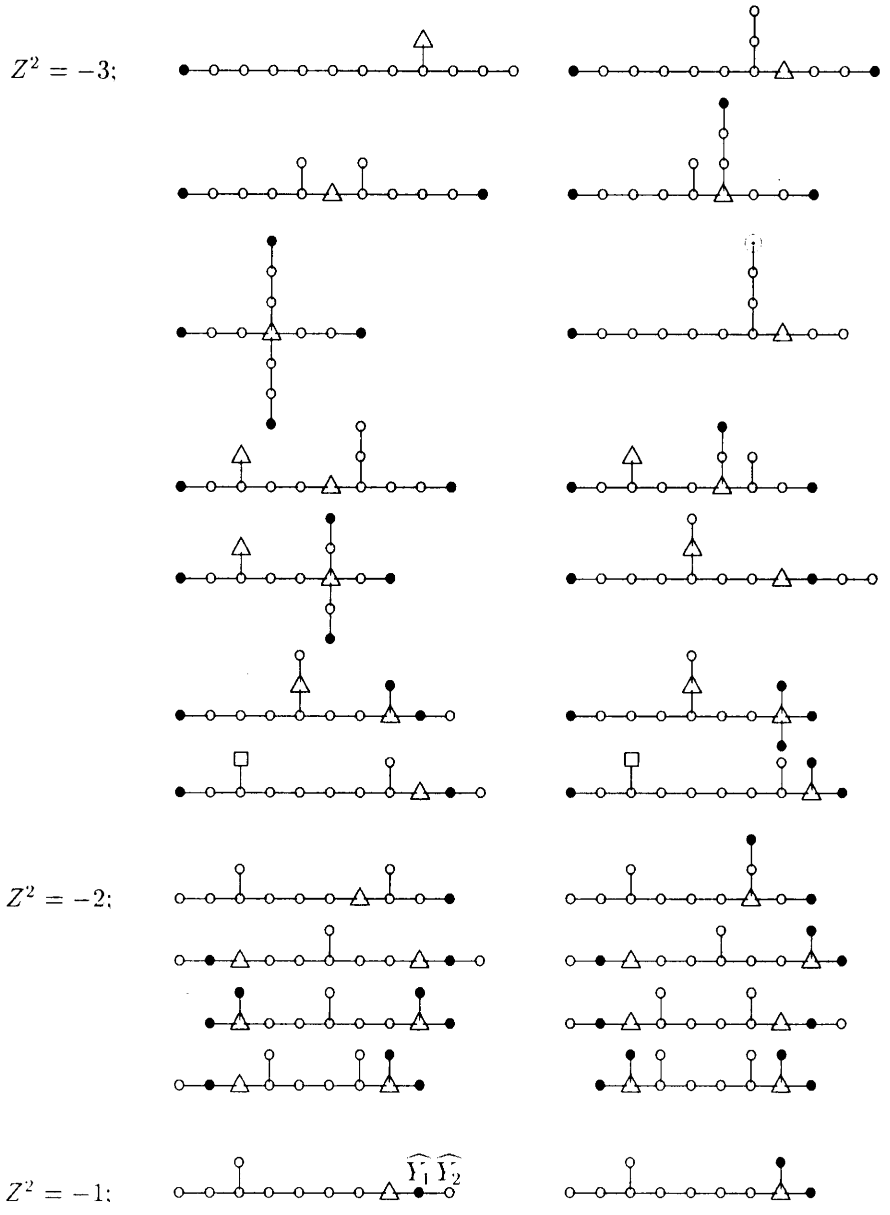


図 1

参考文献

1. T. Ohta. *The structure of algebraic embeddings of* $\mathbf{C}^2$ *into* $\mathbf{C}^3$ (*The cubic hypersurface case*), to appear in Kyushu J. Math. **53** (1999).

特 別 講 演

孤立特異点の変形へのCR解析幾何の応用

宮嶋 公夫（鹿児島大学理学部）

序. CR構造は、有界領域の双正則同値問題を境界構造を通じて扱った H. Poincare, E. Cartan の研究にその原点があるといわれているが、それを正規孤立特異点芽の変形へ応用しようというアイデアは H. Rossi による (cf. [Ku]). それは、実5次元以上の強擬凸ＣＲ多様体は、必ず、正規 Stein 空間の境界になるということに基づいている. 実3次元の強擬凸ＣＲ構造の中には特異点の境界構造にはなり得ないものがあるので、倉西氏は実5次元以上の強擬凸ＣＲ構造の変形を正規孤立特異点の変形の観点から考察し、正規孤立特異点の変形の semi-universal 族の構成はコンパクト複素多様体の変形の場合の手法で処理可能であろうということを [Ku] で示している. 倉西氏のこの方向付けにちなんで、正規孤立特異点の変形の semi-universal 族を強擬凸ＣＲ構造の変形を利用して構成するという問題は「倉西プログラム」と呼ばれる.

