45+3
TEX 25+3
TEX 58%

日　本　数　学　会

１９９５年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９５年9月

於　東北大学

函 数 論

9月28日（木） 第 VI 会場

9:00 ～ 12:10

1	松野 高典 (阪大理)	複素射影直線上の三点分岐被覆の正則自己同型群	10
2	藤井 道彦 (横浜市大理) 相馬 輝彦 (東京電機大理工)	Totally geodesic boundaries are dense in the moduli space	15
3	木村 秀幸 (愛知産大造形)	コンパクト リーマン面上の分岐データの実現性について	15
4	栗林　和 (中央大理工) 中條 直勇樹 (中央大理工) 川崎 真澄 (中央大理工)	On the zero-maps and automorphism groups of a compact Riemann surface	15
5	堀内 龍太郎 (同志社大工) 柴 雅和 (広島大工)	* トーラス上のランキン卵	15
6	郷間 知巳 (山口大理)	Ahlfors functions on two-sheeted unlimited covering Riemann surfaces of the unit disk	15
7	諸澤 俊介 (高知大理)	* Subhyperbolic rational functions の Julia sets について	15
8	古沢 治司 (金沢学院大)	Commutators in Kleinian groups	15
9	正岡 弘照 (京都産大理)	擬等角写像と thinness	15
10	志賀 啓成 (東工大理) 松崎 克彦 (東工大理)	Fuchs 群の conformal conjugation と同時一意化定理について	15
11	須川 敏幸 (京大理)	一様完全性を特徴付ける種々の領域定数について	15

函数論特別講演

須川 敏幸 (京大理)　　無限次元 Teichmuller 空間の境界について . . . . .　13:30 ～ 14:30

9月29日（金） 第 VI 会場

10:10 ~ 12:00

12	西本 勝之 (Descartes Press)	* Some properties of N-transformation	10
13	西本 勝之 (Descartes Press)	* Applications of N-transformation and N-fractional calculus to nonhomogeneous Bessel equations	10
14	藤解 和也 (金沢大工) 石崎 克也 (日本工大)	On the complex oscillation of some linear differential equations	15
15	シャミール, マハムトフ (北大理)	* Estimates of spherical derivatives	15
16	田島 慎一 (新潟大工)	シュタルク-ワニヤ共鳴とワイエルシュトラウスのσ-函数, $\wp$-函数	15
17	戸田 暢茂 (名工大)	On the order of solutions of non-homogeneous linear differential equations	15

13:00 ~ 15:45

18	大薮 卓	* 複素平面領域の moduli	2
19	大薮 卓	* Hol($\mathbf{C}^n$) の構造安定性	1
20	大薮 卓	* Spec(D/Γ)	1
21	大薮 卓	* D/Γの Mostow-rigidity	1
22	柴田 敬一 (国際自然科学研)	* Pseudo-harmonic function and Teichmüller map	10
23	加藤 崇雄 (山口大理) 林 実樹廣 (北大理)	Two sheeted disc の有界正則関数による点分離	15
24	斎藤 三郎 (群馬大工)	非線形変換と解析関数；非線形変換におけるノルム不等式	15
25	尾和 重義 (近畿大理工)	Distortion theorems for Ruscheweyh derivatives	15
26	米谷 文男 (京都工繊大工芸)	Rectilinear slit conformal mappings	15
27	水田 義弘 (広島大総合科) 下村 哲 (広島大生物圏科)	ソボレフ関数の連続性について	15
28	中井 三留 (名工大)	ディリクレ有限調和測度の境界連続性	15
29	大津賀 信	2集合の分離曲面族の extremal length について	15
30	二宮 信幸	ポテンシャル論における最小変分の方法	15

函数論特別講演

L. Yang (楊 楽) (中国科学院数学研)	値分布について	16:00 ~ 17:00

9月30日（土） 第VI会場

10:10 ～ 12:00

31	周 棟国 (九大数理) 蘇 継紅 (九大数理) 松田 康雄 (九大数理) 李 玲玲 (九大数理)	* 2四元変数の超正則関数に関する超正則被とその超正則凸性	10
32	周 棟国 (九大数理) 孫 光鎬 (釜山大) 李 暁東 (九大数理) 李 琳 (九大数理)	* 無限次元領域の正則性の岡の原理の成立による特徴付け	10
33	金 起汎 (九大数理) 金 大圭 (九大数理) 李 琳 (九大数理)	* 無限次元の藤田型定理とスペクトラム	10
34	孫 光鎬 (釜山大) 辻 美輝 (九大数理)	* 無限次元の助変数を伴う線形微分方程式の大域的正則解の存在の局所的特徴付け	10
35	金 大圭 (九大数理)	* 正則関数空間への正射影	10
36	李 琳 (九大数理)	* 不完全ガンマ関数と核関数	10
37	松田 康雄 (九大数理)	* 無限次元の正則写像の接続と像空間の弱円板性	10
38	大貝 聖子 (九大数理)	* 無限次元空間に於けるコホモロジー消滅と岡の原理の成立	10

13:30 ～ 15:30

39	上田 哲生 (京大総合人間)	C^2の多項式自己同型の不動点について	15
40	松浦 省三 (福井工大)	セゲー核関数とカラテオドリの maximalteiler 問題	15
41	東川 和夫 (富山大理)	多重複素グリーン関数と被覆写像	15
42	高山 茂晴 (名大多元数理)	On relative base point freeness of adjoint bundle	10
43	厚地 淳 (阪大理)	A defect relation for Gauss maps	10
44	竹腰 見昭 (阪大理)	数値的半正な直線束のコホモロジーについて	15
45	野口 潤次郎 (東工大理)	Second main theorem for $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ with $1 \leq \operatorname{rank} f \leq n$	15

函数論特別講演

山口 博史 (滋賀大教育) 平衡電磁場の作成 16:00 ～ 17:00

1　複素射影直線上の三点分岐被覆の正則自己同型群

松野高典　大阪大学大学院理学研究科

$\pi : X \to P^1, (g(X) \geq 2)$を$P^1$上の三点分岐有限Galois被覆とする。$G_\pi$を$\pi$の被覆変換群、$Aut(X)$を$X$の正則自己同型群、$D_\pi = e_1(0) + e_2(1) + e_3(\infty)$ $(0, 1, \infty \in P^1)$をπの分岐因子とする。以下の結果を得た。

Theorem1.　l, m, nを正の整数とする。　(e_1, e_2, e_3) が、

$(l, 3, 2)(l \geq 7)$、または　$(m, 4, 2)(m \geq 5, m \neq 8)$、または

$(n, 5, 2)(n \geq 4, n \neq 5, 10)$　ならば、$G_\pi = Aut(X)$.

Remark. $(8,4,2)$,$(5,5,2)$のときは、$G_\pi \neq Aut(X)$となる例がある。

$\pi_1(P^1 - \{0, 1, \infty\}) = <\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty | \gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1>$ とする。S_dをd次対称群、$A, B, AB \in S_d$　がそれぞれ　$ord(A) = e_1, ord(B) = e_2, ord(AB) = e_3$ を満たし、A, Bで生成される群$< A, B >$は推移的であるとする。群準同型　$\Phi : \pi_1(P^1 - \{0, 1, \infty\}) \to < A, B >$を　$\Phi(\gamma_0) = A, \Phi(\gamma_1) = B, \Phi(\gamma_\infty) = B^{-1}A^{-1}$ で定義する。$\pi : X \to P^1$を$Ker(\Phi)$に対応する$Galois$被覆とする。

A, Bを具体的にあたえるとコンピュータソフト**GAP**を用いて(e_1, e_2, e_3)型の有限$Galois$被覆の $G_\pi(\cong< A, B >)$が計算できる。

Example1. $A = (7,6,5,4,3,2,1)$, $B = (1,2,3)(4,6,7)$, $AB = (1,4)(5,6)$ のとき$\pi : X \to P^1$は $(7,3,2)$型の有限$Galois$被覆で$Theorem1$と**GAP**より $G_\pi(= Aut(X)) \cong PSL(2, F_7)$ (位数168の単純群)。 $Riemann - Hurwitz$の公式から$g(X) = 3$。

Example2. $A = (7,6,5,4,3,2,1), B = (1,7,8)(2,3,6)(4,9,5)$, $AB = (7,2)(6,4)(5,9)(1,8)$ のとき$(7,3,2)$型で $G_\pi(= Aut(X)) \cong PSL(2, F_8)$ (位数504の単純群)。$g(X) = 7$。

Example3. $A = (11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$, $B = (1,11,12)(2,3,10)(4,5,9)(6,7,8)$, $AB = (1,12)(2,11)(4,10)(6,9)$ のとき$(11,3,2)$型で$G_\pi(= Aut(X)) \cong M_{12}$ (位数95040の単純群)。
$g(X) = 3601$。

最後にG_πが単純群になるための十分条件を与える。

Theorem2. p, q, r $(p > q > r)$を3個の素数とする。$\pi : X \to P^1$を$D_\pi = p(0) + q(1) + r(\infty)$で分岐する有限$Galois$被覆とする。 もし有理関数 $f : P^1 \to P^1$で $deg(f) = p$, fの$Galois\ closure$が πとなる fが存在すれば、 G_πは単純群である。

2 Totally geodesic boundaries are dense in the moduli space

藤井 道彦 横浜市立大 理
相馬 輝彦 東京電機大 理工

$t\ (\geq 1)$ 個の連結成分からなる向き付けられた閉曲面を $F=\Sigma_1\cup\cdots\cup\Sigma_t$ とする。各成分 Σ_i の種数 $g(\Sigma_i)$ は 2 以上とする。F の Riemann 面の moduli 空間を $\mathcal{M}(F)\ (=\mathcal{M}(\Sigma_1)\times\cdots\times\mathcal{M}(\Sigma_t))$ とする。$\mathcal{M}(F)$ の元 S に対応する双曲的閉曲面を $F(S)$ と表すことにする。ここで，次のように $\mathcal{M}(F)$ のある部分集合 $\mathcal{R}(F)$ を定義する。すなわち，$S\in\mathcal{M}(F)$ が $\mathcal{R}(F)$ に属するとは，連結な向き付けられたコンパクトな双曲的3次元多様体 M で，境界 ∂M が全測地的となるものが存在して，$F(S)$ が ∂M と等長になるときにいう。

このとき，次が示せた。

定理 $\mathcal{R}(F)$ は $\mathcal{M}(F)$ 内で dense である。

証明は，まず，$t=2$ かつ $g(\Sigma_1)=g(\Sigma_2)$ となる特別な場合について示すことからはじまる。このとき，circle packingに関するBrooksの定理[B]とThurstonの双曲的Dehn手術定理及びMostowの剛性定理を用いる。次に，この特別な場合について構成される3次元多様体の境界のTeichmüller空間に作用する，ある正則写像を考える。この写像に対して，McMullenによる2つの結果，つまり，Teichmüller空間上作用する正則写像をくり返したときの収束性[M2]とautomorphic formのPoincaré級数の評価[M1]が適用でき，証明は完了する。

参考文献

[B] R. Brooks : Circle packings and co-compact extensions of Kleinian groups, Invent. Math. 86 (1986)

[M1] C. McMullen : Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps, Invent. Math. 97 (1989)

[M2] C. McMullen : Iteration on Teichmüller space, Invent. Math. 99 (1990)

3

コンパクト リーマン面上の分岐データの実現性について

木村　秀幸　　　　　愛産大・造形

Yを種数$g\,(\geq 2)$のコンパクト リーマン面、Aut(Y)をY上の等角自己同型写像(双正則写像)全体の作る群とし、AGをAut(Y)の部分群とする。このとき対(Y,AG)に対して分岐被覆$Y \to Y/AG$が定まる。逆に『分岐被覆$Y \to Y/AG$』から対(Y,AG)は定まるか？という問題が考えられる。

ここでは『分岐被覆$Y \to Y/AG$』に関する情報を(コンパクト リーマン面)Y/AG上のデータとして記述する分岐データというものを定義し、与えれた分岐データを実現するコンパクト リーマン面YとY上の自己同型群AGがいつ存在するかという問題を扱う。

本講演ではこの問題を自己同型群AGが位数pq（p，qは$p>q$および$p \equiv 1 \pmod q$を満たす素数)の非可換群の場合に得た次の結果について報告する。

<u>定理</u>　p，qを$p>q$および$p \equiv 1 \pmod q$を満たす素数とし、$G(p,q)$を位数pq の非可換群とする。Xを種数g_0のコンパクト リーマン面とする。このとき以下の条件を満たす分岐データ$\lambda : X \to R(G(p,q))$を除外すると、$\lambda$から定まる$G(p,q)$の群指標$\mu(\lambda)$が群$G(p,q)$の位数$pq$で割り切れることが分岐データ$\lambda$が分岐被覆により実現されるための必要十分条件である。

$$(a)\ g_0 = 1\ ,\ \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{q}} p_1(i) = \sum_{i=1}^{q-1} p_2(i) = 0$$

$$(b)\ g_0 = 0\ ,\ \sum_{i=1}^{q-1} p_2(i) = 0$$

$$(c)\ g_0 = 0\ ,\ \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{q}} p_1(i) = 0\ ,\ \sum_{i=1}^{q-1} p_2(i) = 2\ ,\ \sum_{i=1}^{q-1} i p_2(i) = q$$

ただし、$p_1(i), p_2(i)$は分岐データλが定める（$G(p,q)$の共役類に対応した）非負の整数。

参考文献

Momose and Nakajima : On tamely Ramified Galois coverings of Algebraic Curves with given Ramification Data, 1990（Preprint）

4 On the zero-maps and automorphism groups of a compact Riemann surface

栗林暲和　中大理工

中條直勇樹・川崎真澄　中大理工

Mを種数$g\,(\geq 0)$のコンパクトRiemann面、$Aut(M)$をMの自己同型群とし、Gを$Aut(M)$の有限部分群とする。$\{C_1,\ldots,C_h\}$をGの非自明な共役類の完全系、s_iをC_i $(1 \leq i \leq h)$の代表元とする。M/Gの種数g_0とMの固定点を自然な射影$\pi: M \to M/G$で写した点の個数$l(s_i)$との組

$$r = [\, g_0\, ;\, l(s_1), \ldots, l(s_h)\,]$$

をGのr-signatureとよぶ。$Aut(M)$がMの正則q-次微分の空間に作用したとき、これによる$Aut(M)$の表現の跡であるLefschetz trace

$$\chi^{(q)} = \sum (-1)^i\, Tr(G \mid H^i(M, \Omega^{\otimes q}))$$

に対し、Chevalley-Weilによる公式：

$$\chi^{(q)} = \left\{ (2q-1)(g_0-1) + q \sum_{i=1}^{h} l(s_i) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sharp s_i}\right) \right\} \cdot reg_G - \sum_{i=1}^{h} l(s_i) \cdot \mu_{s_i}^{\prime(q)}$$

がある。ここで$s \in G$に対し

$$\mu_s^{\prime(q)} = \frac{1}{\sharp s} \sum_{d=0}^{\sharp s - 1} d \cdot Ind_{\langle s \rangle}^{G} \left(\theta_s^{d+q}\right).$$

我々は、この逆について考察する。すなわち、先に抽象有限群Gを与え、Gの非自明な共役類の完全系$\{C_1,\ldots,C_h\}$と対応する量であるGのvirtual r-signature

$$r = [\, g_0\, ;\, l_1, \ldots, l_h\,]$$

を導入する。これは前述のr-signatureを抽象化したものである。これにより、

$$\chi_{[r]}^{(q)} = \left\{ (2q-1)(g_0-1) + q \sum_{i=1}^{h} l_i \cdot \left(1 - \frac{1}{\sharp s_i}\right) \right\} \cdot reg_G - \sum_{i=1}^{h} l_i \cdot \mu_{s_i}^{\prime(q)}$$

を定義して、$\chi_{[r]} = 1_G + \chi_{[r]}^{(1)}$, $\chi_{[r]}(1) = g$とおく。この抽象的な$\chi_{[r]}: G \to \boldsymbol{C}$と指標の理論を用いて、Riemann面の自己同型群を研究することができる。

この講演では、次の二つの条件の同値性を問題にする：

$$\text{(i) } \chi_{[r]} = 0 \ \Leftrightarrow \ \text{(ii) } r \text{ is realizable of genus } 0.$$

ここで $\chi_{[r]} = 0$ を zero-map とよぶ。また一般に、"r is realizable of genus g" とは、種数gのコンパクト Riemann 面Mと埋め込み $\iota : G \to Aut(M)$ とを、g_0 がM/Gの種数で、$l_i\ (1 \le i \le h)$ がMの固定点を自然な射影 $\pi : M \to M/G$ で写した点の個数としての意味をもつようにとれることを示す。我々の問題とする同値性は、hyperelliptic curve の自己同型群の指標を特徴付ける一つの例になっている。また、genus 0 の Riemann 面の自己同型群、すなわち $Aut(\boldsymbol{P})$ の有限部分群が、巡回群・正２面体群・４次交代群・４次対称群・５次交代群に分類されることはよく知られているが、我々の問題とする同値性の証明は、一般の Riemann 面の自己同型群を統一的に研究するために、球面の自己同型のもつ性質を用いず、位数nの抽象有限群Gを先に与え、$\chi_{[r]} = 0$ と仮定したもとに、virtual r-signature により $Aut(\boldsymbol{P})$ の分類が以下のようにできることを主張する：

(1) $\boldsymbol{Z}_n$

(i) in case $n > 2$: $[\,0\,;\ \ldots, \overset{i}{\overset{\smile}{1}}, \ldots, \overset{n-i}{\overset{\smile}{1}}, \ldots\,]$ with $(n,i) = 1$,

(ii) in case $n = 2$: $[\,0\,; 2\,]$.

(2) D_{2m}

(i) in case $m = 2k$: $[\,0\,;\ \ldots, \overset{i}{\overset{\smile}{1}}, \ldots, \overset{k+1}{\overset{\smile}{1}}, \overset{k+2}{\overset{\smile}{1}}\,]$ with $(m,i) = 1,\ 1 \le i \le k$,

(ii) in case $m = 2k+1$: $[\,0\,;\ \ldots, \overset{i}{\overset{\smile}{1}}, \ldots, \overset{k+1}{\overset{\smile}{2}}\,]$ with $(m,i) = 1,\ 1 \le i \le k$.

(3) A_4 : $[\,0\,, 1,1,1\,]$.

(4) S_4 : $[\,0\,; 0,1,1,1\,]$.

(5) A_5 : $[\,0\,; 1,1,1,0\,]$, $[\,0\,; 1,1,0,1\,]$.

5　トーラス上のランキン卵

堀内　龍太郎　　同志社大学工学部
柴　　雅　和　　広島大学工学部

トーラスが Riemann 球面 Σ_y 上 $0, 1, \lambda$ および ∞ の上に分岐点をもつ 2 枚の被覆面として実現されているとする．この面の上に ∞ 上にある点を始点とする Jordan 弧 γ をとる；その終点の Riemann 球面への射影を τ で示す．トーラス上γに沿って，さらに Riemann 球面上にもγの射影 (それもγと書く) に沿って，切り込みを入れて，これら 2 つの Riemann 面を γ に沿って交差状につなぐ．得られた Riemann 面は

$$f(x,y) := y^2+3(u^2-1)v^2xy+\{(2u^3+3u^2-1)v^3-1\}y-x^3-3vx^2=0$$

の形の式で書けることが分かる；

$$4(u^2-1)^3v^6-4(u^3+1)v^3+1=\lambda+\tau, \qquad 4(2u^3+3u^2-1)v^6-4v^3=\lambda\tau,$$

$$\lambda+\tau=-s+t+1, \qquad \lambda\tau=t$$

より，次のような u に関する 9 次方程式が得られる．

$$\left\{\begin{array}{l} u^9t^2-3t^2u^8-4tu^6+4t^2u^6+4u^6ts \\ \qquad\qquad -6tu^5s-6tu^4s+4u^3s^2-4su^3+4tu^3-3s^2u+s^2=0 \end{array}\right.$$

複素平面において光源を $y=\dfrac{1}{1-u^2}$ におき，点 $0,1,\lambda$の陰になる部分 (∞ に伸びる半直線) をカットして得られる領域を X_k $(k=1,2,3)$ とする．方程式 $f(x,y)=0$ の形式的な解である関数

$$x_k(y)=\omega^{k-1}\sqrt[3]{p(y)+\sqrt{q(y)}}+\frac{r(y)}{\omega^{k-1}\sqrt[3]{p(y)+\sqrt{q(y)}}}, \qquad k=1,2,3$$

は方程式 $f(x,y)=0$ を満たし，かつそれぞれ Xk の上で1価である．X_1, X_2, X_3 をうまく貼り合わせて x_k を接続すれば，もとの関数 $x(y)$ が再構築される．実際，関数 p, q の挙動を詳しく見れば，$0, 1, \lambda$ において3つの関係式

$$(\sqrt[3]{p(y)})^2 = \epsilon r(y) \qquad \epsilon = 1,\, \omega,\, \omega^2$$

のうちのどれが成り立つかによって，貼り合わせるべき葉が決められる．

私たちがここで取り扱っている問題は，平面における Joukowski 変換の種数1の場合への拡張を与えている．関数論的には例えば Riemann 面の接続論に属する問題であるが，流体力学的見地からすればトーラス上の Rankine 卵型 (Rankine ovoid) を考察したことになる．実際，トーラス上に3重極流れを1つ考え，これをその流線に沿って Riemann 球面へと拡げれば，新しく得られた Riemann 面は，上の議論における3葉の被覆面に他ならない．Riemann 球面が Rankine 卵型に相当する領域である．これをあらためて2枚の被覆面の上で描いたものこそ，トーラス上の Rankine 卵型である．具体的な場合に数値計算的手法を使って，この卵型を描いてみせることができる．

例．

$$u_3 = -0.6526 - 0.5808i \quad v = 0.6696 - 0.4507i$$

のとき，分岐点は $y = 0, 1, \lambda = \dfrac{3}{4} + i, \quad \tau = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i, \infty$ 上にある．X_2 と X_3 は $y = 0, 1$ で，X_1 と X_2 は $y = \lambda$ で，X_1 と X_3 は $y = \tau$ で交差的に貼り合わされる．$y = 0, 1, \lambda, \tau$ には，互換 $(2\,3), (2\,3), (1\,2), (1\,3)$ が対応する．光源を半直線 $l_\tau(1)$ と $l_\tau(\lambda)$ で囲まれた領域 R へ移動すると，互換は $(2\,3), (2\,3), (2\,3), (1\,3)$ となる．

結局，$0, 1, \lambda, \infty$ で分岐する2枚の Riemann 面の1枚に，Riemann 球を τ, ∞ で分岐するように貼り合わせてできる Riemann 面は，u_2, u_3, u_6 に対応する式で定義される．それらの面は各々領域 R, S, T 内で τ と ∞ を結ぶ曲線に沿って貼り合わせたものである．

R.Horiuchi, M.Shiba : Deformation of a torus by attaching the Riemann sphere, J. Reine Angew. Math., 456 (1994), 135-149.

