日　本　数　学　会

１９９８年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９８年９月-10月

於　大阪大学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.

2. 委員会の任務
   (a) 函数論分科会評議員候補者を選出する.
   (b) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.
   (c) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.
   (d) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.
   (e) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.
   (f) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する.
   (g) 次期委員会委員候補者の推薦.
   (h) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (a) 委員の定数は特に定めないが 10 名程度をもって構成する. 必要に応じ追加， 削減できる.
   (b) 委員の任期は春季学会から２年間とする. 再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.
   (c) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.
      i. 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する. その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.
      ii. 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.

4. 委員会の開催及び議決
   (a) 委員会は評議員が召集する.
   (b) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.
   (c) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する. 必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.
   (d) 案件の議決は投票によってはならない. 決定できない時は懸案事項として次回に繰越す. 緊急事項については評議員に処置を一任する.

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (a) 委員会の司会をする.
   (b) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.
   (c) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.
   (d) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する.

函 数 論 分 科 会

9 月 30 日 (水)　第 III 会場

9:30 ~ 12:00

1	相川　弘明	(島根大総合理工)*	Evaluation of superharmonic functions using limits along lines	15
2	天野　一男	(群馬大工)*	Error estimates of the real inversion formulas of the Laplace transform	20
	斎藤　三郎	(群馬大工)		
	山本　昌宏	(東大数理)		
3	西尾　昌治	(阪市大理)	A characterization of strip domains by a mean value property for the parabolic operator of order α	15
	鈴木　紀明	(名大多元数理)		
4	西本　勝之	(デカルト出版)*	N-method to Weber equations	15
5	尾和　重義	(近畿大理工)	Second order differential subordinations	15
	S. Kanas	(Technical Univ. of Rzeszow)		
6	飯田　安保	(東北大情報)	ある重みつき Hardy 空間を用いての関数空間 N^p の構成	15
7	下村　勝孝	(茨城大理)	m 位の多重熱関数を保つ変換	15
8	田中　博	(上越教育大)	放物性と曲率	15

14:15 ~ 15:15

9	柴田　敬一	(国際自然科学研)*	ディリクレ積分の停留点について	15
10	渡辺　ヒサ子	(お茶の水女大理)*	フラクタルな境界を持つ領域上の 2 重層ポテンシャルについて	15
11	正岡　弘照	(京都産大理)	非有界被覆面上の正値調和関数と有界調和関数	15
	瀬川　重男	(大同工大)		

15:30 ~ 16:30　特別講演

柳原　宏	(山口大工)	Bloch 函数の歪曲評価について	15:30 ~ 16:30

10 月 1 日 (木)　第 III 会場

9:30 ~ 11:45

12	大津賀　信		極値的距離と p 容量との関係	15
13	二宮　信幸		可容性と可測性	15
14	米谷　文男	(京都工繊大工芸)	単葉有理型函数の複素線形結合の単葉性	15
	柴　雅和	(広島大工)		
15	山下　愼二	(都立大理)	Localization of the coefficient theorem	15
16	奥山　裕介	(京大理)	On the estimates of the pre-Schwarzian derivatives of the spiral-like functions	15
17	奥山　裕介	(京大理)	無理的中立固定点における多項式の解析的線形化可能性	15
18	中根　静男	(東京工芸大)*	Parabolic components for a family of cubic polynomials with parabolic fixed points	15
19	牛島　顕	(阪大理)*	境界のある曲面のタイヒミュラー空間の分割	15

13:30 ～ 14:30

20 佐藤　宏樹（静岡大理）* One-parameter family of Jørgensen's groups ・・・・・・ 15

21 須川　敏幸（京大理）* Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions
Y. C. Kim (Yeungnam Univ.) on the unit disk ・・・・・・ 10

22 須川　敏幸（京大理）* On Hölder continuity of Green's function ・・・・・・ 10

23 須川　敏幸（京大理）* Holomorphic motions and quasiconformal extension ・・・・・・ 10

10 月 2 日 (金)　第 III 会場

9:30 ～ 12:00

24 戸田　暢茂（名工大）* Unicity theorem for meromorphic functions sharing four small functions 15
石崎　克也（日本工大）

25 菊地　悟（山口大理工） Fermat 曲線上の Weierstrass 点の weight について ・・・・・・ 15
加藤　崇雄（山口大理）

26 中村　弥生（お茶の水女大）* 微分作用素を用いた留数計算 VI ・・・・・・ 10
田島　愼一（新潟大工）

27 中村　弥生（お茶の水女大）* 微分作用素を用いた留数計算 VII ・・・・・・ 10
田島　愼一（新潟大工）

28 田島　愼一（新潟大工） 多変数留数計算とホロノミックな D-加群 II – アルゴリズムの構成 – ・・・・ 15

29 足立　幸信　On value distribution of entire maps of C^2 to C^2 ・・・・・・ 15

30 相原　義弘（沼津工高専） The uniqueness problem of meromorphic mappings with deficient divisors
・・・・・・ 15

31 神保　敏弥（奈良教育大教育） 球面上の連続関数のグラフの多項式凸包について ・・・・・・ 15
阪井　章

14:15 ～ 15:00

32 風間　英明（九大数理）* On the $\partial\overline{\partial}$-equation over pseudoconvex Kähler manifolds ・・・・・・ 15
高山　茂晴（阪大理）

33 赤堀　隆夫（姫路工大理） Normal 強擬凸 CR 構造の変形における Bogomolov smoothness について ・ 15
宮嶋　公夫（鹿児島大理）

34 宮嶋　公夫（鹿児島大理） CR 構造の変形による正規孤立特異点の変形族の構成 ・・・・・・ 15

15:30 ～ 17:40　特別講演

J. Leiterer (Humboldt-Univ.)* Serre duality on non-compact complex manifolds ・・・・・・ 15:30 ～ 16:30

G. Rosenberger (Univ. of Dortmund) * Recent developments in the theory of Fuchsian and Kleinian groups ・・・・・・ 16:40 ～ 17:40

1 Evaluation of superharmonic functions using limits along lines

相川弘明　　島根大学総合理工学部

この講演は Stephen J. Gardiner (University College Dublin) との共同研究である．

u を $\mathbb{R}^2$ 上の優調和関数とするとすべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$u(x,y)=\liminf_{t\to y}u(x,t) \tag{1}$$

となる．これは $\mathbb{R}^2$ では線分がその線分上 thin でないからである．ところが 3 次元以上になると状況が異なる．実際 u を $\mathbb{R}^3$ の Newton ポテンシャル

$$u(x,y,z)=\int_{-1}^{1}\{x^2+y^2+(z-t)^2\}^{-1/2}|t|dt,$$

とすると

$$u(0,0,z)=\begin{cases}+\infty & (0<|z|\le 1)\\ \\ 2 & (z=0).\end{cases}$$

つまり，z 軸に対しては (1) に対応する結果は成り立たない．しかし，$n\ge 3$ の時でも,「殆んどすべての」直線 L に対して，下極限値が一致することを示そう．以下 $n\ge 3$ とする．

$\mathbb{R}^n$ 上の一般の点 X を (X',x) と書く，ただし $X'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $x\in\mathbb{R}$ である．任意の広義実数値関数 f の *vertical cluster* 集合 $C_V(f;X)$ と *fine cluster* 集合 $C_F(f;X)$ を以下の様に定義する．

$$C_V(f;X)=\{\ell : x \text{ に収束し，} f(X',t_m)\to\ell \text{となる数列} (t_m) \text{が存在}\},$$

$$C_F(f;X)=\{\ell : \ell\text{の任意の近傍 } N \text{ に対して，} f^{-1}(N) \text{ は } X \text{ で non-thin}\}.$$

定理1. $\mathbb{R}^{n-1}$上の*polar*集合E'があって$X' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash E'$の時$C_V(f;X) \cap C_F(f;X) \neq \emptyset$.

系 1. $A \subseteq \mathbb{R}^n$とし f は A の各点で *finely continuous* とすると，$\mathbb{R}^{n-1}$ の polar 集合 E'で $X \in A \setminus (E' \times \mathbb{R})$ ならば $f(X) \in C_V(f;X)$ となるものが存在する．

系 2. $\mathbb{R}^n$の開集合Ω上の優調和関数 u に対して，$\mathbb{R}^{n-1}$の *polar* 集合 E' で以下の性質を満たすものが存在する．

$$u(X) = \liminf_{t \to x} u(X', t) \quad (X \in \Omega \setminus (E' \times \mathbb{R})).$$

振り返ってみると [1,Theorem 1] では $\mathbb{R}^{n-1}$の集合 E'で $E' \times \{0\}$ が $\mathbb{R}^n$ 上の polar 集合となり，$X' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash E'$ならば $C_V(f;X) \subseteq C_F(f;X)$ となるものがあることが示されていた．この時は E'の Hausdorff 次元は高々$n-2$である．しかし，今の定理 1 では E'は $\mathbb{R}^{n-1}$内の polar 集合であるから，Hausdorff 次元は高々$n-3$であり，より細かい．ただし，主張は弱い．一方，次の定理により E'の大きさが最良であることが分かる．

定理 2. E'を $\mathbb{R}^{n-1}$の *polar* 集合とすると，$\mathbb{R}^n$上の有界な *Newton* ポテンシャル u で

$$u(X) < \liminf_{t \to x} u(X', t) \quad (X \in (E' \times \mathbb{Q}))$$

となるものが存在する．

参 考 文 献

1. M. Essén and S. J. Gardiner, *Limits along parallel lines and the classical fine topology*, J. London Math. Soc. (2) (to appear).

URL: `http://www.math.shimane-u.ac.jp/~haikawa`
E-mail address: haikawa@riko.shimane-u.ac.jp

2

ERROR ESTIMATES OF THE REAL INVERSION FORMULAS OF THE LAPLACE TRANSFORM

K.AMANO, S.SAITOH and M.YAMAMOTO

ABSTRACT. Let f be the Laplace transform of $F = F(t)$ such that $\int_0^\infty |F(t)|^2 t^{1-2q} dt < \infty$ for some $q > 0$. We set

$$F_N(t) = \int_0^\infty f(x) e^{-xt} P_{N,q}(xt) dx \qquad (N = 0, 1, 2, \dots)$$

for the polynomials

$$P_{N,q}(\xi) = \sum_{0 \le \nu \le n \le N} \frac{(-1)^{\nu+1} \Gamma(2n+2q)}{\nu!(n-\nu)!\Gamma(n+2q+1)\Gamma(n+\nu+2q)} \xi^{n+\nu+2q-1}$$
$$\times \left\{ \frac{2(n+q)}{n+\nu+2q} \xi^2 - \left(\frac{2(n+q)}{n+\nu+2q} + 3n + 2q \right) \xi + n(n+\nu+2q) \right\}.$$

Let $\max(\frac{1}{2}, 2q-1) < \alpha < 1$ and let $\beta > 0$ satisfy $\alpha \le \beta < q + \frac{\alpha}{2}$. If the function $f(x)$ satisfies

$$f(z) z^\beta \in H_{q+\frac{\alpha}{2}-\beta}(R^+),$$

where $H_{q+\frac{\alpha}{2}-\beta}(R^+)$ is the Bergman-Selberg space on the right half complex plane $\{\mathrm{Re} z > 0\}$, then the error estimate as $N \to \infty$

$$|F(t) - F_N(t)| = t^{q-1+\frac{\alpha}{2}} o\left(N^{\frac{1-2\alpha}{4}}\right)$$

is given. Here $o(N^{\frac{1-2\alpha}{4}})$ is independent of t. Moreover we characterize functions F guaranteeing the above error estimate.

K.AMANO: Gunma Univ., Dep. Math., Fac. Eng., Kiryu 376-8515, Japan
e-mail:kamano@math.sci.gunma-u.ac.jp
S.SAITOH: Gunma Univ., Dep. Math., Fac. Eng., Kiryu 376-8515, Japan
e-mail:ssaitoh@ns518.eg.gunma-u.ac.jp
M.YAMAMOTO: Univ. of Tokyo, Dep. Math. Sci., Tokyo 153-8914, Japan
e-mail:myama@ms.u-tokyo.ac.jp

References

[1]. ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1972.

[2]. BYUN, D. -W., SAITOH, S., *A real inversion formula for the Laplace transform*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **12** (1993), 597-603.

[3]. KAJIWARA, J., TSUJI, M., *Program for the numerical analysis of inverse formula for the Laplace transform*, Proceedings of the Second Korean-Japanese Colloquium on Finite and Infinite Dimensional Complex Analysis (1994), 93-107.

[4]. KAJIWARA, J., TSUJI, M., *Inverse formula for Laplace transform*, Proceedings of the 5th International Colloquium on Differential Equations, pp.163-172, VSP-Holland, 1995.

[5]. SAITOH, S., *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 369, Addison Wesley Longman, UK, 1997.

[6]. TSUJI, K., *An algorithm for sum of floating point numbers without rounding error*, In Abstracts of the Third International Colloquium on Numerical Analysis, Bulgaria, 1995.

[7]. WIDDER, D.V., *The Laplace Transform*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

3 A characterization of strip domains by a mean value property for the parabolic operator of order α

西尾昌治　　大阪市大・理
鈴木紀明　　名大・多元数理

§1. The purpose of our talk is to give a simple proof of the following

Theorem 1. Let D be an open set in $\mathbf{R}^{n+1}$ including $\mathbf{R}^n \times \{0\}$. Assume that for every $\tau \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{R}^n \times (-\infty, \tau) \setminus D \neq \emptyset. \tag{1}$$

If, for every $L^{(\alpha)}$-harmonic function $h \geq 0$ on D,

$$\int\int_D h(x,t)\, dxdt = \int_{\mathbf{R}^n} h(x,0)\, dx, \tag{2}$$

then D is a strip domain $D = \mathbf{R}^{n+1} \times (a, a+1)$ for some $-1 < a < 0$.

For the case $\alpha = 1$, (under the condition that D is contained in an open strip) N.A.Watson proved the above result in [2, Theorem 1]. We emphasize that our proof is shorter and simpler than his.

§2. For $0 < \alpha < 1$, $(-\Delta)^\alpha$ is the convolution operator defined by $-C_{n,\alpha}\mathrm{p.f.}|x|^{-n-2\alpha}$, where $C_{n,\alpha} = -4^\alpha \pi^{-n/2}\Gamma((n+2\alpha)/2)/\Gamma(-\alpha)$. That is, for $\varphi \in C_0^\infty(D)$,

$$\begin{aligned}(\tilde{L}^{(\alpha)}\varphi)(x,t) &:= -\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) + ((-\Delta)^\alpha\varphi)(x,t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) - C_{n,\alpha}\lim_{\delta\downarrow 0}\int_{|y-x|>\delta}(\varphi(y,t)-\varphi(x,t))|y-x|^{-n-2\alpha}\, dy\end{aligned}$$

Then $(\tilde{L}^{(\alpha)}\varphi)(x,t) = O(|x|^{-n-2\alpha})$ as $|x| \to +\infty$.

The fundamental solution of $L^{(\alpha)} := \partial/\partial t + (-\Delta)^\alpha$ is given by

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \begin{cases} (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\exp(-t|\xi|^{2\alpha} + \sqrt{-1}x\cdot\xi)d\xi & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Then

$$\int_{\mathbf{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y, t-s)dx = \begin{cases} 1 & \text{if } t > s \\ 0 & \text{if } t \leq s. \end{cases} \tag{3}$$

Definition 2. Let D be an open set in $\mathbf{R}^{n+1}$. A Borel measurable function h on $\mathbf{R}^{n+1}$ is said to be $L^{(\alpha)}$-harmonic on D if it satisfies the following conditions:

(a) h is continuous on D,
(b) if $0 < \alpha < 1$, $h \in L^1(\mathbf{R}^n, (1+|x|)^{-n-2\alpha}dx) \otimes L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, dt)$,
(c) for every $\varphi \in C_0^\infty(D)$, $\int\int h \cdot \tilde{L}^{(\alpha)}\varphi\, dxdt = 0$.

§3. By the assumption (1), there are points $\{(y_n, s_n)\}_{n=1}^\infty$ in $\mathbf{R}^{n+1}$ such that $(y_n, s_n) \notin D$, $s_n < 0$ and $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$. Let $(y, s) \notin D$ with $s < 0$. Then $h(x,t) := W^{(\alpha)}(x-y, t-s)$ is a non-negative $L^{(\alpha)}$-harmonic function on D, so that we have

$$\int\int_D W^{(\alpha)}(x-y, t-s)\, dxdt = \int_{\mathbf{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y, -s)\, dx = 1.$$

This also implies that there is a point $(y_0, s_0) \notin D$ such that $s_0 > 0$. By (2) and (3) again,

$$\int\int_D W^{(\alpha)}(x-y_0, t-s_0)\, dxdt = \int_{\mathbf{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y_0, -s_0)\, dx = 0,$$

which shows $D \subset \mathbf{R}^n \times (-\infty, s_0)$, because $W^{(\alpha)}(x-y_0, t-s_0) > 0$ whenever $t > s_0$. Hence putting $b := \inf\{s > 0; (y,s) \notin D \text{ for some } y \in \mathbf{R}^n\}$, we have $D \cap \{(x,t); t > 0\} = \mathbf{R}^n \times (0, b)$. Next, we put $a := \sup\{s < 0; (y,s) \notin D \text{ for some } y \in R^n\}$. Then for every $(y,s) \notin D$ with $s < 0$, we have

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbf{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y, -s)\, dx = \int\int_D W^{(\alpha)}(x-y, t-s)\, dxdt \\ &\leq \int_s^b \int_{\mathbf{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y, t-s)\, dxdt = b - s, \end{aligned}$$

which shows $b - a \geq 1$. On the other hand, since $\mathbf{R}^n \times (a,b) \subset D$, we have

$$\begin{aligned} 1 &= \int\int_D W^{(\alpha)}(x-y_n, t-s_n)\, dxdt \\ &= \int_a^b \int_{\mathbf{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y_n, t-s_n)\, dxdt \\ &\quad + \int\int_{D\cap(\mathbf{R}^n\times(s_n,a))} W^{(\alpha)}(x-y_n, t-s_n)\, dxdt \\ &\geq b - a, \end{aligned}$$

which implies $b - a = 1$ and $D \cap (\mathbf{R}^n \times (s_n, a)) = \emptyset$. Then tending s_n to $-\infty$, we have $D = \mathbf{R}^n \times (a, a+1)$ and $-1 < a < 0$. This completes the proof of Theorem 1.

参考文献

[1] M. Itô and M. Nishio, Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order α, Nagoya Math. J., 115(1989), 1–22.

[2] N.A. Watson, Characterizations of open strips by temperatures and harmonic functions, New Zealand J. Math., 25(1996), 243–248.

4 N - method to Weber equations

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this article famous Weber equation which appears in quantum mechanics is discussed by N-fractional calculus operator N^{ν} method (N -method).

§1. N -method to nonhomogeneous Weber equations

Theorem 1. Let $\varphi \in \wp^{\circ} = \{\varphi\,; 0 \neq |\varphi_\nu| < \infty, \nu \in R\}$ and $f \in \wp^{\circ}$, then the nonhomogeneous Weber equation

$$L[\varphi, z\,; \lambda] = \varphi_2 + \varphi \cdot (\lambda - z^2) = f \tag{0}$$

has particular solutions of the forms,

Group I.

$$\varphi = e^{-z^2/2}\Big(((f \cdot e^{z^2/2})_\alpha \cdot e^{-z^2})_{-1} \cdot e^{z^2}\Big)_{-(1+\alpha)} \equiv \varphi^*_{(1)} \qquad (denote), \tag{1}$$

$$\varphi = e^{-z^2/2}\Big(e^{z^2} \cdot ((f \cdot e^{z^2/2})_\alpha \cdot e^{-z^2})_{-1}\Big)_{-(1+\alpha)} \equiv \varphi^*_{(2)}\,, \tag{2}$$

Group II.

$$\varphi = e^{z^2/2}\Big(((f \cdot e^{-z^2/2})_\alpha \cdot e^{z^2})_{-1} \cdot e^{-z^2}\Big)_{-(1+\beta)} \equiv \varphi^*_{(3)}\,, \tag{3}$$

$$\varphi = e^{z^2/2}\Big(e^{-z^2} \cdot ((f \cdot e^{-z^2/2})_\alpha \cdot e^{z^2})_{-1}\Big)_{-(1+\beta)} \equiv \varphi^*_{(4)}\,, \tag{4}$$

where

$$\alpha = (\lambda - 1)/2, \tag{5}$$

$$\beta = -(\lambda + 1)/2, \tag{6}$$

$\varphi_k = d^k\varphi/dz^k$ $(k = 0, 1, 2)$, $\varphi_0 = \varphi = \varphi(z)$, $f(z)$ is a given function and λ is a given constant.

References

[1] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5 (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan

[2] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century; Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), JFC Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto and Susana S. de Romero; N -fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous and homogeneous Whittaker equations (I), JFC Vol. 9, May (1996), 17 - 22.

[5] K. Nishimoto; Super -General solution obtained by N -fractional calculus operator N^{ν} method to the homogeneous Gauss equation, JFC Vol. 12, Nov. (1997), 9 - 22.

[6] K. Nishimoto; Super - Particular and Ultra -General solutions to the nonhomogeneous Gauss equation, JFC Vol. 12, Nov. (1997), 47 - 49.

[7] K. Terazawa; Abstract Mathematics (Vol. of Applications) pp. 43 - 49, Iwanami (1976).

[8] David Bohm; Quantum Theory, pp. 296 - 309, Prentice - Hall Inc. (1951)

[9] L. Pauling and E. Wilson; Introduction to Quantum Mechanics, pp. 67 - 72, McGrow -Hill Inc. (1935).

[10] E. Schrödinger; Proc. Roy. Irish Acad., A 47, 53 (1942).

[11] P.A.M. Dirac; The Principles of Quantum Mechanics, Chap. 6, (3rd ed.), Oxford, Clarendon Press (1947).

5

SECOND ORDER DIFFERENTIAL SUBORDINATIONS

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)
STANISLAWA KANAS (TECHNICAL UNIVERSITY OF RZESZOW)

Let $\mathcal{H}$ denote the class of functions $f(z)$ which are analytic in the open unit disk $\mathcal{U} = \{z : z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and normalized by $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. If $f(z) \in \mathcal{H}$, $g(z) \in \mathcal{H}$, and $g(z)$ is univalent in $\mathcal{U}$, written by $f(z) \prec g(z)$, if $f(0) = g(0)$ and $f(\mathcal{U}) \subset g(\mathcal{U})$.

THEOREM 1. *Let α and β be real such that $\beta \geq 0$ and $\alpha + 2\beta \geq 0$. If $f(z) \in \mathcal{H}$ satisfies*

$$(1-\alpha)\frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \beta z f''(z) \prec 1 + Mz \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some $M > 0$, then

$$\frac{f(z)}{z} \prec 1 + \frac{M}{\alpha + 2\beta + 1} z \qquad (z \in \mathcal{U}).$$

THEOREM 2. *Let α and β be real such that $\beta \geq 0$ and $\alpha \geq 1$. If $f(z) \in \mathcal{H}$ satisfies*

$$(1-\alpha)\frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \beta z f''(z) \prec 1 + Mz \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some $M > 0$, then

$$f'(z) \prec 1 + \frac{2M}{\alpha + 2\beta + 1} z \qquad (z \in \mathcal{U}).$$

THEOREM 3. *Let* α *and* β *be real such that* $\beta \geq 0$ *and* $\alpha \geq 1$. *If* $f(z) \in \mathcal{H}$ *satisfies*

$$(1-\alpha)\frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \beta z f''(z) \prec 1 + Mz \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some M $(0 < M < M(\alpha, \beta))$, *where*

$$M(\alpha,\beta) = \frac{\beta(\alpha + 2\beta + 1)}{2\sqrt{(\alpha+\beta)^2 + \alpha} + |\alpha - \beta|},$$

then $f(z)$ *is starlike in* $\mathcal{U}$.

6 ある重みつき Hardy 空間を用いての関数空間 N^p の構成

飯田　安保 (Yasuo IIDA)　　東北大学情報科学研究科

定義 1.

$U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ とする。U 上の正則関数 f が

1. $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty$ を満たすとき、$f \in N$ とする。

$f \in N$ のとき、$f^*(e^{i\theta}) := \displaystyle\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ が a.e. $e^{i\theta} \in T$ で存在することが知られている。

2. $f \in N$ で、$\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| d\theta$ を満たすとき、$f \in N_*$ とする。

3. $0 < p < \infty$ に対し $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty$ を満たすとき、$f \in H^p$ とする。 また、U 上の有界正則関数全体を H^∞ で表す。

N を Nevanlinna class, N_* を Smirnov class, H^p $(0 < p \leq \infty)$ を Hardy 空間と呼ぶ。これらの空間のあいだには、以下のような包含関係が成り立つ：

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset N_* \subset N \qquad (0 < p < q < \infty)$$

このような包含関係は昔からよく知られていたが、1977 年に M. Stoll は N_* と H^p の間に位置する空間 N^p を導入した：

定義 2.

