日　本　数　学　会

１９９６年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９６年4月

於　新潟大学

函数論分科会

第1日　4月1日（月）　第IV会場

9:30 ～ 12:10

1	西本勝之 J. A. de Duran L. Galue	(デカルト出版)* (Univ. del Zulia) (Univ. del Zulia)	N-fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous Fukuhara equations (I)	15
2	布川　護 尾和重義 斎藤　斉 池田　彰 小池尚也	(群馬大教育) (近畿大理工) (群馬工高専) (群馬大教育) (群馬大教育)	Some results for strongly starlike functions	15
3	尾和重義 Y. C. Kim J. H. Choi	(近畿大理工) (Yeungnam Univ.) (Yeungnam Univ.)	Starlikeness and convexity of certain linear operators	15
4	朱　文山	(千葉大自然科学)*	半空間上の Neumann 問題.....	15
5	吉田英信 宮本育子	(千葉大理) (千葉大理)	ストリップ上のディリクレ問題の特殊解.....	15
6	下村勝孝 鈴木紀明 西尾昌治	(茨城大理) (名大多元数理) (阪市大理)	A mean value property of plytemperatures on a strip domain	15
7	下村勝孝	(茨城大理)	熱方程式の解を保つ変換.....	15
8	G. Schmieder 柴　雅和	(Univ. Oldenburg) (広島大工)	有限 Riemann 面の接続と基本 Abel 微分のノルムの変化.....	15
9	柴　雅和	(広島大工)	Cauchy の積分定理と積分公式 — Jordan 曲線定理に依存しない定式化 —	15

13:00 ～ 15:50

10	木坂正史	(阪府大総合科学)*	On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions	20
11	神　直人	(学習院大理)	Two examples of two-sheeted covering surfaces of the unit disc	15
12	城崎　学	(阪府大工)	多項式による正則写像の一意性 (II)	10
13	戸田暢茂	(名工大)	On the second fundamental theorem for holomorphic curves	15
14	相川弘明	(島根大総合理工)*	Densities with the mean value property for harmonic functions in a Lipschitz domain	15
15	中井三留	(名工大)	リプシッツ領域の調和境界.....	15
16	水田義弘 下村　哲	(広島大総合科学) (広島大生物圏科)	ソボレフ関数のヘルダー連続性について.....	15

17	田中　博 (上越教育大)	Dirichlet ポテンシャルについて	10
18	二宮信幸	ポテンシャル論における最小変分の方法	15
19	大津賀　信	Canonical integral representation の uniqueness について	15

16:10 ~ 17:10　特別講演

酒井　良 (都立大理)	Potential-theoretic analysis of Hele-Shaw flows with a free boundary	60

第2日　4月2日（火）　第IV会場

9:30 ~ 12:20

20	笹山浩良 (笹山研)	On the generalization of A. D. Michal's theorems concerning successive Fréchet differentials of abstract power series in the case of non-symmetric polar forms	10
21	笹山浩良 (笹山研)	On the generalization of R. Fueter's polynomials $p(z)$ for hypercomplex n-tuple spaces	10
22	角　慎吾 (東芝)* 辻　美輝 (九大数理) V. M. Raffee (印度高工センター)	多項式の擬零点と companion 行列の擬スペクトル	15
23	辻　美輝 (九大数理)* V. M. Raffee (印度高工センター)	$\bar{\partial}$-数値解析	15
24	高橋　正 (神戸大発達科学)*	Deformation of double cusp singularity on a quartic curve	10
25	奥間智弘 (筑波大数学)	Pluri-genera による 2 次元商特異点の特徴付け	10
26	楊　維奇 (北京理工大)	Isometry groups on Hadamard manifolds	15
27	柴田敬一 (国際自然科学研)*	A remark on the pseudo-conformal transformations of bidisk	15
28	山口博史 (滋賀大教育)	$\mathbb{R}^4$ の領域の調和 module の動き	15
29	中路貴彦 (北大理)	$H^1(T^2)$ の unit ball の extreme point について	15
30	大沢健夫 (名大多元数理)	On the stability of pseudoconvexity for certain covering spaces	15

13:30 ~ 14:30　特別講演

赤堀隆夫 (姫路工大理)	A new approach to the Hodge theory on strongly pseudo convex domains	60

1 N-fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous Fukuhara equations (I)

Katsuyuki Nishimoto — Descartes Press
Judith A. de Duran — Univ. del Zulia Venezuela
and
Leda Galue — Univ. del Zulia

Abstract

Many papers and books on the N-fractional calculus, N-transformation and on the N^{ν} operator have been published by the first author already. In this article, nonhomogeneous and homogeneous Fukuhara equations are treated by means of N-fractional calculus Operator N^{ν}.

§ 1. Operator N^{ν} method to nonhomogeneous Fukuhara equations

Theorem 1. *Let* $\varphi \in \overset{\circ}{\wp} = \left\{ \varphi \,\middle|\, 0 \neq |\varphi_{\mu}| < \infty, \mu \in R \right\}$ *and* $f \in \overset{\circ}{\wp} = \left\{ f \,\middle|\, 0 \neq |f_{\mu}| < \infty, \mu \in R \right\}$, *then nonhomogeneous Fukuhara equations*

$$L[\varphi, \zeta; a, b, p, q, r] = \varphi_2 + \varphi_1 \cdot \left(a + \frac{b}{\zeta} \right) + \varphi \cdot \left(p + \frac{q}{\zeta} + \frac{r}{\zeta^2} \right) = f \qquad (\zeta \neq 0) \quad (1)$$

have particular solutions of the forms

$$\varphi = \zeta^{A} e^{P\zeta} \left(\left(\left(f \cdot \zeta^{1-A} \cdot e^{-P\zeta} \right)_{\gamma} \cdot e^{(2P+a)\zeta} \cdot \zeta^{2A+b+\gamma-1} \right)_{-1} \cdot e^{-(2P+a)\zeta} \cdot \zeta^{-(2A+b+\gamma)} \right)_{-1-\gamma}$$

$$\equiv \varphi^{I}, \qquad (Denote) \quad (2)$$

$$\varphi = \zeta^{A} e^{Q\zeta} \left(\left(\left(f \cdot \zeta^{1-A} \cdot e^{-Q\zeta} \right)_{\delta} \cdot e^{(2Q+a)\zeta} \cdot \zeta^{2A+b+\delta-1} \right)_{-1} \cdot e^{-(2Q+a)\zeta} \cdot \zeta^{-(2A+b+\delta)} \right)_{-1-\delta}$$

$$\equiv \varphi^{II}, \quad (3)$$

$$\varphi = [(2) \text{ which has } B \text{ instead of } A] = \varphi^{III}, \quad (4)$$

$$\varphi = [(3) \text{ which has } B \text{ instead of } A] = \varphi^{IV}, \quad (5)$$

for $c \neq 0$ *and* $d \neq 0$, *and*

$$\varphi = \zeta^{(1-b)/2} e^{-a\zeta/2} \left(\left(\left(f \cdot \zeta^{b+(1/2)} \cdot e^{a\zeta/2} \right)_{\nu} \cdot \zeta^{\nu} \right)_{-1} \cdot \zeta^{-(1+\nu)} \right)_{-(1+\nu)} \equiv \varphi^{V}, \quad (6)$$

for $c = d = 0$, $q = ab/2$, *and for arbitrary* ν, *where*

$$A = (1 - b + \sqrt{c})/2, \; B = (1 - b - \sqrt{c})/2, \; c = (b-1)^2 - 4r, \quad (7)$$

$$P = (-a + \sqrt{d})/2, \quad Q = (-a - \sqrt{d})/2, \quad d = a^2 - 4p, \quad (8)$$

$$\gamma = -(2AP + bP + aA + q)/(2P + a), \qquad (d \neq 0) \quad (9)$$

$$\delta = -(2AQ + bQ + aA + q)/(2Q + a), \qquad (d \neq 0) \quad (10)$$

$\varphi_k = d^k \varphi / d\zeta^k$ $(k = 0, 1, 2)$, $\varphi_0 = \varphi = \varphi(\zeta)$, $f = f(\zeta)$ *is a given function*, $\zeta \in \mathbf{C}$, *and* a, b, p, q *and* r *are given constants.*

§ 2. Operator N^{ν} method to homogeneous Fukuhara equations

Theorem 2. *Let $\varphi \in \overset{\circ}{\wp}$, then the homogeneous Fukuhara equations*

$$L[\varphi, \zeta ; a, b, p, q, r] = 0 \qquad (\zeta \neq 0) \tag{1}$$

have solutions of the forms

$$\varphi = K\zeta^{A} e^{P\zeta}\left(e^{-(2P+a)\zeta} \cdot \zeta^{-(2A+b+\gamma)}\right)_{-1-\gamma} \equiv \varphi^{(I)}, \qquad (Denote) \tag{2}$$

$$\varphi = K\zeta^{A} e^{Q\zeta}\left(e^{-(2Q+a)\zeta} \cdot \zeta^{-(2A+b+\delta)}\right)_{-1-\delta} \equiv \varphi^{(II)}, \tag{3}$$

$$\varphi = [(2) \text{ which has } B \text{ instead of } A] \equiv \varphi^{(III)}, \tag{4}$$

$$\varphi = [(3) \text{ which has } B \text{ instead of } A] \equiv \varphi^{(IV)}, \tag{5}$$

for $c \neq 0$ and $d \neq 0$, and

$$\varphi = K\zeta^{(1-b)/2} e^{-a\zeta/2}\left(\zeta^{-(1+\nu)}\right)_{-(1+\nu)} \equiv \varphi^{(V)} \tag{6}$$

$$= \begin{cases} M\zeta^{(1-b)/2} e^{-a\zeta/2} \log\zeta & \left(M = -K\frac{e^{i\pi(\nu+1)}}{\Gamma(\nu+1)},\ |\Gamma(\nu+1)| < \infty\right) \quad (7) \\ K\zeta^{(1-b)/2} e^{-a\zeta/2}(\zeta^{m})_{m} & (1+\nu = -m,\ m \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}) \quad (8) \end{cases}$$

for $c = d = 0$ and $q = ab/2$, where $A, B, P, Q, \gamma, \delta, c$ and d are the ones shown in Theorem 1 of §1 respectively, and K is an arbitrary constant.

References

[1] K. Nishimoto; Fractional calculus method to a generelized linear third order ordinary differential equations of Fuchs type, J. Frac. Calc., Vol.1 May (1992), 23-34.

[2] K. Nishimoto and S.-T. Tu; Fractional calculus method to extended linear ordinary differential equations of Fuchs type, J. Frac. Calc. Vol.2, Nov., (1992), 35-46.

[3] K. Nishimoto; Solutions of Gauss equation in fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993), 29-37.

[4] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group) J. Frac. Calc. Vol.4, Nov. (1993), 1-11.

[5] K. Nishimoto; Solutions of homogeneous Gauss equations, which have a logarithmic function, in fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol.5, May (1994), 11-25.

[6] K. Nishimoto; Applications of N-transformation to some linear ordinary differential equations, J. Frac. Calc. Vol.8, Nov. (1995), 11-23.

[7] K. Nishimoto; Applications of N-transformation and N-fractional calculus to nonhomogeneous Bessel equations (I), J. Frac. Calc. Vol.8, Nov. (1995), 25-30.

[8] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol.1 (1984), Vol.2 (1987), Vol.3 (1989), Vol.4 (1991) Descartes Press, Koriyama (Japan).

[9] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama (Japan)

[10] K.B. Oldham and J. Spanier; The Fractional Calculus (1974), Academic Press.

[11] A.C. McBride; Fractional calculus and integral transforms of generalized functions, Research Notes, Vol.31 (1979), Pitman.

[12] B. Ross; Methods of Summation (1987), Descartes Press, Koriyama (Japan).

[13] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev ; Fractional Integrals and Derivatives, and Some of Their Applications (1987), Nauka, USSR.

[14] K.S. Miller and B. Ross; An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations (1993), John Wiley & Sons. Inc.

[15] V. Kiryakova; Generalized Fractional Calculus and Applications, Research Notes, Vol.301, Pitman-Longman (co-publ. John Wiley & Sons, New York) (1993)

2 SOME RESULTS FOR STRONGLY STARLIKE FUNCTIONS

MAMORU NUNOKAWA (UNIVERSITY OF GUNMA)
SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)
HITOSHI SAITOH (GUNMA COLLEGE OF TECHNOLOGY)
AKIRA IKEDA (UNIVERSITY OF GUNMA)
NAOYA KOIKE (UNIVERSITY OF GUNMA)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathcal{U}$. A function $f(z)$ belonging to $\mathcal{A}$ is said to be strongly starlike of order β and type α in $\mathcal{U}$ if it satisfies

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha\right)\right| < \frac{\pi}{2}\beta \quad (z \in \mathcal{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$ and β $(0 < \beta \leqq 1)$. We denote by $S_\alpha^*(\beta)$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which are strongly starlike of order β and type α in $\mathcal{U}$.

THEOREM 1. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $zf'(z)/f(z) \neq \alpha$ $(z \in \mathcal{U})$ and

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) + \arg\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \pi\beta$$

for some α $(0 < \alpha < 1)$, β $(0 < \beta \leqq 1)$, and for all $z \in \mathcal{U}$, then $f(z) \in S^*_\alpha(\beta)$, where $\alpha\tan(\pi\beta/2) = \beta$.

THEOREM 2. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies $zf'(z)/f(z) \neq 1/2$ $(z \in \mathcal{U})$ and

$$\left|\frac{1 + zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} - 1\right| < \frac{\beta}{2} \quad (z \in \mathcal{U})$$

for some β $(0 < \beta \leqq 1)$, then $f(z) \in S^*_{1/2}(\beta)$.

3 STARLIKENESS AND CONVEXITY OF CERTAIN LINEAR OPERATORS

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)
YONG CHAN KIM (YEUNGNAM UNIVERSITY)
JAE HO CHOI (YEUNGNAM UNIVERSITY)

Let $\mathcal{A}_n$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (n \in \mathbb{N}=\{1,2,\ldots\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$.

Let us define

(i) $\mathcal{S}_n^* = \{f(z) \in \mathcal{A}_n\colon \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \ (z\in\mathbb{U})\}$,

(ii) $\mathcal{K}_n = \{f(z) \in \mathcal{A}_n\colon zf'(z) \in \mathcal{S}_n^* \ (z\in\mathbb{U})\}$,

(iii) $\mathcal{R}_n = \{f(z) \in \mathcal{A}_n\colon \operatorname{Re}(f'(z)) > 0 \ (z\in\mathbb{U})\}$,

(iv) $\mathcal{C}_n = \{f(z) \in \mathcal{A}_n\colon \ g(z) \in \mathcal{K}_n$ s.t. $\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0\}$.

For a function $f(z)$ belonging to $\mathcal{A}_n$, we introduce the linear operator L^λ which is given by

$$L^{\lambda}(f(z)) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k^{\lambda}} z^k$$

for some λ ($\lambda \geqq 0$).

THEOREM 1. If $f(z) \varepsilon \mathcal{R}_n$, then $L^{\lambda}(f(z)) \varepsilon \mathcal{S}_n^*$ with

$$\lambda \geqq \frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} + 1,$$

and $L^{\lambda}(f(z)) \varepsilon \mathcal{K}_n$ with

$$\lambda \geqq \frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} + 2.$$

THEOREM 2. We have

(i) $f(z) \varepsilon \mathcal{S}_n^* \Longrightarrow L^{\lambda}(f(z)) \varepsilon \mathcal{S}_n^*$ ($\lambda \geqq 4$),

(ii) $f(z) \varepsilon \mathcal{K}_n \Longrightarrow L^{\lambda}(f(z)) \varepsilon \mathcal{K}_n$ ($\lambda \geqq 4$),

(iii) $f(z) \varepsilon \mathcal{S}_n^* \Longrightarrow L^{\lambda}(f(z)) \varepsilon \mathcal{K}_n$ ($\lambda \geqq 5$),

(iv) $f(z) \varepsilon \mathcal{K}_n \Longrightarrow L^{\lambda}(f(z)) \varepsilon \mathcal{S}_n^*$ ($\lambda \geqq 3$).

THEOREM 3. If $f(z) \varepsilon \mathcal{C}_n$, then $L^{\lambda}(f(z)) \varepsilon \mathcal{C}_n$ with $\lambda \geqq 4$.

4　　半空間上の Neumann 問題

朱　文山　　　千葉大学自然科学研究科

n 次元ユークリッド空間を$\boldsymbol{R}^n$とする. $\boldsymbol{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ 上の点 M は

$$(X, y) = (x_1, \cdots, x_n, y) \quad (X \in \boldsymbol{R}^n)$$

と表わされる. $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の部分集合 E の境界を∂E と書く. $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の原点を中心とする半径 r の球面を $S(r)$ と表わす. $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の半空間

$$\{M \in \boldsymbol{R}^{n+1} \ : \ y > 0\}$$

を D と書く. $\sigma(r) = D \cap S(r)$ とし, $\sigma(r)$ や ∂D の（点 N での）面積要素を $d\sigma$ $(d\sigma_N)$ と書く. $S(1)$ の面積を s_{n+1} で表わす. D 上で定義された任意の関数 g に対して, $\sigma(r)$ 上の g の平均値を

$$\mathfrak{M}(g; r) = 2(s_{n+1} r^n)^{-1} \int_{\sigma(r)} g d\sigma$$

と定義する.