6

AHLFORS FUNCTIONS ON TWO-SHEETED UNLIMITED COVERING RIEMANN SURFACES OF THE UNIT DISK

郷間知巳　　　　山口大学

1. FINITE TYPE の場合。

finite type の Riemann surface R は genus が g, 境界成分の数が l とする。R の double $\widehat{R}$ は compact Riemann surface であり、その genus を $\widehat{g}$ とすると $\widehat{g} = 2g + l - 1$。このとき f の零点の数を $\deg(f)$ とすると Ahlfors により

$$l \leq \deg(f_a) \leq 2g + l = \widehat{g} + 1 \qquad \forall a \in R$$

であることが知られている。

Theorem. *compact Riemann surface* $y^2 = \prod_{j=1}^{\widehat{g}+1}(x - \alpha_j)(1 - \overline{\alpha_j}x)$ の部分 *Riemann surface* R を $R = \{p \in \widehat{R} : |x(p)| < 1\}$ とする。このとき R 上の各点 a での *Ahlfors function* f_a は次を満たす。

(1) もし $\deg(f_a) < \widehat{g} + 1$ ならば、

$$f_a = \varepsilon \frac{x - x(a)}{1 - \overline{x(a)}x}, \qquad |\varepsilon| = 1$$

であって、$\deg(f_a) = 2$ である。

(2) もし $a \in R$ が *projection map* x の *branch point* (つまり $\widehat{R}$ の *Weierstrass point*) ならば

$$f_a = \varepsilon \frac{y}{\prod_{j=1}^{\widehat{g}+1}(1 - \overline{\alpha_j}x)}, \qquad |\varepsilon| = 1$$

であって、$\deg(f_a) = \widehat{g} + 1$ である。

(3) $\{\deg(f_a) : a \in R\}$ で a が R 上全体を動くときの *Ahlfors function* の *degree* のとる値全体を表すとすると,

$$\{\widehat{g} + 1\} \subset \{\deg(f_a) : a \in R\} \subset \{2, \widehat{g} + 1\}$$

2. FINITE TYPE ではない場合。

$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ を unit disk 内の相異なる点列で unit disk U 内に集積点を持たないものとする。$f(x)$ を unit disk 上 analytic で各 α_j に 1 位の零点を持ち他には零点を持たない function とする。$y^2 = f(x)$ とおく。このとき環 $A(U)[y]$ で定まる Riemann surface を R とする。

Case I. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |\alpha_j|) = \infty$ の場合。

$AB(R) \cong AB(U)$ であり branch point $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ においての Ahlfors function は一意でない。$R' = R \backslash \{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ とおけば、各 $p \in R'$ での Ahlfors function f_p は

$$f_p = \varepsilon \frac{x - x(p)}{1 - \overline{x(p)}x} \qquad |\varepsilon| = 1$$

であって、しかも $\{2\} = \{\deg(f_p) : p \in R'\}$。

Case II. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |\alpha_j|) < \infty$ の場合。

このときは Blaschke product

$$B(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j - x}{1 - \overline{\alpha_j}x} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}$$

は U 上で広義一様収束して、$y^2 = B(x)$ とすれば $AB(R) \cong AB(U)[y]$ である。このとき R の各点で Ahlfors function は存在して一意である。各 q_j における Ahlfors function f_{q_j} は

$$f_{q_j} = \varepsilon y \qquad |\varepsilon| = 1$$

であり、$\deg(f_{q_j}) = \infty$.

7 Subhyperbolic rational functions の Julia sets について

諸澤 俊介　　　　高知大 理

有理関数 R が subhyperbolic であるとは R の各 critical point の軌道が吸引周期に吸引されるかまたは eventually periodic になるときをいう．本講演では有理関数 R は常に subhyperbolic であるとする．R のファトウ集合 $F(R)$ の成分 D が単連結であるとき，その境界 ∂D は局所連結となる．D を R の不変成分とすると R が subhyperbolic であることから D は吸引領域である．

補題1． D を R の単連結不変成分とし，D での R の局所次数を k とする．$S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$，$h(z) = z^k$ とおくとき S^1 から ∂D の上への連続写像 φ で

$$\varphi \circ h(z) = R \circ \varphi(z)$$

をみたすものが存在する．さらに ζ が R の critical point でなければ h は $\varphi^{-1}(\zeta)$ 上で単射であり，ζ が critical point でその重複度が t のときは

$$h : \varphi^{-1}(\zeta) \to \varphi^{-1}(R(\zeta))$$

は高々 $t+1:1$ となる．

補題2． ある N が存在して任意の $\zeta \in \partial D$ に対して $\#\{\varphi^{-1}(\zeta)\} \leq N$ となる．

定理1． R のジュリア集合 $J(R)$ が連結であるとする．このとき $F(R)$ の不変成分 D が $\partial D = J(R)$ をみたせば D は完全不変成分である．

$J(R)$ の点で $F(R)$ のいかなる成分の境界にもないものの集合を $J_0(R)$ とし，R の剰余ジュリア集合と呼ぶ．

定理 2． $J_0(R)=\emptyset$ となる必要十分条件は $F(R)$ が完全不変成分をもつかまたは，ちょうど二つの成分からなるかのいずれかである．

定理 3． D を $F(R)$ の単連結不変成分とする．このとき

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\zeta \in \partial D \mid \zeta \text{ は } R \text{ の周期点}\} \\
A_2 &= \{\zeta \in \partial D \mid \zeta \text{ の軌道は } \partial D \text{ で稠密となる}\} \\
A_3 &= \{\zeta \in \partial D \setminus (\cup_{n\geq 0} R^{-n}(A_1)) \\
&\qquad \mid \zeta \text{ の軌道は } \partial D \text{ で稠密とならない}\}
\end{aligned}$$

とおくと，これらの集合はそれぞれ ∂D 上で稠密となる．

定理 4． $f(z)=z^3-1$ のニュートン関数 $R(z)=\frac{2z^3+1}{3z^2}$ のファトウ集合の各成分の境界は Jordan curve である．

8

Commutators in Kleinian groups

古沢 治司　　　　金沢学院大学

Mは Möbius変換群を表す。$f,g\in M$について，$\beta(f)=tr^2(f)-4$, $\gamma(f,g)=tr([f,g])-2$とする。ここで，$[f,g]=fgf^{-1}g^{-1}$。2つの要素から生成される$\langle f,g\rangle$はMの離散的部分群で，$\gamma(f,g)\neq 0$, $\beta(f)=\beta(g)\neq -4$とするとき$|\gamma(f,g)|\geqq 2-2\cos(\pi/7)$が成り立つかというGehring&Martinの問題は「$\langle f,g\rangle$はMの離散的部分群で，$\gamma(f,g)\neq 0$, $\beta(g)\neq -4$また$|\beta(f)|\leqq 2\{\cos(2\pi/7)+\cos(\pi/7)-1\}$ならば，$|\gamma(f,g)|\geqq 2-2\cos(\pi/7)$である。」という命題が真であれば解決となる。しかし，現在では，次のことが知られている。

定理1。$\langle f,g\rangle$はMの離散的部分群で，$\gamma(f,g)\neq 0$, $\beta(g)\neq -4$
また$|\beta(f)|\leqq 2\{\cos(2\pi/7)+\cos(\pi/7)-1\}$ならば，
$|\gamma(f,g)|\geqq 2-2\cos(\pi/7)$または$|\gamma(f,gfg^{-1})|\geqq 2-2\cos(\pi/7)$。

βは複素数で，$F(z)=z(z-\beta)$とおく。F^nはFのn回の合成，$F^{n+1}(z)=F(F^n(z))$ただし，$F^0=F$とする。Mの要素f,gについて，$g_{n+1}=g_nfg_n^{-1}$とする，ただし$g_0=g$。これからは，$\beta=\beta(f)$, $\gamma=\gamma(f,g)$とする。

定理2。nは0以上の整数とする。$\langle f,g_n\rangle$は$\langle f,g\rangle$の離散的部分群で，
$F^n(\gamma)\neq 0$, $\beta(g)\neq -4$また$|\beta|\leqq 2\{\cos(2\pi/7)+\cos(\pi/7)-1\}$ならば，
$|F^n(\gamma)|\geqq 2-2\cos(\pi/7)$または$|F^{n+1}(\gamma)|\geqq 2-2\cos(\pi/7)$。

9

擬等角写像と THINNESS

正岡弘照　　京都産業大学
理学部

本講演の目的は　$E\subset\mathbb{R}^2$ が　0 で thin であるとき（E が閉集合であるときは　0 が $\mathbb{C}\setminus E$ の Dirichlet 問題の意味での非正則点と同値），E の $\mathbb{R}^2$ 上の擬等角写像 f による像 $f(E)$ が $f(0)$ で thin であるかどうかを述べることである。これに関して，より一般的な次の定理を得た。

__定理1.__ $G\subset\mathbb{R}^2$ を領域とし，$E\subset G$ とし，$f:G\to\mathbb{R}^2$ を quasiregular 写像とする。このとき，次が成立する。

(i) E が $\zeta(\in G)$ で thin であり，$\overline{E}\cap f^{-1}(f(\zeta))=\{\zeta\}$ であるならば，$f(E)$ は $f(\zeta)$ で thin である。

(ii) E が $\zeta(\in G)$ で thin でないならば，$f(E)$ は $f(\zeta)$ で thin でない。

定理1の応用として，次の定理を得る。

定理2. $H(\subset \mathbb{R}^2)$ を上半平面とし, $E\subset H$ とし, $f: H\to H$ を擬等角写像とする。さらに, $\zeta\in\partial H$ に対し, E が ζ を頂角とする H 内の Stolz 領域内にあると仮定する。このとき, E が ζ で minimally thin であれば, $f(E)$ は $f(\zeta)$ で minimally thin である。

更に, $\mathbb{C}-\{0\}$ の Heinz' covering surfaces の調和次元がある条件下で擬等角不変であることが示せる。

10

FUCHS 群の CONFORMAL CONJUGATION と同時一意化定理について

志賀　啓成，松崎　克彦　（東京工業大学　理学部）

本講演では単位円板 Δ 上に作用する第一種Fuchs 群 Γ のある種の安定性について考察する．Γ が有限生成第一種の場合，Δ で定義された Γ-compatible な任意の等角写像 f に対して，その conjugation

$$\Gamma_f = f\Gamma f^{-1}$$

は常に $\Delta_f = f(\Delta)$ を不変成分に持つ Klein 群になる．したがって，その極限集合 $\Lambda(\Gamma_f)$ はその境界 $\partial\Delta_f$ に等しい．つまり，Γ が「第一種」という性質は等角写像による conjugation で保存されると言える．この事実は Ahlfors の有限性定理から容易に示すことが出来るが，その証明においては「Riemann 面 $R = \Delta/\Gamma = \Delta_f/\Gamma_f$ の境界が puncture でしかない」または「Δ/Γ の接続によって基本群が変わってしまう」という性質が本質的な役割を果たす．このような観察から我々は次の結果を得た．

定理 1 Fuchs 群 Γ と Riemann 面 $R = \Delta/\Gamma$ に関して以下は同値;

(1) Γ-compatible な Δ 上の任意の等角写像 f に対して $\Gamma_f = f\Gamma f^{-1}$ は $\Delta_f = f(\Delta)$ を不変成分に持つ Klein 群になる．特に，$\Lambda(\Gamma_f) = \partial\Delta_f$.
(2) f を単位円 Δ から Δ への等角写像で $f\Gamma f^{-1}$ が Fuchs 群になるならば，f は一次変換である．
(3) Riemann 面 R はホモトピー同値な接続（後述）を持たない．
(4) f を単位円 Δ から Δ への等角写像で $\Gamma_f = f\Gamma f^{-1}$ が Fuchs 群になるならば，Γ_f は第一種 Fuchs 群である．
(5) R は disk with D-ideal boundary （後述）を持たない．

ここで，Riemann 面 R のホモトピー同値な接続とは，R を部分領域に持つ Riemann 面 $\tilde{R}$ で恒等写像 $\iota : R \to \tilde{R}$ がホモトピー同値を導くものである．また，Riemann 面 R が disk with D-ideal boundary を持つとは，R の (relatively non-compact) 単連結領域 D で理想境界が N_D に属さないものが存在するときを言う．我々は上記の性質を満たす Fuchs 群，Riemann 面を S-type と呼ぶことにする．

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

さて，ここで次に問題になるのは S-type でなく，かつ第一種 Fuchs 群であるものを構成すること であるが，このような群の例は構成できる（実際には，Sakai[2] で構成されたものと本質的に同じものである．）この例の構成を簡単に述べよう．

【例の構成】 まず，単位円周 $\partial\Delta$ 上に totally disconnected で，かつ N_D に属さない集合 E を用意する．次に単位円 Δ から Δ の中への等角写像 φ で image $\varphi(\Delta)$ が Δ の真部分集合となり，$\varphi(\partial\Delta - E) \subset \partial\Delta$ であるものをとる（このような集合 E と等角写像 φ の存在は知られている．cf. [3]）．そこで，$\varphi(\Delta)$ 内の点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ をその集積点全体が $\partial\Delta$ となるようにとる．そして，$\Delta - \cup_{n=1}^{\infty}\varphi^{-1}(p_n)$ を表す Fuchs 群をとれば，これが第一種で求める群になっている．

次に同時一意化(Simultaneous uniformization)定理の拡張を考える．ここで，二つの Riemann 面 R_1，R_2 が同時一意化可能とは，Klein 群 G とその不変成分 Δ_1，Δ_2 があって，$R_1 = \Delta_1/G$，$R_2 = \Delta_2/G$ が成立するときを言う．よく知られているように擬等角同値な有限型 Riemann 面の pair (R_1, R_2) は常に同時一意化可能である(Bers)．この同時一意化定理を一般の Riemann 面へ拡張する試みが最近 Hamilton[1] によってなされている．しかしながら，その論文では上記の定理 1 の (1) の主張が任意の第一種 Fuchs 群に対して成立すること（すなわち，全ての第一種 Fuchs 群が S-type）を仮定している．したがって，原論文の主張通りに同時一意化が任意の第一種 Fuchs 群で可能かどうかの可否は不明であると言わざるを得ない．ここでは，S-type に属する Riemann 面に対しては同時一意化が可能であることを報告する．

定理 2 R_1，R_2 を S-type の Riemann 面で，向きを逆にする同相写像 $h : R_1 \to R_2$ が存在するものとする．このとき，R_1，R_2 を同時一意化する Klein 群 G が存在する．

先に挙げた Hamilton の議論は S-type の Riemann 面に対しては通用し，それを用いても定理 2 は証明できると思われるが，議論の過程はかなり複雑である．ここで与える証明はもっと簡潔で直接的なものである．

更に，S-type の Fuchs 群の擬等角不変性とエルゴード的性質について言及する．

References

1. D. H. Hamilton, *Simultaneous uniformisation*, J. reine angew. Math. **455** (1994), 105–122.
2. M. Sakai, *Continuations of Riemann surfaces*, Canad. J. Math. **44** (1992), 357–367.
3. L. Sario and K. Oikawa, *Capacity Functions*, Springer, 1969.

11

一様完全性を特徴付ける種々の領域定数について

須川敏幸　　京都大学大学院理学研究科

Riemann 球面$\widehat{\mathbb{C}}$の部分領域 Dで境界が 3 点以上からなるものを考える。するとよく知られているように、上半平面 $\mathbb{H}$ から Dへの解析的普遍被覆写像 fが存在する。この Schwarz 微分 $S_f = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f')^2$の双曲ノルム

$$N_D := \|S_f\|_{\mathbb{H}} = \sup_{z\in\mathbb{H}}(2\mathrm{Im}z)^2|S_f(z)|$$

がどのような時に有限になるだろうか？（N_Dは fの選び方によらず、Dのみにより定まる。）　これについては、Pommerenke [P1],[P2]により様々な幾何学的考察が行われており、N_Dが有限であるような領域に様々な特徴付けが見いだされ、単連結領域に近い性質を持つことなどが知られている。このような領域のことを（Minda の用法に従って）一様完全領域と呼ぶことにしよう。　ここでは、関連する領域定数の相互の関係を論じていきたい。まず次のように記号を定める。

$$\sigma_D := f \text{ の単射半径 } = \sup\{a \geq 0;\ \text{任意の半径 } a \text{ の双曲円板上で } f \text{は単射}\}$$

$$M_D = \sup_{A\in\mathcal{A}_D} \mod A, \quad \widetilde{M}_D = \sup_{R\in\widetilde{\mathcal{A}}_D} \mod R$$

ただし、ここに $\mathcal{A}_D, \widetilde{\mathcal{A}}_D$は Dの境界を分離するような D内の (round) annulus の全体、ring domain の全体をそれぞれ表すとする。また、ring domain Rのモジュラス　mod Rは Rが round annulus $\{r_1 < |z-a| < r_2\}$ に等角同値な時 $\log r_2/r_1$により定義されるものとする。

これらについて、次のような評価が得られる。

定理 1(Kra-Maskit, cf.[S]).

Dが単連結でなければ、$2\coth^2\sigma_D \leq N_D \leq 6\coth^2\sigma_D$.

定理 2.

$$\frac{\pi^2}{2\sigma_D}e^{-2\sigma_D} \leq \frac{\pi}{\sigma_D}\arctan\left(\frac{1}{\sinh(2\sigma_D)}\right) \leq \widetilde{M}_D \leq \frac{\pi^2}{2\sigma_D}.$$

$\sigma_D, \widetilde{M}_D$は等角同値であるが（特に$\widetilde{M}_D$は擬等角写像について quasi-invariant であることは特筆に値する）、M_Dについては Möbius 不変ですらない。しかし、次のような評価は成り立つ。

定理 3.

L を $Möbius$ 変換の元とするとき、$\frac{1}{2}M_{L(D)}-\log 4/3 \le M_D$ が成り立つ。さらに $D \subset \mathbb{C}$ かつ $L(D) \subset \mathbb{C}$ の場合には $M_{L(D)} - \log 2 \le M_D$ が成り立つ。

また、M_D と $\widetilde{M}_D$ との関係については $M_D \le \widetilde{M}_D$ は定義から明らかだが、逆向きについても次のような評価が成立する。

定理 4(cf. McMullen [M, Thorem 2.1]).

$D \subset \mathbb{C}$ の場合には $\widetilde{M}_D \le M_D + 5\log 2$

系.

$N_D < \infty \Leftrightarrow \sigma_D > 0 \Leftrightarrow M_D < \infty \Leftrightarrow \widetilde{M}_D < \infty$　特に一様完全領域の擬等角写像による像もまた一様完全である。

他にも関連する領域定数が考えられるが、スペースの都合でここでは省略し、講演中に述べることにしたい。なお、講演では触れられないが、このような一様完全領域の BMO を用いた種々の特徴付けについては後藤氏[G]による興味深い結果があることを付言しておく。

References

[G]. Y. Gotoh, *On holomorphic maps between Riemann surfaces which preserve BMO, Preprint.*

[M]. C. McMullen, "Complex Dynamics and Renormalization," Annals of Mathematical Studies, Princeton, 1994.

[P1]. Ch. Pommerenke, *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*, Arch. Math. **32** (1979), 192–199.

[P2]. Ch. Pommerenke, *On uniformly perfect sets and Fuchsian groups*, Analysis **4** (1984), 299–321.

[S]. T. Sugawa, *A class of norms on the spaces of Schwarzian derivatives and its applications*, Proc. Japan Acad. **69, Ser. A** (1993), 211–216.

特別講演

無限次元 Teichmüller 空間の境界について

須川敏幸　（京大大学院・理学研究科）

§1.　背景および主定理

コンパクトリーマン面（または解析的有限なリーマン面）Rの Teichmüller 空間 $T(R)$ は基本群の生成元を指定した（ marked ）Rと同じ型のリーマン面の等角同値類全体である。$T(R)$ には自然な複素構造が存在することが知られている。この定義をそのままの形で一般のリーマン面にまで拡張しようとすると、リーマン面の境界での情報が失われてしまうため一般には複素構造が入らなくなってしまう。(位相的には意味を持つので、このようなものは reduced Teichmüller space と呼ばれ、これはこれで有用である。例えばRが単位円板だと Riemann の写像定理からこれは 1 点になる。) そこで、境界での情報も込めた別の拡張が考えられ、擬等角写像論を用いるというアイデアとともにそれは成功をおさめ、一般の Teichmüller 空間 $T(R)$ はある複素バナッハ空間の有界領域として実現されることが分かった。これが Bers 埋め込みと呼ばれているものである。この定義では $T(R)$ が有限次元であるための必要十分条件は Rが解析的有限なリーマン面（つまりコンパクト面から有限個の点を除いて得られる面）であることである。

この埋め込みを詳しく述べておこう。Teichmüller 空間 $T(R)$ は Rから他のリーマン面 Sへの擬等角写像 f を Teichmüller 同値で割って得られる空間である。(以後、擬等角写像と言えば、断らない限り、全射であることを仮定する。)　ここに $f : R \to S$と $f' : R \to S'$が Teichmüller 同値であるとは、ある等角写像$\varphi : S' \to S$が存在して $f^{-1} \circ \varphi \circ f'$が id_Rに Rの理想境界∂Rに関して相対ホモトピックであることである。(ここで言う理想境界とは以下に述べるようにフックス群を用いて定義されるものである。)

リーマン面 Rは双曲的、つまり上半平面 $\mathbb{H}$ からの解析的普遍被覆写像$p : \mathbb{H} \to R$が存在すると仮定してよい。p の被覆変換群$\Gamma = \{\gamma \in Aut(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R}); p \circ \gamma = p\}$ とする。(Γは Rのフックス群模型と呼ばれる。)　Γの極限集合を$\Lambda(\Gamma)$ とすると、Γは $\widehat{\mathbb{R}} \setminus \Lambda(\Gamma)$（ここで$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とする）に不連続に作用するが、この作用による商 $(\widehat{\mathbb{R}} \setminus \Lambda(\Gamma))/\Gamma$を Rの理想境界と呼び、しばしば∂Rと書く。$f : R \to S$を擬等角写像とするとき、$q : \mathbb{H} \to S$を解析的普遍被覆写像とすれば、fは擬等角写像$\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ に持ち上がる。$\tilde{f}$は上半平面の境界まで自然に連続拡張出来ることが知られているので（このことから、また、任意の Rの擬等角写像はその理想境界まで連続に拡張出来る、という事実が従うことに注意しておく。これは Teichmüller 同値の定義で必要な事実である)、ここでは qを適当に選んで便宜上$\tilde{f}$が $0, 1, \infty$ を固定するものとしておく。$\tilde{f}$のベルトラミ係数$\mu_f = \tilde{f}_{\bar{z}}/\tilde{f}_z$として、次の $\mathbb{C}$ 上のベルトラミ方程式を解く。

$$w_{\bar{z}} = \begin{cases} \mu_f w_z & \text{on } \mathbb{H} \\ 0 & \text{on } \mathbb{H}^* = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{H}} \end{cases}$$

正規化条件 $w(0)=0, w(1)=1, w(\infty)=\infty$ を満たすこの方程式の解 w で $\widehat{\mathbb{C}}$ の自己同相写像になるものが一意に存在することが知られている。これを $\hat{f}$ と書くことにすれば、作り方から $\hat{f}$ は下半平面 $\mathbb{H}^*$ 上で等角である。ここに次の条件が互いに同値であることが知られている。

(1) $f: R \to S$ と $g: R \to T$ は Teichmüller 同値.

(2) $\tilde{f} = \tilde{g}$ on $\widehat{\mathbb{R}}$.

(3) $\hat{f} = \hat{g}$ on $\widehat{\mathbb{R}}$.

(4) $\hat{f}(\mathbb{H}) = \hat{g}(\mathbb{H})$.

(5) $S_{\hat{f}} = S_{\hat{g}}$ on $\mathbb{H}^*$.