$p > 1$ とする。U 上の正則関数 f が $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left[\log^+ |f(re^{i\theta})|\right]^p d\theta < +\infty$ を満たすとき、$f \in N^p$ とする。

この N^p には、以下の特徴がある：

$$N^p \subset N^q \ \ (1 < q < p) \ , \ \bigcup_{q>0} H^q \subset \bigcap_{p>1} N^p \ , \ \bigcup_{p>1} N^p \subset N_*$$

本講演では、以下の 2 つの結果について報告する。

① ある重みつき Hardy 空間の union としての N^p の構成

$h \in H^2$ が N_* に対する外関数のとき、 $H^2(|h|^2)$ を多項式の $L^2(|h^*(e^{i\theta})|^2 d\theta)$-closure とする。H. Helson や J. E. McCarthy は 1990 年に

$$N_* = \bigcup_{h:outer\ for\ N_*} H^2(|h|^2) = \bigcup_{w \in W_1} H^2(w)$$

であることを示した。また C. M. Eoff は 1993 年に

$$N^p = \bigcup_{h \in H^2 \cap (N^p)^{-1}} H^2(|h|^2) = \bigcup_{w \in W_p} H^2(w)$$

であることを示した。ここで、N^p の元で可逆なもの全体を $(N^p)^{-1}$,
$W_p = \{w : weight \mid \log w \in L^p(T)\}$ とする。

この考えを発展させ、$h \in H^q \cap (N^p)^{-1}$, $(1 \leq q < \infty, p > 1)$ に対し、$H^q(|h|^q)$ を多項式の $L^q(|h^*(e^{i\theta})|^q d\theta)$-closure と定義する。この $H^q(|h|^q)$ を用いて次のような結果を得た：

定理 1　$p > 1, 1 \leq q < \infty$ に対し、

(1)
$$N^p = \bigcup_{h \in H^q \cap (N^p)^{-1}} H^q(|h|^q) = \bigcup_{w \in W_p} H^q(w)$$

が成り立つ。

② N^p $(p > 1)$ における距離

(2) $$\rho_p(f,g) = \lim_{r \to 1^-} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\log\left(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\right) \right]^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (f, g \in N^p)$$

による距離位相（ τ_p で表す）と同値な位相について

（1）から、以下のような N^p 上の別の位相 (inductive limit topology) を考えることが出来る（記号で $I_{p,q}$ と表す）：

「V_λ を、任意の $w \in W_p$ に対し、$V_\lambda \cap H^q(w)$ が $H^q(w)$ における 0-近傍であるような集合とする。このとき、$(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $I_{p,q}$ の 0-近傍族とする。」

このとき、(2) による距離位相 τ_p とこの $I_{p,q}$ が同値であることが分かった。

定理 2　$p > 1, 1 \leq q < \infty$ に対し、τ_p と $I_{p,q}$ は N^p 上、同値である。

7　m 位の多重熱関数を保つ変換

下村勝孝　　　　茨城大学理学部

自然数 k に対して、$\mathbb{R}^{1+k} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k\}$ (t の代りに x_0 とも書く) を $1+k$-次元 Euclid 空間とする。m を自然数として、$\mathbb{R}^{1+k}$ の領域で定義された関数 $u(t,x)$ が方程式

$$H^m u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^m u = 0$$

をみたすとき、u は m 位の多重熱関数であると言う。

N, n を自然数、D を $\mathbb{R}^{1+N}$ の領域とする。C^∞ 写像 $f : D \to \mathbb{R}^{1+n}$ と D 上の C^∞ 関数 $\phi > 0$ との組 (f,ϕ) が、(1) $f(D)$ は領域、(2) $f(D)$ 上の任意の m 位の多重熱関数 u に対して $\phi \cdot u \circ f$ は D 上の m 位の多重熱関数、を満す時 m-caloric morphism と呼ぶ。

本講演では、m-caloric morphism の特徴付け、特に caloric morphism との関連について述べる。

1. m 位の多重熱関数を保つ変換の特徴付け

m 位の多重熱関数を保つ変換の特徴付けは、次の形に与えられる。

定理 1.

C^∞ 写像 $f : D \subset \mathbb{R}^{1+N} \to \mathbb{R}^{1+n}$ と D 上の正値 C^∞ 関数 ϕ の組 (f,ϕ) に対して、次は互いに同値である。

(A) u が $f(D)$ 上の m 位の多重熱関数ならば、$\phi \cdot u \circ f$ は D 上の m 位の多重熱関数。

(B) $1+n$ 変数多項式 P が m 位の多重熱関数で次数が $4m$ 以下ならば、$\phi \cdot P \circ f$ は D 上の m 位の多重熱関数。

(C) f と ϕ は次の式を満たす;

$$\begin{array}{lll}
(i) & \nabla_x f_0 = 0, & \\
(ii) & (\nabla_x f_i, \nabla_x f_j) = \lambda \delta_{ij}, & 1 \leqq i,j \leqq n, \\
(iii) & \phi H f_i = 2(\nabla_x f_i, \nabla_x \phi), & 1 \leqq i \leqq n, \\
(iv) & \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} \lambda^{\alpha_0} H \lambda^{\alpha_1} \cdots H \lambda^{\alpha_{m-k}} \phi = 0, & 0 \leqq k \leqq m-1,
\end{array}$$

但しここで $f(t,x)=(f_0(t,x),f_1(t,x),\dots,f_n(t,x))$ であり、$\lambda=\lambda(t)$ は $f_0(t)$ の微分を表す ((i) より f_0 は t だけの関数)。また $(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^N$ での内積、$\nabla_x=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_N}\right)$、$\delta_{ij}$ は Kronecker の delta、そして (iv) の $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m-k})$ は多重指数を表す。

(D) 非負の C^∞ 関数 $\rho(t)$ が存在して、任意の C^{2m} 関数 u に対して

$$H^m(\phi\cdot u\circ f)=\rho\phi\cdot H^m u\circ f$$

が成立つ。

注 **1.** (i) と (ii) から $|\nabla_x f_i|^2$ $(1\leqq i\leqq n)$ も x に依らないことが分る。

2. (D) に現れる関数 ρ は $(f_0')^m$ に等しい。

3. $n>N$ の場合には m-caloric morphism は存在しない。実際 (ii) と (iii) より f は定値写像でなければならず、$f(D)$ は領域にはならない。これは m-caloric morphism の条件に反する。

4. (A) を "(f,ϕ) は m-caloric morphism" とするには、(C) は (i) に $f_0'>0$ を付加え、また (D) は "非負" を "正" にする。

2. m-caloric morphism と caloric morphism

実は $m\geqq 2$ の時の m-caloric morphism は、$f_0(t)$ が一次分数関数である caloric morphism (f,φ) の乗法因子 φ に $(f_0'(t))^{(m-1)/2}$ を掛けた物になっている。

定理 2. $m\geqq 2$ とし、(f,ϕ) を C^∞ 写像 $f:D\subset\mathbb{R}^{1+N}\to\mathbb{R}^{1+n}$ と D 上の正値 C^∞ 関数 ϕ とする。(f,ϕ) が m-caloric morphism であるための必要十分条件は、f_0 が一次分数関数であり、かつ

$$\varphi(t,x)=\frac{\phi(t,x)}{f_0'(t)^{-(m-1)/2}}$$

とおくと (f,φ) が caloric morphism となることである。

注 **5.** $f_0(t)=\dfrac{a}{t-b}+c$ ならば、$\varphi(t,x)=|t-b|^{m-1}\phi(t,x)$ となる。

References

[1] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *A mean value property for poly-temperatures on a strip domain*, to appear in J. London Math. Soc..

[2] K. Shimomura, *On transformations which preserve polytemperatures of degree m*, preprint.

8 放物性と曲率

田中　博　　　　上越教育大学

Mを $n(\geq 2)$ 次元のコンパクトでない完備なリーマン多様体とする。$p(1 < p \leq n)$ を定数とする。$\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$を Mの近似とする。$k \geq 1$ に対して、ω_kは $M_k - \overline{M_0}$で p-harmonic、$\omega_k = 0$ on $\partial M_0, = 1$ on ∂M_kとし、$\omega = \lim_{k\to\infty} \omega_k$とおく。$\omega \equiv 0$ のとき、Mは p-parabolic といい、そうでないとき p-hyperbolic という。

次が成り立つ。

(1)　Mが p-parabolic であるための必要十分条件は補集合が連結な Mのコンパクト部分集合 Kと $M - K$上非負な p-優調和関数 s で $\lim_{x\to\infty} s(x) = \infty$ となるものが存在する。
(2)　Mが p-hyperbolic であるための必要十分条件は M上非負、非定数な p-優調和関数が存在することである。

断面曲率に関しては、次が成り立つ。

定理 1　Mの 断面曲率を $K_\sigma(\sigma \subset T_xM)$ とする。$K_\sigma \leq 0$ ならば、Mは p-hyperbolic $(1 < p < n)$ であり、$K_\sigma \leq c < 0 (c > 0 : \mathrm{constant})$ ならば、Mは n-hyperbolic である。

古典的な $p = 2$ の場合、[1] で証明されている。この定理で、n-hyperbolicity に関しては、$K_\sigma < 0$ とすることができないことが次の例でわかる。

例 1　$M = \{R^n, e^{2\alpha|x|^2}\delta_{ij}\}$ とおく。　このとき、$\alpha \geq 0$ なら M は完備であり、$\alpha > 0$ ならば、$-4\alpha \leq K_\sigma < 0$ である。しかし、Mは n-parabolic である。

リッチ曲率に関しては、次が成り立つ。

定理 2　$Ric(M) \geq 0$ ならば、Mは n-parabolic である。

この定理は $p(p \neq n)$ に関しては必ずしも成り立たないことが次の例でわかる。

例 2　$M = \{R^n; (1+|x|^2)^{2\alpha}\delta_{ij}\}(\alpha \in R)$ とする。このとき、$\alpha \geq -1/2$ ならば Mは完備であり、$-1/2n \leq \alpha < 0$ ならば、$0 < K_\sigma \leq -4\alpha$ である。したがって、$Ric(M) > 0$ である。しかし、Mは p-hyperbolic$(1 < p < n)$ であることがわかる。$p = 2$ のとき Yau[2,3] により、$M \in O_{HP}$が示されている。したがってこの例は $M \in O_{HP} - O_G$ を示している。

参考文献

[1] K. Aomoto: L'analyse harmonique sur les espaces de riemanniens, à courbure riemannienne négative I, J. Fac. Sci. Univ.Tokyo, 13 (1966),85-105.

[2] S.-T. Yau: Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math 28 (1975),201-228.

[3] R. Schoen and S,-T. Yau: Lectures on Differential Geometry, International Press, 1994.

9　ディリクレ積分の停留点について

柴田敬一　国際自然科学研

$\mathcal{B}$：複素平面上の単位円板　$|w|<1$

γ：$\mathbb{R}^3$ 内の長さ有限なジョルダン閉曲線

$|\gamma|$：γ の locus (carrier)

$\Gamma=\{\gamma(w)\}$：$\partial\mathcal{B}$ から $|\gamma|$ の上への，γ と同じ向きを保つ位相写像であって且つ，3点条件を満たすもの全体の集合

$\xi_\gamma(w)$：${}^\forall\gamma(w)\in\Gamma$ に対して，$\gamma=\gamma(w)$ を境界値とする，$\mathcal{B}$ でのディリクレ問題の解

$\Rightarrow$

このとき Γ の ${}^\exists$元 $\gamma^*(w)$ が，写像

$$\mathcal{B}\longmapsto\xi_{\gamma^*}(w)$$

を等角ならしめるための　条件について報告する。

10 フラクタルな境界を持つ領域上の２重層ポテンシャルについて

渡辺ヒサ子　　　　　お茶の水女子大理

Dは $\mathbf{R}^d$の有界な領域でその境界∂Dはβ-集合とする。∂Dがβ-集合というのは、

$$b_1 r^\beta \leq \mu(B(x,r) \cap \partial D) \leq b_2 r^\beta \quad (0 < \forall r \leq r_0,\ \forall x \in \partial D)$$

を満足する境界上の Radon 測度μが存在することである。

このような領域でも、境界上の $L^p(\mu)$ の部分空間である Besov 空間 $\Lambda_\alpha^p(\partial D)$ $(\beta - (d-1) < \alpha \leq 1)$ に属する関数 f に対しては、２重層ポテンシャルΦf を、$y \in D$ならば

$$\Phi f(y) = \int_{\mathbf{R}^d \setminus \overline{D}} \langle \nabla \mathcal{E}(f)(y), \nabla_y N(x-y) \rangle dy,$$

$y \in \mathbf{R}^d \setminus \overline{D}$ならば

$$\Phi f(y) = -\int_D \langle \nabla \mathcal{E}(f)(y), \nabla_y N(x-y) \rangle dy$$

という形で定義できることを示し、その性質を調べてきた。ここで $N(x-y)$ は $d=2$ のときは対数核、$d \geq 3$ のときはニュートン核である。また、$\mathcal{E}(f)$ は、Whitney 分解を使って一定の方法で f を拡張して得られた関数で、D の内部及び外部では C^∞級関数になる。

特定な $\mathcal{E}(f)$ でなくとも内部及び外部で C^1級となる拡張であれば、上のΦfは定義できる可能性があるが、Φfの値が拡張によらず一意に定まるための十分条件を与え、それを Dirichlet 問題に関連した作用素が１対１であることを証明するために使用する。

$\mathcal{W}(D)$ を Dの Whitney 分解とし、$\mathcal{W}(D)$ に含まれる k-cube を $\mathcal{W}_k(D)$ で表す。$A_n = \cup_{k \leq n} \mathcal{W}_k(D)$ とおく。$\beta - d + 1 < \tau \leq 1,\ p > 1$ を満たすτ, p に対し、次の (i), (ii), (iii) の性質を持つ$\overline{D}$ 上の関数 f の全体を $U_\tau^p(D)$ で表す：

(i) fは Dで C^1級,

(ii) $b = 6\sqrt{d}$とすると、

$$\int_{\partial A_n} d\sigma(y) \int_{\{|y-x| \leq b2^{-n}\} \cap \partial D} |\ f(y) - f(w)\ |^p\, d\mu(w) \leq c_f (2^{-n})^{d-1+p\tau}$$

を満たす n によらない定数 c_f がある,

(iii)

$$\int_D |\nabla f(y)| \, dy < \infty.$$

このとき、次の定理が得られる。

定理 1. $U^p_\tau(\overline{D})$ の関数 f_1, f_2 が ∂D 上で μ-a.e. に等しければ、各 $x \in \mathbf{R}^d \setminus \overline{D}$ に対し、

$$\int_D \langle \nabla f_1(y), \nabla_y N(x-y) \rangle dy = \int_D \langle \nabla f_2(y), \nabla_y N(x-y) \rangle dy$$

が成り立つ。

$U^p_\tau(\mathbf{R}^d \setminus D)$ を (i)-(iii) に対応する性質に加えて、無限遠点では 0 に近づくという性質も持つ $\mathbf{R}^d \setminus D$ 上の関数 f の全体とすると、定理 1 に対応する定理も得られる。

また、$\mathbf{R}^d$ 全体で定義された関数 f の $\overline{D}$, $\mathbf{R}^d \setminus D$ への制限が、それぞれ、$U^p_\tau(\overline{D})$、$U^p_\tau(\mathbf{R}^d \setminus D)$ に属するとき、$f \in U^p_\tau(\mathbf{R}^d)$ で表す。

命題 1. $p > 1, \beta - d + 1 < \alpha \leq 1$ ならば、$\mathcal{E}(f) \in U^p_\alpha(\mathbf{R}^d)$ である。

さらに、$q > 1$, $g_1 \in L^q(\mu)$ に対し、

$$S_1 g_1(y) = \begin{cases} -\int N(x-y) g_1(x) d\mu(x) & \text{it is well-defined} \\ 0 & \text{othewise} \end{cases}$$

と定義する。

命題 2. $q \geq 2, p = q/(q-1), \beta - d + 1 < \alpha < 1 - (d-\beta)/p$, $g_1 \in L^q(\mu)$ ならば、$S_1 g_1 \in U^p_\alpha(\mathbf{R}^d) \cap U^q_\alpha(\mathbf{R}^d)$ である。

参考文献

[1] A. Jonsson and H. Wallin, A Whitney extension theorem in L_p and Besov spaces, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **28**, 1 (1978), 132-192.

[2] H. Watanabe, The double layer potentials for a bounded domain with fractal boundary, Potential Theory–ICPT94, 463-471, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1996.

11　非有界被覆面上の正値調和関数と有界調和関数

正岡　弘照　　　京都産大・理

瀬川　重男　　　大同工大

Rを O_Gに属さない ($\Leftrightarrow$Green 関数が存在する) Riemann 面とする. R上の有界調和関数 (resp. 正値調和関数) の class を $HB(R)$ (resp. $HP(R)$) と表す. $\tilde{R}$を Rの m 葉非有界被覆面 ($1<m<\infty$), πを$\tilde{R}$からRへの射影とする. このとき, $\tilde{R}\notin O_G$であり, さらに

$$HB(R)\circ\pi=\{h\circ\pi:\ h\in HB(R)\}\subset HB(\tilde{R}),$$
$$HP(R)\circ\pi=\{h\circ\pi:\ h\in HP(R)\}\subset HP(\tilde{R})$$

である. 本講演の目的は, Martin 境界の言葉を使って, $HB(R)\circ\pi=HB(\tilde{R})$ (resp. $HP(R)\circ\pi=HP(\tilde{R})$) となるための必要十分条件を与えることである.

R (resp. $\tilde{R}$) の Martin compact 化, Martin 境界, minimal 境界をそれぞれ, R^*, Δ, Δ_1 (resp. $\tilde{R}^*$, $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}_1$) で表す. このとき, πは$\tilde{R}^*$から R^*への写像として連続に拡張され, $\pi(\tilde{\Delta})=\Delta$である. 各 $p\in\Delta$に対して,

$$\tilde{\Delta}_1(p)=\pi^{-1}(p)\cap\tilde{\Delta}_1=\{\tilde{p}\in\tilde{\Delta}_1:\ \pi(\tilde{p})=p\}$$

とおく. k_p (resp. $\tilde{k}_{\tilde{p}}$) を p (resp. $\tilde{p}$) に極をもつ R (resp. $\tilde{R}$) 上の Martin 核とする. $\tilde{\Delta}_1(p)$ について, 次のことが知られている.

Fact. **(i)** $p\in\Delta-\Delta_1$**のとき,** $\tilde{\Delta}_1(p)=\emptyset$.
(ii) $p\in\Delta_1$**のとき,** $1\leq\#\tilde{\Delta}_1(p)\leq m$.
(iii) $p\in\Delta_1$**に対し,** $\tilde{\Delta}_1(p)=\{\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_n\}$ **とおくとき, 正定数** $c_1,\cdots,c_n$ **が存在して**

$$k_p\circ\pi=c_1\tilde{k}_{\tilde{p}_1}+\cdots+c_n\tilde{k}_{\tilde{p}_n}.$$

上の事実より直ちに, 次の $HP(R)\circ\pi=HP(\tilde{R})$ となるための必

要十分条件が得られる.

Theorem 1. $HP(R) \circ \pi = HP(\tilde{R})$ **となるための必要十分条件は, 任意の** $p \in \Delta_1$ **に対して** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = 1$ **となることである.**

$HB(R) \circ \pi = HB(\tilde{R})$ となるための必要十分条件は次のように与えられる.

Theorem 2. $HB(R) \circ \pi = HB(\tilde{R})$ **となるための必要十分条件は, 調和測度に関して殆どすべての** $p \in \Delta_1$ **に対し** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = 1$ **となることである.**

References

[C-C] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Springer-Verlag, 1963.

[M-S] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, Osaka Jour. Math., **34**(1997), 659-672.

[M-S] H. Masaoka and S. Segawa, *Martin boundary of unlimited covering surfaces*, preprint.

特別講演

Bloch 函数の歪曲評価について

柳原 宏 (山口大学工学部共通講座)

1 Introduction

複素数 $c \in \mathbb{C}$ と $r > 0$ について, 中心 c 半径 r の円板を, $\mathbb{D}(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < r\}$ で表す. 特に $c = 0$, $r = 1$ のとき, つまり単位円板については, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ と略記する. さて正則函数 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ が, ある定数 $M \geq 0$ について

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{1-|z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

を満たす時, $\mathbb{D}$ 上の Bloch 函数と呼ばれる. ここでは話を簡単にする為に $M = 1$ とし, $\alpha \in [0, 1]$ について $f(0) = 0$, $f'(0) = \alpha$ という正規化を行い

$$(1.1) \qquad \mathfrak{B}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : f \text{ is a holomorphic function in } \mathbb{D} \text{ with } f(0) = 0 \text{ and } f'(0) = \alpha \text{ satisfying } |f'(z)| \leq 1/(1-|z|^2) \text{ in } \mathbb{D}\},$$

$$(1.2) \qquad \mathfrak{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{f : f \text{ is a holomorphic function in } \mathbb{D} \text{ with } f(0) = 0 \text{ and } f'(0) > 0 \text{ satisfying } |f'(z)| \leq 1/(1-|z|^2) \text{ in } \mathbb{D}\} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \mathfrak{B}(\alpha)$$

とおく. 本講演では, 任意に固定された $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$ について $f \in \mathfrak{B}(\alpha)$ を動かした時の $f'(z_0)$ の取り得る値の範囲を考えたい. つまり集合

$$(1.3) \qquad V(z_0, \alpha) = \{f'(z_0) : f \in \mathfrak{B}(\alpha)\}$$

の形を決定するという問題を考える. さらに $\mathfrak{B}(\alpha)$, $\mathfrak{B}$ の定義において各函数について, 局所単葉という仮定を追加してできる函数族を $\mathfrak{B}_\infty(\alpha)$, $\mathfrak{B}_\infty$ とおく. つまり

$$(1.4) \qquad \mathfrak{B}_\infty(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathfrak{B}(\alpha) : \ f'(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{D}\},$$

$$(1.5) \qquad \mathfrak{B}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathfrak{B} : \ f'(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{D}\} = \cup_{\alpha \in (0,1]} \mathfrak{B}(\alpha)$$

とおく. $f \in \mathfrak{B}_\infty$ ならば f' は零点を持たないので f' の対数函数の一価正則な分枝が存在する. これを $\log f'$ で表すことにする. 但し分枝は $\log f'(0)$ が実数となるように取っておく. この函数族については集合

$$(1.6) \qquad V_\infty(z_0, \alpha) = \{\log f'(z_0) : f \in \mathfrak{B}_\infty(\alpha)\}$$

の形を決定するという問題を考えることにする.

上記の 2 つの問題は原点で正規化された Bloch または局所単葉 Bloch 函数について $f'(z_0)$ の存在範囲を求めよというものであり, 歪曲評価 (distortion estimate) の最も精密なものを求めるという問題である.

2 Bloch constants と Bloch functions

さて Bloch 函数と Bloch 函数の歪曲評価が, 歴史的に見てどのような研究の中から生まれ, どうして必要になってきたのかを解説しておこう.

まず Koebe の 1/4 定理より始めよう.

Theorem A (Koebe) 正則函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ が $f(0)=f'(0)-1=0$ を満たし, $\mathbb{D}$ で単葉 *(1 対 1)* ならば $\mathbb{D}(0,1/4)\subset f(\mathbb{D})$.

さて f が上の定理の仮定を満たせば, 単葉性より $\mathbb{D}$ の部分領域 $\Omega(\ni 0)$ で $f|_\Omega:\Omega\to\mathbb{D}(0,1/4)$ が全単射になるものが存在する. このように f により 1 対 1 に cover される円板は f の 単葉円板 (schlicht disc) と呼ばれる. それでは f から単葉性 (1 対 1) の仮定を省くと, どうなるであろうか? それには次の例を考えれば良い.

例 1 自然数 n について $f_n(z)=\{e^{nz}-1\}/n,\ z\in\mathbb{D}$ とおくと, f_n は $\mathbb{D}$ で正則で $f_n(0)=f_n'(0)-1=0$ を満たす. しかし $e^w\neq 0\ \forall w\in\mathbb{C}$ より $-n^{-1}\notin f_n(\mathbb{D})$ 従って原点中心で半径が f に依らない一様な単葉円板を取ることはできない.

しかしながら単葉円板の中心を原点と限らなければ

Theorem B (Bloch 1925 [1]) 正則函数 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ が $f(0)=f'(0)-1=0$ を満たせば f には半径 1/72 以上の単葉円板が存在する.

そこでこのような単葉円板の半径で f に依らず一様に取れるものの中で best possible なものを求めよと言う問題が生まれる. 正確な定義を述べれば

(2.7) $$H^*(\mathbb{D})=\{f: f \text{ は } \mathbb{D} \text{ で正則で } f(0)=f'(0)-1=0\ \}$$

とし, 各 $f\in H^*(\mathbb{D})$ について f の単葉円板の半径の supremum を $r(f)$ で表そう. このとき

(2.8) $$B=\inf_{f\in H^*(\mathbb{D})} r(f)$$

は Bloch constant と呼ばれる定数で, これが求めるものである.

同様に cover の状態を無視して単に $f(\mathbb{D})$ に含まれる円板の半径の supremum を $\tilde{r}(f)$ として

(2.9) $$L=\inf_{f\in H^*(\mathbb{D})} \tilde{r}(f)$$

とおく. これは Landau constant と呼ばれる, $r(f)\leq\tilde{r}(f)$ より $B\leq L$ が成り立つ.

Landau はこれらの定数を扱う際に $H^*(\mathbb{D})$ のような大きな空間ではなく比較的小さな空間に制限して考えれば良いことが示した. つまり

Theorem C (Landau [9]) 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} B &= \inf_{f\in H^*(\mathbb{D})} r(f)=\inf_{f\in\mathfrak{B}(1)} r(f),\\ L &= \inf_{f\in H^*(\mathbb{D})} \tilde{r}(f)=\inf_{f\in\mathfrak{B}(1)} \tilde{r}(f). \end{aligned}$$

証明. L の場合も同様ゆえ B の場合の証明をしておこう. まず $H^*(\overline{\mathbb{D}})$ を $\overline{\mathbb{D}}$ で正則な函数 $f \in H^*(\mathbb{D})$ の全体よりなる $H^*(\mathbb{D})$ の部分族とすると,

$$\inf_{f \in H^*(\mathbb{D})} r(f) = \inf_{f \in H^*(\overline{\mathbb{D}})} r(f)$$

を容易に示すことができる. さて $f \in H^*(\overline{\mathbb{D}})$ について函数 $\mu_f(z) = (1-|z|^2)|f'(z)|$ は $\overline{\mathbb{D}}$ で非負, 連続であり $\partial\mathbb{D}$ で 0 である. 従って内点で最大値を取る. この点を $z_0 \in \mathbb{D}$ とおけば, $\mu_f(0) = 1$ と合わせて

$$(2.10) \qquad (1-|z|^2)|f'(z)| \le (1-|z_0|^2)|f'(z_0)| \ \ \forall z \in \mathbb{D}, \quad 1 \le (1-|z_0|^2)|f'(z_0)|$$

が成り立つ. さて

$$(2.11) \qquad g(z) = \left\{ f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z_0}z}\right) - f(z_0) \right\} / \{(1-|z_0|^2)f'(z_0)\}$$

とおくと, 簡単な計算により $g \in H^*(\mathbb{D})$ が分かる. また $r(g) = r(f)/\{(1-|z_0|^2)|f'(z_0)|\} \le r(f)$ が成り立つ. さらに

$$(2.12) \qquad (1-|z|^2)|g'(z)| = \frac{\mu_f((z+z_0)/(1+\bar{z_0}z))}{(1-|z_0|^2)|f'(z_0)|} \le 1$$

より $g \in \mathfrak{B}(1)$ が成り立つ. 以上より任意の $f \in H^*(\overline{\mathbb{D}})$ について $g \in \mathfrak{B}(1)$ で $r(g) \le r(f)$ を満たすものが存在するので

$$\inf_{f \in \mathfrak{B}(1)} r(f) \le \inf_{f \in H^*(\overline{\mathbb{D}})} r(f) = \inf_{f \in H^*(\mathbb{D})} r(f) = B$$

が成り立つ. 逆向きの不等式は $\mathfrak{B}(1) \subset H^*(\mathbb{D})$ より直ちに得られる. □

上の定理より Bloch constant についての評価を行う際には函数が $|f'(z)| \le 1/(1-|z|^2)$ という条件を満たすとして考えれば良いことが分かる. これが Bloch function という概念が導入された, そもそもの発端である. 現在では, これ以外の様々な研究の流れから $|f'(z)| \le M/(1-|z|^2)$ という条件が導かれ, Bloch function の重要性は増しているが, 残念ながら発端の方が忘れ去られている気がするので, Landau の証明を紹介させて頂いた.

