日　本　数　学　会

１９９７年度秋季総合分科会

# 函数論分科会
# 講演アブストラクト

１９９７年10月

於　東　京　大　学

# 函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務

   (1) 函数論分科会評議員候補者を選出する．

   (2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．

   (3) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．

   (4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．

   (5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．

   (6) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．

   (7) 次期委員会委員候補者の推薦．

   (8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期

   (1) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる．

   (2) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．

   (3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．

      (i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．

      (ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決

   (1) 委員会は評議員が召集する．

   (2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．

   (3) 年３回 (春季， シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．

   (4) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務

   (1) 委員会の司会をする．

   (2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．

   (3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．

   (4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

# 函 数 論 分 科 会

## 10月1日（水）　第I会場

**9:30 ～ 12:00**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 横山 重夫 | * 円の実関数式 $x^2+y^2=r^2$から, 円の複素関数式 $z=re^{i\theta}$ を求める | 10 |
| 2 | 西本 勝之（デカルト出版） | * Modern form solutions obtained by operator $N^\nu$ method to a nonhomogeneous constant coefficients ordinary differential equation | 15 |
| 3 | 西本 勝之（デカルト出版） | * On $(e^z)\cdot z^m$ and $z^m\cdot e^z$ where $m\in \mathrm{Z}_0^+$, $n\in \mathrm{Z}^+$ (A serendipity in $N$-fractional calculus) | 15 |
| 4 | 田島 愼一 (新潟大工) | 微分作用素を用いた留数計算 I | 15 |
| 5 | 田島 愼一 (新潟大工) | 微分作用素を用いた留数計算 II | 10 |
| 6 | 田島 愼一 (新潟大工)<br>中村 弥生 (お茶の水女大) | * 微分作用素を用いた留数計算 III –方程式の具体的構成– | 10 |
| 7 | 尾和 重義 (近畿大理工)<br>H. M. Srivastava<br>(Univ. of Victoria) | Distortion inequalities for Ruscheweyh derivatives | 15 |
| 8 | 尾和 重義 (近畿大理工) | Partial sums of Libera integral operator | 15 |
| 9 | Ji A Kim (近畿大理工)<br>尾和 重義 (近畿大理工) | Some properties for convolutions of generalized hypergeometric functions | 15 |
| 10 | 崔 宰豪 (福岡大理)<br>西郷 恵 (福岡大理) | Univalent functions involving a certain fractional integral operator with positive coefficients | 15 |

**13:00 ～ 14:45**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 飯田 安保 (東北大情報) | Hardy-Orlicz space $N^\alpha$における等長写像について | 15 |
| 12 | 下村 俊 (慶大理工) | Painlevé 超越関数の値分布について | 15 |
| 13 | 戸田 暢茂 (名工大) | On holomorphic curves with maximal deficiency sum | 15 |
| 14 | 水田 義弘 (広島大総合科学) | ソボレフ関数の一意性定理について | 15 |
| 15 | 下村 勝孝 (茨城大理)<br>鈴木 紀明 (名大多元数理)<br>西尾 昌治 (阪市大理) | Note on poly-supertemperatures on a strip domain | 15 |
| 16 | 中井 三留 (大同工大) | 擬等距離写像の存在とロイデン完閉化 | 15 |

## 10月2日（木）　第I会場

**10:00 ～ 12:00**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 柴田 敬一 (国際自然科学研) | * 円板の擬等角写像について | 15 |
| 18 | 柴 雅和 (広島大工) | 極値平行裁線写像関数の単葉な複素線形結合 | 15 |
| 19 | 中條 直勇樹 (埼玉大理) | On the equivalence problem of cyclic branched corerings of the Riemann sphere | 15 |
| 20 | 渡邊 清　(神戸大理) | * Fermat 曲線上の Weierstrass 点について | 15 |
| 21 | 須川 敏幸 (京大理)<br>須川 敏幸 (京大理) | * The bottom of the spectrum of an open Riemann surface<br>The Metric Geometry of Hyperbolic Riemann Orbifolds | 15 |

**14:15 ～ 15:45**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 宮地 秀樹 (阪市大理) | | On the existence of certain quadratic differentials on four times punctured spheres and once puctured tori | 15 |
| 23 | 松崎 克彦 (お茶の水女大理) | | クライン群の幾何学的収束と極限集合のハウスドルフ次元 | 15 |
| 24 | 佐藤 宏樹 (静岡大理) | * | Jørgensen's number for the elementary Kleinian groups | 15 |
| 25 | 木坂 正史 (阪府大総合科学) | * | Uniformization of Baker domains | 15 |
| 26 | 志賀 啓成 (東工大理) | * | 複素力学系の holomorphic family について | 15 |

**16:00 ～ 17:00 特別講演**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 諸澤 俊介 (高知大理) | * | 有理関数と超越整関数の力学系 | 16:00 ～ 17:00 |

## 10月3日（金） 第Ｉ会場

**10:00 ～ 12:00**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | 笹山 浩良 (笹山研) | | On the generalized Cauchy integral formula for functions of finite-dimensional domains into the Clifford hypercomplex $2^n$-tuple spaces | 15 |
| 28 | 梶原 壌二<br>孫 光鎬 (釜山大)<br>李 琳 (済南電視大) | * | コホモロジー消滅と正則性 | 10 |
| 29 | 梶原 壌二<br>李 辰基 (釜山大) | * | 無限次元の$\bar{\partial}$-解析 | 10 |
| 30 | 辻 美輝 (九大数理) | | Dimca の超曲面と一般化された Nagata automorphism について | 15 |
| 31 | 中村 弥生 （お茶の水女大）<br>大阿久 俊則 （横浜市大）<br>田島 慎一 （新潟大） | * | 多変数留数計算とホロノミックな $D$-加群 | 15 |
| 32 | 城崎 学 （阪府大工） | | ある超曲面と正則写像 | 10 |
| 33 | 足立 幸信 | | On value distribution of holomorphic maps of $C^2$ to $C^2$ and its application | 15 |
| 34 | 奥間 智弘 (群馬高専一般) | | Gorenstein surface singularities with simple plurigenera | 10 |

**14:15 ～ 15:45**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 35 | 濱田 英隆 （九州共立大工） | | Holomorphic maps into bounded complete Reinhardt domains of holomorphy which are Kobayashi isometries at one point | 10 |
| 36 | 濱田 英隆 （九州共立大工） | | A Schwarz lemma on complex ellipsoids | 10 |
| 37 | 濱田 英隆 （九州共立大工） | | Univalence and quasiconformal extension of holomorphic maps on balanced pseudoconvex domains | 10 |
| 38 | 濱田 英隆 （九州共立大工） | | Starlikeness criterions for holomorphic maps on balanced pseudoconvex domains | 10 |
| 39 | 濱田 英隆 （九州共立大工） | | Growth theorems and quasiconformal extension of starlike maps on balanced pseudoconvex domains | 10 |
| 40 | 小林 正史 （東大数理） | | Kobayashi-Royden 計量の凸性について | 15 |
| 41 | 児玉 秋雄 （金沢大理） | | Webster 計量の一般複素楕円体の特徴付け問題への応用 | 15 |

**16:00 ～ 17:00　特別講演**

吉川 謙一 （名大多元数理） * Quillen の計量と判別式 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16:00 ～ 17:00

**1**

円の実関数式 $x^2+y^2=r^2$ から、円の複素関数式 $z=re^{i\theta}$ を求める.

横山重夫

実平面上のグラフと同じグラフが複素平面上にあるとき、その複素関数式は次の定理で求められる。この定理は1996年秋季年会 幾何学分科会で発表した。

定理1. 実平面のグラフ $y=f(x)$ は複素平面では $z=x+if(x)$ である.

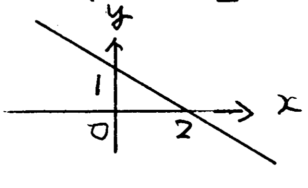
(証明) $z=x+iy=x+if(x)$ (1)

$\therefore\ z=x+if(x)$ (2)

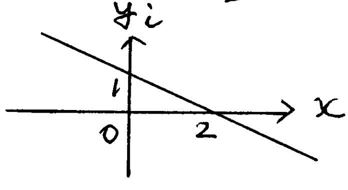
この定理の例を示めす.

例2. 定理1の例

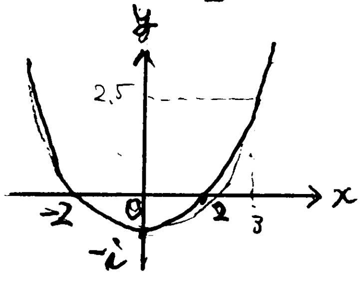
(1) $y=-\frac{1}{2}x+1$



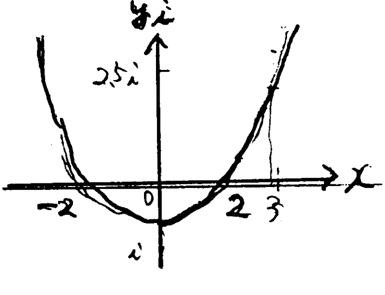

$z=x+i(-\frac{1}{2}x+1)$




(2) $y=\frac{1}{2}x^2-1$

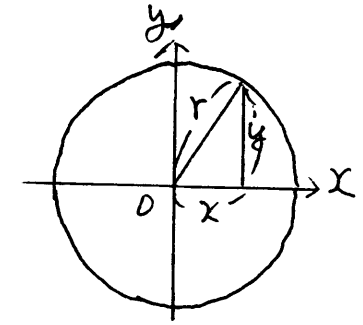



$z=x+i(\frac{1}{2}x^2-1)$



$x^2+y^2=r^2$ より、複素平面上の円の式を求める。

定理3．実平面 $x^2+y^2=r^2$ と同型の複素平面上の円の式は $z=re^{i\theta}$ である。




（証明） $x^2+y^2=r^2$ より

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

定理1より、複素平面の式は

$$z=x\pm i\sqrt{r^2-x^2}$$

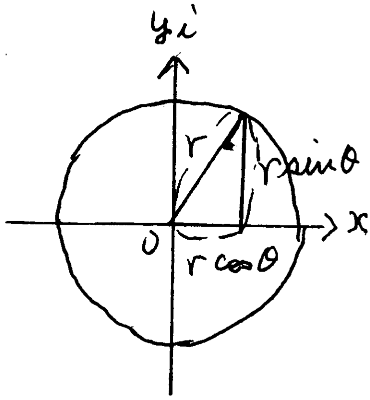
$$=r\left\{x/r\pm i\sqrt{1-(x/r)^2}\right\}$$

$$=r(\cos\theta\pm i\sqrt{1-\cos^2\theta})$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$=re^{i\theta}$$

$$\therefore\ z=re^{i\theta}$$




円の式は虚数単位 $i$ を底とする指数関数式である。

定理4．$z=ri^t$ は円の式である。

（証明） $z=re^{i\theta}$ の偏角 $\theta$ を $\theta=\frac{1}{2}\pi t$ とする。

$$z=r\exp\left(i\cdot\frac{1}{2}\pi t\right)$$

$$=r\left(\cos\frac{1}{2}\pi t+i\sin\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$=r\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^t$$

$$=r(0+i)^t=ri^t$$

$$\therefore\ z=r\exp\left(i\cdot\frac{1}{2}\pi t\right)=ri^t$$

2

# Modern form solutions obtained by operator $N^\nu$ method to a nonhomogeneous constant coefficients ordinary differential equation

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

**Abstract**

In this paper, nonhomogeneous constant coefficients linear second order ordinary differential equations are discussed by means of N-fractional calculus operator $N^\nu$. And the Super-Particular solution and Super-General solution are shown.

## References

[1] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator $N^\nu$ (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[2] K. Nishimoto and Susana S. de Romero; N - fractional calculus operator $N^\nu$ method to nonhomogeneous Whittaker equations (I), J. Frac. Calc. Vol. 9, May (1996), 17 - 22.

[3] K. Nishimoto Judith A. de Durán and Leda Galué; N - fractional calculus operator $N^\nu$ method to nonhomogeneous Fukuhara equations (I), J. Frac. Calc. Vol. 9, May (1996), 23 - 31.

[4] K. Nishimoto, J. A. Guerra and M. S. de Guerra; N - fractional calculus operator $N^\nu$ method to an extended Gauss type nonhomogeneous ordinary differential equation (I), J. Frac. Calc. Vol. 10, Nov. (1996), 25 - 32.

[5] K. Nishimoto; Operator $N^\nu$ method to a generalized linear second order homogeneous ordinary differential equation, J. Frac. Calc. Vol. 11, May (1997), 1 - 9.

[6] K. Nishimoto; Operator $N^\nu$ method to a generalized linear second order nonhomogeneous ordinary differential equation of Fuchs type, J. Frac. Calc. Vol. 11, May (1997), 11 - 20.

[7] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5 (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[8] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

4

# 微分作用素を用いた留数計算 I

## ——局所コホモロジーと留数——

田島 慎一　　新潟大学工学部

キーワード: 留数計算、常微分作用素、代数的局所コホモロジー、D-加群

## 1 準備

$X$を複素平面 $\mathbf{C}$ の領域とする。今、$u(z)$ を $X$上の有理型関数で $z=\alpha_1,\ldots,\alpha_k$のみに極を持つものとする。$A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$, $A_j=\{z\in X|z=\alpha_j\}$ とおく。有理型関数 $u(z)$ の極 $A_j, j=1,2,...,k$における主要部に注目して"$m=(u(z) \bmod \mathcal{O}_X)$"を考える. ただし $\mathcal{O}_X$ は $X$上の正則関数の層とする。$m$ は $A$ に台を持つ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ の元を定める。

$$m=(u(z) \mod \mathcal{O}_X)\in\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X).$$

今、領域 $X$上の正則関数を係数に持つ線型微分作用素全体のなす環の層を $\mathcal{D}_X$で表す事にする。この時 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は左 $\mathcal{D}_X$加群の構造を持ち、更に、佐藤-河合-柏原の意味で極大過剰決定系となる。この事実に注目して留数を考察していく。

## 2 方程式系の構成

局所コホモロジー群の要素 $m$ に対し $m$ を annihilate する微分作用素全体のなす左 $\mathcal{D}_X$イデアルを $\mathcal{J}=\{R\in\mathcal{D}_X|Rm=0\}$ と置く。この時 $\mathcal{D}_Xm=\mathcal{D}_X/\mathcal{J}$が成り立つ。

局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ の分解

$$\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)=\mathcal{H}^1_{[A_1]}(\mathcal{O}_X)\oplus\mathcal{H}^1_{[A_2]}(\mathcal{O}_X)\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}^1_{[A_k]}(\mathcal{O}_X)$$

に応じて次の部分分数展開が存在する。

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_k,\quad m_j\in\mathcal{H}^1_{[A_j]}(\mathcal{O}_X)\ (j=1,2,...,k)$$

次の基本的定理が成り立つ。

**定理 1**

$$\{v\in\mathcal{H}^1_{[A_j]}(\mathcal{O}_X)|Rv=0,^{\forall}R\in\mathcal{J}\}=\{cm_j|c\in\mathbf{C}\}$$

である。

つまり, 微分方程式系の解として, 点 $A_j$での $u(z)$ の主要部 $m_j$ を（定数倍を除けば）特徴づけることができる.

## 3　例

複素平面上の関数 $u(z)=\dfrac{e^{2z}}{z^2(z-1)^3(z-3)}$ に対し

$m=(\dfrac{e^{2z}}{z^2(z-1)^3(z-3)}\ mod\ \mathcal{O}_X)$ とおく。一階、及び零階の微分作用素 $P,Q$ を

$$\begin{cases} P=z(z-1)(z-3)\frac{d}{dz}+2(z-1)(z-3)+3z(z-3)+z(z-1)-2z(z-1)(z-3), \\ Q=z^2(z-1)^3(z-3) \end{cases}$$

で定める。この時 $m$ を annihilate する微分作用素全体の成すイデアルは $P,Q$ で生成される。

$$\mathcal{J}=\langle P,Q\rangle.$$

ここで $P,Q$ は

$$PQ-QP=6(z^2-3z+1)Q,$$
$$z(z-1)^2P=(\frac{d}{dz}-2)Q$$

を満たす事に注意しておこう。

さて、定理に述べた主張が成り立つ事を極 $z=0$ において確かめてみる事にする。原点のみに台を持つ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^1_{[z=0]}(\mathcal{O}_X)$ の要素 $f$ を未知関数とする次の線形連立微分方程式系を解いてみる。

$$Pf=Qf=0.$$

$Q=z^2(z-1)^3(z-3)$ であるが $z=0$ においてのみ問題を考えているので、$f$ は $z^2f=0$ を満たす。すなわち

$$f=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}\quad \mathrm{mod}\quad \mathcal{O}_X$$

の形で表される。微分作用素 $P$ をこの $f$ に施す事により $3c_1=16c_2$ を得る。一方, 有理型関数 $u(z)$ を $z=0$ で普通にローラン展開すれば $z=0$ での主要部は $\dfrac{16}{9z}+\dfrac{1}{3z^2}$ となる事が確かめられる。

5

# 微分作用素を用いた留数計算 II

## ——双対性と随伴作用素——

田島 慎一　　　新潟大学工学部

キーワード: 留数計算、随伴微分作用素、右 D-加群

## 1 問題の定式化

複素平面 C の領域 $X$ 上の有理型関数 $u(z)$ で $z=\alpha_1,\dots,\alpha_k$のみに極を持つものが与えられたとする. $A=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$, $A_j=\{z\in X|z=\alpha_j\}$ とおく。留数計算に寄与するのは極における主要部のみである事に注目し、$u(z)$ に対し次を考える。

$$m=(u(z)\mod \mathcal{O}_X)\in\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$$

領域 $X$ 上の正則微分形式全体のなす層を $\Omega_X$ で表す事にする。$X$上の正則微分形式 $f(z)dz$に対し、$u(z)$ の極 $A_j$における $f(z)u(z)dz$ の留数 $Res_{A_j}(f(z)u(z)dz)$ を対応させる事により次の写像が定義される。

$$Res_{A_j}:\Omega_X\longrightarrow \mathbf{C}\quad j=1,2,...,k.$$

この写像 $Res_{A_j}$ の核を $K_j$ とおく。

$$K_j=\{f(z)dz\mid Res_{A_j}(f(z)u(z)dz)=0\}.$$

微分作用素を用いて、この $K_j$ を特徴付ける問題を考える。

## 2 随伴作用素

今微分作用素 $R=\sum_j a_j(z)(\frac{d}{dz})^j$に対し、$R$の形式随伴作用素は $R^*=\sum_j(-\frac{d}{dz})^j a_j(z)$ で定義される。ふたつの微分作用素 $R_1,R_2$ の積に関して, $(R_1R_2)^*=R_2^*R_1^*$ が成り立つ。

微分形式 $f(z)dz\in\Omega_X$ に対する微分作用素 $R\in\mathcal{D}_X$の作用を

$$(f(z)dz)R=(R^*f(z))dz$$

で定める。これにより $X$ 上の正則微分形式全体のなす空間 $\Omega_X$ に自然に右 $\mathcal{D}_X$加群の構造を入れる事が出来る。

## 3 留数計算

微分形式 $f(z)u(z)dz$ の留数は $f(z)mdz$ の留数とみなす事が出来る事に注目して、代数的局所コホモロジー群の要素 $m$ に対する annihilating イデアル $\mathcal{J}$ の双対を考える。

$$\mathcal{J}^* = \{R^* | R \in \mathcal{J}\}$$

これは右 $\mathcal{D}_X$ イデアルとなる。

任意の $R^* \in \mathcal{J}^*$, $g(z) \in \mathcal{O}_X$に対して

$$Res_{A_j}(R^* g(z)u(z)dz) = 0$$

が成り立つ。従って次の定理を得る。

**定理 1**

$$K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_k = \{(R^* g(z))dz \mid g(z)dz \in \Omega_X, R \in \mathcal{J}\}$$

つまり、留数は$\Omega_X/\mathrm{Im}\mathcal{J}^*$において well-defined と見なせる。ベクトル空間 $\Omega_X/\mathrm{Im}\mathcal{J}^*$ の次元は元々の有理型関数の相異なる極の個数 $k$ と一致する。

6

# 微分作用素を用いた留数計算 III
## —方程式系の具体的構成—

田島 慎一　新潟大学工学部
中村 弥生　お茶の水女子大

## 1 目的

微分作用素を用いた留数計算 I 及び II に関して, 方程式系の具体的構成を与え, 留数計算の例を考察する.

## 2 方程式系の具体的構成

$X$を複素平面 $\mathbf{C}$ の領域, $u(z)$ を $X$上の有理型関数で $z=\alpha_1,\ldots,\alpha_k$のみに極を持つものとする.

$$u(z)=\frac{h(z)}{(z-\alpha_1)^{n_1}\ldots(z-\alpha_k)^{n_k}}.$$

但し,$h(z)$ は $X$上の正則関数で $X$において零ではないものとする. ここで, $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$, $A_j=\{z\in X|z=\alpha_j\}$ とおく.

$u(z)$ の 極 $A_j$ $(j=1,\ldots,k)$ における主要部に注目し, $m=(u(z) \bmod \mathcal{O}_X)$ を考える. すると $m$ は $A$ に台を持つ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ の元を定める. $\mathcal{D}_X$を $X$上の線型微分作用素のなす層とする. このとき $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は左 $\mathcal{D}_X$加群の構造を持つ. $\mathcal{J}$ を $m$ を annihilate する左イデアルとする.i.e. $m=\{R\in\mathcal{D}_X|Rm=0\}$ . このとき, 次の定理が成り立つ.

**定理 1** 微分作用素

$$P=a(z)\frac{d}{dz}+b(z),$$
$$Q=(z-\alpha_1)^{n_1}\ldots(z-\alpha_k)^{n_k}$$

を考える. ここで, $a(z)=(\prod_j(z-\alpha_j))\frac{d}{dz}$ ,$b(z)=\sum_j n_j(\prod_{\ell\neq j}(z-\alpha_\ell))-\frac{h'(z)}{h(z)}\prod_j(z-\alpha_j)$. このとき, $P$ と $Q$ が $\mathcal{J}$を生成する. *i.e.*

$$\mathcal{J}=\langle P,Q\rangle.$$

さらに, 次の性質を満たす.

**補題 1**

$$PQ-QP=(\sum_j n_j(\prod_{\ell\neq j}(z-\alpha_\ell)))Q.$$

$$\prod_j(z-\alpha_j)^{n_j-1}P=(\frac{d}{dz}-\frac{h'(z)}{h(z)})Q.$$

つまり, $P$と $Q$ は involutory であり, イデアル $\mathcal{J}$のグレブナ基底となっている.

## 3 留数計算の例

微分作用素を用いた留数計算 II の定理 1 に基づき, 次の例を考察する.

複素平面上の関数 $u(z)=\frac{e^{2z}}{z^2(z-1)^3(z-3)}$ に対して, $m=(\frac{e^{2z}}{z^2(z-1)^3(z-3)}\ mod\ \mathcal{O}_X)$ とおく. 一階, 及び零階の微分作用素 $P,Q$

$$\begin{cases} P &= z(z-1)(z-3)\frac{d}{dz}+2(z-1)(z-3)+3z(z-3)+z(z-1)-2z(z-1)(z-3) \\ Q &= z^2(z-1)^3(z-3) \end{cases}$$

に対し, これらの随伴作用素を

$$\begin{cases} P^* &= -z(z-1)(z-3)\frac{d}{dz}+(z-1)(z-3)+2z(z-3)-2z(z-1)(z-3) \\ Q^* &= z^2(z-1)^3(z-3) \end{cases}$$

で定めることができる. このとき, $\mathcal{J}^*=\langle P^*,Q^*\rangle$ が成り立つ.

多項式 $q(z)=z^2(z-1)^3(z-3)$ に対して, $q(z)$ で生成される多項式環のイデアルを $I=\langle q(z)\rangle$ とおく. このとき, $\Omega_X/I\Omega_X$ は有限次元ベクトル空間の構造を持ち, $\dim(\Omega_X/I\Omega_X)=6$ である. 一方,$\dim\Omega_X/K=3$ である.

実際, 次の様に計算することができる.

$$\begin{aligned} P^*1 &= -2z^3+11z^2-16z+3 \\ P^*z &= -2z^4+10z^3-12z^2 \\ P^*z^2 &= -2z^5+9z^4-8z^3-3z^2 \\ P^*z^3 &= -4z^5+20z^4-26z^3+6z^2 \\ P^*z^4 &= -6z^5+31z^4-44z^3+15z^2 \\ P^*z^5 &= -8z^5+42z^4-62z^3+24z^2 \end{aligned}$$

よって,$P^*$の$\Omega_X/I\Omega_X$への作用は次の行列で表される.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & -12 & -3 & 6 & 15 & 24 \\ -2 & 10 & -8 & -26 & -44 & -62 \\ 0 & -2 & 9 & 20 & 31 & 42 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

この行列のランクは 3 であり, よって,$\dim(\Omega_X/K)=3$ を得る.

