日　本　数　学　会

１９９７年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９７年４月

於　信　州　大　学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする．

2. 委員会の任務
   (1) 函数論分科会評議員候補者を選出する．
   (2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦．
   (3) 科研費基盤研究（審査区分（１））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼．
   (4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる．
   (5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する．
   (6) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する．
   (7) 次期委員会委員候補者の推薦．
   (8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する．

3. 委員会の構成及び委員の選出·任期
   (1) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する．必要に応じ追加， 削減できる．
   (2) 委員の任期は春季学会から２年間とする．再任は妨げないが，原則として再々任は認めない．
   (3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う．
       (i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する．その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する．
       (ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する．

4. 委員会の開催及び議決
   (1) 委員会は評議員が召集する．
   (2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する．
   (3) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する．必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる．
   (4) 案件の議決は投票によってはならない．決定できない時は懸案事項として次回に繰越す．緊急事項については評議員に処置を一任する．

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務
   (1) 委員会の司会をする．
   (2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する．
   (3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する．
   (4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する．

付 則　この規則は，1974 年 10 月 12 日より施行する．
付 則　この規則の改正は，1996 年 8 月 1 日より施行する．

函 数 論 分 科 会

4月3日（木） 第V会場
（共通教育センター51番教室）

9:00〜12:00

1	崔 宰 豪	（福 岡 大 理）	Some properties of multivalent functions associated with	
	西郷 恵	（福 岡 大 理）	fractional calculus	15
2	尾和 重義	（近 畿 大 理 工）	Notes on Bernardi integral operators	15
	Jian Lin Li	（西 北 工 業 大）		
3	西本 勝之	（デカルト出版）	N-fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous Gauss equation	15
4	戸田 暢茂	（名 工 大）	On $\delta(a, f)$ for a holomorphic curve f with maximal deficiency sum	15
5	中井 三留		双曲性の非極大性	15
	多田 俊政	（大 同 工 大）		
6	須川 敏幸	（京 大 理）	Uniform perfectness of limit sets of Kleinian groups	15
7	須川 敏幸	（京 大 理）	Uniform perfectness of Julia sets of rational functions	15
8	斎藤 三郎	（群 馬 大 工）	逆写像を元の写像で表現する一般原理と，リーマンの写像関数，調和写像への応用について	15
9	山本 昌宏	（東 大 数 理）	熱方程式の解の解析性について	15
	斎藤 三郎	（群 馬 大 工）		
10	藤解 和也	（金 沢 大 工）	線型常微分方程式の有理型函数解の対数導函数について	15

14:15〜16:15

11	山田 雅博	（広 島 大 理）	L^p-Lipschitz classes and weighted Bergman spaces	15
12	下村 勝孝	（茨 城 大 理）	The determination of caloric morphisms on Euclidean domains	15
13	水田 義弘	（広島大総合科）	ソボレフの埋蔵定理について	15
	下村 哲	（広島大総合科）		
14	渡辺ヒサ子	（お茶の水女大理）	フラクタルな側面を持つ円筒における2重層ポテンシャル	15
15	二宮 信幸		ポテンシャル論における最少変分の方法	15
16	相川 弘明	（島根大総合理工）	Extremal length of vector measures	15
	大津賀 信			
17	相川 弘明	（島根大総合理工）	Norm estimate of Green operator and perturbation of Green function	15

16:30〜17:30 特別講演

	正岡 弘照	（京 都 産 大 理）	非有界被覆面の Martin 境界	60
	瀬川 重夫	（大 同 工 大）		

4月4日（金）　第Ⅴ会場

9:30～12:00

14:15～15:10

15:20～16:20　特別講演

1

Some Properties of Multivalent Functions Associated with Fractional Calculus

崔 宰豪　　福岡大・理

西郷 恵　　福岡大・理

Let $\mathcal{A}(p)$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p} z^{k+p} \qquad (p \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

being analytic in the open unit disk $\mathcal{U}$, and $\mathcal{A}'$ the class of all analytic functions $f(z)$ with $f(0) = 1$ in $\mathcal{U}$.

Let $f(z)$ be an analytic function and $g(z)$ be a univalent function satisfying $f(0) = g(0)$ and $f(\mathcal{U}) \subset g(\mathcal{U})$, then $f(z)$ is said to be subordinate to $g(z)$, and is written as $f(z) \prec g(z)$.

In this report, we consider a best dominant of the differential subordination [1], [3] and investigate some properties of multivalent functions associated with the fractional calculus operator [2], [4].

Theorem 1. *Let $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ and let $\alpha > -p, \beta, \eta \in \mathbf{R}$ and $p > \max\{\beta - 1, \beta - \eta - 1, -\alpha - \eta - 1\}$. If*

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathcal{I}_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} f(z)}{z^{p-\beta}}\right\} > \gamma \qquad \left(0 \leq \gamma < \frac{p!\Gamma(p-\beta+\eta+1)}{\Gamma(p-\beta+1)\Gamma(p+\alpha+\eta+1)}\right),$$

then

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathcal{I}_{0,z}^{\alpha+1,\beta-1,\eta-1} f(z)}{z^{p-\beta+1}}\right\} > \frac{\gamma}{p-\beta+1}$$
$$+\left(\frac{p!\Gamma(p-\beta+\eta+1)}{\Gamma(p-\beta+2)\Gamma(p+\alpha+\eta+1)} - \frac{\gamma}{p-\beta+1}\right)\left(\int_0^1 \frac{2dt}{1+t^{1/(p-\beta+1)}} - 1\right)$$

and $\mathcal{I}_{0,z}^{\alpha+1,\beta-1,\eta-1} f(z) \in \mathcal{H}^q$ $(0 < q < \infty)$. The estimate is sharp in general.

Theorem 2. *Let $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ and let $a > 1, \alpha > -p$, $\beta, \eta \in \mathbf{R}$ and $p > \max\{\beta - 1, \beta - \eta - 1, -\alpha - \eta - 1\}$. If*

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathcal{I}_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} f(z)}{z^{p-\beta}}\right\} > \frac{p!\Gamma(p-\beta+\eta+1)}{\Gamma(p-\beta+1)\Gamma(p+\alpha+\eta+1)}\gamma$$

$$\left(\frac{p-\beta}{2(p-\beta+1)} \leq \gamma < 1\right)$$

and

$$\gamma + (1-\gamma)\left(\int_0^1 \frac{2at^{a-1}}{1 - zt^{a/(p-\beta+1)}}dt - 1\right) \prec 2\gamma - 1 + \frac{2(1-\gamma)}{1-z} ,$$

then

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathcal{I}_{0,z}^{\alpha+1,\beta-1,\eta-1} f(z)}{z^{p-\beta+1}}\right\}^{1/a} > \left[\frac{p!\Gamma(p-\beta+\eta+1)}{\Gamma(p-\beta+2)\Gamma(p+\alpha+\eta+1)}\right.$$

$$\left.\cdot\{2\gamma - 1 + 2(1-\gamma){}_2F_1(p-\beta+1, 1; p-\beta+2; -1)\}\right]^{1/a} .$$

The estimate is sharp in general.

Theorem 3. *Let $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ and let $\alpha > -p, \beta, \eta \in \mathbf{R}$, $p > \beta - \eta - 1$ and $0 \leq \delta < 1$. If*

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z\mathcal{I}_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} f(z)}{\mathcal{I}_{0,z}^{\alpha+1,\beta-1,\eta-1} f(z)}\right\} > \begin{cases} p - \beta + \dfrac{2-3\delta}{2(1-\delta)} & \left(0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}\right) \\ p - \beta + \dfrac{3\delta - 1}{2\delta} & \left(\frac{1}{2} \leq \delta < 1\right) \end{cases} ,$$

then

$$\frac{\Gamma(p-\beta+2)\Gamma(p+\alpha+\eta+1)}{p!\Gamma(p-\beta+\eta+1)} \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathcal{I}_{0,z}^{\alpha+1,\beta-1,\eta-1} f(z)}{z^{p-\beta+1}}\right\} > \delta .$$

[1] S. Miller and P. Mocanu, On some class of first-order differential subordinations, *Michigan Math. J.* **32**(1985), 185-195.

[2] S. Owa, On the distortion theorems, *I. Kyungpook Math. J.* **18**(1978), 53-59.

[3] S. Ponnusamy, Differential subordination and Bazilevič functions, *Proc. Indian Acad. Sci.* **105**(1995), 169-186.

[4] M. Saigo, A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions, *Rep. College General Ed. Kyushu Univ.* **11**(1978), 135-143.

2 NOTES ON BERNARDI INTEGRAL OPERATORS

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY

JIAN LIN LI NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}(p)$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n} \qquad (p \in \mathbb{N})$$

that are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$.

A function $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ is said to be a member of the class $\mathcal{A}(p,\alpha)$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\{f'(z)/z^{p-1}\} > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some real α $(0 \leqq \alpha < p)$. For $f(z) \in \mathcal{A}(p)$, we define $D^{\beta}f(z)$ by

$$(p+1)^{-\beta} D^{\beta} f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p+n}{p+1}\right)^{\beta} a_{p+n} z^{p+n} ,$$

where $\beta \geqq 0$. A function $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ is said to be in the class $\mathcal{B}(p,\alpha,\beta)$ if it satisfies that

$$(p+1)^{-\beta} D^{\beta} f(z) \in \mathcal{A}(p,\alpha).$$

For $f(z)$ belonging to $A(p)$, Bernardi integral operator $J_{p,c}(f(z))$ is given by

$$J_{p,c}(f(z)) = \frac{p+c}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)dt \qquad (c > -p)$$

$$= z^p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p+c}{p+n+c}\, a_{p+n} z^{p+n} .$$

THEOREM 1. If $f(z) \in B(p,\alpha,\beta)$, then $J_{p,c}(f(z)) \in B(p,\mu,\beta)$, where

$$\mu = p+2(p-\alpha)(p+c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+n+c} .$$

The result is sharp.

THEOREM 2. If $f(z) \in B(p,\alpha,\beta)$, then $J^{\lambda}_{p,1}(f(z)) \in B(p,\mu,\beta)$, where

$$\mu = p+2(p-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{p+1}{p+n+1}\right)^{\lambda}$$

and

$$J^{\lambda}_{p,1}(f(z)) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p+1}{p+n+1}\right)^{\lambda} a_{p+n} z^{p+n} \quad (\lambda > 0).$$

The result is sharp.

3 N-fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous Gauss equation

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this paper we treat the nonhomogeneous Gauss equation in the same procedure as the case of homogeneous Gauss equation in the previous paper [6] of the author. Then the two more fractional differintegrated form solutions, which are different from the previous one reported already, are shown newly.

Theorem 1. *Let* $\varphi \in \wp^{\circ} = \left\{ \varphi \,\middle|\, 0 \neq |\varphi_{\nu}| < \infty, \nu \in R \right\}$ *and* $f \in \wp^{\circ}$, *then the nonhomogeneous Gauss equation*

$$L[\varphi, z; \alpha, \beta, \gamma]$$

$$= \varphi_2 \cdot (z^2 - z) + \varphi_1 \cdot \left\{ z(\alpha + \beta + 1) - \gamma \right\} + \varphi \cdot \alpha\beta = f \qquad (z \neq 0, 1) \tag{0}$$

has solutions of the forms

(*Group I*);

$$\varphi = \left(\left(f_{-\alpha} \cdot z^{\gamma-\alpha-1} (z-1)^{\beta-\gamma} \right)_{-1} \cdot z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \right)_{\alpha-1} \equiv \varphi^{*}_{(1)}, \qquad (denote) \tag{1}$$

$$\varphi = \left(\left(f_{-\beta} \cdot z^{\gamma-\beta-1} (z-1)^{\alpha-\gamma} \right)_{-1} \cdot z^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \right)_{\beta-1} \equiv \varphi^{*}_{(2)}, \tag{2}$$

$$\varphi = \left(z^{\alpha-\gamma} (z-1)^{\gamma-\beta-1} \cdot \left(f_{-\alpha} \cdot z^{\gamma-\alpha-1} (z-1)^{\beta-\gamma} \right)_{-1} \right)_{\alpha-1} \equiv \varphi^{*}_{(3)}, \tag{3}$$

$$\varphi = \left(z^{\beta-\gamma} (z-1)^{\gamma-\alpha-1} \cdot \left(f_{-\beta} \cdot z^{\gamma-\beta-1} (z-1)^{\alpha-\gamma} \right)_{-1} \right)_{\beta-1} \equiv \varphi^{*}_{(4)}, \tag{4}$$

(*Group II*);

$$\varphi = z^{1-\gamma} \left(\left((f \cdot z^{\gamma-1})_{\gamma-\beta-1} \cdot z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \right)_{-1} \cdot z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \right)_{\beta-\gamma} \equiv \varphi^{*}_{(5)}, \tag{5}$$

$$\varphi = z^{1-\gamma} \left(\left((f \cdot z^{\gamma-1})_{\gamma-\alpha-1} \cdot z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} \right)_{-1} \cdot z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \right)_{\alpha-\gamma} \equiv \varphi^{*}_{(6)}, \tag{6}$$

$$\varphi = z^{1-\gamma} \left(z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \cdot \left((f \cdot z^{\gamma-1})_{\gamma-\beta-1} \cdot z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \right)_{-1} \right)_{\beta-\gamma} \equiv \varphi^{*}_{(7)}, \tag{7}$$

$$\varphi = z^{1-\gamma} \left(z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \cdot \left((f \cdot z^{\gamma-1})_{\gamma-\alpha-1} \cdot z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} \right)_{-1} \right)_{\alpha-\gamma} \equiv \varphi^{*}_{(8)}), \tag{8}$$

(*Group III*)

$$\varphi = (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(\left((f \cdot (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma})_{\alpha-\gamma} \cdot z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \right)_{-1} \cdot z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} \right)_{\gamma-\alpha-1} \equiv \varphi^{*}_{(9)}, \tag{9}$$

$$\varphi = (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(\left((f \cdot (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma})_{\beta-\gamma} \cdot z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \right)_{-1} \cdot z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \right)_{\gamma-\beta-1} \equiv \varphi^{*}_{(10)}, \tag{10}$$

$$\varphi = (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(z^{-\alpha} (z-1)^{\beta-1} \cdot \left((f \cdot (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma})_{\alpha-\gamma} \cdot z^{\alpha-1} (z-1)^{-\beta} \right)_{-1} \right)_{\gamma-\alpha-1} \equiv \varphi^{*}_{(11)}, \tag{11}$$

$$\varphi = (z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \left(z^{-\beta} (z-1)^{\alpha-1} \cdot \left((f \cdot (z-1)^{\alpha+\beta-\gamma})_{\beta-\gamma} \cdot z^{\beta-1} (z-1)^{-\alpha} \right)_{-1} \right)_{\gamma-\beta-1} \equiv \varphi^{*}_{(12)}, \tag{12}$$

for $z \neq 0, 1$, *where* $\varphi_k = d^k\varphi / dz^k$ $(k = 0, 1, 2)$, $\varphi_0 = \varphi = \varphi(z), z \in C$, f *is a given function, and* α, β *and* γ *are given constants.*

References

[1] K. Nishimoto; Solutions of Gauss equation in fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol. 3, May (1993), 29-37.

[2] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1-11.

[3] K. Nishimoto; Solutions of homogeneous Gauss equations, which have a logarithmic function, in fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol. 5, May (1994), 11-25.

[4] K. Nishimoto and Susana S. de Romero; N-fractional calculus operator N^ν method to nonhomogeneous Whittaker equations (I), J. Frac. Calc. Vol. 9, May (1996), 17-22.

[5] K. Nishimoto, Judith A. de Durán and Leda Galué; N-fractional calculus operator N^ν method to nonhomogeneous Fukuhara equations (I), J. Frac. Calc. Vol. 9, May (1996), 23-31.

[6] K. Nishimoto; Kummer's twenty-four functions in N-fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol. 10, Nov. (1996), 1-18.

[7] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[8] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[9] K. B. Oldham and J. Spanier; The Fractional Calculus (1974), Academic Press.

[10] K. S. Miller and B. Ross; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations (1993), John Wiley & Sons. Inc.

4 On $\delta(a,f)$ for a holomorphic curve f with maximal deficiency sum

TODA Nobushige Nagoya Institute of Technology

1 **Introduction.** Let N and n be integers satisfying $N \geq n \geq 1$, $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ a transcendental, linearly non-degenerate holomorphic curve from C into $P^n(C)$ with a reduced representation $(f_1, \cdots, f_{n+1}) : C \to C^{n+1} - \{0\}$, X a subset of $C^{n+1} - \{0\}$ in N-subgeneral position satisfying $\#X > 2N - n + 1$. The following defect relation due to E.I.Nochka is well-known.

Theorem A. For any vectors $a_1, \cdots, a_q (1 \leq q < \infty)$ in X

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(a_j, f) \leq 2N - n + 1$$

(see [1]).

The purpose of this talk is to give some results on the deficiency $\delta(a, f)$ when the equality holds in Theorem A.

2 **Definition.** We put

$$u(z) = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)|,$$

$$t(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\log u(re^{i\theta}) - \log u(e^{i\theta})\} d\theta$$

and

$$\Omega = \limsup_{r \to \infty} t(r, f)/T(r, f),$$

where $T(r, f)$ is the characteristic function of f. Note that $0 \leq \Omega \leq 1$ ([2]).

3 **Result.** Suppose that $N > n \geq 2$ and that there exist $a_1, \cdots, a_q$ $(2N - n + 1 \leq q < \infty)$ in X satisfying

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(a_j, f) = 2N - n + 1$$

Put $Y = \{a_1, \cdots, a_q\}, Y^+ = \{a \in Y : \delta(a, f) > 0\}$ and $Y^1 = \{a \in Y : \delta(a, f) = 1\}$. Then we have the following

Theorem. (a) If $\Omega < 1$, then $[(N - n)(n - 1)/n] + 1 \leq \#Y^1$.

(b) If $\Omega < 1$ and $\delta(e_j, f) = 1$ $(j = 1, \cdots, n)$, then $[(N - n)(n - 1)/n] + N - n + 2 \leq \#Y^1$.

(c) If $\Omega = 0$, then $\#Y^1 = 2N - n + 1$.

4 References

[1] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss Map of minimal surfaces in R^m. Aspects of Math. E21, VieWeg 1993.

[2] N. Toda: On the second fundamental theorem for degenerate holomorphic curves I and II. NIT Sem. Rep. on Math., No.121(1994), pp.16 and No.134(1996), pp.8.

5　双曲性の非極大性

中井三留　名古屋工業大学
多田俊政　大同工業大学

μ を d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ 上のカトー族の一般符号ラドン測度とする. $\mathbf{R}^d$ の部分領域 R 上定常シュレーディンガー方程式

$$(-\Delta+\mu)u=0,\quad (\Delta=\partial^2/x_1^2+\cdots+\partial^2/x_d^2)$$

の R 上の極 $y\in R$ の**グリーン関数** ${}_\mu G^R(\cdot,y)$ とは超関数の意味で R 上

$$(-\Delta+\mu)_\mu G^R(\cdot,y)=\delta_y$$

となる最小 $(0,\infty]$ 値連続関数のことである (但し δ_y は y に台をもつディラック測度). ${}_\mu G^R(\cdot,y)$ の存在, 非存在は $y\in R$ に依存せぬ. ${}_\mu G^R(\cdot,y)$ が存在する (又は存在しない) とき, 組 (R,μ) は**双曲型** (又は**非双曲型**) であると言い, 非双曲型の組 (R,μ) の全体を, 伝統的な記号を一般にして, $\mathcal{O}_G$ と記す. R が $\mathbf{R}^d$ の真部分領域で $(R,\mu)\notin\mathcal{O}_G$ なら, 常に $R\subsetneqq R'$ かつ $(R',\mu)\notin\mathcal{O}_G$ となる部分領域 R' がとれるという意味での双曲性の非極大性の予想が述べられている ($\mu\geqq 0$ なら正しい). この予想に沿う方向での次の結果を報告する.

定理. $\mathbf{R}^d$ **の部分領域** R **の相対境界** ∂R **の完閉な成分** Γ **が** R **に対して片側的な連続曲面であるとき,** $(R,\mu) \notin \mathcal{O}_G$ **ならば,** $R \cup \Gamma \subset R'$ **かつ** $(R',\mu) \notin \mathcal{O}_G$ **となる** $\mathbf{R}^d$ **の部分領域** R' **が存在する.**

ここで Γ が R に対して**片側的な連続曲面**であるとは, 各 $a \in \Gamma$ に対して, a の適当な近傍 U と適当な直交座標 (x', x_d) 又は極座標 (r, ξ) があって, $\Gamma \cap U$ は U 内で連続関数 $x_d = \varphi(x')$ 又は $r = \varphi(\xi)$ のグラフとして表され, $R \cap U$ が U 内で $x_d > \varphi(x')$ 又は $r > \varphi(\xi)$ で与えられることを意味する.