また Landau 定数 L については $\mathbb{D}$ から, ある領域への universal covering となっている $f \in \mathfrak{B}(1)$ の全体が作る $\mathfrak{B}(1)$ の部分族を $\mathfrak{B}_u(1)$ とするとき

$$(2.13) \qquad L = \inf_{f \in \mathfrak{B}_u(1)} \tilde{r}(f) = \inf_{f \in \mathfrak{B}_u(1)} r(f)$$

となることが知られている. しかしながら universal covering となっている函数を扱うのは大変難しいので, 条件を緩めて局所単葉函数を扱うことがある. この場合は locally schlicht Bloch constant を

$$(2.14) \qquad B_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{f \in \mathfrak{B}_\infty(1)} r(f)$$

で定義する. このとき $B_\infty \le L$ が成り立つので L の下からの評価を直接的に行う代わりに, B_∞ の下からの評価を行う.

3 Distortion estimate と定数の下からの評価

前節では B, B_∞, L の研究をするうえで Bloch function の概念が重要であることを解説した. では何故 Bloch functions の distortion estimates が必要になるのだろうか? これは端的に言えば, distortion estimate から B, B_∞ の下からの評価が導かれるからである. この事情を明らかにする例として, Peschl による $\mathfrak{B}_\infty(1)$ の distortion estimate と, これより導かれる $B_\infty \geq 1/2$ という結果を紹介しよう.

Theorem D (Peschl [11], [12]) 任意の $f \in \mathfrak{B}_\infty(1)$ について

$$(3.15) \qquad |f'(z)| \geq \frac{1}{(1-|z|)^2} e^{-2|z|/(1-|z|)}, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つ.

ここで

$$(3.16) \qquad P(z) = \frac{1}{2}\{1 - e^{-2z/(1-z)}\}$$

とおけば上の定理の不等式は $|f(z)| \geq P'(|z|)$ と表せることに注意しよう. $f \in \mathfrak{B}_\infty(1)$ について原点を中心とする最大単葉円板を D とし, $\mathbb{D}$ の subdomain Ω を $0 \in D$ で $f|_\Omega : \Omega \to D$ が全単写となるように取る. このとき 原点から出発し, $\partial\mathbb{D}$ に向かう Ω 内の曲線 $\gamma(t)$, $0 \leq t < 1$ で $f \circ \gamma$ が, D の半径となっているものが存在する. よって

$$\begin{aligned}
\text{the radius of } D &= \int_{f\circ\gamma} |dw| \\
&= \int_0^1 |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \\
&\geq \int_0^1 |P'(|\gamma(t)|)||\gamma'(t)|\,dt \geq \int_0^1 P'(r)\,dr = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って $r(f) \geq 1/2$ が任意の $f \in \mathfrak{B}_\infty(1)$ について成り立つことになり, これより $L \geq B_\infty \geq 1/2$ が成り立つことが分かる. またより詳しい distortion estimate が分かれば, B_∞ のより良い評価を得ることができる ([14]).

同様に Bloch function の distortion estimate から Bloch constant の下からの評価を得ることができる ([4], [8]). これら B, B_∞, L の上下の評価の歴史や最新の結果については S. Finch による

http://www.mathsoft.com/asolve/constant/bloch/bloch.html

という概説が参考になるであろう.

4 極値函数

集合 $V(z_0, \alpha)$ または $V_\infty(z_0, \alpha)$ を決定するには, extremal function を予測しておくことが重要である. ここでは $V_\infty(z_0, \alpha)$ つまり, 局所単葉 Bloch 函数の場合について説明しておこう.

前節の Peschl の結果は $P(z)=\{1-e^{-2z/(1-z)}\}/2$ が $\mathfrak{B}_\infty(1)$ での $|f'(z_0)|$ の, または同じことであるが $\mathrm{Re}\log f'(z_0)$ の最小値を求めるという最小値問題の extremal function となっていることを示唆する. 実際に $P\in\mathfrak{B}_\infty(1)$ であり, 極値函数になっていることを証明できる. また P を適当に変形することによって $\mathfrak{B}_\infty(\alpha)$ についての同じ最小値問題の極値函数を構成することができる. このような変形法を解説する為の準備として $\theta\in\mathbb{R}$, $s>0$ について単位円周に $e^{i\theta}$ で内側から接する horocircle, horodisc を次のように定義する.

$$\text{(4.17)}\quad \Gamma_\theta(s) = \left\{z\in\mathbb{C}:|\frac{|e^{i\theta}-z|^2}{1-|z|^2}=s\right\}=\partial\mathbb{D}\left(\frac{e^{i\theta}}{1+s},\frac{s}{1+s}\right)-\{e^{i\theta}\},$$

$$\text{(4.18)}\quad \Delta_\theta(s) = \left\{z\in\mathbb{C}:|\frac{|e^{i\theta}-z|^2}{1-|z|^2}<s\right\}=\mathbb{D}\left(\frac{e^{i\theta}}{1+s},\frac{s}{1+s}\right),$$

とおく. このとき $\cup_{0<s}\Gamma_\theta(s)=\mathbb{D}$ や, $1<s<\infty$ のときは $0\in\Delta_\theta(s)$, $s=1$ のときは $0\in\Gamma_\theta(1)$ が成り立つことに注意しておこう. さて

$$\mu_P(z)=(1-|z|^2)|P'(z)|=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}e^{1-(1-|z|^2)/|1-z|^2}$$

であるから, $M(t)=(1+t)e^{-t}$, $t>-1$ とおこう. $M(t)$ は $t=0$ で最大値 $M(0)=1$ を取り $M(\infty)=0$ である. このとき $t\in(-1,\infty)$ について

$$\text{(4.19)}\qquad \mu_P(z)=(1+t)e^{-t}=M(t)\quad\text{for}\quad z\in\Gamma_0(\frac{1}{t+1})$$

が成り立つ. これより特に, $\mu_P(z)=M(t)\leq 1$ であり, $P'(0)=1$ と合わせて, $P\in\mathfrak{B}_\infty(1)$ がわかる. さらに $\mu_P(z)=1\Longleftrightarrow z\in\Gamma_0(1)$ が成り立つ.

次に P を変形して $\mathfrak{B}_\infty(\alpha)$ の極値函数の候補を作る為に $0\leq a<1$ について一次変換を

$$\text{(4.20)}\qquad T_a(z)=\frac{z+a}{1+az}$$

とおき, $P\circ T_a(z)$ を考えると

$$\text{(4.21)}\qquad \mu_{P\circ T_a}(z)=(1-|T_a(z)|^2)|P'\circ T_a(z)|=\mu_P\circ T_a(z)$$

よって $\mu_{P\circ T_a}(z)\leq 1\ \forall z\in\mathbb{D}$ と

$$\text{(4.22)}\qquad \mu_{P\circ T_a}(z)=1\iff T_a(z)\in\Gamma_0(1)z\in\Gamma_0(\frac{1+a}{1-a})$$

が成り立つ. さて

$$(P\circ T_a)'(z)=\frac{1+a}{1-a}\frac{e}{(1-z)^2}e^{-\frac{1+a}{1-a}\frac{1+z}{1-z}}$$

より

$$\text{(4.23)}\qquad (P\circ T_a)'(0)=e\frac{1+a}{1-a}e^{-\frac{1+a}{1-a}}=\left(1+\frac{2a}{1-a}\right)e^{-\frac{2a}{1-a}}=M\left(\frac{2a}{1-a}\right)$$

と表せるが, $M(t)$ は $[0,\infty)$ で狭義減少で, $M(0)=1$, $M(\infty)=0$ ゆえ $m=M^{-1}$: $(0,1]\to[0,\infty)$ とおこう. このとき, 与えられた $\alpha\in(0,1]$ について $(P\circ T_a)'(0)=M(2a/(1-a))=\alpha$ をみたす $a\in(0,1]$ は $m(\alpha)=2a/(1-a)$ より

$$a=\frac{m(\alpha)}{2+m(\alpha)} \tag{4.24}$$

である. そこで与えられた $\alpha\in(0,1]$ についてこのように $a\in[0,1)$ を取り.

$$P_\alpha(z)\stackrel{\text{def}}{=}P\circ T_a(z)-P\circ T_a(0)=\frac{1}{2}\{e^{m(\alpha)}-e^{1-(1+m(\alpha))\frac{1+z}{1-z}}\} \tag{4.25}$$

とおけば, $P_\alpha(0)=0$, $P'_\alpha(0)=\alpha$, $\mu_{P_\alpha}(z)=\mu_P\circ T_a(z)\le 1$ を満たすので $P_\alpha\in\mathfrak{B}_\infty(\alpha)$ である. さらに $(1+a)/(1-a)=1+2a/(1-a)=1+m(\alpha)$ より

$$\mu_{P_\alpha}(z)=1 \iff z\in\Gamma_0\left(\frac{1+a}{1-a}\right)=\Gamma_0(1+m(\alpha)) \tag{4.26}$$

が成り立つ.

5 $V_\infty(z_0,\alpha)$ の決定

定理 1 $\alpha\in(0,1)$, $\theta\in\mathbb{R}$ と $f\in\mathfrak{B}_\infty(\alpha)$ について

$$h_\theta(z)=\log\{(1-e^{-i\theta}z)^2f'(z)\},\quad H_{\alpha,\theta}(z)=\log\{(1-e^{-i\theta}z)^2P'_\alpha(e^{-i\theta}z)\} \tag{5.27}$$

とおくと

(1) $h_\theta(0)=H_{\alpha,\theta}(0)=\log\alpha$.

(2) $H_{\alpha,\theta}$ は, *horodisc* $\Delta_\theta(1+m(\alpha))$ を半平面 $\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w<\log(1+m(\alpha))\}$ に等角に写像する.

(3) $h_{\alpha,\theta}$ は, *horodisc* $\Delta_\theta(1+m(\alpha))$ を半平面 $\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w<\log(1+m(\alpha))\}$ の中へ写像する.

証明. (1) は明らか. (2) については計算により

$$H_{\alpha,\theta}(z)=1+\log(1+m(\alpha))-(1+m(\alpha))\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \tag{5.28}$$

である. 従って $H_{\alpha,\theta}$ は一次変換である. ここで像領域 $H_{\alpha,\theta}(\Delta_\theta(1+m(\alpha))$ については

$$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)=\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} \tag{5.29}$$

より $H_{\alpha,\theta}(z)=w$ とおくと

$$\begin{aligned} & z\in\Delta_\theta(1+m(\alpha)) \\ \iff & \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)>\frac{1}{1+m(\alpha)}\iff \operatorname{Re}w<\log(1+m(\alpha)) \end{aligned} \tag{5.30}$$

となる．

一方 $h_\theta(z) = \log\{(1-e^{-i\theta}z)^2 f'(z)\}$ については $z \in \Delta_\theta(1+m(\alpha))$ ならば

$$(5.31)\qquad \begin{aligned} \mathrm{Re}\, h_{\alpha,\theta}(z) &= \log|1-e^{-i\theta}z|^2|f'(z)| \\ &= \log\{\frac{|e^{i\theta}-z|^2}{1-|z|^2}(1-z|^2)|f'(z)|\} < \log(1+m(\alpha)) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $h_\theta(\Delta_\theta(1+m(\alpha)) \subset \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, w < \log(1+m(\alpha))\}$ □

さて $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$ について $V_\infty(z_0,\alpha)$ の決定を述べる前に，予備的考察をしておこう．

(i) $V_\infty(z_0,\alpha)$ は半平面 $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, w \leq -\log(1-|z_0|^2)\}$ の compact subset.

(ii) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ について $V_\infty(e^{i\theta}z_0,\alpha) = V_\infty(z_0,\alpha)$.

(iii) $V_\infty(z_0,\alpha)$ は convex.

(iv) $V_\infty(z_0,\alpha)$ は 内点を持つ．

(v) $\partial V_\infty(z_0,\alpha)$ は convex Jordan curve であり，$V_\infty(z_0,\alpha)$ は，この curve の inner domain と curve の和集合．これは (i), (iii), (iv) より導かれる．

以上より，$V_\infty(z_0,\alpha)$ を決定するには $r \in (0,1)$ について Jordan curve $\partial V_\infty(r,\alpha)$ を決定すれば十分である．

定理 2 $\alpha, r \in (0,1)$ について *Jordan curve* $\partial V_\infty(r,\alpha)$ は次のようになる．

(1) $0 < r < m(\alpha)/(2+m(\alpha))$ ならば $\partial V_\infty(r,\alpha)$ は

$$(5.32)\qquad [-\pi,\pi] \ni \theta \mapsto \log P'_\alpha(re^{i\theta})$$

で与えられる閉曲線である．またある $f \in \mathfrak{B}_\infty(\alpha)$ と $\theta \in (-\pi,\pi]$ について $\log f'(r) = \log P'_\alpha(re^{i\theta})$ ならば，$f = e^{-i\theta}P_\alpha(e^{i\theta}\cdot)$ が成り立つ．

(2) $m(\alpha)/(2+m(\alpha)) \leq r < 1$ ならば $\partial V_\infty(r,\alpha)$ は

$$(5.33)\qquad (-\theta_\alpha(r), \theta_\alpha(r)) \ni \theta \mapsto \log P'_\alpha(re^{i\theta})$$

で与えられる単純弧と，2 点 $\log P'_\alpha(re^{i\theta_\alpha(r)})$, $\log P'_\alpha(re^{-i\theta_\alpha(r)})$ を結ぶ線分をつないだ閉曲線．但し

$$(5.34)\qquad \theta_\alpha(r) = \cos^{-1}\left(\frac{(2+m(\alpha)r^2 - m(\alpha)}{2r}\right)$$

であり，線分は直線 $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, w = -\log(1-r^2)\}$ 内にある．またある $f \in \mathfrak{B}_\infty(\alpha)$ と $\theta \in (-\theta_\alpha(r), \theta_\alpha(r))$ について $\log f'(r) = \log P'_\alpha(re^{i\theta})$ ならば，$f = e^{-i\theta}P_\alpha(e^{i\theta}\cdot)$ が成り立つ．

証明．$0 < r < m(\alpha)/(2+m(\alpha))$ の場合は，任意の θ について $r \in \Delta_\theta(1+m(\alpha))$ が成り立つことに注意する．そこで D を $\Delta_\theta(1+m(\alpha))$ における 0 中心の hyperbolic disc で $r \in \partial D$ を満たすように取る．このとき

$$(5.35)\qquad H_\alpha(z) = \log\{(1-z)^2 P'_\alpha(z)\} = 1 + \log(1+m(\alpha)) - (1+m(\alpha))\frac{1+z}{1-z}$$

とおくと, 定理 1 と Schwarz の補題より

$$h_\theta(\bar{D}) \subset H_{\alpha,\theta}(\bar{D}) = H_\alpha(e^{-i\theta}\bar{D}). \tag{5.36}$$

特に $r \in \bar{D}$ より $h_\theta(r) \in H_\alpha(e^{-i\theta}\bar{D})$ が成り立つ. これは任意の $f \in \mathfrak{B}_\infty(\alpha)$ について

$$\log\{(1-e^{-i\theta}r)^2 f'(r)\} \in H_\alpha(e^{-i\theta}\bar{D}). \tag{5.37}$$

すなわち

$$\log f'(r) \in H_\alpha(e^{-i\theta}\bar{D}) - 2\log(1-re^{-i\theta})(= \text{閉円板}) \tag{5.38}$$

が成り立つことを意味する. よって

$$V_\infty(r,\alpha) \subset H_\alpha(e^{-i\theta}\bar{D}) - 2\log(1-re^{-i\theta}) \tag{5.39}$$

が成り立つ.

次に $f(z) = e^{i\theta}P_\alpha(e^{-i\theta}z)$ に以上の議論を適用すると $r \in \partial D$ と $H_{\alpha,\theta}$ が等角であることより $H_{\alpha,\theta}(r) \in \partial H_{\alpha,\theta}(\bar{D}) = \partial H_\alpha(e^{-i\theta}\bar{D})$ が成り立つ. これは

$$\log P'_\alpha(re^{-i\theta}) \in V_\infty(r,\alpha) \cap \partial(H_\alpha(e^{-i\theta}\bar{D}) - 2\log(1-re^{-i\theta})) \tag{5.40}$$

を意味する. 従って任意の $\theta \in \mathbb{R}$ について $\log P'_\alpha(re^{-i\theta}) \in \partial V_\infty(r,\alpha)$ が成り立つ. また $\log f'(r) = \log P'_\alpha(re^{-i\theta})$ ならば Schwarz の補題の一意性より $\log f' = \log P'_\alpha(e^{-i\theta}\cdot)$ が成り立ち, これより $f = e^{i\theta}P'_\alpha(e^{-i\theta}\cdot)$ が成り立つ.

写像 $[-\pi,\pi] \ni \theta \mapsto \log P'_\alpha(re^{-i\theta})$ が, 実際に Jordan curve を与えることは

$$G_\alpha(z) = \log P'_\alpha(z) = 1 + \log(1+m(\alpha)) - 2\log(1-z) - (1+m(\alpha))\frac{1+z}{1-z} \tag{5.41}$$

が $\Delta_0(1+m(\alpha))$ で単葉であることより従う.

$0 < r < m(\alpha)/(2+m(\alpha))$ の場合は幾何学的な考察より $|\theta| < \theta_\alpha$ ならば $r \in \Delta_\theta(1+m(\alpha))$ ゆえ前半の議論がそのまま使えて, $\log P'_\alpha(re^{-i\theta}) \in \partial V_\infty(r,\alpha)$ と一意性が成り立つ. $\log P'_\alpha(re^{\pm i\theta_\alpha}) \in \partial V_\infty(r,\alpha)$ については, $\partial V_\infty(r,\alpha)$ が閉集合であることより従う. また簡単な計算により $\mathrm{Re}\log P'_\alpha(re^{\pm i\theta_\alpha}) = -\log(1-r^2)$ が成り立つことが示せる. これと $V_\infty(r,\alpha) \subset \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} \le -\log(1-r^2)\}$ よりこの 2 点を結ぶ線分が $\partial V_\infty(r,\alpha)$ の部分集合であることがわかる.

実際に $[-\theta_\alpha,\theta_\alpha] \ni \theta \mapsto \log P'_\alpha(re^{-i\theta})$ と $\log P'_\alpha(re^{\pm i\theta_\alpha}))$ を結ぶ線分よりなる曲線が convex Jordan curve であることは $G_\alpha(z) = \log P'_\alpha(z)$ による $\{z \in \mathbb{D} : |z| = r\} \cap \Delta_0(1+m(\alpha))$ の像曲線の曲率が正であることより従う. □

$\alpha = 1$ の場合の $V_\infty(r,1)$ の決定についての注意を述べよう. この場合は $m(1) = 0$ ゆえ $\Delta_\theta(1)$ で考えることになるが, $0 \in \partial\Delta_\theta(1)$ ゆえ, Schwarz の補題が使えない. しかしながら $f \in \mathfrak{B}_\infty(1)$ ならば $f'(0) = 1$ と $|f'(z)| \le (1-|z|^2)^{-1} = 1 + |z|^2 + \cdots$ より $f''(0) = 0$ であるから $h_\theta(0) = H_{\alpha,\theta}(0) = \log\alpha$ に加えて $h'_\theta(0) = H'_{\alpha,\theta}(0)$ も成り立つ. この場合は Schwarz の補題の代わりに Julia の lemma が適用できる. 従って定理 2 において (2) が $m(\alpha) = m(1) =$ として成り立つ. 詳しくは [13], [14] を参照してほしい.

6 $V(\alpha,r)$ の決定

$V(\alpha,r)$ については $P(z)$ の代わりに

$$B(z) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}z^2 \tag{6.42}$$

を考えれば良い. $0 \leq t \leq 1$ について $M(t) = 3\sqrt{3}t(1-t^2)/2$ とおけば, $M(t)$ は非負で $t = 1/\sqrt{3}$ で最大値 1 を取ることから $\mu_B(z) = (1-|z|^2)|B'(z)| = M(|z|) \leq 1$ となり, さらに $\mu_B(z) = 1 \iff |z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ が成り立つ. ここで $a \in [0,1)$ について

$$T_a(z) = \frac{z-a}{1-az} \tag{6.43}$$

とおくと $\mu_{B\circ T_a}(z) = \mu_B \circ T_a(z)$ が成り立つ. また $(B\circ T_a)'(0) = M(a)$ である. ここで M の $[0,1/\sqrt{3}]$ への制限の逆函数を m とおく. (m は $[0,1]$ で狭義増加であり, $m(0) = 0$, $m(1) = 1/\sqrt{3}$.) 与えられた $\alpha \in [0,1]$ について

$$B_\alpha(z) \stackrel{\text{def}}{=} B\circ T_{m(\alpha)}(z) - B\circ T_{m(\alpha)}(0) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{z-m(\alpha)}{1-m(\alpha)z}\right)^2 - m(\alpha)^2\right\} \tag{6.44}$$

とおけば, $B_\alpha(0) = 0$, $B'_\alpha(0) = \alpha$ であり, $\mu_{B_\alpha}(z) = \mu_B \circ T_{m(\alpha)}(z) \leq 1$ を満たすので, $B_\alpha \in \mathfrak{B}(\alpha)$ である. さらに

$$\mu_{B_\alpha}(z) = 1 \iff \left|z - \frac{2m(\alpha)}{3-m(\alpha)^2}\right| = \sqrt{3}\frac{1-m(\alpha)^2}{3-m(\alpha)^2} \tag{6.45}$$

が成り立つ.

定理 3 $\alpha \in [0,1]$ について集合 $V(\alpha,r)$ は *compact convex subset of* $\mathbb{C}$ である. また $\partial V(\alpha,r)$ は *Jordan curve* であり, $V(\alpha,r)$ は $\partial V(\alpha,r)$ とその *innner domain* の和集合. さらに

(1) $0 < r < (1-\sqrt{3}m(\alpha))/(\sqrt{3}-m(\alpha))$ ならば $\partial V(\alpha,r)$ は $[-\pi,\pi] \ni \theta \mapsto B_\alpha(re^{i\theta})$ で与えられる. またある $f \in \mathfrak{B}(\alpha)$ と $\theta \in \mathbb{R}$ について $f'(r) = B_\alpha(re^{i\theta})$ ならば $f = e^{-i\theta}B_\alpha(e^{i\theta}\cdot)$ が成り立つ.

(2) $(1-\sqrt{3}m(\alpha))/(\sqrt{3}-m(\alpha)) \leq r < (1+\sqrt{3}m(\alpha))/(\sqrt{3}+m(\alpha))$ ならば $\partial V(\alpha,r)$ は単純弧 $[-\theta_\alpha,\theta_\alpha] \ni \theta \mapsto B_\alpha(re^{i\theta})$ と 2 点 $B_\alpha(re^{\pm i\theta})$ を結ぶ線分よりなる. 但しこの線分は直線 $\{w \in \mathbb{C} : |w| = (1-r^2)^{-1}$ 上にあり,

$$\theta_\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{r^2(3-m(\alpha)^2)) + 3m(\alpha)^2 - 1}{4m(\alpha)r}\right) \tag{6.46}$$

である. またある $f \in \mathfrak{B}(\alpha)$ と $|\theta| < \theta_\alpha$ について $f'(r) = B_\alpha(re^{i\theta})$ ならば $f = e^{-i\theta}B_\alpha(e^{i\theta}\cdot)$ が成り立つ.

(3) $(1+\sqrt{3}m(\alpha))/(\sqrt{3}+m(\alpha)) \leq r < 1$ のときは $\partial V(\alpha,r) = \{w \in \mathbb{C} : |w| = (1-r^2)^{-1}\}$ である.

References

[1] A. Bloch, *Les théorèmes de M. Valiron sur les functions entières et la théorie de l'uniformisation*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **17**(1925).

[2] M. Bonk, *Extremal probleme bei Bloch-Funktionen*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1988.

[3] M. Bonk, *On Bloch's constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **110**(1990), 889-894.

[4] M. Bonk, *Distortion estimates for Bloch functions*, Bull. London Math. Soc. **23**(1991), 454-456.

[5] M. Bonk, D. Minda and H. Yanagihara, *The hyperbolic metric on Bloch regions*, Computational Methods and Function Theory 1994, ed. by R.M. Ali, St. Ruscheweyh and E.B. Saff, Series in Approximations and Decompositions - Vol. 5, World Scientific Publishing

[6] M. Bonk, D. Minda and H. Yanagihara, *Distortion estimates for locally univalent Bloch functions*, Pacific J. of Math., **179**(1997), 241-262.

[7] M. Bonk, D. Minda and H. Yanagihara, Distortion estimates for Bloch functions, Journal d'Analyse Mathématique, **69**(1996), 73-95.

[8] H. Chen and P.M. Gautheir, *On Bloch's constant*, Journal d'Analyse Mathématique, **69**(1996), 275-291.

[9] E. Landau, *Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten*, Math. Z. **30**(1929), 608-634.

[10] X. Liu and D. Minda, *Distortion estimates for Bloch functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **333**(1992), 325-338.

[11] E. Peschl, *Über die Verwendung von Differentialinvarienten bei gewissen Funktionenfamilien und die Übertragung einer darauf gegründeten Methode auf partielle Differentialgleichungen vom elliptische Typus*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI **336**/6(1963), 23 pp.

[12] E. Peschl, *Über unverzweigte konforme Abbildungen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. K1. S.-B II **185**(1976), 55-78.

[13] H. Yanagihara, *Sharp distortion estimate for locally schlicht Bloch functions*, Bulletin of London Mathematical Society, **26**(1994), 539-542.

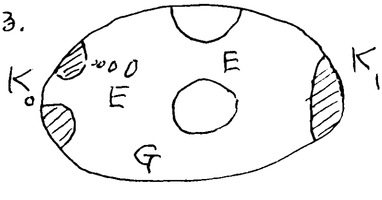
[14] H. Yanagihara, *On the locally univalent Bloch constants*, Journal d'Analyse Mathématique **65**(1995), 1-17.