# 7 Distortion Inequalities for Ruscheweyh Derivatives

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
H. M. Srivastava (University of Victoria)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

which are analytic in the open unit disk $U$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which are univalent in $U$. Also we denote by $\mathcal{S}^*(\beta)$ and $\mathcal{K}(\beta)$ the sunclasses of $\mathcal{S}$ consisting of all stalike functions of order $\beta$, and of all convex functions of order $\beta$, respectively.

For functions

$$f_j(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,j} z^k \quad (j = 1, 2)$$

belonging to $\mathcal{A}$, the convolution (or Hadamard product) of $f_1(z)$ and $f_2(z)$ is defined by

$$(f_1 * f_2)(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,1} a_{k,2} z^k.$$

With the help of convolutions, the Ruscheweyh derivative of order $\alpha$ of $f(z) \in \mathcal{A}$ is defined by

$$\begin{aligned} D^\alpha f(z) &= \frac{z}{(1-z)^{\alpha+1}} * f(z) \quad (\alpha > -1) \\ &= z + \sum_{k=2}^{\infty} C(\alpha, k) a_k z^k, \end{aligned}$$

where

$$C(\alpha, k) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1}(j+\alpha)}{(k-1)!} \quad (k \geq 2).$$

In the present talk, we discuss the distortion inequalities for Ruscheweyh derivatives of order $\alpha$ of $f(z)$ which are in $\mathcal{S}^*(\beta)$, or in $K(\beta)$.

# 8 Partial Sums of Libera Integral Operator

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $A$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$$

that are analytic in the open unit disk $U=\{z\in C:|z|<1\}$. Let $S$ be the subclass of $A$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $U$. A function $f(z)$ in $A$ is said to be starlike of order $\alpha$ if it satisfies

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha \quad (z\in U)$$

for some $\alpha$ $(0\leq\alpha<1)$. We denote by $S^*(\alpha)$ the subclass of $A$ consisting of all such functions. Also we note that $S^*(0)=S^*$.

For $f(z)\in A$, Libera integral operator $F(z)$ is defined by

$$F(z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k+1}a_kz^k.$$

**Remark.** It is well-known that

(i) $f(z)\in S^*\Longrightarrow F(z)\in S^*$.

(ii) $f(z)\in K\Longrightarrow F(z)\in K$.

(iii) $f(z)=\frac{(1-z)^{-1+bi}-1}{1-bi}$ $(0<b\leq 1)\in S,\ F(z)\notin S$.

For Libera integral operator $F(z)$, partial sum of $F(z)$ :

$$S_n(z,F)=z+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k+1}a_kz^k \quad (n=2,3,4,\cdots).$$

Theorem 1. (Z. Wu (1982)).

$$f(z) \in S \Longrightarrow \begin{array}{l} S_2(z,F) \in S \text{ in } |z| < \frac{3}{8} \\ S_3(z,F) \in S \text{ in } |z| < \frac{3}{8} \end{array}$$

Theorem 2.

$$f(z) \in S \Longrightarrow \begin{array}{l} S_n(z,F) \in S^* \text{ in } |z| < \frac{3}{8} \\ \text{The number } \frac{3}{8} \text{ is sharp} \end{array}$$

# 9 Some Properties for Convolutions of Generalized Hypergeomeritic Functions

Ji A Kim (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

which are analytic in the open unit disk $U=\{z:|z|<1\}$. A function $f(z)$ in $\mathcal{A}$ is said to be a member of the class $R^t(A,B)$ if it satisfies

$$\left|\frac{f'(z)-1}{t(A-B)-B(f'(z)-1)}\right|<1 \quad (z\in U)$$

for some $t\in C\setminus\{0\}$, and for some real $A$ and $B$ with $-1\leq B<A\leq 1$.

Generalized hypergeometric function ${}_pF_q(z)$ is given by

$${}_pF_q(z)\equiv {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\cdots,a_p\\ \\ b_1,b_2,\cdots,b_q\end{matrix};z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Pi_{j=1}^{p}(a_j)_n}{\Pi_{i=1}^{q}(b_i)_n}\frac{z^n}{(1)_n}$$

where $(\lambda)_n$ denotes the Pochhammer symbol defined by

$$(\lambda)_n=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}=\begin{cases}1 & \text{if } n=0\\ \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1) & \text{if } n\in N=\{1,2,\cdots\}.\end{cases}$$

Theorem 1. *Let* $a_j$ $(j=1,2,\cdots,p)$ $\in C\setminus\{0\}$, $b_i$ $(i=1,2,\cdots,q)$ $\in C\setminus\{0\}$, $\mathrm{Re}b_i>0$ $(i=1,2,\cdots,q)$, *and* $\sum_{i=1}^{q}\mathrm{Re}b_i>\sum_{j=1}^{p}|a_j|$. *If* $f(z)\in R^t(A,B)$ *satisfies*

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_p|\\ \\ \mathrm{Re}b_1,\mathrm{Re}b_2,\cdots,\mathrm{Re}b_q\end{matrix};1\right)\leq\frac{1}{1+|B|}+1,$$

*then*

$$z\,{}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \cdots, a_p \\ \\ b_1, b_2, \cdots, b_q \end{matrix} ; z^k\right) * f(z) \in R^t(A,B),$$

*where* $k \in N$.

**Theorem 2.** *Let* $a_j$ $(j = 1,2,\cdots,p)$ $\in C \setminus \{0\}$, $b_i$ $(i = 1,2,\cdots,q)$ $\in C \setminus \{0\}$, $\mathrm{Re}b_i > 0$ $(i = 1,2,\cdots,q)$, *and* $\sum_{i=1}^{q} \mathrm{Re}b_i > \sum_{j=1}^{p} |a_j| + 1$. *If*

$$k\frac{\Pi_{j=1}^{p}|a_j|}{\Pi_{i=1}^{q}\mathrm{Re}b_i}\,{}_pF_q\left(\begin{matrix} |a_1|+1, |a_2|+1, \cdots, |a_p|+1 \\ \\ \mathrm{Re}b_1+1, \mathrm{Re}b_2+1, \cdots, \mathrm{Re}b_q+1 \end{matrix} ; 1\right)$$
$$+{}_pF_q\left(\begin{matrix} |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_p| \\ \\ \mathrm{Re}b_1, \mathrm{Re}b_2, \cdots, \mathrm{Re}b_q \end{matrix} ; 1\right) \leq \frac{(A-B)|t|}{1+|B|} + 1$$

*for some* $t \in C \setminus \{0\}$, $A \in R$, $B \in R$ *with* $-1 \leq B < A \leq 1$,
*then*

$$z\,{}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \cdots, a_p \\ \\ b_1, b_2, \cdots, b_q \end{matrix} ; z^k\right) \in R^t(A,B),$$

*where* $k \in N$.

10

# Univalent functions involving a certain fractional integral operator with positive coefficients

崔 宰豪　　福岡大・理

西郷 恵　　福岡大・理

Let $\mathcal{S}(n)$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (n \in \mathrm{N} := \{1, 2, \cdots\})$$

being analytic and univalent in the unit disk $E$. A function $f \in \mathcal{S}(n)$ is said to be in the subclass $\mathcal{S}^*(n, \alpha)$ $(0 \leq \alpha < 1)$, if $\mathrm{Re}(zf'(z)/f(z)) > \alpha$ for $z \in E$, and is said to be in the subclass $\mathcal{K}(n, \alpha)$ $(0 \leq \alpha < 1)$, if $\mathrm{Re}(1 + zf''/f'(z)) > \alpha$ for $z \in E$. $\mathcal{S}^*(1, 0) = \mathcal{S}^*$ and $\mathcal{K}(1, 0) = \mathcal{K}$ are the classes of starlike and convex functions in $\mathcal{S} = \mathcal{S}(1)$, respectively.

For $\delta > 1$ and $z \in E$, let $\mathcal{M}(n, \delta) = \{f \in \mathcal{S}(n) : \mathrm{Re}(zf'(z)/f(z)) < \delta\}$ and $\mathcal{L}(n, \delta) = \{f \in \mathcal{S}(n) : \mathrm{Re}(1 + zf''(z)/f'(z)) < \delta\}$. Further, let $\mathcal{V}(n)$ be the subclass of $\mathcal{S}(n)$ consisting of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| z^k \qquad (n \in \mathrm{N}).$$

Let $\mathcal{V}^*(n, \alpha) = \mathcal{S}^*(n, \alpha) \cap \mathcal{V}(n)$, $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}(n, \alpha) = \mathcal{K}(n, \alpha) \cap \mathcal{V}(n)$ and $\mathcal{V}(n, \delta) = \mathcal{M}(n, \delta) \cap \mathcal{V}(n)$, $\mathcal{U}(n, \delta) = \mathcal{L}(n, \delta) \cap \mathcal{V}(n)$.

In this report, we investigate the univalency and convexity of analytic functions with positive coefficients [3] which involve a certain fractional integral operator defined in [1], [2].

**Theorem 1.** *Let* $\alpha > 0, \beta, \eta \in \mathbf{R}$, $n \in \mathrm{N}$ *and* $1 < \delta \leq 4/3$ *and let* $\min\{\alpha + \eta, -\beta + \eta, -\beta\} > -2$ *and* $n \geq \beta(\alpha + \eta)/\alpha - 2$. *If* $f(z) \in \mathcal{V}(n)$ *satisfies*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k - \delta)|a_k| \leq \frac{(\delta - 1)(2 - \beta)_n (2 + \alpha + \eta)_n}{(2 - \beta + \eta)_n (2)_n},$$

*then* $\mathcal{J}_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} f(z) \in \mathcal{V}(n,\delta)$, *where* $(\lambda)_n$ *denotes the Pochhammer symbol* $(\lambda)_n = \Gamma(\lambda+n)/\Gamma(\lambda)$ $(n \in \mathbf{N})$.

**Theorem 2.** *Under the hypotheses of Theorem 1, if* $f(z) \in \mathcal{V}(n)$ *satisfies*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-\delta)|a_k| \leq \frac{(\delta-1)(2-\beta)_n(2+\alpha+\eta)_n}{(2-\beta+\eta)_n(2)_n},$$

*then* $\mathcal{J}_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} f(z) \in \mathcal{U}(n,\delta)$.

**Theorem 3.** *Under the hypotheses of Theorem 1, assume that* $f(z) \in \mathcal{V}(n,\delta)$ *satisfies*

$$h(z) * \left(\frac{1+\rho\sigma z}{1-\sigma z}\right) f(z) \neq 0 \qquad (z \in E \setminus \{0\})$$

*for each* $\rho$ $(|\rho| = 1)$ *and* $\sigma$ $(|\sigma| = 1)$, *where*

$$h(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2-\beta+\eta)_{k-1}(1)_k}{(2-\beta)_{k-1}(2+\alpha+\eta)_{k-1}} z^k \quad (n \in \mathbf{N})$$

*and "$*$" is the Hadamard product. Then* $\mathcal{J}_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} f(z) \in \mathcal{U}(n,\delta)$.


[1] S. Owa, M. Saigo and H.M. Srivastava, Some characterization theorem for starlike and convex functions involving a certain fractional integral operator, *J. Math. Anal. Appl.* **140**(1989), 419-426.

[2] M. Saigo, A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions, *Rep. College. General Ed. Kyushu Univ.* **11**(1978), 135-143.

[3] B.A. Uralegaddi, M.D. Ganigi and S.M. Sarangi, Univalent functions with positive coefficients, *Tamkang J. Math.* **25**(1994), 225-230.

# 11 Hardy-Orlicz Space $N^{\alpha}$ における等長写像について

飯田　安保 (Yasuo Iida)　　東北大学情報科学研究科

本講演では $N^{\alpha}$ から $N^{\alpha}$ への上への等長写像の結果について報告する。

**定義 1.**
$U = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$ とする。$U$ 上の正則関数 $f$ が

**1.** $\displaystyle \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in N$ とする。

**2.** $f \in N$ で、$\displaystyle \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{i\theta})| d\theta$ を満たすとき、 $f \in N_*$ とする。

**3.** $0 < p < \infty$ に対し $\displaystyle \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty$ を満たすとき、 $f \in H^p$ とする。

また、$U$ 上の有界正則関数全体を $H^{\infty}$ で表す。

$N$ を Nevanlinna class, $N_*$ を Smirnov class, $H^p$ $(0 < p \leq \infty)$ を Hardy spaces と呼ぶ。

これらの空間のあいだには、以下のような包含関係が成り立つ：

$$H^{\infty} \subset H^q \subset H^p \subset N_* \subset N \qquad (0 < p < q < \infty)$$

さて、$U$ 上の正則関数 $f$ が $\displaystyle \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \varphi\big(\log^+ |f(re^{i\theta})|\big) d\theta < +\infty$ ($\varphi$ : strongly convex) を満たすとき、 $f$ は Hardy-Orlicz space $H_{\varphi}$ に属するという。このとき、$N_* = \bigcup_{\varphi} \{H_{\varphi} \,|\, \varphi : \text{strongly convex}\}$ であることが知られている。そこで、1977 年に M . Stoll は $\alpha > 1$ に対し、 $\varphi(t) = t^{\alpha}$ $(t \geq 0)$ , $= 0$ $(t < 0)$ として、新しい空間 $N^{\alpha}$ を導入した：

**定義 2.**

$\alpha > 1$ とする。$U$ 上の正則関数 $f$ が

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \left[\log^+ |f(re^{i\theta})|\right]^{\alpha} d\theta < +\infty$$

を満たすとき、$f \in N^{\alpha}$ とする。

この $N^{\alpha}$ には、以下の特徴がある：

$$N^{\alpha} \subset N^{\beta} \ (1 < \beta < \alpha) \ , \ \bigcup_{p>0} H^p \subset \bigcap_{\alpha>1} N^{\alpha} \ , \ \bigcup_{\alpha>1} N^{\alpha} \subset N_*$$

さて、**定義 1.** の空間における等長写像についてはいろいろ研究されているが、F. Forelli は $p \neq 2$ に対し $A : H^p \to H^p$ が上への等長写像であるとき、$c \in T$, $\varphi(z) = \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z} b \quad (a \in U, b \in T)$ が存在して、

$$(Af)(z) = c\{\varphi'(z)\}^{\frac{1}{p}} f(\varphi(z)) \quad , \quad z \in U, f \in H^p$$

となることを示した。

また、K. Stephenson は $A : N_* \to N_*$ が上への等長写像であるとき 、$a, b \in T$ が存在して、

$$(Af)(z) = af(bz) \quad , \quad z \in U, f \in N_*$$

となることを示した。

そこで、望月望氏（東北大学情報科学）との研究により、$N^{\alpha}$ について以下のような結果を得た：

**定理**

$\alpha > 1$ とする。$A : N^{\alpha} \to N^{\alpha}$ が上への等長写像であるとき, $a, b \in T$ が存在して、

$$(Af)(z) = af(bz) \quad , \quad z \in U, f \in N^{\alpha}$$

となる。

## 参考文献


[F] F. Forelli , *The Isometries of $H^p$* , Can.J.Math. , **16** (1964) , 721-728

[Ste] K. Stephenson , *Isometrics of the Nevanlinna Class* , Indiana Univ. Math. J. , **26** (1977) , 307-324

[Sto] M. Stoll , *Mean Growth and Taylor Coefficients of Some Topological Algebras of Analytic Functions* , Ann. Polon. Math. , **35** (1977) ,139-158

12

# Painlevé 超越関数の値分布について

下村　俊　　　　　慶応大，理工

次の 3 つのタイプの Painlevé 方程式

$$\text{(I)} \qquad w'' = t + 6w^2 \qquad ('= d/dt),$$

$$\text{(II)} \qquad w'' = \alpha + tw + 2w^3,$$

$$\text{(IV)} \qquad w'' = \frac{w'^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4tw^2 + 2(t^2-\alpha)w + \frac{\beta}{w}$$

の任意の解は全平面で有理型である．それらの解のうちで admissible なものは Painlevé 超越関数と呼ばれるが，その値分布論的な性質は (I),(II) については H.Schubart, H.Wittich により，(IV) については N.Steinmetz により調べられている．一方他の Painlevé 方程式のうちで 3 番めと 5 番めのもの

$$\text{(III)} \qquad w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{t} + \frac{1}{t}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w},$$

$$\text{(V)} \qquad w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)w'^2 - \frac{w'}{t} + \frac{(w-1)^2}{t^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma\frac{w}{t} + \delta\frac{w(w+1)}{w-1}$$

は $t = 0, \infty$ を動かない特異点としており解は一般には一価ではない．したがってこのままでは有理型関数についての Nevanlinna 理論は適用できない．そこで (III) において

$$W = tw, \quad t^2 = e^z$$

とおき $W$ を改めて $w$ と書くと，

$$\text{(III}') \qquad w'' = \frac{w'^2}{w} + \alpha w^2 + \gamma w^3 + \beta e^z + \frac{\delta e^{2z}}{w} \qquad ('= d/dz),$$

また (V) については $t=e^z$ とおくと

$$(\mathrm{V}') \qquad w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right) w'^2 + (w-1)^2 \left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma e^z w + \delta e^{2z} \frac{w(w+1)}{w-1}$$

に変換される．方程式 (III′),(V′) の任意の解は $z$-平面上有理型である．本講演においてはそれらのうち admissible なものつまり

$$r/T(r,w) \to 0 \quad \text{n.e. as} \quad r \to \infty$$

（この条件により (III),(V) の代数関数解は除外される）を満たす解の値分布についての結果を報告する．

13

# On Holomorphic Curves with Maximal Deficiency Sum

TODA Nobushige    Nagoya Institute of Technology

**1. Introduction.** (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a nondegenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}.$$

Let $X$ be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ in $N$-subgeneral position such that $\#X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n \geq 2$ and we put

$$X(0) = \{\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) \in X : a_{n+1} = 0\}.$$

We denote by $T(r, f)$ the characteristic function of $f$ and by $\delta(\boldsymbol{a}, f)$ the deficiency of $\boldsymbol{a}$ with respect to $f$. The following Nochka's result is well-known( see [1]):

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1. \tag{0.1}$$

(b) We put

$$u(z) = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)|,$$

$$t(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\log u(re^{i\theta}) - \log u(e^{i\theta})\} d\theta$$

and

$$\Omega = \limsup_{r \to \infty} \frac{t(r, f)}{T(r, f)}.$$

Note that $0 \leq \Omega \leq 1$ ([2]).

The purpose of this talk is to give some results on $\delta(\boldsymbol{a}, f)$ when the equality holds in (0.1) and $N > n$ (cf. [3]).

**2. Result.** We suppose

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) = 2N - n + 1.$$

**Theorem 1.** If $\Omega < 1$, there are at least $(N - n)(n - 1)/n$ vectors $\boldsymbol{a}$ in $X - X(0)$ such that $\delta(\boldsymbol{a}, f) = 1$.

**Theorem 2.** If $\Omega < 1$ and if $\delta(\boldsymbol{e}_j, f) = 1$ $(j = 1, \cdots, n)$, then

$$\#\{\boldsymbol{a} \in X : \delta(\boldsymbol{a}, f) > 0\} \leq N(n + 1)$$

**Theorem 3.** If there are linearly independent, $n+1$ vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n+1}$ $\in X$ satisfying

$$\delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 1 \ (j = 1, \cdots, n+1),$$

then, for any $\boldsymbol{a} \in X$

$$\delta(\boldsymbol{a}, f) = 0 \qquad \text{or} \qquad 1$$

and

$$\#\{\boldsymbol{a} \in X : \delta(\boldsymbol{a}, f) = 1\} = 2N - n + 1.$$

**Corollary.** Suppose that either (i) or (ii) holds:
(i) There exist $N+1$ vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{N+1}$ in $X$ such that

$$\delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 1 \ (j = 1, \cdots, N+1).$$

(ii) $\Omega = 0$.
Then, for any $\boldsymbol{a} \in X$

$$\delta(\boldsymbol{a}, f) = 0 \qquad \text{or} \qquad 1$$

and

$$\#\{\boldsymbol{a} \in X : \delta(\boldsymbol{a}, f) = 1\} = 2N - n + 1.$$

**3. Application.** Let $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ be vertices of a convex $(n+1)$-gon in the complex plane. Let $f = [e^{\alpha_1 z}, \cdots, e^{\alpha_{n+1} z}]$ (see [4]). Then,

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) < 2N - n + 1.$$

**References.**

[1] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, VieWeg 1993.

[2] N. Toda: On the second fundamental theorem for degenerate holomorphic curves I and II. NIT Sem. Rep. on Math., No. 121(1994), pp.16 and No. 134(1996), pp.8.

[3] N. Toda: On the deficiency with respect to a holomorphic curve with maximal deficiency sum. Ibid., No. 142(1997), pp.8.

[4] H. Weyl and F. J. Weyl: Meromorphic functions and analytic curves. Ann. Math. Studies 12, Princeton 1943.

14

# ソボレフ関数の一意性定理について

水田　義弘　　　　　　　　広島大学総合科学部

$R^n$ の単位球 $B$ で定義されたソボレフ関数 $u$ が，条件

$$(1) \quad \int_{U_\varepsilon} |\mathrm{grad}\, u(x)|^p \, dx \leqq \varepsilon^p \varphi(\varepsilon), \qquad U_\varepsilon = \{x \in B : |u(x)| < \varepsilon\}$$

を満足している．ここに，$1 < p < \infty$，$\varphi$ は区間 $(0, \infty)$ 上の非増加関数で

$$(\varphi 1) \qquad C^{-1}\varphi(r) \leqq \varphi(r^2) \leqq C\varphi(r)\ ;$$

$$(\varphi 2) \qquad \int_0^1 [\varphi(r)]^{-1/(p-1)} \frac{dr}{r} = \infty\ .$$

**定理 1．** 上のソボレフ関数 $u$ が，境界値零を容量正の集合上でとれば，

$$u \equiv 0.$$

**注意.**

- Carleson [2] は，単位円内の正則関数 $u \not\equiv 0$ で，境界値零を容量正の集合上でとりディリクレ積分有限なものの存在を示した．
- Tsuji [6] は，単位円内の正則関数 $u$ で条件 (1) を $p = 2$，$\varphi(r) = 1$ で満たし，境界値零を容量正の集合上でとれば，$u \equiv 0$ となることを示した．
- Jenkins [3] は，単位円内の有理型関数 $u$ で条件 (1) を $p = 2$，$\varphi(r) = \log(1/r)$ で満たし，境界値零を容量正の集合上でとれば，$u \equiv 0$ となることを示した．

- Koskela [4] は，単位円内のソボレフ関数 $u$ で条件 (1) を $\varphi(r) = [\log(1/r)]^{p-1}$ で満たし，境界値零を容量正の集合上でとれば，$u \equiv 0$ となることを示した．

**定理 2．** 条件 $(\varphi 2)$ が満たされないとき，つまり，

$$(\varphi 3) \qquad \int_0^1 [\varphi(r)]^{-1/(p-1)} \frac{dr}{r} < \infty$$

のとき，(1) を満たす連続なソボレフ関数 $u$ で $B$ 上 $u > 0$，$\partial B$ 上 $u = 0$ となるものが存在する．

# 参考文献


[1] A. Beurling, Ensembles exceptionnels, Acta Math. 72 (1940), 1-13.

[2] L. Carleson, Sets of uniqueness for functions analytic in the unit disc, Acta Math. 87 (1952), 325-345.

[3] J. A. Jenkins, On a result of Beurling, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 1077-1080.

[4] P. Koskela, A radial uniqueness theorem for Sobolev functions, Bull. London Math. Soc. 27 (1995), 460-466.

[5] Y. Mizuta, Remarks on the results by Koskela concerning the radial uniqueness for Sobolev functions, to appear.

[6] M. Tsuji, Beurling's theorem on exceptional sets, Tôhoku Math. J. 2 (1950), 113-125.

15

# Note on poly-supertemperatures on a strip domain

下村勝孝　茨城大・理
鈴木紀明　名大・多元数理
西尾昌治　大阪市大・理

$n+1$ 次元 Euclid 空間の帯状領域 $D=\{(X,t);X\in\mathbf{R}^n,0<t<T\}$ 上の多重熱方程式

$$(-H)^m u := (\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_X)^m u = 0$$

の優解 "poly-supertemperature" について考察する.

**定義.** $D$ 上の下半連続関数 $u$ に対し,

$$u:\ \text{poly-supertemperature of degree } m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (-H)^m u \geq 0$$

と定義する.