本講演では、曲面特異点の場合も自然に含む形で倉西プログラムは完結されるということについて報告したい（証明の詳細に付いては、[M2] を参照）.

1. 倉西プログラム

$V \subset \mathbf{C}^N$ を $\overline{B(c)}$ の近傍で定義された n 次元正規部分解析空間とし、原点 o だけに特異点を持つものとする. 但し、$B(c)$ は原点を中心とし半径 c の超球を表す.

$M := V \cap S_c^{2N-1}$ $(S_c^{2N-1} := \partial B(c))$ とおくと、M は実 2n-1 次元可微分多様体で、$U := V \setminus o$ 上の複素構造は M 上に強擬凸ＣＲ構造を引き起こす.

我々は M 上のＣＲ構造の変形を考察するのであるが、（我々の興味は孤立特異点の境界構造としてのＣＲ構造だけにあるので、特にことわらない限り）考察するＣＲ構造は強擬凸なものだけに限ることにする.

倉西プログラムを完結するために解決すべき問題点は次の３点である.

(I) ＣＲ構造は有界領域の双正則同値分類に適合した概念であるので、ＣＲ同値でない（無限に）多くのＣＲ構造が同じ特異点の境界構造になり得る. この難点を避けるためには自然でないＣＲ構造の変形理論を考える必要がある.

(II) 変形族を構成する個々のＣＲ構造が正規孤立特異点の境界をなしている場合、それらの特異点（達）は特異点の変形族をなしてい

るのだろうか？　特異点の変形族には flat という代数的な条件が課せられているだけに自明ではない問題点である．

(III) 上記 (I), (II) の問題点の解消の仕方が明らかになったら、(V,o) の変形の semi-universal 族に対応するＣＲ構造の変形族を構成する．

第１の問題点は [Ku] において解決されている．　そこでは、M の管状近傍の変形内で M を動かして得られる全てのＣＲ構造は同一視されるべきであるという立場に立った変形論が展開されている（このような立場は、謂わば、複素管状近傍内での wiggle によるＣＲ構造の変形を無視する立場であり、「wiggle を法とする変形論」と言える）．そこでは、$\{\exp u \mid u \in A_b^0(T^{1,0}U_{|M}),\, u : \mathrm{small}\}$ に複素構造の変形において可微分変換群が果たしている役割を持たせれば、複素構造の変形の場合と平行した定式化ができ、更に、(V,o) の変形の境界構造を（up to wiggle で）全て含んでいるような CR 構造の変形族が構成できるということが示されている．

2. ＣＲ構造の変形と正規孤立特異点の変形

第２の問題点について考えてみる．

強擬凸ＣＲ構造と正規孤立特異点との間の関係は次のようであった：

強擬凸ＣＲ多様体 $M \longrightarrow M$ を凸境界とする複素多様体片
$\longrightarrow M$ を境界とする複素解析空間

この関係は変形族の間の関係としても保存されるだろうか？

2.1.「強擬凸ＣＲ構造の変形族 $\longrightarrow$ 複素多様体片の変形族」．　$\dim_{\mathbf{R}} M \geq 7$ の場合に、ＣＲ構造の変形族は管状近傍の（形式）変形族に拡張されることが証明されている (cf. [M1])．従って、(少なくとも高次元の場合には）この過程には本質的な差は生じないと思われる．

2.2.「複素多様体片の変形族 $\longrightarrow$ 複素解析空間の変形族」． この過程での問題点は、M の管状近傍の変形に対して、その flat Stein completion が可能であるかという点である．　Flat Stein completion が可能であるための必要条件として「管状近傍の全ての正則関数が変形に沿って正則拡張可能であること」がある．　一方、管状近傍の変形族が $\mathbf{C}^N$ 内の部分多様体の族として埋め込まれていれば、(このような変形族を stably embeddable 変形族と呼ぶことにする） Stein completion が可能であることが藤木によって示されており、更に、[B-E] Theorem 5.1 と同じ論法で、その Stein completion は flat 変形族になっていることが分かる．　従って、次の関係が成り立つ：

flat Stein completion が可能 $\Longleftrightarrow$ 全ての正則関数が変形に
沿って正則拡張可能 $\Longleftrightarrow$ stably embeddable 変形族である

管状近傍の stably embeddable 変形の CR-版は「CR 構造の stably embeddable 変形」(定義は次節参照）であるが、実はこれが実際に（形

式変形のレベルで）特異点 (V, o) の変形に対応していることが証明される.