12

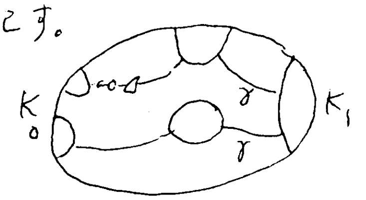
極値的距離とp容量との関係

大津賀 信

極値的距離の逆数であるmodulusと、一種のp容量との間の等式が島のある場合にも成立することを述べる。図のようなモデルについて説明する。



Gは有界開集合、$K_0, K_1 (\subset \overline{G})$はコンパクトで$K_0 \cap K_1 = \phi$とし、$K = K_1 \cup K_2$と置く。$E (\subset \overline{G})$は$R^d \setminus K$内の相対的閉集合で、島と呼ばれる各成分$E_\alpha$はKからの距離が正とする。また$R^d \setminus (K \cup E)$は領域とする。以下$(K_0, K_1, E, G)$をコンデンサーと呼び、Conと記す。



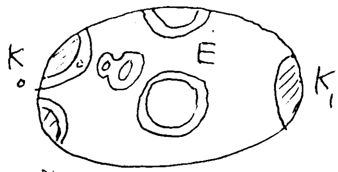
次にK_0とK_1を結ぶi曲線γの全体を$\Gamma(Con)$と記す。ここにi曲線とは、Eの各成分E_αをそれぞれ一点と見る(連続)曲線のことで、$\gamma \setminus (K \cup E)$はG内にあるものとする。どの$\gamma \in \Gamma(Con)$に対しても、線積分$\int_{\gamma \setminus (K \cup E)} \rho \, ds \geq 1$を満たす可測な関数$\rho \geq 0$をテスト関数として定義されるmodulus: $\inf_\rho \int_G \rho^p \omega \, dx$を$M(\Gamma(Con); \omega)$, 或いは

$M(Con,\omega)$と記す。ここにωは重さと呼ばれるR^d内の可測で非負な関数である。

他方, p容量の一種$C_p^*(Con;\omega)$を定義しよう。その際のテスト関数$f(x)$はG内でp-precise, K_0とK_1のGに相対的なある近傍内でそれぞれ0と1に等しく, また各E_αのGに相対的なある近傍内で定数c_αに等しい関数とする。そして$C_p^*(Con;\omega)$は$\inf_f \int_G |\mathrm{grad}\, f|^p \omega\, dx$で定義される。

定理. $$M_p(Con;\omega)=C_p^*(Con;\omega).$$

証明にはまず$M_p(Con;\omega)\le C_p^*(Con;\omega)$を見る。次に$K_0, K_1, E$を外側から図のように$K_0^{(n)}, K_1^{(n)}, E^{(n)}$で近似し, これの組を$Con_n$と書く。



常套手段を用いて$C_p^*(Con;\omega)\le M_p(Con_n;\omega)$を示す。つづいて$M_p(Con_n;\omega)$は$n\to\infty$の時$M_p(Con;\omega)$に近づくという[JO]にある連続性の結果を用いて, $C_p^*(Con;\omega)\le M_p(Con;\omega)$を, 従って等式が得られる。なお, $\omega\equiv 1$の時に上の等式は証明できると[S]には書いてある。

参考文献 [JO] Jin-Ohtsuka: RIMS講究録1016 (1997), 42-57.

[S] V. Shlyk: Russ. Acad. Sci. Izv. Math. 43 (1994), 83-104 (英訳).

13　可容性と可測性

二宮信幸

Choquet が1953年に発表した容量に関する論文は普く有名である．その論文は明らかに Cartan の研究（1946年）に端を発している．

R^m（$m \geqq 3$）におけるニュートン・ポテンシャル

$$U^{\mu}(x) = \int |x-y|^{2-m} d\mu(y)$$

について，正の測度 μ の任意集合 A への内（外）掃散測度を μ_A^i（μ_A^e），A の μ－内（外）容量を $C_\mu^i(A)$（$C_\mu^e(A)$）とし，両者が一致するとき，A は μ－可容といわれ，単に $C_\mu(A)$ とかかれる．点 x は，x におかれた Dirac の測度 ε_x に対して，$(\varepsilon_x)_A^i = \varepsilon_x$（$(\varepsilon_x)_A^e = \varepsilon_x$）なるとき，$A$ の内（外）正則点といわれる．

本論において，我々は次のような測度 α を考える．有理点を中心，半径が有理数である球面測度（球面上で一様に分布された正の測度で，全質量はその半径の

$m-2$ 乗）をすべて並べて $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n, \cdots$

とし，正の係数 $\{a_n\}$ をあたえて，正の測度

$$\alpha = \sum a_n \lambda_n \ , \ \sum a_n < \infty$$

が全質量有限，かつニュートン・ポテンシャルが全空間で有限連続な関数であるようにする。

このとき，

Lemma. $R^m (m \geqq 3)$ において任意の集合 A，A の内（外）正則点の集合を A^i (A^e) とするとき，内非外正点の集合 $A^e - A^i$ がエネルギー有限なすべての正の測度について測度 0 ならば，A は α－可容である。

定理. $R^m (m \geqq 3)$ において任意の集合 A，A がエネルギー有限なすべての正の測度について可測ならば，A は α－可容である。

系. $R^m (m \geqq 3)$ において，ボレル集合 B の連続像 $A = f(B)$ は α－可容である。

14　単葉有理型函数の複素線形結合の単葉性

米谷　文男　　京都工繊大・工芸
柴　　雅和　　広島大・工

複素球面内の領域 G 上高々点 ζ を除いて正則単葉な函数 f_0 に対し

$Q_0 = \{f : f$ は境界近傍で有界な単葉函数で, $f - f_0$ が G 上正則$\}$
とおく. $f \in Q_0$ に対して $A(f)$ で f_0 が極を持つ時は f の像の補集合の面積を表わし, f_0 が極を持たない時は f の像の面積を絶対値とする非正数を表わす.

次の命題に登場する G の境界上の積分は, 例のごとく, G の正則近似列を用いて定義されるものである.

命題 1　$f, g \in Q_0$ に対して

$$\int_{\partial G} f\overline{dg} = (1+i)(A(f)+A(g))$$
$$+\frac{1}{2}\{\|df+idg\|^2_{G-D_\rho} + i\|df-dg\|^2\} + \frac{i}{2}\int_{\partial D_\rho}(f+ig)\overline{d(f+ig)}.$$

さて, Q_0 内の函数列 $\{f_k\}_{k\in I}$ に対して

$$s_{k\ell} = \mathrm{Re}\int_{\partial G} f_k\overline{df_\ell},\ t_{k\ell} = \mathrm{Im}\int_{\partial G} f_k\overline{df_\ell}$$

と置く. $s_{\ell k} = -s_{k\ell},\quad s_{kk} = 0,\quad t_{\ell k} = t_{k\ell} \geq 0,\quad t_{kk} = 2A(f_k)$ である. ここで複素数列 $\{\lambda_k\}_{k\in I}$ が $\sum_{k\in I}\lambda_k = 1$ を満たすとする. 今 f_0 が極を持つとして, $F = \sum_{k\in I}\lambda_k f_k \in Q_0$ ならば

命題 2　任意の $n \in I$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \textstyle\sum_{k\in I}(\mathrm{Re}\,\lambda_k t_{kn} + \mathrm{Im}\,\lambda_k s_{kn}), \\ 0 &\leq \textstyle\sum_{k\in I} A(f_k)|\lambda_k|^2 + \sum_{k<\ell} s_{k\ell}\mathrm{Im}\,(\lambda_k\overline{\lambda_\ell}) + \sum_{k<\ell} t_{k\ell}\mathrm{Re}\,(\lambda_k\overline{\lambda_\ell}). \end{aligned}$$

系 1 $\lambda_1+\lambda_2=1$, $F=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\in Q_0$, $(f_1\neq f_2)$ の時,

$\mathrm{Re}\,(\lambda_1 t_{11}+\lambda_2 t_{21})+\mathrm{Im}\,\lambda_2 s_{21}\geq 0$, $\mathrm{Re}\,(\lambda_1 t_{12}+\lambda_2 t_{22})+\mathrm{Im}\,\lambda_1 s_{12}\geq 0$;

$$\left|\lambda_1-\frac{A(f_1)-A(f_2)+is_{12}}{\|df_1-df_2\|^2}-\frac{1}{2}\right|\leq$$

$$\leq\sqrt{\frac{(A(f_1)-A(f_2))^2+\|df_1-df_2\|^2(A(f_1)+A(f_2))+s_{12}^2}{\|df_1-df_2\|^4}+\frac{1}{4}}.$$

更に, $t_{11}=t_{22}=s_{12}=0, t_{12}>0$ ならば, $\left|\lambda_1-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$.

G を複素球面上の無限遠点を含む有限連結領域として β_j でその 境界成分を表わす. Koebe の定理によって, 実数の組 $\Theta=\{\theta_j\}$ に対して, G 上の無限遠点を無限遠点に写し, β_jを実軸となす角が θ_j ラジアンである線分にそれぞれ対応させ, さらに無限遠点の近傍では

$$f_\Theta(\zeta)=\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^{-n}$$

と正規化されたGから複素球面の中への等角写像f_Θが唯1つある. 簡便の為$\Theta(t)=\left\{\theta_j+\frac{\pi t}{2}\right\}$, $P_t=f_{\Theta(t)}$ と表わすと,

$$P_t=e^{\frac{i\pi t}{2}}\left(P_0\cos\frac{\pi t}{2}-iP_1\sin\frac{\pi t}{2}\right).$$

これを用いて次を得る.

定理 1 $0\leq s\leq 1$ に対して $sP_t+(1-s)P_{t+1}$ は G を補集合の各成分が凸集合であるような領域に単葉に写す. $s<0$ 又は $s>1$ に対して $sP_t+(1-s)P_{t+1}$ は G 上単葉でない.

定理 2 $\lambda P_t+(1-\lambda)P_{t+1}$ が G 上単葉となるのは$\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$ のときに限る.

References:

[1] Maitani, F.: Conformal welding of annuli, to appear.
[2] Shiba, M. : 極値平行截線写像関数の単葉な複素線形結合, 日本数学会秋季総合分科会, 函数論分科会講演アブストラクト. 東京大学, 1997.

15 Localization of the coefficient theorem

山下慎二
(Yamashita, Shinji)
(東京都立大学 (理))

Let $\mathcal{U}$ be the family of functions holomorphic and univalent in $D = \{z; |z| < 1\}$. Writing $f_\gamma(z) = \overline{\gamma} f(\gamma z)$ for $f \in \mathcal{U}$ and for $\gamma \in \partial D \equiv \{z; |z| = 1\}$, we know that important members of $\mathcal{U}$ are K_γ, the γ-rotations of the Koebe function $K(z) = z/(1-z)^2$. The coefficient theorem proved by L. de Branges then reads as follows. For each $f \in \mathcal{U}$ and for each $n \geq 2$, the inequality (B): $|f^{(n)}(0)/f'(0)| \leq n!\,n$ holds. If the equality holds in (B) for an $n \geq 2$, then $f = f'(0)K_\gamma + f(0)$ for some $\gamma \in \partial D$. Conversely the equality holds in (B) for all $n \geq 2$ and for all $f = AK_\gamma + B$, where $A \neq 0, B$, and $\gamma \in \partial D$ are complex constants. By induction we have $K_\gamma^{(n)}(z) \equiv (K_\gamma)^{(n)}(z) = \gamma^{n-1} n!(n+\gamma z)/\{(1-\gamma z)^{n+2}\}$ $(n \geq 1, \gamma \in \partial D)$, so that (B) is precisely $|f^{(n)}(0)/f'(0)| \leq K^{(n)}(0)/K'(0)$. Suppose that $f'(z) \neq 0$ at a point $z \in D$ for f holomorphic in D. Then there exists $\rho(z,f) > 0$, the greatest r such that $0 < r \leq 1$ and f is univalent in $\{w; |(w-z)/(1-\overline{z}w)| < r\}$. This is a Euclidean disk of Euclidean radius $\mathcal{R}(z,r) \equiv r(1-|z|^2)/\{1-r^2|z|^2\} \leq 1$.

Theorem 1. *Let f be holomorphic in D and suppose that $f'(z) \neq 0$ at a point $z \in D$, so that $\rho = \rho(z,f) > 0$. Then*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}\right| \leq \mathcal{R}(z,\rho)^{1-n}\frac{K^{(n)}(\rho|z|)}{K'(\rho|z|)} = \frac{n!(\rho|z|+1)^{n-2}(\rho|z|+n)}{\rho^{n-1}(1-|z|^2)^{n-1}} \tag{1}$$

for each $n \geq 2$. If the equality holds in (1) for an $n \geq 2$, then $\rho(z,f) = 1$, so that $f \in \mathcal{U}$. Furthermore, f is of the form

$$f(w) \equiv AK_\beta(w) + B, \tag{2}$$

where $A \neq 0$, B, , and $\beta \in \partial D$ are all complex constants.

Conversely for f of (2) (for which $\rho(z,f) = 1$) the equality holds in (2) for all $n \geq 2$ and at all points of $\Lambda(\beta) \equiv \{\overline{\beta}t;\ 0 \leq t < 1\}$, whereas the inequality (1) is strict for all $n \geq 2$ and at all points of $D \setminus \Lambda(\beta)$.

We may call (1) a localization of the coefficient theorem. Actually setting $z = 0$ for $f \in \mathcal{U}$ for which $\rho(z,f) \equiv 1$, we have (B). A domain Ω in the plane $\mathbf{C} = \{|z| < +\infty\}$ is called hyperbolic if $\mathbf{C} \setminus \Omega$ contains at least two points. Let ϕ be a universal covering projection from D onto a hyperbolic domain Ω in $\mathbf{C}$; ϕ is holomorphic and ϕ' is zero-free in D. The

Poincaré density P_Ω is then the function in Ω defined by $P_\Omega(z) = 1/\{(1-|w|^2)|\phi'(w)|\}$, $z \in \Omega$, where $z = \phi(w)$; the choice of ϕ and w is immaterial as far as $z = \phi(w)$ is satisfied. We next set $\rho_\Omega(z) = \rho(w, \phi)$ for $z = \phi(w) \in \Omega$. Again, $\rho_\Omega(z)$ is independent of the particular choice of ϕ and w as far as $z = \phi(w)$ is satisfied. We call $\rho_\Omega(z)$ the radius of univalency of Ω at z. Let $\mathcal{U}(\Omega)$ be the family of all the functions holomorphic and univalent in Ω; in particular, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(D)$.

Theorem 2. *For $f \in \mathcal{U}(\Omega)$ of a hyperbolic domain $\Omega \subset \mathbf{C}$ the inequality*

$$\left(\frac{\rho_\Omega(z)}{P_\Omega(z)}\right)^{n-1} \left|\frac{f^{(n)}(z)}{f'(z)}\right| \leq n! 4^{n-1} \tag{3}$$

holds for each $n \geq 2$ and at each $z \in \Omega$. If the equality holds in (3) *at a point $z \in \Omega$ and for an $n \geq 2$, then the following items* (I) *and* (II) *hold.*

(I) *There exist complex constants $Q \neq 0$ and R such that Ω is the slit domain*

$$\Omega = \mathbf{C} \setminus \left\{Qt + R; t \leq -\frac{1}{4}\right\}; \tag{4}$$

in particular, $\rho_\Omega(z) \equiv 1$.

(II) *The function f is of the form*

$$f(w) = \frac{S(R-w)}{4w + Q - 4R} + T, \tag{5}$$

where $S \neq 0$ and T are complex constants.

Conversely, suppose that f of (5) *is given in Ω of* (4)*. Then the equality holds in* (3) *at each point of the half-line $\mathcal{L} = \{Qt + R; t > -1/4\}$ and for each $n \geq 2$, whereas the inequality* (3) *is strict at each point of $\Omega \setminus \mathcal{L}$ and for each $n \geq 2$.*

The extremal function f of (5) maps Ω of (4) univalently onto the slit domain $\mathbf{C} \setminus \{St + T;\ t \leq -1/4\}$. We emphasize that in the case $\Omega = D$, the inequality (3) is worse than (1).

16

On the estimates of the pre-Schwarzian derivatives of the spiral-like functions

Yûsuke Okuyama
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Kyoto University, Japan

Let A denote the set of analytic functions f on the unit disk $\mathbb{D}$ normalized so that $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. For a constant $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, a function $f \in A$ is called *β-spiral-like* if f is univalent on $\mathbb{D}$ and for any $z \in \mathbb{D}$, the logarithmic spiral $f(z)\exp(-e^{-i\beta}t)$ $(t \geq 0)$ is contained in $f(\mathbb{D})$. It is equivalent that $\Re(zf'(z)/e^{i\beta}f(z)) > 0$ in $\mathbb{D}$. We set $SP(\beta)$ is the set of β-spiral-like functions.

For a locally univalent holomorphic function f, we define

$$T_f = \frac{f''}{f'} \quad \text{and} \quad S_f = (T_f)' - \frac{1}{2}(T_f)^2,$$

which are said to be the *pre-Schwarzian derivative* (or nonlinearity) and the Schwarzian derivative of f, respectively. For a locally univalent funcition f in the unit disk, we difine the norm of T_f and S_f by

$$\|T_f\|_1 = \sup_{z\in\mathbb{D}} |T_f(z)|(1-|z|^2) \quad \text{and} \quad \|S_f\|_2 = \sup_{z\in\mathbb{D}} |S_f(z)|(1-|z|^2)^2,$$

respectively. These norms have a significant meaning in the theory of Teichmuller spaces. For example, see [1].

In this talk, we shall give the best possible estimate of the norms of the pre-Schwarzian derivatives for the class $SP(\beta)$.

Main Theorem 1. *For any $f \in SP(\beta)$, where $|\beta| < \pi/2$, we have*

$$\|T_f\|_1 = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq 2|2+e^{2i\beta}|. \tag{1}$$

This estimate is sharp. The equality in (1) *holds if $f(z) = f_\beta(z) := z(1-z)^{-2e^{-i\beta}\cos\beta}$ which is called the β-spiral Koebe function.*

On the other hand, we obtain the norms of the Schwarzian derivatives of β-spiral Koebe function f_β and the distance between them in the universal Teichmuller spaces.

Remark. For any $|\beta| < \pi/2$, $\|S_{f_\beta}\|_2 = 6$. If $\beta_1 \neq \beta_2$, the distance between $S_{f_{\beta_1}}$ and $S_{f_{\beta_2}}$ is more than 6 in the universal Teichmuller spaces. Otherwise, it is 0.

References

[1] ASTALA, K. and GEHRING, F. W. Injectivity, the *BMO* norm and the universal Teichmüller space, *J. Analyse Math.*, **46** (1986), 16–57.

17

無理的中立固定点における多項式の解析的線形化可能性

奥山 裕介 (京都大学大学院理学研究科)

有理関数の反復合成 (iteration) の力学系の局所理論として，正則関数芽の固定点での解析的線形化問題と呼ばれるものがある。本講演ではこの問題のうち未解決である，無理的中立固定点を持つ多項式の解析的線形化可能性について得られた結果について述べる。

原点の近傍で正則な関数 f が $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$ $(0 < |\lambda| < +\infty)$ の形のテイラー展開を持つとする。このとき原点の近傍 U とその上の等角写像 $h : U \to \mathbb{C}$ で $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ かつシュレーダー方程式

$$h(f(z)) = \lambda h(z)$$

を満たすものが存在するか，を f の固定点 $z = 0$ での解析的線形化問題という。

$f'(0) = \lambda$ を，固定点 $z = 0$ での f の multiplier と呼ぶ。$\lambda = 0$, $0 < |\lambda| < 1$, $|\lambda| = 1$, $|\lambda| > 1$ に応じて，固定点 $z = 0$ は超吸引的，吸引的，中立的，反発的であるという。さらに $|\lambda| = 1$ のときは $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ と表したとき θ が有理数の時は有理的中立または放物的，無理数の時は無理的中立という。

吸引的，反発的な時は Kœnigs が，超吸引的なときは Böttcher が，常に解析的線形化可能なことを示しており，また有理的中立の時は形式的巾級数の意味でさえ線形化不可能なことが分かる。それに対して，無理的中立な時は解析的線形化可能である時と無い時がある。

以下では α は常に無理数であるとする。Brjuno は，α が Brjuno 数ならば，任意の原点の近傍で正則な関数 $f(z) = e^{2\pi i\alpha} z + a_2 z^2 + \cdots$ は原点において解析的線形化可能であることを示した。Yoccoz は [4] において，Brjuno の定理の別証明と，Brjuno 条件が解析的線形化可能性の十分条件として最良であることを証明し，特に α が Brjuno 数でないならば，2 次多項式 $P_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z + z^2$ は解析的線形化不可能であることも示した。

任意の，multiplier が $e^{2\pi i\alpha}$ である固定点を持つ 2 次多項式は P_α にアフィン共役であるので，2 次多項式については無理的中立固定点での解析的線形化可能性についての必要十分条件が分かったことになる。

Problem. $d \geq 3$ として，d 次多項式についても，無理的中立固定点での解析的線形化可能性は Brjuno 条件で特徴付けられるか。また，有理函数についてはどうか。

以下のように定義する。

$$\mathcal{P}_{\alpha,d} := \{P(z) = e^{2\pi i\alpha}z + a_2z^2 + \cdots + a_dz^d; (a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d-1}\} \cong \mathbb{C}^{d-1}$$

Pérez-Marco は [3] において，α が Brjuno 数でなければ，$\mathcal{P}_{\alpha,d}$ の稠密な開集合で，その全ての元が原点で解析的線形化不可能であるものが存在することを示した。即ち，$\mathcal{P}_{\alpha,d}$ の holomorphic family で，その全ての元が原点で解析的線形化可能なものが存在するなら，その (複素) 次元は高々 $d-2$ である。次が主結果である。

Main Theorem. α は Brjuno 数でないとする。ある 3 次多項式 $P_{\alpha,A}(z) = e^{2\pi i\alpha}z + Az^2 + z^3$ が原点で解析的線形化可能なら，$d \geq 3$ で $\mathcal{P}_{\alpha,d}$ は (複素) 次元が $d-2$ である holomorphic family で，その全ての元が原点で解析的線形化可能であるものを含む。

即ち，ある Brjuno 数でない α で Yoccoz の 2 次多項式に関する結果が 3 次多項式に拡張できないなら，$d \geq 3$ で $\mathcal{P}_{\alpha,d}$ は原点で解析的線形化可能な元から成る，取り得る最大次元の holomorphic family を含むことが分かった。

Corollary. Brjuno 数でない α を固定する。ある $d \geq 3$ で，$\mathcal{P}_{\alpha,d}$ が原点で解析的線形化可能な元から成る，$d-2$ 次元の holomorphic family を含まないならば，任意の $A \in \mathbb{C}$に対し 3 次多項式 $P_{\alpha,A}$ は原点で解析的線形化不可能である。Brjuno 数でない任意の α に対し上記のことが成り立てば，Yoccoz の 2 次多項式に関する結果は 3 次多項式に拡張可能である。

Remark. Brjuno 数でない α と $d > 3$ を固定する。$\mathcal{P}_{\alpha,d}$ が原点で解析的線形化可能な d 次多項式 P_d を含むならば，この Teichmüller space の次元を計算することで (c.f. McMullen-Sullivan [1])，関連した結果を得ることが可能であると思われるが，[2] では，Main Theorem の証明において holomorphic family を具体的に構成した。

参考文献

[1] McMULLEN, C. and SULLIVAN, D. Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics III: The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system, Preprint (1994).

[2] OKUYAMA, Y. Non-Linearizability of Polynomials at Irrationally Indifferent Fixed Points, *preprint* (1998).

[3] PÉREZ-MARCO, R. Sur les dynamique holomorphes non linéarisables et une conjecture de V. I. Arnold, *Ann. Scient. Éc Norm Sup., 4e série*, **26** (1993), 565–644.

[4] YOCCOZ, J. C. Thèorém de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques, *Astérisque*, **231** (1996), 3–88.