関数 h が, ∂D 上で与えられた連続関数 f に関しての D での Neumann 問題の解であるとは, 次の 2 条件：

(i) 関数 h は領域 D で調和である.

(ii) ∂D 上の任意の点 N に対して,

$$\lim_{M \in D, M \to N} \frac{\partial}{\partial y} h(M) = f(N)$$

を満たすことをいう.

Armitage [1, Theorem 1 参照] は

$$\int_{\partial D} (1 + |N|)^{1-n} |f(N)| d\sigma_N < \infty \tag{1}$$

を満たす ∂D 上の連続関数 f に関しての D での Neumann 問題の解の存在と, ある意味での解の一意性を証明した.

ここでは, (1) より一般な条件をみたす f に関しての Neumann 問題の解が, 一般化された Neumann 核による, Neumann 積分の形で表わされること (定理 1). 更に, 定理 1 を用いることによって, ∂D 上で任意の連続関数に関する Neumann 問題の解も Neumann 積分の形で表わされることができること (定理 2). 定理 1 の関連において, Neumann 問題の解のある種一意性について (定理 3) 報告する.

l を非負整数とし, ∂D の上の連続関数 f で

$$\int_{\partial D} \frac{|f(N)|}{1+|N|^{n+l-1}} d\sigma_N < \infty \tag{2}$$

なるものの全体を $F_{l,n+1}$ と書く.

Armitage の結果は, 次の定理 1 において $l = 0$ の場合である.

<u>定理 1</u>. l を非負整数とする. $F_{l,n+1}$ に属する f に対して,

$$H_{l,n+1}f(M) = \int_{\partial D} K_{l,n+1}(M,N)f(N)d\sigma_N$$

は, f に関する D での Neumann 問題の解であって, かつ

$$\mathfrak{M}(|H_{l,n+1}f|; r) = o(r^{l+1}) \quad (r \to \infty) \tag{3}$$

を満たす. 但し, $K_{l,n+1}(M,N)$ $(M \in D, N \in \partial D)$ は一般化された Neumann 核.

<u>定理 2</u>. f を ∂D の上で定義された任意な連続関数とする.

$$H_{n+1}f(M) = \int_{\partial D} K_{f,n+1}(M,N)f(N)d\sigma_N$$

は f に関しての D での Neumann 問題の解である. 但し, $K_{f,n+1}(M,N)$ $(M \in D, N \in \partial D)$ は f に関係して決まるある関数.

次の定理 3 は, 条件 (2) をみたす連続関数に関しての D での Neumann 問題の解のある種の一意性に関するもので, $l = 0$ の場合が Armitage の結果にあたる.

<u>定理 3</u>. l を非負整数とする. h は $f \in F_{l,n+1}$ なる f に関する D での Neumann 問題の解であって, かつ

$$\mathfrak{M}(h^+; r) = o(r^{l+1}) \quad (r \to \infty)$$

ならば, h は次の形に表される;

$$h(X,y) = H_{l,n+1}f(M) + \Pi(X) + \sum_{j=1}^{[\frac{l+1}{2}]} \frac{(-1)^j}{(2j)!} y^{2j} \Delta^j \Pi(X) \quad ((X,y) = M \in D).$$

ここで, Π は $l+1$ より小さい次数の $\partial D = R^n$ 上の多項式である.

参考文献

[1] D.H. Armitage *The Neumann problem for a function harmonic in* $R^n \times (0,\infty)$. Arch. Rational Mech. Anal. **63**, 89–105 (1976).

5　　ストリップ上のディリクレ問題の特殊解

吉田　英信　千葉大・理
宮本　育子　千葉大・理

$\mathbf{R}$ は実数の集合。n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の部分集合 Eの境界と閉包を ∂Eと$\overline{E}$で表す。$\mathbf{R}^2$でのストリップ

$$S = (0,1) \times \mathbf{R}$$

を一般化する領域として、$\mathbf{R}^{n+1}$でのストリップ

$$\Omega_n(0,1) = (0,1) \times \mathbf{R}^n \quad (n \geq 1)$$

が考えられる。

$\Omega_n(0,1)$ 上のポアソン積分は最初、Brawn[2] によって考えられた。I_νを位数νの第一種の Bessel 関数とし、

$$\Phi(x,r) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}n} r^{1-\frac{1}{2}n} I_{\frac{1}{2}n-1}(rt) \frac{\sinh\{(1-x)t\}}{\sinh t} dt \quad (r > 0)$$

とおくとき、

$$\Pi(P,Q) = \Phi(x,r)\chi_{\{0\}\times\mathbf{R}^n}(Q) + \Phi(1-x,r)\chi_{\{1\}\times\mathbf{R}^n}(Q)$$

$$(P = (x,Y) \in \Omega_n(0,1),\ Q = (0,Y^*) \text{ 又は } (1,Y^*) \in \partial\Omega_n(0,1),\ r = |Y - Y^*|)$$

と定める。ここで、χ_Eは Eの特性関数。

Brawn は次の定理を証明した。

定理 A (Brawn [2, 定理 1 と補題 1]). $g_i(Y^*)$ $(i = 1,2)$ は $\mathbf{R}^n$ 上連続で

$$\int_{\mathbf{R}^n} |g_i(Y^*)| e^{-\pi|Y^*|} dY^* < \infty \quad (i = 1,2)$$

を満たすとき、$\partial\Omega_n(0,1)$ 上の gを

$$g(Q) = \begin{cases} g_1(Y^*) & (Q = (0,Y^*),\ Y^* \in \mathbf{R}^n) \\ g_2(Y^*) & (Q = (1,Y^*),\ Y^* \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

とすれば、ポアソン積分

$$H(\Omega_n; g)(P) = \int_{\partial\Omega_n(0,1)} g(Q)\Pi(P,Q)dQ \quad (P = (x,Y) \in \Omega_n(0,1))$$

$\Omega_n(0,1)$ で調和、$\overline{\Omega_n(0,1)}$上で連続的に拡張でき、かつ

$$H(\Omega_n; g)(0,Y^*) = g_1(Y^*),\quad H(\Omega_n; g)(1,Y^*) = g_2(Y^*) \quad (Y^* \in \mathbf{R}^n)$$

を満たす。

相川 [1] は、$\Omega_n(0,1)$ の自然な一般化として、$\mathbf{R}^m$ $(m \geq 1)$ の有界領域 Dにたいして、一般化したストリップ

$$\Omega_n(D) = D \times \mathbf{R}^n$$

を導入した。

この報告では、充分になめらかな境界をもつ $\mathbf{R}^m$ $(m \geq 1)$ の有界領域 Dと$\partial\Omega_n(D) = \partial D \times \mathbf{R}^n$上の連続関数 gに対して、gに関する $\Omega_n(D)$ $(n \geq 2)$ (以下簡単にΩ_nと表す) 上のディリクレ問題の（特殊）解 $H_g(P)$ $(P \in \Omega_n)$ 即ち、

$$\lim_{P\in\Omega_n, P\to Q} H_g(P) = g(Q) \quad (\forall Q \in \partial\Omega_n)$$

なる、Ω_n上の調和関数 $H_g(P)$ の具体的構成を与えます。

上の定理 A は、次の定理 1 において、$D = (0,1)$, $l = 0$ の場合である。

定理 1 . lを非負整数とする。g は $\partial\Omega_n$上の連続関数で、

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\partial D} |g(X^*,Y^*)|d\sigma_{X^*}\right)|Y^*|^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}} \exp(-\sqrt{\lambda(k_{l+1})}|Y^*|)dY^* < \infty$$

$(Q = (X^*,Y^*) \in \partial D \times \mathbf{R}^n$, $d\sigma_{X^*}$ は $X^* \in \partial D$での面積要素)

を満たすとする。このとき、

$$H(\Omega_n, l; g)(P) = \int_{\partial\Omega_n} g(Q)K(\Omega_n, l)(P,Q)d\sigma_Q \quad (d\sigma_Q \text{は } Q \in \partial\Omega_n \text{での面積要素})$$

は gに関するΩ_n上のディリクレ問題の解である。但し、$K(\Omega_n, l)(P,Q)$ は $P \in \Omega_n$, $Q \in \partial\Omega_n$ のある関数。

この定理 1 を利用して、次の定理 2 が証明できる。

定理 2 . gを$\partial\Omega_n$ 上の任意の連続関数とする。

$$h(\Omega_n; g)(P) = \int_{\partial\Omega_n} g(Q)K_g(P,Q)d\sigma_Q$$

は gに関するΩ_n上のディリクレ問題の解となる。但し、$K_g(P,Q)$ は gによって決まる $P \in \Omega_n$, $Q \in \partial\Omega_n$のある関数。

参考文献

[1] H. Aikawa, *On the Martin boundary of Lipschitz strips*, J. Math. Soc. Japan **38**(1986), 527–541.

[2] F.T. Brawn, *The Poisson integral and harmonic majorization in* $\mathbf{R}^n \times]0,1[$, J. London Math. Soc.(2)**3**(1971), 747–760.

6　A mean value property of polytemperatures on a strip domain

下村勝孝　茨城大・理
鈴木紀明　名大・多元数理
西尾昌治　大阪市大・理

$n+1$ 次元 Euclid 空間の帯状領域 $D=\{(X,t);X\in\mathbf{R}^n,0<t<T\}$ 上の多重熱方程式

$$(-H)^m u := (\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_X)^m u = 0$$

を考え，その解 "polytemperature" に対する平均値の定理および "poly-supertemperature" の特徴付けについて考察する．

定義． D 上の連続関数 u および下半連続関数 v に対し，

$$u : m次の\ \text{polytemperature} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (-H)^m u = 0$$
$$v : m次の\ \text{polysupertemperature} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad (-H)^m v \geq 0$$

と定義する．

命題 1． 帯状領域 D 上の m 次の polytemperature u は次のように表わされる：

$$u(X,t)=h_0(X,t)+th_1(X,t)+\cdots+t^{m-1}h_{m-1}(X,t).$$

ここで，$h_0,\ldots,h_{m-1}$ は D 上の熱方程式の解である．

これより，帯状領域 D 上の polytemperature に対する平均値の定理が得られる．

命題 2． m 次の polytemperature u が条件

$$|H^k u(X,t)| \leq Me^{a|X|^2} \quad k=0,1,\cdots,m-1 \tag{1}$$

を満たせば，任意の $c>0$ に対し

$$u = A[u,c] \ \text{ on } \ \mathbf{R}^n \times (mc, T)$$

が成り立つ．ここで，

$$A[u,c] = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \, {}_mC_k \, W[u,ck],$$

$$W[v,ck](X_0,t_0) = \int_{\mathbf{R}^n} W(X,ck)u(X_0-X, t_0-ck)dX$$

である．

逆に

定理 1． 次の (2) を満たす連続関数 u が任意の $c>0$ に対し $u = A[u,c]$ on $\mathbf{R}^n \times (mc,T)$ を満たせば， u は polytemperature である．

$$|\cancel{H^k} u(X,t)| \leq Me^{a|X|^2} \tag{2}$$

また，この平均を用いて， polysupertemperature が特徴付けられる．

定理 2． (1) を満たす $v \in C^{2m}(D)$ に対し，

$$\begin{array}{l} v : m\text{次の polysupertemperature} \\ \Longleftrightarrow \\ \forall c > 0; u \geq A[u,c] \text{ on } \mathbf{R}^n \times (mc,T). \end{array}$$

命題 2 において，条件 (1) が， (2) で置き換えられるかどうかは不明である．

7 熱方程式の解を保つ変換

茨城大学理学部　下村勝孝

$\mathbb{R}^{k+1}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ $(k\geqq 1)$ の座標を $(t,x)=(x_0,x_1,\ldots,x_k)$ で表す．$\mathbb{R}^{k+1}$ 上で熱方程式 $Hu:=\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0,\quad (\Delta=\sum_{j=1}^k\frac{\partial^2}{\partial x_j^2})$, を満たす函数を caloric function と呼ぶ．ここでは熱方程式の解を保つ変換について考える．以下 $m,n\geqq 1$, D を $\mathbb{R}^{m+1}$ 内の領域，E を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の領域とする．

定義. $f(t,x)=(f_0(t,x),f_1(t,x),\cdots,f_n(t,x))$ を D から E への C^∞-写像，$\varphi>0$ を D 上の C^∞-函数とする．E 上の任意の caloric function u に対して，$\varphi(t,x)(u\circ f)(t,x)$ が再び D 上の caloric function になるとき，(f,φ) を D から E への caloric morphism と呼ぶ．

定理 1. D から E への C^∞-写像 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_n)$ と，D 上の C^∞-函数 $\varphi>0$ について，以下の(1)−(4)は同値.

(1) (f,φ) は caloric morphism.

(2) $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の4次以下の任意の caloric な多項式 P に対して，$\varphi(t,x)(P\circ f)(t,x)$ は再び D 上の caloric function.

(3) 次の (i) ∼ (v) が成り立つ.

(i) φ は caloric function.

(ii) $\varphi Hf_j=2\nabla\varphi\cdot\nabla f_j,\quad 1\leqq j\leqq n,\quad \cdot$ は $\mathbb{R}^m$ の内積, $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_m})$,

(iii) $\nabla f_i\cdot\nabla f_j=0,\quad |\nabla f_i|=|\nabla f_j|,\quad 1\leqq i,j\leqq n,\ i\neq j,\quad$ ($f(t,\cdot)$ は等角写像),

(iv) $\nabla f_0=0,\quad$ (f_0 は t のみの関数),

(v) $\dfrac{df_0}{dt}=|\nabla f_j|^2,\quad$ ($\dfrac{df_0}{dt}>0$ かつ $|\nabla f_j|$ は x に依らず一定).

(4) $D_t=\{t;(t,x)\in D\}$ 上の関数 $\lambda(t)>0$ が存在し，E 上の任意の C^2級関数 u に対して

$$H\bigl(\varphi(t,x)(u\circ f)(t,x)\bigr)=\lambda^2(t)\varphi(t,x)(Hu\circ f)(t,x).$$

$m<n$ の時は，定数でない caloric morphism は存在しない.

例 1. Appell変換

$$f(t,x)=\Bigl(-\frac{1}{t},\frac{x}{t}\Bigr),\quad \varphi(t,x)=\frac{1}{(4\pi|t|)^{n/2}}e^{-|x|^2/4t},$$

は $D=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1};t\neq 0\}$ から $E=\{(\tau,y)\in\mathbb{R}^{n+1};\tau\neq 0\}$ への caloric morphism.

例 2. $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への射影

$$f(t,x)=(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
$$\varphi(t,x)=\varphi(t,x_{n+1},\ldots,x_m):\text{任意の positive caloric function},$$

は $D=\mathbb{R}^{m+1}$ から $E=\mathbb{R}^{n+1}$ $(m>n)$ への caloric morphism.

例 3. $m \geqq 4$, $n = m-2$, $x = (x_1, \dots, x_m)$ に対して $x' = (x_1, x_2, x_3)$ とおく.

$$f(t,x) = \Big(-\frac{1}{t}, \frac{|x'|}{t}, \frac{x_4}{t}, \dots, \frac{x_m}{t} \Big), \qquad \varphi(t,x) = \frac{1}{|x'|(4\pi|t|)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}$$

は $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{m+1}; t \neq 0, |x'| > 0\}$ から $E = \{(\tau, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; \tau \neq 0, y_1 > 0\}$ への caloric morphism.

$m = n$ の場合 caloric morphism は,

$$f(t,x) = \Big(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \frac{1}{\gamma t + \delta} Ax + \frac{bt + c}{\gamma t + \delta} \Big), \tag{1}$$

$(\alpha\delta - \beta\gamma = 1, b, c \in \mathbb{R}^n, A$ は直交行列の定数倍)の形であることが知られている (H. Leutwiler). この拡張として,

$$f(t,x) = (f_0(t), A(t)x + b(t)), \tag{2}$$

$(b(t) \in \mathbb{R}^n, A(t) : (m,n)$行列, 共に t に関して $C^\infty)$ の形の caloric morphism を調べる.

実は, 本質的には全て $m = kn$ (k:自然数) の場合の caloric morphism と同じである. 正確には

定理 2. m が n の整数倍でないとする. (2)の形の各 caloric morphism (f, φ) に対して, 整数 $1 \leqq k < m/n$ が存在して, $\mathbb{R}^m$ の座標を取り直せば f は $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^{kn}$ へのprojection と $\mathbb{R}^{kn}$ から $\mathbb{R}^n$ への caloric morphism $(\tilde{f}, \tilde{\varphi})$ の $\tilde{f}$ との合成である. また, φ は

$$\varphi(t,x) = \tilde{\varphi}(t, x_1, \dots, x_n) h(t, x_{n+1}, \dots, x_m),$$

$(h(t, x_{kn+1}, \dots, x_m)$ は任意のpositive caloric function) の形である.