定理 2.1. M 上の CR 構造の *stably embeddable* 変形の形式変形族に対して、其れを境界とするような V の形式変形族が存在する.

定理 2.1 は、$\dim_{\mathbf{R}} M = 3$ の場合に [B-E] で証明が与えられているが、その論法は $\dim_{\mathbf{R}} M \geq 5$ の場合でも有効である.

これで、第 2 の問題点は

> ＣＲ構造の stably embeddable 変形を（wiggle を法として）扱えばよい

という形で解決されたことになる.

3. CR 構造とその変形

CR 構造の stably embeddable 変形を扱うための準備として、CR 構造とその変形について必要最小限の定式化を行っておく.

3.1. CR 構造.

定義 3.1. M 上のＣＲ構造とは、次をみたす部分束 $\bar{S} \subset \mathbf{C}TM$ のことを言う：

(1) $S \cap \bar{S} = \{0\}$ 但し、$S := \overline{\bar{S}}$,
(2) $\mathrm{rank}_{\mathbf{C}} \bar{S} = n - 1$,
(3) $[\bar{X}, \bar{Y}] \in \Gamma(M, \bar{S})$ for $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(M, \bar{S})$.

ＣＲ構造に関する複素関数論は $\bar{S}$ 内の接ベクトルを反正則ベクトルとして普通の複素関数論と平行に定式化される.

Cauchy-Riemann 作用素: $\bar{\partial}_b u(\bar{X}) := \bar{X}(u)$ $(\bar{X} \in \Gamma(M, \bar{S}))$,
CR 関数: $f \in C^\infty(M)$ $s.t.$ $\bar{\partial}_b f = 0$,
接 $(0, q)$**-形式:** $A_b^{0,q} := C^\infty(M, \wedge^q \bar{S}^*)$.

複素多様体 U は次のようなＣＲ構造を $°T''$ を M 上に引き起こす：

$$°T'' := \mathbf{C}TM \cap T^{0,1}U_{|M}. \tag{3.1}$$

以後、$°T' := \overline{°T''}$ と記すことにする. また、部分束 $F \subset \mathbf{C}TM$ s.t. $F \simeq \mathbf{C}TM / \left(°T' \oplus °T''\right)$ を固定し、次のように記す：

$$T' := F \oplus °T'. \tag{3.2}$$

3.2. **CR構造の perturbation.** CR 構造 ${}^{\circ}T''$ の perturbation とは、$\mathbf{C}TM$ の部分束としての perturbation で定義 3.1 の条件を満たすものを言う. ${}^{\circ}T''$ の small perturbation は、次の可積分条件を満たす $\phi \in A_b^{0,1}(T')$ によって ${}^{\phi}T'' := \{\bar{X} - \phi(\bar{X}) \,|\, \bar{X} \in {}^{\circ}T''\}$ と表わされる (cf. [Ak1]):

(可積分条件) $$P(\phi) := \bar{\partial}_b\phi - R(\phi) = 0.$$

ここで、$R(\phi)$ は非線形部分を表す.

4. CR構造の STABLY EMBEDDABLE 変形

第3の問題点について考察する. 我々は次のような状況を考えている:

V は $\overline{B(c)} \subset \mathbf{C}^N$ の近傍で $h_1(w) = \cdots = h_{m_1}(w) = 0$ で定義されている. $f_0 : M \hookrightarrow \mathbf{C}^N$ で自然な埋め込み写像を表す.

これらの埋め込みを接束レベルで表す次の完全列は基本的である.

$$0 \to T' \overset{F_0 := \rho^{1,0}\circ df_0}{\to} T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M} \overset{r}{\to} N_{U/\mathbf{C}^N|M} \to 0.$$

4.1. **CR構造の stably embeddable 変形の定式化.** CR構造の stably embeddable な変形族は次のように定義される.