18 Parabolic components for a family of cubic polynomials with parabolic fixed points

氏名 中根静男 所属 東京工芸大学

固有値 1 の放物的な不動点 0 を持つような 3 次多項式の族

$$Per_1(1) : P_a(z) = z^3 + az^2 + z, \ a \in \mathbf{C}$$

を考える。P_a の危点は

$$c_\pm = c_\pm(a) = \left(-a \pm \sqrt{a^2 - 3}\right)/3 = \left(-1 \pm \sqrt{1 - 3/a^2}\right) a/3,$$

であり、$a = \pm\sqrt{3}$ で分岐する。従って、危点 $c_\pm(a)$ は$\overline{\mathbf{C}} - \{\pm\sqrt{3}\}$ の 2 重被覆空間上の正則関数であり、通常の複素平面での扱いには注意を要する。ただし、$|a|$ が十分大きいところでは$c_\pm(a)$ は 1 価正則である。この枝を固定して考える。そこでは漸近的に

$$c_+(a) = -\frac{1}{2a} + O(\frac{1}{a^3}), \quad c_-(a) = -\frac{2a}{3} + \frac{1}{2a} + O(\frac{1}{a^3})$$

故、危値は

$$P_a(c_+(a)) = O(\frac{1}{a}), \quad P_a(c_-(a)) \approx \frac{4a^3}{27}$$

となる。従って $|a|$ が十分大きいところでは $c_-(a)$ が escape し、$c_+(a)$ は放物的不動点 0 の直接鉢 $\mathcal{B}_a^*(0)$ に含まれる。この性質は stretching という操作で不変なので、結局 connectedness locus $M_1(1)$ の外では常に $c_-(a)$ が escape することになる。実は次が成り立つ。

補題 1.1 常に $c_+(a) \in \mathcal{B}_a^*(0)$ が成り立つ。

従って次がいえる。

補題 1.2 族 $Per_1(1)$ の *connectedness locus* $M_1(1)$ は

$$M_1(1) = \{a \in \mathbf{C}; c_-(a) \in K_a = K(P_a)\}$$

と特徴づけられる。

$c_-(a)$ の余危点を $\tilde{c}_-(a)$ とかくと、$P_a(c_-(a)) = 4a^3/27 + \ldots = P_a(\tilde{c}_-(a))$ より $\tilde{c}_-(a) \approx a/3$ が従う。$\Phi(a) = 3\varphi_a(c_-(a))/\sqrt[3]{4}$ とおくと、次が成り立つ。

命題 1.1 $\Phi : \overline{\mathbf{C}} - M_1(1) \to \overline{\mathbf{C}} - \overline{D_{3/\sqrt[3]{4}}}$ は上への等角同型で $\lim_{a\to\infty} \Phi(a)/a = 1$ を満たす。

系 1.1 $M_1(1)$ は連結である。

$c_-(a) \in \mathcal{B}_a(0)$ を満たす点全体を parabolic set, その連結成分を parabolic component と呼ぶことにする。各 parabolic component W に対し、全ての $a \in W$ に対し $P_a^k(c_-(a)) \in \mathcal{B}_a^*(0)$ となるような最小の $k \geq 0$ が存在する。この k を W の preperiod という。$k = 0$ のとき、つまり $c_-(a) \in \mathcal{B}_a^*(0)$ のとき W を main component, $k > 0$ のとき W をcapture component という。$a \in W$ として 0 の Fatou 座標 $\Phi_{a,\pm}$ を考える。0 の吸引的及び反発的花弁を $\Omega_{a,\pm}$ とおくと、$\Phi_{a,\pm} : \Omega_{a,\pm} \to \mathbf{C}$ は中への正則同型で、関数等式 $\Phi_{a,\pm}(P_a(z)) = \Phi_{a,\pm}(z) + 1$ を満たす。従って$\Omega_{a,\pm}$ 内での P_a の力学系の基本領域は cylinder $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ に同型である。この cylinder を Ecalle cylinder と呼ぶ。さて、二つの危点$c_\pm(a)$ の軌道はやがて吸引的花弁 $\Omega_{a,-}$ に入ってくるので、その軌道 $[c_\pm]$ の Fatou 座標 $\Phi_{a,-}([c_\pm(a)])$ を考えることができる。

定義 1.1 その差 $\tau(a) = \Phi_{a,-}([c_-(a)]) - \Phi_{a,-}([c_+(a)]) \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ を P_a の *Fatou vector* という。

命題 1.2 $\tau : W - \tau^{-1}(0) \to \mathbf{C}/\mathbf{Z} - \{0\}$ は局所的に可逆である。つまり $\tau : W \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ は分岐被覆を与える。ただし W が *main component* W_0 のときは W_0, τ の代わりにその2重被覆 $\hat{W}_0$ 及びそこへの *lift* $\hat{\tau}$ を考えることにする。

本講演では parabolic components に関して筆者が得た結果と数値実験を紹介する。

19　境界のある曲面のタイヒミュラー空間の分割

牛島　顕

大阪大学大学院 理学研究科

数学専攻 博士後期課程 二年

R. C. Penner 氏は論文 [Pe] に於て、cusp のある曲面上の decorate されたタイヒミュラー空間を胞体に分割しました。この分割は写像類群の作用で変わらない様に成されていて、これは D. B. A. Epstein 氏との共著論文 [EP] で構成された双曲多様体の canonical decomposition から導かれます。

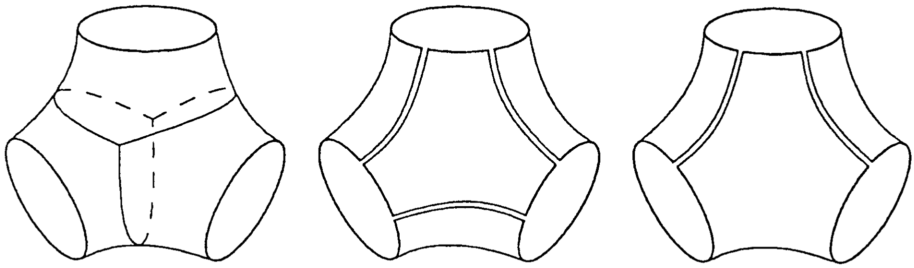
さて、canonical decomposition の概念は、小島定吉先生の論文 [Ko] に於て全測地的な境界のある場合に拡張されました。そこで、この事と Penner 氏の手法とを合わせる事で、此度新たに境界のある compact な曲面上のタイヒミュラー空間の、写像類群の作用で不変な胞体分割が得られました。

種数が g の向き付け可能な曲面から、r 個の互いに交わらない円板の内部を取り除いて得られる、compact な曲面を $F_{g,r}$とし、その上の Teichmüller 空間を $\mathcal{T}_{g,r}$で表します。$\mathcal{T}_{g,r}$の元は夫々$F_{g,r}$上に境界が全測地的になる双曲構造を定めます。この時に、$F_{g,r}$の二つ以上の境界から等距離にある点の集合は、$F_{g,r}$の内部でグラフを成します (右頁左端の図参照)。その双対として得られる $F_{g,r}$の分割を $\mathcal{T}_{g,r}$の元に対する $F_{g,r}$の **canonical decomposition** と呼びます (右頁真中の図参照)。

さて $F_{g,r}$を、境界から生じる辺と、境界どうしを結ぶ弧から生じる辺とが交互に現れる六角形に切り分けるとします。この様な分割を生ずる $F_{g,r}$内の弧の集合 (の同値類) を $\triangle = (c_1, c_2, \dots c_q)$ とすると、$q = 6g - 6 + 3r$であり、これは $\mathcal{T}_{g,r}$の次元と一致します。この様な $\triangle$ から得られる $F_{g,r}$の分割を **truncated triangulation** と呼ぶ事にします。また、$\triangle$ そのものか又は $\triangle$ から幾つかの弧を取り除いて得られる $F_{g,r}$の胞体分割を **truncated cellular decomposition** と呼ぶ事にします (右頁右端の図参照)。勿論、除き過ぎると胞体分割にはなりません。更に、$F_{g,r}$の truncated cellular decomposition として $\triangle$ を

一つ定めた時に、canonical decomposition がこの $\triangle$ と位相的に一致する $\mathcal{T}_{g,r}$ の元の集合を $\mathring{\mathcal{C}}(\triangle)$ で表す事にします。これらの定義の下で、次の定理が成り立ちます。

主定理　　曲面 $F_{g,r}$ の truncated cellular decomposition として $\triangle$ を一つ定める毎に、$\mathring{\mathcal{C}}(\triangle)$ は、$\triangle$ を定める弧の本数と次元が等しい開球と同相です。また、全ての truncated cellular decomposition に対する $\mathring{\mathcal{C}}(\triangle)$ を集めた集合は、$\mathcal{T}_{g,r}$ の胞体分割となり、更にこの分割は写像類群の作用で変わりません。



参考文献

[EP] D. B. A. Epstein and R. C. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Differential Geom., **27**(1988), 67–80;

[Ko] Sadayoshi Kojima, *Polyhedral decomposition of hyperbolic manifolds with boundary*, On the Geometric Structure of Manifolds, Proceedings of Workshops in Pure Mathematics, **10**(1990), 37–50;

[Pe] R. C. Penner, *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, Comm. Math. Phys., **113**(1987), 299–339.

20 One-parameter family of Jørgensen's groups

Hiroki SATO
Department of Mathematics
Shizuoka University

1. In this talk we will consider a one-parameter family of Jørgensen's groups G_θ.

DEFINITION 1. Let $G = \langle A, B\rangle$ be a marked two-generator subgroup of Möb. We call

$$J(\langle A, B\rangle) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|$$

Jørgensen's number for $G = \langle A, B\rangle$.

DEFINITION 2. The ***Jørgensen's number*** $\| J(G) \|$ for a subgroup G of Möb is defined as follows:

$$\| J(G) \| := \inf\{J(\langle A, B\rangle) \,|\, \langle A, B\rangle \subset G, \cancel{A^m \neq B^n \ (m, n \in \mathbf{Z})}\}.$$

A, B non elementary

DEFINITION 3. We call a subgroup G of Möb a ***Jørgensen's group*** if $\| J(G) \| = 1$.

2. Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_{\mu,\sigma} = \begin{pmatrix} \mu\sigma & \mu^2\sigma - 1/\sigma \\ \sigma & \mu\sigma \end{pmatrix} \quad (\mu, \sigma \in \mathbf{C}).$$

We set $G_{(\mu,\sigma)} = \langle A, B_{(\mu,\sigma)}\rangle$. Here we will consider a one-parameter family of subgroups $G_{\mu,\sigma}$ with $\mu = \sqrt{3}i/2$ and $\sigma = -ie^{i\theta}$ of $G_{(\mu,\sigma)}$.

For simplicity, we set $B_\theta := B_{(\sqrt{3}i/2, -ie^{i\theta})}$ and $G_\theta := G_{(\sqrt{3}i/2, -ie^{i\theta})}$, that is,

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \sqrt{3}e^{i\theta}/2 & i(3e^{i\theta}/4 - e^{-i\theta}) \\ -ie^{i\theta} & \sqrt{3}e^{i\theta}/2 \end{pmatrix}$$

and $G_\theta = \langle A, B_\theta \rangle$.

We denote by $V(G_\theta)$ the volume of 3-orbifold of a Kleinian group of the first kind G_θ.

THEOREM.

(i) *In the case of* $\theta = 0$, G_0 *has the following properties*:

(1) G_0 *is a Kleinian group of the second kind.*

(2) G_0 *is a Jørgensen's group.*

(3) $\Omega(G_0)/G_0$ *is a Riemann surface with signature* $(0, 3; 2, 3, \infty)$.

(ii) *In the case of* $\theta = \pi/6$, $G_{\pi/6}$ *is conjugate with the figure eight-knot group and has the following properties*:

(1) $G_{\pi/6}$ *is a Kleinian group of the first kind.*

(2) $G_{\pi/6}$ *is a Jørgensen's group.*

(3) $V(G_{\pi/6}) = 6\text{Л}(\pi/3)$, *where* $\text{Л}(\theta)$ *is the Lobachevskiĭ function*:

$$\text{Л}(\theta) = -\int_0^\theta \log|2\sin u|du.$$

(iii) *In the case of* $\theta = \pi/2$, $G_{\pi/2}$ *has the following properties*:

(1) $G_{\pi/2}$ *is a Kleinian group of the first kind.*

(2) $G_{\pi/2}$ *is a Jørgensen's group.*

(3) $V(G_{\pi/2}) = 2(\text{Л}(\pi/6) + \text{Л}(\pi/3))$.

(iv) *In the case of* $\theta = 5\pi/6$, $G_{5\pi/6}$ *is conjugate with the complex conjugate figure-eight knot group and has the following properties*:

(1) $G_{5\pi/6}$ *is a Kleinian group of the first kind.*

(2) $G_{5\pi/6}$ *is a Jørgensen's group.*

(3) $V(G_{5\pi/6}) = 6\text{Л}(\pi/3)$.

REMARKS. (1) $G_{\pi+\theta}$ is the same group as G_θ for $0 \leq \theta < \pi$.

(2) $J\langle A, B_\theta \rangle = 1$ for $0 \leq \theta < 2\pi$.

21 GROWTH AND COEFFICIENT ESTIMATES FOR UNIFORMLY LOCALLY UNIVALENT FUNCTIONS ON THE UNIT DISK

須川 敏幸　京都大学・理学部
AND
YONG CHAN KIM　YEUNGNAM UNIVERSITY

単位円板上の正則函数 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ がある定数 $\rho > 0$ に対して単位円板内の任意の半径 $\rho > 0$ の双曲円板において単葉であるときに、一様局所単葉であると言う。これは f の前 Schwarz 微分 $T_f = f''/f'$ が双曲的に有界であること、すなわち、

$$\|T_f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|T_f(z)| < \infty$$

が成り立つことと同値である [4]。(別の言い方をすれば $\log f'$ が Bloch 函数であるということである。) T_f は1次函数の後からの合成に関して不変なので以後では $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ と正規化された単位円板上の正則函数のみを考える。このような函数全体を $\mathcal{A}$ と表すことにし、その部分集合で上記のノルムが有限であるようなもの全体を $\mathcal{B}$ と表す。これは f と T_f を同一視することにより Banach 空間の構造を持つ。

この講演ではその部分集合 $\mathcal{B}(\lambda) = \{f \in \mathcal{A}; \|T_f\| \le 2\lambda\}$ について考察する。以下は [3] の結果の一部である。

$\mathcal{T}_1$ を $\mathcal{A}$ の部分集合でリーマン球面全体に擬等角に拡張できるような函数全体とする。このような集合は $\mathcal{B}$ の開集合で非可算無限個の成分を持ち $\mathrm{Int}\mathcal{B}(1/2) \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{B}(3)$ であることが知られている ([2], [5])。この集合は普遍 Teichmüller 空間の一つのモデルとしても重要である [1]。

まず $\mathcal{B}(\lambda)$ については次の函数が極値函数としての役割を果たす:

$$F_\lambda(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^\lambda dt.$$

これは $T_{F_\lambda} = 2\lambda(1-z^2)^{-1}$ を満たす函数として特徴づけられ、パラメータについては次のことが言える。

補題 1.

1. F_λ が有界 $\Leftrightarrow$ $0 \le \lambda < 1$,
2. F_λ が単葉 $\Leftrightarrow$ $0 \le \lambda \le 1$.

応用上、次の結果が重要である。(証明は非常に易しく、Bloch 函数の評価の variant と思えば知られた結果である。)

定理 2. $f \in \mathcal{B}(\lambda)$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$F_\lambda'(-|z|) = \left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^\lambda \le |f'(z)| \le \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^\lambda = F_\lambda'(|z|),$$

$$|f(z)| \leq F_\lambda(|z|)$$

さらに f が単葉ならば

$$-F_\lambda(-|z|) \leq |f(z)| \leq F_\lambda(|z|).$$

が成立する。上記のどこかにおいて原点以外の 1 点で等号が成立すればそれは F_λ の回転に限る。

これより特に $\lambda < 1$ ならば f は有界で $\lambda > 1$ ならば $f(z) = O(1-|z|)^{1-\lambda}$ が成立する。

次に係数評価について述べる。$f \in \mathcal{B}(\lambda)$ を級数展開して $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ と表しておく。$na_n = O(n^\gamma)$ $(n \to \infty)$ が成り立つような定数 γ の下限を $\gamma(f)$ と表し、$f \in \mathcal{B}(\lambda)$ 全体にわたる $\gamma(f)$ の上限を $\gamma(\mathcal{B}(\lambda))$ で表すことにする。すると次の評価が成り立つ。

定理 3.

$$\lambda - 1 \leq \gamma(\mathcal{B}(\lambda)) \leq \frac{\sqrt{1+4\lambda^2}-1}{2}.$$

ここで

$$\frac{\lambda^2}{\lambda+1} < \frac{\sqrt{1+4\lambda^2}-1}{2} < \min\left\{\lambda^2, \frac{2\lambda^2}{2\lambda+1}\right\} \leq \min\{\lambda^2, \lambda\}.$$

であることに注意しておく。

最後に Hardy 空間との関係について述べておく。

定理 4. $f \in \mathcal{A}$ が単葉でかつ $\|T_f\| = 2\lambda$ を満たしているとする。
$\lambda < 1$ ならば $f \in H^\infty$ である。
$\lambda > 1$ ならば $f \in H^p$ が任意の $0 < p < 1/(\lambda - 1)$ について成り立つ。
$\lambda = 1$ ならば $f \in BMOA$ である。

ここで $H^\infty \subset BMOA \subset \cap_{0<p<\infty} H^p$ が成り立つことに注意しておく。

References

[1] Astala, K. and Gehring, F. W. Injectivity, the *BMO* norm and the universal Teichmüller space, *J. Analyse Math.*, **46** (1986), 16–57.

[2] Becker, J. and Pommerenke, C. Schlichtheitskriterien und Jordangebiete, *J. Reine Angew. Math.*, **354** (1984), 74–94.

[3] Kim, Y. C. and Sugawa, T. Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk, preprint (1998).

[4] Yamashita, S. Almost locally univalent functions, *Monatsh. Math.*, **81** (1976), 235–240.

[5] Zhuravlev, I. V. Model of the universal Teichmüller space, *Siberian Math. J.*, **27** (1986), 691–697.

22 ON HÖLDER CONTINUITY OF GREEN'S FUNCTION

須川 敏幸　京都大学・理学部

この講演では平面領域の Green 函数の境界における Hölder 連続性について論じる。点 a に極を持つ平面領域 $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 上の Green 函数を $G_D(z,a)$ で表す。簡単のためにここでは D は Dirichlet の意味で正則であると仮定する。まず次の結果が出発点となる。$0 < \alpha < 1$ を定数とする。

定理 1 (Carleson [1]). **$\mathbb{R}^m$ 内のコンパクト集合が α-Hölder 連続な調和函数に関して除去可能な特異点集合であるための必要十分条件は $m-2+\alpha$ 次元 Hausdorff 測度が 0 であることである。**

従って特に平面上の内点を持たないコンパクト集合 E の補集合 $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ の ∞ に極を持つ Green 函数が全平面に α-Hölder 連続函数に拡張できればこの結果から集合 E の Hausdorff 次元は α 以上でなければならないことが分かる。また、特に Hausdorff 次元が 0 であるような Dirichlet 正則集合の外部の Green 函数は Hölder 連続には拡張できないことも分かる。

Green 函数が Hölder 連続に拡張できるかどうかについては条件を一変数化出来る点で次の命題が使いやすい。$D \subset \mathbb{C}$ を領域として $\delta_D(z) = \inf_{w\in\partial D} |z-w|$ とおく。

補題 2. 領域 D 上の正値調和函数 h に対して次の条件は同値である。

1. **ある正定数 C_1 が存在して $|h(z)-h(w)| \le C_1|z-w|^\alpha$ が任意の $z,w \in D$ で成り立つ。**
2. **ある正定数 C_2 が存在して $h(z) \le C_2\delta_D(z)^\alpha$ が任意の $z \in D$ で成り立つ。**

（上記において、実際には $C_2 \le C_1 \le 2^{1+\alpha}C_2$ に取れる。）

これに注意すれば、Green 函数の Hölder 連続性は境界における減少のオーダーをみれば良いことになる。

実は次のことが教科書 [2] には証明抜きで書かれている。

定理 3. ∞ を含む平面領域が一様完全な境界を持てばその上の ∞ を極に持つ Green 函数は平面全体に Hölder 連続に拡張できる。

ここで $\widehat{\mathbb{C}}$ のコンパクト集合 E が一様完全とは、E の外部に含まれる円環領域で E を分離するものの modulus が一様に上から押さえられることをいう。実際には上記の Hölder 指数はその modulus の上界によってある程度具体的に評価することが出来る。上の結果から特に一様完全集合の Hausdorff 次元の下からの評価が得られる（cf. [2], [3]）。

逆に「Green 函数が Hölder 連続に拡張できるならばその境界は一様完全か？」という問題が生ずる。これについて、今回次のような反例が得られたので報告する。

定理 4. 任意の定数 $0 < \alpha \le 1$ に対して Green 函数が境界まで α-Hölder 連続に拡張できるがその境界は一様完全ではなく，なおかつ Dirichlet 正則な平面領域が存在する。

実際には次のように構成できる。$\delta_n > 0$ を 0 に収束するように任意に取り、非負整数 n に対して $D_0 = \{|z| < 1/2\}$, $D_n = \{z \in \mathbb{C}; \delta_n < |z - 2n| < 1/2\}$ $(n \geq 1)$ とおく。これに対して $\varepsilon_n \in (0, 1/2)$ を十分小さく取れば、

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} (D_n \cup P_n)$$

が求める領域となる。ただし、ここに $P_n = \{z = x + iy; |x - (2n+1)| < 1, |y| < \varepsilon_n\}$ とする。

References

[1] Calreson, L. Removable singularities of continuous harmonic functions on $\mathbb{R}^m$, *Math. Scand.*, **12** (1963), 15–18.

[2] Carleson, L. and Gamelin, T. W. *Complex Dyamics*, Springer-Verlag (1993).

[3] Sugawa, T. Various domain constants related to uniform perfectness, to appear in Complex Variables.

23 HOLOMORPHIC MOTIONS AND QUASICONFORMAL EXTENSION

須川 敏幸　　京都大学・理学部

この講演ではいわゆる λ-lemma を用いて単葉性定理が擬等角拡張性定理にパワーアップされる事例についてみてみる。なかなか一般的な枠組みで説明するのは難しいが、具体的にいくつかの例について見ていけば使い方は分かっていただけるものと思う。

まず E をリーマン球面の任意の部分集合とする。$\mathbb{D}$ を単位円板として写像 $F: E\times\mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が集合 E の正則運動 (holomorphic motion) であるとは次の 3 条件を満たすこととする。

1. $z \in E$ を固定すれば $F(z,\cdot): \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は正則、
2. $\lambda \in \mathbb{D}$ を固定すれば $F_\lambda := F(\cdot,\lambda): E \to \widehat{\mathbb{C}}$ は単射、
3. $F_0 = \mathrm{id}_D$.

これについて次のことが成り立つ。(F には 2 変数函数としての連続性などの仮定は一切おかない。なお、実際にはもっと強い主張が成立するが、それについては例えば [2] などを参照のこと。)

定理 1 (λ-lemma [4], [1]). **F は $\overline{E}\times\mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ に連続に拡張できる。各 $\lambda \in \mathbb{D}$ に対して F_λ は $\widehat{\mathbb{C}}$ の $|\lambda|$-擬等角自己同型に拡張できる。**

ここでは同相写像 f が k-擬等角であるとは f が局所 2 乗可積分な (超函数としての) 微分を持ち、Beltrami 係数 $\mu_f = f_{\bar z}/f_z$ が $|\mu_f| \le k$ a.e. を満たすことであると約束する。

これを用いて擬等角拡張に関する結果がどのようにして得られるか具体例で見ていく。まず作用素 $P_f = f'$ を考える。これについては次の結果が知られている。

定理 2 (能代-Warschawski). **D を凸領域として正則写像 $f: D \to \mathbb{C}$ が定数 $\beta \in \mathbb{R}$ に対して $\mathrm{Re}(e^{\beta i}f') > 0$ を満たすならば f は単葉である。**

そこで凸領域 D 上の正則函数 f で点 $a \in D$ 上で $f(a) = 0$ と正規化されたものを考える。ある $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ に対して $\mathrm{Re}(e^{\beta i}f'(z)) > 0$ が成り立つとする。つまり、$f'(D) \subset U_\beta = L_\beta(\mathbb{D})$ とする。ここに $L_\beta(z) = (1+e^{2\beta i}z)/(1-z)$ とする。そこで正則函数の族 $F_\lambda: D \to \mathbb{C}$ を $F_\lambda(a) = 0$ かつ $F_\lambda'(z) = L_\beta(\lambda L_\beta^{-1}(f'(z)))$ を満たすものとして定めるとこれは D の正則運動となる。従って、特に F_k は k-擬等角拡張可能である。このことから次の結果を得る。

定理 3. 凸領域 D 上の正則函数 f で f' が $f'(D) \subset L_\beta(B_k)$ を満たせば f は全平面の k-擬等角写像に拡張できる。

なお、ここで $B_k = \{z \in \mathbb{C}; |z| \le k\}$ であり、

$$L_\beta(B_k) = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| z - \frac{1+e^{2i\beta}k^2}{1-k^2} \right| \le \frac{2k\cos\beta}{1-k^2} \right\}$$

であることに注意する。なお、この結果から直ちに近接凸函数(close-to-convex function)についての結果を得る。

系 4. $\mathbb{D}$ 上の 0 を固定する凸函数 g で k_1-擬等角拡張を持つものに対して $\mathbb{D}$ 上の 0 を固定する正則函数 f が $f'(z)/g'(z) \in L_\beta(B_{k_2})$ $(z \in \mathbb{D})$ を満たせば f は全平面の $(k_1+k_2)/(1+k_1k_2)$-擬等角写像に拡張できる。

また、簡単な計算から $\{z \in \mathbb{C}; |z-1| \leq k\} \subset L_0(B_{k'})$, ここに $k' = k/(2-k)$, であることが分かるので別の系として次の結果を得る。

系 5. $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ は正則函数で $|\omega'(z)| \leq k|z|$ を満たしているとする。このとき正則函数 $f(z) = z + \omega(z)$ は全平面に k'-擬等角拡張できる。

これは [3] Theorem 2' の精密化になっている。

次に作用素 $P_f(z) = zf'(z)/f(z)$ について考える。ただし、ここで f は単位円板上の正則函数で $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ のように正規化されているとする。すると、$P_f(\mathbb{D}) \subset U_\beta$ であるような f は β-spirallike function と呼ばれ、単葉になることが分かっている。従ってこのとき単位円板上の正規化された正則函数 F_λ を $P_{F_\lambda} = L_\beta(\lambda L_\beta^{-1}(P_f))$ によって定めれば容易に分かるように F_λ は $\mathbb{D}$ の正則運動を定める。従って特に λ-lemma から F_k は k-擬等角拡張出来る。F_k を F に読み替えれば次の結果を得る。

定理 6. 単位円板上の正規化された正則函数 f が $\mathbb{D}$ 上で $zf'(z)/f(z) \in L_\beta(B_k)$ を満たせば f は全平面に k-擬等角拡張出来る。

なお、この結果は特に $\beta = 0$ の場合には best possible である。実際、$zf'(z)/f(z) = L_0(kz^2)$ を満たすものは極値的な k-擬等角拡張を持ち、従ってそれ以上擬等角性が良くならないことが分かる。

単位円板上の正規化された正則函数上の作用素 $P_f(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$ についても同様に $P_f(\mathbb{D}) \subset U_0 = \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ ならば f は凸函数となり特に単葉であることが分かる。従って上記と同様の手法により次の結果を得る。

定理 7. 単位円板上の正規化された正則函数 f が $\mathbb{D}$ 上で $1 + zf''(z)/f'(z) \in L_0(B_k)$ を満たせば f は全平面に k-擬等角拡張出来る。従ってこのとき $\|S_f\|_{\mathbb{D}} \leq 2k$ が成り立つ。

ただし、ここに S_f は f の Schwarz 微分であり、$\|S_f\|_{\mathbb{D}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^2|S_f(z)|$ である。

REFERENCES

[1] BERS, L. and ROYDEN, H. L. Holomorphic families of injections, *Acta Math.*, **157** (1986), 259–286.

[2] EARLE, C. J., KRA, I. and KRUSHKAL', S. L. Holomorphic motions and Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **343** (1994), 927–948.

[3] FAIT, M., KRZYŻ, J. G. and ZYGMUNT, J. Explicit quasiconformal extensions for some classes of univalent functions, *Comment. Math. Helv.*, **51** (1976), 279–285.

[4] MAÑÉ, R., SAD, P. and SULLIVAN, D. On dynamics of rational maps, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **16** (1983), 193–217.