ここに S_f は f の Schwarz 微分 $(f''/f')' - (f''/f')^2$ である。

Nehari-Kraus の定理により、$S_{\hat{f}}$ が $\mathbb{H}^*$ 上の正則函数 φ で $\varphi\circ\gamma\cdot(\gamma')^2=\varphi \quad (\forall\gamma \in \Gamma)$ を満たし、有界な双曲ノルム $\|\varphi\|_{\mathbf{H}^*} = \sup_{z\in\mathbf{H}^*}(-\mathrm{Im}z)^2|\varphi(z)| < \infty$ を持つものの全体からなる複素バナッハ空間 $B_2(\mathbb{H}^*,\Gamma)$ の元であることが分かる。従って、写像 $f \mapsto S_{\hat{f}|_{\mathbf{H}^*}}$ を考えるとこれが実は $T(R)$ から $B_2(\mathbb{H}^*,\Gamma)$ への単射な連続写像となっており、しかもその像が有界領域であることが分かる。従って、以下では Teichmüller 空間はこのようにして埋め込まれたものとして考えることにする。また、しばしば $T(R)$ の代わりに $T(\Gamma)$ とも書く。(単位円板=上半平面の Teichmüller 空間を普遍 Teichmüller 空間と呼び、これを $T(1)$ と書くが、実は $T(\Gamma)=T(1)\cap B_2(\mathbb{H}^*,\Gamma)$ であることがラムダレンマの群の作用付きバージョンまたは Douady-Earle 拡張から分かる。従って、$T(\Gamma)$ はまた Bers slice と呼ばれることもある。)

この埋め込みについては特に $T(R)$ が有限次元の場合には Teichmüller 空間のコンパクト化や有限次元クライン群の変形空間を考える上でも重要で、多くの研究がされてきているが、まだよく分かっているとは言えない。例えば、$T(R)$ が 1 次元の場合ですら、埋め込まれた領域の境界がどの程度の“滑らかさ”を持つかは分かっていない。(McMullen によって 1 次元の場合にジョルダン領域であることは示されたそうだが、まだ論文の形では出ていないようである。) ただ、数値実験などによるとかなり irregular なようで、1 次元の場合は境界が$\frac{1}{2}$-Hölder ではないか?という予想もある。形を見てみると、1 次元複素力学系で現れるある種のジュリア集合とよく似ているという話もある。

もっとも、Sullivan の辞書と呼ばれる Teichmüller 空間論と 1 次元複素力学系との類似で考えれば、この Teichmüller 空間の Bers 埋め込みは、複素力学系での Mandelbrot 集合に対応すると思われ、境界が irregular なことはある程度予想されることではある。

さて、普遍 Teichmüller 空間 $T(1)$ は次のように書き表すことも出来る。つまり、

$$\begin{aligned} T(1) &= \{\varphi \mid \exists f:\mathbb{H}^* \to \widehat{\mathbb{C}}:\ \text{正則函数 s.t. } S_f=\varphi \text{ で } \widehat{\mathbb{C}} \text{ の擬等角写像に拡張出来る}\ \} \\ &= \{\varphi = S_f \mid f \text{ は単葉函数かつ } f(\mathbb{H}^*) \text{ は擬円板 (quasi-disk)}\ \} \end{aligned}$$

である。これより、普遍 Teichmüller 空間は擬円板 (の Möbius 共役類) 全体をパラメトライズする空間であると見なせる。従って、次のような (非自明な) 単連結領域全体、

およびジョルダン領域全体に対応する空間というものが自然に考えられる。

$$S(1) = \{\varphi = S_f | f \text{ は単葉函数 }\}$$
$$J(1) = \{\varphi = S_f | f \text{ は単葉函数かつ } f(\mathbb{H}^*) \text{ はジョルダン領域 }\}$$

さらに、Bers slice と同様にしてフックス群Γに対して $S(\Gamma) = S(1) \cap B_2(\mathbb{H}^*, \Gamma)$, $J(\Gamma) = J(1) \cap B_2(\mathbb{H}^*, \Gamma)$ と定義する。 容易に分かるように $S(\Gamma)$ は有界閉集合であり、$S(\Gamma) \supset J(\Gamma) \supset T(\Gamma)$ が成り立つ。

$R = \mathbb{H}/\Gamma$が解析的有限なリーマン面、より一般にΓが cofinite 、つまり第1種有限生成フックス群の場合に $S(\Gamma) = \overline{T(\Gamma)}$が成り立つという主張は、全ての b-group が Teichmüller 空間の境界に現れるであろう、という有名な Bers 予想と同値であるが、これについては数多くの研究がなされているにもかかわらず、今もって未解決な問題である。

しかし、少なくとも$\Gamma = 1$ の場合には $S(1) \neq \overline{T(1)}$であることが既に Gehring [G2] により示されている。さらに、Flinn [F] は $S(1) \neq \overline{J(1)}$かつ $J(1) \setminus \overline{T(1)} \neq \emptyset$ であることを考察している。一般のジョルダン領域が擬円板により Bers 位相で近似出来ないというのは驚くべきことであるが（つまり、この収束は一様収束位相よりもうんと強い）、これはこの位相が面の境界に対しても非常に強い制約を与えていることの反映であるとも考えられる。実際、Thurston [Th] は $S(1)$ が孤立点を持っているという驚異的な事実を証明した。

これらの類似がどの程度一般のフックス群Γについても成り立つか？というのが問題になるが、これについては筆者が[Sug1]において任意の第2種フックス群（すなわち、$\Lambda(\Gamma) \neq \widehat{\mathbb{R}}$であるフックス群）に対しても同様に$S(\Gamma) \setminus \overline{J(\Gamma)} \neq \emptyset$ かつ $J(\Gamma) \setminus \overline{T(\Gamma)} \neq \emptyset$ であることを示した。 第1種の場合にはどうか？ということが次に問題になるが、これについてもある種の無限生成第1種フックス群について同様の結果が成り立つような例が松崎氏 [M]により構成された。

では、一般のフックス群については $S(\Gamma)$ と $T(\Gamma)$ とはあまり関係がないのか？と言えば必ずしもそうではない。Gehring [G1]により少なくとも $\mathrm{Int}S(1) = T(1)$ であることが示されている。(ここで、記号 Int は、バナッハ空間 B_2における内部 (interior) を表す。) さらには、Žuravlev [Z] により任意のフックス群Γについて$T(\Gamma)$ が$\mathrm{Int}S(\Gamma)$ の 0 を含む連結成分に一致することが証明されている。

従って、今度は$\mathrm{Int}S(\Gamma)$ が Mandelbrot 集合のようにいくつも“子供”を持っているようなことがあるか？ということが問題になる。これについては、志賀氏 [S] により cofinite なフックス群についてはやはり $\mathrm{Int}S(\Gamma) = T(\Gamma)$ が成り立つことが示されている。これは上記の Bers 予想をサポートする結果であり非常に興味深い。

一般に任意のフックス群についても $\mathrm{Int}S(\Gamma) = T(\Gamma)$ であると予想される。しばらくはこの問題については進展がなかったようであるが、このたび筆者により特殊な場合については無限次元 Teichmüller 空間でもこの予想が正しいことが示された。以下では、この証明の概略を紹介させて頂く予定である。

主定理 ([Sug4]).

有限生成第2種フックス群Γが純双曲的であるとき、すなわち$R = \mathbb{H}/\Gamma$が種数gのコンパクトリーマン面から互いに交わらないm個の位相的閉円板を取り除いた面であるとき（また、このような面を$(g, 0, m)$-型であると言う）、$\mathrm{Int}S(\Gamma) = T(\Gamma)$が成立する。

この定理の系としてある積分作用素に関する興味深い結果が得られる。まず、その積分作用素を定義する。平面内の3点以上からなる閉集合Eに$\text{Möb} = PSL(2, \mathbb{C})$の部分群$G$が作用しているとし、$L^\infty(E, G) = \{\nu \in L^\infty(E) | \nu \circ g \cdot \overline{g'}/g' = \nu\}$とおく。この時、有界線型作用素$P : L^\infty(E, G) \to B_2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus E, G)$を次のように定義する。

$$P[\nu](z) = -\frac{6}{\pi} \iint_E \frac{\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\xi d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta)$$

ここに、$B_2(\widehat{\mathbb{C}} \setminus E, G)$は$B_2(\mathbb{H}^*, \Gamma)$と同様にして定義される複素バナッハ空間で、ノルムは$\|\varphi\|_D = \sup(\lambda(z))^{-2} |\varphi(z)|$によって定義される。ただし、$\lambda(z)|dz|$は$D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$のポアンカレ計量とする。

系

双曲的単連結平面領域Dに（有限生成）Schottky 群Gが作用しているとし、その補集合をEとする。この時、次の3条件は互いに同値である。

(1) $P : L^\infty(E, G) \to B_2(D, G)$ **は全射.**

(2) $P : L^\infty(E, 1) \to B_2(D, 1)$ **は全射.**

(3) D**は擬円板.**

実はPというのはBers射影と呼ばれる正則写像の原点での微分写像になっている。従って、(2) $\Leftrightarrow$ (3) はAhlfors, Gehringの結果を用いれば容易に分かる。(3) $\Rightarrow$ (1) も同様に容易に分かるが、今回の結果から、(1) のような、より弱い条件から (2) または (3) のような強い条件が従うことが分かるというのが興味深いところである。

系の証明については詳しくは[Sug4]を見て頂きたい。

上述のように、$\mathrm{Int}S(\Gamma)$を考える限りにおいては、Mandelbrot集合のようにたくさん"子供"を持っているようには思えないのだが、実はもっと広く次のような集合

$$\begin{aligned} K(\Gamma) = \{\varphi = S_f | \exists \text{ a homomorphism } \chi : \Gamma \to \text{Möb} \\ \text{s.t. } f \circ \gamma = \chi(\gamma) \circ f \quad \forall \gamma \in \Gamma \text{ かつ} \chi(\Gamma) \text{ はクライン群 } \} \end{aligned}$$

を考えると、実はΓがcofiniteの時$\mathrm{Int}K(\Gamma)$の0を含む連結成分がやはり$T(\Gamma)$と一致していることが分かり、しかもこの時は$T(\Gamma)$以外にもたくさん"子供"、つまり連結成分を持っていることが志賀、Maskitらにより指摘されていた。この集合については、志賀氏、谷川氏により最近詳しく研究され、構造が明らかにされつつある。

フックス群Γが第2種の場合には、$T(\Gamma)$の点列が$T(\Gamma)$の境界に近づいて行っても、面の境界が潰れるだけで、群そのものは潰れていかない可能性もあるので、必ずしも$\mathrm{Int}K(\Gamma)$の0-componentが$T(\Gamma)$と一致しないものと思われる。

以上述べたように、Bers による位相を考えると面の変形空間としては境界に非常に強い束縛条件がつくため、その境界では様々な奇妙な現象が現れることが分かる。一方、最近谷口氏 [Ta]は双曲ノルムの代わりに Bloch ノルムを考えることにより、広義一様収束の位相よりも強いが、Bers 位相よりは格段に弱い位相を $T(1)$ に与え、境界での様子を考察している。この位相についても、今後の研究が待たれるところである。

§2. 主定理の証明の概略

この証明の基本的なアイデアは Gehring [G1]の方法に基づいている。$\varphi = S_f \in \mathrm{Int}S(\Gamma)$ としたときに、$D = f(\mathbb{H}^*)$ とおけばもちろん Dは双曲的単連結領域になっているわけだが、本質的にはこれが擬円板であることが証明できればよい。そこで、まずもともとの Gehring のアイデアについて振り返っておこう。

有界な双曲的単連結領域 Dが擬円板であることを言うにはある定数 $A \geq 1$ が存在して、次の 2 つの性質が言えれば良いことが知られている。(例えば、[G1], [P]を見よ。)

(L) 任意の円板Δに対し、どんな 2 点 $z_1, z_2 \in D \cap \Delta$ も $D \cap \Delta_A$内の曲線で結べる。

(J) 任意の円板Δに対し、どんな 2 点 $z_1, z_2 \in D \setminus \Delta_A$ も $D \setminus \Delta$内の曲線で結べる。

ただし、ここに$\Delta = \{|z-a| < r\}$ であるとき、Δ_Aは$\Delta_A = \{|z-a| < Ar\}$ によって定義されるものとする。

(L) を満たす有界領域は linearly connected な領域、(J) を満たす有界領域は John 領域と呼ばれている。領域 Dを地球$\widehat{\mathbb{C}}$上に浮かぶ“大陸”に見立てると、大雑把に言えば、条件 (L) はこの大陸がそれほど深く入り組んだ湾を持たないことを意味し、また条件 (J) はこの大陸が細くくびれた半島を持たないことを意味する。

Gehring のアイデアは、もし大陸が深い湾を持っていたとしたら、湾の入り口を少しのエネルギーで閉めてしまうことができ、また細くくびれた半島を持っていたらそのくびれた部分を引っ張り延ばしてやはり少しのエネルギーで海の向こうにある対岸にひっつけることができるが (従ってともに単葉でない函数が得られる)、それを具体的に対数函数などを用いて構成したことにある。“少しのエネルギーで”というのは、この場合十分小さいノルムの Schwarz 微分を持つような函数 h で、という意味である。

一般の場合には、$G = f\Gamma f^{-1} < \mathrm{M\ddot{o}b}$ とするとき、Dの境界を$\partial_1 D = \Lambda(G)$ と $\partial_2 D = \partial D \setminus \Lambda(G)$ とに分解し、まずは$\partial_2 D$の各連結成分が線分の擬等角像になっている、ということを証明する。このとき、上記と同じ方法によりこのことを示すのであるが、変形を与える函数 h としては G-同変であるものを構成する必要がある。そのためには、局所的に上記のような変形を与える函数を構成し、それを G でばらまいて貼り合わせる。もちろん、このような写像 h はもはや解析的とはならないが、擬解析的写像 (つまり擬等角写像の定義で単射性を局所単射性に緩めたようなもの) にはできる。さらに、注意深く構成することにより、h^{-1}のベルトラミ微分μが逆写像の分枝の取り方によらないように、h を構成することができて、従って h の代わりに $h' = w^\mu \circ h$ (ここに w^μはμを $h(D)$ 以外では 0 に拡張してベルトラミ方程式を解いて得られた擬等角な解) を考えると、h'は

その構成法から解析的になっている。(実は、この"注意深く"というのが非常に微妙で、最も苦労した部分のうちの1つである。)

あとは、このように構成したh'の"エネルギー"が少ない、ということを示さなければいけない。つまり、$\|S_{h'}\|_D$が十分小さいことを示す必要があるのだが、h'のSchwarz微分の値を具体的に求めるのは、その構成の仕方から不可能に近い。(擬等角写像については、もはやそのSchwarz微分を定義することは不可能であろう。) しかしながら、そのノルムについては次のような方法で評価することができ、この方法を用いることを思いついたのが今回の結果を導く際の突破口となった。

補題 (cf. [AG], [Sug3])

$D \subset \mathbb{C}$を双曲的単連結領域とする。$A \geq 1, 0 \leq k < 1$を定数とし、$f: D \to \widehat{\mathbb{C}}$を局所単葉有理型函数とする。

$\Delta_A \subset D$を満たす任意の円板Δに対し、$f|_\Delta$が$\widehat{\mathbb{C}}$上のk-擬等角写像に拡張されるならば、実は$\|S_f\|_D \leq 96kA^2$である。

逆に、$\|S_f\|_D \leq 2kA^2$であれば、任意の$\Delta_A \subset D$を満たす円板Δに対し$f|_\Delta$は$\widehat{\mathbb{C}}$上のk-擬等角写像に拡張できる。

ただし、ここでfがk-擬等角であるとは、fのベルトラミ微分μが$\|\mu\|_\infty \leq k$を満たすことである。

実は、ここまでは任意の第2種フックス群Γに対して成り立つ話であった。しかし、$\Lambda(G)$まで含めて∂Dが円周の擬等角像になっているかどうかは、またさらに考察を要し、何とかクリアできたのが今回のようにΓがSchottky群になっている場合、すなわち有限生成純双曲的の場合のみなのである。

筆者の方法では何が本質的に必要なのか述べるために、上で述べてきたことを少し言い換えておこう。Γを任意の第2種フックス群とし、$G = f\Gamma f^{-1}$は上述の通りとする。するとRの鏡像$R^* := \mathbb{H}^*/\Gamma \cong D/G =: S^*$は自然に(連結とは限らない)リーマン面$\widetilde{S} = (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G))/G$の中に埋め込まれるが、この中での相対境界が(詳しくは述べられないが、ある条件の下で)互いに交わらない擬解析曲線(つまり、円周の近傍で定義された擬等角写像による像)であることが分かる。

しかし、ここでΓが有限生成純双曲的な、つまりRが$(g, 0, m)$-型リーマン面($m \geq 1$)の場合に限定すると、このような状況は非常に簡単な場合しか起こっていないことが見えてくる。実際、まずMaskitのSchottky群の特徴付け定理によりGもまたΓと同じ型のSchottky群であることが分かり、従って$\widetilde{S}$もまたRのダブル$\widetilde{R} = (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(\Gamma))/\Gamma$と同じタイプのリーマン面であることが分かる。また、R^*の相対境界もm個の互いに交わらない擬解析曲線からなることも分かる。このことから特に、等角写像$f: \mathbb{H}^* \to D$を下に落として得られる等角写像$F: R^* \to S^* = D/G$は境界にまで同相に拡張できることが分かる。(Carathéodryの定理)

さらに、ホモロジー群の計算により埋め込み$S^* \to \widetilde{S}$もまた、Rのダブルと同じであることが分かる。すなわち、等角写像$F: R^* \to S^*$は同相写像$\widetilde{F}: \widetilde{R} \to \widetilde{S}$に拡張できることが分かる。(実際には、境界が擬解析的なので、擬等角写像に選ぶことができる。)

これを再び$\widetilde{f}: \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(\Gamma) \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G)$に持ち上げることができれば、極限集合$\Lambda$は

ともに全不連結（totally disconnected）であり一方は直線上に乗っているので擬等角的に除去可能である。従って、$D = f(\mathbb{H}^*)$ は擬円板であることが証明される。

ここで、実際に$\tilde{F}$が持ち上がるかどうかであるが、うまく Fの拡張$\tilde{F}$を取ってやれば、持ち上げることができるのである。これについては、具体的に被覆の様子を注意深く観察する必要があり、残念ながらこの紙面では述べきることはできないので、興味のある読者は[Sug4]の 6 節を見て頂きたい。

この部分は、それ自身興味深い位相的結果であるので、命題として最後に述べておくことにしよう。

命題 ([Sug4])

G を階数 Nの Schottky 群とし、$p : \Omega(G) \to R := \Omega(G)/G$ を自然な射影とする。（ここに$\Omega(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G)$.）また、$R_0$を Rの部分領域で $D = p^{-1}(R_0)$ が単連結領域となるようなものとし、さらに∂R_0は有限個の互いに交わらない単純閉曲線からなっていると仮定する。

$f : \mathbb{H} \to D$をリーマン写像として、Γをフックス群 $f^{-1}Gf$ とし、同型写像$\chi : \Gamma \to G$ を関係式 $\chi(\gamma) \circ f = f \circ \gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma$により定める。

このとき、fは$\chi(\gamma) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ \gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma$を満たす$\hat{\mathbb{C}}$の同相写像$\tilde{f}$に拡張することができる。従って、特に $D = \tilde{f}(\mathbb{H})$ はジョルダン領域である。

References

[AG]. K. Astala and F. W. Gehring, *Crickets, zippers, and the Bers universal Teichmüller space*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 675–687.

[F]. B.B.Flinn, *Jordan domains and the universal Teichmüller space*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 603–610.

[G1]. F. W. Gehring, *Univalent functions and the Schwarzian derivative*, Comment. Math. Helvetici **52** (1977), 561–572.

[G2]. F. W. Gehring, *Spirals and the universal Teichmüller space*, Acta Math. **141** (1978), 99–113.

[M]. K. Matsuzaki, *Simply connected invariant domains of Kleinian groups not in the closures of Teichmüller spaces*, Complex Variables **22** (1993), 93–100.

[P]. Ch. Pommerenke, "Boundary Behaviour of Conformal Maps," Springer-Verlag, 1992.

[S]. H. Shiga, *Characterization of quasi-disks and Teichmüller spaces*, Tôhoku Math. J. **37** (1985), 541–552.

[Sug1]. T. Sugawa, *On the Bers conjecture for Fuchsian groups of the second kind*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 45–52.

[Sug2]. T. Sugawa, *The Bers projection and the λ-lemma*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 701–713.

[Sug3]. T. Sugawa, *A class of norms on the spaces of Schwarzian derivatives and its applications*, Proc. Japan Acad. **69**, Ser. A (1993), 211–216.

[Sug4]. *On the space of schlicht projective structures on compact Riemann surfaces with boundary*, J. Math. Kyoto Univ. (to appear).

[Ta]. Taniguchi, M., *Bloch topology of the universal Teichmüller space.*

[Th]. Thurston, W. P., *Zippers and univalent functions*, in "The Bieberbach Conjecture", AMS, 1986, 185–197.

[Z]. I. V. Žuravlev, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Soviet Math. Dokl. **21** (1980), 252–255.

12 Some properties of N-transformation

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press

Abstract

In this article, some properties of N-transformation (which is based on N-fractional calculus) are reported.

Definition of N-transformation:

Denote the N-complex integral transformation of order $\mu \in R$ of the function $f(\zeta)$ as $N_\mu\{f(\zeta)\}$ and define

$$N_\mu\{f(\zeta)\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\mu+1}}d\zeta = F_\mu(z) \qquad \begin{pmatrix} \mu \notin Z^- \\ \zeta \neq z \end{pmatrix} \tag{1}$$

with

$$N_{-m}\{f(\zeta)\} = \lim_{\mu \to -m} N_\mu\{f(\zeta)\} = \lim_{\mu \to -m} F_\mu(z) \qquad (m \in Z^+) \tag{2}$$

where $|F_\mu(z)| < \infty$, $z \in D$, $D = \{\underset{-}{D}, \underset{+}{D}\}$, $C = \{\underset{-}{C}, \underset{+}{C}\}$,

$\underset{-}{C}$ is a curve along the cut joining two points z and $-\infty + i\ \mathrm{Im}(z)$,

$\underset{+}{C}$ is a curve along the cut joining two points z and $\infty + i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{-}{D}$ is a domain surrounded by $\underset{-}{C}$, $\underset{+}{D}$ is a domain surrounded by $\underset{+}{C}$,

(here D contains the points over the curve C),

$f = f(\zeta)$ is a regular function in D, Γ is the Gamma function,

$-\pi \leq \arg(\zeta - z) \leq \pi$ for $\underset{-}{C}$ and $0 \leq \arg(\zeta - z) \leq 2\pi$ for $\underset{+}{C}$.

References

[1] K. Nishimoto and S.-T. Tu; Fractional calculus method to extended linear ordinary differential equations of Fuchs type, J. Frac. Calc. Vol.2, Nov. (1992),35-46.

[2] K. Nishimoto; Solutions of Gauss equation in fractional calculus, J. Frac. Calc. Vol.3, May (1993),29-37.

[3] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol.4, Nov. (1993),1-11.

[4] K. Nishimoto; Inverse of Nishimoto's integral transformation, inverse of Goursat's transformation and that of Cauchy's one (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc.Vol. 5, May (1994), 1-10.

[5] K. Nishimoto; Unification of the integrals and derivatives, (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol.6, Nov.(1994), 1-14.

[6] K. Nishimoto; N-transformation of elementary functions and their inverses, J. Frac. Calc. Vol.7, May (1995),1-15.

[7] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol.1 (1984), Vol.2 (1987), Vol.3 (1989), Vol.4 (1991), Descartes Press Co., Koriyama (Japan).