定義 4.1. [変形族] パラメータ空間 T は $\mathbf{C}^d$ の原点での解析集合芽とし、定義イデアルを $\mathcal{I}_T \subset \mathbf{C}\{t_1, \ldots, t_d\}$ で表す.

次の (0)-(2) を満たす $\phi(t) \in A_b^{0,1}(T')[[t_1, \ldots, t_d]]$ とを ${}^{\circ}T''$ の stably embeddable な変形族とよぶ.

(0) $\phi(0) = 0$. $\forall k >> 0$ に対して、$\phi(t)$ は Folland-Stein norm $\|\ \|_{(k)}$ に関して収束べき級数.

(1) $P(\phi(t)) \equiv 0 \mod \mathcal{I}_T A_b^{0,2}(T')[[t_1, \ldots, t_d]]$.

(2) 次を満たすような $f(t) \in A_b^0(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M})[[t_1, \ldots, t_d]]$ が存在する:

  (a) $f(0) = 0$. $\forall k >> 0$ に対して、$f(t)$ は Folland-Stein norm $\|\ \|_{(k)}$ に関して収束べき級数.

  (b) $\bar{\partial}_b^{\phi(t)}(f_0 + f(t)) \equiv 0 \mod \mathcal{I}_T A_b^{0,1}(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M})[[t_1, \ldots, t_d]]$.

[**wiggle**] 我々は、次のような変形族 $\phi(t)$ は ($\mathbf{C}^N$ 内に埋め込まれた) 複素多様体の変形族 $\pi : \mathcal{U} \to T$ から wiggle により得られると呼ぶことにし、同一の複素多様体の変形族 $\pi : \mathcal{U} \to T$ から wiggle により得られる2つの変形族は同一視することにする:

$\mathbf{C}^N \times T$ に 正則に埋め込まれた M の管状近傍の変形族

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{C}^N \times T \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ T & \xrightarrow{=} & T \end{array}$$

とそこへの正則埋め込みの変形族 $g: M \times T \to \mathcal{U}$ が存在して

1. $g(0)$ は自然な埋め込み $M \to U$ に一致する.
2. $\phi(t)$ は埋め込みの族 g から引き起こされる.

［**1st order 変形空間**］ 1st order wiggles は 1st order 変形族の間に同値関係を定義し、次の関係が成り立つ：

$$\{\text{1st order stably embeddable 変形族}\}/\{\text{1st order wiggles}\}$$
$$\simeq \operatorname{Ker}\{H^1(T') \to H^1(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M})\}$$

従って、ＣＲ構造の stably embeddable 変形族 $(\phi(t), f(t))$ に対して、1st order 変形写像は次のように与えられる：

$$T_0T \ni v \to v(\phi(t)) \in \operatorname{Ker}\{H^1(T') \to H^1(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M})\}$$

また、$\mathbf{C}^N$ に stably に埋め込まれる管状近傍の変形を（up to wiggles で）全て含むという性質は次のように定式化される.

定義 4.2. ［**倉西 versality**］変形族 $\phi(t)$ が倉西 versal であるとは、次の性質が成り立つときを言う： $\mathbf{C}^N \times S$ に正則に埋め込まれた M の管状近傍の任意の変形族 $\pi: \mathcal{U} \to S$ に対して、正則写像 $\tau: S \to T$ が存在して $\phi(\tau(s))$ は $\pi: \mathcal{U} \to S$ から wiggle により得られる.

定義 4.3. ［**倉西 semi-universality**］$\phi(t)$ が次の２性質を持つとき、倉西 semi-universal 族であると言う.
(1) 倉西 versal、(2) 1st order 変形写像が bijective.

4.2. **倉西 semi-universal 族.** 倉西 semi-universal 族はＣＲ構造の変形族として unique に決まるわけではないが、（存在すれば）up to wiggle で unique である. (V, o) の変形との間に、次の比較定理が成り立つ.

定理 4.4. $c > 0$ を十分小に取っておけば、M 上のＣＲ構造の *stably embeddable* 変形の倉西 *semi-universal* 族は、(V, o) の変形の *semi-universal* 族から *wiggle* によって得られる.

これで、ＣＲ構造の stably embeddable 変形の倉西 semi-universal 族を構成すれば、第３の問題点が解決されることになる.