参照文献

[1] A. Lahtinen: *On the equation $\Delta u = Pu$ and the classification of acceptable densities on Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **533**(1973), 1–26.

[2] L. Myrberg: *Über die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung $\Delta u = c(P)u$ auf Riemannschen Flächen*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **170**(1954), 1–8.

[3] M. Nakai: *Continuity of solutions of Schrödinger equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **110**(1991), 581–597.

6

UNIFORM PERFECTNESS OF LIMIT SETS OF KLEINIAN GROUPS

須川 敏幸　　　(京都大学大学院・理学研究科)

この講演では非初等的 Klein 群の極限集合が一様完全 (uniformly perfect) であるための十分条件について述べる。初等的 Klein 群の極限集合については何もすべきことはないので、以下では考える群は全て非初等的であるとする。(有限生成) Schottky 群の極限集合の一様完全性については既に Pommerenke が論文[3] で、そしてその後一般の有限生成 Klein 群については Pommerenke [4] で成り立つことが示されている。その後ちょっとした注意により解析的有限な Klein 群についても極限集合が一様完全であることが示されている (例えば Canary [1] 参照)。この講演では無限生成の場合も含めて極限集合が一様完全であるための十分条件を与える。

まず G を Klein 群とし $\Lambda(G), \Omega(G)$ をそれぞれその極限集合 (limit set) 及び不連続領域 (region of discontinuity) とする。$X = X_G = \Omega(G)/G$ を不連続領域を G の作用で割って自然に得られる (連結とは限らない) hyperbolic orbifold とし $\pi : \Omega(G) \to X$ を標準射影とする。X 上の分岐点全体の集合を B とし $X^\circ = X \setminus B$ とおく。また X の分岐の構造を忘れて得られるリーマン面を $\widehat{X}$ と書くことにする。

"hyperbolic" というのは X_0 を X の連結成分として Ω_0 を $\pi^{-1}(X_0)$ の成分の一つとするとき、$q : \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im} z > 0\} \to \Omega_0$ を正則な普遍被覆写像として $p = \pi \circ q : \mathbb{H} \to X_0$ とする。(一般にこのように $\mathbb{H}$ からの Galois 被覆写像 p の像として得られる分岐点付きのリーマン面は (connected) hyperblic orbifold と呼ばれる。) このとき、$\mathbb{H}$ の Poincaré metric $\rho_{\mathbb{H}}(z) = \frac{|dz|}{2\mathrm{Im} z}$ を p で project して X_0 上の metric ρ_{X_0} が得られる。すなわち、ρ_{X_0} は分岐点において cone singularity を持ちそれ以外では滑らかな $\rho_{\mathbb{H}} = p^*(\rho_{X_0})$ を満たす metric である。これが各成分ごとに定まるので全体の metric ρ_X が自然に定まる。これが X 上の hyperbolic metric と呼ばれるものである。X 上の曲線 β に対してその双曲的長さ $\ell_X(\beta)$ が

$$\ell_X(\beta) = \int_\beta \rho_X(z)|dz|$$

により定義される。また、$\Gamma_{X_0} = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : p \circ \gamma = p\}$ とおけばこれは Ω_0 の Fuchs 群模型 $\Gamma_{\Omega_0} = \{\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : q \circ \gamma = q\}$ を正規部分群として含む Fuchs 群で orbifold

X_0の Fuchs 群模型と呼ぶ。

そこで次のような定義を行う。

$$\mathcal{C}_{X_0} = \{[\alpha] : \alpha は X_0^\circ 内の非自明な閉曲線\},$$

$$\mathcal{C}^*_{X_0} = \{[\alpha] \in \mathcal{C}_{X_0} : \alpha は \Gamma_{X_0} の双曲型元により被覆される\}.$$

ここで $[\alpha]$ は $X_0^\circ = X_0 \setminus B$における自由ホモトピー類を表す。そこでさらに

$$L_{X_0} = \inf_{[\alpha]\in\mathcal{C}_{X_0}} \ell_{X_0}[\alpha], L^*_{X_0} = \inf_{[\alpha]\in\mathcal{C}^*_{X_0}} \ell_{X_0}[\alpha]$$

と定義する。(空集合に対する inf は$+\infty$ と定義しておく。) このとき X_0が解析的に有限型であれば $L^*_{X_0}$が正になることに注意しておこう。また容易に分かるように次の式も成り立つ。

$$L^*_{X_0} = \inf_{\gamma\in\Gamma_{X_0}:\text{hyperbolic}} \lambda_\gamma,$$

ここにλ_γはγの translation length を表す。すなわち$\lambda_\gamma = 2\cosh^{-1}(\mathrm{tr}\gamma)$ である。さらに Xに対して

$$L_X = \inf L_{X_0}, L^*_X = \inf L^*_{X_0}$$

とおく。ここに inf は Xの連結成分 X_0全体にわたって取る。

定義 1. 一般に Xを (連結とは限らない) hyperbolic orbifold とする。$L_X > 0$ である時 Xは modulated と呼ぶ。また $L^*_X > 0$ である時 Xは Lehner 型とここでは呼んでおくことにしよう。

注意 1. Xが$\hat{\mathbb{C}}$の開集合であるときは Xが modulated であるとき X^cが一様完全 (uniformly perfect) であると言う。また、Xが Lehner 型であるための必要十分条件は X上の可積分な正則 2 次微分の空間が双曲的有界な正則 2 次微分の空間に含まれることと同値である [2]。

定理 1. **非初等的 Klein 群 G について次の不等式が成り立つ。**

$$L_{\Omega(G)} \geq L^*_{X_G}.$$

特に X_Gが Lehner 型であれば$\Lambda(G)$ は一様完全である。

注意 2. この定理の系として容易に解析的有限な Klein 群の極限集合が一様完全であることが分かる。

REFERENCES

1. CANARY, R. D. The Poincaré metric and a conformal version of a theorem of Thurston, *Duke Math. J.*, **64** (1991), 349–359.
2. NIEBUR, D. AND SHEINGORN, M. Characterization of Fuchsian groups whose integrable forms are bounded, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 239–258.
3. POMMERENKE, C. Uniformly perfect sets and the Poincaré metric, *Ark. Math.*, **32** (1979), 192–199.
4. POMMERENKE, C. On uniformly perfect sets and Fuchsian groups, *Analysis*, **4** (1984), 299–321.

7

UNIFORM PERFECTNESS OF JULIA SETS OF RATIONAL FUNCTIONS

須川 敏幸　　(京都大学大学院・理学研究科)

この講演では次数 2 以上の有理函数の Julia 集合の一様完全性について述べる。以下では特に断らない限り考える有理函数は全て次数 $d \geq 2$ であるとする。双曲的な有理函数については Pommerenke [3] がその一様完全性を証明していたが、一般の有理函数については Mañé-da Rocha [2] と Hinkkanen [1] により独立に証明された。また、超越整函数については一様完全でない例が [1] に remark されている。ただ、いずれの証明も一様完全でないとするといくらでも modulus が大きくなる essential な円環の列が取れることから矛盾を導いており、具体的な一様完全性の評価は与えられていない。例えば、次のような結果も成り立つので具体的な一様完全性の評価を行うことは意味があるものと考えられる。

定理 1. リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の開集合 Ω の境界を分離する円環領域の modulus の上限を M_Ω で表せば $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ の Hausdorff 次元に関して次の評価が成り立つ。

$$\text{H-dim}(E) \geq \frac{\log 2}{\log(2e^{M_\Omega} + 1)} \geq \frac{\log 2}{M_\Omega + \log 3}.$$

さらに領域定数 L_Ω を次のように定義する。

$$L_\Omega = \inf \ell_\Omega[\beta],$$

ただしここに inf は Ω 内の全ての可縮でない閉曲線 β の自由ホモトピー類 $[\beta]$ 全体にわたって取り、$\ell_\Omega[\beta]$ はその測地線の双曲的長さであるとする。これについて次の評価が成り立つことは既にこれまでの学会発表の通りである。

$$L_\Omega \leq \frac{\pi^2}{M_\Omega} \leq L_\Omega e^{L_\Omega}.$$

そこで $M_\Omega < \infty (\Leftrightarrow L_\Omega > 0)$ であるような閉集合 $E = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ を一様完全であるという。

さて$f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$を次数$d\geq 2$の有理函数とする。その Julia 集合及び Fatou 集合をそれぞれJ_f, Ω_fと書くことにしよう。以下ではL_{Ω_f}の下からの具体的評価を与えることが目標である。fの critical point は重複度も込めて$2d-2$個あることが知られているが、critical point を含む Fatou 集合の連結成分を全て列挙してそれらを$U_1,\ldots,U_s$としよう。$W_j=f(U_j), C_j=\{u\in U_j : df(u)=0\}$とおく。そこで$v_1, v_2\in f(C_j)(v_1\neq v_2)$及び$v\in f(C_j)$に対して$\mathcal{S}(v_1,v_2)$を$v_1,v_2$を通る$W_j$内の可縮な閉曲線で$f$による適当な持ち上げが$\partial U_j$を分離するようなもの全体のなす集合、及び$\mathcal{T}(v)$を$v$を essential に 2 回以上通る$W_j$内の可縮な閉曲線で$f$による適当な持ち上げが$\partial U_j$を分離するようなもの全体のなす集合とする。ここで閉曲線$\beta:\mathrm{S}^1\to W_j$が点$v$を essential に 2 回以上通るとは、ある 2 点$a,b\in \mathrm{S}^1(a\neq b)$で$\beta(a)=\beta(b)=v$なるものがあって、$\mathrm{S}^1\setminus\{a,b\}$の連結成分を$I_1, I_2$とするとき$\beta|_{\bar{I}_1},\beta|_{\bar{I}_2}$がともに$W_j$内の可縮でない閉曲線になっていることであるとする。さらに各W_jでの双曲計量での曲線βの長さを$\ell_{W_j}(\beta)$と表す時、

$$k_j(v_1,v_2)=\inf_{\beta\in\mathcal{S}(v_1,v_2)}\ell_{W_j}(\beta),\quad k_j'(v)=\inf_{\beta\in\mathcal{T}(v)}\ell_{W_j}(\beta),$$
$$k_j=\min_{v_1,v_2\in f(C_j);v_1\neq v_2}k_j(v_1,v_2),\quad k_j'=\min_{v\in f(C_j)}k_j'(v)$$

と定める。ただし$\#f(C_j)=1$ならば$k_j=\infty$と定めておく。ここで$d_{W_j}(v_1,v_2), \iota_{W_j}(v)$をそれぞれ$W_j$における双曲距離及び双曲単射半径とするとき

$$k_j(v_1,v_2)\geq 2d_{W_j}(v_1,v_2),\quad k_j'(v)\geq 4\iota_{W_j}(v)$$

だから特に$k_j>0, k_j'>0$であることに注意しておこう。最後にfの Herman 環を$A_1,\ldots,A_t$とすれば次の結果を得る。

定理 2.
$$L_{\Omega_f}\geq\min\{k_1,\ldots,k_s,k_1',\ldots,k_s',L_{A_1},\ldots,L_{A_t}\}.$$

系.
$$L_{\Omega_f}\geq\min_{v_1,v_2,v\in f(C);v_1\neq v_2}\{2d_{\Omega_f}(v_1,v_2),4\iota_{\Omega_f}(v),L_{A_1},\ldots,L_{A_t}\}.$$

特にJ_fは一様完全である。

References

1. Hinkkanen, A. Julia sets of rational functions are uniformly perfect, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **113** (1993), 543–559.
2. Mañé, R. and da Rocha, L. F. Julia sets are uniformly perfect, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **116** (1992), 251–257.
3. Pommerenke, C. On uniformly perfect sets and Fuchsian groups, *Analysis*, **4** (1984), 299–321.

8 逆写像を元の写像で表現する一般原理と，リーマンの写像関数，調和写像等への応用について

斎藤　三郎（群馬大工）

We shall consider an arbitrary mapping $p = \phi(\hat{p})$

$$\phi : \hat{E} \longrightarrow E \tag{1}$$

from an abstract set $\hat{E}$ into an abstract set E. Then, we shall consider the general problem representing the inverse function ϕ^{-1} in terms of ϕ. By using the theory of reproducing kernels, at first we shall attack this general problem and then, we shall establish a general principle to solve this problem under some general and reasonable settings. We shall also give typical concrete examples.

Let $K(p,q)$ be a positive matrix on E in the sense of Aronszajn-Moore such that for any finite point set $\{p_j\}$ of E and for any complex numbers $\{c_j\}$,

$$\sum_{j'}\sum_{j} \overline{c_{j'}} c_j K(p_{j'}, p_j) \geq 0. \tag{2}$$

Then, there exists a uniquely determined functional Hilbert space H_K comprising functions on E and admitting the reproducing kernel $K(p,q)$. We shall assume that $K(p,q)$ is expressible in the form

$$K(p,q) = (\mathbf{h}(q), \mathbf{h}(p))_{\mathcal{H}} \quad \text{on} \quad E \times E \tag{3}$$

in terms of a Hilbert space $\mathcal{H}$-valued function $\mathbf{h}(p)$ on E. We further assume that

$$\{\mathbf{h}(p); p \in E\} \quad \text{is complete in} \quad \mathcal{H}. \tag{4}$$

Then, for the linear transform of $\mathcal{H}$

$$f(p) = (\mathbf{f}, \mathbf{h}(p))_{\mathcal{H}}, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{H}, \tag{5}$$

we shall define the function

$$\begin{aligned} K_\phi(\hat{p}, \hat{q}) &= K(\phi(\hat{q}), \phi(\hat{p})) \\ &= (\mathbf{h}(\phi(\hat{q})), \mathbf{h}(\phi(\hat{p})))_{\mathcal{H}} \quad \text{on} \quad \hat{E} \times \hat{E} \end{aligned} \tag{6}$$

and the linear mapping of $\mathcal{H}$

$$f(\phi(\hat{p})) = (\mathbf{f}, \mathbf{h}(\phi(\hat{p})))_{\mathcal{H}}, \quad \mathbf{f} \in \mathcal{H}. \tag{7}$$

Of course, $K_\phi(\hat{p},\hat{q})$ is a positive matrix on $\hat{E}$, and so there exists a uniquely determined functional Hilbert space H_{K_ϕ} admitting the reproducing kernel $K_\phi(\hat{p},\hat{q})$. Then, we obtain

Theorem. *In an arbitrary mapping ϕ in (1), for any $\hat{f} \in H_{K_\phi}$ we take the function $f^* \in H_K$ satisfying*

$$\hat{f} = f^*(\phi) \quad \textit{and} \quad \|\hat{f}\|_{H_{K_\phi}} = \|f^*\|_{H_K}. \tag{8}$$

Then, we have

$$f^*(p) = (\hat{f}(\cdot), K(\phi(\cdot), p))_{H_{K_\phi}}. \tag{9}$$

Now, in Theorem, we shall assume that the mapping ϕ is isometry between H_K and H_{K_ϕ}.

If we know the mapping $p = \phi(\hat{p})$ from $\hat{E}$ to E, then the isometrical mapping from H_K onto H_{K_ϕ} is given by

$$f(p) \in H_K \longrightarrow f(\phi(\hat{p})) \in H_{K_\phi}. \tag{10}$$

If we know the (in general, multiply-valued) inverse $\hat{p} = \phi^{-1}(p)$ of $p = \phi(\hat{p})$, then for $\hat{f} \in H_{K_\phi}$, the function $\hat{f}(\phi^{-1}(p))$ is a single-valued function on E and the isometrical mapping from H_{K_ϕ} onto H_K is given by

$$\hat{f} \in H_{K_\phi} \longrightarrow \hat{f}(\phi^{-1}(p)) \in H_K. \tag{11}$$

In general, Theorem establishes the isometrical mapping

$$\hat{f} \in H_{K_\phi} \longrightarrow f^* \in H_K, \tag{12}$$

explicitly in terms of the reproducing kernel $K(p,q)$ on E, the mapping ϕ and the reproducing kernel Hilbert space H_{K_ϕ}. This fact will mean that Theorem gives, in a sense, a method how to construct the inverse ϕ^{-1}.

Following our general principle, we shall give typical examples for the Riemann mapping function, harmonic mappings and increasing functions.

9　熱方程式の解の解析性について

山本　昌宏（東大大学院数理）
斎藤　三郎（群馬大工）

We consider an initial value problem for the heat equation:

$$
(1.1)\qquad \left\{\begin{array}{rl} u'(x,t) = \Delta u(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{array}\right\}
$$

where $\Omega \subset \mathbf{R}^r$, $2 \le r \le 3$ is a bounded domain with C^2-boundary $\partial\Omega$, $u' = \frac{\partial u}{\partial t}$, Δ the Laplacian, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ is a trace operator (e.g. Adams [1]), that is, if $u \in C^1(\overline{\Omega})$, then

$$
\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \sum_{i=1}^{r} \nu_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \quad x \in \partial\Omega,
$$

$\nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_r(x))$ being the outward unit normal to $\partial\Omega$ at x.

We recall the following analytic extension formula

Proposition 2([16]). *For the right half plane $R^+ = \{Z; Z = p + iq, p > 0\}$ and $\mu > \frac{1}{2}$, we have the identity, for the Bergman-Selberg space $H_\mu(R^+)$ comprising all analytic functions $f(Z)$ on R^+ with finite norm*

$$
\|f\|_{H_\mu(R^+)} = \left\{\frac{1}{\Gamma(2\mu-1)\pi}\iint_{R^+} |f(Z)|^2 (2p)^{2\mu-2} dp dq\right\}^{1/2} < \infty,
$$

$$
\|f\|^2_{H_\mu(R^+)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+2\mu+1)} \int_0^\infty |\partial_p^n (pf'(p))|^2 p^{2n+2\mu-1} dp.
$$

Conversely, any C^∞ function $f(p)$ on the real positive line with a convergent sum in the right hand side can be extended analytically onto R^+ and the analytic extension $f(Z)$ satisfying $\lim_{p\to\infty} f(p) = 0$ belongs to $H_\mu(R^+)$ and the identity holds.

We shall define

$$
\|g(x,p)\|^2_{B_\mu(\Gamma\times(0,\infty))} = \int_\Gamma \left\| p^{-\frac{3}{2}} g(x, \frac{1}{4p}) \right\|^2_{H_\mu(R^+)} dS,
$$

the right hand side being convergent. Then we obtain

Theorem. *For an arbitrarily fixed $x_0 \in \mathbf{R}^r$, we set*

$$
(1.2)\qquad \Gamma = \{x \in \partial\Omega; (x - x_0)\cdot\nu(x) > 0\}
$$

and take

$$
(1.3)\qquad \mu \in \left(1, \frac{5}{4}\right).
$$

We assume

$$(1.4) \qquad r \quad (= \textit{the spatial dimension}) \leq 3$$

and

$$(1.5) \qquad f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Then, there exists a constant $C = C(\Omega, \Gamma, \mu) > 0$ *such that*

$$(1.6) \qquad C^{-1}\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial u(f)}{\partial \nu} \right\|_{B_\mu(\Gamma \times (0,\infty))} \leq C\|f\|_{H^2(\Omega)}.$$

References

1. R. A. Adams,, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. J. R. Cannon,, *The One-Dimensional Heat Equation*, Addison-Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, 1984.
3. D. -W. Byun and S. Saitoh,, A real inversion formula for the Laplace transform, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 12 (1993), 597–603.
4. G. Doetsch,, *Introduction to the Theory and Applications of the Laplace Transformation*, (English translation), Springer-Verlag, Berlin, 1974.
5. S. Dolecki,, Observability for the one-dimensional heat equation, *Studia Mathematica* 48 (1973), 291–305.
6. S. Dolecki and D. L. Russell,, A general theory of observation and control, *SIAM J. Control and Optimization* 15 (1977), 185–220.
7. A. Friedman,, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, (Reprint Edition), Krieger Publishing, Malabar, Florida, 1983.
8. E. J. P. George Schmidt and N. Weck,, On the boundary behavior of solutions to elliptic and parabolic equations–with applications to boundary control for parabolic equations, *SIAM J. Control and Optimization* 16 (1978), 593–598.
9. L. F. Ho,, Observabilité frontière de l'équation des ondes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* 302 (1986), 443–446.
10. V. Komornik,, *Exact Controllability and Stabilization – the multiplier method*, Masson, Paris, 1994.
11. M. M. Lavrentiev, V. G. Romanov and S. P. Shishat·skiĭ,, *Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, (English translation), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.
12. J. -L. Lions,, *Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*, Vol.1, Masson, Paris, 1988.
13. V. J. Mizel and T. I. Seidman,, Observation and prediction for the heat equation, *II.*, *J. Math. Anal. Appl.* 38 (1972), 149–166.
14. S. Mizohata,, *The Theory of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, London, 1973.
15. Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
16. S. Saitoh,, *Representations of the norms in Bergman-Selberg spaces on strips and half planes*, Complex Variables 19 (1992), 231–241.
17. Y. Sakawa,, Observability and related problems for partial differential equations of parabolic type, *SIAM J. Control* 13 (1975), 14–27.
18. Vu Kim Yuan and M. Yamamoto,, Stability in an inverse heat problem - determination of initial values: odd dimensional case, (preprint).
19. M. Yamamoto,, *Multidimensinal Inverse Problems for Partial Differential Equations : Controllability Method and Perturbation Method*, (in preparation).