[8] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century): Integrals and Differentiations of Arbitrary order,(1991), Descartes Press Co.,Koriyama (Japan).

[9] K. Nishimoto; Some properties of N-transformation, J. Frac. Calc. Vol.8, Nov. (1995), (to appear).

13 Applications of N-transformation and N-fractional calculus to nonhomogeneous Bessel equations

Katsuyuki Nishimoto   Descartes Press Co.

Abstract

In this article, N-transformation and N-fractional calculus method to nonhomogeneous and homogeneous Bessel differential equations are reported. Solutions to the equations are given by the use of the author's fractional calculus. Theorems for the solutions and some illustrative examples are shown in §1 and in §2 respectively.

Some theorems in §1 are shown as follows.

Theorem 1. Let $\varphi \in \mathring{\wp} = \{\varphi \mid 0 \neq |\varphi_\mu| < \infty, \mu \in R\}$ and $g \in \mathring{\wp}$ then the nonhomogeneous Bessel equation

$$\varphi_2 \zeta^2 + \varphi_1 \zeta + \varphi\,(\zeta^2 - \nu^2) = g(\zeta) \qquad (\zeta \neq 0) \qquad (1)$$

have a particular solution of the form

$$\varphi = \zeta^\nu e^{i\zeta}(((g\zeta^{-(\nu+1)}e^{-i\zeta})_{-\nu-(1/2)}\zeta^{-1}e^{P(\zeta)})_{-1}e^{-P(\zeta)})_{\nu-(1/2)} \qquad (2)$$

and $\varphi^* = \varphi$ which has $-i$ instead of i in (2), (2)*

where

$$P(\zeta) = i2\zeta + \{\nu + (1/2)\}\log\zeta, \qquad (3)$$

$\varphi_2 = d^2\varphi/d\zeta^2$, $\varphi_1 = d\varphi/d\zeta$, $\varphi_0 = \varphi = \varphi(\zeta)$, $\zeta \in C$, ν is a given constant, $g = g(\zeta)$ is a given function, and $\log\zeta = \log_e\zeta$.

Theorem 2. Let $\varphi \in \mathring{\wp}$, then the homogeneous Bessel equations

$$\varphi_2 \zeta^2 + \varphi_1 \zeta + \varphi\,(\zeta^2 - \nu^2) = 0 \qquad (\zeta \neq 0) \qquad (4)$$

have solutions of the forms

$$\varphi = K\zeta^\nu e^{i\zeta}(e^{-i2\zeta}\zeta^{-(\nu+\frac{1}{2})})_{\nu-\frac{1}{2}}, \qquad (5)$$

and

$$\varphi^* = K\zeta^\nu e^{-i\zeta}(e^{i2\zeta}\zeta^{-(\nu+\frac{1}{2})})_{\nu-\frac{1}{2}}, \qquad (5)^*$$

where K is an arbitrary constant.

References

[1] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator N^ν (On an action group), J. Frac. Calc. Vol.4, Nov.(1993).

[2] K. Nishimoto; Inverse of Nishimoto's integral transformation, inverse of Goursat's transformation and that of Cauchy's one , J. Frac. Calc. Vol.5, May (1994),1-10.

[3] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol.1 (1984), Vol.2 (1987), Vol.3 (1989), Vol.4 (1991), Descartes Press, Koriyama. (Japan).

[4] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century),(1991), Descartes Press, Koriyama (Japan).

14 On the complex oscillation of some linear differential equations

藤解　和也　　　金沢大工
石崎　克也　　　日本工大

複素領域での微分方程式の解の零点の分布を調べる研究は [1] あたりからシステマテックなに成ってきた．各論的な対象ではあるが，本講演では次の微分方程式を取り扱う

$$(1)\qquad f'' + A(z)f = 0, \quad A(z) = e^{P_1(z)} + e^{P_2(z)} + Q(z)$$

ここで P_1, P_2は多項式:

$$(2)\qquad \begin{cases} P_1(z) = \zeta_1 z^n + \cdots & \zeta_1 \cdot \zeta_2 \neq 0,\ n,\ m \in \mathbb{N} \\ P_2(z) = \zeta_2 z^m + \cdots \end{cases}$$

で $Q(z)$ は整函数で位数$\sigma(Q) < \max\{n, m\}$．e^{P_1}, e^{P_2}, Q は一次独立．

Bank, Laine and Langley は [2] の中で高階ではあるが $A(z) = Re^P + Se^Q + T$, R, P, S, Q, Tは多項式の場合を扱っている．$\frac{1}{16}$-Theorem 周辺の議論であり，証明方法はそれ自体興味深いが我々が紹介する結果 [4] の証明方法は [3] を参考にするところが大きい．（特に (ii)）

Theorem 1.

(i) $m \neq n$ ならば全ての非自明な解 fは$\lambda(f) = \infty$ を満たす．

(ii) $m = n$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$ならば全ての非自明な解 fは$\lambda(f) = \infty$ を満たす．

(iii) $m = n$, $\zeta_1 = \zeta_2$ならば全ての非自明な解 fは$\lambda(f) \geqq n$ を満たす．

(i), (iii) の証明は直接的にそれぞれ [3] で示された次の定理による．

Theorem A. Pは多項式で $\deg P = n \geqq 1$, Q は超越的整函数で位数$\sigma(Q) < n$ とすれば，全ての非自明な次の微分方程式

$$f'' + (e^P + Q)f = 0$$

の解 fは$\lambda(f)=\infty$を満たす.

Theorem B. Bは超越的整函数, $A\not\equiv 0$, Cは整函数で位数有限とする. このとき次の微分方程式

$$f''+(A(z)e^{B(z)}+C(z))f=0$$

の全ての非自明な解 fに対して$\lambda(f)=\infty$であるか fが零点を持たず, (このときは $A(z)$ も零点を持たない)

$$C=-\frac{1}{16}\left(\frac{A'}{A}+B'\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{A'}{A}+B'\right)'$$

が成り立つ.

(iii) の結果$\lambda(f)\geqq n$を$\lambda(f)=\infty$とできないかどうかは Wang が指摘してくれたように興味深い問題である.

REFERENCES

[1] Bank, S. and I. Laine, *On the oscillation theory of $f''+Af=0$ where A is entire*, Trans. Amer. Math. **273** (1982), 351–363.

[2] Bank, S., I. Laine and J. K. Langley, *Oscillation results for solutions of linear differential equations in the complex domain*, Resultate Math. **16** (1989), 3–15.

[3] Chiang Y.-K., I. Laine and S.-P. Wang, *Oscillation results for some linear differential equations*, Math. Scand. (to appear).

[4] Ishizaki, K and K. Tohge, *On the complex oscillation of some linear differential equations*, Preprint.

15

Estimates of spherical derivatives

マハムトフ・ジャミール　北大・理

Consider algebraic differential equation of the first order

$$(w')^n + \sum_{k=1}^{n} P_k(z,w)(w')^{n-k} = 0 \qquad (1)$$

where $P_k(z,w) = \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}(z) w^j$, $1 \le k \le n$.

A. Gol'dberg [1] proved that :
if $a_{kj}(z)$ are rational functions then meromorphic solutions of equation (1) are of finite order (in the sense of Nevanlinna).

Based on the method of Gol'dberg we estimate the growth of the spherical derivative of meromorphic solutions of equation (1) in the following two cases:

1) $a_{kj}(z)$ are rational functions ;

2) $a_{kj}(z)$ are defined in the unit disk D and belong to the Hardy classes $H_{p_{kj}}$.

Let $w^{\#}(z) = |w'(z)| \cdot (1+|w(z)|^2)^{-1}$ be spherical derivative of meromorphic function $w(z)$.

THEOREM 1. If coefficients $a_{kj}(z)$ of equation (1) are rational functions, $|a_{kj}(z)| = |z|^{\alpha_{kj}}(c_{kj}+o(1))$ as $|z|\to\infty$, and $p = 2 + \max\limits_{1\le k\le n}\max\limits_{0\le j\le m_k}\dfrac{\alpha_{kj}}{k}$ then meromorphic solutions of equation (1) satisfy to condition $\lim\limits_{|z|\to\infty}|z|^{2-p}w^{\#}(z)<\infty$.

Remark. If $\lim\limits_{|z|\to\infty}|z|w^{\#}(z)<\frac{1}{2}$ then by [2] $w(z)$ is a rational function.

THEOREM 2. If $a_{kj}(z)\in H_{p_{kj}}$ and $p = \max\limits_{1\le k\le n}\max\limits_{0\le j\le m_k}\dfrac{1}{k\cdot p_{kj}}$ then meromorphic solutions of equation (1) satisfy to condition

$\lim\limits_{|z|\to 1}(1-|z|)^{p}w^{\#}(z)<\infty$.

References

[1] A.A. Gol'dberg Ukrain. Math. J., v.8 (3), (1956), 254–261.

[2] O. Lehto Comment. Math. Helv., v.33 (1959), 196-205

[3] S.A. Makhmutov Soviet Math. Dokl., v.33(2) (1986), 450-455

16 シュタルク－ワニヤ共鳴 と ワイエルシュトラウスの σ－函数，$\wp$－函数

田島 慎一　新潟大学 工学部

ω_1を正の実数，ω_3を $\mathrm{Im}(\omega_3) > 0$ なる純虚数とする。$2\omega_1$ と $2\omega_3$ を一組の基本周期とするワイエルシュトラウスの楕円函数を $\wp(u)$ とおく。

次の微分方程式を考える。

$$\text{☆} \quad \left(-\frac{d^2}{du^2} + 2\wp(u+\omega_3) + \varepsilon u \right) \psi(u) = E_0 \psi(u)$$

但し εは十分小さい。（$\varepsilon \fallingdotseq 10^{-5}$）

この微分方程式は，周期ポテンシャルを持つシュレディンガー方程式に電場による摂動 εu を加えた方程式と見做せる。

解 ψ を解析することは，結晶内の Bloch 電子が外部電場によりどのような摂動を受けるかを考察することになる。

Buslaev (1984年) の方法を用いると、
漸近解が構成出来る。その初項には Berry
phase に似た幾何的位相因子が含まれる。

方程式 * の漸近解の初項は、ワイエルシュト
ラウスの σ-函数, ζ-函数 $\wp$-函数等を
用いて具体的に求めることが出来る。特に
その位相因子も計算できる。

この結果を利用しながら turning points
での接続問題を解くと、シュタルク・ワニヤ
共鳴状態における "量子化条件" が
計算できることを報告する。

参 S. TAJIMA
Geometric phase in a perturbed Lamé equation
in First Korean-Japanese Colloquium on
Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis
p.55 - p.61 (1993年)
ed by J. Kajiwara, H. Kazama and K.H Shon

17

On the order of solutions of non-homogeneous linear differential equations

TODA Nobushoge

Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. We consider the non-homogeneous linear differential equation

$$(1) \qquad f^{(n)}+a_{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+a_0 f'=F,$$

where $a_0,\ldots,a_{n-1}$ and F are entire functions, $F\neq 0$ and $n>1$.

Every solution of (1) is entire and all solutions are of finite order if $a_0\neq 0, a_1,\ldots,a_{n-1}$ are polynomials and F is of finite order([2]).

For an entire function w, we denote the order of w by $\rho(w)$, the lower order of w by $\mu(w)$, the order of $N(r,1/w)$ by $\lambda(w)$ and the order of $\overline{N}(r,1/w)$ by $\overline{\lambda}(w)$ respectively.

The following result([1]) is interesting.

Theorem A. Suppose in (1) that $\max\{\rho(a_1),\ldots,\rho(a_{n-1}),\rho(F)\}<\rho(a_0)<1/2$. Then every solution of (1) has infinite order.

2. Result. Let f be any solution of (1). Suppose that for some constant K the set $\{z:|f(z)|>K\}$ consists of at least q components.

Theorem 1. Suppose in (1) that $a_0(z)=P(z)A(z)+Q(z)$, where A is transcendental and $\mu(A)<+\infty$ and $P\neq 0, Q$ are polynomials and that $a_1,\ldots,a_{n-1}$, F are polynomials. If for some constant K the set $\{z:|A(z)|>K\}$ consists of at least N components ($1\leqq N<+\infty$), then either $\rho(f)=+\infty$ or

(2) $$N/\mu(a_0) + q/\rho(f)\leqq 2.$$

In particular, if $\mu(a_0)\leqq 1/2$ or $\mu(a_0)=N/2$, then $\rho(f)=\lambda(f)=\overline{\lambda}(f)=+\infty$.

Remark. There are examples of (1) with an entire solution of finite order for which the equality holds in (2).

Theorem 2. Suppose in (1) that $a_0(z)=P(z)A(z)+h(z)$, where $P\neq 0$ is polynomial, A and h are entire such that $\rho(A)<+\infty$, (ii) for some constant K the set $\{z:|A(z)|>K\}$ has at least $N(\geqq 2)$ components and (iii) $\max\{\rho(a_1),\ldots,\rho(a_{n-1}),\rho(F),\rho(h)\}<\rho(A)/(2\rho(A)+1-N)$. Then, either $\rho(f)=+\infty$ or

$$N/\mu(a_0) + q/\rho(f)\leqq 2.$$

In particular, $\mu(a_0)=N/2$ or $\rho(a_0)=N/2$, then $\rho(f)=\lambda(f)=\overline{\lambda}(f)=+\infty$.

3. References.

[1] G. G. Gundersen and E. M. Steinbart: Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I. Math., 17(1992), 327-341.

[2] I. Laine: Nevanlinna theory and complex differential equations. de Gruyter Studies in Math., 15, Berlin-New York, 1993.

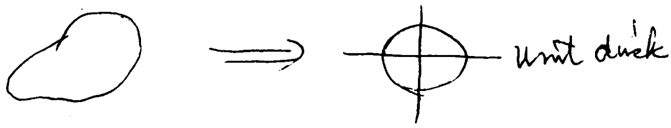
[3] N. Toda: Kodai Math. J., 16(1993), 428-440.

18 複素平面領域の Moduli

大藤阜

複素平面領域の Topology を考える。

まず Riemann の写像定理



$$\mathrm{Diff}(\Omega) \cong \mathrm{Diff}(D) = O(2) \times \mathbb{R}^\infty \text{ (as a topological space)}$$

筆者は、$\mathrm{Diff}(M)$ に関して Moduli の理論というものをつくった。

$\mathrm{Diff}(M) \ni f \longrightarrow f^* : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ring isomorphism

$\mathrm{Diff}(M) \longrightarrow O(C^\infty(M)) \longrightarrow \mathrm{Diff}(C^\infty(M))$

$C^\infty(M) = H_0 + H_1 + H_2 + \cdots\cdots$

$\Delta H_i = \lambda_i H_i \qquad \dim H_i = n_i$

$O(n) \ni A$

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & P_t & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \qquad P_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Diff}(D)_0^+ = S^1 \times \mathbb{R}^\infty \qquad S^1 = SO(2)$

$(\theta_1, \theta_2 \cdots\cdots)$ を Moduli とよぶ

S^1 の moduli Θ (rotation)

$\Theta \to \Theta^* : H_i \to H_i \qquad H_i = \exp(inx)$

$\Theta^* H_i = \exp(in(x+\theta)) = \exp(in\theta)\exp(inx)$

よって $\exp(in\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

$\Theta \in S^1$ の moduli $(\theta, 2\theta, 3\theta, \cdots, n\theta, \cdots)$

$f \sim f'$ (conjugate $\Leftrightarrow$ moduli equal

$f\theta f^{-1}$ の moduli $=$ θ の moduli $= (\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots n\theta, \cdots)$

$f\theta f^{-1} f'\theta' f'^{-1}$ の moduli $= (\theta+\theta', 2(\theta+\theta'), \cdots n(\theta+\theta'), \cdots)$

~~一般に Diff~~ 一般に $\mathrm{Diff}(S^1) \cong S^1 \times \mathbb{R}^\infty$ (as a top. space)

だから $\mathrm{Diff}(S^1)$ の moduli $\equiv \mathrm{Diff}(D$ の moduli$)$

— 一般の領域では、

$\mathrm{Diff}(\Omega) = K \times \mathbb{R}^\infty$ (as a top. space)

この場合 $\mathrm{Diff}(\Omega)_0^+ = \text{contractible} = \mathbb{R}^\infty$ の部分が問題で、簡明な

理論は期待できそうもない

しかし、moduli という概念は存在する。

$C^\infty(\Omega) = H_0 + H_1 + H_2 + \cdots$

$\Delta H_i = \lambda_i H_i \qquad \dim H_i = n_i$

$\mathrm{Diff}(\Omega) \to O(C^\infty(\Omega))$ Embedding

$O(n) \ni A \quad BAB^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & P_t & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad P_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

19 Hol$(\mathbb{C}^n)$の構造安定性

大藪 卓

$$
\begin{array}{ccccl}
f : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n & ; & \text{Hol. iso.} \\
\downarrow h & & \downarrow h & & \\
g : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n & ; & \text{Hol. iso}
\end{array}
$$

$hf = gh$ となる時 f と g は共役.

Hol$(\mathbb{C}^n)$は無限次元複素Lie群である.

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow O(C^{\omega}(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow \mathrm{Hol}(C^{\omega}(\mathbb{C}^n))$$

(Embedding)

Hol$(\mathbb{C}^n)$ $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{X}^{\omega}(\mathbb{C}^n)$ Lie環

Diffの時と同じく.

Hol$(\mathbb{C}^n)$には構造安定性の概念がある。

Hartmanの定理

$F : B \to B$; Hyperbolic linear isomorphism of the Banach space B.

$F' : B \to B$; Small perturbation

Then Exist H such that $FH = HF'$

定理

$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ Hyperbolic $\Longrightarrow$ fは構造安定

今度はAnosovのような事を考える

$f^* - I : \Sigma b(\mathbb{C}^n) \to \Sigma b(\mathbb{C}^n)$ がHyperbolicとする

$\Longrightarrow$ f^*は構造安定

これはDiff(M)のAnosovのようなものを与えている。

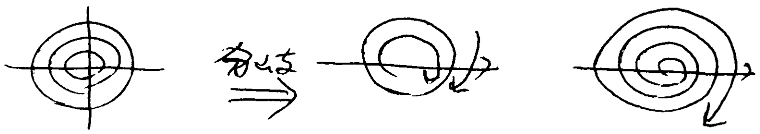
$Hol(\mathbb{C}^n) \supset Affin(\mathbb{C}, n)$

$GL(n, \mathbb{C}) \propto \mathbb{C}^n$

$\ni A$

Aが Hyperbolic $\Longrightarrow$ Aは構造安定

$O(n, \mathbb{C})$の時は構造安定でない



$C^\omega(\mathbb{C}^n)$は C^∞の部分多様体である locally C^∞

定理 $C^\omega(\mathbb{C}^n)$は可算座標系をもつ

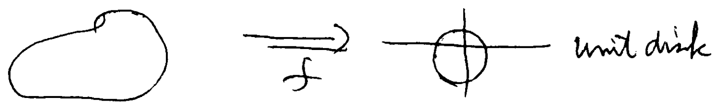
なお、Hol(M)の力学については、Diff(M)ほどはほとんど何もなされていないようである。いわんや構造安定性の問題については、ほとんど何もなされていない。

20 Spec (D/Ω)

大藪卓

複素平面領域の Spectral Geometry を考える.

まず Riemann の写像定理



$C^\infty(\Omega) \cong C^\infty(D)$ (ring isomorphism)

$C^\infty(\Omega) = H_0 + H_1 + H_2 + \cdots \qquad \Delta H_i = \lambda_i H_i$

$\mathrm{Spec}(\Omega) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$

$C^\infty(D) = H_0' + H_1' + H_2' + \cdots \qquad \Delta H_i' = \lambda_i' H_i'$

$\mathrm{Spec}(D) = \{\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \cdots\}$

$f^* : H_i \to H_i'$

$(h_i, h_i) = (f^* h_i, f^* h_i)$

よって $\mathrm{Spec}(D) = \mathrm{Spec}(\Omega)$

逆に $\mathrm{Spec}(\Omega) = \mathrm{Spec}(D) \Longrightarrow ???$

まず

定理 $\mathrm{Spec}(\Omega) = \mathrm{Spec}(D) \Longrightarrow \Omega \cong D$: Diffeomorphic

定理 $\Omega \cong D$: conformally equivalent

今度は $Spec(D/\Gamma)$ を考える。

$D/\Gamma = R$ = Riemann 面

定理 $Spec(D/\Gamma) = Spec(\Omega)$

$\Longrightarrow \Omega = D/\Gamma$ と Diffeomorphic

定理 $D/\Gamma = \Omega = R$: conformally equivalent

実際には Riemann 面は、genus g で一意に定まるから

これはあたりまえの事であるが……

◎問題

$Spec(D)$

$Spec(D/\Gamma)$

を計算せよ、具体的におもよ

これは、可能である。

もっと一般に

◎問題

$Spec(D^n)$

$Spec(D^n/\Gamma)$ を求めよ。

これらはおそらく練習問題のレベルなのだろう。

すでに知られているだろう。

一般の Spectral Geometry の問題は非常に微妙である。

21

D/Γ の Mostow Rigidity

大薮章

Fibration

$\Gamma \longrightarrow D \longrightarrow R = D/\Gamma$: Riemann 面

induced bundle $\quad\quad \wr\wr$

$\Gamma \longrightarrow X \longrightarrow \Omega$

$\Omega \cong R$: homotopy equivalent

$\Rightarrow D \cong X$: homotopy equivalent

Riemann の写像定理において

$D \equiv X$: conformaly equivalent

よって.

$R \cong \Omega \cong D/\Gamma \cong X/\Gamma$: conformally equivalent.

これを Mostow Rigidity というのは、次のようなヒナ型がある。

双曲的多様体の Mostow Rigidity $\quad H^n/\Gamma$

$\Gamma \longrightarrow H^n \longrightarrow H^n/\Gamma$

induced bundle $\quad\quad \wr\wr$

$\Gamma \longrightarrow X \longrightarrow M$

$M = H^n/\Gamma$: homotopy equivalent

$\Rightarrow H^n \cong X$: homotopy equivalent

⇒ known $H^n \cong X$ $(n \neq 4)$ に diffeomorphic

よって、

$M \cong H^n/\Gamma$ に diffeomorphic

本来は

$H^n/\Gamma \cong H^n/\Gamma'$: homotopy equivalent

⇒ $H^n/\Gamma \cong H^n/\Gamma'$ ≅ isometric

(Mostow Rigidity)

一般に Mostow Rigidity とは

Lie群 G, G'.　　Lattices

$G \supset \Gamma$,　　$G' \supset \Gamma'$

$\theta : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$: 同型

$\Theta : G \longrightarrow G'$: 解析的同型に拡張できる。

ここで、H^n, D が Lie群でないところがミソである。

なお、これは $\Gamma \curvearrowright G/K$ に対する Mostow Rigidity と考えることもできる。

Poincaré 予想との類似点も多い。

なお、Mostow Rigidity は Riemann 対称空間は その基本群によって

一意に定まる事を意味している。

22 Pseudo-harmonic function and Teichmüller map

柴田敬一　国際自然科学研

2変数調和函数の一般化へ導く積分汎函数を定義し，source manifold 及び target manifold を種々に採ることによって，従来知られていた定理を系として含むような新らしい結果が得られる。その中には，種数が相等しく且つ marking のついた閉リーマン面の間の Teichmüller 写像の存在に関する定理も含まれる。

23

Two Sheeted Disc の有界正則関数による点分離

加藤　崇雄　　山口大・理

林　実樹廣　　北大・理

単位開円板 $\Delta : |z| < 1$ 上の unlimitted な 2 葉の被覆面 $\tilde{\Delta}$ を考える. π を被覆写像, 分岐点は点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a_n \in \Delta)$ 上にあるものとし, $\sum(1-|a_n|) = \infty$ となる場合を考える. このとき, $\tilde{\Delta}$ 上の有界正則関数全体 $H^{\infty}(\tilde{\Delta})$ は $\pi^{-1}(z) = \{z^+, z^-\}$ $(z \in \Delta \setminus \{a_n\})$ の 2 点を分離しない. 即ち, $f(z^+) = f(z^-)$ $(\forall f \in H^{\infty}(\tilde{\Delta}))$.