特に $n < m < 2n$ の場合は, $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ へのprojection と, (1)の形の caloric morphism $(\tilde{f}, \tilde{\varphi})$ との合成である. φ は $\varphi(t,x) = \tilde{\varphi}(t, x_1, \dots, x_{kn}) h(t, x_{kn+1}, \dots, x_m)$, $(h(t, x_{n+1}, \dots, x_m)$ は任意のpositive caloric function) の形になる.

また m が n 増加する毎に新たな caloric morphism が現れる.

例 4. $x = (x_1, \cdots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して $\xi = (x_1, \dots, x_n)$, $\eta = (x_{n+1}, \dots, x_{2n})$ とおく.

$$f(t,x) = \Big(\frac{t}{1-t^2}, \frac{\xi + t\eta}{t^2 - 1} \Big), \qquad \varphi(t,x) = \frac{1}{(t^2-1)^{n/2}} \exp\Big[-\frac{t|\xi|^2 + 2\xi \cdot \eta + t|\eta|^2}{4(t^2-1)} \Big]$$

は $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{2n+1}; t \neq \pm 1\}$ から $E = \mathbb{R}^{n+1}$ への caloric morphism.

8　有限Riemann面の接続と基本Abel微分のノルムの変化

G.Schmieder　　U. Oldenburg, BRD
柴　雅和　　広島大学工学部

有限な Riemann 面のふちの一部分を等角的に縫い合わせれば新しく別の有限 Riemann 面ができる．このような操作を，例えば境界弧の径数を利用して行えば，Riemann 面の ∞^1族が得られる．このとき，Riemann 行列等の，Riemann 面に対して標準的に定まる量もまた連続に動くことは直感的にも明らかなことではあるが，きっちり証明しようと思えば存外に面倒である．ここでは Riemann 面の接続の立場から，この問題を考察する．その応用として，開輪環面の等角的埋め込みに伴って得られる，Schiffer の span の拡張概念の連続性が示される．

Rを有限な Riemann 面 (compact bordered Riemann surface)，∂Rをそのふち (border) とする．私たちの目的のためには，ただ1つの境界成分の場合について議論すれば十分である．∂Rを $t \in [-1, 1]$ によって径数表示しておいて，任意の $s \in [0, 1]$ に対して，弧 $[-s, 0]$ と弧 $[0, s]$ とを対応する点毎に同一視する．このような∂Rの (一部分の) 等角的縫い合わせによって新しく別の有限 Riemann 面 R_sが得られる．

Rの上に予め指定された標準ホモロジー基底 (mod ∂R) $\chi(R) := \{a_j, b_j\}_{j=1}^g$ は自然にすべての R_s ($s \in [0, 1]$) に受け継がれる．各 R_s の，∂R_sを法とした標準ホモロジー基底$\chi(R_s)$ に関する，正則な半完全標準微分 ($\sqrt{-1}$倍が canonical semiexact differentials, あるいは holomorphic differentials with distinguished imaginary parts, あるいは，L_0-主関数の微分) の族の中での正規な基底$\phi_s^1, \phi_s^2, \cdots, \phi_s^g$ をとる：

$$(1)\quad \int_{a_k} \phi_s^j = \delta_{jk} \quad (k = 1, 2, \cdots, g);$$

(2) ϕ_s^jは $R_s \setminus \bigcup_{k=1}^{g}(a_k \cup b_k)$ の上で完全;

(3)

$$\Phi_t^j(p) := \int^p \phi_t^j$$

の虚部は境界弧∂R_tの上で定数.

次の 2 つの補題は既に以前に述べた:

補題. 各 $s\,(0 \leq s \leq 1)$ と各 $j\,(1 \leq j \leq g)$ に対して，ϕ_s^jがその上へと正則に拡張されてゆくようなコンパクトな Riemann 面 R_s^jが存在する.

補題. 正定数 Bを上手に選んで，すべての $k \in \{1, 2, \cdots, g\}$，すべての $s \in [0, 1]$，すべての $p \in \partial R_s$に対して

$$|\Phi_s^k(p)| \leq B$$

が成り立っているようにすることができる.

定理. 上の記号のもとで，$t \to s$のとき

$$||\phi_s^k - \phi_t^k|| \to 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, g.$$

この定理から容易に,

定理. 各 $j, k \in \{1, 2, \cdots, g\}$ に対して

$$\tau^{jk}(t) := \int_{b_k} \phi_t^j$$

で定められる関数$\tau^{jk} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ は連続である.

これは有限 Riemann 面の span (その詳細は略すが平面領域に対する Schiffer span を Riemann 面に拡張したもの; 既に知られているものは Riemann 面の調和的な構造の差異を明らかにするものであるが, ここで問題にしているものはむしろ解析的な構造を測る量.) が連続であることを示している. 特に，有限な開輪環面のモジュラス円板の内部が埋め尽くされることが知られる (この事実は既に以前に報告したもの).

9　Cauchyの積分定理と積分公式 — Jordan曲線定理に依拠しない定式化

柴　雅和　　　広島大学工学部

Cauchyの積分公式を少しでも丁寧に述べて証明しようとする際にはJordan曲線定理を用いるのが伝統的である．しかしJordan曲線定理が証明されることはまずない．ということは，非常に大きな定理を承認してしまうわけで，こういう方法には数学的にも数学教育的にも大いに疑問がある．Jordan曲線定理を使わないでもCauchy積分定理はかなり一般化される（例えば後述第2の補題）が，対応するCauchy積分公式となると全く別である；その場合には，領域の単連結性・曲線の回転数・あるいは曲線と領域との関係（領域に関してホモローグ0であるかどうか）等を用いて，全く抽象的に，あるいはJordan曲線定理より一般な性質に訴えて，述べられる．このような一般的な方法は，たとえ無益ではないとしても，形骸化していて関数論の内部でさえ非実用的である．一方，複素線積分の一般論として"長さ有限な曲線"に沿うものがあるが，この方法は — 一見ただ一般化が主目的でしかもかなり周到な議論が必要な故に — 講義時間の浪費に過ぎぬという意見もある（R. Remmert: Funktionentheorie 1.(3. Aufl. Springer, 1992, 360pp), 134ページ参照）．これらの不満や矛盾を総合的に解消する方法として，以下のような定式化を提唱する．

基本的な考えは，従来のように曲線に照準を当てるのではなく正則関数の定義域に注目することである．結局は領域の境界となる曲線と言及されるべき点との関係においてこそ，Jordan曲線定理が侵入する隙があったからである．この方針転換によって，Cauchyの積分定理と積分公式は，ある種のしかし十分一般な領域に対して述べられ，Jordan曲線定理や単連結性等の予備知識を仮定することなく，初等的に証明される．さらに興味深いことには，領域に着目したことによって，積

分路として選ばれるその境界の滑らかさを仮定するわけにはゆかない．すなわち，一般の“長さ有限な曲線”に沿う積分を（否応なしに）用いることになり，“長さ有限な曲線に沿う線積分”が市民権を得て再登場する．

定義． 平面領域Gが，条件

$$\bar{G}_j \cap \bar{G}_k = \emptyset \quad \forall j,k \ (1 \le j,k \le N;\ j \neq k)$$

を満たす有限個の凸領域$G_0, G_1, \cdots, G_N$，$(N \ge 0)$によって

$$G = G_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{N} \bar{G}_n$$

と書けるとき，Gを“[Cauchyの積分定理成立にとって]許容された領域”と呼ぶ．（各G_jは空集合ではなくG_0に含まれていると仮定してよい．また，$N=0$の場合は凸領域を表すと考える．）

このようにして定義された領域Gの境界∂Gは次の意味で解されるものとする：各G_jの正に向きづけられた境界は容易に定義されるからそれを∂G_jと書くとき，

$$\partial G = \partial G_0 - \sum_{n=1}^{N} \partial G_n.$$

ただし，∂G_0と∂G_nが内点をもつ閉弧を共有する場合には対応する開弧を∂G_0と∂G_nの双方から共通に取り去る．

補題． 有界な平面凸領域の境界は長さ有限なJordan閉曲線である．

補題． 有界凸領域Gの閉包$\bar{G}$で正則な関数fと$\bar{G}$に含まれる長さ有限な任意の閉曲線γに対して

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

が成り立つ．

定理． Gが許容された領域とすれば，その閉包$\bar{G}$で正則な任意の関数fに対して

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0$$

が成り立つ．

10 On the Connectivity of Julia Sets of Transcendental Entire Functions

木坂正史　大阪府立大学総合科学部

Let f be a transcendental entire function. Recall that *the Julia set* J_f of f is the set of points at which the family of the iterates $\{f^k\}_{k=0}^{\infty}$ fails to be a normal family and *the Fatou set* F_f is the complement of J_f. A connected component U of F_f is called *a Fatou component.* U is called *a wandering domain* if $f^m(U) \cap f^n(U) = \emptyset$ for every $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \neq n)$. If there exists an $n_0 \in \mathbb{N}$ with $f^{n_0}(U) \subseteq U$, U is called *a periodic component* and it is well known that there are four possibilities: *an attracting basin, a parabolic basin, a Siegel disk* and *a Baker domain.* It is known that eventually periodic components of f are simply connected while a wandering domain can be multiply-connected.

In this talk we mainly consider the following problem.

Problem : When is the Julia set of a transcendental entire function f connected or disconnected as a subset of $\mathbb{C}$?

Beforehand we investigate the connectivity of $J_f \cup \{\infty\}$ in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Theorem 1 *The set $J_f \cup \{\infty\}$ in $\widehat{\mathbb{C}}$ is connected if and only if F_f has no multiply-connected wandering domains.*

Corollary 1 *Under one of the following conditions, $J_f \cup \{\infty\}$ is connected.*
(1) The set $\mathrm{sing}(f^{-1})$ is bounded. (2) F_f has an unbounded component.
(3) There exists a curve $\Gamma(t)$ $(0 \leq t < 1)$ with $\lim_{t\to 1}\Gamma(t) = \infty$ such that $f|\Gamma$ is bounded. Especially f has a finite asymptotic value.

Then how about J_f in $\mathbb{C}$ itself? In the case when F_f admits no unbounded components, we obtain the following:

Theorem 2 *If all the components of F_f are bounded and simply connected, then J_f is connected.*

Corollary 2 *If all the components of F_f are bounded, then J_f is connected in $\mathbb{C}$ if and only if $J_f \cup \{\infty\}$ is connected in $\widehat{\mathbb{C}}$.*

For unbounded components, we obtain the following.

Main Theorem *Let U be an unbounded periodic Fatou component of a transcendental entire function f, $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow U$ be a Riemann map of U from a unit disk $\mathbb{D}$, and $P_{f^{n_0}} := \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}(f^{n_0})^n(\mathrm{sing}((f^{n_0})^{-1}))}$. We assume one of the following four conditions:*
(1) U is an attracting basin of period n_0 and $\infty \in \partial U$ is accessible. There exists a finite point $q \in \partial U$ with $q \notin P_{f^{n_0}}$, $m_0 \in \mathbb{N}$ and a continuous curve $C(t) \subset U$ $(0 \leq t \leq 1)$ with $C(1) = q$ and satisfies $f^{m_0}(C) \supset C$.

(2) U is a parabolic basin of period n_0 and $\infty \in \partial U$ is accessible. There exists a finite point $q \in \partial U$ with $q \notin P_{f^{n_0}}$, $m_0 \in \mathbb{N}$ and a continuous curve $C(t) \subset U$ $(0 \le t \le 1)$ with $C(1) = q$ and satisfies $f^{m_0}(C) \supset C$.
(3) U is a Siegel disk of period n_0 and $\infty \in \partial U$ is accessible.
(4) U is a Baker domain of period n_0 and $f^{n_0}|U$ is not univalent. There exists a finite point $q \in \partial U$ with $q \notin P_{f^{n_0}}$, $m_0 \in \mathbb{N}$ and a continuous curve $C(t) \subset U$ $(0 \le t \le 1)$ with $C(1) = q$ and satisfies $f^{m_0}(C) \supset C$.
Then the set $\Theta_\infty := \{e^{i\theta} \mid \varphi(e^{i\theta}) := \lim_{r \nearrow 1} \varphi(re^{i\theta}) = \infty\}$ is dense in $\partial\mathbb{D}$ in the case of (1), (2) or (3). In the case of (4), the closure $\overline{\Theta_\infty}$ contains a certain perfect set in $\partial\mathbb{D}$. In particular, J_f is disconnected in all cases.

Theorem 3 *Let U, f and φ be as in the Main Theorem. Suppose that U is either an atracting basin or a parabolic basin of period n_0 and ∞ is accessible. If there exist a point $q \in \partial U$, $m_0 \in \mathbb{N}$ with $m_0 > n_0$ and a continuous curve $C(t) \subset U$ $(0 \le t \le 1)$ with $C(1) = q$ and satisfies $f^{m_0}(C) \supset C$, or if there exist two pairs of q_i and C_i $(i = 1, 2)$ with the same property as above for $m_0 = n_0$. Then J_f is disconnected.*

For the proof of the Main Theorem we take advantage of a property of *inner functions*. It is easy to see that $\varphi^{-1} \circ f^{n_0} \circ \varphi$ is an inner function. It is known that an inner function g has a unique fixed point $p \in \overline{\mathbb{D}}$ called *a Denjoy-Wolff point* and $g^n(z)$ tends to p locally uniformly on $\mathbb{D}$. The following are important lemmas for the proof.

Lemma 1 *Let $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ be an inner function which is not a Möbius transformation and p its Denjoy-Wolff point.*
(1) If $p \in \mathbb{D}$, then $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-n}(z_0)} \supset \partial\mathbb{D}$ holds for every $z_0 \in \mathbb{D} \setminus E$ where E is a certain exceptional set of logarithmic capacity zero.
(2) If $p \in \partial\mathbb{D}$, then $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-n}(z_0)} \supset K$ holds for every $z_0 \in \mathbb{D} \setminus E$ where E is a set of logarithmic capacity zero and K is a perfect set in $\partial\mathbb{D}$.

Lemma 2 *Let U be either an attracting basin or a parabolic basin (not necessarily unbounded) and $g = \varphi^{-1} \circ f^{n_0} \circ \varphi$. Then there exists a set $E \subset \mathbb{D}$ of logarithmic capacity zero such that $\frac{\sigma_n(z_0, A)}{\sigma_n(z_0, \partial\mathbb{D})} \longrightarrow \frac{\mathrm{meas} A}{2\pi}$ $(n \to \infty)$ holds for every $z_0 \in \mathbb{D} \setminus E$ and every arc A in $\partial\mathbb{D}$, where $\sigma_n(z_0, A) = \sum_\zeta (1 - |\zeta|^2)$ and sum is taken over all $\zeta = |\zeta| e^{i\theta}$ with $g^n(\zeta) = z_0$ and $e^{i\theta} \in A$.*

In the Main Theorem we assume that f is not univalent in the case of Baker domains and then the boundary is very complicated and the Julia set is disconnected. But in the case when $f^{n_0}|U$ is univalent, the boundary can be "neat". Actually it is know by W.Bergweiler that $f(z) := 2 - \log 2 + 2z - e^z$ has a Baker domain U on which f is univalent and whose boundary ∂U is a Jordan curve in $\widehat{\mathbb{C}}$. We can say much more about this example.