10　線型常微分方程式の有理型函数解の対数導函数について

藤解　和也　　　　　金沢大工

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型函数体 $M(\mathbb{C})$ の元 A と正の実数全体が成す集合の部分集合 I, $\mathrm{mes}(I) = +\infty$, を固定して、$M(\mathbb{C})$ の部分体 $S{=}S(A, I)$, $T{=}T(A, I)$ を次のように定義する：

$$S = \left\{ a \in M(\mathbb{C}) \,\middle|\, T(r, a) = o(1)\,T(r, A) \;//_I \right\},$$

$$T = \left\{ g \in M(\mathbb{C}) \,\middle|\, T(r, g) = O(1)\,T(r, A) \;//_I \right\}.$$

ここで記号 "$//_I$" は "$\exists E \subset I$, $\mathrm{mes}(E) < \infty$ で $r \to \infty$, $r \in I \setminus E$, としたとき" の意味で用いた。

このとき $M(\mathbb{C})$ の自明でない元 f の対数導函数 f'/f がもつ性質として、次の事実は容易に確かめられる：

- 与えられた $f \in M(\mathbb{C})$ に対して、その k 階斉次線型微分多項式

$$L_k(f) := f^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} A_j(z) f^{(j)} \quad (k \in \mathbb{N})$$

  を考える。もし $A_j \in S (j = 0, \cdots, k-1)$ かつ $f'/f \in T$ ならば、$L_k(f)/f \in T$ である。

- 複素数体 $\mathbb{C}$ 上で一次独立な $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{k} \subset M(\mathbb{C})$ をその基本解系とする k 階斉次線型微分方程式 $L_k(w) = 0$ を考える。このとき

$$\frac{f'_\nu}{f_\nu} \in T \text{ (resp. } S \text{) for all } \forall\nu \Rightarrow A_j \in T \text{ (resp. } S \text{) for all } \forall j$$

  となる。

これらの逆の命題についての考察が値分布理論の研究において重要なテーマであること、は直ちに判る。(例えば Hayman-Frank-Langley の定理や Bank-Laine 等の Complex oscillation theory.)

この講演では、この考察に関連する次の結果について述べる。

定理. 超越有理型函数 A について、k 階斉次線型常微分方程式

$$(1) \qquad w^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(z) w^{(j)} = A(z)\left\{ w^{(s)} + \sum_{j=0}^{s-1} b_j(z) w^{(j)} \right\}$$

を考える。ここに $a_j \in S(j=0,\cdots,k-1)$, $b_j \in S(j=0,\cdots,s-1)$, $0 \le s < k$ とする。有理型函数 f, $f^{(s)} + \sum_{j=0}^{s-1} b_j(z) f^{(j)} \not\equiv 0$, が方程式 (1) を満たすならば、その対数導函数について次の不等式、表現式の何れか一方が成り立つ：

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le 2\left\{\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{A}\right) + \overline{N}(r, A)\right\} + o(1) T\left(r, \frac{f'}{f}\right) \quad //_I,$$

或いは、$d \in \mathbb{C}$ を定数、また

$$a(z) = \frac{k(k-1) - s(s-1)}{2(k-s)^2} \frac{A'(z)}{A(z)} + \frac{a_{k-1}(z) - b_{s-1}(z)}{k-s} \ (\in S).$$

として、

$$(2) \qquad f'/f = d A^{1/(k-s)} - a(z) \ (\in T).$$

この方程式 (1) の係数について、$a_j \in S(s+1 \le j \le k-1)$, $a_s - A \in T \setminus S$, 及び $a_j - B_j A \in T(0 \le j \le s-1)$ が成り立っている。この係数がすべて整函数である場合、基本解系を成す整函数族 f_ν $(1 \le \nu \le k)$ について、表現 (2) を用いて得られるものが $k-s$ 個存在する $(d^{k-s} = 1)$。それらは何れも A と共に zero-free となり、$A(z) = \exp\{(k-s)\alpha(z)\}$ と書けば次の $k-s$ 階斉次線型方程式の基本解系を成す：

$$P\left(\frac{d}{dz} - \beta(z)\right) y = A(z) y,$$

ここに $P(t) = \Big(t + \alpha'(z)\Big)\Big(t + 2\alpha'(z)\Big)\cdots\Big(t + (k-s)\alpha'(z)\Big)$ 及び $\beta(z) = (k-s)\alpha'(z) - a(z)\ (\in S)$ とする。従って、元来の方程式 (1) は $R(t) := t^s + \sum_{j=0}^{s-1} b_j(z) t^j$ とおいて、

$$R\left(\frac{d}{dz} - (k-s)\alpha'(z)\right) P\left(\frac{d}{dz} - \beta(z)\right) w = A(z) R\left(\frac{d}{dz}\right) w$$

で与えられている。

一方、不等式からは

$$\overline{N}(r, 1/f) = O(1) T(r, A) \ //_I \quad \Rightarrow \quad f'/f \in T$$

が従い、$s=0$ のときは求めていた答のひとつになる。

11 L^p-Lipschitz Classes and Weighted Bergman Spaces

広島大・理　山田　雅博

D を複素平面における開単位円板、A を D 上の解析関数全体、H を D 上の調和関数全体とする。$0 < r < \infty$ を固定する。$a \in D$ に対し、ϕ_a を Möbius 変換、すなわち、

$$\phi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \qquad (z \in D)$$

とし、

$$\beta(a,z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+|\phi_a(z)|}{1-|\phi_a(z)|} \quad (a, z \in D).$$

とする。このとき、$D_r(a)$ を

$$D_r(a) = \{z \in D \ ; \ \beta(a,z) < r\}$$

で定義し、Bergman disk と呼ぶ。$0 \leq \alpha \leq 1$ のとき、

$$O_r^\alpha(f,z) = \sup_{w \in D_r(z)} \frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|^\alpha}$$

とする。$f \in A$ が order α の Lipschitz 条件を満足するとは、$O_r^\alpha(f,z)$ が D 上有界のときをいう。これらの関数空間は古くから研究されており、この条件はまた、$(1-|z|^2)^{1-\alpha}|f'(z)|$ が D 上有界であることと同値であることが知られている。ここでは、この概念をもっと広くとらえ、次の関数空間を考える。$\mu \geq 0$ を $\sigma-$有限測度とし、$0 \leq \alpha \leq 1$ および、$1 \leq p < \infty$ に対して、$B_h^p(\mu,\alpha) = B_h^p(\mu,\alpha,r)$ を $f \in H$, $f(0)=0$ で

$$\rho_{p,\alpha}(f) = \rho_{p,\alpha,r}(f) = \left(\int_D \{O_r^\alpha(f,z)\}^p \, d\mu(z)\right)^{1/p} < \infty$$

なる関数 f の族とし、$B_a^p(\mu,\alpha) = B_a^p(\mu,\alpha,r) = B_h^p(\mu,\alpha,r) \cap A$ とする。すなわち、$O_r^\alpha(f,z)$ が有界という概念を一般の $\sigma-$有限測度 μ に対する p 乗可積分性の概念へと拡張する。

$\rho_{p,\alpha}(f)$ を考える際、有界のときのような同値条件が成立するか、という問題がある。簡単のため、$\alpha = p = 1$ とする。$f \in A$ に対して、

複素微分と $O_r^1(f,z)$ の定義から $|f'(z)| \leq O_r^1(f,z)$ が直ちに解るので $\int |f'(z)|d\mu \leq \int O_r^1(f,z)d\mu$ は明らかである。しかし、一般に逆の評価は成立しない。本講演では、$\rho_{p,\alpha}(f)$ の評価を考え、その後この評価を用いて $B_a^p(\mu,\alpha)$ 上の線形汎関数、特に f から f の Taylor 係数を対応させる線形汎関数のノルムについて調べる。$\rho_{p,\alpha}(f)$ の評価に関する結果について述べる。

Theorem 1. $0 < r < \infty$ を固定する。また、$\mu \geq 0$ を D 上の σ-有限測度とする。このとき、次が成立する。

(1) $0 \leq \alpha \leq 1$ と $1 \leq p < \infty$ に対して、$C = C_{r,\alpha,p} > 0$ が存在して

$$\int_D \left\{(1-|z|^2)^{1-\alpha}|\mathcal{D}f(z)|\right\}^p d\mu \leq C\int_D \{O_r^\alpha(f,z)\}^p d\mu$$

が全ての $f \in H$ に対して成立する。

(2) $0 \leq \alpha \leq 1$ と $1 \leq p < \infty$ に対して、$C = C_{r,\alpha,p} > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} & C^{-1}\int_D \left\{(1-|z|^2)^{1-\alpha}|\mathcal{D}f(z)|\right\}^p \hat{\mu}_{r/2}(z)dm \\ \leq \ & \int_D \{O_r^\alpha(f,z)\}^p d\mu \\ \leq \ & C\int_D \left\{(1-|z|^2)^{1-\alpha}|\mathcal{D}f(z)|\right\}^p \hat{\mu}_{2r}(z)dm \end{aligned}$$

が全ての $f \in H$ に対して成立する。

ここで、

$$\hat{\mu}_r(a) = \frac{1}{m(D_r(a))}\int_{D_r(a)} d\mu \qquad (a \in D)$$

とする。さらに、$\mathcal{D}$ は $\mathcal{D} = \partial/\partial x,\ \partial/\partial y$ または ∇ のいずれでも良い。

12 The determination of caloric morphisms on Euclidean domains

茨城大学　理学部　　　　下村勝孝

$\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ $(k \geqq 1)$ の座標を (t, x) $(x \in \mathbb{R}^k)$ で表す．$\mathbb{R}^{k+1}$ の領域上で熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad \Big(\Delta = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Big),$$

を満たす関数を caloric function と呼ぶ．ここでは熱方程式の解を保つ変換について考える．以下 $m, n \geqq 1$，D を $\mathbb{R}^{m+1}$ 内の領域とする．

$f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ を D から $\mathbb{R}^{n+1}$ への C^∞-写像，$\varphi > 0$ を D 上の C^∞-関数とする．$f(D)$ が領域であり、かつ任意の $f(D)$ 上の caloric function $u(\tau, y)$ に対して，$\varphi(t, x)(u \circ f)(t, x)$ が D 上の caloric function になるとき，(f, φ) を caloric morphism と呼ぶ．

$m < n$ の時は，caloric morphism は存在しない．また、$m = n$ の時は，Appell 変換，平行移動，拡大縮小，回転およびそれらの合成に限られる．(Leutwiler [3])

以下では $m > n$ の時の caloric morphism を考える．

次のような、像空間の次元が等しい caloric morphism の「直積」により、新たな caloric morphism を構成できる．

定理 1. $n, m_1, \ldots, m_k$ を自然数，I を開区間，D_j を $\mathbb{R}^{m_j}$ $(1 \leq j \leq k)$ とする．k 個の caloric morphisms $(f^j, \varphi^j) : I \times D_j \subset \mathbb{R}^{m_j+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ $(1 \leq j \leq k)$ から caloric morphism $(f, \varphi) : I \times D_1 \times \cdots \times D_k \to \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$\begin{aligned} f_i(t, x^1, \ldots, x^k) =& f_i^1(t, x^1) + f_i^2(t, xk^2) + \cdots + f_i^k(t, x^k), \\ \varphi(t, x^1, \ldots, x^k) =& \varphi^1(t, x^1)\varphi^2(t, x^2) \cdots \varphi^k(t, x^k), \end{aligned}$$

$(0 \leq i \leq n)$ によって構成できる．ここで，$x^j = (x_1^j, \ldots, x_{m_j}^j)$ は $\mathbb{R}^{m_j}$ の点を表わす．

写像 f が x に関して多項式になっている場合に caloric morphism の形を求める．f_0 が解析的であると仮定すると，次の様に形が完全に決定できる．

定理 2. (f,φ) は caloric morphism で，$f_1,\dots,f_n$ は x に関して多項式、$f_0(t)$ は実解析的であるとする．そのとき，自然数 $k \leqq m/n$ および $\mathbb{R}^m$ の直交座標が存在して，(f,φ) は次の形になる．

$$f_0(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_j t+\beta_j}{\gamma_j t+\delta_j},\qquad \text{但し}\ \begin{pmatrix}\alpha_j & \beta_j\\ \gamma_j & \delta_j\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})\ \text{かつ}\ \gamma_2\cdots\gamma_l\neq 0,$$

$$f_i(t,x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{x_i^j+tc_i^j+d_i^j}{\gamma_j t+\delta_j},\quad 1\le i\le n,$$

$$\varphi(t,x)=\prod_{j=1}^{k}\frac{\exp\left[-\dfrac{|\gamma_j x^j+\gamma_j d^j-\delta_j c^j|^2}{4\gamma_j(\gamma_j t+\delta_j)}\right]}{|\gamma_j t+\delta_j|^{n/2}}h(t,x_{nk+1},\dots,x_m),$$

$\gamma_1=0$ の場合は，φ の式中の $\frac{\exp\left[-\frac{|\gamma_j x^j+\gamma_j d^j-\delta_j c^j|^2}{4\gamma_j(\gamma_j t+\delta_j)}\right]}{|\gamma_j t+\delta_j|^{n/2}}$ が $\exp\left(\frac{|c^1|^2 t}{4}+\frac{c^1\cdot x^1}{2}\right)$ になる。但しここで，$x^j=(x_{(j-1)+1},\dots,x_{jn})$, $c^j,d^j\in\mathbb{R}^n$，かつ h は positive caloric function であり，$m=nk$ の時は正定数となる．

注. 定理 1.で $m_1,\dots,m_{k-1}=n$, $m_k=m-n(k-1)\ge k$,

$$f_0^j(t)=\frac{\alpha_j t+\beta_j}{\gamma_j t+\delta_j},\quad 1\le j\le k,$$

$$f_i^j(t,x)=\frac{x_i^j+tc_i^j+d_i^j}{\gamma_j t+\delta_j},\quad 1\le j\le k, 1\le i\le n,$$

$$\varphi^j(t,x)=\frac{\exp\left[-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(\gamma_j x+\gamma_j d^j-\delta_j c^j)^2}{4\gamma_j(\gamma_j t+\delta_j)}\right]}{|\gamma_j t+\delta_j|^{n/2}},\quad 1\le j\le k,$$

とおくと、定理 2 の (f,φ) が得られる。つまり、定理 2 の仮定をみたす caloric morphism は Appell 変換（$m>kn$ の時には f_k は射影に Appell 変換を合成したもの）の k 個の「直積」になっている。

13　ソボレフの埋蔵定理について

水田　義弘　　広島大学総合科学部

下村　哲　　〃

関数 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$　$(1 < p < \infty)$ に対して，α　$(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

を考える．ここに，$f \geqq 0$，$U_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する．ソボレフの埋蔵定理によると

1. $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n} > 0$ ならば，$U_\alpha f \in L^q(\mathbf{R}^n)$
2. $\alpha p = n$ ならば，任意の $q > 0$ に対して $U_\alpha f \in L^q_{loc}(\mathbf{R}^n)$
   もっと一般に
   $$\int_G \exp(A(U_\alpha f(x))^\beta)dx < \infty, \quad \forall A > 0; G : \text{有界}, \ \beta = p/(p-1)$$
3. $\alpha p > n$ ならば，$0 < \alpha - n/p < 1$ のとき，
   $$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \leqq M|x-z|^{\alpha-n/p}$$

ここでは，ソボレフの定理の一般化を報告するために，以下，

$$\int_G f(y)^p[\log(e+f(y))]^a[\log(e+\log(e+f(y)))]^b dy < \infty$$

を仮定する．

定理 1. (簡単のため $a = b = 0$ とする) $0 < \alpha - n/p < 2$ のとき，

$$|U_\alpha f(x+h) - 2U_\alpha f(x) + U_\alpha f(x-h)| \leqq M|h|^{\alpha-n/p}$$

定理 2．(簡単のため $a=b=0$ とする) $m < \alpha - n/p < m+1$ のとき，$U_\alpha f$ は m 回偏微分可能で

$$|(\partial/\partial x)^\mu U_\alpha f(x+h) - (\partial/\partial x)^\mu U_\alpha f(x)| \leqq M|h|^{\alpha-n/p-m}, \quad |\mu| = m$$

定理 3． $\alpha p = n$, $a < p-1$ ならば,

$$\int_G \exp[A(U_\alpha f(x))^\beta (\log(e+U_\alpha f(x)))^\gamma]dx < \infty, \qquad \forall A > 0;$$

$$G : 有界,\ \beta = p/(p-1-a),\ \gamma = b/(p-1-a)$$

定理 4． $\alpha p = n$, $a = p-1$, $b < p-1$ ならば,

$$\int_G \exp[A \exp(B(U_\alpha f(x))^\beta)]dx < \infty, \qquad \forall A > 0, \forall B > 0;$$

$$G : 有界,\ \beta = p/(p-1-b)$$

参考文献

[1] D. R. Adams and L. I. Hedberg, Function spaces and potential theory, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[2] H. Brézis and S. Wainger, A note on limiting cases of Sobolev imbeddings and convolution inequalities, Comm. Partial Diff. Equations **5** (1980), 773-789.

[3] D. E. Edmunds, P. Gurka and B. Opic, Double exponential integrability, Bessel potentials and embedding theorem, Studia Math. **115** (1995), 151-181.

[4] D. E. Edmunds, P. Gurka and B. Opic, Sharpness of embeddings in logarithmic Bessel-potential spaces, Proc. Royal Soc. Edinburgh **126** (1996), 995-1009.

[5] D. E. Edmunds and M. Krbec, Two limiting cases of Sobolev imbeddings, Houston Math. J. **21** (1995), 119-128.

[6] Y. Mizuta, Potential theory on Euclidean spaces, Gakkōtosho, Tokyo, 1996.

14

フラクタルな側面を持つ円筒における2重層ポテンシャル

渡辺ヒサ子　　　お茶の水女子大理

Dは$\mathbf{R}^d$の有界でなめらかな領域とし，Dより生成された有界な円筒$D\times(0,T)$をΩ_D，その側面$\partial D\times[0,T]$をS_Dで表す．このとき，側面上の表面測度σに関するL^p関数fの2重層熱ポテンシャルは

$$\Phi f(X) = -\int_0^T ds \int f(Y)\langle\nabla W(X-Y), n_y\rangle d\sigma(y) \qquad (1)$$

で定義される．Wは熱方程式の基本解である．ここでは次のようなフラクタルな境界を持つ領域Dに対しても2重層熱ポテンシャルは定義でき，(1)と同様の性質を持つことを述べる．

Dは$\mathbf{R}^d$の有界領域でその境界∂Dはβ-集合$(d-1\le\beta<d)$とする．すなわち∂D上の正Radon測度μで

$$b_1 r^\beta \le \mu(B(z,r)\cap\partial D) \le b_2 r^\beta \quad (0<\forall r\le r_0,\ \forall z\in\partial D)$$

を満たす測度が存在すると仮定する．また，μと，1次元のルベーグ測度を区間$[0,T]$に制限した測度との積測度をμ_Tで表す．$0<\alpha<1$を満たすαに対する側面上のBesov空間$\Lambda^p_{\alpha,\alpha/2}(\mu_T)$を，$f\in L^p(\mu_T)$で

$$\int_0^T dt \int\int \frac{|\,f(x,t)-f(y,t)\,|^p}{|\,x-y\,|^{\beta+p\alpha}} d\mu(x)d\mu(y)$$
$$+\int d\mu(x)\int_0^T\int_0^T \frac{|\,f(x,t)-f(x,s)\,|^p}{|\,t-s\,|^{1+p\alpha/2}} dtds < \infty$$

を満たすfの全体からなるノルム空間とする．このとき，$L^p(\mu_T)$から$L^p(\mathbf{R}^d\times[0,T])$への拡張作用素$\mathcal{E}$で，関数$x\mapsto\mathcal{E}(f)(x,t)$は$\mathbf{R}^d\setminus\partial D$で$C^\infty$級となるものが存在する．これを使って，$X\in D\times\mathbf{R}$に対しては

$$\begin{aligned}\Phi f(X) &= \int_0^T ds\int_{R^d\setminus\overline{D}}\langle\nabla\mathcal{E}(f)(Y), \nabla_y W(X-Y)\rangle dy\\ &+ \int_0^T ds\int_{R^d\setminus\overline{D}}\mathcal{E}(f)(Y)\triangle_y W(X-Y)dy,\end{aligned}$$

$X \in \mathbf{R}^d \setminus \overline{D}$に対しては

$$\begin{aligned}\Phi f(X) &= -\int_0^T ds \int_D \langle \nabla \mathcal{E}(f)(Y), \nabla_y W(X-Y)\rangle dy \\ &- \int_0^T ds \int_D \mathcal{E}(f)(Y) \triangle_y W(X-Y) dy\end{aligned}$$

と定義する. Φfは次の性質を持つ.