帯状領域 $D$ 上の poly-supertemperature に対する平均値の性質は、

**命題.** $C^{2m-2}$-級の poly-supertemperature $u$ が条件

$$|H^k u(X,t)| \leq M e^{a|X|^2} \quad k=0,1,\cdots,m-1 \tag{1}$$

を満たせば, 任意の $0<c_1<\cdots<c_m<1/4a$ に対し

$$u \geq A[u,c_1,\cdots,c_m] \ \text{ on } \ \mathbf{R}^n\times(c_m,T) \tag{2}$$

が成り立つ. ここで,

$$A[u,c_1,\cdots,c_m]=\sum_{k=1}^{m}\prod_{j=1,j\neq k}^{m}\frac{c_j}{c_j-c_k}W[u,c_k],$$

$$W[u,c_k](X_0,t_0)=\int_{\mathbf{R}^n}W(X,c_k)u(X_0-X,t_0-c_k)dX$$

**定理１．** 命題と同じ条件のもと $u$ の平均値 $A[u, c_1, \cdots, c_m](X,t)$ は，各パラメータ $c_1, \cdots, c_m$ について単調減少で，

$$u(X,t) = \sup_{0<c_1<\cdots<c_m} A[u, c_1, \cdots, c_m](X,t)$$

である．

また逆に

**定理２．** 次の (3) を満たす Borel 可測関数 $u$ が任意の $0 < c_1 < \cdots < c_m < 1/4a$ に対し (2) を満たせば，$u$ の下半連続化

$$\hat{u}(X,t) := \min\{u(X,t), \liminf_{(Y,s)\to(X,t)} u(Y,s)\}$$

は poly-supertemperature で，$\hat{u} = u$ a.e. である．

$$|u(X,t)| \le Me^{a|X|^2} \tag{3}$$

最後に，平均値の定理の応用として次の最小値の原理がえられる．

**定理３．** $p$ を $1 \le p \le m$ なる整数 $t_1, \cdots, t_m$ を $T > t_1 > \cdots > t_m > 0$ なるものとする．$a \le 1/4T$ なる $a$ で (1) をみたす $C^{2m-2}$-級 poly-supertemperature $u$ が

$$(-1)^{k-1}u(Y, t_k) \ge 0, \quad \forall k = 1, \cdots, p, \text{ and } \forall Y \in \mathbf{R}^n$$

$$(-1)^{p-1}(-H)^k u(Y, t_p) \ge 0, \quad \forall k = 1, \cdots, m-p \text{ and } \forall Y \in \mathbf{R}^n$$

をみたせば $\mathbf{R}^n \times (t_1, T)$ 上 $u \ge 0$ である．さらに，ある $(X_0, t_0) \in \mathbf{R}^n \times (t_1, T)$ に対し $u(X_0, t_0) = 0$ となれば $\mathbf{R}^n \times (t_1, t_0)$ 上 $u = 0$ である．

**系．** 定理３の条件をみたす poly-temperature $u$ が，ある $(X_0, t_0) \in \mathbf{R}^n \times (t_1, T)$ に対し $u(X_0, t_0) = 0$ となれば $D$ 上 $u = 0$ である．

# 16　擬等距離写像の存在とロイデン完閉化

中　井　三　留　　大同工業大学

$R_i$ $(i=1,2)$ を $d$ 次元 $(d \geq 2)$Riemann 多様体で，可符号かつ可算とし，$\rho_i$を $R_i$上の測地距離とする，但し $x, y$が $R_i$の異なる成分に入るときは$\rho_i(x,y) = \infty$ とする．$f : R_1 \to R_2$が**擬等距離写像**であるとは，まず位相写像であって，或 $1 \leq K < \infty$ に対し，全ての $x, y \in R_1$について

$$K^{-1}\rho_1(x,y) \leq \rho_2(f(x), f(y)) \leq K\rho_1(x,y)$$

が成立することであるとする．$R_1$から $R_2$への位相写像 $f$と完閉集合 $E \subset R_1$があって，$f|R_1 \setminus E :\ R_1 \setminus E \to R_2 \setminus f(E)$ が擬等距離写像となるとき，$R_1$と $R_2$は**殆擬等距離同値**と言うことにする．同一趣旨で，擬等距離写像は擬等角写像となるのでより広い概念である，**殆擬等角同値**は上の定義に於いて擬等距離とあるところを擬等角で置き換えることにより得られる．さて $R_i$の指数 $p$ のロイデン完閉化を $(R_i)^*_p$と記すとき $(1 < p < \infty)$，1982 年我々（[6]，又 [4] も参照）は

**定理 A.** $(R_1)^*_d$**と** $(R_2)^*_d$**が同相となる為の必要十分条件は** $R_1$**と** $R_2$**が殆擬等角同値となることである．**

を示した．指数 $d$ の代わりに指数 $p$ が $1 < p < d$ の時どうなるかは，他の状況（[3],[2]）から容易に予想は出来たが，長年証明は出来なかった．最近擬等距離写像の変分容量に依る或特徴付けを得て（[5]，又 [1] も参照）やっと次の結果が示されたことを報告する：

**定理．** $1 < p < d$ **のとき，** $(R_1)_p^*$ **と** $(R_2)_p^*$ **が同相となる為の必要十分条件は** $R_1$ **と** $R_2$ **が殆擬等距離同値となることである．**

この結果との関連に於いて次の問題は非常に重要であるが大変難しいと思われる．擬等距離（又は等角）同値なら無論殆擬等距離（又は等角）同値となるが，この逆は成立するか？　次元 d=2 であるか，又は一般次元 $d \geq 2$ ながら $R_1$ が単位球であるとき，殆擬等角同値ならば必然的に擬等角同値となること以外は一切不明である．

## 参 照 文 献


[ 1 ] F. W. GEHRING: *Lipschitz mappings and the p-capacity of rings in n-space*, Annals of Mathematics Studies, **66**(1971), 175-193.

[ 2 ] J. LELONG-FERRAND: *Étude d'une classe d'applications liée à des homomorphismes d'algebra de fonctions, et généralisant les quasi conformes*, Duke Math. J., **40**(1973), 163-186.

[ 3 ] L. G. LEWIS: *Quasiconformal mappings and Royden algebras in space*, Trans. Amer. Math. Soc., **158**(1971), 481-492.

[ 4 ] M. NAKAI: *Existence of quasiconformal mappings between Riemann surfaces*, Hokkaido Math. J., **10**(1981) Sp., 525-530.

[ 5 ] M. NAKAI: *Quasiisometric mappings and the variational capacity*, Suurikenkoukyuroku (to appear).

[ 6 ] M. NAKAI AND H. TANAKA: *Existence of quasiconformal mappings between Riemannian manifolds*, Kodai Math. J., **5**(1982), 122-131.

17

# 円板の擬等角写像について

柴田敬一　国際自然科学研

$\Delta_z = \{z \mid |z| < 1\}$, $\Delta_w = \{w \mid |w| < 1\}$.

$w = f(z)$ が開円板 $\Delta_z$ から開円板 $\Delta_w$ への擬等角写像であるとき，この $f(z)$ は $\partial\Delta_z$ から $\partial\Delta_w$ への向きを保つ homeomorphism を誘導することが基本的に知られている。同じ假定から円板内部及び境界相互間の対応に関してより多くの情報が得られることを報告する。

本講演に直接のかかわりをもつ論文は次の通りである。

[1] A.Beurling and L.Ahlfors: The boundary correspondence under quasiconformal mappings, Acta Math. 96 (1956), 125 -142.

[2] D.Partyka and K.Sakan: Harmonic and quasiconformal mappings which agree on the boundary, Ann. Universitatis Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia 49 (1995), 159 - 171.

18

# 極値平行截線写像関数の単葉な複素線形結合

柴　雅　和　　　　　　　　広島大学工学部

複素平面上の任意の領域$G$とその内点$\zeta$を止めるとき，次の性質をもつ２つの関数$f_0, f_1$の存在は既に古典的である：

- $f_j$は$G$上で単葉$(j = 1, 2)$.
- $f_j$は点$\zeta$を除けば正則$(j = 1, 2)$.
- $f_j$は点$\zeta$の周りでLaurent展開

$$f_j(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \kappa_{f_j}(z-\zeta) + \cdots$$

  をもつ$(j = 1, 2;\ \kappa_{f_j} \in \mathbb{C})$.
- $j = 0, 1$いずれについても$\hat{\mathbb{C}} \setminus f_j(G)$はLebesgue測度0であって，その各連結成分は$j = 0$とき実軸に，また$j = 1$ときは虚軸に，それぞれ平行な線分(１点に退化する場合を含む)である.

これらの関数の個別的な性質あるいは両者の凸結合の性質等については，古くから詳しく知られている．最も典型的なものは

**定理** (Grunsky, Schiffer). 関数 $\dfrac{1}{2}(f_0 + f_1)$ は$G$上の単葉関数である.

最近，米谷文男氏はより一般な形の結合

$$c_0 f_0 + c_1 f_1, \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

の単葉性を問題にしておられる．容易に分かるように，$c_0, c_1$のいずれかが0の場合には問題は無意味になるから，たとえば$c_1$は0でないと仮

定してよく，さらに$c_0+c_1=0$の場合には単葉でないことが分かっているからこの場合も最初から排除しておいてよい．その結果，この問題は次の形に書ける：関数 $f_1-tf_0$ ($t\in\mathbb{C}$) が単葉であるための条件($t$の範囲)を見いだせ．この問題は，現在までのところ$G$の有限連結性を仮定して，次の状況にあると聞く：上のような$t$の全体は左半平面である．また，この種の結果は(妥当性が信じられているにも拘わらず) 少なくとも公にされた文献には見あたらないというC. FitzGerald氏のコメントもあるようなので，一般な領域に対する解を以下に与える．ここで与える方法は，非常に単純であり，また同時に，より一般にな場合——互いに異なる傾き(直交するとは限らない)をもつ2つの極値平行截線写像の複素線形結合の場合—— への自然な拡張を可能ならしめる．

**定理**．任意の平面領域の水平および垂直極値平行截線写像関数$f_0, f_1$と複素数 $t$ に対して，$f_1-tf_0$ が単葉であるための必要十分条件は，$\mathrm{Re}\, t\le 0$ が成り立つことである．

証明のためには，Grötzschに由来する次の結果が本質的である．

**定理**([2])．与えられた$G$と$\zeta$の組に対して定まるある閉円板$\mathfrak{K}$があって，$G$上の関数$f$がこのアブストラクトの冒頭に挙げた条件のうちの最初の3つを満たすための必要十分条件は，$\kappa_f$が$\mathfrak{K}$に属することである．

この定理を用いれば，Möbius変換の基本的な性質により，求める結果が忽ち示される．より具体的な方法ならびに一般の場合についても言及する予定である．

## References

[1] Maitani, F.: *Preprint.*

[2] Shiba, M: The euclidean, hyperbolic, and spherical spans of an open Riemann surface of low genus and the related area theorems, Kodai Math. J. **16**(1993), 118-137.

# 19 On the equivalence problem of cyclic branched coverings of the Riemann sphere

中條 直勇樹　　埼玉大・理

我々は、Riemann 球面の巡回分岐被覆の同値問題に関して以下の結果を得た.

**Main Theorem.** $p$ を素数、$m$ を整数とする. 次の方程式で定義される二つのコンパクト Riemann 面 $C$ と $C'$ を考える.

$$C \ : \ y^p = \prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{u_i},$$

$$C' \ : \ y^p = \prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)^{v_j}.$$

ここに $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ は互いに異なる複素数、$u_1,\dots,u_m$ は $1 \le u_i < p$ と $u_1+\cdots+u_m \equiv 0 \pmod p$ をみたす整数とする. 同じく $\beta_1,\dots,\beta_m$ は互いに異なる複素数、$v_1,\dots,v_m$ は $1 \le v_j < p$ と $v_1+\cdots+v_m \equiv 0 \pmod p$ をみたす整数とする. $C$ と $C'$ は、同じ種数 $g=(p-1)(m-2)/2$ を持つ. $g \ge 2$ と仮定する. このとき、次は同値である.

(i) コンパクト Riemann 面 $C$ と $C'$ とは等角同値.

(ii) 一次分数変換 $T$ と、整数 $k$ が存在して

(a) $T(\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}) = \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$,

(b) $1 \le k < p$ かつ、$T(\alpha_i)=\beta_j$ のとき $k\,u_i \equiv v_j \pmod p$.

$g \ge 2$ なる $p, m$ は以下のとおりである. (i) $p=2$, $m \ge 6$, $m$ : even, (ii) $p=3$, $m \ge 4$, (iii) $p \ge 5$, $m \ge 3$. 以前に、Kato [5] は Main Theorem の主張を次の場合に証明した. (i′) $p=3$, $m \ge 6$, (ii′) $p=5$, $m=5, 7$, $m \ge 10$, (iii′) $p=7$, $m=5, 7$, $m \ge 14$, (iv′) $p \ge 11$, $m \ge 3$. 我々の方法は、Kato のものと異なっている.

## References

[1] Broughton, S. A., Classifying finite group actions on surfaces of low genus, J. Pure Appl. Algebra **69** (1990), 233-270.

[2] Farkas, H. M. and Kra, I., Riemann surfaces, Graduate Texts in Mathematics **71**, Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin (1980).

[3] González-Diez, G., On prime Galois coverings of the Riemann sphere, Ann. Mat. Pura Appl. **168** (1995), 1-15.

[4] Ishii, N., Remarks on $d$-gonal curves, Tsukuba J. Math. **19** (1995), 329-345.

[5] Kato, T., Conformal equivalence of compact Riemann surfaces, Japan J. Math. **7** (1981), 281-289.

[6] Namba, M., Equivalence problem and automorphism groups of certain compact Riemann surfaces, Tsukuba J. Math. **5** (1981), 319-338.

[7] Riera, G. and Rodríguez, R. E., Riemann surfaces and abelian varieties with an automorphism of prime order, Duke Math. J. **69** (1993), 199-217.

[8] Sakurai, K. and Suzuki, M., Equivalence problem and automorphisms of some abelian branched coverings of the Riemann sphere, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **42** (1988), 145-152.

[9] Shih, K., On the construction of Galois extentions of function fields and number fields, Math. Ann., **207** (1974), 99-120.

20

# Fermat 曲線上の Weierstrass 点について

渡邉 清 (神大·理)

種数 $g$ が 2 以上のコンパクトリーマン面上には、*Weierstrass* 点と呼ばれるその点でのみ位数 $g$ 以下の極を持つ有理型関数が有限個存在することが知られている。この講演では、Fermat 曲線

$$F_n = \{(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2) \in \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C}) | \zeta_0^n + \zeta_1^n + \zeta_2^n = 0\}$$

$(n \geq 4)$ 上の Weierstrass 点を調べたい。１９５０年に Hasse は、次の $3n$ 個の点

$$(1, 0, \beta) \quad , \quad (0, 1, \beta) \quad , \quad (1, \beta, 0) \quad , \quad \beta^n = -1$$

が、Weierstrass 点であり、その weight は

$$\frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n+4)$$

であることを示した。その後、Leopoldt は Weierstrass 点についての一般的定理を使って、次の $3n^2$個の新しい $F_n$ 上の Weierstrass 点

$$(1, \alpha, \sqrt[n]{2}\beta) \quad , \quad (1, \sqrt[n]{2}\beta, \alpha) \quad , \quad (1, \frac{\beta}{\sqrt[n]{2}}, \frac{\alpha\beta}{\sqrt[n]{2}})$$

を見い出した。ただし、$\alpha$ は 1 の $n$ 乗根、$\beta$ は$-1$ の $n$ 乗根である。

ここでは、$F_n$ 上の Weierstrass 点を求めるための Wronskian の形を決定し、$F_9$ 上の Leopoldt の Weierstrass 点の weight は 2 以上の偶数であることを示す。すなわち、次の結果を示す。

$F_n$ の種数 $g$ は $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ で与えられるが、その $g$個の正則 1 型式の空間の基底を $x^i y^j \dfrac{dx}{y^{n-1}} (i, j \geq 0, i+j \leq n-3)$ とする。ただし、$U_i = \{(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2) \in \boldsymbol{P}^2(\boldsymbol{C}) | \zeta_i \neq 0\} (i = 0, 1, 2)$ とし、$U_0$ で $x = \dfrac{\zeta_1}{\zeta_0}, y = \dfrac{\zeta_2}{\zeta_0}$ と置く。このとき、$U_0 \cap U_2$ 上の $F_n (n \geq 5)$ のロンスキャン $W(x)$ は次式で与えられる。

$$W(x) = \frac{C}{y^m} x^{w_0} (x^n - 1)^i (x^n + 2)^i (x^n + \frac{1}{2})^i g(x),$$

$$g(x) = \Pi_{j=1}^N (x^n - b_j)(x^n - \frac{1}{b_j})(x^n + \frac{b_j}{1+b_j})$$
$$\cdot (x^n + 1 + b_j)(x^n + \frac{1}{1+b_j})(x^n + \frac{1+b_j}{b_j}).$$

ここに、$C$ は定数、$b_j$ は 0 や 1 でない複素数、

$$w_0 = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n+4),$$

$$m = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n^2-13n+20)$$

である。さらに、

$$L := \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

と置くとき、$L$ を $6n$ が割り切れば、$i=2$ で $N = \dfrac{L}{6n} - 1$ である。また、$L$ を $6n$ が割り切らなければ、$i=1$ で $N = \dfrac{L-3n}{6n}$ である。

この結果より、次のことが分かる。

$F_n (n \geq 5)$ 上の Weierstrass 点

$$(1, \alpha, \sqrt[n]{2}\beta) \quad , \quad (1, \sqrt[n]{2}\beta, \alpha) \quad , \quad (1, \frac{\beta}{\sqrt[n]{2}}, \frac{\alpha\beta}{\sqrt[n]{2}})$$

のウエイトを $\mu$ とするとき、$L$ を $6n$ が割り切れば、$\mu$は 2 以上の偶数であり、そうでなければ、$\mu$は奇数である。

そこで、例えば $F_9$ を調べると、

$$L = \frac{1}{8}\cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5, \qquad \frac{L}{6 \cdot 9} = 35$$

となり、Weierstrass 点 $(1, -\sqrt[9]{2}, 1)$ のウエイトは、2 以上であることが分かる。

## 参考文献

D.E.Rohrlich : Some Remarks on Weierstrass Points, Number Theory Related to Fermat's Last Theorem, PM26, Birkhauser, 1982, 71-78.

21

# ON THE BOTTOM OF THE SPECTRUM OF AN OPEN RIEMANN SURFACE

須川 敏幸　　(京都大学大学院・理学研究科)

この講演では双曲的リーマン面の（定曲率$-4$の）双曲計量に関する（正値）Laplace-Beltrami 作用素に関するスペクトルの bottom に関する結果について述べる。一般次元の Riemann 多様体上の Laplace-Beltrami 作用素のスペクトルについては少なくとも幾何学的有限，特に体積有限な場合にはよく調べられており、$n>2$ の場合と $n=2$ の場合とではかなり様子が異なることが知られている。例えば、$n>2$ の双曲多様体の場合は bottom は体積の逆数の定数倍で下から評価される。一方、$n=2$ で双曲的リーマン面の場合は体積有限ならば bottom は 0 である。

一方、Fernández, Rodríguez [1], [2] によって平面領域 $R$が一様完全な境界を持つとき（つまり $R$が modulated であるとき），その面のスペクトルの bottom $b(R)$ が正であることが示された。実際には、このような面については双曲計量に関する等周不等式

$$\sup_D \frac{A_R(D)}{S_R(\partial D)} =: h(R) < +\infty$$

を示し（ただし、ここに上限は $R$の相対コンパクトな滑らかな境界を持つ部分領域 $D$ にわたって取り、$A_R(D), S_R(\partial D)$ はそれぞれ $D$の双曲面積、及び$\partial D$の双曲的長さを表す)、Cheeger の不等式

$$\frac{1}{16} \le b(R)h(R)^2$$

を用いて示された。（逆に、$b(R)h(R) < 3/4$ であることも知られている。）この定理は次のような形に一般化出来ることを報告したい。

**定理.** $R$**が非コンパクトで** modulated **なリーマン面で有限種数** $g$**を持つとする。このとき、**

$$h(R) \le 1 + \frac{(2g+1)\pi}{L_R}$$

**が成り立つ。ここに** $L_R$**は** $R$**内の可縮でない閉曲線の双曲的長さの下限である。従って、特に** $b(R) > 0$ **が成り立つ。**

ここで$R$が modulated であるとは$L_R > 0$であることである。双曲的リーマン面$R$の収束指数$\delta(R)$は$R$の単位円板上の Fuchs 群モデルを$\Gamma$とするとき

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |1 - \gamma(0)|^{\delta} < \infty$$

を満たす$\delta > 0$の下限として定義される。これはよく知られているように$\Gamma$の conical limit set の Hausdorff 次元に等しい。この$R$の収束指数$\delta(R)$との$b(R)$の間には次のような関係が知られている。(Elstrodt-Patterson-Sullivan の定理)

$$b(R) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{if } 0 \le \delta(R) \le \frac{1}{2}, \\ \delta(R)(1 - \delta(R)) & \text{if } \frac{1}{2} \le \delta(R) \le 1. \end{cases}$$

このことから、次の系が従う。

**系. 先の定理と同じ仮定の下で、$\delta(R) < 1$が成り立つ。**

**注意**なお、種数が無限大の場合には modulated であっても$b(R) = 0$であるものやそうでないものもあり、これには面の組み合わせ的な条件が絡んでくるようである。

## REFERENCES

1. FERNÁNDEZ, J. L. Domains with strong barrier, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **5** (1989), 47–65.
2. FERNÁNDEZ, J. L. AND RODRÍGUEZ, J. M. The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **15** (1990), 165–183.

# THE METRIC GEOMETRY OF HYPERBOLIC RIEMANN ORBIFOLDS

須川 敏幸　　(京都大学大学院・理学研究科)

単位円板$\Delta$に作用するある Fuchs 群$\Gamma$を用いて$X = \Delta/\Gamma$と表せる orbifold を双曲的 Riemann orbifold と呼ぶ。このような対象の取り扱いについては例えば[2] を参照されたい。$X$には$\Delta$の双曲計量$\rho_\Delta = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$から射影された計量$\rho_X$が入るがこれを $X$ の双曲計量と呼ぶ。これは分岐点において singularity を持つが長さを測ったりする分には差し支えないことに注意しておく。$X^\circ = X \setminus \mathrm{branch}(X)$ として$\Delta^\circ = \pi^{-1}(X^\circ)$ とおく。(ここに$\pi : \Delta \to X$は自然射影とする。) $X^\circ$は通常の双曲的リーマン面の構造を持っていることに注意してほしい。この講演では$X$における幾何学と$X^\circ$におけるそれとの比較について問題にしたい。

例えば、$X$上の可積分な正則 2 次微分全体のなす Banach 空間を $A_2(X)$ とし、双曲的に有界な正則 2 次微分全体のなす Banach 空間を $B_2(X)$ と書くことにする。よく知られているように一般に $B_2(X) = A_2(X)^*$であり、また $A_2(X) \subset B_2(X)$ であるための必要十分条件は $L_X^* > 0$ である ([3])。ここに $L_X^*$は$\Gamma$の双曲的元によって cover される $X$内の閉曲線の双曲的長さの下限によって定義される。このような面を Lehner 型であると呼ぼう。このとき例えば閉グラフ定理から

$$\kappa(X) = \sup_{\varphi \in A_2(X)} \frac{\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_1}$$

が有限となるが、この定数については次のことが成り立つ。

**定理.**

$$\kappa(X^\circ) \le \kappa(X) \le 3\kappa(X^\circ).$$

これは Bers-Greenberg の isomorphism theorem [1] などから従う。標準的に $A_2(X) = A_2(X^\circ)$ であるからこの結果は $B_2(X) = B_2(X^\circ)$ であることも含んでいる。このことから、$L_X^*$及び $L_{X^\circ}^*$についても何らかの関係が得られると期待されるが、この講演ではさらにこの定数に関する評価についても論じたい。また、この応用についても述べる予定である。

## References

1. Bers, L. and Greenberg, L. Isomorphisms between Teichmüller spaces. Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann. of Math. Studies, no. 66 (1971).
2. McMullen, C. *Complex Dynamics and Renormalization*. Ann. of Math. Studies, Princeton (1994).
3. Niebur, D. and Sheingorn, M. Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded. *Ann. of Math.*, **106** (1977), 239–258.