Theorem 4 *The boundary of each Fatou component of $f(z) := 2 - \log 2 + 2z - e^z$ is a Jordan curve in $\widehat{\mathbb{C}}$. In particular, J_f is connected in $\mathbb{C}$.*

11 Two examples of two-sheeted covering surfaces of the unit disc

学習院大学理学部　神　直人

(R, π) を $U = \{|z| < 1\}$ の２葉の限界のない分岐被覆面でその分岐点の π による射影が $\{z_\nu\}$ であるとする。また、R の倉持コンパクト化したものを R^*、理想境界 $R^* \setminus R$ を Δ_R であらわす。すると π は Δ_R まで連続に拡張されて $\pi(\Delta_R) = \partial U$ をみたす。

吾々は R の倉持境界と極大性の関係について次の結果を得ている。

Theorem 1. *If $I^\theta = \pi^{-1}(e^{i\theta})$ consists of one minimal point for every $e^{i\theta} \in \partial U$, then R is a maximal Riemann surface.*

以下 R は任意の $e^{i\theta} \in \partial U$ に対して $I^\theta = \{$ one minimal point $\}$ となっているものを考える。また $B(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$ とする。

吾々の主張は次の２つである。

Proposition 1. *There is a sequence $\{\kappa_\nu\}_{\nu \geq 1}$, $0 < \kappa_\nu \leq 1/8$, such that if $z'_\nu \in B(z_\nu, \kappa_\nu d_\nu)$, then a two-sheeted covering surface (R_1, π_1) of which projection of branch points is $\{z_\nu\} \cup \{z'_\nu\}$ satisfies that $\pi_1^{-1}(e^{i\theta})$ is homeomorphic to the closed interval $[0, 1]$ for every $e^{i\theta} \in \partial U$.*

2

Proposition 2. *There is a sequence* $\{\kappa_\nu\}_{\nu\geq 1}$, $0 < \kappa_\nu \leq 1/6$, *such that if* $z'_\nu \in B(z_\nu, \kappa_\nu d_\nu)$, *then a two-sheeted covering surface* (R_2, π_2) *of which projection of branch points is* $\{z_\nu\} \cup \{z'_\nu\}$ *is also maximal.*

12　　多項式による正則写像の一意性（II）

城崎　学　　　　大阪府立大学

工学部

１９９５年の春の学会では，H.-Y. Xin の結果：

Theorem C. d, p は $d > 2p+4$, $p \geq 1$ を満たす互いに素な整数とする．$a, b \neq 0$ を $P(w) = w^d + aw^{d-p} + b = 0$ が重根をもたないようにとる．このとき，2 つの非定数整関数 f, g が 零点をもたないある整関数 α に対し，

$$P(g) = \alpha P(f)$$

をみたすならば，$f = g$ が成り立つ．

に関連して次の定理を紹介した：

Theorem D. d, p は $d > 2p+8$, $p \geq 2$ を満たす互いに素な整数とし，w_0, w_1 の同次多項式 $H(w_0, w_1) = w_0{}^d + aw_0{}^{d-p}w_1{}^p + bw_1{}^d$ を考える．ここで，$a, b \neq 0$ は $H(w, 1) = 0$ が重根をもたないようにとってあるものとする．このとき，C から 1 次元複素射影空間への 2 つ

の非定数正則写像 $f = (f_0 : f_1), g = (g_0 : g_1)$ が零点をもたないある整関数 α に対し,

$$H(g_0, g_1) = \alpha H(f_0, f_1)$$

をみたすならば, $f = g$ が成り立つ.

Theorem D において, $g_1 \equiv f_1 \equiv 1$ をしたものを考えると, 条件 "$d > 2p + 4,\ p \geq 1$" が "$d > 2p + 8,\ p \geq 2$" になって, Theorem C よりもきつくなっている. そこで, 2 条件 "$d > 2p + 4$", "$d > 2p + 8$" の間を埋めるべく, 次の結果を導き出した:

Theorem. $H(w_0, w_1)$ は条件 "$d > 2p + \overset{6}{\cancel{7}}$" 以外は Theorem D と同じとする. このとき, $\boldsymbol{C}$ から 1 次元複素射影空間への 2 つの非定数正則写像 $f = (f_0 : f_1), g = (g_0 : g_1)$ が零点をもたないある整関数 α, β に対し,

$$H(g_0, g_1) = \alpha H(f_0, f_1),\ g_1 = \beta f_1$$

をみたすならば, $f = g$ が成り立つ.

13 On the second fundamental theorem for holomorphic curves

TODA Nobushige Nagoya Institute of Technology

1. Let $f:C \to P^n(C)$ be a non-degenerate, transcendental holomorphic curve, where n is a positive integer, $(f_1 \cdots, f_{n+1})$ a reduced representation of f, N an integer satisfying $N \geq n$ and X a subset of C^{n+1} in N-subgeneral position. The following theorem is well-known.

<u>Theorem of Nochka</u>. For any $q(>2N-n+1)$ elements $a_j (j=1, \cdots, q)$ of X,

$$(q-2N+n-1)T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{q} N_n(r,a_j,f)+S(r,f)$$

(see [2]).

The purpose of this talk is to give a refinement of this theorem. We use the same notation as in [1].

2. <u>Definition</u>. (i) For $u(z)= \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)|$,

$$t(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\log u(re^{i\theta})-\log u(e^{i\theta}))d\theta.$$

(ii) $\Omega=\limsup_{r \to \infty} t(r,f)/T(r,f)$ ([3]).

It is easy to see that $t(r,f) \leq T(r,f)+O(1)$ and $0 \leq \Omega \leq 1$.

Let $X(0)=\{a=(a_n,\cdots,a_n,a_{n+1})\ X: a_{n+1}=0\}$ and p the maximum number of linearly independent vectors in X(0). $\#X(0) \leq N$

and $p \leqq n$.

3. <u>Theorem</u>. Let $a_1,\cdots,a_q$ $(2N-n+1<q<\infty)$ be any elements of X, $X(0)$ $\{a_1,\cdots,a_q\}=\{a_1,\cdots,a_\ell\}$ and s the maximum number of linearly independent vectors in $\{a_1,\cdots,a_\ell\}$. Then,

$$\sum_{j=1}^{q} \omega(j)m(r,a_j,f)\leqq(s+1)T(r,f)+(n-s)t(r,f)-N(r,0,W)+S(r,f),$$

where W is the Wronskian of $f_1,\cdots,f_{n+1}$ and $\omega:\{1,\cdots,q\}\to(0,1]$ a Nochika weight function for $\{a_1,\cdots,a_q\}$.

<u>Corollary</u>. For any elements $a_1,\cdots a_q$ $(2N-n+1<q<\infty)$, on X

(i) $\sum_{j=1}^{q} \omega(j)\delta_n(a_j,f)\leqq(p+1)+(n-p)\Omega(\leqq n+1)$

(ii) $\sum_{j=1}^{q} \delta_n(a_j,f)\leqq N-n+p+1+\frac{(N-n)(p+1)}{n+1}+(N-p-\frac{(N-n)(p+1)}{n+1})\Omega(\leqq 2N-n+1)$

4. References

[1] H. Cartan: Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.
[2] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in R^m, Vieweg 1993.
[3] N. Toda: On the fundamental inequality of H. Cartan, NIT Sem. Rep. on Math., No. 117(1994), pp.12.

14 Densities with the mean value property for harmonic functions in a Lipschitz domain

相川弘明　　島根大学総合理工学部

Dを $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, の有界領域とし，$x_0 \in D$とする．$\mathcal{H}_b$を D上の有界調和関数全体とする．Hansen-Netuka [4] は D上の重み wで全ての $h \in \mathcal{H}_b$ に対して

(1)
$$h(x_0) = \frac{1}{\int_D w dx} \int_D h w dx$$

を満たすものを考え，次の定理を証明した．

定理 A. *(i) (1)* を満たし $\inf_D w > 0$ となる wを持たない領域 Dが存在する．
(ii) どのような有界領域 Dに対しても滑らかな重み wで *(1)* を満たし，$\lim_{x \to \partial D} w(x) = 0$ となるものが作れる．
(iii) $C^{1+\epsilon}$-領域またはより一般に *Liapunov-Dini* 領域 *(cf.* [6]*))* に対しては滑らかな重み wで *(1)* と $\inf_D w > 0$ を満たす物が存在する．

上の定理の Lipschitz 領域版を考えるのが今回の目的である．Lipschitz 定数が k以下の Lipschitz グラフで表される領域を k-Lipschitz 領域という．

定理. *(i) (1)* を満たし $\inf_D w > 0$ となる wを持たない $1/\sqrt{n-1}$*-Lipschitz* 領域が存在する．
(ii) $0 < k < 1/\sqrt{n-1}$ならばどのような k*-Lipschitz* 領域 Dに対しても滑らかな重み wで *(1)* を満たし $\inf_D w > 0$ となるものが作れる．

定理 (ii) の方針.
G を Dの Green 関数とし、$g(x) = G(x, x_0)$ とおく．kの条件より定数 α, $1 < \alpha < 2$, が存在して，$x \in D$が境界に近い時

(2)
$$g(x) \geq \delta(x)^{\alpha}, \quad \delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial D)$$

となる．そこで$\eta = (2-\alpha)/\alpha$とおき，小さな正数γにたいし $0 < g(x) < \gamma$ のとき $w^*(x) = |\nabla g(x)|^2 g(x)^{\eta-1}$とする．この時 Carea 公式と Poisson

積分公式から $h \in \mathcal{H}_b$ に対して

$$\int hw^* dx = \int_0^\gamma dt \int_{\{g=t\}} h|\nabla g|^2 g^{\eta-1} \frac{d\sigma}{|\nabla g|}$$
$$= \int_0^\gamma t^{\eta-1} dt \int_{\{g=t\}} h|\nabla g| d\sigma = \frac{\gamma^\eta}{\eta} h(x_0).$$

となり，(1) を満たす事がわかる．問題は $\inf_D w > 0$ であるが，もし境界の近くで

$$(3) \qquad |\nabla g(x)| \geq cg(x)/\delta(x)$$

が言えれば (2) より $w^*(x) \geq cg(x)^{\eta+1}\delta(x)^{-2} \geq c\delta(x)^{\alpha(\eta+1)-2} = c$ となり，求める w を得る事が出来る (D の内の方では適当に定める)．しかし，実際には (3) は各点毎の意味では成立せず，ある弱い意味で成り立つ．これから，w^* を変形して求める w を構成する．この弱い意味での (3) のために，次の補助定理を用いる．この補助定理の idea は Ancona による．この形は Hansen に教えてもらった物である．

補助定理 1. $0 < c_1 < c_2 < 1$ かつ $0 < A < 1$ とする．このとき c_1, c_2 および A による定数 a, $0 < a < 1$, が存在して次の性質を満たす: u が $B(0,1)$ 上の正の調和関数で $u(0) = 1$ かつ $\inf u(B(0,c_2)) \leq 1 - A$ ならば $\inf u(B(0,c_1)) \leq 1 - a$ となる．

参考文献

[1] H. Aikawa, *Integrability of superharmonic functions and subharmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 109–117.

[2] H. Aikawa, *Densities with the mean value property for harmonic functions in a Lipschitz domain*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[3] A. Ancona, *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$, J. London Math. Soc. (2) **34** (1986), 274–290.

[4] W. Hansen and I. Netuka, *Volume densities with the mean value property for harmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 135–140.

[5] D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), 80–147.

[6] K.-O. Widman, *Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations*, Math. Scand. **21** (1967), 17–37.

URL: `http://fagus.shimane-u.ac.jp/~haikawa`

E-mail address: haikawa@shimane-u.ac.jp

15　リプシッツ領域の調和境界

中 井 三 留　　　　名工大

d 次元 $(d \geqq 2)$ ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ の部分領域 M が，有界で ∂M が連結(即ち $\mathbf{R}^d \backslash M$ が連結)のとき，M を $\mathbf{R}^d$ の**許容領域**と呼ぶことにする．許容領域 M に於ける ∂M の連結性が M のロイデン p 調和境界 $\Delta_p(M)$ $(1 < p < \infty)$ の連結性(即ち，M 上の非定数 p ディリクレ有限 p 調和測度が存在しないこと)をどの程度惹起するかを考える．∂M が局所的に適当なユークリッド座標 (x', x^d) による連続関数 $x^d = \varphi(x')$ のグラフで表されるとき，M を**連続領域**；φ の定義域 B' に対し $\varphi \in W_r^1(B')$ $(1 < r < \infty)$ かつ全ての $x' \in B'$ に対し

$$(1) \qquad \limsup_{h' \to 0} |\varphi(x' + h') - \varphi(x')|/|h'| < \infty$$

となる様に φ がとれる連続領域 M を r 位の**弱リプシッツ領域**；φ がリプシッツ関数にとれる連続領域 M を**リプシッツ領域**と言う．

主定理． M **を許容リプシッツ領域とすると，** $\Delta_p(M)$ **は** $2 \leqq p < \infty$ **のとき連結，** $1 < p < 2$ **のとき非連結である．**

これは $M = B^d$ (単位球)のとき得られた結果([2], [1])の拡張である．主定理の前半部分は更に一般な次の主張から従う．

2. 定理. M を許容連続領域とすると, $2 \leqq p < \infty$ のとき $\Delta_p(M)$ は連結である.

此の結果は ∂M の滑らかさを全く仮定しないので可成り最終的な形に近付いていると思われる. 主定理の後半部分も又次の更に一般な主張から従う.

3. 定理. 任意の $1 < p < 2$ に対し任意の $r > \max(2p/(2-p), p/(p-1))$ をとる. M が r 位の弱リプシッツ領域ならば, $\Delta_p(M)$ は非連結である.

4. 注意. $d < p < \infty$ なら定理2は無条件の許容領域 M に対し成立する. $d = 2$ なら主定理は無条件の許容領域 M に対して成立する.

参考文献

[1] D.A. Herron and P. Koskela: *Continuity of Sobolev functions and Dirichlet finite harmonic measures*, Potential Analysis (to appear).

[2] M. Nakai: *Existence of Dirichlet finite harmonic measures on Euclidean balls*, Nagoya Math. J., **133**(1994), 85–125.

16　ソボレフ関数のヘルダー連続性について

水田　義弘　　広島大学総合科学部
下村　哲　　生物圏科学研究科

$\mathbf{R}^n$ の有界領域 D で定義されたソボレフ関数 u は

(1) $$u(x) = \sum_{|\mu|=m} a_\mu \int_D [D^\mu R_{2m}(x-y)]\ D^\mu u(y)\ dy + P(x)$$

の形で表される；ここに、$\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ は多重指数で、

$$|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n、D^\mu = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \cdots \partial x_n^{\mu_n}}、$$

R_{2m} は $2m$ 次のリース核、$\{a_\mu\}$ は定数、P は D 上 m 調和な関数である。従って、関数 u の連続性を調べるときは、リースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy$$

のそれを調べることと本質的に同じである。ソボレフの埋蔵定理によると、$f \in L^p(R^n)$ で $\alpha p > n$ のとき、リースポテンシャル $U_\alpha f$ はヘルダー連続である：

(2) $$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \leqq M|x-z|^{\alpha - n/p} \quad (0 < \alpha - n/p < 1)$$

$\alpha p \leqq n$ のときは、一般に、リースポテンシャルは連続でない。$\alpha p = n$ のとき、条件 $f \in L^p(R^n)$ を強めて、次の条件を考える：

(3) $$\int f(y)^p [\log(e + f(y))]^\sigma dy < \infty$$

(i) $\sigma > p - 1$ ならば、$U_\alpha f$ は連続

(ii) $\sigma \leqq p - 1$ ならば、$U_\alpha f$ は連続と限らない

そこで、(3) を一般化して、条件

(4) $$\int f(y)^p \varphi(f(y))dy < \infty$$

を考える。ここに、

(i) φ は開区間 $(0, \infty)$ 上正値かつ単調

(ii) $A^{-1}\varphi(r) \leqq \varphi(r^2) \leqq A\varphi(r) \qquad (r > 0)$

定理 1. 条件 (4) を満足する非負可測関数 f に対するポテンシャル $U_\alpha f$ がすべて連続であるための必要十分条件は、

(5) $$\int_0^1 [r^{n-\alpha p}\varphi(r^{-1})]^{-1/(p-1)} \frac{dr}{r} < \infty$$

$\alpha p > n$ のとき (5) は満たされる；$\alpha p = n$、$\varphi(r) = [\log(e + r)]^\sigma$ のとき、(5) が満たされるかどうかは σ と $p-1$ の大小による。

定理 2. $0 \leqq \alpha - n/p \leqq 1$ とする。条件 (5) のもとで、(4) を満たす関数 f に対して、

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \leqq M\kappa(|x-z|) \qquad (|x-z| \to 0)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \kappa(r) \;=\; & \left(\int_0^r [t^{n-\alpha p}\varphi(t^{-1})]^{-1/(p-1)} \frac{dt}{t}\right)^{(p-1)/p} \\ & + r\left(\int_r^1 [t^{n-\alpha p+p}\varphi(t^{-1})]^{-1/(p-1)} \frac{dt}{t}\right)^{(p-1)/p} \end{aligned}$$

定理 2 は、最近の Edmunds-Krbec によるある結果を含む。実際、$\alpha = 1 + n/p$、$p - 1 > \sigma$ ならば、$|x - z| \to 0$ のとき

(2′) $$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| = O(|x-z|[\log(1/|x-z|)]^{(p-1-\sigma)/p})$$

参考文献

[1] H. Brézis and S. Wainger, A note on limiting cases of Sobolev imbeddings and convolution inequalities, Comm. Partial Diff. Equations 5 (1980), 773-789.

[2] D. E. Edmunds and M. Krbec, Two limiting cases of Sobolev imbeddings, Houston Math. J. 21 (1995), 119-128.

[3] Y. Mizuta, Continuity properties of Riesz potentials and boundary limits of Beppo Levi functions, Math. Scand. 63 (1988), 238-260.