定理. $p > 1$, $0 \leq \beta - (d-1) < \alpha < 1$ とする. $f \in \Lambda^p_{\alpha,\alpha/2}(\mu_T)$ ならば Φfは $(\mathbf{R}^d \setminus \partial D) \times \mathbf{R}$ で熱方程式を満足する. さらに側面上の$\mu_T - a.e.$の点Zの放物型内部, 外部非接領域$\Gamma_\tau(Z)$, $\Gamma^e_\tau(Z)$ に対し, $B(Z,r) \cap \Gamma_\tau(Z) \neq \emptyset$, $B(Z,r) \cap \Gamma^e_\tau(Z) \neq \emptyset$ ならば,

$$\begin{aligned}\lim_{X \to Z, X \in \Gamma_\tau(Z)} \Phi f(X) &= Kf(Z) + \frac{1}{2} f(Z) \\ \lim_{X \to Z, X \in \Gamma^e_\tau(Z)} \Phi f(X) &= Kf(Z) - \frac{1}{2} f(Z)\end{aligned}$$

が$\mu_T - a.e. Z \in S_D$で成り立つ.

15　ポテンシャル論における最小変分の方法

二宮信幸

局所コムパクトなハウスドルフ空間 Ω において，$K(P, Q)$ は

(1)　二点 P と Q について下半連続，$P = Q$ では ∞ であってもよいが，$P \neq Q$ では必ず有限，

(2)　P と Q が互に素なコムパクト集合の中にあるときには，$K(P, Q)$ は上に有界（下に有界であるのは当然），

であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に対してポテンシャルとエネルギー積分 $K(P, \mu)$，$K(\mu, P)$，$K(\mu, \nu)$，$K(\mu, \mu)$ を定義する．これらの量がポテンシャル論において有効であるためには，$K(P, Q)$ に何等かの制限，例えば Ω のどんな開集合もその上にエネルギー積分が有限であるような正の測度がある，というような仮定が必要である．

ボレル集合 E の上の負でない測度の全体を $\mathfrak{M}(E)$，その中で全質量が 1 であるものゝ全体を $\mathfrak{M}_1(E)$，

$\mathfrak{M}(E)$ の測度の中でエネルギー積分が有限であるものの全体を $\mathcal{E}(E)$，その中で全質量が 1 であるものの全体を $\mathcal{E}_1(E)$ で表わす．

コンパクト集合 F が $\mathcal{E}_1(F)\neq\phi$ なるとき，存在定理が成り立つことが示される．$\mathcal{E}_1(F)=\phi$ なるとき Evans の定理が成り立つことを示したい．従って $\mathcal{E}_1(F)=\phi$ なるとき，F は K－超越直径 0 であると呼ぶことができる．

$F(P,Q)\leqq K(P,Q)$ なる連続関数を一つとり fix する．

Lemma. $\mathfrak{M}_1(F)$ の k 個の測度 $\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_k$ に対して

$$\frac{1}{\binom{k}{2}}\max\left(\sum_{i<j}^{k}F(\mu_i,\mu_j),\ \sum_{i>j}^{k}F(\mu_i,\mu_j)\right)$$

なる量を考え，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k$ に関する inf (min) をとり w_k とする．inf max (---, ---) を与える k 個の測度を $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k$ とするとき，二つの量 $\sum_{i<j}\cdots\cdots$ と $\sum_{i>j}\cdots\cdots$ との差は

$$\leqq \sum_{i=1}^{k}F(\mu_i,\mu_i)$$

である．

16 Extremal length of vector measures

相川弘明　　島根大学総合理工学部
大津賀信

曲線族に対する extremal length，およびその逆数である modulus は古から研究され，関数論やポテンシャル論に幅広く応用されて来た．とりわけ modulus が p-capacity に一致するという性質は大切であった．一方，最近，退化楕円型微分方程式が関心を集める様になって来た (例えば[HKM])．しかしながら，我々の知る範囲では退化楕円型微分方程式と密接に関係した modulus は定義されていないし，いわんや一致するという結果はない．

本講演の目的はある種の退化楕円型微分方程式に自然に定義される capacity と密接に関係する modulus を定義し，一致する等式を導くことである．そして，今までの modulus との関係を明らかにし，一般化された形で極値的距離と幅の間の関係式を証明する．さらに Shlyk[Sh] による極値的長さの連続問題の解決をこの新しい極値的長さに拡張する．

$1 < p < \infty$ とし Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とする．$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x) = \{a_{ij}\}$ は正定値 $n \times n$ 行列であり，退化一様楕円条件

$$c_0^{-2} w(x)^{2/p} |\xi|^2 \le \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le c_0^2 w(x)^{2/p}|\xi|^2$$

$(\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega)$ を満たすとする．ただし $c_0 \ge 1$ は定数で w は Muckenhoupt の A_p 条件をみたす重みである．$\mathcal{A}[\xi] = ({}^t\xi \mathcal{A}\xi)^{1/2} = (\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j)^{1/2}$ とおく．さらに $\xi = \xi(x)$ が Ω 上のベクトル値関数の時 $\mathcal{A}_p(\xi) = (\int_\Omega \mathcal{A}[\xi]^p dx)^{1/p}$ とおく．この $\mathcal{A}$ に対しては次の capacity を考えるのが自然である．

$$\inf_{u \in \mathcal{D}} \mathcal{A}_p(\nabla u)^p = \inf_{u \in \mathcal{D}} \int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big)^{p/2} dx.$$

ここに$\mathcal{D}$は滑らかな関数の族か，又はより一般に precise 関数の族である．もし$\{a_{ij}\}$が単位行列ならば，上は古典的なp-capacity に一致する．これに関係する極値的長さを定義しよう．$\int f d\mu \geq 1$ のとき $f \wedge \mu$と書く．$\mathcal{E}$が正測度の族の時，$f \wedge \mathcal{E}$はすべての$\mu \in \mathcal{E}$に対して，$f \wedge \mu$となることである．weighted modulus を

$$M_{p,w}(\mathcal{E}) = \inf\{\int f^p w dx : f \geq 0,\ f \wedge \mathcal{E}\}$$

で定義する．$\mathcal{F}_0$を vector 測度$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$の族とする．$|\mathcal{F}_0| = \{|\nu| : \nu \in \mathcal{F}_0\}$とおき，$M_{p,w}(|\mathcal{F}_0|) = 0$ ならば $\mathcal{F}_0$ は (p,w)-exceptional (略して (p,w)-exc.) という．ある性質が，高々(p,w)-exc. を除いて成立する時，それは (p,w)-a.e. に成立するという．

定義. ξは vector 関数，νは vector 測度とする．$\int \xi \cdot d\nu \geq 1$ のとき$\xi \wedge \nu$と書く．$\mathcal{F}$を vector 測度の族とする．$\xi \wedge \mathcal{F}$ (p,w)-a.e. とは (p,w)-a.e. $\nu \in \mathcal{F}$に対して$\xi \wedge \nu$となることである．次の様に$\mathcal{F}$に対する modulus を定義する．

$$M_{\mathcal{A},p}(\mathcal{F}) = \inf\{\mathcal{A}_p(\xi)^p :\ \xi \wedge \mathcal{F}\ (p,w)\text{-a.e.}\}.$$

講演の中でさらに種々の定義をのべ，相互の関係を明らかにしていく．

参考文献

[AH] D. R. Adams and L.-I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer, 1996.

[Fa] K. Fan, *Minimax theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953), 42–47.

[Fu] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math. **98** (1957), 171–219.

[Gi] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, 1984.

[HKM] J. Heinonen, T. Kilpläinen and O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Oxford University Press, 1993.

[Ma] V. G. Maz'ya, *Sobolev Spaces*, Springer, 1985.

[Oh] M. Ohtsuka, *Extremal Length and Precise Functions*, in preparation.

[Sh] V. A. Shlyk, *Capacity of a condenser and modulus of a family of separating surfaces*, Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsiĭ. 10, 187, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **185** (1990); English transl. in J. Soviet Math. **59** (1992), 1240-1248.

URL: `http://www.math.shimane-u.ac.jp/~haikawa`

E-mail address: haikawa@riko.shimane-u.ac.jp

17 Norm estimate of Green operator and perturbation of Green function

相川弘明　　　　島根大学総合理工学部

本研究は鈴木[Su]，村田[M] に触発されたものである．本講演の目的は次の 3 つである:

- 任意の領域の Green 作用素の $L^p - L^\infty$ 評価を**容量的幅**を用いて与える．
- この評価を利用して，滑らかな領域 D 上の Schrödinger 方程式 $L_V = -\Delta + V$，ただし $V \geq 0$, の Green 関数 G_V^D がラプラス方程式の Green 関数 G^D と比較可能になる為の V の条件を与える．
- さらに，より一般の Schrödinger 方程式 $\mathcal{L}_V = \mathcal{L} + V$，ただし $\mathcal{L} = -\sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j)$ は滑らかな一様楕円型作用素，を NTA 領域上で考え，滑らかな時と同じ様な結果を別の方法によって与える．

$\mathrm{Cap}_U(E)$ を開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の Green 容量とする．

定義. $0 < \eta < 1$ を固定する．U の**容量的幅** $w_\eta(U)$ を次の様に定義する．

$$w_\eta(U) = \inf\left\{\rho > 0 : \frac{\mathrm{Cap}_{B(x,2\rho)}(B(x,\rho) \setminus U)}{\mathrm{Cap}_{B(x,2\rho)}(B(x,\rho))} \geq \eta \quad \text{for all } x \in U\right\}.$$

定理 1. *$n/2 < p \leq \infty$ とすると Green 作用素のノルムは $\left\|G^U\right\|_{p,\infty} \approx w_\eta(U)^{2-n/p}$ を満たす．*

この定理は知られている結果[BØ], [HP], [St] を拡張する．これと[AM] の *basic estimate* を用いて，$x_0 \in D$ を固定したとき

$$(1) \qquad 1 \leq \frac{G^D(x_0,y)}{G_V^D(x_0,y)} \leq A \quad \text{for all } y \in D$$

となる V の条件を与える．特に

定理 2. $V(x) = v(\delta(x))$, $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$, $v > 0$ は適当に滑らかな時，*(1)* が成立する必要十分条件は

$$\int_0 rv(r)dr < \infty.$$

さらにより強い比較

$$1 \leq \frac{G^D(x,y)}{G_V^D(x,y)} \leq A \quad \text{for all } x, y \in D$$

が成立する条件も与える．これは Cranston-McConnell の不等式[CM]と関連する.

以上の Green 関数の比較は領域の滑らかさを用いるが，以前の方法 ([A1, A2], [AE]) を拡張して，NTA 領域上の一般の Schrödinger 作用素 $\mathcal{L}_V$ に対しても定理 2 が成立することを示す.

参考文献

[A1] H. Aikawa, *Integrability of superharmonic functions and subharmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 109–117.

[A2] H. Aikawa, *Densities with the mean value property for harmonic functions in a Lipschitz domain*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[AE] H. Aikawa and M. Essén, *Potential Theory: Selected Topics*, Lecture Notes in Math., vol. 1633, Springer, 1996.

[AM] H. Aikawa and M. Murata, *Generalized Cranston-McConnell Inequalities and Martin boundaries of unbounded domains*, J. Analyse Math. (to appear).

[BØ] R. Bañuelos and B. Øksendal, *Exit times for elliptic diffusions and BMO*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **30** (1987), 273–287.

[CM] M. Cranston and T. R. McConnell, *The lifetime of conditioned Brownian motion*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **65** (1983), 1–11.

[HP] W. K. Hayman and Ch. Pommerenke, *On analytic functions of bounded mean oscillation*, Bull. London Math. Soc. **10** (1978), 219–224.

[M] M. Murata, *Semismall perturbations in the Martin theory for elliptic equations*, Israel J. Math. (to appear).

[St] D. A. Stegenga, *A geometric condition which implies BMOA*, Michigan Math. J. **27** (1980), 247–252.

[Su] N. Suzuki, *Martin boundary for* $\Delta - P$, Hiroshima Math. J. **14** (1984), 67–74.

URL: `http://www.math.shimane-u.ac.jp/~haikawa`
E-mail address: haikawa@riko.shimane-u.ac.jp

特別講演

非有界被覆面の Martin 境界

正岡弘照 (京産大·理) · 瀬川重男 (大同工大)

0. この節の目的は Martin 境界の導入である (詳細は [M], [CN-CR], [HL] 等を参照). R を開 Riemann 面とする. まず, R が Green 関数 $G(p,q)$ $(p,q \in R)$ を持つと仮定する (このことを $R \notin O_G$ と記す). 1 点 $q_0 \in R$を固定し,

$$k_p(q) = \frac{G(p,q)}{G(p,q_0)} \quad (p,q \in R)$$

とおく. 関数族 $\{R \ni p \mapsto k_p(q)\}_{q \in R}$ が連続拡張を持つ最弱の R の compact 化 R^*が存在する. R^* を R の **Martin compact 化**, $\Delta = R^* - R$ を R の **Martin 境界**という. R^* は q_0 の取り方に依存しない. $p \in \Delta$ に対し, $k_p = \lim_{x \to p} k_x$とおく.

定義 1. $p \in \Delta$とする. R上の非負値調和関数hがR上$h \le k_p$をみたすならば, $h = c \cdot k_p$(c は非負定数) と表されるとき, pを **minimal 点**という.

minimal 点全体をΔ_1と記し, R の **minimal Martin 境界**という. $R \in O_G$の場合, 局所円板 $B(\subset R)$ をとると $R - \overline{B} \notin O_G$となり, $R^* = (R - \overline{B})^* \cup B$を R の Martin compact 化という. R^* は B の取り方に依存しない. 以下では, 簡単のために, R がO_Gに属し $R - \overline{B}$ と書くべき場合にも単に R と書くことにする.

1. $\tilde{R}$ を開 Riemann 面 R の m 葉非有界被覆面 $(1<m<\infty)$, π を $\tilde{R}$ から R への射影, R^* (resp. $\tilde{R}^*$) を R (resp. $\tilde{R}$) の Martin compact 化とする. R (resp. $\tilde{R}$) の Martin 境界 R^*-R (resp. $\tilde{R}^*-\tilde{R}$) をΔ (resp. $\tilde{\Delta}$), さらに minimal Martin 境界を Δ_1 (resp. $\tilde{\Delta}_1$) で表す. 本講演の主目的は, $\tilde{\Delta}_1$ について (特に Δ_1 との関連について) 調べることである.

π の $\tilde{R}^*$ への連続拡張 π^* が unique に存在し, 特に, $\pi^*(\tilde{\Delta})=\Delta$ であることがわかる. 各 $p\in\Delta$ に対して, $\tilde{\Delta}_1(p)=\pi^{*-1}(p)\cap\tilde{\Delta}_1$ とおく. 集合 A の濃度を $\#A$ で表すことにする. 我々が特に関心があるのは, $\#\tilde{\Delta}_1(p)$ を決定することである.

命題 1. (1) $p\in\Delta_1$ **ならば,** $1\leq\#\tilde{\Delta}_1(p)\leq m$.
(2) $p\in\Delta-\Delta_1$ **ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p)=0$.

2. この節の目的は minimal 細位相の導入である. $\mathcal{S}=\mathcal{S}(R)$ を R上の正値優調和関数の全体とする. R の部分集合 Eと $s(\in\mathcal{S})$ に対し, s の E上への掃散 $\hat{\mathrm{R}}_s^E={}^R\hat{\mathrm{R}}_s^E$ を次式で定義する.

$$\hat{\mathrm{R}}_s^E(w)=\liminf_{x\to w}\ \inf\{u(x):\ u\in\mathcal{S},\ E\text{上で}, u\geq s\ \}.$$

掃散に関する情報は [Bl-Ha] を参照する.

定義 2. p をΔ_1の点とし, E を R の部分集合とする. このとき, E が p で **minimally thin** であるとは, ${}^R\hat{\mathrm{R}}_{k_p}^E\neq k_p$ をみたすことである.

定義 3. p をΔ_1の点とし, U を R の部分集合とする. このとき, $U\cup\{p\}$ が p の **minimal 細近傍**であるとは, $R-U$ が p で minimally thin であることである.

次節で述べる主定理の証明のためには次の命題が必要である. (cf. [MA2])

命題 2. $p \in \Delta_1$, $E \subset \tilde{R}$**とする. このとき,** E **が**$\tilde{\Delta}_1(p)$ **の各点で minimally thin であるための必要十分条件は,** $\pi(E)$ **が** p **で minimally thin であることである.**

この命題の応用として, 被覆面上の minimal thinness に関する Wiener 型の判定法が得られる (cf. [MA2])

命題 3. $R = \hat{\mathbb{C}} - \{0\}$ **とする.** E **を**$\tilde{R}$ **の部分集合,** p **を唯一の**Δ_1**の点とする.** $\tilde{\Delta}_1 = \{p_1, \cdots, p_r\}$ **と表し,** $k_j = k_{p_j}$ $(j = 1, \cdots, r)$ **とおく. 各** j **に対して**

$$E_n^j = \{w \in E \cap U_j : s^n \leq k_j(w) \leq s^{n+1}\} \quad (s > 1)$$

とおく. ただし, $r > 1$ **のとき**

$$U_j = \{w \in \tilde{R} : k_j(w) > \sum_{i \neq j} k_i(w)\} \quad (j = 1, \cdots, r),$$

$r = 1$ **のとき** $U_1 = \tilde{R}$ **とおく. このとき,** E **が** p_j **で minimally thin であることと次式をみたすことは同値である.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} cap_{\tilde{R}}(E_n^j) s^n < +\infty,$$

ここで, $cap_{\tilde{R}}(E_n^j)$ **は** E_n^j**の外 Green 容量である.**

3. 各 $p \in \Delta_1$に対して, R の連結開集合 Mで $M \cup \{p\}$ が p の minimal 細近傍となるものの class を $\mathcal{M}_p$で表す. さらに, R の連結開集合 Nに対し, $\pi^{-1}(N)$ の成分の個数を $n(N)$ で表す. このとき, $\#\tilde{\Delta}_1(p)$ は次の

ように決定される.

主定理. **任意の** $p \in \Delta_1$**に対して,**

$$\#\tilde{\Delta}_1(p) = \max_{M \in \mathcal{M}_p} n(M).$$

主定理の証明. $\#\tilde{\Delta}_1(p) = n$, $\tilde{\Delta}_1(p) = \{\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n\}$ とする.

各$\tilde{p}_i$に対し$\widetilde{N}_i \cup \{\tilde{p}_i\}$ が$\tilde{p}_i$の minimal 細近傍となるような互いに素な領域列$\widetilde{N}_1, \cdots, \widetilde{N}_n$をとり, $\tilde{E} = \cap_{i=1}^n \widetilde{N}_i^c$とおく. $\tilde{E}$は各$\tilde{p}_i$で minimally thin であるから, 命題 2 より, $\pi(\tilde{E})$ は p で minimally thin である. 故に, $R - \pi(\tilde{E})$ の連結成分 Mで $M \in \mathcal{M}_p$となるものがある. 命題 2 より, $\pi^{-1}(R - M)$ は各$\tilde{p}_i$で minimally thin, 即ち$\pi^{-1}(M) \cup \{\tilde{p}_i\}$ は$\tilde{p}_i$の minimal 細近傍である. 故に, $\pi^{-1}(M)$ の連結成分$\tilde{O}_i$で$\tilde{O}_i \cup \{\tilde{p}_i\}$ が$\tilde{p}_i$の minimal 細近傍となるものがとれる $(i = 1, \cdots, n)$. $\widetilde{N}_i \cap \tilde{O}_i \neq \emptyset$ と $\pi(\partial \widetilde{N}_i) \subset R - M$より, $\tilde{O}_i \subset \widetilde{N}_i$となることが判る. 故に, $n \leq n(M)$, 即ち (左辺) $\leq$ (右辺) となる.