しかし, 点 a_n を中心とする半径 r_n の閉小円板 $\Delta_n = \bar{\Delta}(a_n, r_n)$ を互いに交わらないように取り, $D = \Delta \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ とおき, $\tilde{D} = \pi^{-1}(D)$ を考えると, $H^{\infty}(\tilde{D})$ は $\tilde{D}$ の異なる 2 点を分離できることがある.

本講演では, 次の結果を報告する.

[定理] $\sigma > 0$ は十分小さな定数として, 上記の記号の基で,

(1) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $r_n = e^{-\sigma n^p}$ とする. $0 < p \leq 1$ ならば $H^{\infty}(\tilde{D})$ は点分離であり, $p > 1$ ならば点分離ではない.

(2) $a_{nj} = (1 - 2^{-n})e^{2\pi j 2^{-n} i}$ $(n \in \mathbf{N},\ 0 \leq j < 2^n)$, $r_{nj} = \sigma 2^{-n^p}$ とする. $p = 1$ ならば $H^{\infty}(\tilde{D})$ は点分離であり, $p > 1$ ならば点分離ではない.

この定理で「点分離でない」という部分は[1]の結果から従う.

[1]においても, この定理の(1), (2)の場合に点分離になるような r_n, r_{nj} の存在を示したが, それは, 小円板列Δ_n, Δ_{nj}がほとんど接するくらいに半径を大きく取った場合であった.

定理は半径を十分小さく取れること示しており, その結果として, [1]で得られた点非分離性の十分条件は「上記定理の意味」で最良であることが分かる. しかしながら, この定理は点分離, あるいは, 点非分離となるための必要十分条件を与えるものではないことを念のため申し添えておく.

尚, 証明の鍵は, 点分離に用いる有界正則関数の構成を工夫することにある. これが分かれば, その関数を実際に評価して, D上有界になることを確かめるだけである.

References

[1] M. Hayashi, M. Nakai and S. Segawa *Two sheeted discs and bounded analytic functions*, J. d'Analyse Math. 61 (1993), 293-325.

24 非線形変換と解析関数；非線形変換におけるノルム不等式

斎藤三郎　　群馬大工

Eを抽象的な集合とし，$H_K(E)$をE上の関数からなる再生核$K(p,q)$をもつHilbert空間とする．$H_K(E)$を入力として"非線形変換"による出力を一般的に考え，この変換の性質を調べたい．これについて例えば，解析関数と非線形変換を結びつける次の結果が得られる：$N(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$を，$|z|<R$上で収束する解析関数とし，$N^+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| z^n$を定義する．$E$上$K(p,p)<R$とすると，$N^+(K)$は$E\times E$上絶対収束し，$E$上positive matrixになり，$N^+(K)$を再生核にもつHilbert空間を$H_{N^+(K)}$とおくと，解析関数から作られる変換$N(f)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^n$について，$N(f)$は$H_{N^+(K)}$に所属し，不等式

$$\|N(f)\|^2_{H_{N^+(K)}} \leqq N^+\left(\|f\|^2_{H_K}\right)$$

が成り立つ．

このような結果は, a_n が一般の関数のときや, f^n のところに複素共役や微分が入った非線形変換, 例えば

$$f \in H_k(E) \longrightarrow h_1(x) f''(x) + f'(x)^2 + |f'(x)|^3$$

等についても成り立つ. 2つの例をあげておく:

[0, 1] 上実数値絶対連続関数で, $f(0)=0$,
$0 < \int_0^1 f'(x)^2\, dx < 1$ のとき,

$$\int_0^1 \left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right)'^2 (1-x)^2\, dx \leqq \frac{\int_0^1 f'(x)^2\, dx}{1 - \int_0^1 f'(x)^2\, dx}.$$

単位円上 $f(0)=0$ をみたす解析関数について, 左辺が収束するとき,

$$|d_0|^2 + \frac{1}{\pi}\iint_U \left|\sum_{n=1}^{\infty} d_n f^n(z)\right|^2 dx\,dy \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 n! \left\{\frac{1}{2\pi}\iint_U |f'(z)|^2\, dx\,dy\right\}^n$$

が, 任意の定数 $\{d_n\}$ について成り立つ.

Distortion Theorems for Ruscheweyh Derivatives

25

Shigeyoshi Owa   Kinki University

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \qquad (a_1 = 1)$$

which are analytic in the open unit disk $\mathcal{U}$.
For functions

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,j} z^k \qquad (a_{1,j} = 1)$$

belonging to $\mathcal{A}$, the convolution (or Hadamard product) $(f_1*f_2)(z)$ of $f_1(z)$ and $f_2(z)$ is defined by

$$(f_1*f_2)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} a_{k,2} z^k \ .$$

With the help of this convolution, we define the differential operator

$$D^n f(z) = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} * f(z)$$

for $f(z)$ in $\mathcal{A}$, where $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$.
Since

$$\frac{z}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} C(n,k) z^k$$

with

$$C(n,k) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (j+n)}{(k-1)!}, \quad C(n,1) = 1,$$

we see that

$$D^n f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C(n,k) a_k z^k.$$

This differential operator $D^n f(z)$ is said to be Ruscheweyh derivative.

In the present talk, we derive some distortion theorems for $D^n f(z)$ when $f(z)$ belongs to some subclasses of $\mathcal{A}$.

26　Rectilinear slit conformal mappings

米谷文男　　　　京都工繊大　工芸

複素球面内の領域Gを指定された方向を持つ線分を境界とする領域に等角写像することを考える。P. Koebe 氏はG が有限連結の場合にはこのような等角写像が存在し，更にある正規化の下に一意であることを示している。F. Weening 氏は境界成分が可算個の場合にはこのような等角写像が存在するとは限らないことを簡単な例で示している。領域Gのケレクヤルト–ストイロウの完閉化を$\underline{G}$ としてその境界 $\Delta=\underline{G}-G$ 上の実数値連続函数 φ を取る。B. Rodin 氏はこの境界点 P が実軸となす角がφ(P)の線分又は点に対応するような等角写像fの存在を問題とした。ここではこの問題を柴氏の方法によりもう少し強い仮定の下で考える。Dirichlet 積分有限な複素微分の族をDirichlet 内積の実部を内積として実 Hilbert 空間 Λ と考える。完閉な台を持つC^∞級の実函数の微分の族の閉包をΓ_{eo}, Λ に属する実調和函数の微分の族を Γ_{he}, Γ_{he}の共役微分に直交する実調和函数の微分の族をΓ_{hm}とする。次の仮定(*)を置く。(*) "φ は$\underline{G}$ の連続函数φ に拡張されdφ は$\Gamma_{hm}+\Gamma_{eo}$ に属する" とする。$\Phi=\exp(i\varphi)$と置けば，$\overline{\Phi}$ f の虚部は各境界成分上定数を取ると考えられ，例えば境界成分が可算の場合にはd($\overline{\Phi}$ f)の虚部は$\Gamma_{hm}+\Gamma_{eo}$ の元に境界近傍で一致する。微分がΓ_{he} に属する有界な調和函数uに対してd(Φu) の直交分解の調和部分をd(u(Φ)) としてこのように表される複素調和微分の全体を$B\Gamma_{\Phi he}$ とし，du がΓ_{hm} に属するd(u(Φ)) の全体を$B\Gamma_{\Phi hm}$ とする。$B\Gamma_{\Phi he}+B\Gamma_{\Phi hm}$ の閉包をΛ_xと置けば，Λ_x は $i^*\Lambda_x$ に直交する。有理型函数hの微分 dh が境界近傍でΛ_x の元に一致する時 Λ_x 挙動を持つということにすれば，同じ特異性を持つΛ_x 挙動の有理型函数は定数の差を除いて一意である。更に，仮定(**) "微分がΓ_{he} に属する有界な調和函数 u に対して d(Φ(u-u(a))), d($\overline{\Phi}$ (u-u(a))) のnorm が duの norm の或る定数倍

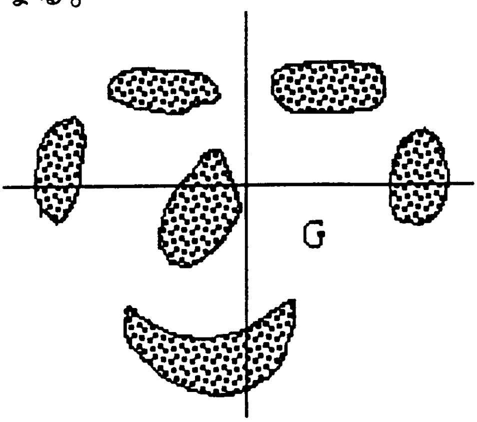
でおさえられる" が満たされれば，調和微分の空間内で$i^*\Lambda_x$はΛ_xの直交補空間となり，Λ_x挙動を持つ有理型函数の存在を示せる。Λ_x挙動を持つ有理型函数は倉持境界まで擬連続に拡張され，それによって各境界成分は倉持容量零の所を除いて与えられた方向の線分上に写される。F. Weening 氏はΦの値域が有限個の時，彼が定義したminimal crossing module を満足する問題の等角写像の存在を示した。そしてその一意性を予想している。この等角写像はminimal crossing module の条件によりΛ_x挙動を持つことが分かり，従って一意であることが示される。この場合には，仮定(*), (**) が満たされること，Λ_xは松井氏が扱った一つの挙動空間に一致していることに注意しておく。

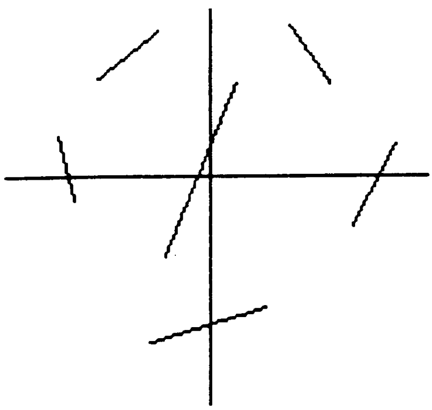
さてG が無限遠を含むとし，G の極値垂直切線写像 f_v と極値水平切線写像 f_h は無限遠の近傍でそのローラン展開が

$$f_v = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \qquad f_h = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

となるように正規化されているとする。$f_v + f_h$ はその像領域の補集合の成分が凸集合であるような領域への単葉な写像になることはよく知られているが，1次結合 $f_v + tf_h$ が単葉になる複素数 t の集合 S は知られているのだろうか? 次の3点を報告する。

1. 集合Sは右半平面(実部が零以上)を含む。
2. G が有限連結の時は S の補集合の閉包は左半平面を含む。
3. G 上に単葉な有界正則函数は存在しないが，定数でない Dirichlet 積分有限な正則函数が存在する時，S は丁度右半平面となる。





27　ソボレフ関数の連続性について

水田　義弘　　広島大学総合科学部

下村　哲　　生物圏科学研究科

$\mathbf{R}^n$ の有界領域 D で定義されたソボレフ関数 u は

$$(1)\qquad u(x) = \sum_{|\mu|=m} a_\mu \int_D [D^\mu R_{2m}(x-y)]\, D^\mu u(y)\, dy + P(x)$$

の形で表される；ここに、$\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ は多重指数で、

$$|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_n、$$

$$D^\mu = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \cdots \partial x_n^{\mu_n}}、$$

R_{2m} は $2m$ 次のリース核、$\{a_\mu\}$ は定数、P は D 上 m 調和な関数である。従って、関数 u の連続性を調べるときは、リースポテンシャル

$$U_\alpha f(x) = \int |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy$$

のそれを調べることと本質的に同じである。リースポテンシャル $U_\alpha f$ については、ソボレフの不等式：

$$\|U_\alpha f\|_q \leqq M \|f\|_p$$

が有名である；ここで、$1/q = 1/p - \alpha/n > 0$ である。一般に、リースポテンシャルは連続でないので、弱い意味での連続性を調べることになる。

関数 u が、点 x_0 で ℓ 次 L^q 微分可能とは、

$$(2)\qquad \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} \left| \frac{u(x) - P(x)}{|x-x_0|^\ell} \right|^q dx = 0$$

が成立するときをいう；ここに、P は高々 ℓ 次の多項式、$|B(x_0,r)|$ は球体 $B(x_0,r)=\{x:|x-x_0|<r\}$ の体積を表す。

定理. $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$、$1<p<n/\alpha$、とする。$1/q=1/p-\alpha/n>0$ ならば、α より小さい非負整数 ℓ に対して、$U_\alpha f$ は、ベッセル容量 $B_{\alpha-\ell,p}$ ゼロの集合に属する x_0 を除いて、ℓ 次 L^q 微分可能である。

Meyers は、(2) より弱い意味での微分可能性：

$$\lim_{r\to 0} r^{-n-\ell q}\int_{B(x_0,r)}|u(x)-P(x)|^q dx=0 \tag{3}$$

について論じた。

$1/p-\alpha/n\leqq 0$ ならば、定理において、q はすべての有限な数としてよい。$1/p-\alpha/n<0$ ならば、定理において、$q=\infty$ としてよいが、これは普通の微分可能性を意味する。

$\alpha p=n$ のとき、条件 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ を強めて、

$$\int |f(y)|^{n/\alpha}[\log(e+|f(y)|)]^\sigma dy<\infty \tag{4}$$

を考える。このとき、条件 (4) を満足するすべての f に対して、$U_\alpha f$ が連続であるための必要かつ十分な条件は

$$\sigma>n/\alpha-1$$

である。同様に微分可能性も論じることができる。

参考文献

[1] V. G. Maz'ya, Sobolev spaces, Springer-Verlag, 1985.

[2] N. G. Meyers, Taylor expansion of Bessel potentials, Indiana Univ. Math. J. **23** (1974), 1043-1049.

[3] N. G. Meyers, Continuity properties of potentials, Duke Math. J. **42** (1975), 157-166.

[4] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[5] W. P. Ziemer, Weakly differentiable functions, Springer-Verlag, 1989.

ディィリクレ有限調和測度の境界連続性

28

中 井 三 留　　　名工大

$\overline{M} = M \cup \partial M$ を C^∞ 級の空でない滑らかな境界 ∂M をもつ d 次元 ($d \geqq 2$) の C^∞ 級の境界付き完閉リーマン多様体とし, 又実数 $1 < p \leqq d$ を任意に固定する. $\overline{M}$ の内部 M 上の或る仮似線形楕円型偏微分方程式

$$-\mathrm{div}\mathcal{A}_x(\nabla u) = 0, \quad \text{但し} \quad \mathcal{A}_x(\nabla u) \cdot \nabla u \approx |\nabla u|^p,$$

を考える. 典型例は $\mathcal{A}_x(\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ で, その時の上の方程式は p ラプラス方程式

$$-\Delta_p u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

となる. 上の方程式の M 上の連続解 u を $\mathcal{A}$ **調和** (p ラプラス方程式の場合には特に p **調和**) と呼び, M 上に調和構造を与える. M 上の $\mathcal{A}$ 調和関数 w で, w と $1-w$ の最大 $\mathcal{A}$ 調和劣関数 $w \wedge (1-w) = 0$ のとき w を M 上の $\mathcal{A}$ **調和測度**と言い, 更に $\nabla w \in L_p(M)$ のとき w は p **ディィリクレ有限**であると言う. ∂M の各成分ごとに恒等的に 0 または 1 となる ∂M 上の境界関数 χ に対する M 上の $\mathcal{A}$ ディィリクレ問題の解 $H_\chi^{M,\mathcal{A}}$ は M 上の p ディィリクレ有限 $\mathcal{A}$ 調和測度となる. そこで逆に M 上の任意の p ディィリクレ有限 $\mathcal{A}$ 調和測度は, 上の様な或る χ に対して $w = H_\chi^{M,\mathcal{A}}$ となるかと言う問

題を考える. これに対して完全な解答が次のように得られたので報告する：
上の問題の答えが肯定的である為の必要十分条件は $2 \leqq p \leqq d$ である, 即ち

定理　M **上の任意の** p **ディリクレ有限** $\mathcal{A}$ **調和測度が** $\overline{M} = M \cup \partial M$ **まで連続に拡張できて** ∂M **の各成分上恒等的に** 0 **又は** 1 **となる為の必要十分条件は** $2 \leqq p \leqq d$ **である.**

29

2集合の分離曲面族のextremal lengthについて

大津賀　信

平面内に4辺からなる図形を考える。対辺間のextremal distanceの積＝1であることはよく知られている。この事実はここ40年間に種々の方向に拡張された。10年前に相川は，野沢のmax-flow min-cutの定理に倣って，この種の定理を用いて1つの拡張を試みたが，完成に至らずそのままになっていた。

相川の考えを色々使い，weightづきで島もある場合にさらに拡張した形で，相川の目論見を実現できたと思うのでそれを報告する。簡単のためweightのない場合に限る。表題では曲面族としたが，実際は測度族を取り扱う。

GはR^d内の有界開集合，K_0，K_1は$\overline{G}$上の互いに素な閉集合，Eは$\overline{G}\setminus(K_0\cup K_1)$上の相対的開集合で，その各成分は$R^d$内の閉集合とする。$K_0$と$K_1$を分離する測度族を求めるため，de Giorgiの意味でのG内のBV函数fで，K_0，K_1の近傍で夫々0，1を取り，Eの各成分の近傍で定数を取るものを考え，その全体を$\mathcal{F}$としるす。又BV函数の定

義から，fが滑らかな場合には grad fに相当する測度がfに対応する。その全体を grad $\mathcal{F}$ で表す。

以下 $1<p<\infty$とする。G内の対称な正の定符号行列を値として取る函数 $A(x)$が G内で一様楕円型のとき，G内のベクトル値函数（flowと略す）uに対して，

$$A[u]=({}^t u A u)^{1/2}, \quad A_p(u)=\left(\int_G A[u]^p dx\right)^{1/2}$$

と置く。p-capacity に相当するものとしては，

$$C^*_{A,p}=C^*_{A,p}(K_0,K_1,E,G)=\inf\{A_p(\mathrm{grad} f)^p \,;\, f\in \mathcal{D}^*_p\},$$

ここに$\mathcal{D}^*_p$は，上記BV函数と同じような値の取り方をK_0, K_1, E上でするp-precise 函数全体からなる。さらにp次の extremal distance（ext. distと略す）の逆数に対応して，

$$\begin{aligned}M_{A,p}&=M_{A,p}(K_0,K_1,E,G)\\&=\inf\{A_p(u)^p \,;\, u \text{ is flow in } G, \int_G u\cdot d\sigma\ge 1 \text{ for } {}^\forall\sigma\in \mathrm{grad}\,\mathcal{F}\}\end{aligned}$$

と定義する。主定理は

$$M_{A^{-1},p'}=\frac{1}{(C^*_{A,p})^{p'-1}}$$ ただしA^{-1}はAの逆行列，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

行列やBV函数を考えない従来の場合には，p-capacity はK_0, K_1間のp-ext. dist. に等しく，上の結果は見慣れた "$(p'$次ext. dist$)^{p'-1}\times$ 分離曲面族のp'次ext. length $=1$" となる。

30 ポテンシャル論における最小エネルギーの方法

二宮信幸

局所コンパクトなハウスドルフ空間 Ω において $K(P, Q)$ は，

(1) 二点 P と Q について下半連続，$P=Q$ では ∞ であってもよいが，$P \neq Q$ では必ず有限，

(2) P と Q が互に素なコンパクト集合の中にあるとき，$K(P, Q)$ は上に有界，

であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に対して，ポテンシャルとエネルギー積分

$$K(P, \mu) = \int K(P, Q)\,d\mu(Q),$$

$$K(\mu, P) = \int K(Q, P)\,d\mu(Q),$$

$$K(\mu, \nu) = \int d\mu(P) \int K(P, Q)\,d\nu(Q),$$

$$K(\mu, \mu) = \int d\mu(P) \int K(P, Q)\,d\mu(Q)$$

を考える．コンパクト集合 F の上の正の測度で

全質量が 1 であるものの全体を $\mathfrak{M}_1(F)$ で表わす.

F をコムパクト集合, その上にエネルギー積分有限な正の測度があるものとする. $f(P)$ を F の上の上半連続関数, t_1 と t_2 を任意の正数, μ_1 と μ_2 を $\mathfrak{M}_1(F)$ の測度として

$$\max\begin{pmatrix} K(\mu_1, t_1\mu_1 + t_2\mu_2) - 2(t_1+t_2)\int f d\mu_1 \\ K(\mu_2, t_1\mu_1 + t_2\mu_2) - 2(t_1+t_2)\int f d\mu_2 \end{pmatrix}$$

なる量を考える. このとき μ_1 と μ_2 についてこの量の最小値を考えることが出来, その最小値は

$$(t_1+t_2)\cdot \min_{\mu\in\mathfrak{M}_1(F)} \left(K(\mu,\mu) - 2\int f d\mu\right)$$

である.

$$K(\mu,\mu) - 2\int f d\mu$$

という量は熟知の Gauss 変分である. この事実を使ってポテンシャル論における存在定理と呼ばれるものに向って行きたい.

特別講演

値分布について

楊　楽　中国科学院数学研究所教授
中国数学会理事長

値分布に付いて，下記の様に英語で論じる．

SOME RESULTS AND PROBLEMS IN THE THEORY OF VALUE DISTRIBUTION

Lo Yang

Institute of Mathematics, Chinese Academy of Science

Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic function in the complex plane **C** and a be a complex number (finite or infinite). According to Nevanlinna[9]

$$(1)\qquad \delta(a,f)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\mathrm{m}(r,\frac{1}{f-a})}{\mathrm{T}(r,f)}=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{\mathrm{N}(r,\frac{1}{f-a})}{\mathrm{T}(r,f)},$$

where $\mathrm{m}(r,\frac{1}{f-a})$, $\mathrm{N}(r,\frac{1}{f-a})$ and $T(r,f)$ etc are the usual notations in the theory of value distribution (cf. [7], [9] and [17]).

It is clear that $0\le\delta(a,f)\le 1$. If $\delta(f,a)$ is positive, then a is named a *deficient value with respect to* $f(z)$ and $\delta(a,f)$ is its *deficiency.* The most fundamental and important result of Nevanlinna theory can be stated as follows:

Any transcendental meromorphic function $f(z)$ in the complex plane has countable deficient values at most and the total deficiency does not exceed 2, i. e.

$$(2)\qquad \sum_{a\in\overline{\mathbf{C}}}\delta(a,f)\le 2,$$

where the summation is taken over all the complex values including infinity. It is the famous defect relation and upper bound 2 is sharp in general.