5. 倉西 SEMI-UNIVERSAL 族の構成

CR 構造の stably embeddable 変形の倉西 semi-universal 族の構成を行う. 構成法のモデルは pewerseries-method による複素多様体の semi-universal 族の構成（cf. [Kod]）である. それは、deformation complex と呼ばれる微分複体に関する調和解析に基づいて行われる. ここで、deformation complex とは、次の (1)-(4) の性質を備えた微分複体 (K^q, d) のことである：(1) pre-object（複素多様体の変形の場合は概複素構造）の perturbation が K^1 の元で表される、(2) その可積分条件は K^2 の元

として表現される、(3) $H^1(K^\bullet)$ は 1st order 変形空間を表す、(4)（パラメータに関して）高次の変形族へ拡張する際の obstruction は $H^2(K^\bullet)$ の元で表される.

5.1. **Deformation complex.** ＣＲ構造の stably embeddable 変形の場合は、1st order 変形空間と高次の変形族へ拡張する際の obstruction の空間は次のようになる：

命題 5.1. (1) *1st order* 変形空間$= \mathrm{Ker}\{H^1(T') \xrightarrow{F_Q} H^1(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M})\}$,
(2) *obstruction* の空間$= \mathrm{Ker}\{H^1(N_{U/\mathbf{C}^N}{}_{|M}) \xrightarrow{H} H^1(\oplus^{m_1} 1_M)\}$.

ここで、H は $T^{1,0}\mathbf{C}^N \ni v \to (v(h_1(w)), \ldots, v(h_{m_1}(w))) \in \oplus^{m_1} 1_{\mathbf{C}^N}$ で決まる $\overline{B(c)}$ の近傍上のベクトル束準同型写像を表す.

次の２重複体 $K^{\bullet,\bullet}$ に付随した複体 $(K^\bullet, d)$ がＣＲ構造の stably embeddable 変形の deformation complex になる：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \to & H_b^0(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M}) & \xrightarrow{H} & H_b^0(\oplus^{m_1}1_M) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
0 & \to & K^{0,0} = A_b^0(T') & \xrightarrow{F_Q} & A_b^0(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M}) & \xrightarrow{H} & A_b^0(\oplus^{m_1}1_M) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \bar\partial_b & & \downarrow \bar\partial_b & & \downarrow \bar\partial_b & & \\
0 & \to & A_b^{0,1}(T') & \xrightarrow{F_Q} & A_b^{0,1}(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M}) & \xrightarrow{H} & A_b^{0,1}(\oplus^{m_1}1_M) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \bar\partial_b & & \downarrow \bar\partial_b & & \downarrow \bar\partial_b & & \\
0 & \to & A_b^{0,2}(T') & \xrightarrow{F_Q} & A_b^{0,2}(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M}) & \xrightarrow{H} & A_b^{0,2}(\oplus^{m_1}1_M) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \bar\partial_b & & \downarrow \bar\partial_b & & \downarrow \bar\partial_b & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

ここで、管状近傍上の正則ベクトル束 E に対して、$H_b^0(E_{|M}) := \{u \in A_b^0(E_{|M}) | \bar\partial_b u = 0\}$、$i$ は自然な包含写像を表す.

実際、次の命題は、$K^{\bullet,\bullet}$ の定義より明らか.

命題 5.2.

(1) $$H^1(K^\bullet) \simeq \mathrm{Ker}\{H^1(T') \xrightarrow{F_Q} H^1(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M})\}$$

(2) $$H^2(K^\bullet) \simeq \mathrm{Ker}\{H^1(N_{U/\mathbf{C}^N}{}_{|M}) \xrightarrow{H} H^1(\oplus^{m_1}1_M)\}$$

5.2. **Homotopy formula.** 複素多様体の semi-universal 族構成は、調和解析に基づいて行われるが、その際必要とされるのは次の３つの作用素とそれらの作用素ノルムの評価である：(1) コホモロジー空間への射影、(2) 閉形式の空間への射影、(3) $\bar\partial$-方程式の解作用素.

微分複体 $(K^\bullet, d)$ に関しての作用素 (1)-(3) とそれらのノルムの評価は次のように得られる．ただし、CR 解析に関する関数ノルムとしては Folland-Stein norm (cf. [F-S]) を採用する．

定理 5.3. $q = 1, 2$ に対して、

- $Z_q : K^q \to \mathrm{Ker}\ d \cap K^q$,
- $Q_q : \mathrm{Ker}\ d \cap K^q \to K^{q-1}$

が存在して次を満たす：

(1) $Z_q u = u$ *for* $u \in \mathrm{Ker}\ d \cap K^q$,

(2) $dQ_q d = d$.