22

# On the existance of certain quadratic differentials on four times punctured spheres and once punctured tori

宮地秀樹　　大阪市立大学理学研究科

リーマン面 $R := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, \ldots, p_4\}$ に対して、$R$ 内の単純閉曲線 $\gamma$ で $\{p_1, p_2\}$, $\{p_3, p_4\}$ を分離するものをとる。さらに、$\alpha > 0$, $l_1, \ldots, l_4 \geq 0$ となる数を任意にとって固定する。このとき次の定理が成立する。

[定理]　$\mathrm{mod}_R(\gamma) > M(l_1, l_2, \alpha) + M(l_3, l_4, \alpha) + \log 2/\pi$ であれば、次を満たす $R$ 上の正則二次微分 $\varphi$ が一意的に存在する。

(1)　$\varphi$ の正則な水平軌道はすべて閉じている。

(2)　$\varphi$ は各 $p_i$ において $\{-l_i^2/(4\pi^2 z^2) + \cdots\}dz^2$ と表現される。

(3)　$\varphi$ は $\gamma$ とホモトープな水平閉軌道を持ち、その $\varphi$–長さは $\alpha$ である。

ここで関数 $M(a, b, c)$ は次のように定義されるものである：

$(0, 3)$ 型のリーマン面 $S := \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ と、$S$ 内の部分集合 $U$ を $\mathbb{C}$ から区間 $[-1, 1]$ を除いたものとする。$S$ 上に正則二次微分 $\psi$ で $-1, 1, \infty$ で高々二位の極を持つもので、そのローラン展開の $z^{-2}$ の係数が各々$-a^2/4\pi^2$, $-b^2/4\pi^2$, $-c^2/4\pi^2$ となるものをとる。このとき $\psi$ は $\infty$ の近傍で $\infty$ の周りを回る閉軌道を持つことが知られている。$\psi$ の $\infty$ に関する特性円環を $V$、そして $V$ から $\{0 < |z| < 1\}$ への等角写像で $\infty$ を $0$ に対応させるものを $z$ とする。このとき

$M(a,b,c)$ は、$U$ の、$\infty$ の座標近傍系 $(V,z)$ に関する reduced modulus で定義される：

$$M(a,b,c) := \lim_{r\to 0}\{\mathrm{mod}(U\setminus\{|z(p)|\le r\})+\log r/2\pi\}$$

この定理を証明するために、次に定義する空間 $\mathcal{D}_{0,4}$ を準備する：

$(0,4)$ 型のリーマン面 $S$ とその上の単純閉曲線 $\sigma$ で自明でなくかつ穴 (puncture) にホモトピックをでないものをとる。$S$ の穴 $p_i$ $(i=1,\dots,4)$ に $\{p_1,p_2\}$, $\{p_3,p_4\}$ が互いに $S\setminus\sigma$ の異なるの成分に入る様に番号付ける。この時、組 $(S,\sigma,\{p_1,p_3\})$ を考える。$(S_i,\sigma_i,\{p_1^i,p_3^i\})$ $(i=1,2)$ が同値であるとは、$h$ なる $S_1$ から $S_2$ への双正則写像で $h(\sigma_1)$ は $\sigma_2$ にホモトピックで、$h(p_1^1)=p_1^2$, $h(p_3^1)=p_3^2$ が成立する時にいう。この同値類の集合を $\mathcal{D}_{0,4}$ と書く。この集合には自然な複素構造が入る。

証明の方針は、与えられた $\alpha>0$, $l_j\ge 0$ に対して、集合 $\{[S,\sigma,\{p_1,p_3\}]\mid \{p_i\},\sigma$に対して上の (1) から (3) を満たす正則二次微分が $S$ 上に存在する $\}$ を特徴付け、それの $\mathcal{D}_{0,4}$ 内での分布を調べることである。

$(1,1)$ 型のリーマン面に対しても同様な定理が成り立つ。

# 23 クライン群の幾何学的収束と極限集合のハウスドルフ次元

松崎克彦　　お茶の水女子大学理学部

クライン群 $\Gamma$ の変形による極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ のハウスドルフ次元 $\dim\Lambda(\Gamma)$ の変化を考える。Bishop-Jones は代数的収束のもとでの $\dim\Lambda(\Gamma)$ の下半連続性を示した。すなわち、$\Gamma_0$ を有限生成群とし、クライン群への表現の列 $\theta_n:\Gamma_0\to\Gamma_n$ が $\theta_\infty:\Gamma_0\to\Gamma_\infty$ に収束するならば

$$\liminf_{n\to\infty}\dim\Lambda(\Gamma_n)\geqq\dim\Lambda(\Gamma_\infty)$$

が成り立つ。

しかし、代数的収束は必ずしもクライン群の幾何学的性質（特に対応する双曲多様体）の収束を意味しない。極限集合の変化はむしろクライン群の幾何学的変形に依存していると想像できるので、上の問題を幾何学的収束のもとで考える。ここでクライン群の列 $\{\Gamma_n\}$ がクライン群 $G$ に幾何学的に収束するとは、次の (i) (ii) をみたすことである。

(i) $\forall g\in G$ に対して $\exists\gamma_n\in\Gamma_n$ s.t. $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=g$

(ii) $\bigcup \Gamma_n$ の集積点は $G$ に属する。

<u>定理</u>

$G$ を有限生成非初等的純斜航的クライン群とし、クライン群の列 $\{\Gamma_n\}$ が $G$ に幾何学的に収束するならば

$$\lim_{n\to\infty} \dim \Lambda(\Gamma_n) = \dim \Lambda(G)$$

注意： $G$ に対する仮定の有限生成も、非初等的も落とすことはできない。反例がある。

代数的に収束するクライン群の列は幾何学的に収束する部分列を含むので、定理の系として、代数的収束での $\dim \Lambda(\Gamma)$ の不連続性が起こる原因を次のように理解することができる。

<u>系</u>

有限生成非初等的クライン群の列 $\{\Gamma_n\}$ が $\Gamma_\infty$ に代数的に収束していて、

$$\lim_{n\to\infty} \dim \Lambda(\Gamma_n) \overset{\geq 1}{\cancel{> \dim \Lambda(\Gamma_\infty)}}$$

となっているならば、$\Gamma_\infty$ は幾何学的有限であり、$\{\Gamma_n\}$ は $\Gamma_\infty$ を真に含むクライン群 $G$ に幾何学的に収束するような部分列をもつ。

24

# Jørgensen's number for the elementary Kleinian groups

Hiroki SATO
Department of Mathematics
Shizuoka University

In this talk we give Jørgensen's number for the elementary Kleinian groups.

DEFINITION 1. A subgroup $G$ of Möb is said to be *elementary* if the number of limit points of $G$ is finite.

DEFINITION 2. Let $G = \langle A, B\rangle$ be a marked two-generator subgroup of Möb. We call

$$J(\langle A, B\rangle) := |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2|$$

*Jørgensen's number* for $G = \langle A, B\rangle$. The Jørgensen's number $\| J(G) \|$ for a subgroup $G$ of Möb is defined as follows:

$$\| J(G) \| := \inf\{J(\langle A, B\rangle) | \langle A, B\rangle \subset G, A^m \neq B^n \ \ (m, n \in \mathbf{Z})\}.$$

Then we have the following.

THEOREM. (i) O: *the Finite groups.*

(1) $\mathrm{O}_3$: *$G = \langle S, T\rangle$ is the dihedral group, where $S(z) = e^{2\pi i/n}z$ and $T(z) = 1/z$. Then $\| J(G) \| = 8\sin^2 \pi/n$.*

(2) $\mathrm{O}_4$: *$G$ is the tetrahedral group. Then $\| J(G) \| = 5$.*

(3) $\mathrm{O}_5$: *$G$ is the octahedral group. Then $\| J(G) \| = 3$.*

(4) $\mathrm{O}_6$: *$G$ is the icosahedral group. Then $\| J(G) \| = 4 - \sqrt{5}$.*

(ii) I: *Elementary Kleinian groups with one limit point. For every group $G$ in this type $\| J(G) \| = 0$.*

(iii) II: *Elementary Kleinian groups with two limit points.*

(1) $\mathrm{II}_2$: $G = \langle A, B\rangle$, *where* $A(z) = Kz$ $(|K| \neq 1)$ *and* $B(z) = e^{2\pi i/n}z$ $(n \geq 2)$. *Then* $\| J(G) \| = \min\{4\sin^2 \pi/n, (|K|^{1/2} - |K|^{-1/2})^2\}$.

(2) $\mathrm{II}_3$: $G = \langle A, C\rangle$, *where* $A(z) = Kz$ $(|K| \neq 1)$ *and* $C(z) = 1/z$. *Then* $\| J(G) \| = \min\{4 + (|K|^{1/2} - |K|^{-1/2})^2, 2(|K|^{1/2} - |K|^{-1/2})^2\}$.

$\rho$ $1 \leqq \rho \leqq 2\log 3/\log|K|$ [illegible] $\rho$ $\rho$ $\rho$

(3) $\mathrm{II}_4$: $G = \langle A, B, C\rangle$, *where* $A(z) = Kz$ $(|K| \neq 1)$, $B(z) = e^{2\pi i/n}z$ $(n \geq 2)$ *and* $C(z) = 1/z$. *Then* $\| J(G) \| = \min\{4\sin^2 \pi/n + (|K|^{1/2} - |K|^{-1/2})^2, 2(|K|^{1/2} - |K|^{-1/2})^2\}$. needs corrections.

$\rho$ $\rho$

# Uniformization of Baker domains

木坂正史 (大阪府立大学総合科学部)

$f$ を超越整関数とし、$f$ が非有界な invariant Fatou component $U$ を持つとする．$U$ は単連結である ([B]) ので $\varphi : \mathbb{D} \to U$ を $U$ の uniformization (Riemann map) とする． Baker と Weinreich は $U$ が attractive basin、parabolic basin、Siegel disk の場合に次を示した：

**Theorem (Baker-Weinrech [BW])** $U$ の任意の impression は無限遠点 $\infty$ を含む.

ここでは Baker domain の場合について考察する．

Carathéodory の古典的な結果より $\partial\mathbb{D}$ の点と $U$ の prime end が 1 対 1 に対応することが知られている．$P(e^{i\theta})$ を点 $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ に対応する prime end とする．prime end $P(e^{i\theta})$ の impression $\mathrm{Im}(P(e^{i\theta}))$ は $\partial U$ の部分集合で次のように表現することができる：

$$\mathrm{Im}(P(e^{i\theta})) = \{p \in \partial U \mid \text{for } {}^{\exists}z_n \in \mathbb{D} \text{ s.t. } z_n \to e^{i\theta},\ \varphi(z_n) \to p\}$$

そこで集合 $\mathrm{I}_\infty \subset \partial\mathbb{D}$ を

$$\mathrm{I}_\infty := \{e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} \mid \infty \in \mathrm{Im}(P(e^{i\theta}))\},$$

で定義すると上記の結果は、$U$ が非有界な attractive basin、parabolic basin、または Siegel disk ならば $I_\infty = \partial\mathbb{D}$ であることを示している．

さて，$U$ を Baker domain とすると、定義より広義一様に $f^n|U \to \infty$ ($n \to \infty$) となるので

$$g := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

とおけば $g$ は $\mathbb{D}$ に不動点を持たない．Denjoy-Wolff の定理からある点 $p \in \partial\mathbb{D}$ に対して広義一様に $g^n \to p$ となる．また $c := \lim_{r \nearrow 1} g'(rp)$ が存在し $0 < c \leq 1$ となることが知られている．次に

$$z_n := g^n(0), \quad q_n := \frac{z_{n+1} - z_n}{1 - \overline{z_n} z_{n+1}}$$

とすると Schwarz-Pick の lemma より $\lim_{n\to\infty} |q_n|$ が存在することがわかる ([P])．この極限値と $c$ の値を用いると $\mathbb{D}$ 上での $g$ の力学系的挙動が次のように分類できる：

**Theorem (Baker-Pommerenke ([BP], [P]))** (1) $c < 1$ なら $g$ は hyperbolic Möbius 変換 $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\psi(z) = \dfrac{(1+c)z+1-c}{(1-c)z+1+c}$ に半共役である.
(2) $c = 1$ かつ $\lim_{n\to\infty} |q_n| > 0$ なら $g$ は parabolic Möbius 変換 $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\psi(z) = \dfrac{(1 \pm 2i)z - 1}{z - 1 \pm 2i}$ に半共役である.
(3) $c = 1$ かつ $\lim_{n\to\infty} |q_n| = 0$ なら $g$ は parabolic Möbius 変換 $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\psi(z) = z + 1$ に半共役である.

この分類に従って結果を述べると次のようになる：

**Main Theorem** $f$ を超越整関数とし, $f$ は invariant Baker domain $U$ を持つとする. また, $\varphi : \mathbb{D} \to U$ を $U$ の uniformization (Riemann map), 集合 $\mathrm{I}_\infty$ を上で定義したものとする. $f|U : U \to U$ が単葉でないとすると次が成立する：

(1) $f|U$ が hyperbolic Möbius 変換 $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ に半共役なら $\mathrm{I}_\infty$ はある完全集合 $K \subset \partial\mathbb{D}$ を含む.

(2) $f|U$ が parabolic Möbius 変換 $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ に半共役なら $\mathrm{I}_\infty$ はある完全集合 $K \subset \partial\mathbb{D}$ を含む.

(3) $f|U$ が parabolic Möbius 変換 $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$　$z \mapsto z+1$ に半共役なら $\mathrm{I}_\infty = \partial\mathbb{D}$ である.
また, $f|U$ が単葉であるときは $^{\#}\mathrm{I}_\infty = 1, 2$ or $\infty$ である.

なお, 簡単のために $U$ を invariant としたが, periodic のときも周期を $k$ として $f^k$ を考えれば同様の結果が得られる.

# References


[B] I. N. Baker, Wandering domains in the iteration of entire functions, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **49** (1984), 563–576.

[BP] I. N. Baker and CH. Pommerenke, On the iteration of analytic functions in a halfplane II, *J. London Math. Soc. (2)*, **20** (1979), 255–258.

[BW] I. N. Baker and J. Weinreich, Boundaries which arise in the dynamics of entire functions, *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées*, **36** (1991), 413–420.

[P] CH. Pommerenke, On the iteration of analytic functions in a halfplane, I, *J. London Math. Soc. (2)*, **19** (1979), 439–447.

26

# 複素力学系の holomorphic family について

東工大・理　志賀　啓成

昨秋の学会で，有限型の Riemann 面 $X$ をパラメーター空間とする有理関数の holomorphic families の有限性定理について論じた．得られた結果は次のようなものであった．

- locally non-trivial weakly $k$-stable（後述）holomorphic family の個数は有限個．しかも，その個数は，有理関数の次数，$X$ のタイプ（種数と punctures の数）で一様に上から評価される．
- いわゆる stable (J-stable) family は十分大なる $k$ に対して，weakly $k$-stable family である．
- 他方，$k$-stable だが，stable でない family が構成できる．

ここで，$X$ をパラメーター空間とする，有理関数の holomorphic family $\{R_\lambda\}_{\lambda\in X}$ が weakly $k$-stable とは，以下の条件を満たす Riemann 球面内の集合の族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in X}$ の存在で定義する．

1. 各 $\lambda\in X$ に対して $E_\lambda$ はある周期の $R_\lambda$ の周期点全体である．
2. $\# E_\lambda = k$．（$\lambda\in X$ に依らず一定）
3. 各 $\lambda\in X$ の近傍で，$E_\lambda$ の各点は $\lambda\in X$ に関し正則に動く．

本講演では，まず，weakly $k$-stable family に関する次の形の剛性定理を報告する．

**Theorem 1.** $X$ を $(g,n)$ 型の Riemann 面とする．このとき，$g, n,$

$d(>1)$のみに依存する数 $L(g, n, d)$ がとれて，$k > L(g, n, d)$ ならば，$X$ をパラメーター空間とする次数 $d$ の有理関数の holomorphic family は locally trivial になる．

weakly k-stable

次に holomorphic family の monodromy に関して考察する．McMullen [2] は $\{|\lambda| > M\}$ ($M$ は十分大) 上の family

$$P_\lambda(z) = z^3 + \lambda z^2$$

について，$\lambda = \infty$ の周りでの monodromy は，ジュリア集合上の位数が∞になることを示した．実際，この family はquasiconformally stable であるので，monodromy はジュリア集合上定義される．本講演では，この結果を拡張する．すなわち，$\{|\lambda| > M\}$ ($M$ は十分大) 上の family が，ジュリア集合上で位数∞の monodromy を $\lambda = \infty$ の周りで持つための十分条件を与える．これは Riemann 面の holomorphic family に関するある種の考察に対応している(cf. [1])．また，この条件を持つ具体的な family を構成する．


[1] Imayoshi, Y., *Holomorphic families of Riemann surfaces and Teichmüller spaces,* in *Riemann Surfaces and Related Topics, 1978 Stony Brook Conference,* 1981, Prenceton University Press: p. 277–300.

[2] McMullen, C., *Families of rational maps and iterative root-finding algorithmus.* Ann. of Math., 1987. **135**: p. 469–493.

特別講演

# 有理関数と超越整関数の力学系

諸澤 俊介　　高知大 理

双曲型有理関数のジュリア集合は連結であれば位相的にかなり扱易いものである。そのような扱易さという点から双曲型の概念を拡張した超越整関数を含む族を考える。そして、いくつかの例を構成する。さらに、ある超越整関数についてそのジュリア集合の中に多項式のジュリア集合と指数関数のジュリア集合が見い出せることを示す。

## 1　複素力学系の基本事項

$f$ を有理関数または超越整関数とする。有理関数の集合を Rat、超越整関数の集合を Ent とかく。$f^2 = f \circ f$、$f^n = f \circ f^{n-1}$ と帰納的に定義し、$f^0 = \mathrm{id}$ とする。$X$ を $f \in \mathrm{Rat}$ のときは $\hat{\mathbf{C}}$、$f \in \mathrm{Ent}$ のときは $\mathbf{C}$ とする。このとき

$$
\begin{aligned}
F(f) &= \{z \in X \mid z \text{ のある近傍で } \{f^n\} \text{ が正規族}\} \\
J(f) &= X \setminus F(f)
\end{aligned}
$$

と定義し、$F(f)$ を $f$ のファトウ集合、$J(f)$ を $f$ のジュリア集合と呼ぶ。定義より $F(f)$ は開集合、$J(f)$ は閉集合となり、ともに $f$ のもとで完全不変集合となる。すなわち

$$
\begin{aligned}
f(F(f)) \subset F(f) \qquad & f^{-1}(F(f)) = F(f) \\
f(J(f)) \subset J(f) \qquad & f^{-1}(J(f)) = J(f)
\end{aligned}
$$

を満たす。$F(f)$ の成分をフォトウ成分と呼ぶ。$f$ 不変なファトウ成分 $D$ 、すなわち $f(D) \subset D$ となるものは次の５種類しかない。

(1) ただ一つの吸引不動点を含む吸引領域。

(2) $D$ の境界上に有理的不動点 $\zeta$ を持ち、$D$ の内部の点 $z$ に対して、

$f^n(z) \to \zeta$ となる放物的領域。
(3) 無理的中立不動点を含むジーゲル円板。
(4) $D$ はある円環 $A$ と等角同値で、その等角写像を $\varphi$ としたときに $\varphi f \varphi^{-1}$ は $\mathrm{Aut}(A)$ の無限位数の元となるエルマン環。
(5) $\hat{\mathbf{C}} \setminus X$ の点 $\zeta$ が $D$ の境界上にあり、$D$ の内部の点 $z$ に対して、$f^n(z) \to \zeta$ となるベーカー領域。
定義よりベーカー領域は $f \in \mathrm{Rat}$ のときは存在しない。吸引領域と放物的領域は単連結であるか、あるいは無限連結となる。特に $f \in \mathrm{Ent}$ のときは常に単連結となる。

$z \in X$ のある近傍で $f^{-1}$ のすべての分枝が 1 価にとれるとき、$z$ を $f$ の非特異値と呼び、そうでないときに、$f$ の特異値と呼ぶ。特異値の集合を $\mathrm{sing}(f^{-1})$ で表わす。特異値は臨界値または漸近値である。特に $f \in \mathrm{Rat}$ のときは $\mathrm{sing}(f^{-1})$ は臨界値だけからなり、$f$ の次数を $k$ とすれば臨界値の個数は重複を込めて $2k-2$ 個である。吸引領域と放物的領域は少なくとも一つ特異値を含む。ジーゲル円板とエルマン環の境界は $\cup_{n \geq 0} f^n(\mathrm{sing}(f^{-1}))$ の閉包に含まれる。ベーカー領域と特異値のあいだには特別な関係はない。

ファトウ成分 $D$ で $f^p(D) \subset D$ を満たすものを周期成分と呼び、特に $f^p(D) \subset D$ かつ $f^q(D) \cap D = \emptyset$ $(0 < q < p)$ となるときには周期 $p$ の周期成分と呼ぶ。任意の自然数 $n$ に対して

$$F(f^n) = F(f) \qquad J(f^n) = J(f)$$

が成立するので周期成分についても上の不変成分と同様の分類が成立する。

また、任意の自然数 $n$ と $m$ $(n \neq m)$ に対して

$$f^n(D) \cap f^m(D) = \emptyset$$

となるときに $D$ を $f$ の遊走領域と呼ぶ。サリヴァン（[13]）により、$f \in \mathrm{Rat}$ のときには遊走領域が存在しないことが示されている。Ent の族

$$\mathcal{S} = \{ f \in \mathrm{Ent} \mid \mathrm{sing}(f^{-1}) \text{ は有限集合 } \}$$

についても、 $f \in \mathcal{S}$ であれば遊走領域を持たないことが示されている（[5] ）。さらに、$f \in \mathcal{S}$ であればベーカー領域も存在しない。

## 2 境界ジュリア集合

この節ではいくつかの条件を満たす $f$ の単連結な吸引領域の境界について考える。

$\mathrm{sing}(f^{-1})$ の点について次の二つの条件を付ける。

**[SV1]** $F(f)$ に含まれる $\mathrm{sing}(f^{-1})$ の元は臨界値のみであり、それらはすべて吸引周期系に吸収される。

**[SV2]** $J(f)$ に含まれる $\mathrm{sing}(f^{-1})$ の元 $z$ について、$\overline{\cup_{n\geq 0} f^n(z)}$ はいかなるファトウ成分の境界とも交わらない。

そこで

$$\mathcal{SV} = \{f \in \mathrm{Rat} \cup \mathcal{S} \mid f \text{ は [SV1] と [SV2] を満たす。}\}$$

とおく。このとき $f \in \mathcal{SV}$ については $F(f)$ の周期成分は吸引周期成分しか現われない。

**定理 1** $D$ を $f \in \mathcal{SV}$ の周期成分とする。$f \in \mathrm{Rat}$ かつ $D$ が単連結であるならば、$\partial D$ は閉曲線となる。$f \in \mathcal{S}$ かつ $D$ が有界ならば、$\partial D$ はジョルダン曲線となる。

**定理 2** $f \in \mathcal{SV}$ とする。$f \in \mathrm{Rat}$ かつ $J(f)$ が連結であるならば、$J(f)$ は局所連結である。$f \in \mathcal{S}$ かつすべての周期成分が有界であるならば、$J(f)$ は局所連結である。

$f \in \mathrm{Rat}$ について $\mathrm{sing}(f^{-1})$ の各点が吸引周期系に吸収されるときに $f$ を双曲型という。定理 2 より次が言える。

**定理 3** $f \in \mathrm{Rat}$ が双曲型であり、$J(f)$ が連結であるならば $J(f)$ は局所連結である。

さらに $f \in \mathrm{Rat}$ について $\mathrm{sing}(f^{-1}) \cap F(f)$ の各点が吸引周期系に吸収され、$\mathrm{sing}(f^{-1}) \cap J(f)$ の各点が前周期的であるときに $f$ を劣双曲型と呼ぶ。

**定理 4** *([11])* $f \in \mathrm{Rat}$ が劣双曲型であり、$J(f)$ が連結であるならば、各ファトウ成分の境界は閉曲線であり、さらに $J(f)$ は局所連結である。

$J(f)$ の点でいかなるファトウ成分の境界にもないものの集合を $f$ の剰余ジュリア集合と呼び、$J_0(f)$ とかく。これはクライン群の極限集合における剰余極限集合の類似である ([1])。

**定理 5** *([10])* $J_0$ が空集合でないとする。このとき $J_0(f)$ は完全不変集合であり、$J(f)$ で稠密であり、さらに非可算集合である。

剰余ジュリア集合の存在について次がいえる。

**定理 6** *([11])* $f$ を次数 2 以上の劣双曲型有理関数で $F(f) \neq \emptyset$ とする。$J_0(f)$ が空集合となる必要十分条件は $F(f)$ が完全不変成分をもつか、ちょうど 2 つの成分からなるかのいずれかが成立することである。

また、劣双曲型有理関数のファトウ成分の境界が閉曲線であるときに、それがジョルダン曲線になるための十分条件をひとつ述べる。

**定理 7** *([11])* $f$ を次数 3 の劣双曲型有理関数とする。$f$ は 3 つの吸引不動点をもち、完全不変成分をもたないとする。このとき $F(f)$ の各成分の境界はジョルダン曲線である。

**例 1** $z^3 - 1 = 0$ のニュートン法であらわれるファトウ成分の境界はジョルダン曲線である。

$\hat{\mathbf{C}}$ の閉集合 $S$ がシルピンスキー カーペットであるとは、次を満たす可算個の位相円板 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $S = \hat{\mathbf{C}} \setminus (\cup_{n=1}^{\infty} D_n)$ とかかれるときをいう。