1. Quasi deficiency and modified defect relation

For an arbitrary positive integer p, denote by $N_p(r, \frac{1}{f-a})$ the counting function of zeros of $f - a$ with the multiplicity less or equal to p. Similarly to (2), the author [13] defined quasi deficiency as

$$\delta_p(a, f) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_p(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, f)}. \tag{3}$$

It is easy to see that $0 \le \delta(a, f) \le \delta_p(a, f) \le 1$. When $\delta_p(a, f)$ is positive, a is named as the *quasi deficient value*. Under this definition, we have

Theorem 1.1 *Any transcendental meromorphic function $f(z)$ in the complex plane $\mathbf{C}$ has countable quasi deficient values at most and the total quasi deficiency does not exceed $2 + \frac{2}{p}$.*

In 1994, A. A. Goldberg[5] proved

Theorem 1.2 *For any positive integer p, there is a meromorphic function of order 2 in the complex plane such that it has four quasi deficient values with quasi deficiency $\frac{p+1}{2p}$ each. That means the total quasi deficiency reaches the upper bound $2 + \frac{2}{p}$ and Theorem 1 can not be improved.*

2. Connection with complex dynamic system

There is very close relation between the theory of value distribution and complex dynamic system. For instance, the following theorem was proved by the author[15] in 1986.

Theorem 2.1 *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a region D and k be a positive integer. If for each function $f(z) \in \mathcal{F}$, neither $f(z)$ nor $f^{(k)}(z)$ has a fixed point in D, then $\mathcal{F}$ is normal.*

Recently, W. Bergweiler and A. A. Eremenko [1] settled a long standing problem by using some results of complex dynamic system. The following conjecture was proposed by W. K. Hayman[6] in 1959.

Problem 2.2 *Let f be a transcendental meromorphic function in the complex plane. Does $f^n f'$ assume every finite non-zero complex value infinitely often for any positive integer n ?*

Hayman himself settled the problem for $n \geq 3$, and $n \geq 2$ in the case of entire functions. Some mathematicians have interested in this problem and it has known that the answer is positive for $n \geq 1$ when f is a transcendental entire function and for $n \geq 2$ in general. When $n = 1$ and meromorphic case, however, the problem is very difficult and stands for many years. In 1994, Bergweiler and Eremenko[1] solved this problem for $n = 1$ and f is a meromorphic function of finite order. Few months later, on the basis of Bergweiler and Eremenko's result, the problem was finally settled by H. Chen anf M. Fang[2], Bergweiler and Eremenko, as well as L. Zalcman independently.

3. A new method for proving normality

The concept of normal family and some criteria for normality are very close connected with the theory of value distribution. During the recent years, there is a new method which easily leads to some new criteria for normality. This method is based on a lemma due to L. Zalcman.

Lemma 3.1 *A family of meromorphic functions in the unit disk is not normal at the origin, if and only if there exists a sequence (f_j) belonging to $\mathcal{F}$, a sequence of complex numbers (z_j) tending to zero, a sequence of positive numbers (ρ_j) tending to zero and a non-constant meromorphic function f in the complex plane such that $f_j(z_j + \rho_j z)$ tends to f uniformly on all compact substes of $\mathbf{C}$ with respect to the spherical distance.*

W. Schwick[11] proved the following criterion for normality.

Theorem 3.2 *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a region D and n and k be two positive integers with $n \geq k + 3$. If every function f(z) belonging to $\mathcal{F}$, satisfies*

$$(f^n)^{(k)}(z) \neq 1, \tag{4}$$

then $\mathcal{F}$ is normal in D.

A young Chinese mathematician Xuecheng Pan[10] extended the Zalcman's lemma and proved the following result.

Theorem 3.3 *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a region D. If every function f(z) belonging to $\mathcal{F}$, satisfies one of the following conditions, then $\mathcal{F}$ is normal in D:*

(a) $f^2 f' \neq 1$,

(b) $f' - af^4 \neq b$, *where a and b are two finite complex numbers with* $a \neq 0$.

Recently Huaihui Chen has done a seies of research on normal families. For instance, he proved [2]

Theorem 3.4 *A family of meromorphic functions belonging to $\mathcal{F}$ posseses the property that $f^n f' \neq a$ for a positive integer n and a finite non-zero complex value a.*

The condition $f^n f' \neq a$ of Theorem 3.4 can be replaced a weaker one.

Theorem 3.4′ *A family of meromorphic functions is normal, if every function f belonging to $\mathcal{F}$ posseses the property that $f^n f' = a$ implies $|f'| \leq M$ for a positive integer n, a finite non-zero complex value a and a positive number M.*

It is natural to pose the following problem.

Problem 3.5 *Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a region D and P be a condition (or a group of conditions) of normality. If every function f belonging to $\mathcal{F}$ posseses the property that $|f'| \leq M$ for all points of D where f does not satisfy P, is $\mathcal{F}$ normal?*

4. Drasin's problem

D. Drasin[3] posed the following problems in 1976.

Problem 4.1 *Let f(z) be meromorphic and of finite order in the complex plane. If the total deficiency of finite complex values of f equals 2, i. e. function $f(z)$ in the plane has countable deficient value at most and the total deficiency does not exceed 2, i. e.*

(5) $$\sum_{a\in\mathbf{C}} \delta(a, f) = 2,$$

and

(6) $$\delta(\infty, f) = 0,$$

must we have

(7) $$\sum_{b\in\overline{\mathbf{C}}} \delta(b, f) = \delta(0, f') = 1?$$

Problem 4.2 *Let f be meromorphic in the complex plane with $\delta(\infty, f) = 0$. Can we have*

(*) $$\textstyle\sum_{a\in\overline{\mathbf{C}}} \delta(a, f) + \sum_{b\in\overline{\mathbf{C}}} \delta(b, f') = 4 \quad ?$$

Problem 4.3 *If the equality (*) is not possible, what is the best upper bound of the left hand side of (*)*

Inorder to answer Drasin's problem, we have the folowing result [18]

Theorem 4.4 *Let f be a transcendental meromorphic function and k be a positive integer. Then we have*

(**) $$\textstyle\sum_{a\in\overline{\mathbf{C}}} \delta(a, f) + \sum_{b\in\overline{\mathbf{C}}} \delta(b, f^{(k)}) \leq 3.$$

The equality of (**) holds if and only if either

(a) $\Theta_E(\infty, f) = 1, \quad \sum_{a\in\mathbf{C}} \delta(a, f) = 1$ *and* $\sum_{b\in\overline{\mathbf{C}}} \delta(b, f^{(k)}) = 2;$

or

(b) $k = 1, \quad \Theta_E(\infty, f) = 0, \quad \sum_{a\in\mathbf{C}} \delta(a, f) = 2$ *and* $\sum_{b\in\overline{\mathbf{C}}} \delta(b, f')) = \delta(0, f) = 1;$

where $\Theta_E(\infty, f)$ is the modofied ramification index of ∞ with respect to f.

Now we can answer Drasin's problems completely. In fact, it is a direct consequence of Theorem 4.4 that the answer of Problem 4.2 is negative and the upper bound for Problem 4.3 equals 3. On the other hand, by a well known fact

$$\sum_{a \in \mathbf{C}} \delta(a, f) \leq \{2 - \delta(\infty, f)\}\delta(0, f') \tag{8}$$

and Theorem 4.4, it is easy to see that the answer of Problem 4.1 is positive.

5. Mues conjecture

Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic function in the complex plane and k be a positive integer. Since $f^{(k)}(z)$ is also a meromorphic function, it is natural to get the precise estimate of total deficiency of $f^{(k)}(z)$.

Hayman[6] pointed out that the total deficiency of all the deficient values of $f^{(k)}(z)$ does not exceed $\frac{k+2}{k+1}$. Then E. Mues[8] improved the bound of this result to

$$\frac{k^2 + 5k + 4}{k^2 + 4k + 2} \tag{9}$$

We proved the following theorem[16].

Theorem 5.1 *Let f(z) be a transcendental meromorphic function in the complex plane and k be a positive integer. Then we have*

$$\sum_{a \in \mathbf{C}} \delta(a, f^{(k)}) \leq \frac{2k+2}{2k+1} \tag{10}$$

where the summation is taken over all the finite complex numbers.

In order to include $\delta(\infty, f^{(k)})$, we have another estimate.

Theorem 5.2 *Under the same hypothesis, we have*

$$\sum_{a \in \overline{\mathbf{C}}} \delta(a, f^{(k)}) \leq 2 - \frac{2k(1 - \Theta_E(\infty, f))}{1 + k(1 - \Theta_E(\infty, f))}. \tag{11}$$

Concerning this topic, Mues[8] posed the following conjecrure, when he improved the Hayman's estimate.

Problem 5.3 $\sum_{a \in \overline{\mathbf{C}}} \delta(a, f^{(k)}) \leq 1.$

Recently, we[18] proved that Mues conjecture is true for almost every positive integer. Then Yuefai Wang[12] improved this result to that Mues conjecture is true, except four positive integers at most.

?

YANG, Lo
Academia Sinica, Institute of Mathematics
BEIJING, China 100080

e-mail: yangl@bepc2.ihep.ac.cn
FAX: 001-86-10-256-8356

参考文献

[1] Bergweiler, W and Eremenko, A., *On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order*, preprint.

[2] Chen, H. and Fang, F., *On the value distribution of* ff', preprint.

[3] Drasin, D., An introduction of potential theory and meromorphic functions, Complex analysis and its applications, Vol. **1**, LAEA, Vienna(1976), 1-93.

[4] Drasin, D., *Proof of a conjecture of F. Nevanlinna concerning functions which have deficiency sum two*, Acta Math., **158**(1987), 1-94.

[5] Golberg, A. A., *Existence and some properties of meromorphic functions for which Yang Lo deficiency relation reaches equality*, Matematychni Studii, 1944, No. **3**, 53-60.

[6] Hayman, W. K., *Picard values of meromorphic functions and their derivatives*, Ann. of Math., **70**, 9-42.

[7] Hayman, W. K., Meromorphic functions, Oxford: Clarlendon Press, 1975.

[8] Mues, E., *Über die Defekt und Verzweigungsrelation für die Ableitung Meromorpher Funktionen*, Manuscripta Math., **5**(1971), 275-297.

[9] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[10] Pan, Xuecheng, *Bloch's principle and normal criterion*, Sci. Sinica, Series A, **32**(1989), 782-791.

[11] Schwick, W., *Normaility criteria for families of meromorphic functions*, J. d'Analyse Math., **52**(1989), 241-289.

[12] Wang, Yuefai, Total defect of a meromorphic function and all its derivatives, Science in China, Series A, **35**(1992).

[13] Yang, Lo, *The multiple values of meromorphic functions and of combinations of functions*, Chinese Math., **5**(1964), 460-470.

[14] Yang, Lo, *Meromorphic functions and their derivatives*, J. London Math. Soc. , **25**(1982), 288-296.

[15] Yang, Lo, *Normal families and fix-points of meromorphic functions*, Indiana Univ. Math. J., **35**(1986), 179-191.

[16] Yang, Lo, *Precise estimate of total deficiency of meromorphic derivatives*, J. d'Analyse Math. t. **55**(1990), 287-296.

[17] Yang, Lo, Value distribution theory, Springer-Verlag and Science Press, 1993.

[18] Yang, Lo, and Wang, Yuefai, *Drasin's problems and Mues' conjecture, Sciences in China*, Series A, **35**(1992), 1180-1190.

31

2四元変数の超正則関数に関する 超正則被とその超正則凸性

周　棟国　九州大学大学院数理学研究科博士課程一年生

蘇　継紅　九州大学大学院数理学研究科修士課程一年生

松田康雄　九州大学大学院数理学研究科博士課程二年生

李　玲玲　九州大学大学院数理学研究科修士課程二年生

濃野は [6],[7], [8] 及び [9] にて四元数変数の超正則性についての研究を行った。本研究では，その結果，特に，級数展開 [6], [9]，積分表示 [6], [9] を用いて，超正則関数に付いても同時解析接続の Hartogs の現象が見出される事を踏まえ，それを更に $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ の上の Riemann 領域 Dの超正則被 $\tilde{D}$ に抽象化し，更にその超擬凸性を論じる。

References

[1] F. Brackx, *On (k)-monogenic functions of a quaternion variable*, Research Notes in Math. **8**(1976), 22-44.

[2] F. Brackx, *Non (k)-monogenic points of functions of a quaternion variable*, Lecture Notes in Math. **561**(1976), 138-149.

[3] F. G(u)rsey and H. C. Tze, *Complex and Quaternionic Analyticity in Chiral and Gauge Theories-I*, Ann. of Physics **128**(1980), 29-130. H. C. R. Fueter, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reellen Variablen*, Comment. Math. Helv. **7**(1934), 307-330.

[4] R. Fueter, *Über die Analysche Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen*, ibid. **8**(1935), 371-378.

[5] M. Naser, *Hyperholomorphic functions*, Siberian Math. J. **12**(1971), 959-968.

[6] K. Nôno, *Hyperholomorphic Functions of a Quaternionic Variable*, Bull. Fukuoka Univ. of Educ. **32**(1983), 21-37.

[7] K. Nôno, *Characterization of domains of holomorphy by the existence of hyper-conjugate harmonic functions*, Revue Roumaine de math. pures et appl. **31**-2(1986), 159-161.

[8] K. Nôno, *Runge's Theorem for complex valued harmonic and quaternion valued hyperholomorphic functions*, ibid. **32**-2(1987), 155-158.

[9] K. Nôno, *Domains of Hyperholomorphy in* $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$, Bull. Fukuoka Univ. of Educ. **36**(1987), 1-9.

[10] A. Sudbery, *Quaternionic analysis*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **85**(1979), 199-225.

32

無限次元領域の正則性の
岡の原理の成立による特徴付け

周　棟国　九州大学大学院数理学研究科博士課程一年生

孫　光鎬　釜山大学校自然科学大学教授

李　暁東　九州大学大学院数理学研究科修士課程二年生

李　琳　　九州大学大学院数理学研究科博士課程二年生

Cartan[2]-Benke-Stein[1] によれば $\mathbf{C}^2$ の Cousin-I は正則領域，即ち，Stein である。Cousin-II では，真ではない。Lie 群 L の中への正則写像の芽の層を $\mathcal{A}_L$ とし，L が加法群 C の時 $\mathcal{O}$，乗法群 $\mathbf{C}-\{0\}$ の時 $\mathcal{O}*$ と記す。梶原 [9] は $\mathbf{C}^2$ の上の不分岐被拡領域 (D,φ) が $\mathrm{H}^1(D,\mathcal{A}_L)=0$ を満たす為の必要充分条件は D が,$\mathrm{H}^2(D,\mathrm{Z})=0$ を満たす Stein である事を示し，梶原－風間 [19] は,Stein 多様体の領域 D に対して一つの Lie 群 L があって $\mathrm{H}^1(D,\mathcal{A}_L)=0$ が成立すれば D は Stein である事を示し,更に梶原－西原 [21] は Stein 多様体の領域 D が Stein である為の必要充分条件は一つの Lie 群 L があって上記コホモロジーに岡の原理が成立する事である事を示した。

3 次元以上の n 次元の場合，Sèrre[29] によれば $\mathrm{H}^1(D,\mathcal{O})=\mathrm{H}^2(D,\mathcal{O})\overbrace{=\cdots=}\mathrm{H}^{n-1}(D,\mathcal{O})=\mathrm{H}^1(D,\mathcal{A}_L)=0$ が成立し，1 から $n-1$ 次迄のコホモロジーが成立すれば D は Stein である。梶原 [18] は有限の n 次元の Stein 多様体の連続な境界を持つ領域 D に対して，領域 D が Stein である為の必要充分条件は一つの Lie 群 L があって，任意の境界点に対して近傍がありそこでの任意の解析的多重円板 P に対して $D\bigcap P$ と L との組に岡の原理が成立する事である事を示した。

無限次元の場合は，梶原－孫 [22] や今分科会での大貝の結果では，$n=+\infty$ として，全ての次数のコホモロジーが消滅しても正則領域とは限らない。本講演では E を有限開位相を備える局所凸空間ΣC，$\mathcal{O}$ の連続な境界を持つ領域 D に対して，領域 D が Stein である為の必要充分条件は一つの有限次元の可換な Lie 群 L があって，任意の境界点に対して近傍がありそこでの任意の解析的多重円板 P に対して $D\bigcap P$ と L との組に岡の原理が成立する事である事を示す。

References

[1] H. Behnke und K. Stein, *Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgebenen Null-und Pol-stellenflächen*, Jber. D. M. V. **47**(1937), 177-192.

[2] H. Cartan, *Le problème de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes*, C. R. Paris **198**(1934), 1284-1287.

[3] J. Colombeau and B.Perri, *The $\bar\partial$-equation in D.F.N. spaces*, J. Math. Anal. Appl. **78**-2(1980), 466-87.

[4] J. Colombeau and B.Perri, *L'acuteequation $\bar\partial$ dans les ouverts pseudo-convexes des espaces D.F.N.*, Bull. Soc. Math. France. **110**(1982), 15-26.

[5] S. Dineen, *Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces*, Math. Ann. **202**(1973), 337-345.

[6] S. Dineen, *Cousin's first problem on certain locally convex topological spaces*, Acad. Brasil. Cienc. **48**-1(1976), 229-236.

[7] L. Gross, *Potential theory on Hilbert spaces,* J. Funct. Anal. **1** (1967), 123-181.

[8] L. Gruman, *The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces,* Illinois J. Math. **18**(1974), 20-26.

[9] J. Kajiwara, *Note on a Cousin-II domain over* $\mathbb{C}^2$, Kōdai Math. Sem. Rep. **17**-1(1965), 44-47.

[10] J. Kajiwara, *Some characterization of Stein manifold through the notion of locally regular boundary points,* Kōdai Math. Sem. Rep. **16**-4(1964), 191-198.

[11] J. Kajiwara, *On the limit of a monotonous sequence of Cousin's domains,* J. Math. Soc. Japan **17**-1(1965), 36-46.

[12] J. Kajiwara, *Some extensions of Cartan-Behnke-Stein's theorem,* Pub. RIMS Kyoto Univ. **2**-1(1966), 133-156.

[13] J. Kajiwara, *Cousin domains over complex projective 2-space,* Mathematica Balkanica **3**(1972), 184-187.

[14] J. Kajiwara, *Domain with many vanishing cohomology sets,* Kōdai Math. Sem. Rep. **26**-2(1975), 258-266.

[15] J. Kajiwara, *La réciproque du théorème d'annulation et de finitude de cohomology dans L'espace produit d'une famille dénombrable de sphère de Riemann,* Bull. Soc. Math. France **103**(1975), 129-139.

[16] J. Kajiwara, *Le principe d'Oka pour espaces vectoriels munis de la toplogie f-ouverte,* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **29**(1975), 361-370.

[17] J. Kajiwara, *Characterization of Stein subdomains of a complex projective space through Oka's principle,* Mathematica Balkanica **8**(1978), 131-137.

[18] J. Kajiwara, *Equivalence of Steinness and validity of Oka's principle for domains with continous boundaries of a Stein manifold,* Fac. Sci. Kyushu Univ. **33**(1979), 83-93.

[19] J. Kajiwara and H. Kazama, *Oka's principle for relative cohomology sets,* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **23**-1(1969), 33-70.

[20] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set,* Math. Ann. **204**(1973),1-12.

[21] J. Kajiwara und M. Nishihara, *Charakterisierung der Steinschen Teilgebieten durch Okasches Prinzip in zwei-dimensioaler Steinscher Mannigfaltigkeit,* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **33**(1979),71-76.

[22] J. Kajiwara and K. H. Shon, *Continuation and vanishing theorem for cohomology of infinite dimensional spaces,* The Pusan Kyŏngnam Math. J. **9**-1(1993), 1-9.

[23] J. Kajiwara and K. Watanabe, *Domain with a vanishing cohomology set in two dimensional complex projective space,* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **32**(1978), 73-80.

[24] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: II Domaine d'holomorphie,* J. Sci. Hiroshima Univ. **17**(1937),115-130.

[25] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: III Deuxiéme probléme de Cousin,* J. Sci. Hiroshima Univ. **9**(1938), 7-19.

[26] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: IX Sur quelques notions arithmétiques,* Bull. Soc. Math. France, **78**(1950), 1-27.

[27] P. Raboin, *Resolution de lēquation*$\overline{\partial} f = F$ *sur un espace de Hilbert,* Bull. Soc. Math. France, **107**(1979), 225-240.

[28] G. Scheja, *Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen,* Math. Ann. **144**(1961), 345-360.

[29] J. P. S èrre, Dans Séminaire H.Cartan **3** Ecole Normare Supérieur, Paris, 1951-1952.

[30] R.L.Soraggi, *The* $\overline{\partial}$*-problem for a (0,2)-form in a D.F.N.space,* J. Func. Anal. **98**(1991), 380-402.

33

無限次元の藤田型定理とスペクトラム

金 起汎　九州大学大学院数理学研究科短期交換留学生

金　大圭　九州大学大学院数理学研究科博士課程二年生

李　琳　　九州大学大学院数理学研究科博士課程二年生

藤田 [2] は [1] の結果を一般化し，有限次元の射影空間の有限個の直積上の擬凸領域が Stein 多様体と成分を構成する幾つかの射影空間の積である事を示した。　一方，岩橋 [3] は連結複素空間 X が Stein である為の必要充分条件は，X の正則関数全体のなす algebra を $H(X)$，$H(X)$ の non trivial characters 全体，即ち spectrum を $S(H(X))$ とすると，$X = S(H(X))$ が成立する事である事を示した。次いで，Rossi[7] は Stein 多様体の上の領域Ωの spectrum$S(H(\Omega))$ はΩの正則被$\tilde{\Omega}$に一致する事を示した。　無限次元の空間に関しては，梶原－金鍾晋－李琳－渡邊 [4] は，任意個数の射影空間の直積空間の上の領域Ωの正則被$\tilde{\Omega}$に対して上記藤田型の定理を示し，Ωの spectrum $S(H(\Omega))$ はΩの Malgrange[5] の意味での正則被 $tilde\Omega$の Remmert[6] の意味での reduction に等しい事を示した。　ここでは積空間では無く和空間$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}_{n_j}$の上の領域$\Omega$の正則被 $tilde\Omega$に対して上記藤田型の定理を示し，更に Ωの spectrum $S(H(\Omega))$ はΩの Malgrange[5] の意味での正則被 $tilde\Omega$の Remmert[6] の意味での reduction に等しい事を示す。

References

[1] R. Fujita, *Domaines ponit critique intérieur sur l'espace projectif complexe*, J. Math. Soc. Japan **15**-4(1963), 443-473.

[2] R. Fujita, *Domaines ponit critique intérieur sur l'espace produit*, J. Math. Kyoto Univ. **4**-3(1965), 493-514.

[3] R. Iwahashi, *A characterization of holomorphically complete spaces*, J. Math. Soc. Japan **9**-4(1960), 205-206.

[4] J. Kajiwara, J.J. Kim, L. Li and H. Watanabe, *On spectrum for a domain over a product space of complex projective spaces*, Math. Rep. Univ. **18**-2(1992), 51-64.

[5] B. Malgrange, Lectures on the theory of functions of several complex variables, Tata Insst. Bombay(1958), 130 pages.

[6] R. Remmert, *Reduction of complex spaces*, Sem. on analytic funct. I. Princeton(1957), 190-205.

[7] H. Rossi, *On Envelope of Holomorphy*, Comm. on Pure and Appl. Math. **16**(1963), 9-17.

[8] M. Schottenloher, *Spectrum and envelope of holomorphy for infinite dimensional Riemann domains*, Math. Ann. **263**(1983), 213-219.