17　　Dirichlet ポテンシャルについて

田中　博　　　上越教育大学

リーマン面上の Wiener 関数や Dirichlet 関数と同様に、$n \geq 2$ 次元のコンパクトでないリーマン多様体 M に対して、p $(1 < p \leq n)$-Wiener 関数や、p-Dirichlet 関数を考える。M 上の有界連続関数 f が $h_f = 0$ を満たすとき、f は p-Wiener ポテンシャルであるといい、さらに、f が p-Dirichlet 関数のとき、p-Dirichlet ポテンシャルという。また p-優調和関数 $s \geq 0$ に対して、$0 \leq h \leq s$ となる p-優調和関数は $h = 0$ に限るとき、s は p-ポテンシャルであるという。このとき、このようなポテンシャルは次のように特徴づけることができる。

定理　M が p-hyperbolic のとき次が成り立つ。

(1) f が p-Wiener ポテンシャルであるためには $|f| \leq s$ となる p-ポテンシャル s が存在することが必要十分である。

(2) f が p-Dirichlet ポテンシャルであるためには $|f| \leq s$ となる p-Dirichlet ポテンシャルが存在することが必要十分である。特に、$p = 2$ のときには、s はエネルギー有限な Green ポテンシャルである。

18　ポテンシャル論における最小变分の方法

二宮信幸

局所コムパクトなハウスドルフ空間 Ω において，
$K(P, Q)$ は

(1)　二点 P と Q について下半連続，$P=Q$
では ∞ であってもよいが，$P \neq Q$ では
必ず有限，

(2)　P と Q が互に素なコムパクト集合の中にある
ときには，$K(P, Q)$ は上に有界，

であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に対して
ポテンシャルとエネルギー積分

$$K(P, \mu) = \int K(P. Q)\, d\mu(Q), \quad K(\mu, P) = \int K(Q. P)\, d\mu(Q),$$
$$K(\mu, \nu) = \int d\mu(P) \int K(P, Q)\, d\nu(Q),$$
$$K(\mu, \mu) = \iint K(P, Q)\, d\mu(Q)\, d\mu(P)$$

を考える．これらの量がポテンシャル論において有効
であるためには，$K(P, Q)$ に何等かの制限が必要で
ある．例えば，Ω のどんな開集合もその上にエネルギー
積分が有限であるような正の測度がある，というような
条件．

ボレル集合 E の上の負でない測度の全体を $\mathfrak{M}(E)$, その中の全質量が 1 であるものゝ全体を $\mathfrak{M}_1(E)$, $\mathfrak{M}(E)$ の測度の中でエネルギー積分が有限であるものの全体を $\mathcal{E}(E)$, その中で全質量が 1 であるものの全体を $\mathcal{E}_1(E)$, で表わす。$\mathfrak{M}(E)$ の二つの測度で全質量が等しいものゝ組の全体を $(\mathfrak{M} \underset{\psi}{\times} \mathfrak{M})(E)$ で表わす。即ち，二つの測度の組 (μ, ν) がそれに属するということは $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(E)$ かつ $\mu(E) = \nu(E) \geqq 0$ ということである。

Fをコムパクト集合，$\mathcal{E}_1(F) \neq \phi$，$f(P)$ を F の上の下に有界な上半連続関数，t_1 と t_2 を任意の正数，μ_1 と μ_2 を $\mathfrak{M}_1(F)$ の測度とする。前回の講演で

$$\max\begin{pmatrix} K(\mu_1, t_1\mu_1 + t_2\mu_2) - 2(t_1 + t_2)\int f d\mu_1 \\ K(\mu_2, t_1\mu_1 + t_2\mu_2) - 2(t_1 + t_2)\int f d\mu_2 \end{pmatrix}$$

なる量を考え，その下限（最小値）を与える μ_1, μ_2 について調べた。今回は更に進んで $K(P, Q) > 0$, $f(P) \geqq 0$ という仮定の下で，$(\mathfrak{M} \times \mathfrak{M})(E)$ に属する測度の組 (μ_1, μ_2) について上の量を考え，その下限（最小値）を与える (μ_1, μ_2) について調べたい。

19　Canonical integral representation の uniqueness について

大津賀　信

R^d, $d \geq 3$, において，f は precise な1次の Beppo Levi function で，重さ ω つきの $p(>1)$ 乗のディリクレ積分 $\int_{R^d} |\mathrm{grad}\, f|^p \omega\, dx < \infty$ とする．このような f を (p,ω)-precise function とよぶ。さらに条件 $\omega \in A_p$ を仮定すると，f に対して canonical な積分表示が成り立つ。すなわち，

定理 1. R^d 内の小さな除外集合である (p,ω)-exc. set を除き，
$$f(x) = \frac{-1}{(d-2)s_d} \int_{R^d} \mathrm{grad}_x |x-y|^{2-d} \cdot \mathrm{grad}\, f(y)\, dy + \mathrm{const}.$$
が成り立つために必要十分な条件は，
$$\int_{|x|>1} |\mathrm{grad}\, |x|^{2-d} \cdot \mathrm{grad}\, f(x)|\, dx < \infty$$
である。ここに s_d は $|x|=1$ の面積を表す。

もう1種類の積分表示である Riesz potential 表示においては，potential の密度は unique に定まるが，canonical な積分表示についてはどうかを問題とする．詳しくは，(p,ω)-exc. set を除き，$f(x) = \int_{R^d} \mathrm{grad}\, |x-y|^{2-d} \cdot g(y)\, dy + \mathrm{const.}$ となる vector field $g : R^d \to R^d$ を決定

せよというのである。まず，$\mathrm{grad}\, f - g$ は distribution の意味で solenoidal であること，すなわち div が 0 であることが分る。式で書くと，$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{grad}\, f - g) \cdot \mathrm{grad}\, \varphi \, dx = 0$ である。今回得られた結果は，

定理 2. h が solenoidal なら，$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{grad}\, |x-y|^{2-d} \cdot h(y) dy = 0$.

これより，f の canonical な積分表示を与える g は，$\mathrm{grad}\, f$ + solenoidal vector field の形をしていることで特徴づけられる。

特別講演

Potential-theoretic analysis of Hele-Shaw flows with a free boundary

酒井　良　　　　都立大・理

自由境界問題ないし移動境界問題は、等周問題などに現れる純粋に数学的な問題から、自然現象の記述や工学における技術上生じた問題などに至るまで、実に多岐にわたっている。工学的な見地からは先端技術に関係した問題がここ10年程著しく研究されるようになったと言われており、コンピュータによる数値解析はそのグラフィック化と共に長足の進歩を遂げている。自然現象の記述に関連した問題では、従来は理論と実験によるそれぞれの解析が相互に影響し合ってきたが、今後はコンピュータによる数値解析の比重が増して行くものと思われる。

ここで述べる自由境界問題は、自然現象の記述にその端を発しており、理論解析と数値解析が共に行われていて、実験との比較も行われているが、ほぼ純粋に数学的な問題と考えて良い。

純粋に数学的な問題として考えた場合、ここで述べるHele-Shawの流れの場の微分方程式はLaplace方程式であり境界条件において表面張力を無視しているため、数学的に扱い易いものである。その解析方法は今のところ次の三通りに分けられると思われる。

(i) ポテンシャル論を主に用いるもの、

(ii) 変分不等式を応用するもの、

(iii) 非線形関数解析的手法によるもの。

ここでは(i)について述べるがその特徴は、問題への接近の仕方がより直接的であり、初期時刻からの時間経過が微小でも長大でもない中程度の場合にも問題を扱うことができ、より精密な結果を導くことが期待できる点にある。一方、(i)による解析をさらに進めて行くにはGreen関数の境界挙動のより精密な評価などを必要としており、Euclid空間上で展開される具体的なポテンシャル論の内容を豊かにすることに貢献

できると思われる。

§1. 自由境界を持つ Hele-Shaw 流れの定式化

水平に置かれた間隔の狭い二枚の平行な平面の間に初期流体があり、上の平面の一点からさらに同じ流体を注ぎ込んでいくことを考える。この流体を上から見て流体の端は平均化して考えて、初期流体を 2 次元領域 $\Omega(0)$ とし、流体を注ぎ込んでいく点 c_0 は $\Omega(0)$ 上にあるとして、時刻 t 後の領域 $\Omega(t)$ を求めよう。圧力は垂直方向には一定として $p = p(x,t)$ としたとき、境界 $\partial\Omega(t)$ は速度 $-\nabla p|_{\partial\Omega(t)}$ で移動し、p は $\Omega(t)\setminus\{c_0\}$ 上で $\Delta p = 0$、$\partial\Omega(t)$ 上で $p = 0$ を満たす。与えられた $\Omega(0)$ と c_0 に対して、このような $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ を求めよというのが我々の考える自由境界を持つ Hele-Shaw 流れの問題である。このとき、$\Omega(t)$ の外で $p = 0$ とし、Baiocchi 変換 $u(x,t) = \int_0^t p(x,\tau)d\tau$ を用いて p を少し変形すると変分不等式の議論に乗せて行くことができる。ここでは、もっと直接に次のように考える。

§2. 解のポテンシャル論的な構成

圧力 p は c_0 以外で調和で、正値で、境界上で 0 だから、c_0 で極を持つ $\Omega(t)$ 上の Green 関数 $G(x, c_0, \Omega(t))$ の定数倍と考えて良い。そこで、流体を注ぎ込む割合を調節して $p(x,t) = (1/(2\pi))G(x, c_0, \Omega(t))$ としよう。$\partial\Omega(t)$ の速度が $-\nabla p|_{\partial\Omega(t)}$ ということは、$x \in \partial\Omega(t)$ において $\partial/\partial n_x$ を外法線方向微分として、$-\partial p(x,t)/\partial n_x = 1/(\partial t(x)/\partial n_x)$ と表せる。ここで、$t(x)$ は $x \in \partial\Omega(t)$ により定まる x の関数である。したがって、

$$(1) \qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G(x, c_0, \Omega(t))}{\partial n_x} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n_x}}$$

である。$\partial\Omega(t)$ が十分滑らかとし $t(x)$ も十分滑らかとすると $x \in \partial\Omega(t)$ において $\partial/\partial s_x$ を接線方向微分として、$dt = (\partial t/\partial n_x)dn_x + (\partial t/\partial s_x)\cdot$

$ds_x = (\partial t/\partial n_x)dn_x$ ゆえ、

$$\int_{\Omega(T)\setminus\Omega(0)} s(x)dm(x) = \int_0^T \left\{ \int_{\partial\Omega(t)} s(x) \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n_x}} ds_x \right\} dt$$

が $\Omega(T)$ 上の任意の可積分関数 s に対して成立する。ここで m は Lebesgue 測度である。さらに、s が $\Omega(T)$ 上劣調和ならば、

$$s(c_0) \le \int_{\partial\Omega(t)} s(x) \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial G(x, c_0, \Omega(t))}{\partial n_x} \right) ds_x$$

ゆえ (1) より

$$Ts(c_0) \le \int_{\Omega(T)\setminus\Omega(0)} s(x)dm(x)$$

であり、T を t と書き直して

$$\int_{\Omega(0)} sdm + ts(c_0) \le \int_{\Omega(t)} sdm$$

が $\Omega(t)$ 上の任意の可積分な劣調和関数 s に対して成立する。そこで、$\Omega(0)$ の特性関数を $\chi_{\Omega(0)}$ とし、c_0 での単位一点測度を δ_{c_0} として $\mu(t) = \chi_{\Omega(0)}m + t\delta_{c_0}$ とおいて、

(2) $$\int sd\mu(t) \le \int_{\Omega(t)} sdm$$

が $\Omega(t)$ 上の任意の可積分な劣調和関数 s に対して成立するような領域 $\Omega(t)$ を求めることを考える。

以上のことは、2 次元でなくとも定数などを少し修正するだけで高次元でも成立するので以下 d 次元で考える。U^μ を台がコンパクトな測度 μ の Newton ポテンシャルで $-\Delta U^\mu = \mu$ となるよう正規化されたものとする。Newton 核は優調和なので s に Newton 核を代入すると (2) の不等式は逆になる。そこで、

$$\mathcal{F}^\mu = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) : u \le U^\mu \ \text{ and } \ -\Delta u \le 1 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^d\}$$

とおく。ここで $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の distribution で $-\Delta u \leq 1$ は $-\Delta u$ が測度で $-\Delta u \leq m$ を満たすことを略記したものである。$\mathcal{F}^\mu$ は最大元 v を持ち、通常の balayage を考えるときと同じ考え方で μ に対して測度 $F(\mu) = -\Delta v$ を対応させることができる。$\mu = \mu(t)$ のときはある集合 $E(t)$ があって $F(\mu(t)) = \chi_{E(t)}m$ と表せる。$E(t)$ は一意的ではないが、$\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}^d : U^{\mu(t)}(x) - U^{F(\mu(t))}(x) > 0\}$ を解とすることができる。つまり、$F(\mu(t)) = \chi_{\Omega(t)}m$ として良い。こうして我々は直接 $\Omega(t)$ を構成することができた。

§3. 解の特性

(1) による定式化に対して (2) による定式化は、特に調和関数を考えて等号でいくのではなく劣調和関数にまで広げて考える点において、上で述べたように balayage により直接 $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ が求められるという長所の他にも種々の利点を持っている。例として $\partial\Omega(t)$ の先端部分の原点からの距離の評価をしてみよう。

B_r を原点中心、半径 r の球とし、$\Omega(0)$ は B_1 に含まれているとする。$\partial\Omega(t)$ は滑らかとし (そうでないときは、以下の s において正則化を取れば良い)、$x_0 \in (\partial\Omega(t)) \setminus \overline{B_1}$ とする。ここで、$\overline{B_1}$ は B_1 の閉包である。$M(x, x_0, \Omega(t))$ を $\Omega(t)$ 上の x_0 を極とする Martin 核とし、

$$s(x) = \begin{cases} M(x, x_0, \Omega(t)) & \text{in } \ \Omega(t), \\ 0 & \text{on } \ \mathbb{R}^d \setminus \Omega(t) \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

とおく。s は $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ 上劣調和であり $(\partial\Omega(t)) \setminus \overline{B_1}$ が実解析的な超曲面であることが分るので、$\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ 上可積分である。$\Sigma = \sup\{s(x) : x \in \overline{B_1 \cap \Omega(t)}\}$ とおくと、s は $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ 上で上半連続ゆえ $K = \{x \in \overline{B_1 \cap \Omega(t)} : s(x) = \Sigma\}$ は空でないコンパクト集合であり、$K \subset \partial B_1$ である。そこで、ν を $\int d\nu = \int d\mu(t)$ を満たす K 上のある点 c での一点測度とし、$B_{r(\nu)}(c)$ を中心 c、半径 $r(\nu)$ の球で $m(B_{r(\nu)}(c)) = \int d\nu$

を満たすものとすると、

$$s(c)m(B_{r(\nu)}(c)) = \Sigma \int d\nu = \Sigma \int d\mu(t) > \int s d\mu(t)$$

である。s は $\Omega(t)$ 上では調和で $\Omega(t)$ の外部では 0 だから、

$$\int s d\mu(t) = \int_{\Omega(t)} sdm \geq \int_{B_{r(\nu)}(c)} sdm$$

である。ゆえに劣調和関数の劣平均値の性質より、s は $B_{r(\nu)}(c)$ 上で劣調和ではあり得ず、したがって $x_0 \in B_{r(\nu)}(c)$ となる。$r(\nu) = r(\mu(t))$ ゆえ次のことが言えた。

<u>定理 1</u>([S3]). $\Omega(0) \subset B_1$ ならば、$\overline{\Omega(t)} \subset B_{r(\mu(t))+1}$ である。

証明はずっと長くなるが、次のことも示せる。

<u>定理 2</u>([S3]). $\Omega(0) \subset B_1$ かつ $r(\mu(t)) > 2$ ならば、$\overline{B_{r(\mu(t))-1}} \subset \Omega(t)$ であって、$\partial\Omega(t)$ は実解析的な超曲面で原点に関して星型である。

条件 $\Omega(0) \subset B_1$ が満たされるとして、B_1 内で $\partial\Omega(t)$ の原点からの距離の下からの評価も可能である。$0 < \rho \leq 1$ の ρ に対して $r(\mu(t)) > R$ ならば $\overline{B_\rho} \subset \Omega(t)$ となる R の下限を $r(\rho, d)$ とすると $d \geq 3$ のときは次の評価を得る。

<u>定理 3</u>([S3]). $r(\rho, d)$ は

$$r(\rho, d) \leq \left\{ \frac{1}{(1-\frac{\rho}{2})^{d-2}} + \frac{d-2}{2}(1-\rho)(1+\rho)^{d-1} \right\}^{1/(d-2)}$$

を満たす。

境界の形状については、作用素 F の次の特性によって多くのことが得られる。

<u>定理 4</u>([GS]). D を開集合で境界 ∂D の各点は Dirichlet 問題に関して正則な点とし、$\Omega(0) \subset D$ とする。$\mu(t)$ に対して $\mathrm{supp}\ \nu(t) \subset \partial D$ とな

る測度 $\nu(t)$ が存在して、

$$F(\nu(t)) \leq F(\mu(t)) \quad \text{かつ} \quad F(\nu(t))|_{\mathbb{R}^d \setminus D} = F(\mu(t))|_{\mathbb{R}^d \setminus D}$$