(1) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(D_n) = 0$

(2) $\overline{D_n} \cap \overline{D_m} = \emptyset$ $(n \neq m)$

ふたつのシルピンスキー カーペットは常に同相である。

ファトウ成分の境界を調べることにより次の例を構成することができる。

**例 2**

$$f(z) = 27\frac{z^2(z-1)}{(3z-2)^2(3z+1)}$$

のジュリア集合はシルピンスキー カーペットである。

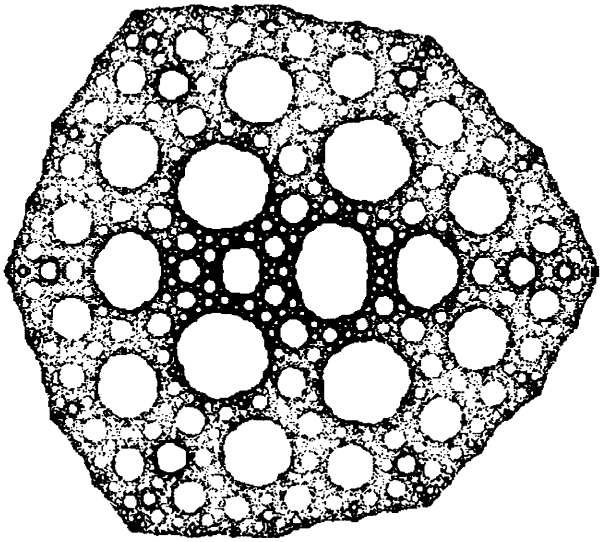


図 1　シルピンスキー カーペット

# 3　二次多項式族

ここで、複素力学系においてもっとも基本的であり、重要な問題を残している二次多項式族 $\{f_c(z) = z^2 + c\}$ について簡単に述べる。

$$M = \{c \in \mathbf{C} \mid f_c^n(0) \not\to \infty \quad (n \to \infty)\}$$

と定義して、$M$ をマンデルブロー集合と呼ぶ。$M$ は有界な連結集合である。このとき、次の予想がある。

**稠密性予想**　二次多項式族 $\{f_c(z) = z^2 + c\}$ の中で双曲型となる $c$ の集合は $\mathbf{C}$ で稠密な開集合である。

吸引周期を持つような $c$ の集合の連結成分を双曲成分と呼ぶ。有界な双曲成分は単連結な開集合である。稠密性予想は $M$ の内部が双曲成分からなることと同値である。

# 4　指数関数族

超越整関数の中では力学系としてわりと知られている指数関数とその族

$$\mathcal{E} = \{E_\lambda(z) = \lambda \exp(z)\}$$

について述べる。$\mathrm{sing}(E_\lambda^{-1}) = \{0\}$ であるので、$\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ である。吸引周期点を持つような $\lambda$ の集合を $E$ とすると、$E$ は開集合である。$E$ の連結成分を双曲成分と呼ぶ。$H$ を双曲成分とすると、ただ一つの自然数 $k$ で任意の$\lambda \in H$ に対して $E_\lambda$ が周期 $k$ の吸引周期点を持つようなものが存在する。吸引不動点に対応する双曲成分はただひとつで、それは有界であり、それ以外の双曲成分は非有界である（[3]）。次の予想がある。

**予想**　双曲成分の集合は $\mathbf{C}$ で稠密である。

自然数 $N$ に対して

$$\Sigma_N = \{s = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \mid s_j \in \mathbf{Z},\ |s_j| \le N\}$$

とおき、$\Sigma_N$ 上のシフト写像を $\sigma$ とおく。

$f \in \mathrm{Ent}$ に対し、$J(f)$ の不変集合 $C_N$ が $f$ の $N$−カントールの花束であるとは次の (1)-(4) を満たすことである。

(1) 同相写像 $h : \Sigma_N \times [0,\ \infty) \to C_N$ が存在する。

(2) 自然な射影 $\pi : \Sigma_N \times [0,\ \infty) \to \Sigma_N$ に対して、

$$\pi \circ h^{-1} \circ f \circ h(s,\ t) = \sigma(s)$$

が成立する。

(3) 各 $s \in \Sigma_N$ に対して、$\lim_{t\to\infty} h(s,\ t) = \infty$ となる。

(4) $t \neq 0$ であれば、$\lim_{n\to\infty} f^n(h(s,\ t)) = \infty$ となる。

このとき $E_\lambda$ $(0 < \lambda < 1/e)$ とすると $J(E_\lambda)$ が $N$−カントールの花束を含むことが知られている。さらに

$$\overline{\cup_{N\ge1} C_N} = J(E_\lambda)$$

となる。

## 5　象眼指数関数族

谷口（[14]）により次の象眼指数関数族

$$\mathcal{D} = \{P(z)\exp(z) \mid P(z) \text{ は多項式 }\}$$

が導入された。さらに

$$\mathcal{D}_k = \{P(z)\exp(z) \mid P(z) \text{ は } k \text{ 次の多項式 }\}$$

としたときに $\mathcal{D}_k$ は位相的完備であることが谷口により示された。$\mathcal{D}_k$ の元はただ一つの漸近値 0 と重複度を込めて $k$ 個の臨界値をもつ。

$\lambda z\exp(z)$ と言う形のものについてはファゲラ（[6]）、黒田一張（[8]）の仕事がある。

非有界なファトウ成分を持つ超越整関数の例は良く知られている。またその多くの場合にはその境界、およびジュリア集合全体が局所連結にならないことが木坂により示されている（[7]）。有界なファトウ成分を持つかどうかが超越整関数の位数の評価で調べられている（[2], [12]）。しかし、具体的な関数の形は判らない。ところが $\mathcal{D}$ の元のような簡単なものでも次のような例が構成できる。

**例 3**

$$f(z) = aze^z$$

$$a = 9.54894\cdots$$

とすると $F(f)$ の各成分は有界であり、その境界はジョルダン曲線となり、$J(f)$ は局所連結となる。

**例 4**

$$f(z) = az(z-c)e^z$$

$$a = -7 \qquad\qquad c = -0.4$$

とすると $J(f)$ はシルピンスキー カーペットとなる。

例 2 とあわせると次が言える。

**定理 8** $f \in \mathrm{Rat}$ と $g \in \mathrm{Ent}$ で $J(f)$ と $J(g)$ が同相となるものが存在する。

また、$f \in \mathcal{D}_1$ として、その漸近値は吸引不動点に収束し、臨界値は吸引周期系に収束するものを考える。このとき、そのジュリア集合の中にカントールの花束と2次の多項式のジュリア集合が見い出せる。

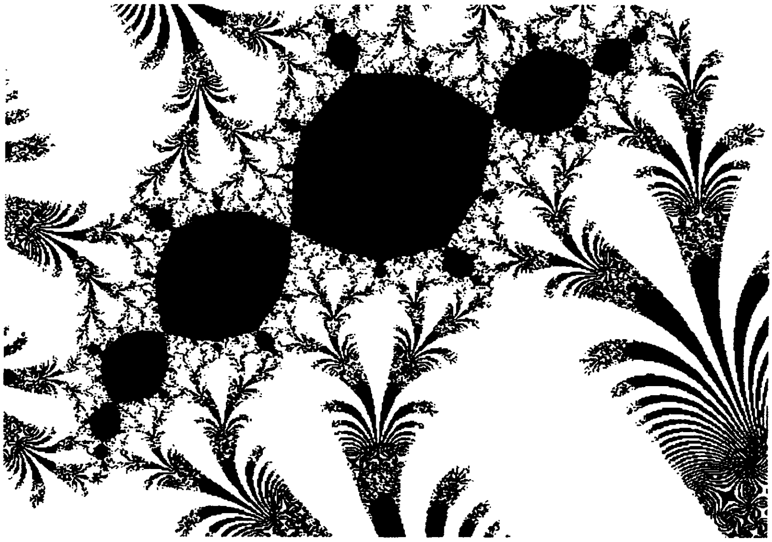


図2

# 参考文献


[1] W. Abikoff, The residual limit sets of Kleinian groups, Acta Math., 130(1973), 127-144.

[2] I. N. Baker, The iteration of polynomials and transcendental entire functions, J. Austral. Math. Soc., 30(1981), 483-495.

[3] I. N. Baker & P. J. Rippon, Iteration of exponential functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 9(1984), 49-77.

[4] A. F. Beardon, Iteration of Rational Functions, GTM 132, Springer, 1991.

[5] A. E. Eremenko & M. Yu. Lyubich, Dynamical properties of some classes of entire functions, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 42(1992), 989-1020.

[6] N. Fagella, Limiting dynamics for the complex standard family, Int. J. Bifurcation and Chaos, 5(1995), 673-699.

[7] M. Kisaka, On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions, preprint.

[8] T. Kuroda & M. Jang, Julia set of the function $z\exp(z+\mu)$ II, preprint.

[9] S. Morosawa, Note on infinitely connected immediate basins of attracting cycles for iteration of rational functions, Nonlinearity, 8(1995), 107-109.

[10] S. Morosawa, On the residual Julia sets of rational functions, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 17(1997), 205-210.

[11] S. Morosawa, Julia sets of subhyperbolic rational functions, preprint.

[12] G. M. Stallard, The iteration of entire functions of small growth, Mth. Proc. Camb. Phil. Soc., 114(1993), 273-298.

[13] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of Fatou-Julia problem on no wandering domains, Ann. of Math., 122(1985), 229-235.

[14] M. Taniguchi, Topological completeness of decorated exponential families, preprint.

[15] 上田哲生　谷口雅彦　諸澤俊介，　複素力学系序説、培風館、1995.

27 *

# On the generalized Cauchy integral formula for functions of finite-dimensional domains into the Clifford hypercomplex $2^n$-tuple spaces

笹山浩良
Hiroyoshi SASAYAMA
SASAYAMA INSTITUTE

今年春の分科会で $m$ 次元 domain $\Omega$ より hypercomplex $n$-tuple space $E'(\mathfrak{S})$ 中への $C^1$ 級函数に対する拡張された Cauchy の定理と Green の公式の拡張を述べた。その際述べた証明は記号の簡略化のため $m=n$ としたが、全く同様の方法で $m \leqq n$ の場合に適用される。今回は Cauchy integral formula の拡張を述べるが、$\mathfrak{S}$ を $2^n$ 箇の base $e_I \equiv \{e_o \equiv 1, e_1, \ldots, e_n, \ldots, e_{i_1} \ldots e_{i_k}, (1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq n), \ldots, e_1 \ldots e_n\}$ をもつ Clifford algebra $\mathfrak{S}_n$ にする必要がある。そして $\mathbb{R}^{m+1}$ の空でない開部分集合 $\Omega$ で定義され、Banach 空間 $B'$ に associate された Clifford algebraic $2^n$-tuple space $E'(\mathfrak{S}_n)$ 中に値をもつ $C^k$ 級の $k$-monogenic function $F(x)$ $(1 < k < n)$ に対して次を得る:

（定　理）(Generalized R.Delanghe-$\bar{\mathrm{F}}$.$\bar{\mathrm{B}}$rackx's generalization of Cauchy-integral formula)

$\mathfrak{M}$ が $\Omega$ に含まれ、境界をもつ $m+1$ 次元の compact oriented differentiable manifold の時、凡べての $x \in \mathring{\mathfrak{M}}$ に対して

$$F(x) = (P) \int_{\partial \mathfrak{M}} \sum_{j=o}^{k-1} (-1)^j g_{j+1}(u-x)\, d\sigma \overleftarrow{D} F(u)$$

ここに $\overleftarrow{D} \equiv \sum_{i=o}^{m} e_i \partial/\partial x_i$ は left hypercomplex differential operator, $g_k(x) \equiv \sum_{i=o}^{m} x_i \bar{e}_i x_o^{k-1} / [\omega_{m+1} (k-1)! \, ||x||^{m+1}]$

は R.Delanghe-F.Brackx が用いた $\Omega$ より $\mathcal{C}_n$ 中への $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ で $C^\infty$ 級なる函数である。又 $\omega_{m+1}$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ の単位球の表面積とする。次が成立つ：

(定理)(Generalized Mean Value Theorem) もし F が $\Omega$ で left k-monogenic ならば $a \in \Omega$ に対して

$$F(a) = \frac{1}{t^{m+1} V_{m+1}} (P) \int_{B(a,t)} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{(u_0 - a_0)^j}{j!} \overleftarrow{D}^j F(u) \cdot du_0 \wedge \cdots \wedge du_m$$

ここに $V_{m+1}$ は m+1 次元単位球の体積で $\overline{B}(a,t) \subset \Omega$ とする.

前回春の分科会('97. 4. 4)の講演アブストラクトの正誤表 (P.45)

| | 誤 → | 正 |
|---|---|---|
| 本文中上から8行目 | すると $\Omega$ より $E'(\mathfrak{S})$ 中への | すると $\Omega$ より一方が $\mathfrak{S}$ 中へ他方が $E'(\mathfrak{S})$ 中への |
| 〃 9行目 | 級函数 F, G | 級函数 F, G に対して |
| 本文中上から13行目 | $\cdots \wedge dx_m$ とする。又より | $\cdots \wedge dx_m$ とする. 但し $(e_1, \ldots, e_n)$ は $\mathfrak{S}$ 中の basis で $e_1 = \exists$ とする. |
| COROLLARY 中の恒等式の左辺中 | $(\overrightarrow{D}^{k-1-j})$ | $(\overrightarrow{D}^{k-1-j} F)$ |
| COROLLARY 中, 第1, 第2行 | M 上の任意の m-chain $C_m$ i.e. $F \in C_k(\Omega, E'(\mathfrak{S}))$, $G = g \in C_k(\Omega, \mathfrak{S}) \Rightarrow$ | i.e. $F \in C_k(\Omega, E'(\mathfrak{S}))$, $G = g \in C_k(\Omega, \mathfrak{S}) \Rightarrow$ M 上の任意の m-chain $C_m$ に対し |

28

# コホモロジー消滅と正則性

**梶原　壌二** [1]

孫　光鎬,
釜山大学校自然科学大学数学教室
李　琳,
済南電視大学数学教室

Kajiwara-Kazama[9] は, Cartan[2]-Benke-Stein[1] の定理を一般化し，２次元の Stein 多様体の領域 $D$ は正次元の複素 Lie 群 $L$ が存在して， $\mathrm{H}^1(D, \mathcal{A}_L) = 0$ が成立すれば，Kajiwara-Nishihara[12] は, 岡の原理が成立すれば Stein である事を示した。

ここでは， $E$ を有限開位相を備えた局所凸空間，$(\Omega, \varphi)$ を $E$ 上の連続な境界を持つ領域とする時，正次元の複素 Lie 群 $L$ が存在して， $E$ の任意の柱状領域 $P$ に対して，$\mathrm{H}^1(D \cap P, \mathcal{A}_L) \to \mathrm{H}^1(D \cap P, \mathcal{E}_L^\infty)$ が準単射な意味で領域 $D \cap P$ と $L$ の組に岡の原理が成立すれば，$(\Omega, \varphi)$ は正則領域である事を示す。

次に $m$ を自然数，$D$ を積空間 $E \times \mathbf{C}^m$ の擬凸領域で，$\pi : E \times \mathbf{C}^m \to E$ を射影とする時，任意の $s \in E$ に対して,$\pi^{-1}(s)$ が複素空間 $\mathbf{C}^m$ の柱状領域 $\Pi_{j=1}^m D_j$ であるとする。各 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して，$a_j(z, s)$ を $D$ 上の $m$ 正方行列値正則関数とし，微分作用素 $T = T_1 T_2 \cdots T_m; T_j := \frac{\partial}{\partial z_j} - a_j(z, s) (j = 1, 2, \cdots, m)$ を導入する。この時，$D$ 上の任意の正則関数 $g$ に対して $D$ 上の任意の正則関数 $f$ があって，$f$ が微分方程式 $Tf = g$ の解であると言う大域的条件が，$D$ と $a_j$ に関する若干の条件の下で，助変数空間 $E$ に於いては局所的である事を示す。

## 参考文献

[1] H. Behnke und K. Stein, *Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgebenen Null-und Pol-stellenflächen*, Jber. D. M. V. **47**(1937), 177-192.

[2] H. Cartan, *Le problème de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes*, C. R. Paris **198**(1934), 1284-1287.

[3] H. Cartan, *Sur les première problème de Cousin*, ibid. **207**(1938), 558-560.

[4] H. Cartan, *Sur les première problème de Cousin*, ibid. **207**(1938), 558-560.

[5] S. Dineen, *Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces,* Math. Ann. **202**(1973), 337-345.

[6] J. Kajiwara, *La réciproque du théorème d'annulation et de finitude de cohomology dans L'espace produit d'une famille dénombrable de sphère de Riemann*, Bull. Soc. Math. France **103**(1975), 129-139.

[7] J. Kajiwara, *Le principe d'Oka pour espaces vectoriels munis de la toplogie f-ouverte*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **29**(1975), 361-370.

[8] J. Kajiwara, *Equivalence of Steinness and validity of Oka's principle for domains with continous boundaries of a Stein manifold*, Fac. Sci. Kyushu Univ. **33**(1979), 83-93.

[1] 今回の上京は日本数学検定協会よりの出張旅費に依るものであり，会長の一松 信先生を始め協会に心から感謝の意を表明する。

[9] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set*, Math. Ann. **204**(1973), 1-12.

[10] K.-B. Kim, L. Li, X. D. Li, K. H. Shon and D. G. Zhou, *Characterization of the holomorphy of infinite dimensional domains by the validity of Oka's principle*, Proceedings of the Third International Colloquium on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Seoul, July 31- August 2(1995), 333-340.

[11] J. Kajiwara and Y. Mori, *On the existence of global holomorphic solutions of differential equations with complex parameters*, Czechoslovak Math. J., **24**(99) (1974), 444-454.

[12] J. Kajiwara und M. Nishihara, *Charakterisierung der Steinschen Teilgebieten durch Okasches Prinzip in zwei-dimensioaler Steinscher Mannigfaltigkeit*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **33**(1979), 71-76.

[13] J. Kajiwara and K. H. Shon, *Global existence of holomorphic solutions of differential equations with complex parameters-II*, The Pusan Kyŏngnam Math. J. **9**-1(1993), 75-81.

[14] J. Kajiwara, K. H. Shon and M. Tsuji, *Localization of global existence of holomorphic solutions of holomorphic differential equations with infinite dimensional parameter*, Czechoslovak Mathematical Journal, 1998, (in Press).

[15] S. Ohgai, *Cohomology vanishing and q-convex functions on infinite dimensional domains*, Proceedings of the Seventh International Colloquium on Differential Equations, VSP(Utrecht) 1977, 277-282.

[16] S. Ohgai, *Validity of Oka's principle for relative cohomology*, Pusan Kyŏngnam Mathematical Journal 13-2, December 1997(in Press).

[17] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: II Domaine d'holomorphie*, J. Sci. Hiroshima Univ. **17**(1937), 115-130.

[18] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: III Deuxiéme probléme de Cousin*, J. Sci. Hiroshima Univ. **9**(1938), 7-19.

[19] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: VII Sur quelques notions arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France, **78**(1950), 1-27.

[20] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: IX Domaines finis sans point critique intérieur*, Jap. J. Math. **23**(1953), 1-27.

[21] P. Raboin, *Resolution de lëquation$\overline{\partial} f = F$ sur un espace de Hilbert*, Bull. Soc. Math. France, **107**(1979), 225-240.

[22] G. Scheja, *Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen*, Math. Ann. **144**(1961), 345-360.

[23] J. P. Sèrre, Dans Séminaire H.Cartan **3** Ecole Normare Supérieur, Paris, 1951-1952.

[24] J. P. Sèrre, Quelques problèmes globaux aux variétés de Stein, Coll. Plus. Var., Bruxelle 1953, 57-68.

[25] H. Suzuki, *On the global existence of holomorphic solutions of $\partial u/\partial x_1 = f$*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, **11**(1972), 253-258.

[26] P. Thullen, *Sur deuxième problème de Cousin*, C. R. Paris **200**(1935), 720-721.

[27] I. Wakabayashi, *Non existence of holomorphic solutions of $\partial u/\partial z_1 = f$*, Proc. Jap. Acad. **44**(1968), 820-822.

29

# 無限次元の$\bar{\partial}$-解析

梶原　壌二

今回の上京は日本数学検定協会よりの出張旅費に依るものであり，会長の一松 信先生を始め協会に心から感謝の意を表明する。

李　辰基，　釜山大学校自然科学大学数学教室

今回の研究内容は，平成８年度日本国際教育協会の平和友好短期留学奨学金による九州大学への留学中の業績であり，協会に心から感謝の意を表明する。

無限次元の$\bar{\partial}$-問題は，先ず，可分Hilbert空間にて，多項式増大度を持つ場合に，Henrich[12]に依って抽象Wiener測度論を駆使して，そのevery where dense な集合上で肯定的に解かれた（[13]参照）。後に Raboin[22]は，多項式増大度を持つと言う条件無しに，一般化した。Colombeau-Perrot[6]はnuclear Silvia spaceの擬凸領域$\Omega$の$C^\infty$級(0,1)閉形式$\omega$に対して，$\bar{\partial}u=\omega$を満たす$\Omega$上の(0,0)形式が存在する事を示した。

Soraggi[24]はD. F. N. space $E$の一様有界型の$C^\infty$級(0,2)閉形式$\omega$に対して，$\bar{\partial}u=\omega$を満たす$E$上の(0,1)形式が存在する事を示した。更に微分形式の計算により[25]にて，$q \geq 1$に対してFréchet-Montel space又はD. F. N. space $E$の一様有界型の$C^\infty$級(0,q)閉形式$\omega$に対して，$\bar{\partial}u=\omega$を満たす$E$上の(0,q-1)形式が存在する事を示した。

ここでは，D. F. N. spaceの擬凸領域$\Omega$の$C^\infty$級(p,q)閉形式$\omega$に対して，$\bar{\partial}u=\omega$を満たす$\Omega$上の(p,q-1)形式uが存在する事を示す。証明には，上記以外に，Fujimoto[9]の着想を活用した。

## References

[1] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexs,* Bull. Soc. Math. France **90**(1962), 193-259.

[2] H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n complexes variables,* Bull. Soc. Math. France. **78**(1950), 28-64.

[3] H. Cartan, Séminaire E.N.S., École Normare Supérieur, Paris, 1951/1952.

[4] G. Coeuré, *L'équation $(\bar{\partial})u = F$ en dimension infinie,* université Lille Publ. Int. **131**(1968), 6-9.

[5] J. Colombeau and B. Perrot, *The $(\bar{\partial})$-equation in D. F. N. spaces,* J. Math. Anal. Appl. **78**-2(1980), 466-87.

[6] J. Colombeau and B. Perrot, *L'équation $(\bar{\partial})$ dans les ouverts pseudo-convexes des espaces D. F. N.*, Bull. Soc. Math. France. **110**(1982), 15-26.

[7] S. Dineen, *Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces,* Math. Ann. **202**(1973), 337-345.

[8] S. Dineen, *Cousin's first problem on certain locally convex topological spaces,* Acad. Brasil. Cienc. **48**-1(1976), 229-236.

[9] H. Fujimoto, *Vector-valued holomorphic functions on complex space*, J. Math. Soc. Japan. Vol. **17**. No. 1(1965), 52-66.

[10] L. Gross, *Potential theory on Hilbert spaces,* J. Funct. Anal. **1**(1967), 123-181.

[11] L. Gruman, *The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces,* Illinois J. Math. **18**(1974), 20-26.

[12] C. J. Henrich, *The $\overline{\partial}$ -equation with polynomial growth on a Hilbert space,* Duke Math. J. **40**-2(1973), 279-306.

[13] *Opérateur d" dans les espaces de Hilbert avec croissance poly nomiale,* Lecture Notes in Mathematics 474, Springer Verlaga,Séminaire P. Lelong(Analyse) 14 Année(1973/74),91-108.

[14] J. Kajiwara, *La réciproque du théorème d'annalation et de finitude de cohomologie dans l'espace produit d'une famille dénombrable de sphère de Riemann,* Bull. Soc. Math. France. **103**(1975), 129-139.

[15] J. Kajiwara, *Le principle d'Oka pour certaines espace de dimension infini,* C. R. Paris **16**(1975), 1055-1056.

[16] J. Kajiwara and H. Kazama, *Oka's principle for relative cohomology sets, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* **23**-1(1969),33-70.

[17] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set,* Math. Ann. **204**(1973),1-12.

[18] J. Kajiwara and K. H. Shon, *Continuation and vanishing theorem for cohomology of infinite dimensional space,* Pusan Kyŏngnam Math. J. **1**(1993), 65-73.

[19] P. Mazet, *Un théorème d'hyperbolicité pour l'opérateur $\overline{\partial}$ sur les espaces de Banach,* C. R. Paris **292**(1981), 31-33.

[20] S. Ohgai, *Cohomology vanishing and q-convex functions on infinite dimensional domains*, to appear in the Proceedings of the International Colloquium on Differential Equations **7**(1997) VSP( Netherland Utrecht).

[21] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: VII Sur quelques notions arithmétiques,* Bull. Soc. Math. France, **78**(1950), 1-27.