34

無限次元の助変数を伴う線形微分方程式の大域的正則解の存在の局所的特徴付け

孫 光鎬 釜山大学校自然科学大学教授

辻 美輝 九州大学大学院数理学研究科博士課程一年生

mを正の整数，Sを有限開位相τ_0を持つ局所凸C-線形空間，Ωを積空間$\mathbf{C}\times S$の擬凸領域，$\pi:\mathbf{C}\times S\to S$を標準射影とする。任意の$(z,s)\in\Omega$に対して，$\Omega(z,s)$を$(z,s)$を含む$\pi^{-1}(z,s)$の連結成分とし，これを切り口と呼ぶ。$\tilde{\Omega}$を切り口$\Omega(z,s)$全体の集合，$\varphi:\Omega\to\tilde{\Omega}$を標準写像とし，$\varphi$が連続であるような最強位相を導入すると，$\tilde{\Omega}$は$\Omega$の商空間である。

$a(z,s)$をΩ上の複素数値又はm次の複素行列値正則関数とし，微分作用素

$$T=:\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}-a(z,s) \tag{1}$$

を導入し，Ω上の正則関数の芽の層$\mathcal{O}$に対して，大域的正則解が常に存在して

$$\mathrm{H}^1(\Omega(z,s),\mathrm{Ker}T)=\frac{\mathrm{H}^0(\Omega,\mathcal{O}^m)}{T(\mathrm{H}^0(\Omega,\mathcal{O}^m))}=0 \tag{2}$$

が成立する為の条件を論じよう。

上述の様な構造層のコホモロジーが消滅するDFN等（[26]等）の空間では，[2]式の第二式$=0$が成立すれば，梶原-毛織（現姓は佐藤）[19]の手法により，切り口$\Omega(z,s)$は一斉に単連結であるか，一斉に二重連結でしかも，$\mathrm{H}^1(\Omega(z,s),\mathrm{Ker}T)=0$であるかの何れかである。更に若干の条件を加えると，$\tilde{\Omega}$の位相は分離的で，前者では被拡領域$(\tilde{\Omega},\varphi)$は正則分離正則領域と言う意味でSteinであるが，この性質は，上述の様なLeviの問題が肯定的に解けるDFN等の空間では，局所的な擬凸性と同値である。後者では切り口にて非斉次正則解の存在は一意的であり，この性質も又局所的である。

References

[1] H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n complexes variables,* Bull. Soc. Math. France. **78**(1950), 28-64.

[2] H. Cartan, Séminaire E.N.S., École Normare Supérieur, Paris, 1951/1952.

[3] G. Coeuré *L'équation $\bar{\partial}u=F$ en dimension infinite,* université Lille Publ. Int. **131**(1968), 6-9.

[4] J. Colombeau and B. Perri, *The $\bar{\partial}$-equation in D.F.N. spaces,* J. Math. Anal. Appl. **78**-2(1980), 466-87.

[5] J. Colombeau and B. Perri, *L'équation $\bar{\partial}$ dans les ouverts pseudo-convexes des espaces D.F.N.*, Bull. Soc. Math. France. **110**(1982), 15-26.

[6] S. Dineen, *Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces,* Math. Ann. **202**(1973), 337-345.

[7] S. Dineen, *Cousin's first problem on certain locally convex topological spaces,* Acad. Brasil. Cienc. **48**-1(1976), 229-236.

[8] L. Gross, *Potential theory on Hilbert spaces,* J. Funct. Anal. **1** (1967), 123-181.

[9] L. Gruman, *The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces,* Illinois J. Math. **18**(1974), 20-26.

[10] S. Hitotumatu, *Theorem of analytic functions of several complex variables(in Japanese)*, Baihuukan, 1960.

[11] J. Kajiwara, *On an application of L. Ehrenpreis' method to ordinary differential equations*, Kōdai Math. Sem. Rep. **15**-2(1963), 94-105.

[12] J. Kajiwara, *Some systems of partial differential equations in the theory of soil mechanics*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. **24**(1970),147-230.

[13] J. Kajiwara, *Some systems of partial differential equations in comx domains*, Mem. fac. Sci. Kyushu Univ. **25**(1971),21-143.

[14] J. Kajiwara, *Le principle d'Oka pour certaines espaces vectoriets munis de la topologie f-ouvert*, Mem. Fac. Sci. Kyushu. Univ. **26**(1973), 361-370.

[15] J. Kajiwara, *Solutions holomorphes globales des équations différentielles linéaire à valeurs dans un espace de Hilbert et à pramètre complexe*, Jap. J. of Math. **2**-1(1976), 91-107.

[16] J. Kajiwara, *Global existence of holomorphic solutions of differential equations with complex parameters*, Proc. Colloq. on Differential Equations **3**(1992) VSP(Utrecht), 119-132.

[17] J. Kajiwara, *Localization of Global Existence of Holomorphic Solutions of Differential Equations with Complex Parameters*, Proc. Colloq. on Differential Equations **4**(1993) VSP(Utrecht), 147-156.

[18] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set*, Math. Ann. **204**(1973), 1-12.

[19] J. Kajiwara and Y. Mōri, *On the existence of global holomorphic solutions of differential equations with complex parameters*, Czechoslovak Math. J. **24**(99)(1974), 444-454.

[20] J. Kajiwara and M. Nishihara, *Characterisierung der Steinschen Teilgebieten durch Okasches Prinzip in Zwei-dimensionaler Mannigfaltigkeit*, Mem. Fac. Sci.Kyushu. Univ. **33**(1979), 71-76.

[21] J. Kajiwara and K. H. Shon, *Continuation and vanishing theorem for cohomology of infinite dimensional space*, Pusan Kyônnam Math. J. **1**(1993) , 65-73.

[22] K.Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: VII Sur quelque notion arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France, **78**(1950), 1-27.

[23] P. Raboin, *Résolution de l'équation* $\bar{\partial} f = F$ *sur un espace de Hilbert*, Bull. Soc. Math. France, **107**(1979), 225-240.

[24] G. Scheja, *Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen*, Math. Ann. **144**(1961), 345-360.

[25] J. P. Sèrre, Dans Séminaire H.Cartan **3**, Ecole Normare Supérieur, Paris, 1951/1952.

[26] R. L. Soraggi, *The* $\bar{\partial}$*-problem for a (0,2)-form in a D.F.N. space*, J. Func. Anal. **98**(1991), 380-402.

[27] R. L. Soraggi, *The symmetric anti-linear components of the canonical solution for the* $\bar{\partial}$*-oerator*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **93**-1(1993), 111-122.

[28] H. Suzuki, *On the global existence of holomorphic solutions of* $\partial u/\partial x_1 = f$, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku **11**(1972), 253-258.

[29] I. Wakabayashi, *Non existence of holomorphic solutions of* $\partial u/\partial z_1 = f$, Proc. Jap. Acad. **44**(1968), 820-822.

35

正則関数空間への正射影

金 大圭 九州大学大学院数理学研究科博士課程二年生

有限又は無限次元の領域 Ω 上自乗可積分な関数の類のなす Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ から自分自身の中への加法的作用素

(1) $$\bar{\partial} : \{f \in L^2(\Omega); \bar{\partial} f \in L^2(\Omega)\} \to L^2(\Omega)$$

の核を $A^2(\Omega)$ とし，正射影

(2) $$P : L^2(\Omega) \to A^2(\Omega)$$

を核関数や Hankel 作用素との絡みで，更に，無限次元では，抽象 Wiener 測度を用いて論じる。

References

[1] J. Arazy, S. Fisher, S. Janson and J. Peetre, *Membership of Hankel Operators on the ball in Unitary ideals,* J. London Math. Soc. **43(2)**(1991), 485–508.

[2] D. Bekolle, C. A. Berger, L. A. Coburn and K. H. Zhu, *BMO in the Bergman Metric on Bounded Symmetric Domains,* J. Funct. Anal. **93** (1990), 310–350.

[3] S. R. Bell, *Proper holomorphic mappings and the Bergman projection,* Duke Math. J. **48**(1981), 167–175.

[4] C. A. Berger, L. A. Coburn and K. H. Zhu, *BMO on the Bergman Spaces of the classical Domains,* Bull. Amer. Math. Soc. **17**(1987), 133–136.

[5] J. Colombeau and B. Perri, *The $\overline{\partial}$-equation in D.F.N. spaces,* J. Math. Anal. Appl. **78**-2(1980), 466-87.

[6] J. Colombeau and B. Perri, *L'équation $\overline{\partial}$ dans les ouverts pseudo-convexes des espaces D.F.N.*, Bull. Soc. Math. France. **110**(1982), 15-26.

[7] T. Honda, J, Kajiwara, J.-J. Kim, L. Li, M.Nishihara, S. Ohgai and N. Sugawara, *Kernel functions for domains of dimension finite,* Math. Rep. Kyushu University **18-2**(1992), 9–19.

[8] J, Kajiwara and L. Li, *Reproducing Kernels for infinite dimensional domains* , Procedings of the International Colloquium on Differential Equations, VSP(Utrecht) **5**(1994), 153–162.

[9] D. K. Kim, *On Hankel Operator*, submitted to the Proceedings of the Third International Research Institute of the Mathematical Society of Japan on Geometric Complex Analysis(1995 March).

[10] D. K. Kim and J.-J. Kim, *On Henkel Operator with Symbol in L^∞*, Bull. Honam Math. Soc. **11**(1994), 153–161.

[11] D. K. Kim, K.-B. Kim and D. G. Zhou, *Hankel Kernel for Infinite Dimensional Domains,* Proceedings of the Korean-Japanese Colloquium on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysisn **2**(1994), 117–120.

[12] S. G. Krantz, Function Theory of Several Complex Variable 2/ed, Wadsworth publishing Belmont, 1992.

[13] H. L. Li, *Characterizations of certain classes of Hankel operators on the Bergman spaces of the unit disk*, J. Funct. Anal. **110**(1992), 247-271.

[14] H. L. Li and D. H. Luecking, *BMO on strongly pseudoconvex domains: Hankel operators, duality and $\bar\partial$-estimates*, Trans. Amer. Math. Soc. **346**-2(1994), 661-691.

[15] P. Raboin, *Résolution de l'équation $\bar\partial f = F$ sur un espace de Hilbert,* Bull. Soc. Math. France, **107**(1979), 225-240.

[16] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbf{C}^n$, springer, 1980.

[17] R. L. Soraggi, *The $\bar\partial$-problem for a (0,2)-form in a D.F.N. space,* J. Func. Anal. **98**(1991), 380-402.

[18] R. L. Soraggi, *The symmetric anti-linear components of the canonical solution for the $\bar\partial$-oerator,* Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **93**-1(1993), 111-122.

[19] K. Stroethoff, *Compact hankel operators on the Bergman spaces of the unit ball and polydisk in $\mathbf{C}^n$*, J. Operator theory **23**(1990), 153–170.

[20] R. M. Timoney, *Bloch functions in several complex variables I,* Bull. London Math. Soc. **12**(1980), 241–267.

[21] K. H. Zhu, *VMO, ESV, and Toeplitz Operators on the Bergman Space,* Trans. Amer. Math Soc. **302**(1987), 617–646.

[22] K. H. Zhu, *Positive Toeplitz Operators on Weighted Bergman Spaces of Bounded Symmetric Domains,* J. Operator Theory **20**(1988), 329–359.

[23] K. H. Zhu, *Mddotobius Invariant Hilbert Spaces of Holomorphic Functions in the Open Unit Ball of $\mathbf{C}^n$*, Trans. Amer. Math Soc. **323**(1991), 823–842.

36

不完全ガンマ関数と核関数

李 琳 九州大学大学院数理学研究科博士課程二年生

Aronszaijn[1] によれば，領域 Dの核関数 $K(z,w)$ を初めて $D\times D$上の関数として把握したのは Mercer[16] である。Bergman[2],[3] は D上自乗可積分な正則関数のなす Hilbert 空間 $\mathcal{A}^2(\Omega)$ の完全正規直交基底 $\{\varphi_\nu(z);\nu=1,2,3,\cdots\}$ を用いて，表現

$$K(z,w):=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi(z)\overline{\varphi(w)} \tag{1}$$

を与えた。

無限次元空間での核関数は Gross[7],[8],[9] の抽象 Wiener 測度論並びに Skorohod[18] の平行移動論を用いて，講演者の所属するゼミにて [6],[13],[14] 等の研究がなされ，講演者は [15] にて多重円板の核関数を具体的に求めた。

ここでは，多変数の不完全ガンマ関数を導入し，多重円板や楕円体の核関数を求め，$K(z,Z)$ が領域 Dを収束域とする事を示す。

References

[1] N. Aronszaijn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68**(1950), 337–404.

[2] S. Bergman, Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, avec les application à la théorie des fonctions analytiques, Mém. Sci. Math. **106**(1947), Gauthies-Villars (Paris).

[3] S. Bergman, Sur la fonction-noyaus d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes, Mém. Sci. Math. **108**(1948), Gauthies-Villars (Paris).

[4] J. Colombeau and B. Perri, *The $\overline{\partial}$-equation in D.F.N. spaces,* J. Math. Anal. Appl. **78**-2(1980), 466-87.

[5] J. Colombeau and B. Perri, *L'équation $\bar{\partial}$ dans les ouverts pseudo-convexes des espaces D.F.N.*, Bull. Soc. Math. France. **110**(1982), 15-26.

[6] T. Honda, J, Kajiwara, J.-J. Kim, L. Li, M.Nishihara, S. Ohgai and N. Sugawara, *Kernel functions for domains of dimension finite,* Math. Rep. Kyushu University **18-2**(1992), 9–19.

[7] L. Gross, Harmonic analysis on Hilbert spaces, Mem. Amer. Math. Soc. **46**(1963).

[8] L. Gross, *Potential theory on Hilbert space,* J. Functional Anal. **1**(1967), 123–181.

[9] L. Gross, *Abstract Wiener measure and infinite dimensional potential theory,* Lectures in Modern Analysis and Applications II, Lecture Notes in Math. **140**(1970), 84–116.

[10] C. J. Henrich, *The $\bar{\partial}$-equation with polynomial growth on a Hilbert space,* Duke Math. J. **40**-2(1973), 279–306.

[11] T. Honda, J.Kajiwara, J. J. Kim, L. Li, M. Nishihara, S. Ohgai and N. Sugawara, *Kernel functions for domains of dimension infinite* Math. Rep. Kyusyu Univ. **18** -2(1992), 51–64.

[12] J. Kajiwara, *Opérateur d" dans les espaces de Hilbert avec croissance polynomiale,* Sém. Lelong, Lecture Note in Math. **474**(1973/74), 91–108.

[13] J. Kajiwara and L. Li, *Reproducing Kernels for infinite dimensional domains,* Proceedings of the Fifth International Colloquium on Differential Equations, VSP(Utrecht), (1994), 153–162.

[14] D. K. Kim, K.-B. Kim and D. K. Zhou, *Hankel Kernel for Infinte Dimensional Domains,* Proc. 2nd Korean-Japanese Colloq. Finte or Infinite Dim. Compl. Anal.(1994), 117–120.

[15] L. Li, *On kernel functions for infinte dimensional polydiscs,* Proc. 2nd Korean-Japanese Colloq. Finte or Infinite Dim. Compl. Anal.(1994), 131–134.

[16] J. Mercer, *Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations,* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **209**, 415–446. P. Raboin, *Résolution de l'équation $\bar{\partial}f = F$ sur un espace de Hilbert,* Bull. Soc. Math. France, **107**(1979), 225-240.

[17] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbf{C}^n$, springer, 1980.

[18] A. V. Skorovod, Integration in Hilbert spaces, Erg. der Math. **79**, Springer Verlag(1974).

[19] R. L. Soraggi, *The $\bar{\partial}$-problem for a (0,2)-form in a D.F.N. space,* J. Func. Anal. **98**(1991), 380-402.

[20] R. L. Soraggi, *The symmetric anti-linear components of the canonical solution for the $\bar{\partial}$-oerator,* Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **93**-1(1993), 111-122.

[21] K. Yoshida, Functional Analysis,Springer Verlag(1974).

37

無限次元の正則写像の接続と像空間の弱円板性

松田　康雄　九州大学大学院数理学研究科博士課程二年生

安達－鈴木－吉田 [1] は有限次元の Stein 多様体 S 上の領域 D より有限次元の複素 Lie 群 L の中への正則写像は D の正則被 $\tilde{D}$ 上の正則写像に拡張される事を示した。梶原－西原－吉田－李は，上記値域を含む空間 L を Bach 複素 Lie 群に一般化し，更に [7] では上記有限次元 S の代わりに定義域を含む空間 E として有開位相を持つ無限次元空間に，[8] では上記 S を有界近似性をもつ分離フレシェ空間にと無限次元化し，更に，吉田 [14] は，レビ問題が解ける局所凸空間上の領域 D に一般化し，D から Bach Lie 群 L への正則写像は一斉に正則被 $\tilde{D}$ 迄同時正則接続される事を示した。

一方，Ban[2] は，Banach 空間上の領域Ωから，弱円板性をもつ Banach 多様体への正則写像が,Ωの正則被$\tilde{\Omega}$に正則接続される事を示した。

又，本テーマは擬凸性と密接な関係がある。風間 [9] は複素 Lie 群の弱 1 －完備性を示した。その無限次元化も講演者の課題である。

本講演では，上述の結果の間の関係を整理すると共に，より広範な局所凸空間上の領域 (Ω,φ) から，弱円板性をもつ複素ベクトル空間への正則写像が，領域 (Ω,φ) の擬凸被 $(\hat{\Omega},\hat{\varphi})$ の正則写像に接続されることを証明する。

Levi の問題が解ければ，$(\hat{\Omega},\varphi)$ は正則被に一致するから，この結果は上記吉田，Ban の結果の更なる一般化である。

第 1 部では，無限次元複素リー群が岡擬凸であることを示す。

第 2 節では，無限次元複素リー群が弱円板性をもつことを示す。

第 3 節では，或種の局所凸空間上の領域の写像に関する被の擬凸性を示す。

References

[1] K. Adachi, M. Suzuki and M. Yoshida, *Continuation of holomorphic mappings. With value in a complex Lie group.* Pacific J. Math. **47**(1973), 1-4.

[2] P. K. Ban, *Banach hyperbolicity and extension of holomorphic maps*, Acta Math. Vietnam. **16**(1991), 187-200.

[3] P. K. Ban, *Some remarks on holomorphic extension in infinite dimensions,Colloquium Mathematicum*, **167**(1994), 155-159.

[4] M. Harita, *Continuation of meromorphic functions in a domain of the cartesian product of denumberable family of complex planes*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **29**-2(1975).

[5] J. Kajiwara, *On the limit of a monotonous sequence of Cousan's domains*,J.Math.Soc.Japan **17**-1(1965), 36-46.

[6] J. Kajiwara, *Some results on the equivalence of complex-analytic fiber bundles*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser.A, **19**-1(1959), 37-48.

[7] J. Kajiwara, L. Li, M. Nishihara and M. Yoshida, *Continuation of holomorphic sections of holomorphic fiber bundles over gomains of infinite dimensional spaces equipped with the finite open topology*, Fukuoka Univ. Sci. Rep **23**-2(1993), 69-79.

[8] J. Kajiwara, L. Li, M. Nishihara and M. Yoshida, *On the Levi problem for holomorphic mappings of Riemann domains over infinite dimensional spaces into a complex Lie group*, Res.Bull.Fukuoka Inst.Tech., **26**-2(1994), 151-161.

[9] H. Kazama, *On psedoconvexity of complex Lie groups*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Series A, Math. **27**-2(1973),241-247.

[10] B. Shiffman, *Extension of Holomorphic Maps into Hermitian Maniford*, Math. Ann. **194**(1971), 249-258.

[11] B. Shiffman, *Extension of holomorphic maps into Hermitian manifolds*, Math.Ann. Vietnam. **16**(1971), 241-253.

[12] B. D. Tac, *Extending holomorphic maps in infinite dimensions*, Ann. Polon. Math. **54**(1991), 241-253.

[13] D. D. Thai, *On the D^*-extension and the Hartogs extension*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **18**(1991), 13-38.

[14] M. Yoshida, *On the Continuation of Holomorphic Mapping*, to appear in Irish Mathematical Society Bulletin, **33**, December,(1955).

38

無限次元空間に於けるコホモロジー消滅と岡の原理の成立

大貝　聖子　九州大学大学院数理学研究科博士課程二年生

Eを有限開位相を備える局所凸空間ΣC，$\mathcal{O}$をその構造層，Dをその擬凸領域，φをD上のq-擬凸関数とする。任意の正の整数p,qに対して，開集合

(1) $$\Omega := \{x \in D; \varphi(x) \underset{>}{\cancel{<}} c\}$$

でのコホモロジー消滅定理

(2) $$\mathrm{H}^p(\Omega, \mathcal{O}) = 0$$

を証明し，併せて Ω での岡の原理の成立を論じる。

猶，次回は，帰納極限の成分 C^n等を Hilbert 空間等に置き換えて，Eが DFN 空間の場合に挑む。

$n-q+1$ 正

n 正

$q=1$

$q=1$

References

[1] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitede pour la cohomology des espaces complexs,* Bull. Soc. Math. France **90**(1962), 193-259.

[2] H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n complexes variables,* Bull. Soc. Math. France. **78**(1950), 28-64.

[3] H. Cartan, Séminaire E.N.S., Ecole Normare Supérieur, Paris, 1951/1952.

[4] G. Coeuré *L'équation $\overline{\partial}u = F$ en dimension infinite,* université Lille Publ. Int. **131**(1968), 6-9.

[5] J. Colombeau and B. Perri, *The $\overline{\partial}$-equation in D.F.N. spaces,* J. Math. Anal. Appl. **78**-2(1980), 466-87.

[6] J. Colombeau and B. Perri, *L'équation $\overline{\partial}$ dans les ouverts pseudo-convexes des espaces D.F.N.,* Bull. Soc. Math. France. **110**(1982), 15-26.

[7] S. Dineen, *Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces,* Math. Ann. **202**(1973), 337-345.

[8] S. Dineen, *Cousin's first problem on certain locally convex topological spaces,* Acad. Brasil. Cienc. **48**-1(1976), 229-236.

[9] L. Gross, *Potential theory on Hilbert spaces,* J. Funct. Anal. **1** (1967), 123-181.

[10] L. Gruman, *The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces,* Illinois J. Math. **18**(1974), 20-26.

[11] C. J. Henrich, *The $\overline{\partial}$ -equation with polynomial growth on a Hilbert space,* Duke Math. J. **40**-2(1973), 279-306.

[12] S. Hitotumatu, *Theorem of analytic functions of several complex variables(in Japanese),* Baihuukan, 1960.

[13] J. Kajiwara, *La réciproque du théorèm d'annalation et de finitude de cohomologie dans l'espace produit d'une famililie dénombrable de sphère de Riemann,* Bull. Soc. Math. France. **103**(1975), 129-139.

[14] J. Kajiwara, *Le principle d'Oka pour certaines espace de dimensional infini,* C.R.Paris **16**(1975), 1055-1056.

[15] J. Kajiwara, *Le principle d'Oka pour certaines espaces vectoriets munis de la topologie f-ouvert,* Mem. Fac. Sci. Kyushu. Univ. **26**(1973), 361-37.

[16] J. Kajiwara and H. Kazama, *Two dimensional complex manifold with vanishing cohomology set,* Math. Ann. **204**(1973),1-12.

[17] J. Kajiwara and M.Nishihara, *Characterisierung der Steinschen Teitgebieten durch Okasches Prinzip in Zwei-dimensionater Mannigfasltigkeit,* Mem. Fac. Sci.Kyushu. Univ. **33**(1979),71-76.

[18] J. Kajiwara and K. H .Shon, *Continuation and vanishing theorem for cohomology of infinite dimensional space,* Pusan Kyônnam Math. J.(1993) **1**, 65-73.