定理 5.4. 定理 *5.3* で得られた Z_q, Q_q に関して次のノルムの評価が得られる．

(1) $(a_1, b_0, c_{-1}) \in K^1$ に対して、

- $Z_1(a_1, b_0, c_{-1}) = (a_1', b_0', c_{-1}')$,
- $Q_1(a_1', b_0', c_{-1}') = (a_0'', b_{-1}'')$

とする．このとき、次の評価が成り立つ

$$||a_0''||_{(k+1)} \le C||a_1'||_{(k)} \le C'||a_1||_{(k)}.$$

(2) $(a_2, b_1, c_0) \in K^2$ に対して、

- $Z_2(a_2, b_1, c_0) = (a_2', b_1', c_0')$,
- $Q_2(a_2', b_1', c_0') = (a_1'', b_0'', c_{-1}'')$

とする．このとき、次の評価が成り立つ

$$||a_1''||_{(k)} + ||b_0''||_{(k+1)} \le C||b_1'||_{(k)} \le C'||b_1||_{(k)}.$$

定理の証明は、$A_b^{0,q}(T')$, $A^{0,q}(T_b^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M})$, $A_b^{0,q}(N_{U/\mathbf{C}^N|M})$ $(q = 0, 1)$ に関する標準的な調和解析だけに基づいて行うことができる（[M2] §5 参照）．証明に利用する「標準的な調和解析」とは次のものを言う:

$\dim_{\mathbf{R}} M = 2n - 1 \ge 5$ **の場合:** (cf. [F-K], [F-S]) M 上の正則ベクトル束 $\mathbf{E}$ に対して、$1 \le q \le n-2$ の範囲で次が成り立つ：
$\exists \rho : A^{0,q}(\mathbf{E}) \to \mathrm{Ker}\ \Box_b, \quad \exists N_b : A^{0,q}(\mathbf{E}) \to A^{0,q}(\mathbf{E}) \quad \text{s.t.}$
(1) $\Box_b N_b = 1 - \rho$, (2) $||N_b u||_{(k+2)} \le C||u||_{(k)}$.
ここでは、$\Box_b := \bar\partial_b \bar\partial_b^* + \bar\partial_b^* \bar\partial_b$ としている．

$\dim_{\mathbf{R}} M = 3$ **の場合:** (cf. [Koh], [B-G], [M3]) Ω は複素曲面 X 内の強擬凸有界領域、E は X 上の正則ベクトル束で、$M = \partial\Omega$, $\mathbf{E} = E_{|M}$ が成り立っているとする．このとき、$q = 0, 1$ に対して、次が成り立つ：
$\exists \rho^{0,q} : A^{0,q}(\mathbf{E}) \to \mathrm{Ker}\ \Box_b^{0,q}, \quad \exists N_b^{0,q} : A^{0,q}(\mathbf{E}) \to A^{0,q}(\mathbf{E}) \quad \text{s.t.}$
(1) $\bar\partial_b^* \bar\partial_b N_b^{0,0} = N_b^{0,0} \bar\partial_b^* \bar\partial_b = 1 - \rho^{0,0}$, $\bar\partial_b N_b^{0,0} \bar\partial_b^* = 1 - \rho^{0,1}$,
(2) $||N_b^{0,0} u||_{(k+2)} \le C||u||_{(k)}$, $||\rho^{0,0} u||_{(k)} \le C||u||_{(k)}$, $||\rho^{0,1} u||_{(k)} \le C||u||_{(k)}$.
ここでは、$\Box_b^{0,0} := \bar\partial_b^* \bar\partial_b$, $\Box_b^{0,1} := \bar\partial_b \bar\partial_b^*$ としている．

5.3. **倉西 semi-universal 族の構成（形式変形族としての構成）.** 倉西 semi-universal 族の構成は、次の様な対応に基づいて、小平-Nirenberg-Spencer による複素多様体の変形の semi-universal 族の構成をモデルとしてなされる.