24 Unicity theorem for meromorphic functions sharing four small functions

戸田暢茂（名古屋工大）
石崎克也（日本工大）

この講演で登場する函数は複素平面上有理型なものとする。Nevanlinna 理論から“2つの超越的な函数 $f(z)$ と $g(z)$ が異なる5つの値を共有すれば $f(z)$ と $g(z)$ は恒等的に等しい”という定理が導かれる。この定理の5つの“値”を5つの“small 函数”に拡張できないかという問題は未解決だと思われる。ここで、超越的な函数 $f(z)$ に対し $a(z)$ が *small* であるとは、

$$T(r, a) = S(r, f)$$

を満たすことである。ここに言う $S(r, f)$ とは測度有限な除外区間を Eとして

$$S(r, f) = o(T(r, f)), \quad r \to \infty, r \notin E$$

で与えられる量である。また、$S(f)$ を $f(z)$ に関して small な函数 $a(z)$ の集合とする。この集合$S(f)$ は体になる。$a \in S(f) \cup \{\infty\}$ に対して

$$E(f = a) = \{z : f(z) - a(z) = 0\},$$

と置き $f(z)$ の $a(z)$ 点の集合と言うことにする。ここで、$f(z) - \infty$ は $1/f(z)$ を意味するとしておく。$f(z)$ と $g(z)$ が

$$E(f = a) = E(g = a)$$

を満たすときに“$f(z)$ と $g(z)$ は $a(z)$ を共有する”と言うことにする。ここで、単に共有という表現を用いたときは重複度は考慮しないものとしておく。

冒頭に述べた Nevanlinna の unicity 定理は第2主要定理から導き出される。もし、samll な函数に対して第2主要定理がそのまま拡張されれば、ここで問題意識としている問題は解決される。Toda [3] は第2主要定理を応用することで、$f(z)$ と $g(z)$ が異なる7つの small 函数を共有するときに $f(z) \equiv g(z)$ を示した。Zhang [4] は次の補題を示すことで6つの small 函数を共有する場合を解決した。

Lemma. $f(z)$ を超越函数、$a_1, \ldots, a_5 \in \boldsymbol{S}(f)$, $a_i(z) \neq a_j(z)$, $(i \neq j)$ とする。このとき

$$2T(r,f) \leq \sum_{k=1}^{5} \overline{N}(r, 1/f - a_k) + S(r,f).$$

$f(z)$ と $g(z)$ が整函数ならば4つの値を共有すれば $f(z)$ と $g(z)$ は恒等的に等しいということになる。この主張を small 函数に拡張を試みる考察は Li [1] の中にある。ここでは、この視点から若干の進展を見たので報告する [2]。

Theorem. 2つの超越函数 $f(z)$ と $g(z)$ がある定数 $(u,v) \in [0,1/19) \times [0,1/19)$ に対し

$$\overline{N}(r,f) \leq uT(r,f) + S(r,f) \quad \textit{and} \quad \overline{N}(r,g) \leq vT(r,g) + S(r,g)$$

を満たすとする。 4つの異なる *small* 函数 a_1, a_2, a_3, $a_4 \in \boldsymbol{S}(f) \cap \boldsymbol{S}(g)$ を $f(z)$ と $g(z)$ が共有するならば $f(z) \equiv g(z)$.

証明のアイデアは Zhang の Lemma に加え、新しい不等式を準備することと、複素微分方程式の議論も用いることなどである。

References

1. Bao Qin Li: Uniqueness of entire functions sharing four small functions. Amer. J. Math., 119(1997), 841-858.
2. K. Ishizaki and N. Toda: Unicity theorems for meromorphic functions sharing four small functions. Preprint
3. N. Toda: Some generalizations of the unicity theorem of Nevanlinna. Proc. Japan Acad., 69, Ser. A (1993), 61-65.
4. Zhang Qing De: A uniqueness theorem for meromorphic functions with respect to slowly growing functions(Chinese). Acta Math. Sinica 36(1993), 826-833.

25 Fermat 曲線上の Weierstrass 点の weight について

菊地 悟　　山口大理工
加藤崇雄　　山口大理

本講演では，Fermat 曲線 $F_n : \zeta_0^n + \zeta_1^n + \zeta_2^n = 0$ 上の Weierstrass 点の weight に関する，昨秋の学会で発表された渡邉氏の結果が改良できたことを報告する．

Hasse, Towse, Watanabe 等によって次のことが示されている．

定理 1. F_n 上の $3n^2$ 個の点 $(1, \alpha\sqrt[n]{2}\beta), (1, \sqrt[n]{2}\beta, \alpha), (1, \beta/\sqrt[n]{2}, \alpha\beta/\sqrt[n]{2})$,（但し，$\alpha$ は 1 の n 乗根, β は -1 の n 乗根）は Weierstrass 点である．

定理 2. R を compact Riemann 面，σ を r 個の不動点をもつ R の involution とする．このとき，$p \in R$ が σ の不動点ならば weight $w(p)$ は $w(p) \geq (r-2)(r-4)/8$ をみたす．特に，$p \in F_n$ を定理 1 で述べた Weierstrass 点とすれば，n が奇数の場合は $w(p) \geq (n-1)(n-3)/8$, n が偶数の場合は $w(p) \geq (n-2)(n-4)/8$ をみたす．

Towse 等によって，定理 2 で $n \leq 8$ ならば等号が成り立つことが示されている．

$n \geq 9$ の場合を調べるにあたって，計算を容易にするため，F_n を affine 座標を用いて $x^n + y^n = 2$ と書き直す．このとき，正則微分の基

底を適当にとることにより，$(xy)^k(x+y)^\ell(x-y)$, $(xy)^k(x+y)^\ell$ 等の（１次結合の）$(x,y)=(1,1)$ における零点の位数を調べればよいことがわかる．ここで $(x,y)=(1,1)$ における局所座標を $x=(1+t)f(t)$, $y=(1-t)f(t)$ （但し, $f(t)=\left(\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}t^{2k}\right)^{-1/n}$ ）ととることによって $n\leq 13$ の範囲で定理 2 の等号成立が示せることを報告する.

例えば, $n=13$ のとき空隙列は $\{1,2,\ldots,60,61,63,65,67,69,71\}$ となり，weight は 15 になる.

26

微分作用素を用いた留数計算 VI

中村 弥生 (お茶の水女子大学大学院)
田島 慎一 (新潟大学工学部)

1 記号と復習

複素平面 $X = \mathbf{C}$ 上の正則関数の層を $\mathcal{O}_X$ とおき, 正則関数を係数に持つ線型微分作用素全体のなす環の層を $\mathcal{D}_X$ とおく. 平面 X内の有限個の点 $z = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ からなる集合を A とおく. この時, A に台を持つ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は左 $\mathcal{D}_X$-加群の構造を持ち, 佐藤-河合-柏原の意味で極大過剰決定系となる. いま, $A_j = \{\alpha_j\}$ とおくと, $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は次のように直和分解される.

$$\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{H}^1_{[A_1]}(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{H}^1_{[A_2]}(\mathcal{O}_X) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^1_{[A_n]}(\mathcal{O}_X).$$

各点 A_j における代数的局所コホモロジー群から, 任意の元 $m_j = (\sum_{\ell=1}^{r_j} \frac{c_{j,\ell}}{(z-\alpha_j)^\ell} \bmod \mathcal{O}_X) \in \mathcal{H}^1_{[A_j]}(\mathcal{O}_X)$ をとる. このとき, イデアル $\mathcal{J}$ を次で定める.

$$\mathcal{J} = \{R \in \mathcal{D}_X \mid Rm_j = 0, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

定理 1 *(i)* イデアル $\mathcal{J}$ に属し, 大域的に定義される一階の微分作用素 P で次のような形のものが存在する. ただし $h(z)$ は次数が $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ 未満の多項式である.

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)\frac{d}{dz} + h(z)$$

(ii) P, Q はイデアル $\mathcal{J}$ を生成する. 但し,$Q = (z-\alpha_1)^{r_1}\cdots(z-\alpha_n)^{r_n}$ である.

(iii) イデアルとして $\langle P, Q_j \rangle = \langle P_j, Q_j \rangle$ が成り立つ. 但し, P_j, Q_j は m_j の *annihilator ideal* の生成元で, 次の形で表される. : $P_j = (z-\alpha_j)\frac{d}{dz} + r_j$, $Q_j = (z-\alpha_j)^{r_j}$.

2 補間公式

$F_1 = \prod_j (z-\alpha_j)^{\gamma_j}$, $F_2 = \prod_j (z-\beta_j)^{\sigma_j}$ とおき, F_1 と F_2 は互いに素であるとする.
一階の微分作用素

$$P_1 = \prod(z-\alpha_j)\frac{d}{dz} + \sum \gamma_j \prod_{\ell \neq j}(z-\alpha_\ell),\ P_2 = \prod(z-\beta_j)\frac{d}{dz} + \sum \sigma_j \prod_{\ell \neq j}(z-\beta_\ell)$$

はそれぞれ$\frac{1}{F_1} \bmod \mathcal{O}_X$, $\frac{1}{F_2} \bmod \mathcal{O}_X$ の annihilator である. これに対し, 次が成り立つ.

定理 2 作用素 P_F, P_G の補間は次で与えられる．

$$P=\prod(z-\alpha_j)\prod(z-\beta_k)\frac{d}{dz}+a_1\prod(z-\alpha_j)^{\gamma_j}+\prod(z-\beta_j)(\sum\gamma_j\prod_{\ell\neq j}(z-\alpha_\ell))$$

ここで, a_1は, $a_1=\sum_{i=0}^{\sigma-1}a_{1i}z^i$, $a_2=\sum_{i=0}^{\alpha-1}a_{2i}z^i$ として,
$(\sum_{i=0}^{\sigma-1}a_{1i}z^i)\prod(z-\alpha_j)^{\gamma_j}-(\sum_{i=0}^{\alpha-1}a_{2i}z^i)\prod(z-\beta)^{\sigma_j}+\prod(z-\beta_j)(\sum\gamma_j\prod_{\ell\neq j}(z-\alpha_\ell))-\prod(z-\alpha_j)(\sum\sigma_j\prod_{\ell\neq j}(z-\beta_\ell))=0$
で決まるものである．

3 留数計算への応用

有理関数 $\frac{1}{z^2}$ と $\frac{1}{(z-1)^3}$ を考える．ここで,次の 0 階と 1 階の作用素を与える．$P_1=z\frac{d}{dz}+2$, $Q_1=z^2$, $P_2=(z-1)\frac{d}{dz}+3$, $Q_2=(z-1)^3$ ．

今, P_1, P_2 の随伴作用素をそれぞれ 1, z と 1, z, z^2 に施したものは, それぞれ $\frac{1}{z^2}$ と $\frac{1}{(z-1)^3}$ との residue pairing が 0 となることがわかっている．

微分作用素 P_1,P_2 を補間すると $P=z(z-1)\frac{d}{dz}+(-2+2z+15z^2-19z^3+7z^4)$ を得る．このとき,

$$\langle P,Q\rangle=\langle P_1,Q_1\rangle\cap\langle P_2,Q_2\rangle,\quad\langle D,Q_1\rangle=\langle P_1,Q_1\rangle,\quad\langle D,Q_2\rangle=\langle P_2,Q_2\rangle$$

が成り立つ．

Pの随伴作用素は $P^*=-z(z-1)\frac{d}{dz}+(-1+15z^2-19z^3+7z^4)$ で与えられるが, これを 1, z, z^2, z^3, z^4 に施したものは, $\frac{1}{z^2}$ と $\frac{1}{(z-1)^3}$ との residue pairing が同時に 0 となることが分かる．実際, それらは, 次のように, $Q_1 1$, $Q_2 1$, $P_1^* 1$, $P_1^* z$, $P_2^* 1$, $P_2^* z$, $P_2^* z^2$ の結合で表される．

$$\begin{aligned}
P^*1 &= 7z^4-19z^3+15z^2-1 &&= (7z^2-19z+15)Q_1-P_1^*1\\
&&&= (7z+2)Q_2+P_2^*z\\
P^*z &= 7z^5-19z^4+15z^3-z^2 &&= (7z^3-19z^2+15z-1)Q_1\\
&&&= (7z^2+2z)Q_2+P_2^*z^2\\
P^*z^2 &= 7z^6-19z^5+15z^4-2z^3+z^2 &&= (7z^4-19z^3+15z^2-2z+1)Q_1\\
&&&= (7z^3+2z^2-1)Q_2+P_2^*(z^2+z-1)\\
P^*z^3 &= 7z^7-19z^6+15z^5-3z^4+2z^3 &&= (7z^5-19z^4+15z^3-3z^2+2)Q_1\\
&&&= (7z^4+2z^3-2z-2)Q_2+P_2^*(2z^2-1)\\
P^*z^4 &= 7z^8-19z^7+15z^6-4z^5+3z^4 &&= (7z^6-19z^5+15z^4-4z^3+3z^2)Q_1\\
&&&= (7z^5+2z^4-3z^2-4z-3)Q_2+P_2^*(2z^2+z-2)
\end{aligned}$$

27

微分作用素を用いた留数計算 VII

中村 弥生 (お茶の水女子大学大学院)
田島 慎一 (新潟大学工学部)

1 微分作用素に対するミッタクレフラーの定理

$A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n,\ldots\}$ を複素平面 $X=\mathbf{C}$ の相異なる点の集合で, X 内に集積点を持たないものとする. また, $A_j=\{z\in\mathbf{C}|z=\alpha_j\}, j=1,2,\ldots$ とおく.

A に台を持つ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ を考える. これは, coherent $\mathcal{D}_X$-加群の構造をもつ.

$m\in\Gamma(X,\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X))$ をとる. このとき, $m_j\in\Gamma(X,\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X))$ $(j=1,2,\ldots)$ を用いて, $m=\sum m_j$ と部分分数分解することができる. ここで, $\mathcal{J}=\{R\in\mathcal{D}_X|Rm=0\}$ を m の annihilator のなすイデアルの層とする.

定理 1 *global section* $\Gamma(X,\mathcal{J})$ は高々 2 つの元により生成される. 各極 α_j の位数をそれぞれ r_j とおき, 0 を極に持つ場合, その位数を r_0とすると, これらの生成元は無限積表示を用いて, 次で表される.

$$P=G(z)\frac{d}{dz}+H(z)$$
$$Q=z^{r_0}\prod(1-\frac{z}{\alpha_j})^{r_j}e^{r_j(\frac{z}{\alpha_j}+\cdots+\frac{1}{k_j}(\frac{z}{\alpha_j})^{k_j})}$$

ただし, $G(z)=z^{\sigma}\prod(1-\frac{z}{\alpha_j})e^{\frac{z}{\alpha_j}+\cdots+\frac{1}{k_j}(\frac{z}{\alpha_j})^{k_j}}$, ここで, $r_0=0$ のとき, $\sigma=0$, $r_0\neq 0$ のとき $\sigma=1$ とする. また,

$$H(z)=-\frac{z^{\sigma}\prod(1-\frac{z}{\alpha_j})e^{\frac{z}{\alpha_j}+\cdots+\frac{1}{k_j}(\frac{z}{\alpha_j})^{k_j}}\frac{d}{dz}(z^{r_0}\prod(1-\frac{z}{\alpha_j})^{r_j}e^{r_j(\frac{z}{\alpha_j}+\cdots+\frac{1}{k_j}(\frac{z}{\alpha_j})^{k_j})})}{z^{r_0}\prod(1-\frac{z}{\alpha_j})^{r_j}e^{r_j(\frac{z}{\alpha_j}+\cdots+\frac{1}{k_j}(\frac{z}{\alpha_j})^{k_j})}}$$

$H(z)$ は Xで正則である.

また, m_j を annihilate する イデアルは次の P_j,Q_j で生成される.

$$P_j(z)=(z-\alpha_j)\frac{d}{dz_j}+\phi_j(z),\ Q_j(z)=(z-\alpha_j)^{n_j},$$

ここで, ϕ_j は高々 n_j-1 次の多項式である.

このとき, P,Q は次の性質を持つ.

定理 2

$$\langle P, Q_j \rangle = \langle P_j, Q_j \rangle, j = 1, 2, \ldots.$$

2 有理型微分形式の留数計算への応用

高々 A に台を持つような有理型関数 $u(z) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(*A))$ に対し, $m = (u(z) \bmod \mathcal{O}_X) \in \mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ とおく.

$$K = \{\phi(z)dz \in \Gamma(X, \Omega_X) | Res_{A_j}(\phi(z)u(z)dz) = 0, j = 1, 2, \ldots\}$$

とする.

定理 3

$$K = \{(R^* g(z))dz | g(z) \in \Gamma(X, \Omega_X), R \in \Gamma(X, \mathcal{J})\}$$

3 例

$u(z) = \dfrac{1}{\sin^3 z}$ とする. $m = u(z) \bmod \mathcal{O}_x$ の annihilator は次で与えられる.

$$P = \sin z \frac{d}{dz} + 3\cos z, \quad Q \sin^3 z.$$

さて, 一階の作用素 P の随伴作用素は次で与えられる.

$$P^* = -\sin z \frac{d}{dz} + 2\cos z.$$

1, z, $\sin z$, $\cos z$ にこの随伴作用素を施すと, 次が得られる. $P^* 1 = 2\cos z$, $P^* z = -\sin z + 2z\cos z$, $P^* \sin z = -\sin z \cos z + 2\sin z \cos z = \sin z \cos z$, $P^*(\cos z) = \sin^2 z + 2\cos^2 z = 1 + \cos^2 z$. これらの結果と, $u(z)$ との積の $z = \pi$ における留数は, 0 となることが分かる. 例えば, $z = \pi$ における $\dfrac{-\sin z + 2z\cos z}{\sin^3 z}$ の主要部は, 次で与えられる.

$$\frac{-\sin z + 2z\cos z}{\sin^3 z} \quad : \quad \frac{2\pi}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{z-\pi}$$

28 多変数留数計算とホロノミックなD-加群 II
—アルゴリズムの構成—

田島　慎一　　新潟大学工学部

Grothendieck residue に対しホロノミック D-加群に対する柏原の双対定理を応用すると、留数の値が零となるような有理形微分形式を特徴付けることが出来る。この結果を元にして、Grothendieck residue の値を計算するアルゴリズムを構成した。

1 準備

$X = C^n$ 上の多項式 $f_1, f_2, ..., f_n \in Q[z_1, z_2, .., z_n]$ で regular sequence となるものが与えられたとする。イデアル $I =< f_1, f_2, ..., f_n >$ の radical $\sqrt{I}$ の準素因数分解を $\sqrt{I} = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_s$ とする。対応する零点の分解を $V(\sqrt{I}) = V(I_1) \cap V(I_2) \cap \cdots \cap V(I_s)$ とする。

$$E_I = Q[z_1, z_2, ..., z_n]/I, \quad E_{\sqrt{I}} = Q[z_1, z_2, ..., z_n]/\sqrt{I}$$

$$K = \{g(z)dz \mid Res_\alpha(\frac{g(z)dz}{f_1 f_2 \cdots f_n}) = 0, \forall \alpha \in V\}$$

とおく。大阿久氏（横浜市大）による理論を、あるホロノミックな D-加群に適用する事により、ベクトル空間 $K \cap E_I$ の基底を構成出来る。この部分の計算には高山氏（神戸大）の開発した数式処理システム Kan を使う。

2 アルゴリズム

多項式 $\varphi(z) \in Q[z_1, z_2, ..., z_n]$ を分子とする有理型微分形式

$$\frac{\varphi(z)dz}{f_1 f_2 \cdots f_n}$$

の $\alpha \in V(I)$ における Grothendieck residue は以下の手順で計算できる。

Step1. イデアル I 及び $\sqrt{I}$ のグレブナ基底を求め、剰余 $E_I, E_{\sqrt{I}}$ を構成する。

Step2. イデアル I の準素因数分解を行う。各イデアル $I_j (j = 1, 2, ..., s)$ のグレブナ基底を $b_{j,1}, b_{j,2}, ..., b_{j,n}$ とおく。

Step3. ベクトル空間 $K \cap E_I$ の基底を求める。

Step4. 与えられた分子 $\varphi(z)$ を留数が零となる項と、対数微分の項との一次結合の形に分解する。すなわち

$$J(z) = \frac{\partial(f_1, f_2, ... f_n)}{\partial(z_1, z_2, ... z_n)}$$

とおき

$$\varphi(z) = g(z) + (J(z)h(z)\ mod\ I)$$

と分解する。ただし、$g \in K \cap E_I, h(z) \in E_{\sqrt{I}}$. である。

step5. $h_j(z) = h(z)\ mod\ I_j$ を計算する。

Step6. $Q[z_1, z_2, ...z_n, \lambda]$ でイデアル $< b_{j,1}, b_{j,2}, ..., b_{j,n}, \lambda - h_j(z) >$ のグレブナ基底を計算し、変数 λ のみを含む多項式 $r_j(\lambda)$ を求める。

この時、$\alpha \in V(I_j)$ における Grothendieck residue の値

$$Rez_\alpha(\frac{\varphi(z)dz}{f_1 f_2 \cdots f_n})$$

は $mult(\alpha)h_j(\alpha)$ であり、またこれらの値は、方程式 $r_j(\lambda) = 0$ により特徴付けられる。(重複度倍すれば留数の値と一致する)

3 まとめ

超曲面 $f_1 = 0, f_2 = 0, ..., f_n = 0$ たちが横断的に交わらないような点 P では、代数的局所コホモロジー群

$$[\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}] \in \mathcal{H}^n_P(\mathcal{O}_X)$$

が Delta 関数の偏微分の一次結合となるため、Grothendieck residue の値を求めることは困難であった。しかし、偏微分作用素環でのグレブナ基底を用いると留数の値を零とするような空間 K を決定出来るので、ここに述べたアルゴリズムにより留数計算を行うことが可能となった。

29 On value distribution of entire maps of $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2$

足立幸信

定義1． $\mathbb{C}^2$ の一般に transendental な curve C が、その normalization が compact Riemann surface から有限個の点を除いたものに holomorphically に iso. であるとき、C を代数型の curve と呼ぶ。

定義2． $f(x,y)$ を entire function としたとき、任意の level curve の既約成分がすべて代数型の curve のとき、f を代数型の entire function と呼ぶ。

Nishino によると、代数型の entire function f はある polynome $P(x,y)$ に帰着される。すなわち、ある $T \in Aut(\mathbb{C}^2)$ と、一変数の entire function $\varphi(z)$ があって、$f = \varphi \circ P \circ T$ とかける。今この定理の写像版を考える。

定義3． $F = (f(x,y), g(x,y)), f, g$: entire function が $\mathbb{C}^2$ の任意の algebraic curve A に対し、$F^{-1}(A) \neq \emptyset$ で、$F^{-1}(A)$ のすべての既約成分が代数型の curve よりなるとき、F を代数型の entire map, $F^{-1}(A) \neq \emptyset$ で $F^{-1}(A)$ のすべての既約成分が algebraic curve よりなるとき、F を特殊代数型の entire map と呼ぶ。

定理. Fを代数型の entire map としたとき、$F = \Phi \circ F_0 \circ T$ とかける。ここに、Φ は $(\varphi(x), \psi(y))$ という一変数の entire function の組でかける特殊代数型の entire map, F_0 は polynomial map, $T \in Aut(\mathbb{C}^2)$.

注。$F = (f(x,y), g(x,y))$ としたとき、F が代数型の entire map ならば明らかに、f も g も代数型の entire function であるから、Nishino の定理より、$f = \varphi \circ P \circ T, g = \psi \circ Q \circ S$ とかける。$(T, S \in Aut(\mathbb{C}^2)$,P, Q :$polynome, \varphi, \psi$: 一変数の entire function) T と S を共通の auto. にとれるか、というのが問題で hyperbolic geometry の知識と Kashiwara(née Saitô) の (0,2) type polynome に関する結果を使って解く。

References

T.Nishino, J. Math. Kyoto Univ., 15(1975), 527-553.

H.Saitô, Osaka J. Math., 9(1972), 293-332.

30

The Uniqueness Problem of Meromorphic Mappings with Deficient Divisors

YOSHIHIRO AIHARA
Numazu College of Technology
3600 Ooka, Numazu, Shizuoka 410, Japan
e-mail: aihara@la.numazu-ct.ac.jp

Let M be a projective algebraic manifold and K_M the canonical bundle of M. We denote by $\mathrm{Pic}(M)$ the Picard group over M. Let $F \in \mathrm{Pic}(M) \otimes \mathbf{Q}$ and $\gamma \in \mathbf{Q}$. We simply write γF for $F^{\otimes\gamma}$. Then $F \in \mathrm{Pic}(M) \otimes \mathbf{Q}$ is said to be *big* if a line bundle $\nu F \in \mathrm{Pic}(M)$ is big for some positive integer ν. Let $L \to M$ be a fixed big line bundle over M. Define

$$\left[\frac{F}{L}\right] = \inf\left\{\gamma \in \mathbf{Q};\ \gamma L \otimes F^{-1} \text{ is big}\right\}.$$

Let E be an effective divisor on $\mathbf{C}^m$ and let k be a positive integer. If $E = \sum_j \nu_j E_j$ for distinct irreducible hypersurfaces E_j in $\mathbf{C}^m$ and for nonnegative integers ν_j, then we define $\mathrm{Supp}_k E$ by

$$\mathrm{Supp}_k E = \bigcup_{0<\nu_j\le k} E_j.$$

Definition. A meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to M$ is said to be *dominant* if $\mathrm{rank} f = \dim M$.

Assume that there exists at least one dominant meromorphic mapping $f_0 : \mathbf{C}^m \to M$. Let $D_1, \cdots, D_q$ be divisors in $|L|$ such that $D_1 + \cdots + D_q$ has only simple normal crossings. Let $E_1, \cdots, E_q$ be hypersurfaces in $\mathbf{C}^m$ with $\dim E_i \cap E_j \le m-2$ $(i \ne j)$. Assume that there exist positive integers k_j such that $\mathrm{Supp}_{k_j} f_0^* D_j = E_j$ for all $1 \le j \le q$. Let

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}(f_0; \{k_j\}; (\mathbf{C}^m, \{E_j\}), (M, \{D_j\}))$$

be the set of all *dominant* meromorphic mappings $f : \mathbf{C}^m \to M$ that satisfy the following two conditions:

$$\mathrm{Supp}_{k_j} f^* D_j = E_j \qquad \text{and} \qquad f = f_0 \ \text{ on } \ E_j$$

for all $1 \le j \le q$. We also define the subfamily $\mathcal{F}_0$ of $\mathcal{F}$ by

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F};\ \delta_{f_0}(D_j) \le \delta_f(D_j) \ \text{ for all } \ 1 \le j \le q\}.$$

Let $\Phi : M \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ be a nonconstant holomorphic mapping with $\mathrm{rank}\,\Phi = \dim M$. We denote by e_0 the mapping degree of Φ, that is, $e_0 = \sharp\,\Phi^{-1}(\Phi(w))$ for generic $w \in M$.