次に, $M \in \mathcal{M}_p$を任意にとり$\pi^{-1}(M)$ の連結成分全体を $\{\tilde{O}_1, \cdots, \tilde{O}_\nu\}$ とおく. 上で述べたように, 各$\tilde{p}_i$に対し$\tilde{O}_j \cup \{\tilde{p}_i\}$ が$\tilde{p}_i$の minimal 細近傍となる$\tilde{O}_j$が唯 1 つ決まる. この対応で定まる $\{\tilde{p}_1, \cdots, \tilde{p}_n\}$ から $\{\tilde{O}_1, \cdots, \tilde{O}_\nu\}$ への写像をτとする. τが全射であることを示せば, (左辺) $\geq$ (右辺) となって証明が終わる. $\cup_{i=1}^n \tau(\tilde{p}_i) = \widetilde{M}$とおくと, $\widetilde{M}^c$は各$\tilde{p}_i$で minimally thin である. τが全射でなければ, $\tilde{O}_l \subset \widetilde{M}^c$となる$\tilde{O}_l$がある. このとき, 命題 2 より, $M = \pi(\tilde{O}_l)$ は p で minimally thin となり $M \in \mathcal{M}_p$に矛盾する. □

次の系は, 簡単ながら, $\#\tilde{\Delta}_1(p) = m$ となるための十分条件として有用である.

系. $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ **を** R **内の互いに素な線分列で** R **内に集積しないものとし,** $I=\cup_{n=1}^{\infty}I_n$ **とおく.** $U(\subset R^*)$ **を** $p(\in\Delta_1)$ **の開近傍で,** $U\cap R-I$ **が連結で** $\pi^{-1}(U\cap R-I)$ **が** m **個の成分から成るものとする. このとき,** I **が** p **で minimally thin ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p)=m.$

系の証明. $M=U\cap R-I$とおくと, 仮定より $M\in\mathcal{M}_p$かつ $n(M)=m.$ 故に, 任意の $N\in\mathcal{M}_p$に対し $n(N)\le m$ であることに注意すれば, 主定理より $\#\tilde{\Delta}_1(p)=m$ となる. □

4. この節では, R として, $R_1=\hat{\mathbb{C}}-\{0\}$ または $R_2=\{|z|<1\}$ を考える. $R=R_1$の場合, $\{a_n\}$ を $1>a_n\downarrow 0$ をみたす数列とし, $I=\cup_{n=1}^{\infty}[a_{2n},a_{2n-1}]$, $J=\cup_{n=1}^{\infty}[a_{2n+1},a_{2n}]$, $G=R-I$ とおく. $R=R_2$の場合, $\{a_n\}$ を$0<a_n\uparrow 1$をみたす数列とし, $I=\cup_{n=1}^{\infty}[a_{2n-1},a_{2n}]$, $J=\cup_{n=1}^{\infty}[a_{2n},a_{2n+1}]$, $G=R-I$ とおく. G の copy $G_1,\cdots,G_m$を用意し, G_i上の I の下岸と G_{i+1}上の I の上岸を溶接して ($i \bmod m$) できる R の m 葉非有界被覆面$\tilde{R}$ を考える. R の Martin compact 化は $R=R_1$の場合 $\hat{\mathbb{C}}$と同相であり, $R=R_2$の場合 $\{|z|\le 1\}$ と同相であり, どちらも Martin 境界Δ は minimal 境界点のみから成る. $R=R_1$の場合 $z=0$ に, $R=R_2$の場合 $z=1$ に対応するΔ_1の点を p とおく. このとき, 次のことが成り立つ.

定理 2. $R=R_1$**とする.**
(i) I **が** $z=0$ **で thin ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p)=m;$
(ii) I**が** $z=0$ **で thick(=not thin) ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p)=1.$

(ここで, $E(\subset\hat{\mathbb{C}})$ が $a(\in\hat{\mathbb{C}})$ で **thin** であるとは, $E-\{a\}$ が $\hat{\mathbb{C}}-\{a\}$ の minimal 境界点 a で minimally thin となることである.)

定理 3. $R = R_2$**とする.**
(i) I **または** J **が** $z = 1$ **で thin ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = m$;
(ii) I **と** J **の両方が** $z = 1$ **で thick(=not thin) ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = 1$.

定理 2(i), 3(i) は主定理の系より容易に従う. 定理 2(ii) の証明には次の (a) が必要であり, 定理 3(ii) の証明には次の (a), (b), (c) が必要である (cf. [HL], [D] and [LF]).

(a) $E(\subset \hat{\mathbb{C}})$ **が** $z = 0$ **で thin のとき,** $\{|z| : z \in E\}$ **は** $z = 0$ **で thin である.**

(b) $E(\subset \mathbb{C})$ **が** $z = 0$ **で thin のとき, 次の性質をもつ極 (polar) 集合** $Z(\subset \{|z| = 1\})$ **が存在する:** $l_\theta \cap Z = \emptyset$ **をみたす任意の半直線** $l_\theta = \{\arg z = \theta\}$ **に対して,** $l_\theta \cap \{0 < |z| < \rho\} \subset \mathbb{C} - E$ **となる** ρ **が存在する.**

(c) S **を** $z = 1$ **を頂点とする** R_2 **の Stolz 領域とする.** S **の部分集合** E **が** p **で minimally thin となるための必要十分条件は,** E **が** $z = 1$ **で thin となることである.**

定理 2(ii) の証明の idea は定理 3(ii) の証明と同じであるので, 定理 3(ii) の証明のみ与えておく.

定理 3(ii) の証明. $M(\in \mathcal{M}_p)$ を任意にとる. 仮定と (a), (b), (c) から, 実数α, $\beta(\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2})$ および $s, t(0 < t < s < 1)$ で

$$C \subset M,\ 1 - s \in I,\ 1 - t \in J$$

をみたすものが存在する. ここで

$$\begin{aligned} C = &\{z : \arg(z-1) = \alpha,\ t \le |z-1| \le s\} \\ &\cup \{z : \alpha < \arg(z-1) < \beta,\ |z-1| = s\} \\ &\cup \{z : \arg(z-1) = \beta,\ t \le |z-1| \le s\} \\ &\cup \{z : \alpha < \arg(z-1) < \beta,\ |z-1| = t\}. \end{aligned}$$

各 a_n上に重複度 m の分岐点があることより, $\pi^{-1}(C)$ の連結性が確かめられる. これと M が連結であることから, $\pi^{-1}(M)$ が連結, すなわち $n(M) = 1$ となり主定理より結論を得る. □

R_1, R_2, $\{a_n\}$, I, J および p は上と同じとして, 上で構成した$\tilde{R}$ より少し一般の R の m 葉非有界被覆面$\tilde{R}$ を考えよう. $\tilde{R}$ の分岐点全体を B とする.

定理 4. $R = R_1$**とする.** $\pi(B) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ **で各** a_n **の上には重複度** m **の分岐点があり,** $\pi^{-1}(R - I)$ **は** m **個の連結成分から成るとする. このとき,**
(i) I **が** $z = 0$ **で thin ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = m$;
(ii) I **が** $z = 0$ **で thick ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = 1$.

上で述べた定理 2 の証明は, 定理 4 の証明にも通用する. しかしながら, $R = R_2$の場合, 定理 3 を定理 4 のように拡張できない.

例. $R = R_2$ とする. $I_1 = \cup_{n=1}^{\infty}[a_{4n-1}, a_{4n}]$, $I_2 = \cup_{n=1}^{\infty}[a_{4n-3}, a_{4n-2}]$ とおくとき, I_1, I_2 がともに $z = 1$ で thick となり, J が $z = 1$ で thin となるように $\{a_n\}$ をとる. $G = R - I_1 - I_2$ の copy $G_1, \cdots, G_4$ を用意し, G_i上の I_1の下岸 (resp. I_2 の上岸) と G_{i+1}上の I_1の上岸 (resp. I_2 の下岸) を溶接して (i mod 4) できる 4 葉非有界被覆面を$\tilde{R}$ とする. こ

のとき, $\#\tilde{\Delta}_1(p) = 2$.

定理 3(ii) の証明の方法を用いて, 次の 2 つの定理が示される.

定理 5. $R = R_1$ **とする. 次の条件をみたす** $r(>0)$ **と** $\rho(>0)$ **が存在するとする:**
(1) $\pi(B) \cap \{|\arg z| < r,\ |z| < \rho\} = \{a_n : |a_n| < \rho\}$ **かつ各** $a_n(\in \{|z| < \rho\})$ **の上には重複度** m **の分岐点がある;**
(2) $\pi^{-1}(\{|\arg z| < r,\ |z| < \rho\} - I)$ **は** m **個の連結成分から成る.**
このとき, I **と** J **の両方が** $z = 0$ **で thick ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = 1$ **である.**

定理 6. $R = R_2$ **とする. 次の条件をみたす** $r(>0)$ **と** $z = 1$ **を頂点とする** R_2 **の Stolz 領域** S **が存在するとする:**
(1) $\pi(B) \cap S \cap \{|z-1| < r\} = \{a_n : |a_n - 1| < r\}$ **かつ各** $a_n(> 1 - r)$ **の上には重複度** m **の分岐点がある;**
(2) $\pi^{-1}(S \cap \{|z-1| < r\} - I))$ **は** m **個の連結成分から成る.**
このとき, I **と** J **の両方が** $z = 0$ **で thick ならば,** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = 1$ **である.**

定理 2, 3 及び主定理より, 次の定理を得る.

定理 7. $R = R_1$ **または** R_2 **のとき,** $1 \leq q \leq m$ **をみたす任意の整数** q **に対して,** $\#\tilde{\Delta}_1(p) = q$ **となる** R **の** m **葉被覆面** $\tilde{R}$ **が存在する.**

5. この節では, R を一般の開 Riemann 面とし, R^* として R の正規被覆面を考える (cf. [F]).

定義 4. $\tilde{R}$ を R の非有界被覆面とする. 任意の $z \in R$ に対し, $\tilde{R}$ の被

覆変換群が $\pi^{-1}(z)$ の置換群として可遷的 (transitive) ならば, $\tilde{R}$ は R の**正規被覆面**であるという.

$\tilde{R}$ を R の m 葉非有界被覆面とするとき, $\tilde{R}$ が R の正規被覆面であることは $\tilde{R}$ の被覆変換群の位数が m であること同値である. この事実の反映として次が成立する.

定理 8. **$\tilde{R}$ を R の m 葉正規被覆面とし, $p \in \Delta_1$ とする. このとき, $\#\tilde{\Delta}_1(p)$ は m の約数である.**

定義 5. $\tilde{R}$ が R の正規被覆面で, その被覆変換群が巡回群であるとき, $\tilde{R}$ は R の**巡回被覆面**であるという.

主定理, 定理 8, (a), (b) 及び (c) より, 次の定理を得る.

定理 9. **R_1, R_2, p は前節と同様とする. $R = R_1$ または R_2 のとき, $\#\tilde{\Delta}_1(p) = q$ となる R の m 葉巡回被覆面 $\tilde{R}$ が存在するための必要十分条件は, q が m の約数になることである.**

References

[BL-HA] J. BLIEDTNER AND W. HANSEN, *Potential Theory*, Springer, 1986.

[BR] M. BRELOT, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lecture Notes in Math. **175**(1971), Springer.

[CN-CR] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA, *Ideale Ränder der Riemannscher Flächen*, Springer, 1963.

[D] J. DENY, *Un théorème sur les ensembles effilés*, Ann. Univ. de Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., **23**(1948), 139-142.

[F] O. FORSTER, *Lectures on Riemann Surfaces*, GTM**81**, Springer.

[HE] M. HEINS, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[HL] L. HELMS, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[LF] J. LELONG-FERRAND, *Etude au voisinage de la frontiére des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace*, Ann. Ecole N. Sup., **66**(1949), 125-159.

[M] R.S. MARTIN, *Minimal positive harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **49**(1941), 137-172.

[MA1] H. MASAOKA, *Harmonic dimension of covering surfaces, II*, Kodai Math. J., **18**(1995), 487-493.

[MA2] H. MASAOKA, *Criterion of Wiener type for minimal thinness on covering surfaces*, Proc. Japan Acad., **72**, Ser. A(1996), 154-156

[MA3] H. MASAOKA, *Quasiregular mappings and d-thinness*, to appear.

[MA-S1] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.

[MA-S2] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, preprint.

[MA-S3] H. MASAOKA AND S. SEGAWA, *Martin boundary of unlimited covering surfaces*, in preparation.

[N] L. NAÏM, *Sur le rôle de la frontiére de R.S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **7**(1957), 183-281.

[S1] S. SEGAWA, *A duality relation for harmonic dimensions and its applications*, Kodai Math. J., **4**(1981), 508-514.

[S2] S. SEGAWA, *Harmonic dimension and extremal length*, Kodai Math. J., **17**(1994), 256-261.

[SH1] H. SHIGA, *On harmonic dimensions and bilinear relations on open Riemann surfaces*, J. Math. Kyoto Univ., **21**(1981), 861-879.

[SH2] H. SHIGA, *Quasiconformal mappings and potentials*, The sixteenth Rolf Nevanlinna Colloquium, Walter de Gruyter & Co., 1996, 215-222.

18 On the generalized Cauchy integral theorem and Green's identity for functions of an m-dimensional domain into hypercomplex n-tuple spaces

笹山浩良　Sasayama Institute

Hiroyoshi SASAYAMA

昨年秋の分科会で Hypercomplex n-tuple space における線積分とそれについて拡張された Cauchy の積分定理 2つと R^n の開部分集合 Ω から $E'(\mathfrak{S})$ 中への C^1 級函数に対する Cauchy 積分定理の拡張をのべた。今回はこれを更に特別の場合として含む次の定理をのべる：

THEOREM $\mathfrak{S}$ は unity element を もつ実数体 R 上の非可換な n 次元結合的代数, $E'(\mathfrak{S})$ を Banach 空間 B' に associate された Hypercomplex n-tuple space とし C_m を R^m の開部分集合 Ω 中に含まれる m 次元有向可微分多様体 M 上の任意の m-chain とする. すると Ω より $E'(\mathfrak{S})$ 中への C^1 級函数 F, G

$$(P)\int_{\partial C_m} F\,d\sigma\,G = (P)\int_{C_m} [(\vec{D}F)G + F(\overleftarrow{D}G)]\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_m$$

ここで F, G のいずれか一方は $\mathfrak{S}$-値で他方は $E'(\mathfrak{S})$ 値とし 又、$(P)\int$ は B. J. Pettis integral に analogous な積分を表はすものとし $d\sigma=\sum_{i=1}^{m}(-1)^i e_i\, dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_m$ とする。之より

COROLLARY F, G が Ω より夫々 $E'(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{S}$ への C^k 級函数ならば M 上の任意の m-chain C_m i.e. $F\in C_k(\Omega, E'(\mathfrak{S}))$, $G=g\in C_k(\Omega,\mathfrak{S}) \Rightarrow$

$$(P)\int_{\partial C_m} \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(\vec{D}^{k-1-j}F)\,d\sigma\,(\overleftarrow{D}^j G) = (P)\int_{C_m} [(\vec{D}^k F)G + (-1)^{k-1}F(\overleftarrow{D}^k G)]\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m$$

$F=f\in C_k(\Omega,\mathfrak{S})$, $G\in C_k(\Omega, E'(\mathfrak{S}))$ の場合も同様である.

上記の式より色々の特別な場合が得られる, cf. J. Sp. Math., Vol. 28, 1996, Nos. 1-2, P. 1 — 52.

前回秋の分科会（'96.9.16）の講演アブストラクトの正誤表

P.52

	誤	正
上から5行目 ↓	$E'(\mathfrak{S})$	$E(\mathfrak{S})$
上から10行目 ↓	定義する：	定義する：分点 $a \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m \equiv b$ に対し
下から8行目 ↑	$\max \lVert \Delta_k X \rVert \to 0$	$\max\limits_{1 \leq l \leq m} \lvert \Delta_l t \rvert \to 0$
下から7行目 ↑	$\ldots, x_n(t)\ x_j(t)$	$\ldots\ x_n(t))\, dx_j(t)$

P.53

	誤	正
上から2行目 ↓	$\mathfrak{S}$は可換	$\mathfrak{S}$は可換で複素数体をその基礎体と
〃	とする $\mathcal{C}$ を	とする。$F(X)$は$\mathfrak{S}$の domain より $E'(\mathfrak{S})$ への函数で $\mathcal{C}$ を
上から4行目 ↓	Bの次元多様体に	complex Banach space B' の次元多様体 $\Gamma = B'^*$ に
上から7行目 ↓	Kechum	Ketchum
〃	nonogenic	monogenic
下から8行目 ↑	m-chain C_n	n-chain C_n
下から7行目 ↑	$\int F d\sigma = \int_{C_n} D F\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$	$(P) \int F d\sigma = (P) \int_{C_n} F D\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$
下から3行目	left	right

19 Finiteness Theorems for Meromorphic Mappings

YOSHIHIRO AIHARA NUMAZU COLLEGE OF TECHNOLOGY

Let M be a compact complex manifold. Let $L \to M$ be a fixed line bundle over M, and let $\sigma_1, \cdots, \sigma_s$ be linearly independent holomorphic sections of $L \to M$ with $s \geq 2$. We assume that $(\sigma_j) = dD_j$ $(1 \leq j \leq s)$ for some positive integer d, where D_j are effective divisors on M. Set

$$\varpi = c_1\sigma_1 + \cdots + c_s\sigma_s,$$

where $c_j \in \mathbf{C}^*$. Let D be a divisor defined by $\varpi = 0$. We define a meromorphic mapping $\Psi : V \to \mathbf{P}_{s-1}(\mathbf{C})$ by

$$\Psi = (\sigma_1, \cdots, \sigma_s).$$

DEFINITION. Let p be a nonnegative integer. For divisors, E_1 and E_2 on $\mathbf{C}^m$, we write

$$E_1 \equiv E_2 \pmod p$$

if there exists a divisor E' on $\mathbf{C}^m$ such that $E_1 - E_2 = pE'$; in the special case of $p = 0$, $E_1 \equiv E_2 \pmod 0$ if and only if $E_1 = E_2$.

Let E be a nonzero effective divisor on $\mathbf{C}^m$. We denote by

$$\mathcal{F}(p; (\mathbf{C}^m, E), (M, D))$$

the set of all meromorphic mappings $f : \mathbf{C}^m \to M$ such that

$$f^*D \equiv E \pmod p.$$

DEFINITION. A meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to M$ is said to be *analytically nondegenerate* if $f(\mathbf{C}^m)$ is not included in any proper analytic subset of M.

Let

$$\mathcal{F}^*(p; (\mathbf{C}^m, E), (M, D))$$

denote the subset of all $f \in \mathcal{F}(p; (\mathbf{C}^m, E), (M, D))$ that are *analytically nondegenerate.* The main result is as follows:

THEOREM 1. *If* $\operatorname{rank} \Psi = \dim M$ *and* $d > (s+1)!\,\{(s+1)! - 2\}$, *then the number of mappings in* $\mathcal{F}^*(d; (\mathbf{C}^m, E), (M, D))$ *is bounded by a constant depending only on* D.

For the proof of this theorem, we need to generalize Fujimoto's finiteness theorem as follows.

DEFINITION. A meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ is said to be *linearly nondegenerate* if $f(\mathbf{C}^m)$ is not included in any proper linear subspace of $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

Let $E_1, \cdots, E_{n+2}$ be effective divisors on $\mathbf{C}^m$ and let $H_1, \cdots, H_{n+2}$ be hyperplanes in general position in $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Let

$$\mathcal{E}(p; (\mathbf{C}^m, \{E_j\}), (\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \{H_j\}))$$

be the set of all ***linearly nondegenerate*** meromorphic mappings f of $\mathbf{C}^m$ into $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ such that

$$f^* H_j \equiv E_j \pmod p$$

for $1 \leq j \leq n+2$. Then we have the following theorem that is a generalization of the finiteness theorem of Fujimoto (J. Math. Soc. Japan 34 (1982), 527-539):

THEOREM 2. *Suppose that* $p > (n+2)!\ \{(n+2)! - 2\}$. *Then the number of mappings in* $\mathcal{E}(p; (\mathbf{C}^m, \{E_j\}), (\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \{H_j\}))$ *is bounded by by a constant depending only on* n.