モデルケース 複素構造の変形	CR構造の stably embeddable 変形
概複素構造 $\phi \in A^{0,1}(T^{1,0}X)$	 $(\phi,\, f,\, k) \in K^1 := K^{0,1} \oplus K^{1,0} \oplus K^{2,-1}$
可積分条件 $P(\phi) = \bar\partial\phi - \frac{1}{2}[\phi,\phi] = 0$ in $A^{0,2}(T^{1,0}X)$	$P(\phi, f, k) :=$ $(\bar\partial_b\phi - R(\phi),\, \bar\partial^\phi(f_0 + f),\, (h + \tilde k)\circ(f_0 + f))$ $= d(\phi,\, f,\, k) - R_K(\phi,\, f,\, k)$ $= (0, 0, 0)$ in $K^2 := K^{0,2} \oplus K^{1,1} \oplus K^{2,0}$
帰納的構成 $\phi_\mu(t) :=$ $\frac{1}{2}\bar\partial^* G[\phi^{(\mu-1)}(t), \phi^{(\mu-1)}(t)]$ の μ 次斉次部分	 $(\phi_\mu(t),\, f_\mu(t),\, k_\mu(t)) :=$ $Q_2 Z_2 R_K(\phi^{(\mu-1)}(t),\, f^{(\mu-1)}(t),\, k^{(\mu-1)}(t))$ の μ 次斉次部分

ここで、（可積分条件の第 3 項）$(h + \tilde k)\circ(f_0 + f)$ は V の定義方程式 $(h_1, \ldots, h_{m_1})$ と CR-function $k_\lambda\,(\lambda = 1, \ldots, m_1)$ の拡張 $\tilde k_\lambda \in H^\infty(\overline{B(c)})$ の和と C^∞-写像 $f_0 + f$ との合成を表すが、これは、f_0 を中心とする f に関する Taylor 級数の意味である．従って、厳密には $(h+\tilde k)\circ(f_0+f) \in K^{2,0}$ とはならないが、小平-Nirenberg-Spencer powerseries method を遂行する際には Taylor 級数の無限項を扱うことはないので、semi-universal 族構成の際には問題は生じない.（拡張線形作用素 $H^0_{CR}(M) \to H^\infty(\overline{B(c)})$ の存在は [Ad], [B-E] Theorem A.1 で証明されている.）ここで、$H^\infty(\overline{B(c)}) := \{\tilde k \in C^\infty(\overline{B(c)}) \mid B(c)$ 上 $\bar\partial\tilde k = 0\}$.

$R_K(\phi,\, f,\, k)$ は非線形部分を表す．　また、$\phi_\mu(t), \phi^{(\mu-1)}(t)$ でそれぞれ $\phi(t)$ の μ 次斉次部分と $\mu - 1$ 次多項式部分を表わしている．$f(t)$, $k(t)$ についても同様である.

5.4. **倉西 semi-universal 族の構成（形式変形族の収束性）.** $(\phi(t),\, f(t),\, k(t))$ を 5.3 節の議論により構成された変形族とする．$\phi(t), f(t)$ が（Folland-Stein norm に関して）収束することを示す.（$k(t)$ の収束性は示さないが、CR 構造の stably embeddable 変形族の定義には $k(t)$ は関与しない.）　$\phi(t), f(t)$ の収束性の証明は、$A(t) := \frac{b}{16c}\sum_{\mu\geq 1}\frac{c^\mu}{\mu^2}(t_1 + \cdots + t_d)^\mu$ による優級数評価を示すという標準的な方法で行われる.

モデルケース 複素構造の変形	ＣＲ構造の stably embeddable 変形
$\|\|\phi_\mu\|\|_k(t)$	$\|\|\phi_\mu\|\|_{(k)}(t) + \|\|f_\mu\|\|_{(k+1)}(t)$
$<< C\|\|[\phi^{(\mu-1)}(t), \phi^{(\mu-1)}(t)]\|\|_{k-1}$	$<< C\|\|\phi^{(\mu-1)}(t) \cdot f^{(\mu-1)}(t)\|\|_{(k)}$
$<< C'\|\|\phi^{(\mu-1)}\|\|_{k-1}(t)\|\|\phi^{(\mu-1)}\|\|_k(t)$	$<<$???
$<< C''A(t)^2$	