[22] P. Raboin, *Résolution de l'équation $\overline{\partial}f = F$ sur un espace de Hilbert,* Bull. Soc. Math. France, **107**(1979), 225-240.

[23] J. P. Serre, *Dans Séminaire H.Cartan,3,* École Normare Supérieur, Paris, 1951-1952.

[24] R. L. Soraggi, *The $\overline{\partial}$-problem for a (0,2)-form in a D. F. N. space,* J. Func. Anal. **98**(1991), 380-402.

[25] R. L. Soraggi, *A solution to the $\overline{\partial}$-problem for (0,q)-forms, $q \geq 1$ on a complex normed space,* Extra Mathematicae **9**-1(1994), 64-70.

30

# Dimca の超曲面と一般化された Nagata automorphism について

辻　美輝　　　　　九州大学数理学研究科

$V$ を smooth affine algebraic variety とする。

$V$ が $\mathbf{R}^{2n}$に diffeomorphic であるが $\mathbf{C}^n$に algebraic に同型でないとき、$\mathbf{C}^n$上で *exotic* であるという。

C.P. Ramanujam [5] は、$\mathbf{C}^2$の場合において、exotic な例は存在しないことを証明した。$n \geq 3$ の場合には exotic な例が数多くある。([2] ,[5]).

Choudary-Dimca は　$\mathbf{C}^{2m-1}$と微分同相なる一連の代数的超曲面の族

$$V_{m,d,a} := \{f_{m,d,a} := x_0^a x_1^{d-a} + x_1 x_2^{d-1} + \cdots + x_{2m-3} x_{2m-2}^{d-1} + x_{2m-2} + x_{2m-1}^d = 0\}$$

$$m > 1,\ 0 < a < d-1 \quad \text{and} \quad (a, d) = (a, d-1) = 1$$

を構成し如何なる $(d, a)$ に対しそれが $\mathbf{C}^{2m-1}$と代数的に同型かという問題を提起し、特に、$m = 2, a = 1$ の時 $V_{2,d,1}$は $\mathbf{C}^3$に同型で embedding $V_{2,d,1} \hookrightarrow \mathbf{C}^4$ は linear embedding に同値である事を示した。しかし、彼らの証明は概略的なもので、彼らも指摘している様に explicit な linearization を与えているわけではない。本講演では、今日、Nagata の automorphism として知られている $\mathbf{C}^3$の automorphism を一般化することにより、同型 $\mathbf{C}^3 \cong V_{2,d,1}$及び embedding $V_{2,d,1} \hookrightarrow \mathbf{C}^4$の linearization を explicit に与える。

## References


[1] A. Dimca, Singularities and Topology of Hypersurfaces, Universitext, Springer-Verlag, (1992)

[2] A.D.R. Choudary and A. Dimca, *Complex hypersurfaces diffeomorphic to affine spaces,* Kodai Math. J. **17** (1994) pp.171–178.

[3] M. Furushima, *On Minimal Compactifications of* $\mathbf{C}^2$, Math. Nachr. **186** (1997) (in press)

[4] M. Nagata, Polynomial Rings and Affine Spaces, Reg. Conf. Series in Math. Amer. Math. Soc. **17** (1978).

[5] C.P. Ramanujam, *A topological characterization of the affine plane as an algebraic variety,* Ann. of Math. **94** (1971) pp. 69–88.

[6] M. Zaidenberg, *On exotic algebraic structures on affine spaces,* (1996) preprint.

32

# ある超曲面と正則写像

城崎　学

大阪府立大学

工学部

以前に $H(w_0, w_1) = {w_0}^d + {w_0}^{d-p}{w_1}^p + {w_1}^d$（ただし，$d, p$ は，$d > 2p+8, p \geq 2$ を満たす互いに素な正整数）としたとき，$H_1(w_0, w_1) = H(w_0, w_1)$ および $H_n(w_0, \ldots, w_n) = H_1(H_{n-1}(w_0, \ldots, w_{n-1}), {w_0}^{d^{n-1}-1}w_n)$ により帰納的に定義された $H_n$ に対して，次を示した：

**Theorem A.** $\boldsymbol{C}$ から $n$ 次元複素射影空間への代数的に非退化な 2 つの正則写像 $f = (f_0 : \cdots : f_n), g = (g_0 : \cdots : g_n)$ が零点をもたないある整関数 $\alpha$ に対し，

$$H_n(g_0, \cdots, g_n) = \alpha H_n(f_0, \ldots, f_n)$$

をみたすならば，$f = g$ が成り立つ．

これは，$H_n(w_0, \ldots, w_n) = 0$ によって定義される $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$ の超曲面を $S'_n$ としたとき，次のように言い換えることが出来る：

**Theorem A'.** $C$ から $\boldsymbol{P}^n(C)$ への代数的に非退化な 2 つの正則写像による $S'_n$ の逆像が divisors として等しいならば，これら正則写像は一致する.

そこで，$P_1(w_0, w_1) = P(w_0, w_1) = H(w_0, w_1)$ および

$$P_n(w_0, \ldots, w_n) = P_{n-1}(P(w_0, w_1), P(w_1, w_2), \ldots, P(w_{n-1}, w_n))$$

で定義された同次多項式の零点集合を $S_n$ としたときに，次の性質を持っていることが分かったので報告する：

**Theorem 1.** $C$ から $\boldsymbol{P}^n(C)$ への代数的に非退化な 2 つの正則写像による $S_n$ も逆像が divisors として等しいならば，これら正則写像は一致する.

**Theorem 2.** $C$ から $\boldsymbol{P}^n(C)$ へ正則写像の像が $S_n$ 内にあれば，この正則写像は定数写像である.

**Theorem 3.** $C$ から $\boldsymbol{P}^n(C)$ への正則写像の像が $S_n$ と交わらなければ，この正則写像は定数写像である.

33

# On value distribution of holomorphic maps of $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^2$ and its application

足立幸信

$A$ を $\mathbb{P}^2$ の reducible curve とする。

<u>定義</u> 既約な $\mathbb{P}^2$ の curve $C$ が nonhyperbolic curve w.r.t. $A$ とは, $C \not\subset A$ のとき $C-A$ の normalization が hol. に $\mathbb{C}$ or $\mathbb{C}^*$ に iso, $C \subset A$ のとき, $C-A'$ の normalization が $\mathbb{C}$ or $\mathbb{C}^*$ に iso のときをいう。($A'$ は $A$ から $C$ を除いたもの).

$C$ が hyperbolic curve w.r.t. $A$ とは non-hyperbolic curve w.r.t. $A$ でないときをいう。

<u>定義</u>. $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への正則写像 $T$ が cond ($\alpha$) をみたすとは.

(1). ある $\mathbb{P}^2$ の既約な (alg) curve $A_0, A_1, A_2, A_3$ があって, $A_0, A_1, A_2$ は hyperbolic curve w.r.t. $\tilde{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup L_\infty$.

(2) $T|A_i \cap \mathbb{C}^2$ は nonconstant self map of $A_i \cap \mathbb{C}^2$ $(0 \leqq i \leqq 2)$.

(3) $T(\mathbb{C}^2 - A) \subset \mathbb{C}^2 - A$.

すると 2次元の Big Picard & Montel 型の定理より 次の定理がいえる.

<u>定理</u>

$T$が cond ($\alpha$)をみたす $\Rightarrow T \in \mathrm{Aut}_{alg}(\mathbb{C}^2)$.

$T|_{A_0 \cap \mathbb{C}^2}$として $\mathrm{Aut}(A_0 \cap \mathbb{C}^2)$を1つ与えると,

$T$は unique に決ってしまう。

<u>定義</u>. $P(x, y)$を nonconstant な多項式とし, general fiber が $(g, n)$ type で $2g-2+n>0$ をみたすとき, $P$を general type, それ以外を exceptional type の多項式と呼ぶ.

上の定理の系として,

<u>定理</u> $P$を general type の多項式とすると, $P \circ T = P$とする $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$は algebraic で有限群をなす.

<u>注</u> 吉田(1977) ― 木塚.

$P$を exceptional type の多項式とすると $P \circ T = P$とする $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$は一般に trans. で無限群をなす。

34

# Gorenstein surface singularities with simple pluri-genera

奥間智弘　　群馬高専 一般教科(自然)

以下, $(X,x)$ を normal surface singularity over $\mathbf{C}$, $f:(M,A)\to(X,x)$ を $(X,x)$ の minimal good resolution とする. このとき、$m\in\mathrm{N}$ に対し $\delta_m(X,x)$ は

$$\delta_m(X,x)=\dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathcal{O}_{M-A}(mK_M))/H^0(\mathcal{O}_M(mK_M+(m-1)A))$$

と定義される. この多重種数の漸近的挙動について次のことが知られていた ([1], [3]):

$$\limsup_{m\to\infty}\delta_m/m^2<\infty.$$

そこで, 多重種数を 2 次以下の多項式で近似することを考える.

$K+A=P+N$ を Zariski 分解, すなわち $P$ と $N$ は $A$ に台を持つ $\mathbf{Q}$-因子で $P$ は $f$-nef, $N$ は正因子となるものとする. $P\cdot P=0$, すなわち $P=0$ となる必要十分条件は $(X,x)$ が log-canonical となることである.

定理 1. 有界関数 $v$ が存在して次が成り立つ.

$$\delta_{m+1}(X,x)=-(P\cdot P)m^2/2-(K\cdot P)m/2+v(m),$$

もし, $(X,x)$ が $\mathbf{Q}$-Gorenstein であれば $v$ は周期関数である.

定理 2. $r$ を $rP$ が整数係数となる最小の自然数とし, $q=m-[m/r]r$, $B_q=qN-[qN]$ と置く. $(X,x)$ が Gorenstein ならば上の関数 $v$ は $r$ を周期にもつ周期関数であり, 次のように書ける.

$$v(m)=p_g(X,x)-B_q\cdot B_q/2-K\cdot B_q/2-h^0(\mathcal{O}_{[qN]}(K+L_q)).$$

多重種数が一つの多項式で表現できるための必要十分条件が Gorenstein singularity について分かった.

定理 3. $(X, x)$ を $p_g(X, x) \geq 1$ となる Gorenstein surface singularity とする. このとき, $K + A$ が $f$-nef となるための必要十分条件は周期関数 $v$ が定数関数となることである.

$p_g(X, x) = 0$ となる Gorenstein singularity は有理 2 重点であり, $K + A = A$, すべての $m \in \mathrm{N}$ に対し $\delta_m(X, x) = 0$ となる.

## References

[1] S. Ishii, The asymptotic behavior of plurigenera for a normal isolated singularity, Math. Ann. 286 (1990), 803-812.

[2] T. Okuma, The plurigenera of Gorenstein surface singularities, Manuscripta Math. (to appear).

[3] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities. I, Math. Ann. 250 (1980), 65-94.

35

# Holomorphic maps into bounded complete Reinhardt domains of holomorphy which are Kobayashi isometries at one point

濱田　英隆　　　　　九州共立大学工学部

Let $M$ be a connected taut complex manifold of dimension $n$. Then we have the following theorem [3].

**Theorem 1** *Assume that the set* $\mathrm{H}(M)$ *of holomorphic functions on* $M$ *separates points of* $M$. *Let* $D$ *be a bounded complete Reinhardt domain of holomorphy in* $\mathbf{C}^n$. *Let* $f \in \mathrm{Hol}(M, D)$. *Let* $p$ *be a point of* $M$. *Assume that* $f(p) = 0$ *and that* $df_p$ *is an isometry for the infinitesimal Kobayashi metric. Then* $f$ *is a biholomorphic map.*

Graham [2] proved the above theorem when $M$ is a connected taut complex manifold of dimension $n$ and $D$ is a strictly convex bounded domain in $\mathbf{C}^n$. Belkhchicha [1] proved the above theorem when $D$ is the unit ball $B$ with respect to some norm on $\mathbf{C}^n$ and if one of the following two conditions is satisfied:
(i) $M$ is a taut domain in $\mathbf{C}^n$ ;
(ii) $M$ is a connected taut complex manifold of dimension $n$ which is complete for the integrated Carathéodory distance.
Graham used the results of Lempert on the existence and uniqueness of complex geodesics. Belkhchicha used the results of Vesentini on the existence and uniqueness of complex geodesics of $B$ at the origin in the direction of complex extreme points. Let $E$ be the subset of $\partial D \cap (\mathbf{C}^*)^n$ such that $\log|E|$ is the set of real extreme points for $\overline{\log|D|}$. We give a new result on the uniqueness of complex geodesics at the origin in the direction of $E$.

In the proof of the complex manifold case in Belkhchicha [1], he assumed that the set $\mathrm{H}^\infty(M)$ of bounded holomorphic functions on $M$ separates points of $M$. Our assumption is weaker than it, and the result of Belkhchicha [1] also holds for a connected taut complex manifold $M$ such that $\mathrm{H}(M)$ separates points of $M$. As a corollary, we can generalize a Stanton's theorem [5] concerning a characterization of the unit polydisc in $\mathbf{C}^n$ by the infinitesimal metrics (cf. Belkhchicha [1]).

**Corollary 1** *Let $M$ be a connected taut complex manifold such that* $\mathrm{H}(M)$ *separates points of $M$. Assume that at some point $p \in M$ the infinitesimal Carathéodory and Kobayashi metric coincide, and that their indicatrix at $p$ is a polydisc. Then $M$ is biholomorphic to the unit polydisc.*

For $p = (p_1, \ldots, p_n)$ with $p_1, \ldots, p_n > 0$, let

$$\mathcal{E}(p) = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{p_j} < 1\}.$$

When $D = \mathcal{E}(p)$, the holomorphic separability condition on $M$ can be omitted [4].

**Theorem 2** *Let $M$ be a connected taut complex manifold of dimension $n$ and let $f \in \mathrm{Hol}(M, \mathcal{E}(p))$. Let $p$ be a point of $M$. Assume that $f(p) = 0$ and that $K_M(p;\xi) = K_{\mathcal{E}(\alpha)}(f(p); df_p(\xi))$ for all $\xi \in T_pM$. Then $f$ is a biholomorphic map.*

# References

[1] L. Belkhchicha, *Caractérisation des isomorphismes analytiques sur la boule-unité de* $\mathbf{C}^n$ *pour une norme,* Math. Z. **215** (1994), 129–141.

[2] I. Graham, *Holomorphic mappings into strictly convex domains which are Kobayashi isometries at one point,* Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 917–921.

[3] H. Hamada, *Holomorphic mappings into bounded complete Reinhardt domains of holomorphy which are Kobayashi isometries at one point,* to appear in Complex Variables.

[4] H. Hamada and T. Honda, *Holomorphic maps into complex ellipsoids which are Kobayashi isometries at one point,* submitted.

[5] C.M. Stanton, *A characterization of the polydisc,* Math. Ann. **253** (1980), 129–135.

36

# A Schwarz lemma on complex ellipsoids

濱田　英隆　　　　　九州共立大学工学部

Let $D$ be the unit ball in $\mathbf{C}^n$ for some norm $\|\cdot\|$, and let $f \in \mathrm{Hol}(D, D)$ with $f(0) = 0$. By Hahn-Banach theorem, we have $\|f(z)\| \leq \|z\|$ on $D$. As a generalization of the Schwarz lemma in one complex variable, Vigué [3] proved the following theorem.

**Theorem 1** *Let $D$ be the unit ball in $\mathbf{C}^n$ for some norm $\|\cdot\|$, and let $f \in \mathrm{Hol}(D, D)$ with $f(0) = 0$. Assume that every boundary point of $D$ is a complex extreme point of $\overline{D}$. If one of the following conditions is satisfied, then $f \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.*
$(\mathrm{H}_1)$ *There exists a nonempty open subset $U$ of $D$ such that $\|f(x)\| = \|x\|$ on $U$,*
$(\mathrm{H}_2)$ *there exists a nonempty open subset $U$ of $D$ such that $c_D(f(0), f(x)) = c_D(0, x)$ on $U$, where $c_D$ denotes the Carathéodory distance on $D$,*
$(\mathrm{H}_3)$ *there exists a nonempty open subset $V$ of $T_0(D)$ such that $E_D(f(0), f'(0)v) = E_D(0, v)$ on $V$, where $E_D$ denotes the infinitesimal Carathéodory metric on $D$.*

Moreover, he showed that if there exists a point $a \in U \setminus \{0\}$ such that $f(a) = a$, or if the boundary $\partial D$ of $D$ is a real analytic submanifold of $\mathbf{C}^n$, then $f$ is a linear automorphism of $D$. As a corollary, he obtained that if $D$ is the unit ball of $\mathbf{C}^n$ for the Euclidean norm on $\mathbf{C}^n$, then $f$ is a linear automorphism of $D$. But, in the above results, the conditions $(\mathrm{H}_1)$ and $(\mathrm{H}_2)$ are strong, because a point in the unit disc $\Delta$ is of codimension 1 and an open set in $D$ is of codimension 0.

The aim of this talk is to consider an analogous result on complex ellipsoids $\mathcal{E}(p)$ ([1]). However, $\mathcal{E}(p)$ is not convex in general. For a bounded balanced convex domain $D$, the Minkowski function $h$ of $D$ is a norm on $\mathbf{C}^n$ and $D$ is the unit ball in $\mathbf{C}^n$ with respect to this norm. Also $c_D = \tilde{k}_D$ and $E_D = K_D$ in the convex case, where $\tilde{k}_D$ is the Lempert function and $K_D$ is the the infinitesimal Kobayashi pseudometric for $D$. So we use $h, \tilde{k}_D$ and $K_D$ instead of $\|\cdot\|, c_D$ and $E_D$.

Let $D$ be a balanced pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$. Let $f \in \mathrm{Hol}(D, D)$ with $f(0) = 0$. Then we have $h(f(z)) \leq h(z)$ on $D$.

Let $D$ be a bounded balanced pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$ which satisfies the following condition:
(*) For any $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ $(0 \leq k \leq n-1)$, let

$$\tilde{D} = D \cap \{z_{j_1} = \cdots = z_{j_k} = 0\}$$

be a domain in $\mathbf{C}^{n-k}$. Then every point of $\partial\tilde{D} \cap (\mathbf{C}^*)^{n-k}$ is an extreme point of $\overline{\tilde{D}}$.

**Theorem 2** *Let $f \in \mathrm{Hol}(D, D)$ with $f(0) = 0$. Let $M$ be a connected complex submanifold of dimension $n-1$ of an open subset $U$ of $D$ such that $a + T_a(M)$ does not contain the origin for some $a$ in $M$. Let $V$ be a connected open subset of the tangent space $T_0(D)$ to $D$ at the origin. If one of the following conditions is satisfied, then $f \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.*
$(\mathrm{H}_1')$ *$h(f(x)) = h(x)$ on $M$,*
$(\mathrm{H}_2')$ *$\tilde{k}_D(f(0), f(x)) = \tilde{k}_D(0, x)$ on $M$,*
$(\mathrm{H}_3')$ *$K_D(f(0), f'(0)v) = K_D(0, v)$ on $V$.*

When $D$ is a complex ellipsoid $\mathcal{E}(p)$, we can show that $f$ is a linear automorphism of $\mathcal{E}(p)$.

We will also give an example showing that our hypothesis cannot be weakened.

# References


[1] H. Hamada, *A Schwarz lemma on complex ellipsoids,* to appear in Ann. Polon. Math.

[2] H. Hamada and T. Yasuoka, *A general Schwarz lemma on complete Kähler manifolds,* submitted.

[3] J. P. Vigué, *Un lemme de Schwarz pour les domaines bornés symétriques irréductibles et certains domaines bornés strictement convexes,* Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 293-304.

[4] J. P. Vigué, *Le lemme de Schwarz et la caractérisation des automorphismes analytiques,* Astérisque **217** (1993), 241-249.

# Univalence and quasiconformal extension of holomorphic maps on balanced pseudoconvex domains

濱田　英隆　　　　九州共立大学工学部

Becker [1] showed that a function $f(z)$ holomorphic in the unit disc $\Delta$ which satisfies the condition

$$(1-|z|^2)|zf''(z)/f'(z)| \le c, \quad z \in \Delta$$

is univalent if $c = 1$, and extends to a quasiconformal homeomorphism of $\mathbf{C}$ onto itself if $c < 1$.

Pfaltzgraff [4], [5] has generalized Becker's results to the Euclidean unit ball in $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$.

**Theorem 1** *Let $\mathbf{B}^n$ denote the unit ball with respect to the Euclidean norm $\|\cdot\|$ on $\mathbf{C}^n$ and let $f$ be a local biholomorphic map on $\mathbf{B}^n$ which satisfies the condition*

$$(1-\|z\|^2)\|(Df(z))^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| \le c, \quad z \in \mathbf{B}^n,$$

*where $D^2f(z)(w,\cdot)$ denotes the linear operator obtained by restricting the symmetric bilinear operator $D^2f(z)(\cdot,\cdot)$ to $\{w\} \times \mathbf{C}^n$. Then $f$ is univalent in $\mathbf{B}^n$ if $c = 1$, and $f$ extends to a quasiconformal homeomorphism of $\mathbf{R}^{2n}$ onto itself, if $f$ is quasiregular in $\mathbf{B}^n$ and $c < 1$.*

He also remarked that if $c \le 1/3$, then the univalence result holds for arbitrary norm on $\mathbf{C}^n$.

In this talk, we give generalizations of the above results to a bounded balanced pseudoconvex domain ([3]). We say that $D$ has $C^1$ plurisubharmonic defining functions, if for any $\zeta \in \partial D$, there exist a neighborhood $U$ of $\zeta$ in $\mathbf{C}^n$ and a $C^1$ plurisubharmonic function $r$ on $U$ such that $D \cap U = \{z \in U \mid r(z) < 0\}$. Then $D$ is pseudoconvex. Let $\Omega$ be a bounded balanced domain in $\mathbf{C}^n$ with $C^1$-plurisubharmonic defining functions. Let $h$ be the Minkowski function of $\Omega$. Then $h$ is $C^1$ on $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$.

**Theorem 2** *Let $f(z)$ be locally biholomorphic in $\Omega$ and satisfy*

$$(1 - h^2(z))\|(Df(z))^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| \leq c \tag{1}$$

*for $z \in \Omega$ and*

$$\left|\left\langle (1 - h^2(z))(Df(z))^{-1}D^2f(z)(z,w), \frac{\partial h^2}{\partial \overline{z}}(z)\right\rangle\right| \leq c\left|\left\langle w, \frac{\partial h^2}{\partial \overline{z}}(z)\right\rangle\right| \tag{2}$$

*for $z \in \Omega \setminus \{0\}$ and $w \in \mathbf{C}^n$, where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotes the Euclidean inner product on $\mathbf{C}^n$ and $\partial h^2/\partial\overline{z} = (\partial h^2/\partial\overline{z_1}, \ldots, \partial h^2/\partial\overline{z_n})$. Then $f$ is univalent in $\Omega$ if $c \leq 1$, and $f$ can be extended to a quasiconformal homeomorphism of $\mathbf{R}^{2n}$ onto itself if $c < 1$ and $f$ is quasiregular in $\Omega$.*

When $n = 1$,the conditions (1) and (2) are equivalent to Becker's condition. Since we use subordination chains, a general Schwarz lemma between balanced pseudoconvex domains plays an important role. Since $\Omega$ is not necessarily convex, we use a Riemannian metric on $\partial\Omega$ for the proof of continuous extension to $\overline{\Omega}$.

# References


[1] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen,* J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.

[2] S. Gong, *Biholomorphic mappings in several complex variables,* Contemporary Mathematics **142** (1993), 15–48.

[3] H. Hamada, *Univalence and quasiconformal extension of holomorphic maps on balanced pseudoconvex domains,* submitted.

[4] J. A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in* $\mathbf{C}^n$, Math. Ann. **210** (1974), 55–68.

[5] J. A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in* $\mathbf{C}^n$, Ann. Acad, Scie. Fenn. Ser. A I Math. **1** (1975), 13–25.

[6] C. Pommerenke, *Über die subordination analytische funktionen,* J. Reine Angew. Math. **218** (1965), 159–173.

38

# Starlikeness criterions for holomorphic maps on balanced pseudoconvex domains

濱田　英隆　　　　　　九州共立大学工学部

Let $D$ be a domain in $\mathbf{C}^n$ which contains 0. A holomorphic map from $D$ to $\mathbf{C}^n$ is said to be starlike if $f$ is biholomorphic, $f(0)=0$ and $f(D)$ is starlike with respect to the origin.

Let $\Omega$ be a bounded balanced domain with $C^1$ plurisubharmonic defining functions. First, we give a necessary and sufficient condition for a local biholomorphic map on $\Omega$ to be starlike ([3]).