The unicity problem for meromorphic mappings may be considered as a special case where the finite set of a family of meromorphic mappings reduces to one point set. We have the following unicity theorem:

THEOREM 3. *Assume that there exist big line bundles* $L_j \to M$ $(1 \leq j \leq s)$ *such that* $L = L_j^{\otimes d}$, $1 \leq j \leq s$, *and* $\sigma_j = \tau_j^{\otimes d}$ *for some holomorphic sections* τ_j *of* $L_j \to M$. *Let* f, $g : \mathbf{C}^m \to M$ *be analytically nondegenerate meromorphic mappings whose ranks are not less than* μ. *Suppose that the following conditions are satisfied:*

(1) rank $\Psi = \dim M$.

(2) $\bigcap_{j=1}^{s} \mathrm{Supp}\,(\sigma_j) = \emptyset$.

(3) $f^{-1}(D) = g^{-1}(D)$ *as point sets* (*say* Z).

(4) $f = g$ *on* $Z - (I(f) \cup I(g))$.

Then there exists a positive integer d_0 *depending only on* L_j $(1 \leq j \leq s)$ *such that if* $d > (s-\mu)(s+d_0)$, $f = g$ *on* $\mathbf{C}^m$.

Numazu College of Technology
3600 Ohoka, Numazu,
Shizuoka 410,
Japan
E-mail address: aihara@la.numazu-ct.ac.jp

※印は本会で記入

※番号 20

題 Boundary properties of univalent holomorphic mappings in the unit ball of $\mathbb{C}^n$

氏名 鶴見和之 所属 東京電機大工
鵜沢正勝 千葉大教育

$\mathbb{C}^n$の単位球$\mathbb{B}$上で正則な写像$f(z)$に対して

$M_p(r,f) := \left\{ \frac{1}{\mu(\partial\mathbb{B})} \int_{\partial\mathbb{B}} \|f(ra)\|^p \mu \right\}^{1/p}$ $(0<p<\infty)$ $(0<r<1)$, $\|f(z)\|^2 = |f_1(z)|^2 + \cdots + |f_n(z)|^2$ (f_jは$f(z)$のj成分), $M_\infty(r,f) := \max_{\|z\|=r} \|f(z)\|$ とおく。$S(\mathbb{B})$を$\mathbb{B}$で正則で正規化された単葉写像の全体とする。この時、$\mathbb{C}^1$の単葉函数$S(U)$ (U=単位円)に対して次の定理が成り立つ：

<u>定理</u> (Prawitzの定理, [1], p.61) $f(z) \in S(U)$に対して、次の不等式が成り立つ；

$$M_p^p(r,f) \leq \frac{1}{p} \int_0^r \frac{1}{t} M_\infty^p(r,f)\, dt$$
$$(0<p<\infty,\quad 0<r<1)$$

この定理の系として、$S(U) \subset H^p$ $(p<\frac{1}{2})$。これより、$\lim_{r\to 1-} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ (a.e. θ)。また、これらより、非有界な単葉函数の境界挙動が得られる。

これらの事柄をふまえて、本講演では、Prawitzの定理の$\mathbb{C}^n$の単位球$\mathbb{B}$の正則単葉写像への拡張を与え、これを

非有界な或る種の単葉正則写像の境界挙動の考察に応用する。

文　献

[1] P. L. Duren : Univalent Functions, Springer-Verlag (1980)

[2] W. Rudin : Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag (1980)

[3] I. A. Aizenberg and A. P. Yuzhakov : Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis, Trans. Math. Monog. vol 58 A.M.S. (1983).

21

内分岐正則域の双正則不変性について

三富照久　（こ会東大マスターコース）

Grauert-Remmert は [1] (1957) で，次の様な分岐正則域の例を提出した。

(1°) 分岐正則域は，正則凸状とは限らない。

(2°) 分岐正則域は，擬凸状とは限らない。

(3°) 分岐正則域は，双正則不変とは限らない。

これらの事は、分岐正則域が不分岐正則域（スタイン多様体）と基本的に異なる性質を示す，という意味で、分岐解析接続の理論の出発点、となるべきものであったが，残念ながらスタイン空間の理論に対する反例（？）として広まった感が強い。

本講演では，1984年日本数学会九州支部例会で予想した次の結果の証明が出来た（と思われる）事を報告する。

（正則包の基本定理）リーマン領域 $\mathcal{R}=(R,\Phi,\mathbb{C}^n)$ の Φ 正則包 $H(R,\Phi)$ と K包 $H(R)$ について，退化面 $E=H(R)\setminus H(R,\Phi)$ は高々余次元2の孤立点を含まない解析的集合である。

（系1）2次元分岐正則域は双正則同型である。

（系2）$E=H(R)\setminus R$ は $H(R)$ において R の分岐面 B の集積点の集合として得られる。

（系3）E を $\partial(R,\Phi,\mathbb{C}^n)$ の点と考えると，必然的に Oka 擬凸でない。

K包とは Kerner [2] 1959，の意味での正則包で双正則同型を除

けて一意的（双正則不変）である。又，上の結果は H(R) がスタインの時に Scheja [3] 1960 で証明されている。（私の証明法は純粋に境界のトポロジーのみである。）

解析接続の立場から考えると，上の結果は，H(R, E) の影E を，別な或る E' に変えると，H(R, E) 上の正則函数がすべて H(R) まで，リーマンの接続定理の意味で，のびてしまう，という事である。つまり分岐正則域は"殆んど"双正則不変と見なしてよい，という事である。従って分岐面の存在を考えると，前述の (1°)〜(3°) はある程度，自然な現象として理解される。

[1]. Grauert-Remmert "Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete" Math. Z. 67 (1957)

[2] H. Kerner "Holomorphiehülen zu K-vollständigen Komplexen Räumen" Math. Ann. 138 (1959)

[3] G. Scheja "Über Auftreten von Holomorphie und Meromorphie gebieten, die nicht holomorph konvex sind" Math. Ann. 140 (1960)

[4] M. Takase "Nouvelle constructión des enveloppes d'holomorphie des domaines intérieurement ramifiés" Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 35 (1981)

正則包の基本定理の証明及びくわしい解説は講演当日に配布する予定。率直な御意見，御批判を歓迎致します。

尚，私は高瀬正仁氏（九大）の様に，分岐域 vs 解析空間という思想的対立の図式はとらない，函数論的には，片方だけでは，不十分であり，真の意味の H. Weyl 的精神が高次元でも必要である，と考えるからである。

22

空間における cohomology 消滅と

無限次元~~の領域に対する核関数~~正則性

梶原　壤二

大貝　聖子

明治学園高校教諭

無限次元の領域に対するコホモロジー消滅，岡の原理の成立と擬凸性，正則性について以下の論文に基いて紹介する。

References

[1] A. Andreotti et H.Grauert, *Théorèmes de finitede pour la cohomology des espaces complexs,* Bull. Soc. Math. France **90**(1962), 193-259.

[2] H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n complexes variables,* Bull. Soc. Math. France. **78**(1950), 28-64.

[3] H. Cartan, Séminaire E.N.S., École Normare Supérieur, Paris, 1951/1952.

[4] G. Coeuré *L'équation* $(\overline{\partial})u = F$ *en dimension infinite,* université Lille Publ. Int. **131**(1968), 6-9.

[5] J. Colombeau and B. Perri, *The* $(\overline{\partial})$*-equation in D.F.N. spaces,* J. Math. Anal. Appl. **78**-2(1980), 466-87.

[6] J. Colombeau and B. Perri, *L'équation* $(\overline{\partial})$ *dans les ouverts pseudo-convexes des espaces D.F.N.,* Bull. Soc. Math. France. **110**(1982), 15-26.

[7] S. Dineen, *Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces,* Math. Ann. **202**(1973), 337-345.

[8] S. Dineen, *Cousin's first problem on certain locally convex topological spaces,* Acad. Brasil. Cienc. **48**-1(1976), 229-236.

[9] L. Gross, *Potential theory on Hilbert spaces,* J. Funct. Anal. **1** (1967), 123-181.

[10] L. Gruman, *The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces,* Illinois J. Math. **18**(1974), 20-26.

[11] C. J. Henrich, *The* $\overline{\partial}$ *-equation with polynomial growth on a Hilbert space,* Duke Math. J. **40**-2(1973), 279-306.

[12] S. Hitotumatu, *Theorem of analytic functions of several complex variables(in Japanese),* Baihuukan, 1960.

[13] J. Kajiwara, *La réciproque du théorèm d'annalation et de finitude de cohomologie dans l'espace produit d'une famililIe dénombrable de sphère de Riemann,* Bull. Soc. Math. France. **103**(1975), 129-139.

[14] J. Kajiwara, *Le principle d'Oka pour certaines espace de dimensional infini,* C.R.Paris **16**(1975), 1055-1056.

[15] J. Kajiwara, *Le principle d'Oka pour certaines espaces vectoriets munis de la topologie f-ouvert,* Mem. Fac. Sci. Kyushu. Univ. **26**(1973), 361-37.

[16] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set,* Math. Ann. **204**(1973),1-12.

[17] J. Kajiwara and M. Nishihara, *Characterisierung der Steinschen Teitgebieten durch Okasches Prinzip in Zwei-dimensionater Mannigfasltigkeit,* Mem. Fac. Sci.Kyushu. Univ. **33**(1979),71-76.

[18] J. Kajiwara and K. H. Shon, *Continuation and vanishing theorem for cohomology of infinite dimensional space,* Pusan Kyônnam Math. J.(1993) **1**, 65-73.

[19] P. Mazet, *Un théorèm d'hyperbolicite pour l'opérateur $\overline{\partial}$ sur les espaces de Banach,* C. R. Paris **292**(1981), 31-33.

[20] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: VII Sur quelque notion arithm'etiques,* Bull. Soc. Math. France, **78**(1950), 1-27.

[21] P. Raboin, *Resolution de lēquation$\overline{\partial} f = F$ sur un espace de Hilbert,* Bull. Soc. Math. France, **107**(1979), 225-240.

[22] G. Scheja, *Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen,* Math. Ann. **144**(1961), 345-360.

[23] J. P. S èrre, *Dans Séminaire H.Cartan,3,* 'Ecole Normare Supérieur, Paris, 1951-1952.

[24] R. L. Soraggi, *The $\overline{\partial}$-problem for a (0,2)-form in a D.F.N.space,* J. Func. Anal. **98**(1991), 380-402.

23

無限次元の領域に対する核関数

梶原　壤二

李　琳

中国済南電視大学講師

無限次元の領域に対する核関数の理論を以下の論文に基いて紹介する。

References

[1] N. Aronszaijn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68**(1950), 337–404.

[2] H. Bateman, Higher transendental functions Vol **II**, MacGraw Hill Book Inc.(1953).

[3] S. Bergman, Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, avec les application à la théorie des fonctions analytiques, Mém. Sci. Math. **106** (1947), Gauthies-Villars (Paris).

[4] S. Bergman, Sur la fonction-noyaus d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes, Mém. Sci. Math. **108** (1948), Gauthies-Villars (Paris).

[5] J. Colombeau and B. Perri, *The $\overline{\partial}$-equation in D.F.N. spaces,* J. Math. Anal. Appl. **78**-2 (1980), 466-87.

[6] J. Colombeau and B. Perri, *L'équation $\overline{\partial}$ dans les ouverts pseudo-convexes des espaces D.F.N.*, Bull. Soc. Math. France. **110** (1982), 15-26.

[7] T. Honda, J, Kajiwara, J.-J. Kim, L. Li, M.Nishihara, S. Ohgai and N. Sugawara, *Kernel functions for domains of dimension finite,* Math. Rep. Kyushu University **18-2** (1992), 9–19.

[8] L. Gross, Harmonic analysis on Hilbert spaces, Mem. Amer. Math. Soc. **46** (1963).

[9] L. Gross, *Potential theory on Hilbert space,* J. Functional Anal. **1** (1967), 123–181.

[10] L. Gross, *Abstract Wiener measure and infinite dimensional potential theory,* Lectures in Modern Analysis and Applications II, Lecture Notes in Math. **140** (1970), 84–116.

[11] C. J. Henrich, *The $\bar{\partial}$-equation with polynomial growth on a Hilbert space,* Duke Math. J. **40**-2 (1973), 279–306.

[12] T. Honda, J.Kajiwara, J. J. Kim, L. Li, M. Nishihara, S. Ohgai and N. Sugawara, *Kernel functions for domains of dimension infinite* Math. Rep. Kyusyu Univ. **18** -2(1992), 51–64.

[13] J. Kajiwara, *Opérateur d" dans les espaces de Hilbert avec croissance polynomiale*, Sém. Lelong, Lecture Note in Math. **474** (1973/74), 91–108.

[14] J. Kajiwara and L. Li, *Reproducing Kernels for infinite dimensional domains*, Proceedings of the Fifth International Colloquium on Differential Equations, VSP(Utrecht), (1994), 153–162.

[15] D. K. Kim, K.-B. Kim and D. K. Zhou, *Hankel Kernel for Infinte Dimensional Domains*, Proc. 2nd Korean-Japanese Colloq. Finte or Infinite Dim. Compl. Anal. (1994), 117–120.

[16] L. Li, *On kernel functions for infinte dimensional polydiscs*, Proc. 2nd Korean-Japanese Colloq. Finte or Infinite Dim. Compl. Anal. (1994), 131–134.

[17] L. Li, *Incomplete Gamma Functions and Kernel Functions*, Proc. 3rd International Colloq. Finte or Infinite Dim. Compl. Anal. (1995), 357-368.

[18] J. Mercer, *Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **209**, 415–446.

[19] M. Nishihara, *On the monomial expansion in infinite dimensional spaces*, Proc. 3rd International Colloq. Finte or Infinite Dim. Compl. Anal. (1995), 241-260. P. Raboin, *Résolution de l'équation* $\overline{\partial} f = F$ *sur un espace de Hilbert,* Bull. Soc. Math. France, **107** (1979), 225-240.

[20] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbf{C}^n$, springer, 1980.

[21] A. V. Skorovod, Integration in Hilbert spaces, Erg. der Math. **79**, Springer Verlag (1974).

[22] F. Sommer und J. Mehring, Kernfunktion und Hüllenbildung in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, Math. Ann. **131** (1956), 1-16.

[23] R. L. Soraggi, *The* $\overline{\partial}$*-problem for a (0,2)-form in a D.F.N. space,* J. Func. Anal. **98**(1991), 380-402.

[24] R. L. Soraggi, *The symmetric anti-linear components of the canonical solution for the* $\overline{\partial}$*-oerator,* Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **93**-1(1993), 111-122.

[25] F. Treves, Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations, Die Grundlehren der mathamatische Wissenshaften in Einzeldarstellungen Band **146** Springer Verlag(1967), pp120.

[26] K. Yoshida, Functional Analysis, Springer Verlag(1974).

99

24

Banach多様体への正則写像の拡張

~~無限次元の領域に対~~する核関数

梶原　壌二

松田　康雄

明治学園高校教諭

無限次元の領域からBanach多様体への正則写像の拡張について以下の論文に基いて紹介する。

Bibliography

[1] K. Adachi, M. Suzuki and M. Yoshida, *Continuation of holomorphic mappings. With value in a complex Lie group*, Pacific J. Math. **47**(1973), 1-4.

[2] P. K. Ban, *Some remarks on holomorphic extension in infinite dimensions*, Colloquium Mathematicum **167**(1994), 155-159.\bibitemM1 Y. Matsuda, Extension of holomorphic mappings, Proceedings of the Third International Colloquium on Finite or Infinite Dimansional Complex Analysis(Seoul, 1995), 89-103.

[3] Y. Matsuda, Extension of Holomorphic Mappings in Infinite Dimension, Proceedings of the Sixth International Colloquium on Differential Equations(Plovdiv, 1995), in Press.

[4] J. Kajiwara, L. Li, M. Nishihara and M. Yoshida, *On the Levi problem for holomorphic mappings of Riemann domains over infinite dimensional spaces into a complex Lie group*, Res. Bull. Fukuoka Inst. Tech. **26**-2(1994), 151-161.

[5] B. Malgrange, Lectures on the Theory of Functions of Several Complex Variables, Tata Inst. Fund. Res., Bombay(1958).

[6] Ph. Noverraz, Pseudo-Convéxité, Convéxité Polynomiale et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie, North-Holland Math. Studies **3**(1973).

[7] S. Ohgai, *A note on envelopes of holomorphy,* Kumamoto J. **13**(1979), 37-42.

[8] B. Shiffman, *Extension of Holomorphic Maps into Hermitian Manifolds*, Math. Ann. **194**(1971), 249-258.

[9] B. Shiffman, *Extension of holomorphic maps into Hermitian manifolds*, Math. Ann. Vietnam **16**(1971), 241-253.

[10] B. D. Tac, *Extending holomorphic maps in infinite dimensions*, Ann. Polon. Math. **54**(1991), 241-253.

[11] D. D. Thai, *On the D^*-extension and the Hartogs extension*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **18**(1991), 13-38.

25　2重点の極大イデアルサイクルについて。

都丸正　　群馬大学医学部保健学科

以下、(X, x) を2次元正規特異点、$\pi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (X, x)$ を特異点解消で$\pi^{-1}(x) = A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ とする。$\mathcal{O}_{(X,x)}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とし、$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i$ なるサイクルを定義する。ただし $m_i = min_{f \in \mathfrak{m}} v_{A_i}(\pi^* f) A_i$ で

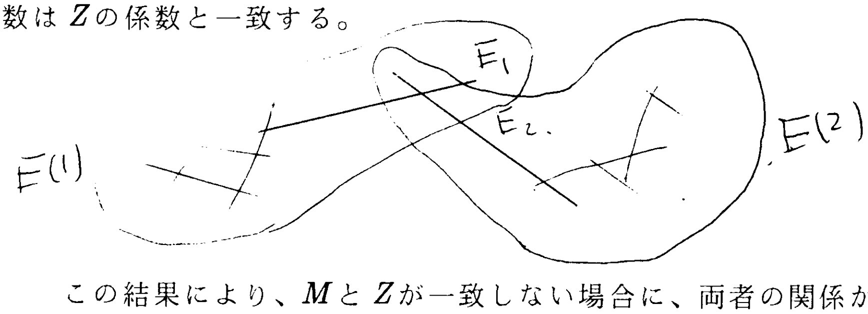
v_{A_i} は A_i上の vanishing order を意味する。このとき、（基本サイクル）$Z \leqq M$ や $0 < -Z^2 \leqq -M^2 \leqq mult(\mathcal{O}(X, x))(:= \mathcal{O}_{(X,x)})$ の重複度）、ということが成り立つ。重複度 = 2 の特異点を2重点という。このような特異点は超曲面特異点で、その定義式は $z^2 = f(x, y)$ と書けることが知られている。2重点の極大イデアルサイクルと基本サイクルとの関係に付いて、1979年に D.J.Dixon が「fの位数が偶数か、fの位数が奇数で fが既約なら両者は一致する。」という結果を示した。本講演では、Dixon の結果に当てはまらない場合を考える。$Z^2 = -2$ のときは、Wagreich の結果より $M = Z$はいえるので、$Z^2 = -1$ のときをかんがえる。

$\exists(\tilde{X}, E)$ good resol. s.t. $E = E(1) \cup E(2)$

定理 1． $Z^2 = -1$ のとき、最小特異点解消において、$M^2 = -2$ なら、その例外集合 Eは連結な部分例外集合 $E(1), E(2)$ の和となり、$E(1)$ の1つの成分 E_1と $E(2)$ の中の1つの成分 E_2とが1点で交わり、それ以外では $E(1)$ と $E(2)$ は交わらない。また、$E(1)$ 上では極大イデアルサイクル Mの係数は基本サイクル Zの係数の2倍となり、$E(2)$ 上では Mの係数は Zの係数と一致する。

$M_{E(1)} = 2Z_E$

$M_{E(2)} = Z_E$



この結果により、Mと Zが一致しない場合に、両者の関係がどうあるかが、かなり分かるようになる。この応用として、Dixon の結果で、fの位数は奇のときの結果の一般化「fの位数が奇で、その既約成分の位数がすべて奇なら $Z = M$となる。」が得られる。また、Laufer により以前得ら

れた、例外集合のある形状に関する結果の一般化なども得られる。さらに、応用として、(X,x) の基本種数（基本サイクルの算術種数）が、f と f のある成分の位数を用いて以下のように記述できる。

normal double point について

定理 2． 基本種数 $p_f(X,x)$（基本サイクルの算術種数）は以下のようになる。f の位数数を m とする。

$$p_f = 1 + \frac{Z^2 + KZ}{2}$$

(1)　m が偶のとき、$p_f(X,x) = \dfrac{m - \overset{2}{\cancel{4}}}{2}$。

(2)　m が奇のとき、

$$p_f(X,x) = \begin{cases} \dfrac{m-3}{2}, & \text{if } Z^2 = -2, \\ \dfrac{m+m_0-2}{4}, & \text{if } Z^2 = -1 \text{ and } M^2 = -2, \\ \dfrac{m-1}{2}, & \text{if } Z^2 = -1 \text{ and } M^2 = -1. \end{cases}$$

ただし、m_0 は定理 1 の E_2 の部分を定義する、f の因子の位数。詳細は講演で述べる。

REFERENCES

[1]. D.J.Dixon, The fundamental divisor of normal double points of surfaces,
Pacific J. Math., 80 (1979), 105-115.