もし

$$\phi(t) \in A_b^{0,1}({}^\circ T')[[t_1, \ldots, t_d]] \tag{5.1}$$

という付加的条件が成り立っていれば、??? の部分は

$$<< C'||\phi^{(\mu-1)}||_{(k)}(t)||f^{(\mu-1)}||_{(k+1)}(t)$$

となり、$A(t)$ による $||\phi||_{(k)}(t)$, $||f_\mu||_{(k+1)}(t)$ の優級数評価に至ることができる．

従って、5.3 節での $(\phi(t), f(t), k(t)) \in K^1[[t_1, \ldots, t_d]]$ の構成を、付加的条件 (5.1) が成り立つように修正することが（倉西 semi-universal 族構成に関して）最後に残された課題となる．

5.5. 倉西 semi-universal 族の構成（形式変形族構成の修正）． 付加的条件 (5.1) は、（stably embeddable とは限らない）CR 構造の（wiggle を法とする）変形理論の場合でも、その倉西 semi-universal 族構成の際に収束性を保証する決定的な条件として現われていた（cf. [Ak2]）．しかし、[Ak2] の場合と我々の場合とでは状況が異なっている．[Ak2] では、$\phi^{(\mu-1)}(t) \to \phi_\mu(t)$ の過程には $\bar\partial_b A_b^0(T')$ だけの自由度があったが、我々の場合の $(\phi^{(\mu-1)}(t), f^{(\mu-1)}(t), k^{(\mu-1)}(t)) \to (\phi_\mu(t), f_\mu(t))$ の過程に含まれる自由度は $F_0 A_b^0(T') + H_b^0(T^{1,0}\mathbf{C}^N{}_{|M})$ である．これは、我々の場合は、条件を満たすように $(\phi_\mu(t), f_\mu(t))$ を取り直すのに超越的議論を要しないということを意味している． 実際、bundle homomorphism による調整だけで、定理 5.3 で確立した homotopy 作用素 Z_2, Q_2 を修正し、付加的条件をみたしているような $(\phi(t), f(t), k(t))$ を構成することができる．

5.6. $\phi(t)$ が倉西 versal であることの証明． 5.3 節での $(\phi(t), f(t), k(t))$ の構成法に則って、wiggle を与える g が $t_1, \ldots, t_d$ のべきに関して帰納的に構成できる．ここでは、homotopy 作用素 Z_1, Q_1 とそのノルムの評価が使われる．

これで第３の問題点が解決され、倉西プログラムは（$\dim_{\mathbf{C}} V = 2$ の場合も含んだ形で）完結できたことになる．

References

[Ad] Adachi, K., *Continuation of holomorphic functions from subvarieties to pseudoconvex domains,* Kobe J. Math. **11** (1994), 33–47.

[Ak1] Akahori, T., *Intrinsic formula for Kuranishi's $\bar{\partial}_b^{\varphi}$*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. **14** (1978), 615–641.

[Ak2] ———, *The new estimate for the subbundles E_j and its application to the deformation of the boundaries of strongly pseudo convex domains,* Invent. Math. **63** (1981), 311–334.

[B-G] Beals, R. and Geiner, P., "Calculus on Heisenberg manifolds", Annals of Mathematics Studies 119, Princeton Univ. Press, 1988.

[B-E] Bland, J. and Epstein, C. L., *Embeddable CR-structures and deformations of pseudoconvex surfaces Part I: Formal deformations*, J. Alg. Geom. **5** (1996), 277–368.

[F-K] Folland, G. B. and Kohn, J. J., "The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex", Annals of Mathematics Studies 75, Princeton Univ. Press, 1972.

[F-S] Folland, G. B. and Stein, E. M., *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 429–522.

[Kod] Kodaira, K., "Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures", Die Grundlehren der mathematischen Wissenshaften 283, Springer-Verlag, 1981.

[Koh] Kohn, J. J., *The range of the tangential Cauchy-Riemann operator*, Duke Math. J. **53** (1986), 525–545.

[Ku] Kuranishi, M. *Application of $\bar{\partial}_b$ to deformation of isolated singularities*, Proc. Sym. in Pure Math., Vol. 30, Part I, (1977), 97–106.

[M1] Miyajima, K., *On realization of families of strongly pseudo-convex CR structures,* Tokyo J. Math., **15** (1992), 153–170.

[M2] ———, *CR construction of the flat deformations of normal isolated singularities*, to appear in J. Alg. Geom..

[M3] ———, *A note on the closed rangeness of vector bundle valued tangential Cauchy-Riemann operator*, preprint, 1998.