We denote by H the hyperplane bundle over $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. We define $F_0 \in \mathrm{Pic}(M) \otimes \mathbf{Q}$ by

$$F_0 = \frac{qk_0}{k_0+1} L \otimes \left(-\frac{2k_0}{k_0+1} \right) \Phi^* H,$$

where $k_0 = \max_{1 \leq j \leq q} k_j$. If F_0 is sufficiently big, If F_0 is sufficiently big, we can conclude the finiteness of $\mathcal{F}$ as follows:

Theorem 1. *If $F_0 \otimes K_M$ is big, then the number of mappings in the family $\mathcal{F}$ is bounded by e_0.*

In the definition of the family $\mathcal{F}$ we impose the strong condition on the meromorphic mappings contained in $\mathcal{F}$, that is, every mapping in $\mathcal{F}$ must be equal to f_0 on all E_j. We note that this condition can not be simply dropped. In the case where $F_0 \otimes K_M$ is not big, we can not prove $\sharp \mathcal{F} \leq e_0$ in general. However we can show the finiteness theorem for $\mathcal{F}$ under an additional condition on the existence of Nevanlinna's deficient divisors. Namely we have the following finiteness theorem, which is our main result:

Theorem 2. *Suppose that*

$$\left[\frac{F_0^{-1} \otimes K_M^{-1}}{L} \right] = 0.$$

If $\delta_{f_0}(D_j) > 0$ for at least one $1 \leq j \leq q$, then the number of mappings in the family $\mathcal{F}$ is bounded by e_0.

We notice the following: In the case where $[F_1^{-1} \otimes K_M^{-1}/L]$ is positive, we can not conclude $\sharp \mathcal{F} \leq e_0$ under the condition on the existence of deficient divisors in the sense of Nevanlinna. For the family $\mathcal{F}_0$, we have the following:

Theorem 3. *Suppose that*

$$\left[\frac{F_0^{-1} \otimes K_M^{-1}}{L} \right] < \frac{1}{k_0+1} \sum_{j=1}^{q} \delta_{f_0}(D_j).$$

Then the number of mappings in the family $\mathcal{F}_0$ is bounded by e_0.

Remark. In the case where

$$f_0(\mathbf{C}^m - I(f_0)) \cap \mathrm{Supp}\, D_j \not\subseteq \{ w \in M;\ \mathrm{rank}\, d\Phi(w) < \dim M \}$$

for some $1 \leq j \leq q$, we can conclude $\mathcal{F} = \{f_0\}$ in the above theorems.

31 球面上の連続函数のグラフの多項式凸包について

神 保 敏 弥　　奈良教育大学

阪 井 章

C^n の超球を B とし, $S = \partial B$ とする.　S から C^m への連続写像を f とし, C^{n+m} 内の f のグラフを Σ とする. Σ の多項式凸包 $h(\Sigma)$ については多くのことが知られている. たとえば

(a) $n = m = 1$ のときは $h(\Sigma)$ が多項式凸 $(h(\Sigma) = \Sigma)$ であるか, または $h(\Sigma)$ が $A(B)$ の関数のグラフに一致するかのいずれかである. (Wermer ('53))

(b) $n > 1, m = 1$ のときは $\boldsymbol{C}^{n+m}$ から $\boldsymbol{C}^n$ への射影を π とするとき, $\pi(h(\Sigma)) = \bar{B}$ が成り立つ.

(c) $n > 1, m = 1$ で, $F \in C(\bar{B})$, $F|_S = f$ とする. 次のいずれかの場合は $h(\Sigma)$ は F の $\bar{B}$ 上のグラフに一致する.

(i) F が B で多重調和 ; (ii) $F = |g|$, $g \in A(B)$, $0 \notin g(\bar{B})$

(a) は J.Wermer (1953), (b) (c) は H.Alexander (1991) による.

$n = m > 1$ の場合には, 上のことが成り立たないようないろいろな例がある.　これらの例と関連した事柄を報告する.

32 ON THE $\partial\bar{\partial}$-EQUATION OVER PSEUDOCONVEX KÄHLER MANIFOLDS

風間英明　　九州大学数理学研究科
高山茂晴　　大阪大学　理学研究科

Compact Kähler 多様体上の, 次の小平による補題は"$\partial\bar{\partial}$-Lemma" と呼ばれこの方面の重要な結果の一つである (例えば [9] 参照).

$\partial\bar{\partial}$-Lemma. *Let X be a compact Kähler manifold and φ a d-exact C^∞ $(1,1)$-form on X. Then there exists a C^∞-function Ψ on X such that $\varphi = \partial\,\bar{\partial}\,\Psi$ on X.*

Nakano[10], 及び日本数学会編雑誌「数学」の問題特集 ([11], 32 巻, 1980, 161-187) において, 中野茂男氏は $\partial\bar{\partial}$-Lemma に関して次のような問題を提出している.

問題. *Can one show $\partial\bar{\partial}$-Lemma on weakly 1-complete Kähler manifolds?*

1997 年度年会において, この問題についてトロイダル群 ($\mathbb{C}^n$ のある種の離散部分群 Λ による商複素リー群 $\mathbb{C}^n/\Lambda$) 上の$\bar{\partial}$-cohomology に関する [4] の方法を用いて反例を与えた ([6]). 一方本報告においては, 唯一の正次元極大コンパクト部分複素多様体を含むような weakly 1-complete Kähler 多様体と, その部分多様体の近傍の様子に注意しながら上記問題を考察する. 一種類目の例は複素トーラス $\mathbb{T}^n$ 上の位相的に自明な正則直線束の全空間である. $\mathbb{T}^n$ を底とする位相的自明な正則直線束全体のなす群 $Pic^0(\mathbb{T}^n)$ は Picard 群と呼ばれ, 共役なトーラスに同型である. $\mathbb{T}^n$ を底とする位相的自明な正則直線束は weakly 1-complete Kähler 多様体だから ([3]), $Pic^0(\mathbb{T}^n)$ は weakly 1-complete Kähler 多様体の族と考えられる. $Aut(\ Pic^0(\mathbb{T}^n)\ )$ を $Pic^0(\mathbb{T}^n)$ の双正則自己写像の作る自己同型群とする. $z \in Pic^0(\mathbb{T}^n)$ に対して平行移動 $\ell_z : Pic^0(\mathbb{T}^n) \ni w \longmapsto z + w \in Pic^0(\mathbb{T}^n)$ を考える。その時準同型写像$\chi : Pic^0(\mathbb{T}^n) \ni z \longmapsto \ell_z \in Aut(\ Pic^0(\mathbb{T}^n)\ )$ は、力学系を定義する。この力学系の Orbit を用いて、weakly 1-complete Kähler 多様体の族 $Pic^0(\mathbb{T}^n)$　の点について, $\partial\bar{\partial}$-Lemma が成立するものと成立しないものの分類を試みる. $\bar{\partial}$-cohomology に関する [5] の方法を用いる.

二種類目は本質的に Colţoiu [2] による例である．複素多様体 X にたいして, C^∞ exhaustion 関数 $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{R}$ で, X のあるコンパクト集合 K を除いた集合 $X \setminus K$で強多重劣調和であるものが存在する時, X を *1-convex* という．1-convex 多様体は, Kohn ([7],[8]) 等の研究で, compact 多様体の調和積分論の一般化が得られたり,Andreotti-Grauert [1] の研究よりコホモロジー有限性定理が成り立つなど compact 多様体 に近い性質を持つ．１９９５年１０月の問題特集 [11] を振り返る研究集会において, 大沢健夫氏により, $\partial\bar{\partial}$-Lemma が成り立たない, 1-convex Kähler 多様体が存在するのではないかとの疑問が提出されていた（[12]）．次の結果はこの疑問に対する解答となる．

Theorem. *C を任意の楕円曲線とするとき, C を exceptional set とする 1-convex, complete Kähler 多様体で その上で$\partial\bar{\partial}$-Lemma が成立しないものが存在する．*

References

1. A. Andreotti and H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France **99** (1962), 193–259.
2. M. Colţoiu, *On the Oka-Grauert principle for 1-convex manifolds*, Math. Ann. **310** (1998), 561–569.
3. H. Grauert, *Bemerkenswerte psudoconvexe Mannigfaltigkeiten*, Math.Z. **81** (1963), 377–391.
4. H. Kazama, *$\bar{\partial}$-Cohomology of (H, C)-Groups*, Publ. RIMS. **20** (1984), 297–317.
5. H. Kazama and K. H. Shon, *Characterizations of the $\bar{\partial}$-cohomology groups for a family of weakly pseudoconvex manifolds*, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), 685–700.
6. H. Kazama and S. Takayama, *$\partial\bar{\partial}$-Problem on weakly 1-complete Kähler manifolds (preprint)* (1997).
7. J. J. Kohn, *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds I*, Ann. Math. **78** (1962), 112–148.
8. J. J. Kohn, *Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds II*, Ann. Math. **79** (1964), 450–472.
9. J. Morrow and K. Kodaira, *Complex manifolds*, Holt, Rinehart and Winston Inc. (1971).
10. S. Nakano, *Some aspects of pseudoconvexity theory in several variables*, Several Complex Variables, Proc. 1981 Hangzhou Conference ed. by Kohn, Lu, Remmert and Siu, Birkhäuser Boston, Inc. (1984), 229–235.
11. 若林 功 (編), 問題特集 -多変数関数を中心として-, 数学 (岩波書店, 日本数学会編集) **32** (1980), 161–187.
12. 多変数関数論の総合的研究－問題特集について 報告集, 1995 年 10 月, 名古屋大学.

33　Normal 強擬凸 CR 構造の変形における Bogomolov smoothness について

赤堀隆夫　　姫路工業大・理

宮嶋公夫　　鹿児島大・理

コンパクトケーラー多様体上の Hodge 構造は複素構造と密接な関係を持っているが、（その１つの現われとして）「$K_X = 1_X$ ならば複素構造の変形の完備族のパラメータ空間は非特異になる」という Bogomolov smoothness theorem がある。これと比較して、CR 多様体上の Hodge 構造は複雑で上記の Bogomolov smoothness theorem は期待できないが、[A-M1] では、（実７次元以上の）normal 強擬凸 CR 多様体上の CR 構造の倉西変形理論での Bogomolov smoothness に対する obstruction が解析されている。ここで、CR 構造の倉西変形理論とは、CR 構造そのものの変形理論ではなく、正規孤立特異点の変形を CR 構造の変形を通じて扱うために倉西正武氏によって導入された up to（実超曲面としての）wiggle での CR構造の変形理論のことを指す。

本講演では、[A-M1] で得られた obstruction space に normal 強擬凸 CR 多様体の無限小解析変換から生じる作用によって grading を導入し、非正部分には obstruction が生じないことを示す。M が代数多様体上の S^1-束である場合は、この結果によって得られる

Bogomolov type の smoothness は（強擬凸有界領域上の Hodge 構造を利用した）[M] の結果を改良している。

以下、$CTM = {}^{\circ}T' + {}^{\circ}T'' + F$, $T' := F + {}^{\circ}T'$ を実 $2n-1(\geq 5)$ 次元多様体 M 上の CR 構造に付随した分解とし、ξ を無限小解析変換を表す実ベクトル場とする。 L_{ξ} で ξ から引き起こされるリー微分作用素をあらわす。

主定理. ([A-M2]) M の標準束 $K_M := \wedge^n (T')^*$ の正則切断 ω $(\bar{\partial}_b \omega = 0)$ で $iL_{\xi}\omega = -\lambda\omega$ を満たすものが存在するとする。 このとき、CR 構造の倉西変形理論の完備族のパラメータ空間は、次の方向に非特異部分多様体を含む。

(1) $\lambda \geq 0$ の場合：$\oplus_{\nu \leq 0} H^1_{(\nu)}(T') \subset H^1(T')$,

(2) $\lambda < 0$ の場合：$\oplus_{\nu < \frac{\lambda}{2}} H^1_{(\nu)}(T') \subset H^1(T')$

ここで、$H^1_{(\nu)}(T')$ は $H^1(T')$ に対する iL_{ξ} の作用の固有空間を表す。

References

[A-M1] Akahori, T. and Miyajima, K., *An analogy of Tian-Todorov theorem on deformations of CR-structures*, Compositio Math. **85** (1993), 57--85.

[A-M2] -----------, *A smoothness of deformations of normal strongly pseudo-convex CR-structures*, to appear in Kyushu Journal of Mathematics.

[M] Miyajima, K., *A Bogomolov-type smoothness on deformations of quasi-Gorenstein cone singularities of* dim ≥ 4, in "Geometric Complex Analysis", ed. J. Noguchi et al., World Scientific, 461--465, 1996.

34 CR 構造の変形による正規孤立特異点の変形族の構成

宮嶋公夫　　鹿児島大・理

$(V,o) \subset (C^N,0)$ を o のみに特異性を持つ正規複素解析空間とする。S^{2N-1} を原点 0 を中心とする十分小さい半径を持つ超球面とすると、$M := V \cap S^{2N-1}$ 上には（V の複素構造を反映した）強擬凸 CR 構造が生じる。正規孤立特異点と CR 構造のこの関係に基づいてその変形を扱おうというアイデアは倉西正武氏による。 これまでに、倉西氏のアイデアを発展させる形で、$\dim_C V \geq 4$ かつ $\operatorname{depth} O_{V,o} \geq 4$ の条件の下で、(V,o) の変形の完備族が M 上の CR 構造の変形を使って構成されていた（[A], [B-M], [K], [M1]）。

本講演では、$\dim_C V = 2$ の場合に [B-E] によって導入されたCR 構造の stably embeddable 変形の視点から捉え直すことにより、倉西氏が提起した問題が完全に解決されることを報告したい。

主定理. ([M2]) M を最初に与えたものとする。（V を正規解析空間と仮定しているので、$\dim_C V \geq 2$ である。）

(1) M 上の CR 構造の stably embeddable 変形の（倉西の意味での）完備族が存在する。

(2) (1)で求めた CR 構造の変形族は、(V,o) の flat 変形の完備族の境界となる。

定理の証明の解析的部分の議論には、$E = T^{1,0}V_{|M}$, $T^{1,0}C^N{}_{|M}$, $N_{V/C^N|M}$ に対する $A_b^{0,q}(E)$ $(q = 0,1)$ での Hodge 分解を利用する。$\dim_R M = 3$ の場合の Hodge 分解は [M3] による。

References

[A] Akahori, T., *The new estimate for the subbundles E_j and its application to the deformation of the boundaries of strongly pseudo convex domains*, Inv. Math. **63** (1981), 311--334.

[B-E] Bland, J. and Epstein, C.L., *Embeddable CR-structures and deformations of pseudoconvex surfaces. Part I: Formal deformations*, J. Alg. Geom. **5** (1996), 277--368.

[B-M] Buchweitz, R. O. and Millson, J. J., "CR geometry and deformations of isolated singularities", Memoirs of A. M. S., Vol. 125, No. 597, 1997.

[Ku] Kuranishi, M., *Deformations of isolated singularities and $\bar\partial_b$*, Preprint, Columbia University, 1973.

[M1] Miyajima, K., *Deformations of a complex manifold near a strongly pseudo-convex real hypersurface and a realization of Kuranishi family of storngly pseudo-convex CR structures*, Math. Z. **205** (1990), 593--602.

[M2] ----------, *CR construction of the flat deformations of normal isolated singularities* (revised version), preprint.

[M3] ----------, *A note on the closed rangeness of vector bundle valued tangential Cauchy-Riemann operator*, preprint.

特別講演

SERRE DUALITY ON NON-COMPACT COMPLEX MANIFOLDS

JÜRGEN LEITERER

(Humboldt Universität, Berlin)

The relation between Dolbeault cohomology with compact support and the usual Dolbeault cohomology on complex manifolds is well understood since the famous work of Serre from 1955 (Commentarii Mathematici Helvetici 29) and a number of subsequent papers written by different authors. In the talk some results are presented concerning this relation in the case of more general pairs of famillies of supports (instead of the family of all compact sets on the one side and the family of all closed sets on the other side). Using these results one obtains certain new separation theorems for the Dolbeault cohomology (resp. new proofs for such theorems).

特別講演

Recent developments in the theory of Fuchsian and Kleinian groups

Gerhard Rosenberger

Abstract

This abstract is intended as survey of some recent work on Fuchsian and Kleinian groups.

The theory of Fuchsian and Kleinian groups and their orbit spaces, Riemann surfaces and hyperbolic 3–folds, is a deep and beautiful subject with many important applications in analysis, geometry, low dimensional topology, combinatorial group theory and number theory.

We have made no attempt here to present a general survey of the theory of Fuchsian and Kleinian groups, preferring instead to concentrate on our own and related work on these groups. We recommend the books "The geometry of discrete groups" by A. F. Beardon and "Kleinian groups" by B. Maskit as good places to begin for readers who want to learn more about Fuchsian and Kleinian groups.

Here is an outline of the topics we intend to cover:

1) Fuchsian and Kleinian groups.

2) Universal constraints for Fuchsian and Kleinian groups. Two–generator discrete groups.

3) Arithmetic Fuchsian and Kleinian groups.

4) Generalized triangle and tetrahedron groups.

1) **Fuchsian and Kleinian groups**

Here essentially we want to recall a few basic definitions. A Fuchsian group is a discrete subgroup of $PSL(2, \mathbb{R})$, and a Kleinian group is a discrete subgroup of $PSL(2, \mathbb{C})$. Here we concentrate on non–elementary groups and use the terms Fuchsian and Kleinian group to refer to a non–elementary discrete subgroup of $PSL(2, \mathbb{R})$ and $PSL(2, \mathbb{C})$, respectively. Recall that a subgroup of $PSL(2, \mathbb{R})$ or $PSL(2, \mathbb{C})$ is elementary if the commutator of any two elements of infinite order has trace 2. A Fuchsian group acts discontinuously on the hyperbolic 2–space

$$\mathbb{H}^2 = \{z = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$$

endowed with the complete Riemann metric $ds = \frac{|z|}{y}$, and a Kleinian group acts discontinuously on the hyperbolic 3–space x_2

$$\mathbb{H}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$$

endowed with the complete Riemannian metric $ds = \frac{|x|}{x_3}$ when we make the usual identification $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}^3$. A hyperbolic 2–orbifold is the orbit space $\mathbb{H}^2/_F$ of a Fuchsian group F, and a hyperbolic 3–orbifold is the orbit space $\mathbb{H}^3/_\Gamma$ of a Kleinian group Γ.

Thurston's geometrization conjecture asserts that any 3–~~orb~~manifold $\mathbb{H}^3/_\Gamma$ with Γ torsion free can be canonically cut up into geometric pieces, and here the most prevalent geometry is hyperbolic. Therefore we expect that Kleinian groups play a similar role in 3–dimensions to that played by Fuchsian groups in two dimensions, where every surface, with a few simple exceptions, is the orbit space of a Fuchsian group. A fundamental invariant of a hyperbolic 3–orbifold is its volume. Yet, in general, relatively little is known about the set of volumes of hyperbolic 3–orbifolds, at least in companion with the situation in two dimensions where the signature formula gives the complete spectrum of possible volumes. From the work of Jørgensen and Thurston we know that the set of volumes is well ordered of type w^w. Some extremal volumes have been identified, for instance the smallest volume arithmetic orbifold and the smallest volume noncompact orbifold.

2) Universal constraints for Fuchsian and Kleinian groups. Two–generator discrete groups.

Recall that an element $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ can be considered as a linear fractional transformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $z \in \overline{\mathbb{C}} = \cup\{\infty\}$, with $ad - bc = 1$. This can also be considered as the pair $\{\overline{A}, -\overline{A}\}$ with $\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. We then use, with slight ambiguity, the term tr A in an appropriate manner. The classification by trace is as follows. If $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ with $A \neq \pm I$ then

(1) A is hyperbolic if tr $A \in \mathbb{R}$ and $|\mathrm{tr}\ A| > 2$;

(2) A is parabolic if tr $A \in \mathbb{R}$ and $|\mathrm{tr}\ A| = 2$;

(3) A is elliptic if tr $A \in \mathbb{R}$ and $|\mathrm{tr}\ A| < 2$;

(4) A is loxodromic if tr $A \notin \mathbb{R}$.

Further A has finite order $p \geq 2$ if and only if tr $A = \pm 2\cos\frac{q\pi}{p}$ with $1 \leq q < p$ and $\gcd(p,q) = 1$. Now let $A, B \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ and let $x = \mathrm{tr}\ A$, $y = \mathrm{tr}\ B$ and $z = \mathrm{tr}\ AB$. Regarded as linear fractional transformations of $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, A and B have a common fixed point if and only if tr $[A,B] = 2$; in that case the group generated by A and B is elementary. We have the following identities.

(1) $\mathrm{tr}\ AB^{-1} = xy - z$;

(2) $\mathrm{tr}\ [A,B] = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$, where $[A,B] = ABA^{-1}B^{-1}$ is the commutator for A and B;

(3) $A^n = S_n(x)A - S_{n-1}(x)I$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;

(4) $\mathrm{tr}\ [A^n, B^m] - 2 = S_n^2(x)S_m^2(y)(\mathrm{tr}\ [A,B] - 2)$; where the Chebyshev polynomials $S_n(t)$ are defined recursively by $S_0(t) = 0$, $S_1(t) = 1$, $S_n(t) = tS_{n-1}(t) - S_{n-2}(t)$ for $n \geq 2$ and $S_n(t) = -S_{-n}(t)$ for $n < 0$.

If $A, B \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ and $G = < A, B >$, the group generated by A and B, is non–cyclic, then we write $(A,B) \overset{N}{\sim} (U,V)$ if there exists a Nielsen transformation from (A,B) to (U,V), that is a finite sequence of the elementary Nielsen transformations of the form

$$(A,B) \mapsto (B,A),$$
$$(A,B) \mapsto (AB, A^{-1}) \text{ and}$$
$$(A,B) \mapsto (A, B^{-1}).$$

If the element A has finite order $p \geq 2$ then a transformation $(A, B) \to (A^q, B)$ with $1 \leq q < p$ and $\gcd(p, q) = 1$ is called an E–transformation. An extended Nielsen transformation is a finite sequence of Nielsen transformations and E–transformations.

We write $(A, B) \overset{eN}{\sim} (U, V)$ if there exists an extended Nielsen transformation from (A, B) to (U, V). If $(A, B) \overset{eN}{\sim} (U, V)$ then $< A, B > = < U, V >$; and if $(A, B) \overset{N}{\sim} (U, V)$ then tr $[A, B] =$ tr $[U, V]$. Depending on A, B we define the set

$$L = L(A, B) = \{(\mathrm{tr}\ U, \mathrm{tr}\ V, \mathrm{tr}\ UV) \mid (A, B) \overset{N}{\sim} (U, V)\}.$$

Starting from the triple (tr A, tr B, tr AB) $\in L$ we are able to obtain all triples $(U, V, W) \in L$ by repeated application of the following transformations:

$(u, v, w) \mapsto (v, u, w)$,
$(u, v, w) \mapsto (w, u, v)$ and
$(u, v, w) \mapsto (u, v, uv - w)$.

This algorithm, applied in a trace minimizing manner, answers completely the following question:

If $A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ and $G = < A, B >$ is non–elementary, can one find necessary and sufficient conditions for G to be discrete?

Theorem 1:

Suppose $A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ with tr $[A, B] > 2$ and suppose $G = < A, B >$ is non–elementary. Then G is discrete if and only if there is an extended Nielsen transformation from (A, B) to a pair (U, V) which satisfies {after a suitable choice of signs}

(1) $0 \leq \mathrm{tr}\ U \leq \mathrm{tr}\ V \leq |\mathrm{tr}\ UV|$;

(2) tr $U = 2\cos\frac{\pi}{p}$ or tr $U \geq 2$,

(3) tr $V = 2\cos\frac{\pi}{q}$ or tr $V \geq 2$ and

(3) tr $UV = -2\cos\frac{\pi}{r}$ or tr $UV \leq -2$ where $p, q, r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

□

Theorem 2:

Suppose $A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ with $0 \leq$ tr A, tr B and tr $[A, B] < 2$ and suppose $G = < A, B >$.

Then G is discrete if and only if one of the following cases holds:

(1) tr $[A, B] \leq -2$;

(2) tr $[A, B] = -2\cos\frac{\pi}{p}$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$;

(3) tr $[A, B] = -2\cos\frac{2\pi}{p}$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, p odd;

(4) tr $[A, B] = -2\cos\frac{6\pi}{r}$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 7$, $\gcd(r, 6) = 1$, and $(A, B) \overset{N}{\sim} (U, V)$ with tr $U =$ tr $V =$ tr UV;

(5) tr $[A, B] = -2\cos\frac{4\pi}{r}$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 5$, $\gcd(r, 2) = 1$, and $(A, B) \overset{N}{\sim} (U, V)$ with tr $U =$ tr V and tr $UV = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\ U)^2$;

(6) $\operatorname{tr}[A,B] = -2\cos\frac{3\pi}{r}$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 4$, $\gcd(r,3) = 1$, and $(A,B) \overset{N}{\sim} (U,V)$ with $\operatorname{tr} U = \operatorname{tr} V = \operatorname{tr} UV$;

(7) $\operatorname{tr}[A,B] = -2\cos\frac{4\pi}{7}$, and $(A,B) \overset{N}{\sim} (U,V)$ with $\operatorname{tr} V = \operatorname{tr} UV = \operatorname{tr} U + 1$.

□

Theorem 3:

(i) Suppose $G = < A, B > \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ is a Fuchsian group. Then

$$|\operatorname{tr}[A,B] - 2| \geq 2 - 2\cos\frac{\pi}{7}.$$

(ii) Let H be any non–elementary subgroup of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Then H is discrete if and only if each cyclic subgroup of H is discrete

□

For the general case $A, B \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ and $G = < A, B >$ the answer is very complicated. There is no simple general sufficient condition. Many authors, including Jørgensen, Gehring, Klimenko, Maclachlan, Martin, Reid, Hagelberg, Rosenberger and Vinberg, considered special examples and classes. Here discreteness follows often for arithmetical reasons or just by constructing a fundamental domain for the action on $\mathbb{H}^3$.

A very interesting example is the following.

Theorem 4:

Let $\Gamma = \Gamma(k,l;m). = < a, b \mid a^k = b^l = [a,b]^m = 1 >$ with $2 \leq k \leq l \leq \infty$ and $2 \leq m \leq \infty$. Γ has a faithful discrete representation $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ if and only if $(k,l;m) \neq (2,3;2), (3,3;2), (2,3;3), (2,4;2)$.