となる。

最も単純な場合は D が半空間のときである。上の定理から $\Omega(0)$ が半空間 $D = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d < 0\}$ に含まれていると $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\} \cap \Omega(t)$ は $\mathbb{R}^{d-1}$ 内の開集合 G と G 上の実解析的な関数 g が存在して $\{x \in \mathbb{R}^d : x' \in G, 0 < x_d < g(x')\}$ の形をしていることが分かる。そしてこのとき、$\Omega(t)$ は $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\} \cap \Omega(t)$ を $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$ で折り返した開集合を含んでいることになる。このように半空間 (∂D に着目すれば超平面) を動かして解の特性を調べることはその他の移動境界問題や偏微分方程式論において多くの人々によって行われている。定理 4 は相当自由に D が取れることを示している。

次に境界の滑らかさを $d = 2$ の場合に論じてみよう。$u = u(x,t) = U^{\mu(t)}(x) - U^{\chi_{\Omega(t)}m}(x)$ とおくと u は $\Omega(t)$ 上 $u > 0$、$\mathbb{R}^2 \setminus \Omega(t)$ 上 $u = 0$ であり $\Omega(t)$ 上 $\Delta u = -\mu(t) + 1$ を満たす。そこで、$x \in \partial\Omega(t) \setminus \overline{\Omega(0)}$ 中心の開円板 B を $B \cap \Omega(0) = \emptyset$ に取ると u は

(i) $B \cap \Omega(t)$ 上 $u > 0$ かつ $B \setminus \Omega(t)$ 上 $u = 0$ で、$x \in \partial\Omega(t)$ であり、

(ii) $u \in C^1(B)$ であり、

(iii) $B \cap \Omega(t)$ 上 $\Delta u = 1$ である。

<u>定理 5</u>([S2]). x 中心の開円板 B' があって $\Gamma = B' \cap \partial\Omega(t)$、$\Omega = B' \cap \Omega(t)$ とおくと、次の四通りの何れかが成り立つ。

(1) Γ は x を通る実解析的な正則弧で Ω はその片側である、

(2a) Γ は x のみから成るかまたは x を通る実解析的な正則弧で $\Omega = B' \setminus \Gamma$ である、

(2b) Γ は x で接する二つの実解析的な正則弧の和集合で Ω はその外側の広い方の二つの連結成分から成る、

(2c) Γ は x で尖点を持つ実解析的な弧で Ω はその外側の広い方である。

証明は、$x = (x_1, x_2)$ に対して $z = x_1 + ix_2$ とし $\bar{z} - 4(\partial u/\partial z)(z)$ が $B \cap \Omega(t)$ 上で正則、$B \cap \partial\Omega(t)$ 上で境界値 $\bar{z}$ を取ることを用いて、等角写像の議論に持ち込むことにより行う ([S1])。(2c) の尖点は、特別な尖点であって Γ を $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ と尖点を端点に持つ実解析的な正則弧 Γ_1, Γ_2 の和に表し、尖点での Γ_j の接線方向を正の x 軸にとって、Γ_j を区間 $[0, \epsilon)$ 上の $y = y_j(x)$ のグラフとして表したとしよう。

<u>定理 6</u>([S2]). $y_j(x) = c_j x^{n_j/2} + o(x^{n_j/2})$ $(c_j \neq 0)$ とすると、$n_1 = n_2$ でこれを n と書くと、n は自然数で $n \geq 4$ で $n \not\equiv 3$ (mod4) である。c_j は $c_2 = (-1)^n c_1$ を満たす。

§4. 今後の課題

表題を free boundary としてあるのはまだ moving boundary と言えるほどの議論ができていないと考えるからである。時刻を動かしたことによって現れる現象の記述をすべきであろう。それによってこそ「古典解」を構成したと言えるのである。そのためにも形状について、定理 4 ないしその改良版を考えて詳しく調べる必要がある。さらに、流体を注ぎ込むのでなく、汲み出す場合についても考察すべきであろう。この場合は、流体を全部汲み出せないで止まることが起き得る。このときの流体の形状はどのようなものであろうか？ 我々の考える問題では汲み出してから同じ量の流体を注ぎ込むと元に戻る。しかし、逆の場合は、元に戻るとは限らない。この様子の解明も残された課題と思われる。

引用文献

[GS] Gustafsson B. and Sakai M., *Properties of some balayage operators, with applications to quadrature domains and moving boundary problems*, Nonlinear Anal. 22(1994), 1221–1245.

[S1] Sakai M., *Regularity of a boundary having a Schwarz function,* Acta Math. 166(1991), 263–297.

[S2] ——, *Regularity of free boundaries in two dimensions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 20(1993), 323–339.

[S3] ——, *Sharp estimates of the distance from a fixed point to the frontier of a Hele-Shaw flow*, 1995, preprint.

参考文献

ここでは、筆者の気付いた最近のもののみを挙げる。解析方法の (ii) については、

Begehr H. and Gilbert R.P., *Transformations, Transmutations, and Kernel Functions, Vol. 1*, Longman, Essex, 1992.

の第 III 章と文献が参考になる。歴史、最近の結果、(iii) については、S.D.Howison と J.R.Ockendon による特別号の

European J. Appl. Math. 6(1995), Part 5.

が参考になる。

場の微分方程式が Laplace 方程式である移動境界問題については、

登坂宣好・杉野隆三郎、境界要素法による Laplace 移動境界現象の解析、計算力学 IV– 自由・移動境界問題の近似解析 –(登坂、矢川編)、242–266、養賢堂、1995。

流れの移動境界問題を全体的に論じたものとしては、

数値流体力学編集委員会編、移動境界流れ解析、数値流体力学シリーズ 4、東大出版会、1995。

を挙げたい。これらは数値解析の立場から書かれたものであり、その扱っている種々の問題は我々の単純化された Hele-Shaw 流れからは遠く隔たり現実の複雑な問題を手掛けている。ここで論じた純粋に数学的な解析が何らかの貢献をする道ははなはだ遠いと言わねばならない。しかしながら、そこに示されている種々な図はその美しさと共に我々に夢を与えてくれるものである。

20 On the generalization of A.D.Michal's theorems concerning successive Frechet differentials of abstract power series in the case of non-symmetric polar forms

笹山浩良 SASAYAMA INSTITUTE

Kをreal or complex field, K上のノルム空間 B 上で定義され K上のBanach空間 B' 中に値をもつ m次抽象斉次多項式 $P_m(x)$の級数 $\Sigma_{m=o}^{\infty} P_m(x)$の逐次 Fréchet微分に関しては、よく知られているように、K=R(real field)に対しては1946年の A.D.Michalの定理, K=C(complex field)に対しては、1931-1932年に証明され 1934年刊行のA.D.Michal & R.S.Martinの定理がある。ここで多項式$P_m(x)$の極形式 $h(x_1,...,x_m)$は $x_1,...,x_m \in B$ について完全対称と仮定されている。而るに1991年以来の私の非可換Hypercomplex N-tuple Space E(S)における拡張されたワ級数の研究を通して、拡張された斉次多項式の各成分のpolar formは一般に非対称であった。A.D.Michalのこれらの定理が適用できるためにはpolar formsの対称性を仮定する事になるが、この対称性からSの可換性がでてくるので、今迄拡張されたワ級数を項別にFréchet微分する時だけSは一応可換として来た。

而し可換とした時は $E(\mathfrak{S})$ における拡張された冪級数は

$$P(X) = \Sigma_{m=0}^{\infty} W_m \ell_m(X,...,X) \quad (W_m \in \mathfrak{S})$$

の形に帰着する。そこで polar form non-symmetric の時、抽象冪級数の項別F微分可能性への拡張が必要になるので検討を加えて来た所、A.D.Michal の定理の証明を若干修正する事により新らたな条件の附加なしに、そのまゝ成立する事が分かったので御報告する。これにより、今迄の報告中項別F微分を必要とする箇所で $\mathfrak{S}$ は可換でなくともよいことになる。

1995年3月30日の講演[25]のERRATA

		正
P.51, 下から5行目	解析性を $dY=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(x_1,..x_n\|dX)\cdot e_k$	解析性を $\mathfrak{S}$の解析性など $dY=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(X\|dX)e_k$
P.51, 下から4~3行目	$\Phi_k(x_1,..,x_n\|dX)$,	$\Phi_k(X\|dX)$,
P.51, 下から3~2行目	は $x_1,..,x_n$ について analytic,	は
P.51, 下から2行目	linear な	linear 且つ $V_{jk}(x_1,..,x_n\|dX)=\sum_{i=1}^{n}V_{jk}(x_1,..,x_n\|dx_i)e_i$
P.52, 上から4行	すると	すると凡べての有次解析函数に対し Φ_k が X について analytic ならば
P.52, 上から8行と下から2行目	普通の意味で linear な	右 extended m-linear な
P.52, 11~12行目	について analytic な	,
P.52, 下から3行目と2行目	$A^*_{i_1\cdots i_{m-1}}$	$A^*_{i_1\cdots i_{m-1}i_m}$

21 On the generalization of R. Fueter's polynomials p(z) for hypercomplex n-tuple spaces

笹山浩良　　SASAYAMA INSTITUTE

一昨年秋の分科会でR.Fueterの左右正則な多項式$p(z)$がQuaternionic Quadruple Space へ拡張できる事を報告したが、この時とほゞ同様の方法により、更に非可換結合的なHypercomplex n-tuple Space にも拡張可能な事がわかり、御報告する。$\mathfrak{S}$を単位元$\ni$をもつ非可換結合的なn次元多元環，B, B'を実又は複素数体K上のノルム空間とする。但し$(K,K') \neq (R,C)$とし$\mathfrak{S}$はreal or complex field K'上のalgebraとする。$(e_1,\dots,e_n)$を$\ni = e_1$なる如き$\mathfrak{S}$のbasisとし、$E(\mathfrak{S}), E'(\mathfrak{S})$を$B, B'$にassociateされbasis $(e_1,\dots,e_n)$の同値類に対応したHypercomplex n-tuple spaceとする。今$\ell_m(x_1,\dots,x_m)$が$B^m \to B'$ $(x_1,\dots,x_m \in B)$なる有界対称m-linear functionの時$(m=1,2,3,\dots)$，$E(\mathfrak{S})^m$で定義され$E'(\mathfrak{S})$中に値をもつbounded multilinear function $\vec{\ell}_m(X_1,\dots,X_m)$が以前のべたように誘導される。但し$\ell_0 \equiv 1$　各$m=0,1,2,3,\dots$に対し$m_2, m_3, \dots, m_n$を$m_2+\dots+m_n=m,\ 0 \leqq m_2,\dots,m_n \leqq m$

なる如き整数とし各 set$(m_2,\ldots,m_n)$ に対して

$$p_{m_2\cdots m_n}[\ell_m](X) \equiv \frac{1}{m!}\sum_{(k_r)} \vec{\ell}_m(x_{k_1}-e_{k_1}x_1,\ldots,x_{k_m}-e_{k_m}x_1)$$

とおく。ここで $m_a = \Sigma_{\ell=1}^{m}\delta_a^{k_\ell}$ $(a=2,\ldots,n)$, $2\leqq k_1,\ldots,k_m\leqq n$ なる如き $\dfrac{m!}{m_2!\cdots m_n!}$ ケの異る $k_1,\ldots,k_m$ の repeated permutation 全体に亘る和を $\sum\limits_{(k_r)}$ とする。

一般に open subset $D\subset E(\mathfrak{S})$ より $E'(\mathfrak{S})$ への函数 $f(X)$ が D で連続的に Fréchet 可微分で且つ

$$\Sigma_{k=1}^{n}\,\partial_{x_k} f(X;x_1)e_k = 0$$

が成立するならば $f(X)$ は D で右 x_1-正則であるとよぶ。x_1-左正則性も同様。

<u>Theorem</u> 拡張された Fueter 多項式

$p_{m_2\cdots m_n}[\ell_m](X)$ は $E(\mathfrak{S})$ で左右 x_1-regular である。

(N.B.) $p_{m_2\cdots m_n}[\ell_m](X)$ supra-F-differentiable ではない。

22 多項式の擬零点と companion 行列の擬スペクトル

角　慎吾　　東芝
辻　美輝　　九州大学大学院数理学研究科博士課程一年生
V. M. Raffee　　Computer centre,
Centre For Advanced, Technology, INDIA
印度高等工業センター

多項式の零点は companion 行列の固有値に等しい。すなわち、$p(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i, c_n = 1$ を複素係数を持つ n 次の多項式とすると、companion 行列

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & -c_0 \\ 1 & \ddots & & -c_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

の固有値は、多項式 p の零点と等しくなる。

しかし、2つの関係について、いままで数値解析の分野で、あまり研究されていなかったが, Kim - Chuan Toh と Lloyd N. Trefethen は、[2] の論文の中で、これら2つの問題の多項式の零点を求めるアルゴリズムについて、擬零点集合と平衡化された companion 行列の擬スペクトル集合は、数値実験によって、幾何学的に密接な関係があることを指摘した。また、とくに単根のみを持つ場合の条件数と2つの方法による数値計算の結果を比べ、平衡化された companion 行列の固有値を求めるアルゴリズムの安定性を確かめた。

しかし重根を持つ場合、平衡化された companion 行列の固有値を求めるアルゴリズムは直接解く方法に比べて、不安定な場合もあるという注意が与えられているのみなので、本講演にて我々はこの多項式が重根を持つ場合のアルゴリズムの安定性について考察する。

$Z(p)$ を $p(z)$ の零点集合とする。

Dを対角行列として、その対角ベクトルを $d = (d_0, d_1, \cdots, d_{n-1})^t$ とする。

擬零点集合

$$Z_\epsilon(p; d) = \{z \in \mathrm{C} : z \in Z(\hat{p}) \text{ for some } \hat{p} \in \mathrm{P} \text{ with } \|\hat{p} - p\|_d \le \epsilon\}$$

と定義し、擬スペクトル集合を

$$\Lambda_\epsilon(A_p; d) = \{z \in \mathrm{C}; z \in \Lambda(\hat{A}) \text{ for some } \hat{A} \in M_n with \|\hat{A} - A_p\|_d \le \epsilon\}$$

とする。ここで、

$$\|A\|_d = \|DAD^{-1}\|_2, \quad \|p - \tilde{p}\|_d = \left[\sum_{i=0}^{n-1} |d_i|^2 |c_i - \tilde{c}_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

である。

多項式の根が単根から重根を持つように多項式の係数を変化させた場合の擬零点集合, 擬スペクトル集合の図形変化の比較を行い、また、それぞれの根での条件数と実際の数値誤差の関係を考察し、companion 行列の固有値に対するアルゴリズムの不安定性の原因について調べる。

References

[1] M. Mori, *Fortran 77 Numerical calculation programming,* The Iwanami computer science series, (1986) p.398.

[2] Kim-Chuan Toh and Lloyd N. Trefethen, *Pseudozeros of polynomials and pseudospectra of companion matrices,* Numer. Math. **68** (1994) pp. 403-425.

23 $\bar{\partial}$-数値解析

辻 美輝 九州大学大学院数理学研究科博士課程一年生
V. M. Raffee Computer centre,
Centre For Advanced, Technology, INDIA
印度高等工業センター

Our joint work concerns Numerical Analysis on $\bar{\partial}$-problem in the unit polydisk and aims to solve the inhomogeneous $\bar{\partial}$-equation numerically firstly on the unit polydisk, using tht Integral Formula at the proof of page 30 of Hörmander[1]. We do programming for super computer based on Intel i860 of the above cat in India and FACOM VP-2600of Kyushu university, using Fortran 77 and apply it to the extension problem:

We put

$$U := \{z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

and

$$L := \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; z_1 + z_2 + \sqrt{2} = 0\}.$$

Then

$$U \cap L = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; |z_1| < 1, |z_1 + \sqrt{2}| < 1\}$$

which is mapped by

$$z_1 := \frac{z-1}{\sqrt{2}}$$

to the circle-arced di-angular

$$|z-1| < \sqrt{2}, \qquad |z+1| < \sqrt{2}$$

which is mapped to the unit disk $|w| < 1$(cf. p.244 of Komatsu-Kajiwara[2].) by the mapping

$$w = \varphi(z) := \frac{2z}{1-z^2}.$$

Now, let $h(z_1, z_2)$ be a holomorphic function on $U \cap L$ and ψ be a function of class C^∞ so that $\psi = 1$ in a neighborhood of $U \cap L$ and its support is contained in

$$V := \{z = (z_1, z_2) \in U; |z_1| < 1, |z_1 + \sqrt{2}| < 1\} \subset U.$$

We will define it as follows:

For positive numbers c and d with $c < d$, we put

$$\varphi_1(x) := \exp(-\frac{1}{x}) \qquad (x > 0), \tag{1}$$

and

(2) $$\varphi_2(x; c, d) := \varphi_1(x - c)\varphi_1(d - x),$$
$$A := \int_c^d \varphi_2(t; c, d)dt$$

and, for $x > 0$, we put

(3) $$\varphi_3(x; c, d) := \frac{\int_0^x \varphi_2(t; c, d)}{A} \qquad (x > 0).$$

Then $\varphi_3(x; c, d) \in C^\infty$ satisfies $\varphi_3(x; c, d) = 0$ on $x < c$, $0 < \varphi_3(x; c, d) \leq 1$ on $c < x < d$ and $\varphi_3(x; c, d) = 1$ on $x > d$. Using this $\varphi_3(x; c, d)$, we put

(4) $$\psi(z_1, z_2) := 1 - \varphi_3(|z_1 + z_2 + \sqrt{2}|^2; \frac{1}{16}, \frac{1}{4}).$$

We define a (0,1)-form by putting

$$f := f_1 d\overline{z_1} + f_2 d\overline{z_2} := \frac{h(z_1)\overline{\partial}\psi}{z_1 + z_2 + \sqrt{2}}.$$

Then by Theorem 2.3.1 of Hörmader[1], the fuction u given by

(5) $$u(z_1, z_2) := \frac{1}{2\pi i}\int\int \frac{f_1(\tau, z_2)}{\tau - z_1} d\tau d\overline{\tau} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\int \frac{h(z_1)}{\tau - z_1}\varphi_3'(|z_1 + z_2 + \sqrt{2}|^2; \frac{1}{16}, \frac{1}{4})\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \qquad (\tau = s + it)$$

(6) $$\frac{1}{\pi}\int\int \frac{h(z_1)}{\tau - z_1}\frac{\varphi_2(|z_1 + z_2 + \sqrt{2}|^2; \frac{1}{16}, \frac{1}{4})}{A}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

is a solution of the $\overline{\partial}$-equation

(7) $$\overline{\partial}u = f$$

(please regard u as a complex potential) and let

(8) $$H(z_1, z_2) := h(z_1)\psi - (z_1 + z_2 - \sqrt{2})u(z_1).$$

Since we have $\overline{\partial}H = 0$, H is holomorphic on the ambiant bidisk U with $H|_{U\cap L} = h$, that is, H is the desired holomorphic extension of h.