[2]. M. Tomari, Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\phi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ for normal two-dimensional singularities, Adv. Stud. in Pure Math., 8 (1986), 633-647.

[3]. T. Tomaru, On Gorenstein surface singularities with fundamental genus
$p_f \leqq 2$ which satisfy some minimality conditions, Pacific J. Math., 170 (1995), 271-295.

[4]. P. Wagreich, Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math., 92 (1970),
421-454.

[5]. S.S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., (2), 257 (1980), 269-329.

26 $z^n = f(x, y)$ の小平性について。

都丸 正(群馬大学医学部保健学科)

以下、(X, x) を2次元正規特異点、$\pi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (X, x)$ を特異点解消とする。(X, x) の基本的な位相不変量として、基本種数 $P_f(X, x)$ がある。**U.Karras** [1]は2次元特異点のあるクラスを小平特異点と名づけた。$\Phi : S \to D$ を曲線のペンシルとする(Sは非特異曲面、Dは単位円、原点{0}の**fibre**以外は非特異の種数gの曲線で、{0}の**fibre**のみ退化している可能性あり)。このとき、原点の退化**fibre**の**non-multiple**な成分の非特異点を何点か選び、それを**blowing-up**する。そのような操作を適当に行い、その後できた曲面$\tilde{S}$上の、退化**fibre**の引き戻しとして得られる部分の交点行列が負定値となるようにし、これを**Grauert**の結果よりつぶして得られる特異点を小平特異点と名づける。これらの定義やネーミングは、**Kulikov**による「**Arnold**の**modality=1,2**の特異点がすべて、小平による楕円曲面の退化族から上の操作をへて得られる。」という観察から来ている。このとき、このような2次元特異点の基本種数はgと一致する。**Karras**はこれについて、次のような判定条件を得た:(X, x) が小平である必要十分条件は最小良特異点解消で極大イデアルサイクルと基本サイクルが一致し、例外集合のグラフが小平グラフである。」小平グラフとは小平特異点の例外集合から得られるグラフのこと。しかしながら、極大イデアルサイクルの計算は容易なものでなく、この結果から与えられた特異点がすぐに小平であるかどうかの判定をすることは難しい。我々は表題に掲げたような超曲面特異点(このような特異点については近年、足利正、**Fieda Ganter**といった人により種々の面白い性質が示されている。)のクラスに付いて、極大イデアルサイクルの計算を行う事で、このようなクラスの特異点について、小平となるための十分条件を得たのでそれを示す。

定理 $(X,x)=\{z^n=f(x,y)\}\subset(\mathbb{C}^3,\{0\})$ とする。ただし、$n>1$ かつ $f\in\mathbb{C}\{x,y\}$ 。

(i) $ord(f)$ が n で割り切れれば、(X,x) は種数 $\dfrac{(n-1)(ord(f)-2)}{2}$ の曲線のペンシルに付随してた小平特異点である。とくに、極大イデアルサイクル＝基本サイクル。

(ii) ある十分大な正の整数 F が存在し、$n\geqq F$ なる任意の n について、(X,x) は小平特異点となる。

(i) については、$z^2=f(x,y)$ について、D.J.Dixon により得られた「 ord(f) が偶数であれば, 極大イデアルサイクルと基本サイクルは一致する。」という結果の一般化になっている。(ii) の F は曲線 $f(x,y)=0$ から求められる量。このときも、(i) と同様に種数を計算できますが、少し準備がいるので講演でお話します。

参考文献

[1] U. Karras, On pencils of curves and deformations of minimally elliptic singularities, Math. Ann., 247 (1980), 43-65.

27

2次元正規特異点の maximal ideal cycle と fundamental cycle の同一視について

マサタカ
泊　昌孝　　　　金沢大学・理学部

(V,p) を代数閉体 k 上の正規2次元特異点、$\psi:(\tilde{V},A)\to(V,p)$ を $A=\cup A_j$ を例外集合とするその特異点解消をとする。このとき、Artin's fundamental cycle $\mathbf{Z}_\psi$ と maximal ideal cycle Y_ψ は $\mathbf{Z}_\psi = \min\{D\in\oplus\mathbf{Z}\cdot A_j \mid D\cdot A_j\le 0(\,^\forall j), D>0\}$ および $Y_\psi=\sum_{j=1}^m \min_{f\in m}\mathrm{ord}(\psi^*(f))\cdot A_j$ と定められるもので、$O_{\tilde{V}}(-Y_\psi)=(m\cdot O_{\tilde{V}})^{**}$ であり、両因子が $Z_\psi=Y_\psi$ なる条件を考えるのは、例外集合の幾何と局所環の環論的なデータの関係を探る為に大切である。今回、一つの十分条件として次の結果を報告する。

Theorem 1. 上記の (V,p) について、重複度を n とする。$h\in m$ があって、$C=\{h=0\}\subset V$ が p で重複度 n であってかつ、異なる n 個の既約曲線に分解されたとする。このとき、任意の特異点解消 $\psi:(\tilde{V},A)\to(V,p)$ に対して、$Z_\psi=Y_\psi$ である。

これは、本学会にて都丸さんが「変数分離型の場合」に発表 [5] なさっているある結果への一注意です。証明も同じ考え方に持ち込めます。実際、この命題の系として次が得られる。

Corollary 2. (1) (J. Dixon[1] for n = 2, 都丸 [5] for general) $V=\{z^n-g(x,y)=0\}\subset k^3$ かつ、$n\mid \mathrm{ord}g$ ならば、任意の特異点解消 $\psi:(\tilde{V},A)\to(V,p)$ に対して、$Z_\psi=Y_\psi$ である。(2) $V=\{z^n-g(x,y)+f(x,y,z)=0\}$ を、g,n は、(1) と同様とし、$f(x,y,z)$ の Newton boundary が、z^n- initial form of g より上にあると、(1) と同じ結論をえる。(3) V の tangent cone が reduced ならば、任意

の特異点解消 $\psi : (\tilde{V}, A) \to (V, p)$ に対して、$Z_\psi' = Y_\psi$ である。

注意 3. (1) 定理の状況では、任意の特異点解消上 $m \cdot O_{\tilde{V}}$ は常に invertible になる。(2) 任意の特異点解消上 $Z_\psi = Y_\psi$ であっても、定理の仮定は必ずしも成立しない（例えば、rational singularity)。

応用 4. (1) Theorem 1 の状況下では、$\dim R^1\psi_* O_{\tilde{V}}/m \cdot R^1\psi_* O_{\tilde{V}} = \dim \mathrm{H}^1(O_{Z_\psi}) = p_a(Z_\psi) = p_a(Y_\psi)$ であり [3]、さらにこの数は (C, p) の局所環によって、具体的に書き表すことができる (Prop (3.4) [2])。(2) やはり Theorem 1 の状況下で、$\dim R^1\psi_*(O_{\tilde{V}}) \leq p_a(Z_\psi) \cdot L(V, p)$ を示すことができる [3]。ここで、$L(V, p)$ は $R^1\psi_*(O_{\tilde{V}})$ の maximal ideal adic filtration の長さである [3][4]。

Ref. [1] J. Dixon: The fundamental divisor of normal double points of surfaces, Pasific J. Math., 80 (1979), 105-115. [2] M. Tomari: A p_g-formula and elliptic singularities, Publ. Rims. Kyoto Univ. 21 (1985),297-354, [3] M. Tomari: Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\psi_* O_{\tilde{V}}$ for normal two-dimensional singularities. Adv. Studies in Pure Math. 8 (1986) 633-647 , [4] M. Tomari: 本学会（代数）での講演、[5] T. Tomaru: 本学会（関数論）での講演

28 On the cohomology groups of certain covering spaces

宮澤 一久　　名古屋大学大学院理学研究科

Xを $(n+m)$ 次元複素多様体、Tを m 次元複素多様体とし、$\pi : X \longrightarrow T$を滑らかな固有全射正則写像、$\sigma : \widetilde{X} \longrightarrow X$ を被覆写像とする。$A \subset T$に対し、$\widetilde{X}_A := (\pi \circ \sigma)^{-1}(A)$ とおく。

$n = m = 1$ のときには次の結果が知られている。

定理 (1996 [1])：Xを 2 次元複素多様体、Tを $\mathbf{C}$ 内の単位円板とし、$\pi : X \longrightarrow T$を滑らかな固有全射正則写像とする。このとき Xの任意の被覆空間 $\widetilde{X}$ は正則凸である。

この定理の高次元化として、次の定理を得た。

定理：σのファイバーが非コンパクトであるならば、任意の $t \in T$ に対し次の条件をみたす t の近傍 U が存在する：コホモロジー群 $H^i(\widetilde{X}_U, \mathcal{F}) = 0, i \geq n$ が成り立つ。ここで、$\mathcal{F}$ は $\widetilde{X}_U$ 上の任意の解析的連接層である。

References

[1] T.Ohsawa: *A note on the variation of Riemann surfaces*,Nagoya Math.J. **142**(1996),1–4.

※印は本会で記入

※番号	題
29	有界な多重劣調和皆位関数について

氏名　大沢健夫　Nessim Sibony

所属　名大多元数理　Univ. de Paris Sud

Ωを$\mathbb{P}^n$の局所擬凸領域とする。武内の定理によればΩは多重劣調和皆位関数をもつ。実際、$\Omega \neq \mathbb{P}^n$ならばΩ内の点zに対し、zから$\partial\Omega$までのFubini-Study計量に関する距離を$\delta_\Omega(z)$としたとき、$-i\partial\bar{\partial}\log\delta_\Omega(z)$は基本形式の正数倍よりも大きい。

この事実に基いて次の結果を導くことができたので報告する。

定理. Ωを$\mathbb{P}^n$の擬凸領域、$\partial\Omega \in C^2$とする。このときΩは有界な多重劣調和皆位関数をもつ。

注： exhaustion function のことを皆位関数と言うことにしている。

※印は本会で記入

※番号	題	
30		$\mathbb{P}^n$ の擬凸領域について

氏名	大沢健夫 Klas Diederich	所属	名大多元数理 Wuppertal大

$\mathbb{C}^n$ の場合と同様に、$\mathbb{P}^n$上の擬凸領域が正則凸であることはよく知られている。$\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域については、正則関数の境界挙動や $\bar{\partial}$ 方程式の標準解の境界正則性など、最近にいたるまで詳しい事実が次々にわかって来たが、これらの兄弟分とも言うべき $\mathbb{P}^n$ の領域に関する知識は停滞したままである。その主な理由は、Ωを $\mathbb{P}^n$ 内の領域で境界が滑らかな実超曲面であるようなものとするとき、Ωが正則凸であっても、$\partial\Omega$ の近傍上に強多重劣調和な関数が存在するかどうかわからないことである（未解決問題）。ここではこの問題について、

1. $\partial\Omega$の滑らかさの仮定は必要であること、
2. $\Omega \neq \mathbb{P}^n$ の場合に成立する一つの局所化原理

を報告する。具体的には以下の二つの結果である。

定理1. 局所的に hyperconvex であるような領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{P}^5$ で、(大域的に) hyperconvex ではないものが

存在する。

定理2を述べるために記号を用意する。$A^2(\Omega)$でΩ上の正則関数で$\mathbb{P}^n$上のFubini-Study計量に関して二乗可積分なものから成るHilbert空間を表す。$K_\Omega(z,w)$で$A^2(\Omega)$の再生核を表し $K_\Omega(z)=K_\Omega(z,z)$ とおく。

定理2. Ωを$\mathbb{P}^n$の擬凸領域で、$\overline{\Omega}\neq\mathbb{P}^n$なるものとすると、$\forall x\in\partial\Omega$、$\forall$近傍$U\supset\supset V\ni x$ に対し、$\exists$定数$C>0$ s.t. $\forall z\in V\cap\Omega$ に対し

$$C^{-1}K_\Omega(z)<K_{U\cap\Omega}(z)<CK_\Omega(z)$$

さらに $\partial\bar{\partial}\log K_\Omega(z)$ についても同様の評価式が成立する。

31 $\partial\bar{\partial}$-LEMMA ON WEAKLY 1-COMPLETE KÄHLER MANIFOLDS

風間英明　九州大学数理学研究科
高山茂晴　鳴門教育大学数学教室

Compact Kähler 多様体で、次の Kodaira による補題は"$\partial\bar{\partial}$-Lemma"と呼ばれこの方面の重要な結果の一つである (for instance in [5])。

$\partial\bar{\partial}$-Lemma. *Let X be a compact Kähler manifold and φ a d-exact* (1, 1)*-form on X. Then there exists a C^∞- function Ψ on X such that $\varphi = \partial\,\bar{\partial}\,\Psi$ on X.*

日本数学会編雑誌「数学」の問題特集 ([10], 32 巻, 1980, 161-187) において、S. Nakano によって $\partial\bar{\partial}$-Lemma に関して次のような問題が提出されている (S. Takayama はこの問題の成立について、1996 年度の多変数関数論サマーセミナーの講演 ([6]) において疑問を提出した)。

問題. *Can one show $\partial\bar{\partial}$- Lemma on weakly 1-complete Kähler manifolds?*

複素 Lie 群に対し、その上の正則関数が定数のみである時、トロイダル群と呼ばれる。トロイダル群は、$\mathbb{C}^n$ の離散部分群 $\Gamma := \mathbb{Z}\{v_1, ..., v_s\}$ (ただし、$v_1, ..., v_s$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立なベクトル、このとき $\operatorname{rank}\Gamma = s$ と定義する) が存在し $\mathbb{C}^n/\Gamma$ と複素 Lie 群として同型になる。トロイダル群は常に weakly 1-complete Kähler であることに注目し ([1,7])、ここではトロイダル群のみを対象にして、Nakano の問題を考察する。トロイダル群 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ は離散部分群 Γ の数論的な性質によって、そのコホモロジー群が極端に異なる次の 2 種類のタイプに分かれる ([2,3,8,9])。

(1) $\dim H^k(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{O}) < \infty$ $(1 \leq k \leq s-n)$ の時、$\mathbb{C}^n/\Gamma$ を cohomologically finite type と呼ぶ。
(2) $H^k(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{O})$ $(1 \leq k \leq s-n)$ が non Hausdorff locally convex space(したがって無限次元) となるとき、non Hausdorff type という。

反例. $X = \underset{w}{\mathbb{C}} \times \underset{z}{T^1_{\mathbb{C}}}$ $\quad d(w\,d\bar{z}) = \omega$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

例. $a \in \mathbb{R}$ に対して、$\Gamma := \mathbb{Z}\{(1,0),(0,1),(\sqrt{-1},a)\} \quad \subset \mathbb{C}^2$ とするとき

(1) a が無理数 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{C}^2/\Gamma$ がトロイダル群 ([4]);

(2) a が *irrational and algebraic number* $\Longrightarrow$ $\mathbb{C}^2/\Gamma$ が *cohomologically finite type;*

(3) $a := \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-10^{j!}}$ $\Longrightarrow$ $\mathbb{C}^2/\Gamma$ は *non Hausdorff type.*

我々の得た結果は、

type (1,1)に限らず
(p,q)でO.K.

Theorem.

(1) $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が *cohomologically finite type* ならば、$\partial\overline{\partial}$-*Lemma* は常に成立する。

(2) $\mathbb{C}^n/\Gamma$ が *non Hausdorff type* のとき *d-exact-form* で $\partial\overline{\partial}$-*exact* でない *form* が存在する。その意味で $\partial\overline{\partial}$-*Lemma* は成立しない。

したがって、特に上記の問題は否定的に解決されたことになる。また、必ずしもトロイダル群とは限らないが quasi-torus $\mathbb{C}^n/\Gamma$ (Γ は rank が s の任意の離散部分群) 上で$\partial\overline{\partial}$-Lemma が成立するかどうかを考えると、$H^k(\mathbb{C}^n/\Gamma, \mathcal{O}) \quad (1 \leq k \leq s-n)$ が Hausdorff 無限次元 locally convex space になる場合がでてくるが (例えば上記の例で a が有理数の時)、この場合も$\partial\overline{\partial}$-Lemma は成立しない。これらの結果より cohomologically finite type の存在は weakly 1-complete Kähler 多様体で、compact Kähler 多様体と類似の性質を持つ 多様体の族が存在することを示唆する。

References

1. H. Kazama, *On pseudoconvexity of complex abelian Lie groups*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 329–333.
2. H. Kazama, *$\overline{\partial}$-Cohomology of (H,C)-groups*, Publ. R. I. M. S. **20** (1984), 297–317.
3. H. Kazama and T. Umeno, *Complex abelian Lie groups with finite-dimensional cohomology groups*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 91-106.
4. A. Morimoto, *Non-compact complex Lie groups without non-constant holomorphic functions*, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis 1964 ((Springer 1965)), 256-272.
5. J. Morrow and K. Kodaira, *Complex manifolds*, Holt, Rinehart and Winston Inc. (1971).
6. S. Takayama, *Adjoint linear series on weakly 1-complete manifolds*, Lecture Notes at Summer Seminar(in Japanese) (1996).
7. S. Takeuchi, *On completeness of holomorphic principal bundles*, Nagoya Math. J. **57** (1974), 121–138.
8. C. Vogt, *Line bundles on toroidal groups*, J. Reine Angew Math. **335** (1982), 197–215.
9. C. Vogt, *Two remarks concering toroidal groups*, manuscripta math. **41** (1983), 217–232.
10. I. Wakabayashi(editor), *Collected problems arround several complex variables*, Sugaku (published by Math. Soc. of Japan, in Japanese) **32** (1980), 161–187.

特別講演

Adjoint Linear Series on Weakly 1-Complete Kähler Manifolds

高山 茂晴　　　鳴門教育大学

1 Introduction.

ここでは１９８０年頃に中野-大沢により提出された次の問題 1.1 と, その証明の鍵となる adjoint bundle の effective bese point freeness の種々の応用について考察する.

Problem 1.1 [1] Let X be a weakly 1-complete manifold with a positive line bundle L. Then can one embed X into a projective space ?

複素多様体 X 上に滑らかな多重劣調和関数 $\Phi : X \longrightarrow \mathbf{R}$ で exhaustive なものが存在するとき X は弱１完備 (**weakly 1-complete** または pseudoconvex) と呼ばれる. 各実数 $c < \sup_X \Phi$ に対して $X_c := \{x \in X \,;\, \Phi(x) < c\}$ とおき, (X, Φ) の sublevel set と呼ぶ. 関数 Φ が exhaustive であるとは, 各 X_c が X 内で相対コンパクトであることである. また, X 上の正則直線束 L が *very ample* であるとは, ある正則埋込み（正確には, 正則な１対１イマーション）$f : X \longrightarrow \mathbf{P}^N$ があって $f^*\mathcal{O}(1) \cong L$ となることである. そして, L が *ample* であるとは, $L^{\otimes m_0}$ が very ample となるような自然数 m_0 が存在することである.

弱１完備多様体のモデルとしては, コンパクト複素多様体（この場合問題 1.1 に関して, 小平埋め込み定理から L が ample であることが分る）, スタイン多様体（この場合は Cartan-Serre の基本定理により L が ample であることが分る）, 及び本質的にこの二者の組み合わせとして表される正則凸多様体がある. 一方, $\mathbf{C}^n$ のある種の離散部分群 Γ による非コンパクト商群 $\mathbf{C}^n/\Gamma$ のような定数以外に正則関数をもたない非コンパクト弱１完備多様体も存在する. これについては後の第４章で再論する.

問題 1.1 に関連して次のことが知られている.

Remark 1.2 L を n 次元弱１完備多様体 X 上の正則直線束とする. このとき

(1) L: ample $\Longrightarrow$ L: positive (Fubini-Study 計量の引き戻し).

(2) L: positive $\Longrightarrow$ L: ample on every sublevel set X_c（中野消滅定理による）

(3) 一般に “ L: positive $\Longrightarrow$ L: ample” は成立しない（大沢による例 [11]).

上の (2) は小平埋め込み定理の類似であり, つまり, 各 $c < \sup_X \Phi$ に対して, ある自然数 m_c が存在して $L|_{X_c}^{\otimes m_c}$ は very ample となる. そして (2) で

"Positive な L が X 上 ample になるか"

を考えるときに当然問題となるのが

(a) "テンソル巾 $\{m_c\}_{c\in\mathbf{R}}$ を一様におさえることができるか?"