□

There is an elegant necessary condition, which is Jørgensen's inequality. Namely, if $A, B \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ and $G = < A, B >$ is non–elementary and discrete then

$$|(\operatorname{tr} A)^2 - 4| + |\operatorname{tr}[A,B] - 2| \geq 1.$$

A straightforward consequence is the following.

Theorem 5:

Let H be any non–elementary subgroup of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Then H is discrete if and only if each two–generator subgroup of H is discrete.

□

One can ask whether — as in Theorem 3 for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ — already the commutator trace is uniformly bounded away from 2. In other words: Does there exist a positive real number c, such that the inequality $|\operatorname{tr}[A,B] - 2| \geq c$ holds whenever $A, B \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ generate a non–elementary, discrete group? The answer to this question is in the negative. The function $|\operatorname{tr}[A,B] - 2| \geq c$ has the infinum 0 over the set of all pairs (A,B) of generators of non–elementary, discrete subgroups of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Recently several different people have obtained variations on and improvements in Jørgensen's inequality including Gehring, Martin and Tan. We here just mention three of the variations which are related to theorem 3.

Theorem 6:

Suppose $G = < A, B > \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ is discrete and non-elementary.

(i) If $\mathrm{tr}\, A = \pm \mathrm{tr}\, B \neq 0$ then $|\mathrm{tr}\, [A, B] - 2| > 0{,}193$. If in addition $\mathrm{tr}\, [A, B]$ is real, then $|\mathrm{tr}\, [A, B] - 2| \geq 2 - 2\cos\frac{\pi}{7}$.

(ii) If $\mathrm{tr}\, [A, B] \neq 1$ then $|(\mathrm{tr}\, A)^2 - 2| + |\mathrm{tr}\, [A, B] - 1| \geq 1$; if $\mathrm{tr}\, [A, B] = 1$ and $\mathrm{tr}\, A \neq \pm\sqrt{2}$ then $|(\mathrm{tr}\, A)^2 - 2| > \frac{1}{2}$.

(iii) If A is parabolic then $|\mathrm{tr}\, [A, B] - 2| \geq 1$.

□

Since there is no good sufficient condition, sometimes one iterates the process of taking commutators (as Jørgensen already did to prove his inequality). There is a recurrent theme in recent literature: iterating commutators gives good results. But why it gives good results is only partially understood. The process of iterating commutators means constructing sequences similar to the following one, which goes back to Jordan. Begin with A and B. Let

$$\begin{aligned} B_1 &= [A, B], \\ B_2 &= [A, [A, B]] = [A, B_1], \\ &\vdots \\ B_{i+1} &= [A, B_i] = [A, [A, \ldots [A, B]] \ldots]. \end{aligned}$$

Other variations are also used.

If one begins with an element of small trace, then iteration of commutators will produce a sequence of elements of decreasing trace. Since in a discrete group traces of elements cannot become arbitrary small, this gives information about discretness. A partial geometric explanation for what happens is as follows. For simplicity assume that A and B are hyperbolic, loxodromic or elliptic, so that they each fix hyperbolic straight lines, their axis in the hyperbolic 3-space $\mathbb{H}^3$. Then $[A, B]$ gives a measurement of the hyperbolic distance between their axes. Iterating commutators iterates distances between axes and in a discrete group, the axes cannot accumulate. More concrete, if $A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ with distinct pairs of fixed points — regarded as linear fractional transformations of $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — then

$$\cos(2\delta) = \left| \frac{4(\mathrm{tr}\, [A, B] - 2)}{((\mathrm{tr}\, A)^2 - 4)((\mathrm{tr}\, B)^2 - 4)} + 1 \right| + \left| \frac{4(\mathrm{tr}\, [A, B] - 2)}{((\mathrm{tr}\, A)^2 - 4)((\mathrm{tr}\, B)^2 - 4)} \right|$$

where δ is the hyperbolic distance between the axes of A and B.

One can call the more general question: "Can we find necessary and sufficient conditions for $G = < A_1, \ldots, A_n >$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, to be discrete?"
The answer is that this is extremely complicated. As far as I know a satisfactory answer is only given by Maskit, Seppälä and Sorvali for Fuchsian groups of a signature type $(0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ or $(2; 0)$, that is for Fuchsian groups with a presentation

$$< s_1, s_2, s_3, s_4 | s_1^{\alpha_1} = s_2^{\alpha_2} = s_3^{\alpha_3} = s_4^{\alpha_4} = s_1 s_2 s_3 s_4 = 1 >, 2 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \text{ or}$$

$$< a_1, b_1, a_2, b_2 | [a_1, b_1][a_2, b_2] = 1 > .$$

The proofs here use the geometric descriptions in theorems 1 and 2 as well as combination arguments.

One should mention at the end of this section that the algebraic structure of the minimal generating systems for a finitely generated Fuchsian group is well understood; also that the algebraic rank differs from the geometrical rank. For instance, $\Gamma =< s_1, s_2, s_3, s_4 | s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^q = s_1 s_2 s_3 s_4 = 1 >$, $q = 2k+1 \geq 3$, can be generated by $s_1 s_2$ and $s_3 s_1$ but for each connected closed fundamental region F of Γ, as a Fuchsian group acting on $\mathbb{H}^2$, there are at least 3 pairs $x, x^{-1} \in \Gamma$ for which $xF \cap F$ has dimension ≥ 1.

3) Arithmetic Fuchsian and Kleinian groups

In the last years several authors including K. Takeuchi, Maclachlan, Rosenberger, Reid, Gehring, Martin, Helling, Mennicke, Hilden, Lozano, Montesinos–Amilibia and Vinberg considered discreteness in connection with arithmeticity.

Let G be a finitely generated subgroup of PSL$(2, \mathbb{C})$. The subgroup $G^{(2)} =< g^2 | g \in G >$ is a normal subgroup of finite index with quotient group a finite abelian 2–group. We call $k_1 = \mathbb{Q}(\text{tr } g; g \in G)$ the trace field and $k_2 = \mathbb{Q}(\text{tr } g^2; g \in G)$ the invariant trace field of G.

For any finite index subgroup G_1 of a non–elementary group G we have $k_2 \subset \mathbb{Q}(\text{tr } g_1; g_1 \in G_1)$, and k_2 is an invariant of the commensurability class of G. Here, two subgroups Γ_1, Γ_2 of a group Γ are called commensurable (in the wide sense) if there exists an element $\gamma \in \Gamma$ such that $\Gamma_1 \cap \gamma \Gamma_2 \gamma^{-1}$ is of finite index in both Γ_1 and $\gamma \Gamma_2 \gamma^{-1}$.

If $k \subset \mathbb{C}$ is a field then always $k \mapsto c(k)$ is an embedding from k into $\mathbb{C}$, where $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ denotes the complex conjugation map. With these notations we have the following criterion for discreteness.

Theorem 7:

Let G be a finitely generated subgroup of PSL$(2, \mathbb{C})$ such that

(1) $G^{(2)}$ contains elements g_1 and g_2 which have no common fixed point;

(2) tr $G = \{\text{tr } g; g \in G\}$ consists of algebraic integers;

(3) for each embedding $\sigma : k_2 \to \mathbb{C}$ such that $\sigma \neq \text{id}$ and $\sigma \neq c$, the set $\{\sigma(\text{tr } f);\ f \in G^{(2)}\}$ is bounded.

Then G is discrete.

$\square$

The condition of theorem 7 reflects the definition of an arithmetic Fuchsian or Kleinian group. For such groups there is a standard construction via a quaternion algebra over the invariant trace field.

Let k be a subfield of $\mathbb{C}$. A quaternion algebra over k is a 4–dimensional central simple algebra A with a multiplicative identity 1. Here, central means that the centre of A is just k, and simple means that A has no proper two–sided ideal. A has a basis fo the form $\{1, i, j, ij\}$ with $i^2 = a$, $j^2 = b$ where $a, b \in k^*$. Hence, A is denoted by a Hilbert symbol $\left(\frac{a,b}{k}\right)$. A does not uniquely determine the Hilbert symbol. In particular, $\left(\frac{a,b}{k}\right) \cong \left(\frac{ax^2,by^2}{k}\right)$ for $x, y \in k^*$. In this sense over $\mathbb{R}$ we only have $\left(\frac{1,1}{\mathbb{R}}\right) \cong \left(\frac{1,-1}{\mathbb{R}}\right) \cong M(2,\mathbb{R})$ by taking $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ and $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ or $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, respectively, or $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathcal{H}$, Hamilton's quaternions.

Now, let k be an algebraic number field, that is a finite extension of $\mathbb{Q}$, and let R_k denote the ring of integers in k. An order $\mathcal{O}$ in A is a subring with 1 which is a finitely generated R_k-module such that $\mathcal{O} \otimes_{R_k} k \cong A$. We denote by $\mathcal{O}^1$ the set of elements of norm 1 in $\mathcal{O}$. Here, if $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij \in A$ with $i^2 = a$, $j^2 = b$, then the norm of α is $n(\alpha) = a_0^2 - aa_1^2 - ba_2^2 + aba_3^2$. The norm is the determinant on matrix algebras.

If there is an embedding ρ of A into $M(2,\mathbb{C})$ then $P\rho(\mathcal{O}^1) \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ need not be discrete in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, where P denotes the projection from $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ to $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

To guarantee discreteness we can use arguments by Borel and Harishchandra on discrete arithmetic groups in algebraic groups.

Theorem 8:

(i) Let k be a real algebraic number field. Let $\left(\frac{a,b}{k}\right)$ be a quaternion algebra over k such that $\left(\frac{a,b}{\mathbb{R}}\right) \cong M(2,\mathbb{R})$, that is, such that there is an embedding $\rho : \left(\frac{a,b}{k}\right) \to M(2,\mathbb{R})$. Let $\mathcal{O}$ be an order in $\left(\frac{a,b}{k}\right)$. Then $P\rho(\mathcal{O}^1)$ is discrete of finite co-volume in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ if and only if k is totally real, that is $\sigma(k) \subset \mathbb{R}$ for each $\mathbb{Q}$-embedding $\sigma : k \to \mathbb{C}$, and $\left(\frac{\sigma(a),\sigma(b)}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathcal{H}$ for each such σ with $\sigma \neq \mathrm{id}$.

(ii) Let k be an algebraic number field with $k \subset \mathbb{C}$ but $k \not\subset \mathbb{R}$. Let $\left(\frac{a,b}{k}\right)$ be a quaternion algebra over k such that there is an embedding $\rho : \left(\frac{a,b}{k}\right) \to M(2,\mathbb{C})$. Let $\mathcal{O}$ be an order in $\left(\frac{a,b}{k}\right)$. Then $P\rho(\mathcal{O}^1)$ is discrete of finite co-volume in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ if and only if $\sigma(k) \subset \mathbb{R}$ for each $\mathbb{Q}$-embedding $\sigma : k \to \mathbb{C}$ with $\sigma \neq \mathrm{id}$ and $\sigma \neq c$, and $\left(\frac{\sigma(a),\sigma(b)}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathcal{H}$ for each such σ with $\sigma \neq \mathrm{id}$ and $\sigma \neq c$.

□

This leads to the following definition.

Definition:

(i) Let $A = \left(\frac{a,b}{k}\right)$ be a quaternion algebra over a totally real number field k, such that there is an embedding $\rho : \left(\frac{a,b}{k}\right) \to M(2,\mathbb{R})$ and such that $\left(\frac{\sigma(a),\sigma(b)}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathcal{H}$ for every $\mathbb{Q}$-embedding $\sigma : k \to \mathbb{R}$, $\sigma \neq \mathrm{id}$. Then any subgroup of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ which is commensurable with some $P\rho(\mathcal{O}^1)$ is an arithmetic Fuchsian group.

(ii) Let $A = \left(\frac{a,b}{k}\right)$ be a quaternion algebra over an algebraic number field k with $k \not\subset \mathbb{R}$, such that there is an embedding $\rho : \left(\frac{a,b}{k}\right) \to M(2,\mathbb{C})$ and such that $\sigma(k) \subset \mathbb{R}$ and $\left(\frac{\sigma(a),\sigma(b)}{\mathbb{R}}\right) \cong \mathcal{H}$ for every $\mathbb{Q}$-embedding $\sigma : k \to \mathbb{C}$ with $\sigma \neq \mathrm{id}$ and $\sigma \neq c$. Then any subgroup of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ which is commensurable with some $P\rho(\mathcal{O}^1)$ is an arithmetic Kleinian group.

$\square$

A detailed analysis of this definition gives the following.

Theorem 9:

Let G be a Kleinian (resp. Fuchsian) group of finite co–volume. Then G is arithmetic if and only if the following conditions are satisfied:

(1) $k_2 = \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\ g^2; g \in G)$ is an algebraic number field;

(2) $\mathrm{tr}\ G = \{\mathrm{tr}\ g; g \in G\}$ consists of algebraic integers;

(3) $\sigma(k_2) \subset \mathbb{R}$ for every $\mathbb{Q}$–embedding $\sigma : k_2 \to \mathbb{C}$ with $\sigma \neq \mathrm{id}$ and $\sigma \neq c$, and there are $g_1, g_2 \in G$ such that $|\sigma(\mathrm{tr}\ g_1)| < 2$ and $\sigma(\mathrm{tr}\ [g_1, g_2]) < 2$ for every such σ with $\sigma \neq \mathrm{id}$ and $\sigma \neq c$.

$\square$

For a fixed $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ there are — up to conjugacy in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ — only finitely many arithmetic Fuchsian groups which can be generated by $\leq n$ elements. By a result of Maclachlan and Martin there are — up to conjugacy in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ — only finitely many two–generator arithmetic Kleinian groups but — in contact to the case of Fuchsian groups — infinitely many three–generator arithmetic Kleinian groups.

It remains — especially in the case of arithmetic Fuchsian groups — to classify and describe the arithmetic Fuchsian and Kleinian groups. The two–generator arithmetic Fuchsian groups are completely classified by K. Takeuchi and Maclachlan and Rosenberger. Especially there are just 85 arithmetic triangle groups. There are classification results also for arithmetic Fuchsian groups with signature $(0; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ by Näätänen, Nakanishi and Rosenberger as well as by Sunaga.

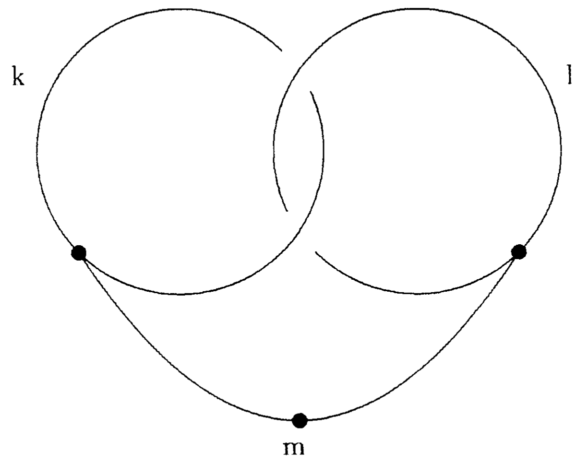
In the case of two–generator arithmetic Kleinian groups Gehring, Maclachlan and Martin are classifying them. Especially there are — up to conjugacy in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ — only 41 non–co–compact arithmetic Kleinian groups which can be generated by two elements of finite order. For the groups $\Gamma = \Gamma(k, l; m) =< a, b | a^k = b^l = [a, b]^m = 1 >$ with $2 \leq k \leq l$ and $2 \leq m$, which we already considered, we have only for $(k, l; m) = (3, 3, 3), (4, 4; 2)$ and $(3, 4; 2)$ a faithful discrete representation ρ into $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ such that $\rho(\Gamma)$ is an arithmetic Kleinian group.

At the end of this section we should mention that many authors including Maclachlan, Reid, Vulakh and Martin used arithmeticy to consider Fuchsian subgroups of Kleinian groups.

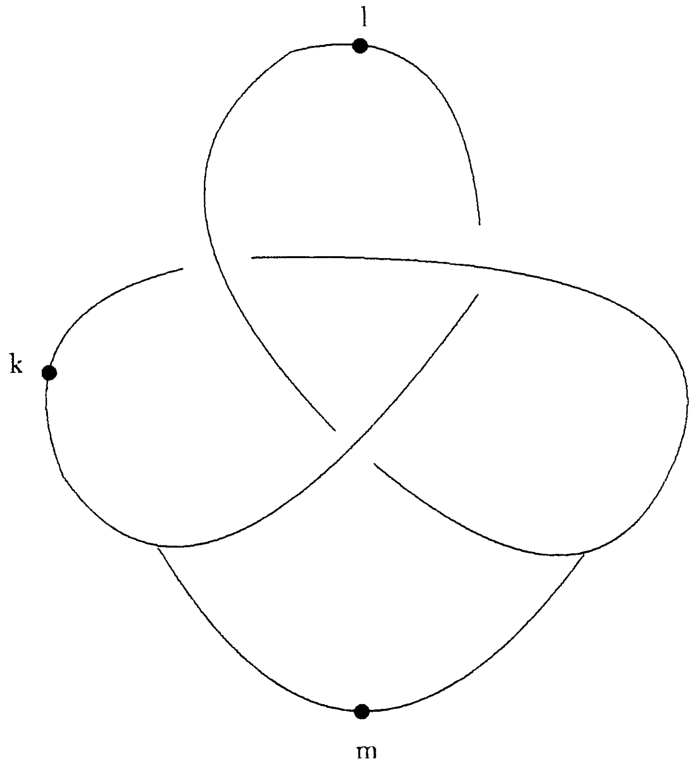
4) Generalized triangle and tetrahedron groups

An ordinary triangle group is the orientation preserving subgroups of the group generated by the reflections at the sides of a spherical, euclidean or hyperbolic triangle, and it has a presentation of the type $T =< a, b | a^p = b^q = (ab)^m = 1 >$ with $2 \leq p, q, m$; T is finite if and only if $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{m} > 1$. If $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{m} < 1$ then T is the fundamental group of a hyperbolic 2–orbifold.

The class of ordinary triangle groups has a natural generalization. For instance, take a Hopf link graph with a bridge joining the two circles and with branching indices k, l and m as in the picture:



We assume of course that $2 \leq k, l, m$. The fundamental group of this graph as an 3–orbifold with underlying topological space S^3 is then $\Gamma_1 =< a, b | a^k = b^l = [a, b]^m = 1 >$. As another example we may consider the cloverleaf knot with a bridge and branching indices k, l, m:



and we get the group $\Gamma_2 =< a, b | a^k = b^l = (aba^{-1}bab^{-1})^m >$. The first example was considered by Hagelberg, Maclachlan and Rosenberger, the second by Helling, Mennicke and Vinberg. This type of consideration one can make for each link and each knot, and each time we get a presentation of the form $G =< a, b | a^p b^q = R^m(a, b) = 1 >$ with $2 \leq p, q, m$ and $R(a, b) = a^{p_1} b^{q_1} \dots a^{p_k} b^{q_k}$ where $k \geq 1$ and $1 \leq p_i < p$, $1 \leq q_i < q$ for $i = 1, \dots, k$.

Such a group is called now a generalized triangle group. Baumslag, Morgan and Shalen and independently Fine, Howie and Rosenberger showed that such G has an essential representation into PSL(2, $\mathbb{C}$), that is, a representation $\rho : G \to$ PSL(2, $\mathbb{C}$) with $\rho(a), \rho(b)$ and $\rho(R(a, b))$ of order p, q and m, respectively.

This observation automatically leads to the following fundamental problems and questions.

(1) Classify the finite generalized triangle groups.

(2) Does the Tits alternative hold for a generalized triangle group, that is, is it either solvable by finite or does it contain a free subgroup of rank two?

(3) Which generalized triangle groups G have a faithful discrete representation into PSL(2, $\mathbb{C}$)?

(4) Which generalized triangle groups G have a faithful discrete representation ρ into PSL(2, $\mathbb{C}$) such that $\rho(G)$ is a Kleinian group of finite co–volume?

□

The finite generalized triangle groups are completely classified by Howie, Metaftsis, Thomas, Levai, Rosenberger and Souvignier.

Besides the ordinary triangle groups there are, up to isomorphism, only 12 finite generalized triangle groups, and the biggest one has a presentation $G =< a, b | a^2 = b^3 = (abababab^2ab^2abab^2ab^2)^2 = 1 >$ and is of order $424673280 = 2^{20}3^4 5$. Howie, Metaftsis and Thomas also determined the algebraic and topological structure of the finite generalized triangle groups. If $m \geq 3$ then it was shown that the Tits alternative holds for a generalized triangle group, and it is conjectured that it also holds for $m = 2$.

There are many examples of generalized triangle groups G which have a faithful discrete representation ρ into PSL(2, $\mathbb{C}$), also such examples with $\rho(G)$ Kleinian of finite co–volume.

For instance, Reid and Jones showed that for each $j \in \mathbb{N}$ the group $G =< a, b | a^4 = b^4 = ((ab)^j (a^{-1} b^{-1})^j)^2 = 1 >$ has a realization as a Kleinian group with finite co–volume, and that there are infinitely many two–generator, pairwise non–conjugate Kleinian groups with finite co–volume. Other examples are given by Hagelberg and Vesnin.

In contrast, as already mentioned, there are, up to conjugacy, only finitely many two–generator arithmetic groups. There are no general results concerning faithful discrete representations of generalized triangle groups into PSL(2, $\mathbb{C}$), with or without finite co–volume, but we have an interesting necessary condition by Hagelberg, Maclachlan and Rosenberger.

Theorem 10:

Let $G =< a, b | a^p = b^q = R^m(a, b) = 1 >$, $2 \leq p, q, m$, be a generalized triangle group as above. Suppose further, that one of the following conditions holds:

(i) $m \geq 4$.

(ii) $m = 3$ and $R(a,b)$ does not involve an element of order 2.

If G has a faithful representation $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ such that $\rho(G)$ is a Kleinian group of finite co–volume, then $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{m} \geq 1$.

□

The proof depends on the existence of an Euler characteristic for certain generalized triangle groups.

I do not think that Theorem 10 can be extended to a general result.

Analogously we may generalize the ordinary tetrahedron groups. An ordinary tetrahedron group is the orientation preserving subgroup of the group generated by the reflections at the sides of a tetrahedron, and it has a presentation of the form

$$T =< a,b,c | a^p = b^q = c^r = (ab^{-1})^m = (ca^{-1})^n = (bc^{-1})^l = 1 >$$

with $2 \leq p,q,r,m,n,l$.

The generalization is analogous to the case of ordinary triangle groups.

A generalized tetrahedron group is a group with a presentation

$$G =< a,b,c | a^p = b^q = c^r = R_1^m(a,b) = R_2^n(a,c) = R_3^l(b,c) = 1 >,$$

with $2 \leq p,q,r,m,n,l$, and $R_1(a,b)$, $R_2(a,c)$ and $R_3(b,c)$ are given analogously as in the case of a generalized triangle group.

A generalized tetrahedron group can be regarded as a triangular product of the generalized triangle groups

$$\begin{aligned} G_1 &=< a,b | a^p = b^q = R_1^m(a,b) = 1 >, \\ G_2 &=< a,c | a^p = c^r = R_2^n(a,c) = 1 > \text{ and} \\ G_3 &=< b,c | b^q = c^r = R_3^l(b,c) = 1 > \end{aligned}$$

with edge amalgamations over the cyclic subgroups $< a >, < b >$ and $< c >$. A generalized tetrahedron group G also has an essential representation into $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, and we can ask the analogous four fundamental questions as for the generalized triangle groups. In addition we may ask the following.

(5) Does each G_i embed into G?

Besides the results by Fine, Levin, Roehl, Rosenberger and Stille, not much is known about generalized tetrahedron groups. We have the list of the finite generalized tetrahedron groups if in addition $(m,n,l) \neq (2,2,2)$; also the Tits alternative holds if $(m,n,l) \neq (2,2,2)$.

Up to conjugacy, there are only finitely many generalized tetrahedron groups which can be realized as in arithmetic Kleinian group, but there are infinitely many three generator, pairwise non–conjugate arithmetic Kleinian groups.

Theorem 10 holds analogously.

Theorem 11:

Let $G =< a,b,c | a^p = b^q = c^r = R_1^m(a,b) = R_2^n(a,c) = R_3^l(b,c) = 1 >$ be a generalized tetrahedron group as above. Suppose further that either $m \geq 4$ or $m = 3$ and $R_1(a,b)$ does not involve an element of order 2, that either $n \geq 4$ or $n = 3$ and $R_2(a,c)$ does not involve an element of order 2, and that either $l \geq 4$ or $l = 3$ and $R_3(b,c)$ does not involve an element of order 2.

If G has a faithful representation $\rho : G \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ such that $\rho(G)$ is a Kleinian group of finite co-volume, then

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{l} \geq 2.$$

□

If $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{l} \leq 1$ then each vertex group G_i, $i = 1,2,3$, embeds into the corresponding generalized tetrahedron group. This latter does not hold in general if $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{l} > 1$. For instance,

$$G = < a,b,c | a^2 = b^3 = c^2 = (abababab^2abab^2ab^2)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = 1 >$$

is finite, but

$$G_1 = < a,b | a^2 = b^3 = (abababab^2abab^2ab^2)^2 = 1 >$$

is infinite.

G. Rosenberger
Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
D–44221 Dortmund

函数論メーリングリスト

1) １９９６年３月に函数論メーリングリストを開設して以来２００名以上の登録者がいて、順調に運営されています．このメーリングリストは電子メールを用いて函数論の研究者どうしの連絡をとりあうことが主な目的です．現在では研究集会、シンポジウム、セミナーなどの連絡も主に函数論メーリングリストを通じておこなわれています．

   函数論メーリングリストへの登録や登録の解除はどなたでも自由におこなえます．

2) **メーリングリストへの登録方法**
   メーリングリストへ登録するためには次のメールアドレス

   majordomo@math.sci.yamaguchi-u.ac.jp

   に本文の内容を

   subscribe ca-ml
   end

   と書いたメールを送ってください．自動的に登録されます．ご不明な点がございましたら下記の問合せ先へお尋ねください。

   函数論メーリングリストへのメールの投稿方法などの詳しい情報はメーリングリストへ登録をおこなった方へ、登録されたことの報告とともにメールで送られます．

3) 冒頭に書きましたように現在の登録者数は２００名をこえています．ですがこの数字は現在電子メールを使用している函数論研究者の一部であると推測されます．どうか、近隣の方で未登録の方がおられましたら登録をお勧めください．

4) 函数論ホームページが京都大学の須川さんにより開設されています．ホームページのURL は

   http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/complex/

   です．是非ご利用ください．

問合せ先：郷間知巳
gouma@math.sci.yamaguchi-u.ac.jp