We choose the target function h so as to be unbounded at boundary points of $U \cap L$, that is $|w| = 1$. Hence $|w| < 1$ which gives the frontier property of the domain V. Let us ask the computer to describe the image

(9) $$\zeta = H(0, r\exp(\theta i)) \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

of circles $z_2 = r\exp(\theta i)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi i)$ with center 0 and semi-radius $r = 10^{-n}, n = 1, 2, \cdots, \infty$.

References

[1] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, D. Van Nostrand(1966), pp.208.

[2] 小松勇作－梶原壌二，詳解－函数論演習（共立）１９８３年２９９頁.

24 Deformation of Double Cusp Singularity on a Quartic Curve

高橋　正　　神戸大学発達科学部

1 Singularities of quartic curves

Let P^2 be a 2-dimensional complex projective space with the coordinate $[x, y, z]$ and let $f_n(x, y, z)$ be a homogeneous polynomial of degree n in P^2. We consider the set $V_n := \{(x, y, z) | f_n(x, y, z) = 0\}$. We call V_4 complex projective plane quartic curves(quartic curves). There exists 21 types curves as the classification of irreducible quartic curves.

The A_4 singularity is called the double cusp((2,5)cusp) singularity.

2 Deformation of double cusp singularity

We consider the following defining equation:

$$f = x^2z^2 \pm 2xy^2z + y^4 + y^3z + a_1yz^3 + a_2z^4 = 0.$$

The curve defined by this equation has a double cusp singularity at $[1,0,0]$ in P^2. The defining equation which define the quartic curve with a double cusp singularity is all.

$f_x\ |_{z=1}= 2x+2y^2,\ f_y\ |_{z=1}= 4xy+4y^3+3y^2+a_1,\ f_z\ |_{z=1}= 2x^2+2xy^2+y^3+3a_1y+4a_2.$

Let G be the Grobner Base for $f_x\ |_{z=1}, f_y\ |_{z=1}, f_z\ |_{z=1}$.

$$G = (-4a_1^3 - 27a_2^2, -9a_2y + 2a_1^2, 2a_1y + 3a_2, 3y^2 + a_1, 3x - a_1)$$

(We calculate the Grobner Base by using computer algebra system Risa)

As a result, the curve defined by $f = 0$ has the only double cusp singularity at $[1,0,0]$ for $4a_1^3 + 27a_2^2 \neq 0$. This curve is type III_h.

And the curve defined by $f = 0$ has the A_2 singularity at $[0,0,1]$ for $a_1 = a_2 = 0$. This curve is type $II_{\frac{1}{2}b}$.

We consider the deformation of irreducible quartic curve with a double cusp singularity. Then, we obtain the following result.

$$f = x^2z^2 \pm 2xy^2z + y^4 + y^3z + a_1yz^3 + a_2z^4 = 0.$$

$$4a_1^3 + 27a_2^2 \neq 0 : \text{ type } III_h.$$

$$4a_1^3 + 27a_2^2 = 0 \text{ and } \{\ a_1 \neq 0 \text{ or } a_2 \neq 0\ \} : \text{ type } III_a.$$

$$a_1 = 0 \text{ and } a_2 = 0 : \text{ type } II_{\frac{1}{2}b}.$$

25

Pluri-generaによる2次元商特異点の特徴付け

奥 間 智 弘　　筑波大学大学院 数学研究科

$f:\widetilde{X}\to X$ を normal surface singularity (X,x) の good resolution とし、さらに $E:=f^{-1}(x)_{red}$ とする。このとき、$m\in\mathbf{N}$ に対し、多重種数 $\delta_m(X,x)$ を

$$\delta_m(X,x)=dim_{\mathbf{C}}\frac{H^0(\widetilde{X}-E,\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(mK_{\widetilde{X}}))}{H^0(\widetilde{X},\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(mK_{\widetilde{X}}+(m-1)E))}$$

と定義する。但し、ここで X は 唯一の singularity x をもつ Stein space とする。もちろん、この多重種数は good resolution の取り方によらない。$\delta_1(X,x)$ は、いわゆる singularity (X,x) の geometric genus $p_g(X,x)$ のことである。$p_g(X,x)=0$ なる singularity を rational singularity 、$p_g(X,x)=1$ なる singularity を elliptic singularity という。このとき次のことが知られている。

Theorem 1 (Watanabe) (X,x) を *normal surface singularity* とするとき

$$(X,x)\text{ が } \textit{quotient singularity} \Longleftrightarrow \delta_m(X,x)=0 \quad {}^{\forall}m\in\mathbf{N}$$

しかし、実際は次が成り立つことが分った。

Theorem 2 (X,x) を *normal surface singularity* とするとき

$$(X,x)\text{ が } \textit{quotient singularity}$$

$$\Longleftrightarrow \delta_m(X,x)=0 \quad for \quad 1\le m\le 6$$

以下に証明の概略を述べる。$\delta_1(X,x)=0$ は (X,x) が rational であることを示している。$\delta_2(X,x)=0$ より例外集合 E の dual graph が star-shaped であることがわかり、そのときには $\delta_m(X,x)$ を求める公式により (X,x) が quotient singularity となる条件をえる。

Example 3 次の *intersection matrix*

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

をもつ *rational singularity* (X,x) は $\delta_1(X,x)=\cdots=\delta_5(X,x)=0$ であるが *log-canonical* でない。

26 ISOMETRY GROUPS ON HADAMARD MANIFOLDS

X.Wang & W.Yang Beijing Institute of Technology

Let X be a pinched Hadamard manifold and M(X) denote its isometry group. It is proved that a non-elementary subgroup G of M(X) is discrete if and only if every non-elementary subgroup generated by two elements of G is discrete which implies that if G is non-discrete then there exists a non-discrete and non-elementary subgroup generated by two elements of G.

27 **A remark on the pseudo-conformal transformations of bidisk**

柴田敬一　　　国際自然科学研

$\mathbb{C}^2$ の部分Reinhardt領域の解析的変換に関する次の定理は古くから知られている。

定理（H. Cartan）.

もし

$$\begin{cases} X = \varphi(x, y), & (\varphi(0, 0) = 0) \\ Y = \psi(x, y), & (\psi(0, 0) = 0) \end{cases}$$

が（x, y）空间内の原点を中心とする有限な円領域Δを，（X, Y）空间内にある原点を中心とする有限な円領域Dに解析的に変換するならば，

$$\varphi(x, y) = ax + by,$$
$$\psi(x, y) = Ax + By$$

（a, b, A, B は定数）に限る。

講演は，同じ範疇に属するひとつの问題を，その知られた証明とは異なる立場から考察することによって，新らしい結果が得られる過程を報告するのが目的である。

28　$\mathbb{R}^4$ の領域の調和 module の動き

山口博史（滋賀大学　教育学部）

区間 I の任意の点 t に対して, $\mathbb{R}^4$ の C^ω 級滑らかな領域 $D(t)$ 及び $D(t)$ 内の 1-cycle $\gamma(t)$ が与えられていて, それらは $t \in I$ と共に C^ω 級滑らかに動くとする。$D(t)$ 上の L^2 閉 1 形式の全体を $Z_1(D(t))$ とかく。各 $t \in I$ について, 次の性質を持つ $*\Omega(t,\cdot) \in Z_1(D(t))$ が一意的に存在する:

$$\int_{\gamma(t)} \omega = (\omega, *\Omega(t,\cdot))_{D(t)} \quad \text{for } \forall\, \omega \in Z_1^\infty(\overline{D(t)}).$$

$*\Omega(t,\cdot)$ 及び $\|\Omega(t,\cdot)\|_{D(t)} (\equiv \mu(t))$ を $(D(t),\gamma(t))$ に関する再生形式 及び 調和 module と呼ぶ。

$\Omega(t,\cdot)$ は $\overline{D(t)}$ 上の調和 3 形式であり, $\Omega(t,x) = \alpha(t,x) \cdot *dx$ と置き, $\partial D(t)$ 上で $e_\Omega(t,x) := \alpha(t,x)/\|\alpha(t,x)\|$ と定義すれば、これは $\partial D(t)$ 上の単位接ベクトル場になる。

このとき, 次の 2 階変分公式が成立する:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mu(t)}{dt^2} &= 2\left\|\frac{\partial\Omega(t,\cdot)}{\partial t}\right\|^2_{D(t)} \\ &+ \int_{\partial D(t)} (\rho_{\boldsymbol{n}}(t,x) + \rho_{\boldsymbol{e}_\Omega}(t,x) - \rho_{\boldsymbol{e}'_\Omega}(t,x) - \rho_{\boldsymbol{e}''_\Omega}(t,x))\|\Omega\|^2(t,x)dS_x.\end{aligned}$$

ここに $\{e_\Omega, e'_\Omega, e''_\Omega\}$ は $\partial D(t)$ 上の接ベクトル場の基底であり, $\rho_a(t,x)$ は 曲面 $\partial D(t)$ の点 x における (t,a)−方向への曲率を表す。

上式の証明には 次のことが用いられる:

$\mathbb{R}^4$ の原点 O の近傍 V で定義された調和 3 形式 $\Omega(x)$ があって, 原点 O を通る曲面 Σ に沿って Ω は Σ 上の 3 形式として 0 とする。このとき, 次の条件を満たす 2 形式 $A(x)$ が Σ の近傍 V_0 で存在する:

$$(i)\ \Omega = dA \ \text{ on } V_0, \quad (ii)\ A = 0 \ \text{ on } \Sigma, \quad (iii)\ \delta A = 0 \ \text{ on } V_0.$$

$\mathbb{R}^3$ における同様の命題は 通常のコーシー問題を解くことによって示された。今回の $\mathbb{R}^4$ の場合には 次に示す コーシー問題のシステム版を解かねばならなかった(微分方程式論では 一般のコーシー問題のシステム版は扱いにくいと言われている)。そこだけが $\mathbb{R}^3$ の領域の変分公式を $\mathbb{R}^4$ のそれに拡張した際に 新たに出てきた問題であった。以下において $C_i^\omega(V)$ は V 上の C^ω 級 i-形式の全体を表す。

<u>コーシー問題(システム版)</u>

任意に 次の条件を満たす $\omega \in C_1^\omega(V)$ が与えられたとする:

$$(i)\ \delta\omega = 0 \ \text{ in } V$$

$$(ii)\ \exists\sigma \in C_2^\omega(V)\ s.t. \begin{cases} \delta\sigma & = 0 & \text{in } V \\ \sigma & = d\omega & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

このとき 次の条件を満たす $\tilde{\omega} \in C_1^\omega(V_0)$ $(V \supset {}^\exists V_0 \supset \Sigma)$ が存在する:

$$(1)\ \tilde{\omega} = \omega \ \text{ on } \Sigma, \qquad (2)\ d\tilde{\omega} = d\omega \ \text{ on } \Sigma,$$

$$(3)\ \delta\tilde{\omega} = 0 \ \text{ in } V_0, \qquad (4)\ \Delta\tilde{\omega} = 0 \ \text{ in } V_0.$$

29　　$H^1(T^2)$ の unit ball の extreme point について

中路　貴彦　北海道大学　理学部

D^2 を $\mathbf{C}^2$ の open unit disc、T^2 を D^2 の distinguished boundary かつ m を T^2 上の normalized Lebesgue measure. $1 \leq p \leq \infty$ に対して、$L^p = L^p(T^2, m)$ は Lebesgue space かつ $H^p = H^p(T^2, m)$ は Hardy space を示す。

$h \in H^p$ が outer とは

$$\int_{T^2} \log \mid h \mid dm = \log \mid \int_{T^2} hdm \mid > -\infty$$

のときをいう。$T = T_z$ かつ $T = T_w$ のとき、$T^2 = T \times T$ かつ $m = m_z \times m_w$。ここで m_z と m_w はそれぞれ T_z と T_w 上の normalized Lebesgue measure をあらわす。$E = E_z \subset T_z$ かつ $E = E_w \subset T_w$ とする。h が z-outer for $E = E_w$ とは

$$\int_{T \times E} \log \mid h \mid dm = \int_E (\log \mid \int_T hdm_z \mid) dm_w$$

のときをいう。h が w-outer for $E = E_z$ とは

$$\int_{E \times T} \log \mid h \mid dm = \int_E (\log \mid \int_T hdm_w \mid) dm_z$$

のときをいう。h が z-outer for $E = T_w$ のとき h は単に z-outer かつ h が w-outer for $E = T_z$ のとき h は単に w-outer という。 z-outer かつ w-outer のとき、weakly outer と呼ぶ。

$$\int_{T^2} \log \mid h \mid dm \;\geq\; \int_T (\log \mid \int_T hdm_z \mid) dm_w$$
$$, \quad \int_T (\log \mid \int_T hdm_w \mid) dm_z \geq \log \mid \int_{T^2} hdm \mid$$

より h が outer ならば z-outer かつ w-outer となるので、weakly outer である。

$S = \{f \in H^1 \,;\, \|f\|_1 \leq 1\}$ とする。 薮田氏は $h \in S$ が outer ならば h は S の extreme point であることを注意し、逆は真実では

ないことを示した。その例は $(z+w)/\|z+w\|_1$ であるが、これは S の extreme point であるが、not outer かつ weakly outer である。荷見氏は $h \in S$ が weakly outer ならば h は S の extreme point であることを示した。

$n=1$ のとき Rudin 氏は outer function は S の extreme point であり、また逆も真実であることを示した。

$h \in H^1$ について、$h_j(w) = \int_T h(z,w)\bar{z}^j dm_z (j=0,1,2,\cdots)$ とすると、$h_j \in H^1(T_w)$ となる。$h=(z+2w)/\|z+2w\|_1$ は z-outer であるが、not weakly outer である。$h_1(w)=2w/\|z+2w\|_1$ 、$h_2(w)=1/\|z+2w\|_1$ かつ $h_j(w)\equiv 0$ for $j \geq 3$.