**Theorem 1** *Let $h$ be the Minkowski function of $\Omega$. Suppose $f: \Omega \to \mathbf{C}^n$ is a local biholomorphic map with $f(0)=0$. Let $w(z) = (Df(z))^{-1}(f(z))$. Then $f$ is starlike if and only if*

$$\mathrm{Re}\left\langle \frac{\partial h^2}{\partial z}(z), \overline{w(z)} \right\rangle \geq 0 \textit{ for any } z \in \Omega \setminus \{0\}. \tag{1}$$

*Remark.* If the inequallty (1) holds, we obtain

$$\mathrm{Re}\left\langle \frac{\partial h^2}{\partial z}(z), \overline{w(z)} \right\rangle > 0 \text{ for any } z \in \Omega \setminus \{0\}.$$

In the proof, a Schwarz type lemma on $\Omega$ plays an important role. For $p=(p_1,\dots,p_n)$ with $p_1,\dots,p_n>0$, let $\mathcal{E}(p)$ be a complex ellipsoid. When $p_1=\cdots=p_n>1$, Suffridge [7] showed the above theorem (cf. Matsuno [6]). When $2p_n > p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n > 1$, Gong, Wang and Yu [2] gave another necessary and sufficient condition that a local biholomorphic map from $\mathcal{E}(p)$ to $\mathbf{C}^n$ is starlike. They cannot obtain a necessary and sufficient condition that a local biholomorphic map from $\mathcal{E}(p)$ to $\mathbf{C}^n$ is starlike in the case that the condition $2p_n > p_1$ is dropped. However, the above theorem holds for all $\mathcal{E}(p)$ with $p_1,\dots,p_n>1$.

Next we give a sufficient condition to be starlike ([4]). Let $f$ be a locally biholomorphic map on the Euclidean unit ball $B$ which satisfies the condition

$$\|(Df(z))^{-1}D^2f(z)(z,\cdot)\| \leq M(z), \quad z \in B.$$

Liczberski [5] has shown that $M(z) < (1+\|z\|)^{-1}$ and $f(0) = 0$ implies that $f$ is starlike in $B$. For $\Omega$, we have the following theorem.

**Theorem 2** *Let $\Omega$ be a bounded balanced domain in $\mathbf{C}^n$ with $C^1$ plurisubharmonic defining functions. Let $h$ be the Minkowski function of $\Omega$. Let $f$ be a locally biholomorphic map on $\Omega$ satisfying $f(0) = 0$ and*

$$\left|\left\langle (Df(z))^{-1}D^2f(z)(z,w), \frac{\partial h^2}{\partial \overline{z}}(z)\right\rangle\right| \leq M(z)\left|\left\langle w, \frac{\partial h^2}{\partial \overline{z}}(z)\right\rangle\right|$$

*for $z \in \Omega \setminus \{0\}$ and $w \in \mathbf{C}^n$ with $M(z) < 1$. Then $f$ is starlike.*

# References


[1] S. Gong, *Biholomorphic mappings in several complex variables,* Contemporary Mathematics **142** (1993), 15–48.

[2] S. Gong, S. Wang and Q. Yu, *A necessary and sufficient condition that biholomorphic mappings are starlike on a class of Reinhardt domains,* Chin. Ann. of Math., **13B**:1(1992), 95–104.

[3] H. Hamada, *Starlike mappings on bounded balanced domains with $C^1$-plurisubharmonic defining functions,* submitted.

[4] H. Hamada and P. Liczberski, *A Starlikeness criterion for holomorphic mappings on balanced pseudoconvex domains,* preprint.

[5] P. Liczberski, *A starlikeness criterion for holomorphic mappings in $\mathbf{C}^n$,* Complex Variables **25** (1994), 193–195.

[6] T. Matsuno, *On star-like theorems and convex-like theorems in the complex vector space,* Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect A **5** (1955), 88-95.

[7] T. Suffridge, *The principle of subordination applied to functions of several complex variables,* Pacific J. Math., **33**(1970), 241–248.

39

# Growth theorems and quasiconformal extension of starlike maps on balanced pseudoconvex domains

濱田　英隆　　　　　九州共立大学工学部

Let $f$ be a univalent map in the unit disc $\Delta$ with $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. Then the classical growth theorem is as follows:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Barnard, FitzGerald and Gong [1] and Chuaqui [2] extended this to normalized starlike maps on the unit ball $\mathbf{B}^n$ in $\mathbf{C}^n$. Chuaqui [2] also obtained a quasiconformal extension of some strongly starlike map on $\mathbf{B}^n$.

In this talk, we will extend the above results to (strongly) starlike maps on a bounded balanced domain $\Omega$ with $C^1$ plurisubharmonic defining functions in $\mathbf{C}^n$ ([5]). Let $z \in \partial\Omega$ and let $\zeta \in \Delta \setminus \{0\}$. Then

$$\mathrm{Re}\left\langle \frac{\partial h^2}{\partial z}(\zeta z), \overline{w(\zeta z)} \right\rangle = |\zeta|^2 \mathrm{Re}\left\langle \frac{\partial h^2}{\partial z}(z), \overline{\left(\frac{w(\zeta z)}{\zeta}\right)} \right\rangle.$$

Since $w(0) = 0$, the function

$$\phi_z(\zeta) = \left\langle \frac{\partial h^2}{\partial z}(z), \overline{\left(\frac{w(\zeta z)}{\zeta}\right)} \right\rangle.$$

is holomorphic on $\Delta$ and $\mathrm{Re}\phi_z \geq 0$ on $\Delta$ from the starlikeness condition. By differentiating $h^2(\zeta z) = \zeta\overline{\zeta} h^2(z) = \zeta\overline{\zeta}$ with respect to $\zeta$ at $\zeta = 1$, we have

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h^2}{\partial z_j}(z) z_j = 1.$$

Since $Dw(0) = I$, this implies that $\phi_z(0) = 1$. Let

$$\sigma(\zeta) = \frac{\phi_z(\zeta) - 1}{\phi_z(\zeta) + 1}.$$

Then $\sigma$ is a holomorphic function on $\Delta$ with $\sigma(0) = 0$ and $|\sigma(\zeta)| \leq 1$.

$f$ is said to be strongly starlike if $\phi_z(\Delta)$ is contained in a compact subset of the right half-plane independent of $z \in \partial\Omega$. This condition is equivalent to the condition that there exists a constant $0 < c < 1$ such that $|\sigma(\zeta)| \leq c$ uniformly for $z \in \partial\Omega$.

**Theorem 1** *Let $\Omega$ be a bounded balanced pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$ with $C^1$ plurisubharmonic defining functions and let $f$ be a normalized starlike map from $\Omega$ to $\mathbf{C}^n$ with $|\sigma(\zeta)| \leq c \leq 1$ uniformly for $z \in \partial\Omega$. Let $h$ be the Minkowski function of $\Omega$. Then*

$$\frac{h(z)}{(1+ch(z))^2} \leq h(f(z)) \leq \frac{h(z)}{(1-ch(z))^2}.$$

*The estimates are sharp when $D = \mathcal{E}(p)$ with $p_1, \ldots, p_n > 1$.*

**Theorem 2** *Let $\Omega$ be as in Theorem 1, and let $f$ be a quasiconformal, strongly starlike map with $|w(z)|$ uniformly bounded on $\Omega$. Then $f$ extends to a quasiconformal homeomorphism of $\mathbf{R}^{2n}$ onto itself.*

# References


[1] R. W. Barnard, C. H. FitzGerald and S. Gong, *The growth and 1/4-theorems for starlike mappings in $\mathbf{C}^n$*, Pacific J. Math., **150** (1991), 13–22.

[2] M. Chuaqui, *Application of subordination chains to starlike mappings in $\mathbf{C}^n$*, Pacific J. Math., **168** (1995), 33–48.

[3] S. Gong, *Biholomorphic mappings in several complex variables,* Contemporary Mathematics **142** (1993), 15–48.

[4] S. Gong, S. Wang and Q. Yu, *The growth theorem for biholomorphic mappings in several comlplex variables,* Chin. Ann. of Math., **14B**:1(1993), 93–104.

[5] H. Hamada, *Starlike mappings on bounded balanced domains with $C^1$-plurisubharmonic defining functions,* submitted.

# KOBAYASHI-ROYDEN 計量の凸性について

小林正史 (東京大学大学院数理科学研究科)

$M$ を taut な複素多様体, つまり, 単位円板 $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} | |\zeta| < 1\}$ から $M$ への正則写像全体 $\mathcal{O}(\Delta, M)$ が正規族となるような複素多様体とする. このとき, $M$ 上の Kobayashi-Royden 計量を

$$F_M(\xi_p) = \inf\{t > 0 | \ f \in \mathcal{O}(\Delta, M), tf_*(d/d\zeta|_0) = \xi_p\}$$

で定める. ここで, $\xi_p \in \boldsymbol{T}M$ は正則接ベクトルである. $F_M$は次の性質をみたす.

(i) $F_M$ は連続,
(ii) $F_M(\xi_p) = 0 \Leftrightarrow \xi_p = 0$,
(iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について, $F_M(\lambda v_p) = |\lambda| F_M(v_p)$.

$F_M$ が $p \in M$ で凸とは $I_{F_M}(p) = \{\xi_p \in \boldsymbol{T}M | \ F_M(\xi_p) < 1\}$ が凸であることをいうが, $F_M$ は凸とは限らないことを注意しておく.

$F_M$ を用いて $M$ 上の Kobayashi 距離 $d_M$ を次のように定義する. まず, 実接ベクトル $v_p \in TM$ に対して正則接ベクトル $\xi_p \in \boldsymbol{T}M$ で $v_p = \xi_p + \bar{\xi}_p$ をみたすものがただ一つ存在することに注意して, $F_M(v_p) = 2F_M(\xi_p)$ と定める. そして,

$$d_M(p, q) = \inf_c \int F_M(c(t), c'(t))dt.$$

と定義する. ここで, $c$ は $p$ と $q$ を結ぶ $M$ 内の曲線を動くとした.

S. Kobayashi は $F_M$ が凸とは限らないことを克服するために $M$ の各点で $F_M$ の再双対をとることにより得られる Kobayashi-Busemann 計量 $\hat{F}_M$ を導入した. $\hat{F}_M$ は上の三つの性質をみたす. さらに, $\hat{F}_M$ は $M$ の各点で凸であり

$$d_M(p, q) = \inf_c \int \hat{F}_M(c(t), c'(t))dt$$

が成り立つ.

元来 $d_M$ は次のように定義されていた. $\rho$ を$\Delta$ 上の Poincaré 距離とする. $M \times M$ 上の Lempert 関数 $d^*_M$ を

$$d^*_M(p, q) = \inf\{\rho(p, q) | f \in \mathcal{O}(\Delta, M), p = f(a), q = f(b)\}$$

と定義する. ここで, $p = f(a)$, $q = f(b)$ をみたす $f \in \mathcal{O}(\Delta, M)$ が存在しないときは $d^*(p, q) = \infty$ としておく. これは一般には $M$ 上の距離

ではない．このとき

$$d_M(p,q)=\lim_{l\to\infty} d_M^{(l)}(p,q)$$

となる．ここで

$$d_M^{(l)}(p,q)=\inf\{\sum_{j=1}^{l} d_M^*(p_l,p_{l+1})|p=p_1,p_2,\ldots,p_l,p_{l+1}=q\in M\}$$

とした．

Kobayashi 距離の方向微分と, Kobayashi-Royden 計量の凸性についての結果を得た．

**Theorem .** $M$ を *taut* な複素多様体とし, *Hermite* 計量を一つ決める．$p\in M$ を固定すると, $0_p\in TM$ の十分小さな近傍 $U$ をとれば指数写像$\exp\colon U\to M$ が定まる．このとき

$$\lim_{\substack{u_q\to v_p\\ t\to 0}}\frac{d_M(q,\exp tu_q)}{|t|}=2\hat{F}_M(v_p)$$

が成り立つ．

つまり, $d_M$ の方向微分は存在して $\hat{F}_M$ になるということである．この定理から, $F_M$ が $p\in M$ で凸となる必要十分条件を得た．

**Corollary .** $p\in M$ について, 次の 2 条件は同値．

(i) $F_M$ は $p$ で凸．

(ii) $\displaystyle\lim_{\substack{q,q'\to p\\ q\neq q'}}\frac{d_M(q,q')}{d_M^*(q,q')}=1.$

| ※番号 | 題 | |
|---|---|---|
| 41 | | Webster計量の一般複素楕円体の特徴付け問題への応用 |


氏名 児玉秋雄

所属 金沢大学 理学部


$0 < p_1, \dots, p_s \in \mathbb{R}$, $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$, $n = n_1 + \cdots + n_s$

に対して，一般複素楕円体

$$(*) \quad E(n; n_1, \dots, n_s; p_1, \dots, p_s)$$

$$= \left\{ (z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_s} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{s} \|z_i\|^{2p_i} < 1 \right\}$$

の正則自己同型群からの特徴付け問題に関して，次の結果が知られている [1]：

> **定理** $D \Subset \mathbb{C}^n$, $E = E(n; n_1, \dots, n_s; p_1, \dots, p_s)$
>
> $x \in \partial D$ に対して，次の3条件を仮定する：
>
> (1) ${}^{\forall} p_i \in \mathbb{N}$, i.e., $\partial E$ は $C^{\omega}$.
>
> (2) $x \in \partial E$, ${}^{\exists}$open n.b.d. $Q$ of $x$ ; $D \cap Q = E \cap Q$.
>
> (3) ${}^{\exists} b \in D$, ${}^{\exists}\{\varphi_\nu\} \subset Aut(D)$ ; $\varphi_\nu(b) \to x$
>
> このとき，集合として，$D = E$ である．特に，${}^{\exists} p_i = 1$.

この証明には，$C^\omega$ 境界をもつ一般複素楕円体に関する G. Dini–A. Selvaggi [2] の結果を使うため，$\partial E$ の $C^\omega$ 性が必要であった．従って，自然に次の問題が起る：

| |
|---|
| $\boxed{\text{問題}}$ 上記定理において，$\partial E$ が実解析的でない場合にも，集合として $D=E$ となるか？ |

この講演では，$\mathbb{C}^n$ 内の umbilical points なしの $C^\omega$ stri. p.c. 超曲面上で定義される CR-不変な Webster 計量を用いることにより，上記の問題を $E$ が特別な場合，すなわち，$k\in\mathbb{N}$, $0<\alpha\in\mathbb{R}$ とし

$$E(k,\alpha)=\left\{(z_i)\in\mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k}|z_i|^2+\left(\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\right)^{\alpha}<1\right\}$$

に対して，肯定的に解決出来ることを報告したい．


[1] A. Kodama; Osaka J. Math. 32 (1995). 1055–1063.

[2] G. Dini–A. Selvaggi Primicerio; to appear in J. Geom. Anal.

[3] A. Kodama; Tôhoku Math. J. 40 (1988), 343–365.

[4] A. Kodama, S.G. Krantz and D. Ma; Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 173–195.

# 特別講演

## QUILLEN の計量と判別式

吉川 謙一
名古屋大学・多元数理科学研究科

### 1. 楕円曲線の判別式

一変数保型関数の理論において、Jacobi の$\Delta$-関数は特別に興味深い存在である：

$$\Delta(\tau) = q \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \quad q = \exp(2\pi i\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{1.1}$$

重さ 12 の尖点形式という条件は$\Delta(\tau)$ を特徴付けるが、それ以外にも様々な特徴付けが存在する。代数的には、$\Delta(\tau)$ は楕円曲線の判別式である (Jacobi)。すなわち、$E_\tau := \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\cdot\tau$ という楕円曲線の Weierstrass 表示を

$$E_\tau : y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau) \tag{1.2}$$

とすれば、次式が成立する：

$$g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 = (2\pi)^{12}\Delta(\tau). \tag{1.3}$$

解析的には、$\Delta(\tau)$ は $E_\tau$の（複素）解析的トーションである。つまり、$E_\tau$を不変平坦ケーラー計量 $g_{inv} = (Im\,\tau)^{-1}|dz|^2$が入ったケーラー多様体であると考え、その解析的トーションを$\tau(E_\tau)$ とする時、

$$Im\,\tau \cdot \tau(E_\tau) = (2\pi)^2|\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}} \tag{1.4}$$

が成立する（Kronecker の極限公式)。幾何学的に見ると、(1.4) の左辺はコホモロジーの行列式の標準的な断面 $1 \otimes dz$の Quillen ノルムである。詳しく述べよ

う。$p:\mathbb{E}\to\mathbb{H}$ を上半平面上の楕円曲線の基本族、すなわち、$p^{-1}(\tau)=E_\tau$となる族とする。$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{E}})$ をコホモロジーの行列式とする（コホモロジーの行列式の定義は第3節を参照）：

$$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{E}}) := \det p_*\mathcal{O}_{\mathbf{E}} \otimes (\det R^1 p_*\mathcal{O}_{\mathbf{E}})^{-1}. \tag{1.5}$$

Serre の双対性 $R^1p_*\mathcal{O}_{E_\tau}=(p_*\omega_{\mathbf{E}/\mathbb{H}})^\vee$から、$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{E}})$ は標準的な断面

$$\sigma_{\mathbf{E}}(\tau) := 1_\tau \otimes dz_\tau \tag{1.6}$$

を持つ。この時、次式が成立する：

$$\|1\otimes dz\|_Q^2(\tau) = (2\pi)^2|\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}. \tag{1.7}$$

ここで $\|\cdot\|_Q$は $g_{inv}$に関する$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{E}})$ の Quillen 計量である（Quillen 計量の定義は第3節を参照）。

(1.4) と (1.7) を根拠に我々は解析的トーションを判別式の解析的対応物と考え、コホモロジーの行列式の標準的な断面の Quillen ノルム、又は解析的トーションに現れる保型形式を解析的判別式と言うことにする。この時、(1.3), (1.4), (1.7) は以下のように要約できるであろう。

**命題 1.1.** 「楕円曲線の基本族に対して代数的判別式と解析的判別式は一致し、それは Jacobi の$\Delta$-関数である。」

本講演の目的は、命題 1.1 の Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$への高次元化を考察し、解析的判別式としての$\Delta(\tau)$ に相当する Siegel 保型形式を幾何学的に構成することである。Jorgenson-Todorov が既にそのような試みを Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間に対して行なっているが ([J-T1,2])、アーベル多様体の場合には自明な保型形式しか生み出さないようである。又、別のアプローチとして最近 Jorgenson-Kramer([J-K]) が偏曲アーベル多様体上の Green カレントを用いて Siegel 保型形式を構成しているが、種数が小さい時は我々の構成した保型形式と一致している。種数が大きい場合にも一致するかどうかはまだ筆者にはわからない。算術的 Riemann-Roch の定理を経由することにより両者に関係が付くと筆者は期待しているが、それを実行する事は今後の課題である。

## 2. アーベル多様体の基本族

楕円曲線の高次元化として主偏曲アーベル多様体を考えるのは自然であろう。そこで本節ではSiegel上半空間上の主偏曲アーベル多様体の基本族、及びSiegel保型形式について復習する。

$$\mathfrak{S}_g := \{\tau \in M(g;\mathbb{C});\quad {}^t\tau = \tau,\quad Im\,\tau > 0\} \tag{2.1}$$

を$g$次Siegel上半空間、$\mathfrak{S}_g$でパラメトライズされた$\mathbb{C}^g$の格子の族$\Lambda = \{\Lambda_\tau\}_{\tau\in\mathfrak{S}_g}$を

$$\Lambda_\tau := \mathbb{Z}\,e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\,e_g \oplus \mathbb{Z}\,\tau_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\,\tau_g \tag{2.2}$$

とする。ただし、$1_g = (e_1, \cdots, e_g)$, $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_g) \in \mathfrak{S}_g$である。$\mathfrak{S}_g$上の主偏曲アーベル多様体の基本族を、

$$p : \mathbb{A} := \mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g/\Lambda \to \mathfrak{S}_g \tag{2.3}$$

で定義する。$\tau \in \mathfrak{S}_g$上のファイバーは$A_\tau = \mathbb{C}^g/\Lambda_\tau$である。相対接束$T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g = \ker p_*$は大域切断$\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_g}\}$で生成されるので自明束であるが、これを各ファイバーの接束の族と見て、次のエルミート計量$g = \{g_\tau\}_{\tau\in\mathfrak{S}_g}$, $g_{inv} = \{g_{inv,\tau}\}_{\tau\in\mathfrak{S}_g}$を考える：

$$g_\tau := {}^t dz \cdot d\bar{z}, \quad g_{inv,\tau} := {}^t dz (Im\,\tau^{-1}) d\bar{z}. \tag{2.4}$$

$g_\tau$, $g_{inv,\tau}$はともにファイバー$A_\tau$上の平坦なケーラー計量であり、特にエルミート・ベクトル束$(T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g, g)$は平坦である。

$\Gamma_g := Sp(2g;\mathbb{Z})$を$g$次Siegelモジュラー群とする：

(2.5)

$$\Gamma_g := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2g;\mathbb{Z});\, {}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\Gamma_g$は$\mathbb{A}$に次のように作用する：

$$\gamma \cdot (z, \tau) = ({}^t(C\tau + D)^{-1} z, (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}), \quad \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

この作用により、モジュラー多様体を$\mathcal{A}_g := \mathfrak{S}_g/\Gamma_g$で定義する。$\mathcal{A}_g$は主偏曲アーベル多様体の同型類をパラメトライズする。また、$\Gamma_g$の作用で$g_{inv}$は不変である。

$\mathfrak{S}_g$上の正則関数 $f(\tau)$ は以下の条件を満たす時、重さ $k$の Siegel 保型形式であると言われる：任意の$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$に対して、

$$f(\gamma \cdot \tau) = \det(C\tau + D)^k \cdot f(\tau). \tag{2.7}$$

$\mathfrak{S}_g$の元を以下のように区分けする：

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & z \\ {}^t z & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 \in \mathfrak{S}_{g-1}, \quad z \in \mathbb{C}^{g-1}, \quad \tau_2 \in \mathbb{H}. \tag{2.8}$$

この時、Siegel 保型形式 $f(\tau)$ は以下のように展開される（Fourier-Jacobi 展開）：

$$f(\tau) = a_0(\tau_1) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(z, \tau_1)\, q^m, \quad q := \exp(2\pi i \tau_2). \tag{2.9}$$

１変数の場合は無限遠に付加すべき尖点は一意に定まるが、高次元ではいくつも境界因子が現れる。そこで$\tau_2 = +i\infty$ で定まる境界因子を尖点と思うのである。この尖点を最高次尖点と言う。$a_0(\tau_1) \equiv 0$ である時、$f(\tau)$ は尖点形式であると定義する。次の尖点形式は我々にとって重要である。

添字付きテータ関数を次式で定義する：

(2.10)

$$\theta_{a,b}(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} \exp\left(\pi i^t (m + \frac{1}{2}a) \cdot \tau \cdot (m + \frac{1}{2}a) + 2\pi i^t (m + \frac{1}{2}a) \cdot (z + \frac{1}{2}b)\right).$$

ここで、$z \in \mathbb{C}^g$, $\tau \in \mathfrak{S}_g$, $a, b \in \mathbb{F}_2^g$, $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ は標数２の素体である。$\theta(z, \tau) := \theta_{0,0}(z, \tau)$ は Riemann のテータ関数である。テータ関数の奇偶を${}^t a \cdot b \in \mathbb{F}_2$により定める。この時、Siegel 保型形式$\theta_{null,g}(\tau)$ を次式で定義する（$g \geq 3$）：

$$\theta_{null,g}(\tau) := \prod_{(a,b);even} \theta_{a,b}(0, \tau). \tag{2.11}$$

$\theta_{null,g}(\tau)$ には次の幾何学的な意味がある。即ち、$\tau$が$\theta_{null,g}(\tau)$ の零点であることと、アーベル多様体 $A_\tau$のテータ因子$\Theta_\tau$が位数２の点を含むことは同値であり、その点はテータ因子の特異点となる。従って$\theta_{null,g}(\tau)$ はテータ因子の判別式集合の一成分を定義する。$\theta_{null,g}(\tau)$ について次の事が知られている。

**命題 2.1.** 「$\theta_{null,g}(\tau)$ は重さ $(2^g + 1)2^{g-2}$の Siegel 保型形式で、最高次尖点で $2^{2g-5}$次の零を持つ。」

$g = 1, 2$ の場合、$\theta_{null,g}(\tau)$ は指標付の保型形式である。$g = 1$ の時、$\theta_{null,1}(\tau)^8$ が重さ１２の尖点形式になる。$g = 2$ の時、$\theta_{null,2}(\tau)^2$が重さ１０の保型形式になる。特に、$\theta_{null,1}(\tau)^8 = Const. \times \Delta(\tau)$ である。

## 3. コホモロジーの行列式と Quillen 計量

我々は解析的行列式に興味があるので、本節では Quillen 計量の定義を復習する。(Quillen 計量の一般論については [F], [S] 等を参照。)

$\pi : X \to S$を複素多様体の固有スムーズ射とし、$(E, h)$ を $X$上のエルミート・ベクトル束とする。コホモロジーの行列式$\lambda(E)$、又は$\lambda(\mathcal{O}_X(E))$ とは以下で定義される $S$上の直線束のことである：

$$\lambda(E) := \bigotimes_{q\geq 0} (\det R^q\pi_*\mathcal{O}_X(E))^{(-1)^q}. \tag{3.1}$$