ということである. それ以前の問題として,

(b) "ある自然数 m に対して $H^0(X, L^{\otimes m}) \neq 0$"

さえも一般には成立しないように思われる.

１９９５年１０月の名古屋大学での多変数関数論の研究集会において大沢は問題 1.1 について再論し, "Adjoint bundle が projective embedding を与えるのではないか" と主張した [2]. その主張の背景には adjoint bundle の freeness 等に関する藤田予想をめぐる目覚しい発展, 特に Demailly [5], Angehrn-Siu [3], 辻 [17] らによる singular Hermitian metric を用いた複素解析的手法, があった. ここでは Angehrn-Siu の方法を一般化することで, 次のような effective な形で 問題 1.1 の解答をあたえる.

Theorem 1.3 [15]*Let X be an n-dimensional weakly 1-complete manifold with a positive line bundle L. Then $K_X \otimes L^{\otimes m}$ is ample for every $m > n(n+1)/2$. In fact, X is then holomorphically embeddable into $\mathbf{P}^{2n+1}$ by a linear subsystem of $|(K_X \otimes L^{\otimes m})^{\otimes(n+2)}|$ for $m > n(n+1)/2$.*

Adjoint bundle について考えることの利点は, 注意 1.2 の下の述べたような困難が次のような形で解消される点にある.

(A) Effective base point freeness: For any $c < \sup_X \Phi$, there exists an effective bound $m(\dim X)$ depending only on the dimension of X, but on the level c, such that $K_X \otimes L^{\otimes m(\dim X)}$ is generated by global sections on every sublevel set X_c.

(B) Approximation theorem: The natural restriction map

$$H^0(X, K_X \otimes L^{\otimes m}) \longrightarrow H^0(X_c, K_X \otimes L^{\otimes m}) \quad \text{has dense image}$$

with respect to the topology of compact convergent.

近似定理 (B) は中野, 風間, 大沢らによって確立され, 弱 1 完備多様体上の層係数のコホモロジー理論において消滅定理とともに中心的な役割を果たす.

Angehrn-Siu, 辻による射影代数多様体上の effective base point freeness は Riemann-Roch, Nadel's (Kawamata-Viehweg) vanishing theorem そして Ohsawa-Takegoshi's L^2-extension theorem [13] によるものであった. Riemann-Roch, Kawamata-Viehweg vanishing は Bombieri-Kawamata-Shokurov concentration method [6] において既に用いられていたが, effective な形にするには concentrate のようすを具体的に計算する必要があり, その困難は Ohsawa-Takegoshi's L^2-extension theorem を応用することによって初めて突破できた. 我々の場合の上記 (A) については, 次の章において幾つかの定義の後に少し一般化した形で定式化することにする.

2 Effective Points Separation.

以下 L は n 次元弱 1 完備多様体 X 上の positive line bundle とする. 各点 $x \in X$ に対して

$$d(x) := \max\{\dim V;\ V \text{ is a compact subvariety of } X \text{ passing through } x\}.$$

とおく. 言葉の定義はすぐ後で復習するとして, 次の定理にあるような singular Hermitian metric の構成が鍵となる.

Theorem 2.1 [15]*Let x be a point on a sublevel set X_c. Then for every positive integer*

$$m > \frac{1}{2}d(x)(d(x)+1),$$

there exists a singular Hermitian metric H of $L|_{X_c}^{\otimes m}$ such that

(1) *the curvature current of H dominants some complete Kähler form ω_c on X_c, i.e., curv $H \geq \delta\ \omega_c$ for some positive constant δ, and such that*

(2) *x is isolated in $V\mathcal{I}(H)$.*

ここでしばらく singular Hermitian metric とそれに関わる Nadel's vanishing theorem について復習する [5]. E を 複素多様体 M 上の正則直線束とする. E の smooth Hermitian metric h_0 と M 上の局所可積分関数 $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \mathbf{R})$ を使って $h = e^{-\varphi}h_0$ と表されるものを E の **singular Hermitian metric** と呼ぶ. Singular Hermitian metric に対しても曲率形式のようなものが定義される. 形式的には curv $h = \sqrt{-1}\ \bar\partial\partial \log h$ と表され, (E, h) の **curvature current** と呼ばれる. この curv h は h_0 や φ を使った表示の仕方に依らずに定まる. Singular Hermitian metric h に対して, その **multiplier ideal sheaf** $\mathcal{I}(h)$ が以下のように定義される: presheaf としては

$$\mathcal{I}(h)(U) := \left\{ f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_M)\ ;\ \int_U |f|^2 e^{-\varphi} dv < +\infty \right\}.$$

この sheaf も φ, h_0 や ω のとりかたに依らずに定まる. 適当な条件下で $\mathcal{I}(h)$ は coherent ideal sheaf になり, そのときその ideal が定める complex subspace を $V\mathcal{I}(h)$ で表す.

次の定理は Hörmander の L^2-estimate の改良形で, Kawamata-Viehweg vanishing theorem の 複素解析版となっている.

Nadel's coherence and vanishing theorem 2.2 [5] *Let (M,ω) be a complete Kähler manifold and let (E,h) be a singular Hermitian line bundle on M. Assume that there exists a real number δ such that curv $h \geq \delta\ \omega$ on M. Then*

(1) *the sheaf $\mathcal{I}(h)$ is a coherent ideal sheaf of $\mathcal{O}_M$, and*

(2) *if δ is positive, the q-th L^2-cohomology group*

$$H^q_{(2)}(M, K_M \otimes E \otimes \mathcal{I}(h)) = 0 \quad \textit{for every } q \geq 1.$$

定理 2.1 の類似の結果と Nadel's vanishing によって半大域的な状況下で次をえる.

Theorem 2.3 [15]*Let $x_1, \ldots, x_r$ be r-distinct points on a sublevel set X_c. Then for every positive integer*

$$m > \frac{1}{2}d_x(d_x + 2r - 1), \quad \textit{here} \ \ d_x := \max\{d(x_i)\ ;\ i = 1, \cdots, r\},$$

$H^0(X_c, K_X \otimes L^{\otimes m})$ separate $\{x_i\}_{i=1}^r$, i.e., the restriction map $H^0(X_c, K_X \otimes L^{\otimes m})$ $\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X/\mathcal{M}_{X,x_i}$ is surjective.

さらに近似定理を使えば X 上の global section が点を分離することが分かる. そして定理 1.3 は定理 2.3 から比較的容易に得られる. 以下においては定理 1.3 及び定理 2.3 の応用について考える. 定理 2.3 によれば, 正次元の compact subvariety があまり存在しなければ, それだけテンソル巾 m を上げずに $K_X \otimes L^{\otimes m}$ の section を構成できることが分かる. このことは非コンパクト特有の現象で, 第 4 章の quasi-abelian variety 上の Lefschetz 型定理の証明において本質的な役割を果たす.

3 Application to Geometry.

定理 1.3 及び定理 2.3 を直接用いて得られる結果について述べる.

3A Global embedding problem of weakly 1-complete manifolds.

中野-大沢の問題は小平埋込み定理 (コンパクトの場合) 及び Cartan-Serre の定理 (スタイン多様体の場合) の一般化を目標として提出されたものであるが, ここでは小平型の定式化をする.

Kodaira type embedding theorem 3.1 [15] *Let X be a weakly 1-complete manifold. Then the following three conditions are equivalent to each other.*

(1) *X is holomorphically embeddable into a projective space.*

(2) *X admits a positive line bundle.*

(3) *There exists an integral Kähler form on X.*

明らかでない所は (2) $\Rightarrow$ (1) であって, このことは具体的に定理 1.3 から従う. 上の定理においては埋め込みの仕方が十分明確であるとは言いきれない. そこで, さらに正確な形ではどうであろうか.

Question 3.2 Let L be a holomorphic line bundle on a weakly 1-complete manifold X. Then are the following three conditions equivalent to each other ?

(1) L is ample;

(2) L is positive;

(3) The first Chern class $c_1(L)$ is represented by an integral Kähler form.

前述のように (2) $\Rightarrow$ (1) は一般には成立しない. しかし, X もしくは L に何か別の条件が付いている場合にはどうか. (3) $\Rightarrow$ (2) については次の $\partial\bar{\partial}$-Lemma が関係している.

Proposition 3.3 ($\partial\bar{\partial}$-Lemma) *Let X be a complex manifold with some additional structures and let η be a smooth real $(1,1)$-form on X. Assume that there exists a smooth real 1-form ξ such that $\eta = d\xi$. Then there exists a smooth real function f such that $\eta = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f$.*

ここで言う “additional structure” として, X がコンパクトケーラー多様体である, またはスタイン多様体である, などが挙げられる. 問題 3.2 と $\partial\bar{\partial}$-Lemma については次章で具体的な対象 商群 $\mathbf{C}^n/\Gamma$ 上で考察を行なう.

3B Relative very ampleness.

弱 1 完備多様体のモデルである固有正則写像の局所理論と大域理論への応用を与える. まず定理 2.3 の系として

Relative base point freeness 3.4 [14] *Let $f : X \longrightarrow Y$ be a projective morphism from a complex manifold X to a complex space Y, and let L be a relatively ample line bundle on X. Then $\mathcal{O}_X(K_X \otimes L^{\otimes m})$ is f-free, i.e., the natural sheaf homomorphism $f^*f_*\mathcal{O}_X(K_X \otimes L^{\otimes m}) \longrightarrow \mathcal{O}_X(K_X \otimes L^{\otimes m})$ is surjective, for every $m > d(d+1)/2$, where d is the maximum dimension of the fibres of f.*

定理 1.3 を使って, 次のような正の直線束をもつ正則凸多様体の特徴づけも考えられる. これは射影代数多様体の族の同時埋込みともみれる.

Relative very ampleness 3.5 [15] *Every holomorphically convex complex manifold with a positive line bundle admits a proper holomorphic embedding into a product space of a projective space and a complex Euclidian space.*

3C Construction of holomorphic functions.

後の 4 章で述べるように, 一般に弱 1 完備多様体上に定数以外の正則関数が存在するとは限らない. 幾何的に自然な条件下で その存在を示すことはとても興味ある問題だと思う. 我々の定理 2.3 を用いて, 次のようなことが分かる.

Theorem 3.6 [15]*Let X be a weakly 1-complete manifold whose anti-canonical bundle $K_X^{\otimes(-1)}$ is positive.*

(1) *Assume that any compact subvariety of positive dimension does not contain distinct two points x and y on X. Then there exists a non-constant holomorphic function which separates x and y.*

(2) *X is Stein if and only if X has no compact complex subspaces of positive dimension.*

大沢は論文 [12] において, 2 次元弱 1 完備多様体については, negative canonical bundle という条件のみから, その多様体が正則凸になることを導いている. Green-Wu は曲率の条件で完備 Kähler 多様体の Stein 性などを考察している.

4 Lefschetz Type Theorem on Quasi-Abelian Varieties.

Γ を $\mathbf{C}^n$ の (必ずしも maximal rank ではない) 離散部分群とする. その商群 $X := \mathbf{C}^n/\Gamma$ は **quasi-torus** と呼ばれ, さらに非定数正則関数が存在しないとき **toroidal group** と呼ばれる. その研究は Cousin (1910) までさかのぼる (toroidal gruop は Cousin quasi-torus とも呼ばれる). Quasi-torus は自明な標準束をもつ弱 1 完備ケーラー多様体で [7], 標準的な分解 $\mathbf{C}^n/\Gamma \cong \mathbf{C}^\ell \times (\mathbf{C}^*)^m \times$ (toroidal) がある.

目標とするのは, 次の Lefschetz による定理の拡張である.

Lefschetz' theorem 4.1 *Let $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ be a compact complex torus and let L be a holomorphic line bundle over X. Assume that the alternating form $c_1(L)$: $\Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbf{Z}$ given by the first Chern class is obtained as the imaginary part of a positive definite Hermitian form H on $\mathbf{C}^n$. Then*

(1) *L has a non-trivial global sections;*

(2) *$L^{\otimes 2}$ is generated by its global sections;*

(3) *$L^{\otimes 3}$ is very ample.*

よく知られているように, コンパクトトーラスの場合は正則直線束の section は $\mathbf{C}^n$ 上のテータ関数に対応していて, そのことを使って具体的に計算することができた. しかし次のように quasi-torus 上では一般にそのような対応はなく, 事情は複雑である.

Example-Theorem 4.2 [8] [10] $\mathbf{C}^2$ の階数 3 の離散部分群

$$\Gamma = \mathbf{Z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Z}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{Z}\begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ \beta \end{pmatrix} \text{ for } \beta \in \mathbf{R}$$

を考え, $X = \mathbf{C}^2/\Gamma$ とおく. $\mathbf{C}^2$ 上の標準的正則座標を $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i (i = 1, 2)$ とする. $\mathbf{C}^2$ 上の関数 $\tilde{\Phi}(z_1, z_2) := y_2^2$ はΓ 不変な多重劣調和で exhaustive な関数で, X 上の多重劣調和で exhaustive な関数 Φ を定めることが分る. これによって (X, Φ) は弱 1 完備多様体となる.

X がトロイダル群であるための必要十分条件は$\beta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ である. さらにこのとき, 次のどちらか一方が成立する.

(1) X は有限型のトロイダル群である.

$\Longleftrightarrow_{\mathrm{def}}$ $H^1(X, \mathcal{O})$ は有限次元

$\Longleftrightarrow$ 正則直線束の section はテータ関数に対応する.

$\Longleftrightarrow$ 正の定数 C と a が存在して, $|q\beta - p| \geq C\exp(-a|q|)$ が任意の整数 $p, q (\neq 0)$ に対して成立する. 代数的整数はこのクラスに属することが知られている.

(2) X は non-Hausdorff 型のトロイダル群である.

$\Longleftrightarrow_{\mathrm{def}}$ $H^1(X, \mathcal{O})$ は non-Hausdorff

$\Longleftrightarrow$ テータ関数に対応しない正則直線束の section が存在する.

$\Longleftrightarrow$ 任意の正の定数 C と a に対して, ある整数 $p, q (\neq 0)$ が存在して, $|q\beta - p| < C\exp(-a|q|)$ が成立する. 例えば $\beta = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{(-10^{j!})}$ がある.

まずはコンパクトトーラスの場合と同様に, トロイダル群が代数多様体になるための条件を考える.

Definition 4.3 [4] A toroidal group $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ is said to be a **quasi-abelian variety** if the following **generalized Riemann relations** for Γ is satisfied: there exists a Hermitian form H on $\mathbf{C}^n$ such that

(i) H is positive definite, and such that

(ii) the imaginary part $\mathrm{Im}H$ of H takes integral values on $\Gamma \times \Gamma$.

そして偏極 H と対応する正則直線束の性質について次を得た.

Kodaira type theorem 4.4 [16] *Let L be a holomorphic line bundle over a quasi-torus $\mathbf{C}^n/\Gamma$. Then the following four conditions are equivalent to each other.*

(1) *L is ample.*

(2) *L is positive.*

(3) *There exists a Kähler form in the first Chern class $c_1(L) \in H^2(\mathbf{C}^n/\Gamma, \mathbf{R})$.*

(4) *The alternating form $c_1(L) : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbf{Z}$ given by the first Chern class is obtained as the imaginary part of a positive definite Hermitian form H on $\mathbf{C}^n$.*

(2) $\Longrightarrow$ (1) は定理 1.3 から従う. (3) $\Longleftrightarrow$ (4) についてはコンパクトの場合と同様にして知られていた. よって (3) $\Longrightarrow$ (2) が問題となる. 問題点は第 3 章でも述べているが, そのことは中野がすでに問題として提出していた.

Problem 4.5 ($\partial\overline{\partial}$-Lemma [1]) Let X be a weakly 1-complete Kähler manifold and let η be a smooth real $(1,1)$-form on X. Assume that there exists a smooth real 1-form ξ such that $\eta = d\xi$. Then does there exist a smooth real function f such that $\eta = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}f$?

残念ながら, 次の定理が示すようにこの問題については何か条件が必要である.

Theorem 4.6 [9] *Let $X = \mathbf{C}^n/\Gamma$ be a toroidal group. Then*

(1) *X is of finite type $\Longleftrightarrow$ $\partial\overline{\partial}$-Lemma always holds;*

(2) *X is of non-Hausdorff type $\Longleftrightarrow$ $\partial\overline{\partial}$-Lemma does not necessarily hold.*

しかし我々は次が成立すること期待する.

Question 4.7 Let L be a holomorphic line bundle over a weakly 1-complete manifold X whose first Chern class $c_1(L)$ is represented by a Kähler form. Then does L admit a smooth Hermitian metric (at least on every relatively compact domain) whose curvature form is positive ?

話は少しそれたが, 我々は定理 4.4 にあるような対 (X, L) に対して次を得た.

Lefschetz type theorem 4.8 [16] *Let X be a quasi-torus and let L be a holomorphic line bundle over X which satisfies one of the properties (1) - (4). Then*

(1) *L has a non-trivial section;*

(2) *$L^{\otimes 2}$ is generated by its global sections;*

(3) *$L^{\otimes 3}$ is very ample.*

まず次の特別な場合について証明する. その (1) は定理 2.3 の直接の帰結である.

Theorem 4.9 [16] *Let X and L be as above. Assume that X has no compact subvariety of positive dimension. Then*

(1) *global sections of L separate any set of finite number of distinct points on X;*

(2) *$L^{\otimes 2}$ is very ample.*

残念ながら (1) の L の section についての具体的な記述を与えることはできない. (2) については, (1) で得た section の適当な平行移動をうまく組み合わせることによって得られる (いわゆる Lefschetz' trick).

一般の場合は 次の事実に注目して, 両極端な場合（定理 4.1 と定理 4.9）に帰着させる.

Lemma 4.10 *Let X be a quasi-abelian variety. Then there exist an abelian subvariety A of X and a closed quasi-abelian subvariety Y of X without a compact subvariety of positive dimension such that the natural map $Y \times A \longrightarrow X$ is surjective with finite kernel.*

参考文献

[1] 数学 第 32 巻, 問題特集—多変数関数論を中心として—, 若林 功 編, 1980, 161–187.

[2] 多変数関数論の総合的研究—問題特集について 報告集, 1995.

[3] Angehrn-Siu: Effective freeness and point separation for adjoint bundles. Invent. math. 122, 1995, 291–308.

[4] Capocasa-Catanese: Periodic meromorphic functions. Acta Math. 166, 1991, 27–68

[5] Demailly: L^2 vanishing theorem for positive line bundles and adjunction theory. CIME Session, Transcendental Methods in Algebraic Geometry, Cetraro, Italy, 1994, to appear.

[6] Kawamata, Matsuda-Matsuki: Introduction to the Minimal Model Problem. Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Advanced Studies in Pure Math. 10, 1987, 283–360.

[7] Kazama: On pseudoconvexity of complex abelian Lie groups. J. Math. Soc. Japan 25, 1973, 329–333.

[8] Kazama: $\overline{\partial}$-Cohomology of (H, C)-Groups Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20, 1984, 297–317.

[9] Kazama-Takayama: $\partial\overline{\partial}$-Problem on Weakly 1-Complete Kähler Manifolds, 1996, preprint.

[10] Kazama-Umeno: Complex abelian Lie groups with finite-dimensional cohomology groups. J. Math. Soc. Japan 36, 1984, 91–106.

[11] Ohsawa: A Counter Example of Ampleness of Positive Line Bundles. Proc. Japan Acad. 55, 1979, 193–195.

[12] Ohsawa: Weakly 1-complete manifold and Levi problem. Publ. RIMS. 17, 1981, 153–164, supplement Publ. RIMS. **17** (1981), 981–982.

[13] Ohsawa-Takegoshi: On the Extension of L^2 Holomorphic Functions. Math. Z. 195, 1987, 197–204.

[14] Takayama: On Relative Base Point Freeness of Adjoint Bundle. to appear in Nagoya Math. J. 146, 1997.

[15] Takayama: Adjoint Linear Series on Weakly 1-Complete Kähler Manifolds I: Global Projective Embedding. 1996, preprint.

[16] Takayama: Adjoint Linear Series on Weakly 1-Complete Kähler Manifolds II: Lefschetz Type Theorem on Quasi-Abelain Varieties. 1996, preprint.

[17] Tsuji: Global generation of adjoint bundles. Nagoya Math. J. 142, 1996, 5–16.

Shigeharu TAKAYAMA

Depart. of Math., Naruto Univ. of Edu.

Naruto-shi Naruto-cho Takashima, 772, Japan

e-mail: takayama@naruto-u.ac.jp