問題 $h \in S$ が S の extreme point ならば h は weakly outer か？ もしそうでないならば S の extreme point を決定せよ。

定理 $h \in S$ かつ $h \not\equiv 0$ とする。

(1) h が z-outer かつ w-outer for E with $m_z(E)>0$ ならば、h は S の extreme point である。

(2) h を z-outer とする。h が S の extreme point である必要十分条件は $\{h_j(w)\}_{j=0}^{\infty}$ の共通の inner divisor は定数である。

$H_z^p=\{f \in L^p\ ;\ \hat{f}(\ell,n)=0 \quad (\ell<0)\}$ かつ $H_w^p=\{f \in L^p\ ;\ \hat{f}(\ell,n)=0 \quad (n<0)\}$ とする。$F \in H_z^p$ かつ $F \in H_w^p$ なら $F \in H^p$ というのは定義からすぐわかるが、定理の (1) の証明には次の補題が本質的である。定理の (2) の証明には一変数の結果と Hartogs の定理を用いる。

補題 $F \in H_z^p$ かつ $\chi_{E\times T}F \in H_w^p$ とする。もし $m_z(E)>0$ なら $F \in H^p$ となる。

講演の内容と不変部分空間の multiplier と Szegő の定理については、「An outer function and several important functions in two variables」として Archiv der Math. に発表予定である。

※番号 30 題 On the stability of pseudoconvexity for certain covering spaces

氏名 大沢健夫 所属 名大多元数理

リーマン面の理論においては、面上の点を表示するパラメータとして、普遍被覆面上の座標を用いると都合の好いことが多い。リーマン面の解析族においても、アールフォース、ベアスの理論や、最近の木塚の仕事[K]において普遍被覆面上のパラメータが有効に用いられている。このように、解析族に関する話を一旦被覆空間に上げた時に遭遇する一つの一般的問題は、それが擬凸多様体かどうかということである。ロバン定数など、重要な等角不変量の連続性が、そもそも擬凸性によって始めて保証されるからである。

昨年春の学会では、単位円板上のコンパクトリーマン面の解析族の被覆空間の正則凸性が、普遍被覆空間についてだけでなく、任意の被覆空間に対して言える性質であることを報告した。

ここではそれをさらに進めて、リーマン面の退化族について分った被覆空間の一つの性質について報告する。

T を可縮な複素解析空間、$\pi : X \to T$ を上への固有正則射とし、$t \in T$, $U \subset T$ に対し、$X_t = \pi^{-1}(t)$, $X_U = \pi^{-1}(U)$ とおく。また $\varpi : \tilde{X} \to X$ を被覆写像、$\tilde{X}_t = \varpi^{-1}(X_t)$, $\tilde{X}_U = \varpi^{-1}(X_U)$ とおく。

定理 点 $t_0 \in T$ に対し、$\dim X_{t_0} = 1$ かつ $\tilde{X}_{t_0}$ が正則凸であるとせよ。このときある近傍 $U \ni t_0$ が存在して $\tilde{X}_U$ は正則凸になる。

証明には [O] で用いた n-convex exhaustion function の構成法が役に立つ。

参考文献

[K] Kizuka, T., On the movement of the Poincaré metric with the pseudoconvex deformation of open Riemann surfaces, Ann. Acad. Sc. Fennicae 20 (1995), 327-331.

[O] Completeness of noncompact analytic spaces, Publ. RIMS Kyoto Univ. 20 (1984), 683-692.

特別講演

A NEW APPROACH TO HODGE THEORY ON STRONGLY PSEUDO–CONVEX DOMAINS

TAKAO AKAHORI

Department of Mathematics, Himeji Institute of Technology

Let N be an n-dimensional complex manifold. Let Ω be a strongly pseudo convex domain with smooth boundary $M = b\Omega$. The purpose of this work is to study Hodge structure over Ω, moreover over the isolated singularity, determined by its stein factorization, and also to study the relation of Dolbeault cohomology group $H^{p,q}(\Omega)$ and Kohn-Rossi cohomology group $H^{p,q}(b\Omega)$.

Hodge structure over strongly pseudo convex domains was already studied by several authors, namely, Fujiki([F]), Ohsawa([O]), Ohsawa-Takegoshi([O-T]). In order to explain my approach, we recall Ohsawa's approach.

Ohsawa's approach. Assume that Ω is strongly pseudo convex domain with complete Kaehler metric. (Of course, if Ω is strongly pseudo convex domain with Kaehler metric, Ω admits a complete Kaehler metric. Actually, Ohsawa's method is applicable to more general domains, and in order to make the situation clear, we dare to express like the above.) Then, over Ω, we have the following two facts.

Fact 1(our metric is Kaehler).

$$\begin{aligned} 2(\overline{\partial}\delta'' + \delta''\overline{\partial}) &= d\delta + \delta d, \\ 2(\partial\delta' + \delta'\partial) &= d\delta + \delta d, \end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

where δ'' means the formal adjoint operator of $\overline{\partial}$ with respect to the above Kaehler metric, δ' (resp. δ)means the the formal adjoint operator of ∂(resp. d) with respect to the above Kaehler metric.

Fact 2(our metric is complete). If $u, \delta'' u \in L^2$, then

$$u \in Dom\ \overline{\partial}^* \ and\ \overline{\partial}^* = \delta'' u,$$

and if $v, \delta v \in L^2$, then

$$v \in Dom\ d^* \ and\ d^* v = \delta v,$$

where $\overline{\partial}^*$(resp. d^*) means the hilbert space adjoint operator of $\overline{\partial}$(resp. d). So especially, $\overline{\partial}$-harmonic space becomes

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\overline{\partial}} &= \{ \ u \ ; \ (\overline{\partial}\delta'' + \delta''\overline{\partial})u = 0 \ \} \\ &= \{ \ u \ ; \ \overline{\partial}u = 0, \ \delta'' u = 0 \ \} \\ &= \{ \ u \ ; \ \overline{\partial}u = 0, \ \overline{\partial}^* u = 0 \ \} \end{aligned}$$

and d-harmonic space becomes

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d &= \{ \ u \ ; \ (d\delta + \delta d)u = 0 \ \} \\ &= \{ \ u \ ; \ du = 0, \ \delta u = 0 \ \} \\ &\doteq \{ \ u \ ; \ du = 0, \ d^* u = 0 \ \} \end{aligned}$$

Namely, because our metric is complete, roughly speaking, we can freely use integral by parts and we dont't have to worry about the domain of the hilbert space adjoint operator. Anyway, from **Fact 1** and **Fact 2**, we immediately have

Proposition 1.

$$\begin{aligned} &Ker\ \overline{\partial} \cap Ker\ \overline{\partial}^* \\ &= Ker\ \partial \cap Ker\ \partial^* \\ &= Ker\ d \cap Ker\ d^*. \end{aligned}$$

More precisely, for any degree k, we have the following decomposition of the harmonic space.

$$\mathbf{H}_d^k = \sum_{p+q=k} \mathbf{H}_{\overline{\partial}}^{p,q},$$

where

$$\mathbf{H}_d^k = \{ u \, ; \, u \in L^2, \, du = 0, \, \delta u = 0 \}$$
$$\mathbf{H}_{\overline{\partial}}^{p,q} = \{ v \, ; \, v \in L^2, \, \overline{\partial} v = 0, \, \delta'' v = 0 \}.$$

This part is a well known part, for example, see [A-V]. What Ohsawa proved is that : if $k = p + q \geq n + 1$, then

$$H_d^k(\Omega, C) \simeq \mathbf{H}_d^k$$
$$H_{\overline{\partial}}^{p,q}(\Omega) \simeq \mathbf{H}_{\overline{\partial}}^{p,q},$$

where $H_d^k(\Omega, C)$ means the C^∞ De Rham cohomology and $H_{\overline{\partial}}^{p,q}(\Omega)$ means the C^∞ Dolbeault cohomology. Therefore

$$H_d^k(\Omega, C) \simeq \sum_{p+q=k, p\geq 0, q\geq 0} H_{\overline{\partial}}^{p,q}(\Omega).$$

We note that this isomorphism map is through Proposition 1 and obviously for any u in $\mathbf{H}_{\overline{\partial}}^{p,q}$, the restricition map to the boundary $b\Omega$, doesn't make sense(we use the complete metric). So if we follow the Ohsawa's approach, we lose several information over the boundary, and also ruin our CR-geometry, or contact geometry, which has been successfully developed. Instead of the complete metric, we would like to use the Kaehler metric. While, we recall the Kohn's $\overline{\partial}$ - theory. We start with $\Gamma(\overline{\Omega}, \wedge^p(T'N)^* \wedge \wedge^q(T'')^*)$, C^∞-(p,q) forms across the boundary and Kohn's $\overline{\partial}$ - operator is defined on this space. The serious problem occurs if we consider the hilbert space adjoint operator of this $\overline{\partial}$. Namely, for $u \in \Gamma(\overline{\Omega}, \wedge^p(T'N)^* \wedge \wedge^q(T''N)^*)$, $u \in Dom\ \overline{\partial}^*$ if and only if $\sigma(\delta'', dr)u = 0$ *on* $b\Omega$, where r is the defining function of the boundary. And as for ∂, $u \in Dom\ \partial^*$ if and only if $\sigma(\delta', dr)u = 0$ *on* $b\Omega$. Obviously, these condition are diferent. So, we can't expect Proposition 1 type theory if we follow Kohn's $\overline{\partial}$ theory. So this approach also completely breaks down. Now we breifly sketch our new approach.

Assume that N is a Kaehler manifold with complex dimension n and Ω is a relative compact strongly pseudo convex subdomain with smooth boundary $M = b\Omega$. We take a (1,0) type C^∞ vector field η, defined over a neighborhood of $b\Omega$, satisfying;

$$\eta r \neq 0 \ on \ b\Omega,$$

where r is the defining function of $b\Omega$ in N. And we set a C^∞ vector bundle decomposition

$$C \otimes TN = C\eta + {}^0T' + C\overline{\eta} + {}^0T'', \ on \ a \ neighborhood \ of \ b\Omega \ in \ N,$$

where ${}^0T'$ means $\overline{{}^0T''}$ and ${}^0T'' = \{\ X\ ; X\ \in\ T''N,\ Xr = 0\ \}$. These bundle make sense as a vector bundle on a neighborhood of $b\Omega$. And $C\eta$(resp. $C\overline{\eta}$) means the line bundle generated by η(resp. $\overline{\eta}$). Now we take the Kaehler metric on N, and we assume that our η is orthonormal to ${}^0T' +{}^0 T''$ at the boundary(this is possible if we change η). Now by using the above decomposition, we set a C^∞ decomposition

(1)

$$\begin{aligned}\wedge^p(T'N)^* \wedge \wedge^q(T''N)^* =&(C\eta)^* \wedge \wedge^{p-1}({}^0T')^* \wedge \wedge^q({}^0T'')^* \\ &+(C\eta)^* \wedge \wedge^{p-1}({}^0T')^* \wedge (C\overline{\eta})^* \wedge \wedge^{q-1}({}^0T'')^* \\ &+ \wedge^p\,({}^0T')^* \wedge \wedge^q({}^0T'')^* \\ &+ \wedge^p\,({}^0T')^* \wedge (C\overline{\eta})^* \wedge \wedge^{q-1}({}^0T'')^*\end{aligned}$$

over a neighborhood of $b\Omega$.

According to this decomposition, we set

$$u \ = \ u_1 \ + \ u_2 \ + u_3 \ + \ u_4,$$

where u_1 means the first part of u according to the decomposition (1), and u_2, u_3, u_4 means the second part, the third part and the fourth part, respectively. Now we set a function space

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{p,q} \;=\; \{\, u \;:\; u \;\in\; A^{p,q}(\overline{\Omega}),\; & u_3 = 0 \; on \; b\Omega \\ & (\overline{\partial} u)_3 = 0 \; on \; b\Omega \\ & (\partial u)_3 = \; 0 \; on \; b\Omega \\ & (\partial\overline{\partial} u)_3 = 0 \; on \; b\Omega \;\}\end{aligned}$$

Here $A^{p,q}(\overline{\Omega}) = \Gamma(\overline{\Omega}, \wedge^p(T') \wedge \wedge^q(T'')^*)$. Now we set new operators d', d'' by :

$$for\; u \;\in\; \mathcal{F}^{p,q},\; d'u \;=\; \partial u,$$

$$for\; u \;\in\; \mathcal{F}^{p,q},\; d''u \;=\; \overline{\partial} u.$$

We note that the domain which d', d'' are defined, is different from the standard one. We see d', d'' more precisely. For this, we see the condition $(\overline{\partial} u)_3$ on $b\Omega$. By the definition,

$$(\overline{\partial} u)_3 = 0 \; on \; b\Omega$$

if and only if

$$(\overline{\partial} u)(\overline{X}_1, .., \overline{X}_p, Y_1, .., Y_{q+1}) = 0 \; for \; X_i, Y_j \;\in\; {}^0T'' \; on \; b\Omega.$$

Namely, we have

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_j (-1)^{p+j+1} Y_j u(\overline{X}_1, .., \overline{X}_p, Y_1, ., \check{Y}_j, ., Y_{q+1}) \\ &\quad + \sum_{r,j} (-1)^{r+p+j} u([\overline{X}_r, Y_j], \overline{X}_1, ., \check{\overline{X}}_r, ., \overline{X}_p, Y_1, ., \check{Y}_j, ., Y_{q+1}) \\ &\quad + \sum_{r<s} (-1)^{r+s+s+q} u([Y_r, Y_s], \overline{X}_1, .., \overline{X}_p, Y_1, ., \check{Y}_r, ., \check{Y}_s, ., Y_{q+1}) \\ &\quad = 0\end{aligned}$$

As u is in $\mathcal{F}^{p,q}$, $u_3 = 0 \; on \; b\Omega$. So, this becomes

$$L \wedge u_1 = 0 \; on \; b\Omega,$$

where $L = -d\theta$, and θ is defined by;

$$\theta \mid_{{}^0T' + {}^0T''} = 0,$$

and

$$\theta(\zeta) = 1, \; \zeta = \sqrt{-1}((\overline{\eta}r)\eta - (\eta r)\overline{\eta}).$$

Similarly,

$$(\partial u)_3 = 0 \; on \; b\Omega$$

if and only if

$$L \wedge u_4 = 0 \; on \; b\Omega.$$

And if $p + q \geq n - 2$,

$$(\partial\overline{\partial}u)_3 = 0 \; on \; b\Omega$$

if and only if

$$\overline{\eta}u_3 + ... = 0$$

(this condition means that the coeffcient of the normal direction doesn't vanish).

Now we see the L^2 - adjoint of d', d'' with respect to the Kaehler metric. For $v \in A^{p,q}(\overline{\Omega})$,

$$v \; \in \; Dom \; d''^*$$

if and only if

there is a constant c satisfying; $|\, (\overline{\partial}u, v) \,| \leq c\|u\|$ *for any* $u \; \in \; \mathcal{F}^{p,q-1}$.

Then, we have

Theorem 2. If $p + q \geq n - 2$,

$$\begin{aligned} Dom \; d''^* \cap A^{p,q}(\overline{\Omega}) = \{ \; v \; ; \; v \in & A^{p,q}(\overline{\Omega}), \; < \alpha, v_2 >= 0 \; on \; b\Omega \\ & for \; \alpha \; in \; \wedge^{p-1}({}^0T')^* \wedge \wedge^{q-1}({}^0T'')^*, \\ & satisfying : \; L \wedge \alpha = 0 \; on \; b\Omega \; \}. \end{aligned}$$

The proof is just the computation of integral by part. For ∂, by the complete same method, we have

$$\begin{aligned} Dom \; d'^* \cap A^{p,q}(\overline{\Omega}) = \{ \; v \; ; \; v \in & A^{p,q}(\overline{\Omega}), \; < \alpha, v_2 >= 0 \; on \; b\Omega \\ & for \; \alpha \; in \; \wedge^{p-1}({}^0T')^* \wedge \wedge^{q-1}({}^0T'')^*, \\ & satisfying : \; L \wedge \alpha = 0 \; on \; b\Omega \; \}. \end{aligned}$$

Our boundary condition is symmetry! So,
$Dom\ d'' \cap Dom\ d''^* \cap A^{p,q}(\overline{\Omega}) = Dom\ d' \cap Dom\ d'^* \cap A^{p,q}(\overline{\Omega})$. Therefore if we follow our line, we have **Fact2**. In order to establish our Hodge theory, we have to show an a priori estimate for $Dom\ d'' \cap Dom\ d''^* \cap A^{p,q}(\overline{\Omega})$, and also for $Dom\ d' \cap Dom\ d'^* \cap A^{p,q}(\overline{\Omega})$, and the isomorphism of De Rham cohomology group(resp. Dolbeault cohomology group) and our cohomology groups. These are proved by the similar way as in [A2].

REFERENCES

[**A1**] Akahori,T., *Intrinsic formula for Kuranishi's* $\overline{\partial}_b^{\phi}$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **14** (1978), 615-641.

[**A2**] ———, *The new estimate for the subbundles* E_j *and its application to the deformation of the boundaries of strongly pseudo convex domains*, Invent. math. **63** (1981), 311-334.

[**A-V**] Andreotti,A. and Vesentini,E., *Carleman estimates for the Laplace-Beltramin equations on complex manifolds*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **25** (1965), 81-130.

[**K**] Kohn,J.J., *Boundaries of complex manifolds*, Proc. Conference on Complex Manifolds (Minneapolis) Springer-Verlag,New York (1965).

[**K-R**] Kohn,J.J. and Rossi,H., *On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold*, Ann. of Math. **81** (1965), 451-472.

[**O**] Ohsawa,T., *A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q-convex Kaehler manifolds*, Invent. math. **63** (1981), 335-354.

[**O-T**] Ohsawa,T. and Takegoshi,K., *Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains*, Math.Z. **197** (1988), 1-12.

[**T**] Tanaka,N., *A differential geometric study on strongly pseudoconvex manifolds Lectures in Mathematics, Kyoto University, 9, Kinokunia Book-Store Co., Ltd.,1975.*.