($R^q\pi_*\mathcal{O}_X(E)$ が局所自由 $\mathcal{O}_S$-加群とは限らないので上の定義には問題があるが、我々は $R^q\pi_*\mathcal{O}_X(E)$ がベクトル束になる場合しか扱わないのでこの問題は気にしない。) 以下 $X$はケーラー多様体であると仮定し、$X$のケーラー計量を $g_X$と書く。$g_X$から定まる相対接束 $TX/S := \ker \pi_*$上の計量を $g_{X/S}$と書く。$g_{X/S}$は各ファイバー $X_t := \pi^{-1}(t)$ 上のケーラー計量 $g_t := g_X|_{X_t}$の族である。Hodge 理論によれば、Dolbeaut の同型を経由することにより$\lambda(E)$ の各ファイバーは調和形式の空間の行列式と同一視される：

(3.2)

$$\lambda(E)_t = \bigotimes_{q\geq 0} (\det H^q(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(E_t)))^{(-1)^q} \cong \bigotimes_{q\geq 0} \left(\det \mathcal{H}^{0,q}(X_t, E_t)\right)^{(-1)^q}.$$

ここで $\mathcal{H}^{0,q}(X_t, E_t)$ は $E_t$-値調和 $(0, q)$-形式の空間である。$\mathcal{H}^{0,q}(X_t, E_t)$ にはケーラー計量から定まる自然なエルミート内積が存在するので、この内積により$\lambda(E)$ はエルミート直線束の構造が入る。このエルミート計量を $\|\cdot\|_{L^2}$と書き $L^2$-計量と呼ぶ。しかし $L^2$-計量は良い計量ではない。実際、コホモロジーの跳躍に際して $\|\cdot\|_{L^2}$は $S$に連続的に依存しない。従って、連続な計量を得るためには $\|\cdot\|_{L^2}$に補正項を掛ける必要があるが、それが Ray-Singer の解析的トーションである (Quillen)。

そこで解析的トーションについて簡単に思い出しておく。ケーラー多様体 $(X_t, g_t)$ の $E_t$-値 $(0, q)$-形式に作用するラプラシアンを$\square_t^{0,q}$と書き、そのスペクトル・ゼータ関数を$\zeta_t^{0,q}(s)$ とする。$\zeta_t^{0,q}(s)$ は全平面に有理型関数に解析接続され、$s = 0$ で正則である。Ray-Singer の解析的トーションとは次式で定義される実数のことである：

$$\tau(X_t) := \prod_{q\geq 0} (\det \square_t^{0,q})^{(-1)^q q}, \quad \det \square_t^{0,q} := \exp\left(-\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \zeta_t^{0,q}(s)\right). \tag{3.3}$$

**定義 3.1.** $\lambda(E)$ の（$g_{X/S}$, $h$ に関する）Quillen 計量とは以下で定義されるエルミート計量のことである：

$$\|\cdot\|_Q^2(t) := \tau(X_t)\cdot\|\cdot\|_{L^2}^2(t).$$

Quillen 計量がパラメーターに滑らかに依存するのは大変結構な事であるが、それだけでは何故 Quillen 計量が良い計量かを説明した事にはならない。むしろ、次の意味で点ごとに Grothendieck-Riemann-Roch 公式を実現している事の方がより重要な事実である。

**定理 3.1 ([B-G-S]).** 「$c_1(\lambda(E),\|\cdot\|_Q)$ を $(\lambda(E),\|\cdot\|_Q)$ の Chern 形式とすれば次の公式が成り立つ：

$$c_1(\lambda(E),\|\cdot\|_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S})ch(E,h))^{(1,1)}.$$

ここで $Td(TX/S, g_{X/S})$ は $(TX/S, g_{X/S})$ の Todd 形式を、$ch(E,h)$ は $(E,h)$ の Chern 形式を表し、$\pi_*(\omega)^{(p,p)}$ は$\omega$をファイバー積分した後にその $(p,p)$-部分を取り出すことを意味する。」

以上は$\pi : X \to S$がスムース射の場合の $(\lambda(E),\|\cdot\|_Q)$ の曲率公式であるが、$S$がコンパクトか又はそれに近い場合には特異ファイバーが現れるのが普通である。この場合には、Picard-Lefschetz 型の議論をすることで Quillen 計量の特異因子が因子として判別式集合の有理数倍に一致することが証明される。即ち、次の定理が証明される。

**定理 3.2 ([Y1]).** 「$\pi : X \to S$を複素多様体間の射影的固有正則射とし、$S$は複素平面の単位円盤とする。さらに、$\pi$は $X_0$にのみ孤立臨界点を持ち、それ以外のファイバーでは非退化であるとする。$g_X$、$g_{X/S}$、$(E,h)$ は前と同様であるとし、$\|\cdot\|_Q$を $g_{X/S}$, $h$ に関する$\lambda(E)$ の Quillen 計量とする。以上の仮定の下で、$\|\cdot\|_Q$は$\lambda(E)$ の特異エルミート計量を定め、そのカレントとしての Chern 形式は次式で与えられる：

$$c_1(\lambda(E),\|\cdot\|_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S})ch(E,h))^{(1,1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}r(E)\mu(X_0)\delta_0.$$

ここで、$n = \dim X/S$, $r(E) = rank\, E$であり, $\mu(X_0)$ は特異ファイバーの全 Milnor 数を表し、$\delta_0 := -\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log|t|^2$は $t = 0$ に台を持つ Dirac の$\delta$-関数である。」

ここで述べた 2 つの定理は以降本文中で使われる事はないが、第 6 節で述べられる定理を証明する時に本質的に使われる。

## 4. アーベル多様体の判別式とテータ因子の判別式

本節では命題 1.1 のアーベル多様体版を考える。我々は解析的判別式に興味があるので、$\mathfrak{S}_g$上の関数としての解析的トーション、又はコホモロジーの行列式とその Quillen 計量を考察する。計量は (2.4) で定義したものを使う。結果を述べると解析的判別式には自明な保型形式しか現れない。従って、主偏曲アーベル多様体の基本族 (2.3) はこの観点から見るとつまらない族である。(しかし射影的双対を判別式と見る立場に立つと事情は一変して、保型形式を係数とする多項式が現れる。次節で我々はテータ因子の族を考察するが、それはこの立場の極限であると思える。詳しくは [Y2] を参照。) 以下その理由を説明する。

まず解析的トーションについてであるが、Ray-Singer の定理により $\mathfrak{S}_g$上の関数として恒等的に 1 である。この事実をコホモロジーの行列式を通して考る。定義により $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ のコホモロジーの行列式は$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{A}}) = \bigotimes_{q\geq 0} (\det R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}})^{(-1)^q}$で定義される直線束である。$\Gamma_g$の $\mathbb{A}$ への作用 (2.6) は各 $R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}}$に$\Gamma_g$-加群の構造を与えるが、この作用により$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$ は $\mathcal{A}_g$上の直線束とみなせる。さて、(2.3) のファイバーがアーベル多様体なので自然な写像$\bigwedge^q R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}} \to R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}}$ は$\Gamma_g$-同型である。$F$を $\mathfrak{S}_g$上の勝手なベクトル束とする時、

$$(4.1) \qquad \bigotimes_{q\geq 0} (\wedge^q F)^{(-1)^q} = \begin{cases} F^\vee & (rank\, F = 1) \\ 1 & (rank\, F > 1) \end{cases}$$

なので、$F = R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}}$として $g > 1$ ならば$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$ は $\mathcal{A}_g$上の自明束であり、$g = 1$ ならば$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{E}})$ はコサイクル $\{c\tau + d\}$ で定義される直線束である。即ち、$g = 1$ と $g > 1$ とでは$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$ のモジュラー多様体上の直線束としての構造が全く異なる。特に$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$ は $1_{\mathbf{A}}$という$\Gamma_g$-不変で至るところ零でない断面を持つ：

$$(4.2) \qquad \lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{A}}) =_{\Gamma_g} \mathcal{O}_{\mathcal{A}_g} \cdot 1_{\mathbf{A}}.$$

Ray-Singer の定理は $1_{\mathbf{A}}$の Quillen ノルムが $\mathfrak{S}_g$上 1 である事を意味し、$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbf{A}})$ が自明束である事の解析的表現である。この事は族 (2.3) の判別式軌跡からも推察できる。判別式軌跡とは $A_\tau$が特異であるような$\tau$全体の集合であるが、$\mathcal{A}_g$上では空である。しかしコンパクト化を考えると境界に判別式軌跡が現れ、特に佐竹コンパクト化を考えると $g > 1$ では判別式軌跡の余次元が 2 以上になる。これより $\mathfrak{S}_g$ $(g > 1)$ 上零を持たない保型形式は定数に限り、族 (2.3) の解析的判別式は自明である。従って判別式軌跡が $\mathfrak{S}_g$の内点に存在しなければ、その族の解析的判別式は自明である。

**5. テータ因子の判別式**

本節では$\mathfrak{S}_g$上にテータ因子の族を導入し、そのコホモロジーの行列式を考察する。

テータ因子の基本族を$p : \Theta := \{(z,\tau) \in \mathbb{A};\ \theta(z,\tau) = 0\} \to \tau \in \mathfrak{S}_g$で定義する。前と同様にファイバーを$\Theta_\tau$と書く。アーベル多様体の基本族の場合とは異なり、$(p, \Theta, \mathfrak{S}_g)$ には判別式軌跡が存在する：$N_g := \{\tau \in \mathfrak{S}_g;\quad Sing\,\Theta_\tau \neq \emptyset\}$. $N_g$ は Schottky 問題に関連して Andreotti-Mayer により導入されたので Andreotti-Mayer 軌跡と呼ばれる ([A-M])。$N_g$は$\Gamma_g$-作用で不変な軌跡なので $\mathcal{A}_g$上の軌跡を定めるが、この $\mathcal{A}_g$上の軌跡を $N_g$と同一視する。$N_g$に関しては以下の定理が基本的である。

**命題 5.1 ([D]).** 「$N_g$は $\mathcal{A}_g$の因子で次の 2 つの既約成分より成る：

$$N_g = \theta_{null,g} + 2 \cdot N'_g$$

ここで$\theta_{null,g}$は$\theta_{null,g}(\tau)$ の零因子である。」

我々はコホモロジーの行列式に興味があるのでテータ因子の基本族に対してそれを考える。そのために次の $\mathbb{A}$ 上の層の完全列を考える：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}}(-\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Theta} \longrightarrow 0. \tag{5.1}$$

(5.1) から導かれるコホモロジーの長完全列に小平消滅定理を組み合わせれば、次の同型を得る：

$$\lambda(\mathcal{O}_\Theta) \cong \lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{A}}) \otimes (p_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g})^{(-1)^g}. \tag{5.2}$$

ここで$\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}$は $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$ の相対標準束である。$\Gamma_g(1,2)$ をテータ因子を保つ元の全体からなる$\Gamma_g$の部分群とする：$\Gamma_g(1,2) := \{\gamma \in \Gamma_g; \gamma \cdot \Theta = \Theta\}$. $\Gamma_g(1,2)$ は各 $R^q p_* \mathcal{O}_\Theta$ に自然に作用して、同型 (5.2) は$\Gamma_g(1,2)$-加群としての同型を与える。良く知られているように、$\Gamma_g(1,2)$ は$\Gamma_g$の指数有限な部分群である。同型 (4.2) と (5.2) により、$\lambda(\mathcal{O}_\Theta)$ は楕円曲線の場合に現れた断面 (1.6) に類似した次の標準的な断面を持つ：

$$\sigma_\Theta(\tau) := 1_{\mathbb{A}}(\tau) \otimes (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g)_\tau^{(-1)^g}. \tag{5.3}$$

またモジュラー多様体 $\mathcal{A}_g(1,2) := \mathfrak{S}_g/\Gamma_g(1,2)$ （$\mathcal{A}_g$の有限被覆）上の直線束として$\lambda(\mathcal{O}_\Theta)$ は $\{\det(C\tau + D)^{(-1)^g}\}$ というコサイクルで定まる直線束である。このようにコホモロジーの行列式という観点から見るとテータ因子の基本族は楕円曲線の基本族の自然な一般化になっている。

## 6. Andreotti-Mayer 型式

第1～5節を踏まえて我々の得た結果を述べよう。第5節で定義したテータ因子の基本族 $(p, \Theta, \mathfrak{S}_g)$ に対して、その相対接束 $T\Theta/\mathfrak{S}_g$のエルミート計量 $g_\Theta$, $g_{\Theta,inv}$を次式で定める：

$$(6.1) \qquad g_\Theta := g|_{T\Theta/\mathfrak{S}_g}, \quad g_{\Theta,inv} := g_{inv}|_{T\Theta/\mathfrak{S}_g}.$$

ここで、$g$, $g_{inv}$は (2.4) で定義された $T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g$の計量である。$g_\Theta$, $g_{\Theta,inv}$を各ファイバーに制限して、テータ因子をケーラー多様体 $(\Theta_\tau, g_{\Theta_\tau})$, $(\Theta_\tau, g_{\Theta_\tau,inv})$ と見る。$\lambda(\mathcal{O}_\Theta)$ の $g_\Theta$に関する Quillen 計量を $\|\cdot\|_Q$とする。曲率公式（定理 3.1)、アノーマリ公式、及び Quillen 計量の特異因子が判別式因子に一致する事（定理 3.2）等を用いると次の定理が証明できる。

**定理 6.1 ([Y2]).** 「$N_g$を零因子として持ち、尖点で$\frac{(g+1)!}{12}$次の零を持つ重さ$\frac{(g+3)\cdot g!}{2}$の Siegel 保型形式$\Delta_g(\tau)$ が存在して、次の公式が成立する：

$$\|\sigma_\Theta\|_Q^2(\tau) = |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}}.$$

ただし、$g = 2$ の場合には$\Delta_2(\tau)$ は $\{\pm 1\}$ に値を持つ$\Gamma_2$の指標付き保型形式である。特に, $(\Theta_\tau, g_{\Theta_\tau,inv})$ の解析的トーション$\tau(\Theta_\tau)$ は次式で与えられる：

$$\tau(\Theta_\tau) = \left\{(2\pi)^g \cdot (\det\, Im\, \tau)^{\frac{g+3}{2(g+1)}} \cdot |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2}{(g+1)!}}\right\}^{(-1)^{g+1}}$$

我々は$\Delta_g(\tau)$ を種数 $g$の Andreotti-Mayer 形式と呼ぶ。」

命題 5.1 より$\theta_{null,g}(\tau)$ は$\Delta_g(\tau)$ の因子である。即ち、$N_g'$を零因子として持つ重さ$\frac{(g+3)\cdot g!}{4} - 2^{g-3}(2^g+1)$ の Siegel 保型形式 $J_g(\tau)$ が存在して、次式が成立する：

$$(6.2) \qquad \Delta_g(\tau) = \theta_{null,g}(\tau) \cdot J_g(\tau)^2.$$

種数が $g < 5$ の場合には, $\Delta_g(\tau)$ は定数倍を除いて知られている：

$$(6.3) \quad \Delta_g(\tau) = C_g \cdot \theta_{null,g}(\tau) \quad (g = 2, 3), \quad \Delta_4(\tau) = C_4 \cdot \theta_{null,4}(\tau) \cdot J_4(\tau)^2.$$

ここで、$J_4(\tau)$ は Schottky により発見された保型形式で、$\mathfrak{S}_4$中で種数 4 の曲線の Jacobian を特徴付ける。($J_4(\tau)$ の具体的な表示については [I] を参照。)

算術的 Riemann-Roch の定理、特に Bismut-Lebeau の定理 ([B-L]) を用いると$\Delta_g(\tau)$ の積分表示が得られる。

**定理 6.2 ([Y2]).** 「$c_1(L_\tau) := \frac{i}{2\pi}{}^t dz(Im\,\tau)^{-1}d\bar{z}$を $A_\tau$の不変ケーラー形式、$c_1(H_\tau) = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log{}^t z(Im\tau)\bar{z}$を $\mathbb{P}^{g-1}$ の Fubini-Study 形式とする。このとき、次式が成立する：

$$\log|\Delta_g(\tau)|^2 = \int_{\Theta_\tau}\sum_{i+j=g-1} c_1(L_\tau)^i\wedge\nu_\tau^* c_1(H_\tau)^j\cdot\log\|d\theta\|^2_{\Omega^1_{A_\tau}|_{\Theta_\tau}\otimes L_\tau}$$
$$+\int_{A_\tau}\log\|\theta\|^2_{L_\tau}\cdot c_1(L_\tau)^g - g!\cdot\log\det\,Im\tau + C(g).$$

ここで $C(g)$ は種数のみに依る定数で、$\nu_\tau$は Gauss 写像である：

$$\nu_\tau : \Theta_\tau \ni z \longrightarrow \left[\frac{\partial\theta}{\partial z_1}(z,\tau):\cdots:\frac{\partial\theta}{\partial z_g}(z,\tau)\right]\in\mathbb{P}^{g-1}.$$

($C(g)$ の具体的な値については [Y2] を参照。)」

定理 6.2 の応用として$\Delta_g(\tau)$ の Fourier-Jacobi 係数に関する情報が得られる。$\Delta_g(\tau)$ の最高次尖点に関する Fourier-Jacobi 展開を

$$\Delta_g(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty}\theta_{g,m}(z,\tau_1)\,q^m,\quad q=\exp(2\pi i\tau_2) \tag{6.4}$$

とすると、定理 6.1 から次式が直ちに従う：

$$\theta_{g,m}=0,\quad (m<\frac{(g+1)!}{12}),\quad \theta_{g,\frac{(g+1)!}{12}}\neq 0. \tag{6.5}$$

(2.8) の分解で $\mathfrak{S}_{g-1}\times\mathbb{H}\subset\mathfrak{S}_g$であり、この埋め込みに関して $\mathfrak{S}_{g-1}\times\mathbb{H}\subset N_g$ である。従って $z=0$ で$\theta_{g,m}(z,\tau_1)=0$ が $m$ に依らずに成り立つが、より強く $\theta_{m,g}(z,\tau_1)=0$ の $z=0$ での接錐が $m$ に依らないことがわかる。正確に述べよう。$\Delta(\tau)^k$の$+i\infty$ での Fourier 係数を $\{c(m,k)\}$ とする：

$$\sum_{m=0}^{\infty}c(m,k)\,q^m := \Delta(q)^k = \left\{q\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\right\}^k. \tag{6.6}$$

特に、$m<k$ならば $c(m,k)=0$ で 、すべての $m\in\mathbb{Z}$ に対して $c(m,k)\in\mathbb{Z}$ である。定理 6.2 をテータ因子の退化族：$X=\{\Theta_{\tau(t)}\}$, $\tau(t)=\begin{pmatrix}\tau_1 & t\cdot z\\ t\cdot{}^t z & \tau_2\end{pmatrix}$,

$$\Theta_{\tau(0)} = \Theta_{\tau_1}\times E_{\tau_2} + A_{\tau_1}\times\left\{\frac{1+\tau_1}{2}\right\} \tag{6.7}$$

に対して適用すれば、次の定理が従う。

**定理 6.3 ([Y3]).** 「任意の $m \geq 0$ に対して、$\theta_{g,m}(t \cdot z, \tau_1)$ は $t = 0$ で $\frac{(g-1)\cdot g!}{2}$ 次の零を持ち、さらに次の極限公式が成立する：

$$\lim_{t \to 0} \frac{\theta_{g,m}(t \cdot z, \tau_1)}{\theta_{g,\frac{(g+1)!}{12}}(t \cdot z, \tau_1)} = c\left(m, \frac{(g+1)!}{12}\right).$$

特に、

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta_g\begin{pmatrix} \tau_1 & t \cdot z \\ t \cdot {}^t z & \tau_2 \end{pmatrix}}{\theta_{g,\frac{(g+1)!}{12}}(t \cdot z, \tau_1)} = \Delta(\tau_2)^{\frac{(g+1)!}{12}}.$$

である。」

最後に Andreotti-Mayer 形式に関する幾つかの問題を挙げて本講演を終りにしたい。

Jacobi の$\Delta$-関数は無限積表示 (1.1) を持つが、最近 Gritsenko-Nikulin により $\Delta_2(\tau)$ も (1.1) に類似した無限積表示を持つことが発見された ([G-N])。そこで次の問題を提出したい。

**問題 6.1.** 「$\Delta_g(\tau)$ は (1.1) に類似した無限積表示を持つか？」

Gritsenko-Nikulin の仕事を見る限り、$\Delta_g(\tau)$ の表現論的対応物を見つけることが鍵になると思われる。(そのようなものが存在するとは限らないが .....)

それとは別に $g = 1, 2$ では、$\Delta(\tau)$, $\Delta_2(\tau)^2$はともに Hecke 作用素の同時固有関数になっている。そこで次の問題も自然であろう。

**問題 6.2.** 「$\Delta_g(\tau)$ は Hecke 作用素の同時固有関数になっているか？」

問題 6.1, 6.2 に関連して、Mumford による次の問題 ([M]) を挙げたい。

**問題 6.3.** 「定数倍を無視すれば、$\Delta_g(\tau) \in \mathbb{Z}[\,\theta_{a,b}(0,\tau)\,]_{a,b \in \mathbf{F}_2^g}$ となるか？ 又、その時$\Delta_g(\tau)$ の具体的な表示式を求めよ。」

Jacobi の$\Delta$-関数や$\Delta_2(\tau)^2$の Fourier 係数はすべて整数であったが、$\Delta_g(\tau)$ に対してもその類似が成立するかどうかは問題 6.3 に関連して興味深い問題である。

**問題 6.4.** 「定数倍を無視した時、$\mathbb{Q}$ 上の有限次代数体 $K$が存在して、

$$\Delta_g(\tau) \in K[[\, q_{ij}\,]]_{1 \leq i,j \leq g}, \quad q_{ij} := \exp(\pi i \tau_{ij})$$

となるか？ 又、上で $K$をその整数環 $\mathcal{O}_K$で置き換えられるか？」

## References


[A-M]. Andreotti, A., Mayer, L., *On period relations for Abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **21** (1967), 189-238.

[B-G-S]. Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C., *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III*, Commun. Math. Phys. **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.

[B-L]. Bismut, J.-M., Lebeau, G., *Complex immersions and Quillen metrics*, Publ. Math. IHES **74** (1991), 1-297.

[D]. Debarre, O., *Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 687-708.

[F]. Faltings, G., *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem*, Ann. of Math. Study **127** (1992).

[G-N]. Gritsenko, V., Nikulin, V., *Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac-Moody Lie algebras*, Amer. Jour. Math. **119** (1997), 181-224.

[I]. Igusa, J., *On the irreducibility of Schottoky's divisor*, Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo **28** (1982), 531-545.

[J-K]. Jorgenson, J. and Kramer, J., *Towards the arithmetic degree of line bundles on abelian varieties*, preprint (1997).

[J-T1]. Jorgenson, J., Todorov, A., *A conjectured analogue of Dedekind's eta function for $K3$ surfaces*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 359-376.

[J-T2]. ———, *Analytic discriminants for manifolds with canonical class zero*, Symposia Math. **36** (1996), 223-260.

[M]. Mumford, D., *On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety*, Lect. Notes Math. **997** (1983), 348-375.

[S]. Soulé, C. et al., *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge University Press.

[Y1]. Yoshikawa, K.-I., *Smoothing of isolated hypersurface singularities and the Quillen metric*, preprint, Institut Fourier, Grenoble (1996).

[Y2]. ———, *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, preprint (1997).

[Y3]. ———, *A limit formula for Andreotti-Mayer forms*, preprint (1997).

# 函数論メーリングリスト

1) １９９６年３月に函数論メーリングリストを開設して以来２００名以上の登録者がいて、順調に運営されています．このメーリングリストは電子メールを用いて函数論の研究者どうしの連絡をとりあうことが主な目的です．現在では研究集会、シンポジウム、セミナーなどの連絡も主に函数論メーリングリストを通じておこなわれています．

函数論メーリングリストへの登録や登録の解除はどなたでも自由におこなえます．

2) **メーリングリストへの登録方法**
メーリングリストへ登録するためには次のメールアドレス

majordomo@math.sci.yamaguchi-u.ac.jp

に本文の内容を

subscribe ca-ml
end

と書いたメールを送ってください．自動的に登録されます．ご不明な点がございましたら下記の問合せ先へお尋ねください。

函数論メーリングリストへのメールの投稿方法などの詳しい情報はメーリングリストへ登録をおこなった方へ、登録されたことの報告とともにメールで送られます．

3) 冒頭に書きましたように現在の登録者数は２００名をこえています．ですがこの数字は現在電子メールを使用している函数論研究者の一部であると推測されます．どうか、近隣の方で未登録の方がおられましたら登録をお勧めください．

4) 函数論ホームページが京都大学の須川さんにより開設されています．ホームページのURL は

http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/complex/

です．是非ご利用ください．

問合せ先：郷間知巳
gouma@math.sci.yamaguchi-u.ac.jp