[19] P. Mazet, *Un théorèm d'hyperbolicite pour l'opèrateur $\overline{\partial}$ sur les espaces de Banach,* C. R. Paris **292**(1981), 31-33.

[20] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques plusieurs variables: VII Sur quelque notion arithm'etiques,* Bull. Soc. Math. France, **78**(1950), 1-27.

[21] P. Raboin, *Résolution de l'équation $\overline{\partial}f = F$ sur un espace de Hilbert,* Bull. Soc. Math. France, **107**(1979), 225-240.

[22] G. Scheja, *Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen,* Math. Ann. **144**(1961), 345-360.

[23] J. P. Sèrre, Dans Séminaire H.Cartan **3**, Ecole Normare Supérieur, Paris, 1951-1952.

[24] R. L .Soraggi, *The $\overline{\partial}$-problem for a (0,2)-form in a D.F.N.space,* J. Func. Anal. **98**(1991), 380-402.

39　C^2 の多項式自己同型の不動点について

上田 哲生　　京都大学 総合人間学部

2次元複素数空間 C^2 からそれ自身への多項式の組による全単射は次の写像のいずれかに共役であることが知られている（Friedland – Milnor）.

（1）　アフィン写像　$(x,y) \to (ax+by+c, a'x+b'y+c')$

（2）　初等写像　$(x,y) \to (ax+b, cy+P(x))$
ここで $P(x)$ は多項式.

（3）　いくつかの一般エノン写像の合成 $F = F_n \circ \cdots \circ F_1$
$F_\nu : (x,y) \to (y, P_\nu(y) - \delta_\nu x) \qquad (\nu = 1, ..., n)$
ここで $P_\nu(y)$ は $k_\nu(\geq 2)$ 次多項式, $\delta_\nu \neq 0$.

（1），（2）の場合に F の不動点を記述するのは容易である. 以下（3）の写像 F について述べる.

まず, この場合
F の次数 $k = \deg F = k_n \cdots k_1$,
F のヤコビ行列式 $\delta \equiv \delta_n \cdots \delta_1$
であることに注意する.

定理 (Friedland – Milnor)　写像 F は（重複度を込めて数えて）k 個の不動点を持つ.

写像 F が重複不動点を持たない場合を考える. F の不動点を $a_1, ...,$ a_k とする. 各不動点 a_j における F の微分 $F'(a_j)$ の固有多項式を

$$\Phi_j(t) = (t - \lambda_{j,1})(t - \lambda_{j,2})$$

とする. 固有値は $\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}$. 定義によって

$$\det(I - F'(a_j)) = \Phi_j(1) = (1 - \lambda_{j,1})(1 - \lambda_{j,2})$$

なることに注意する.

定理　F が重複不動点をもたなければ，次の等式が成り立つ：

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\Phi_j(1)} = 0$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-\lambda_{j,1})(1-\lambda_{j,2})}$$

系

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{1-\lambda_{j,1}} + \frac{1}{1-\lambda_{j,2}} \right) = k$$

系　F が重複不動点をもたず，かつ $|\delta| \neq 1$ ならば，F は鞍型不動点を持つ．ここで不動点 a_j が鞍型であるとは，$|\lambda_{j,1}|, |\lambda_{j,2}|$ の一方が 1 より大，他方が 1 より小なることをいう.

セゲー核関数とカラテオドリーのMaximalteiler問題

松浦省三　　福井工業大学

有界領域$D, D' \in \mathbb{C}^n$における関数族$\mathcal{F}=\{f\in H^n(D, D') \mid f(0)=0\}$に対して

$$|J_{\hat{f}}(0)| = \sup\{|J_f(0)| \mid f\in\mathcal{F}\}$$

をみたす極限関数$\hat{f}\in\mathcal{F}$が存在するとき，$\hat{f}(D)$をD'のMaximalteiler(mt.)と定義し，$\hat{f}$をDのmt写像とよぶ。

カラテオドリ[1]は(i)ポリシリンダー$P_n\to$超球B_n，及び(ii)$B_n\to P_n$の双方向に対して，それぞれmt.を決定した.

一方窪田氏[3]は，リーマンの写像Thの場合を含む，多変数の場合への類似として，あるcanonical性を持った有界対称領域Rに対し，上記(i)を拡張し，Rの，$B_n(0, \rho_R)$へのmt写像は$\hat{f}(z)=Uz$ $(U^*U=E_n)$に限ることを示した.

$0 \leqq r < 1$
$r\overline{M} \subset M$

定理 Mを有界~~星~~強型 complete circular domainとする.

(1) MがProp(β)及びProp(∂)を持つとき，$B_n(0,\rho_M)$ $(\rho_M := \inf\{\rho \mid M\subset B_n(0,\rho)\})$への，$M$のmt写像$\hat{f}$は$\hat{f}(z)=Uz$ $(U^*U=E_n)$に限る.

prop(β) $H_M(0,0) = \partial_z^* \partial_z \log S_M(0,0)$, Szegöの核関数

prop(γ) $\beta M \subset \partial B_n(0, \rho_M)$. 〃 $b^2 E_n$

(2) M が (1) の条件に加えて, convex かつ circular with (γ)

$\sup\{|z_i| \mid z = {}^t(z_1, \cdots, z_n) \in M\} = \gamma_M$ $(\gamma_M := \sup\{\rho \mid M \supset B_n(0,\rho)\})$

をみたす z_i が存在するならば, $B_n(0, \rho_M)$ の, M への

mt写像 ~~$\hat{f}$ は $\hat{f}(z) = Uz$ $(U^*U = E_n)$ に限る~~.

上記(1)は溼田氏の, 又(1), (2)はカラテオドリの場合を含む. 証明は, セゲー核関数 S_M on $H_2(\beta M)$ と, $H_2^n(\beta M)$-minimal problem の解を利用する.

References.

1. C. Carathéodory, Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Verändelichen erzeugt werden, Math. Z. 34 (1932), 758-792

2. A. Korányi, The poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. Math. 82 (1965), 332-350.

3. Y. Kubota, An extremal problem on bounded symmetric domains, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 126-130.

4. W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag New York Inc. 1980.

41 多重複素グリーン関数と被覆写像

東 川 和 夫　　富 山 大 理

$\mathbf{C}^n$の領域 D と, その上の点 p に対して, D上の $[-\infty, 0)$ 値多重劣調和関数 fで $f(z) - \log\|z-p\| \leq O(1)$ as $z \to p$ を満たすものの全体を $\mathrm{PS}^D(p)$ で表すとき, D上の p で極をもつ多重複素グリーン関数 $g^D(\cdot, p)$ が次で定義される:

$$g^D(q,p) = \sup\{f(q); f \in \mathrm{PS}^D(p)\}, \quad q \in D.$$

関数 g^Dは, 双正則写像で不変である. 一般に g^Dは 2 変数の関数として可換ではない. また, p の正則ベクトル $(p; X) \in T_pD = \{p\} \times \mathbf{C}^n$に対して,

$$P^D(p; X) = \limsup_{\lambda \to 0} \frac{\exp g^D(p + \lambda X, p)}{|\lambda|}$$

と定義すれば, P^Dは双正則写像に関して不変な D上の擬計量である. Dが双曲型リーマン面のときには, g^D は通常のグリーン関数のマイナスになり, 擬計量 P^Dはロバン定数から決まる capacity と呼ばれているものになる.

領域 G から D への正則被覆写像 $\Phi : G \to D$ と $p, q \in D$ に対して, $\Phi^{-1}(p)$ 及び $\Phi^{-1}(q)$ の元をそれぞれ番号付けて, $a_0, a_1, \ldots$ 及び $b_0, b_1, \ldots$ とする. このとき, 次が成り立つ.

定理 I ([A]) (i) $g^D(q,p) \geq \sum_{j \geq 0} g^G(b_j, a_0)$.
(ii) $g^D(q,p) \geq \sum_{j \geq 0} g^G(b_0, a_j)$.

(ii) の証明には, Poletsky [PS] によって得られた, D内の正則円板族による g^D の特徴付けが使われる.

$C^D \leqq P^D \leqq K^D$

定理 II ([A]) $C(p) = \prod_{j\geq 1} \exp g^G(a_0, a_j)$ とおくとき, $0 \leq C(p) \leq 1$ であり, 各接ベクトル $(a_0; X) \in T_{a_0}G$ に対して,

$$(*) \qquad C(p)P^G(a_0; X) \leq P^D(p; \Phi'(a_0)X) \leq P^G(a_0; X).$$

Myrberg [M] は, G が双曲型リーマン面, D が $\mathbf{C}$ の単位円板のときに, 定理 I の (i) 及び (ii) において等号が成り立つ事を示した. そしてこのとき, 定理 II の $(*)$ において左側の不等式が等号として成立する ([S]). しかしながら, 次の 2 次元の例は, このいずれにおいても, 等号が一般には成立しないことを示している.

命題 III ([A]) $G = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1, z_2 \neq 0\}$, $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; |z_1|^2 + |z_2| < 1, z_2 \neq 0\}$, $\Phi : G \ni (z_1, z_2) \mapsto (z_1, (z_2)^2) \in D$, $a_0 = (0, b) \in G$, $p = (0, b^2) \in D$, $X^1 = (0,1)$, $X^2 = (1,0) \in \mathbf{C}^2$ とする. このとき, $0 < C(p) < 1$ であり次が成り立つ:

$$C(p)P^G(a_0; X^1) = P^D(p; \Phi'(a_0)X^1) < P^G(a_0; X^1),$$

$$C(p)P^D(p; \Phi'(a_0)X^2) < P^D(p; \Phi'(a_0)X^2) = P^G(a_0; X^2).$$

参考文献

[A] K. Azukawa, *The pluri-complex Green function and a covering mapping*, *to appear in* Michigan Math. J.

[M] P. J. Myrberg, Acta Math. 61(1983), 39-79.

[PS] E. A. Poletsky and B. V. Shabat, Several Complex Variables III, G. M. Khenkin (ed.), Springer Verlag, 1989, pp. 63-112.

[S] N. Suita, Arch. Rational Mech. Anal., 46(1972),212-217.

42

On Relative Base Point Freeness of Adjoint Bundle

SHIGEHARU TAKAYAMA* NAGOYA UNIVERSITY

Recently, Tsuji [T2] has proven the following theorem which gives the complete affirmative answer to the global generation part of Fujita's conjecture [F]:

Tsuji's effective base point freeness theorem. *Let X be an n-dimensional projective manifold defined over $\mathbb{C}$ and let L be an ample line bundle on X. Then $\mathcal{O}_X(K_X \otimes L^{\otimes m})$ is generated by global sections for every $m > n$.*

Although Tsuji had to overcome some technical difficulties to deal with the case of the best constant $n+1$, the basic idea of the proof (from [T1]) is extremely simple and can be applied to a variety of contexts. In this talk I would like to mention the following relative version:

Main Theorem. *Let $f : X \longrightarrow Y$ be a projective morphism from a complex manifold X to a complex space Y, and let L be a relatively ample line bundle on X. Then the natural sheaf homomorphism*

$$f^* f_* \mathcal{O}_X(K_X \otimes L^{\otimes m}) \longrightarrow \mathcal{O}_X(K_X \otimes L^{\otimes m})$$

is surjective for every

$$m > \frac{1}{2}\, d\, (d+1),$$

here d is the maximum dimension of the fibres of f.

Our basic tool is singular Hermitian metrics as in [D].

Definition. Let L be a line bundle over a complex manifold M. A metric h on L is called **singular Hermitian** , if there exist a function $\varphi \in L^1_{loc}(M)$ and a smooth Hermitian metric h_0 on L such that $h = e^{-\varphi} h_0$ holds. This defines a closed current curv $h :=$ curv $h_0 + \sqrt{-1}\partial\bar\partial\varphi$, where curv h_0 is the curvature form of the Hermitian metric h_0 and $\partial\bar\partial$ is taken in the sense of currents. The $(1,1)$-current curv h is said to be the **curvature current** of the singular Hermitian line bundle (L, h).

---

* Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science.

Definition ([D]). Let (L, h) be a singular Hermitian line bundle on a Hermitian manifold (M, ω). The **multiplier ideal sheaf** $\mathcal{I}(h)$ of the singular Hermitian metric is defined by

$$\mathcal{I}(h)(U) := \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \ ; \ |f|^2 e^{-\varphi} \in L^1_{loc}(U)\}.$$

Thanks to the following proposition, all we have to do is construct a singular Hermitian metric which has the correct singularity at the given point, and whose curvature current is strictly positive.

Proposition. *Let (X, ω) be a complete Kähler manifold, x be a point of X, and let L be a holomorphic line bundle on X. Assume that $L^{\otimes m}$ admits a singular Hermitian metric h_x such that*

(1) there exists a positive constant c such that curv $h_x \geq c\,\omega$, and that

(2) x is isolated in the zero scheme $V\mathcal{I}(h_x)$.

Then there exists a holomorphic section of $K_X \otimes L^{\otimes m}$ which does not vanish at x.

For a given point $x \in X$ and a positive integer ℓ, we can see that there exist an open neighborhood V of $f(x)$, a positive integer m_0 and sections $\sigma_0, \cdots, \sigma_N$ in $H^0(f^{-1}(V), L^{\otimes m_0(2\ell+1)})$ with high vanishing order at x. Then

$$h := \frac{h_0^{\otimes m_0(2\ell+1)}}{\sum_{j=0}^{N} |\sigma_j|^2}$$

is a singular Hermitian metric on $L^{m_0(2\ell+1)}$, here h_0 is an appropriate smooth Hermitian metric on L. The key point is to estimate

$$\alpha := \sup\{t \geq 0 \mid (\sum |\sigma_j|^2)^{-t/(2m_0)} \in L^1_{loc}(x)\}$$

and controle the ideal sheaf

$$\mathcal{I}((\sum |\sigma_j|^2)^{-(\alpha+\epsilon)/(2m_0)})$$

in order to use the proposition.

References

[D] Demailly J.P., *A numerical criterion for very ample line bundles*, J.D.G. **37**.

[F] Fujita T., *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive* Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Advanced Studies Pure Math., vol. 10, pp. 167-178.

[T1] Tsuji H., *Global generation of adjoint bundles; Freeness of $K_X + (n(n+1)/2 + 1)L$*, to appear (1994).

[T2] Tsuji H., *On the global generation of adjoint bundles; Freeness of $K_X + (n+1)L$*, preprint (1995).

Graduate School of Polymathematics, Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya, 464-01, Japan.
E-mail address: takayama@math.nagoya-u.ac.jp

A defect relation for Gauss maps.

43

厚地 淳　　　　　　大阪大学　理

M を $\mathbf{R}^3$ 内の非平坦な極小曲面、$g : M \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ をその Gauss 写像とする。藤本 坦孝氏は改変された除外指数 δ_g^H を用いて、次を示した。

定理 1 (藤本) $a_1, \ldots, a_q$ を相異なる $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の点とする。M が 完備ならば、

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g^H(a_j) \leq 4$$

が成り立つ。

$M = \mathbf{C}$ のとき、Nevanlinna の除外指数 δ_g と δ_g^H は、

$$\delta_g \geq \delta_g^H$$

を満たしており、また、上の定理で δ_g^H を δ_g に置き換えることができるかどうかは、不明である。これに対し、上の定理の完備性の条件を次のように置き換えると、δ_g に関して defect relation が成り立つことが分かった。

定理 2 M が *stochastic complete* ならば、

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g(a_j) \leq 4$$

が成り立つ。

ここで、

$$\delta_g(a) = \liminf(1 - \frac{N_g(a,r)}{T_g(r)})$$

$\overline{N_g}(a,r)$ に出来るのか?

であり、$N_g(a,r), T_g(r)$ は M の普遍被覆面上で定義する。

stochastic complete とは、次の定義で与えられる。

定義 1 *Riemann* 多様体 N が *stochastic complete* とは、N の *Riemann* 計量から決まる N 上の任意の *Brown* 運動が保存的であることである。

注意.

1. 上の定義の条件は 次のいずれとも同値である。

(a) N 上の任意の Brown 運動は 確率 1 で爆発しない。(確率 1 で生存時間が無限大。)

(b) $p(t,x,y)$ を N の $\frac{1}{2}$Laplacian の熱核とすると、$\int_N p(t,x,y)dv(y) = 1$ がすべての $t \in (0,\infty), x \in N$ について成り立つ。

2. stochastic complete と Riemann 計量の完備性は、必ずしも、一方が他方を意味しない。

$\mathbf{R}^m$ 内の極小曲面についても、同様なことが成り立つ。

定理 3 M を $\mathbf{R}^m$ 内の非平坦極小曲面、$g : M \to \mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$ をその *Gauss map* とする。$H_1,\ldots,H_q$ を $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$ 内の 一般の位置にある超平面とすると、M が *stochastic complete* ならば、

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g(H_j) \le \frac{m(m+1)}{2}$$

が成り立つ。

また、共形計量 ds^2 が与えられている stochastic complete な 開リーマン面 M から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への正則写像 f を考え、ds^2 に関する f の増大度の位数 $\tilde{\rho}$ を 藤本氏が定義したものの類似で定義すれば、$H_1,\ldots,H_q$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 内の 一般の位置にある超平面とすると、

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_g(H_j) \le n+1+\tilde{\rho}\frac{n(n+1)}{2}$$

が成り立つ。

44　数値的半正な直線束のコホモロジーについて

竹腰見昭　　大阪大学大学院理学研究科

Xはケーラー計量ω_Xをもつ n次元コンパクトケーラー多様体とし，EをX上の 正則直線束とする．Eはその第一Chern類$c_{R,1}(E)$がXのケーラー錐の閉包に含まれるとき，数値的半正と呼ばれる．この定義はX が射影代数的であるときは，$c_{R,1}(E)$ が豊富な直線束の張る錐の閉包に含まれることと同値である．h_Eを滑らかなEの計量とし，その曲率Θ_Eを$\Theta_E=-d\,d^c\log\ h_E$, $d^c=i(\bar{\partial}-\partial)/4\pi$と定義する．$E$が数値的半正であれば，$\varepsilon_k\searrow 0$ である正数の数列$\{\varepsilon_k\}$に対して滑らかな実数値函数の列$\{\varphi_k\}$で，$2\pi(\Theta_E+d\,d^c\varphi_k)+\varepsilon_k\omega_X$がケーラー計量であるものが存在する．$E$が 小平の意味で半正であれば数値的半正であるが，逆は一般には成立しない．そこで更にφ_kを適当に正規化してやれば，φ_kはX上の可積分な函数$\varphi_{E,\infty}$にL^1-収束し$\Theta_E+d\,d^c\varphi_{E,\infty}$は正カレントとなる． このような函数$\varphi_{E,\infty}$は 概多重劣調和 (almost plurisubharmonic)函数と呼ばれる．$\mathcal{I}(\varphi_{E,\infty})\subset\mathcal{O}_X$ を$\varphi_{E,\infty}$にたいするmultiplier ideal sheafとする． コホモロジー群$H^q(X,\mathcal{I}(\varphi_{E,\infty})\otimes\Omega^n{}_X(E))$の研究は複素 微分幾何の幾つかの興味ある問題と深い関連をもっている． この講演では小平の意味で半正な直線束のコホモロジーの性質 が数値的半正な直線束にたいしてどこまで成立するかという問題を$H^q(X,\mathcal{I}(\varphi_{E,\infty})\otimes\Omega^n{}_X(E))$の研究を通してある程度明らかにできることを報告する．

定理　(E,h_E) を n次元コンパクトケーラー多様体(X,ω_X)上の数値的半正な直線束とし， $\varphi_{E,\infty}$と$\mathcal{I}(\varphi_{E,\infty})$を上述の議論で定義されたものとする．

(i)　正整数qにたいして，準同型

$$L^q:\Gamma(X,\mathcal{I}(\varphi_{E,\infty})\otimes\Omega^{n-q}{}_X(E))\to\text{Image of }\ \iota^q\subset H^n(X,\Omega^n{}_X(E))$$

は全射であって，$L^q\circ\delta^q=\mathrm{id}$ となる分解射

$$\delta^q\ :\ \text{Image of }\ \iota^q\ \to\ \Gamma(X,\mathcal{I}(\varphi_{E,\infty})\otimes\Omega^{n-q}{}_X(E))$$

をもつ．但し $\iota^q : H^q(X, \mathcal{I}(\varphi_{E,\infty}) \otimes \Omega^n{}_X(E)) \rightarrow H^q(X, \Omega^n{}_X(E))$.
(ii) $q > n - \nu(E)$ ならば，

$$\iota^q :\ H^q(X, \mathcal{I}(\varphi_{E,\infty}) \otimes \Omega^n{}_X(E)) \ \rightarrow\ H^q(X, \Omega^n{}_X(E))$$

は零写像である． ここで$\nu(E)$はEのホモロジカルな小平次元である．

この他，コホモロジーの単射定理も得られるが，いずれも滑らかなEの計量で半正な曲率をもつ場合と比較して かなり弱い形でしか得られない． その理由は今の所$H^q(X, \Omega^n{}_X(E))$を表現する調和形式で計量ω_Xと$h_E\, exp(-\varphi_{E,\infty})$に関して$L^2$-可積なものしか統制できない点にある．

45 Second Main Theorem for $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ with $1 \leqq$ rank $f \leqq n$.

野口潤次郎　　東京工業大学理学部

The value distribution of a meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ with respect to hyperplanes was dealt by W. Stoll, H. Fujimoto and others, generalizing the theory of Nevanlinna-Cartan and Weyls-Ahlfors. Carlson-Griffiths-King obtained S.M.T. (the second min theorem) for f in more general setting with assumption that rank$f \geqq n$. Here we investigate the general case, $1 \leqq$ rank$f \leqq n$, and will see that the rank of f appears in the truncation level of counting functions in the estimate of S.M.T.

Main Theorem (S.M.T.). *Let $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ be a meromorphic mapping. Let l be the dimension of the smallest projective linear subspace of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ containing $f(\mathbf{C})$, and $\mu = \mathrm{rank}\ f$. Let $H_j, 1 \leqq j \leqq q$, be hyperplanes of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ in general position. Then*

$$(q - 2n + l - 1)T_f(r) \leqq \sum_{j=1}^{q} N_{l-\mu+1}(r, f^*H_j) + S(r).$$

The case of $m = 1$ was proved by Cartan and Nochka, and the case of $\mu = n$ by Carlson-Griffiths.

For simplicity we here assume that $\mu = m$ and $l = n$. The general case of $l \leqq n$ is dealt with in the same way as Nochka's arguments, and the case of $\mu \leqq m$ my be easily reduced to the case $\mu = m$ by slicing. So, $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ is linearly nondegenerate. Let $f = (f_0, \ldots, f_n)$ be a reduced representation of f. Let $(z_1, \ldots, z_m)$ be the standard holomorphic coordinate system, and let D^α be a partial differential operator in $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\overset{\partial}{\cancel{\text{partial}}}z_m$ with respect to a multi-index $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Let $V_k(z)$ denote the linear subspace of $\mathbf{C}^{n+1}$ spanned by $D^\alpha(f_0, \ldots, f_n)(z)$ with $|\alpha| \leqq k$, and set $h_k = \max_z \dim V_k(z)$. Then

$$h_1 = m + 1, \quad h_k \leq h_{k+1}.$$

Lemma 1. *If $h_k = h_{k+1}$ for some k, then $h_j = h_k$ for all $j \geqq k$.*

By this Lemma we see

Lemma 2. *There are partial differential operators $D_1, \ldots, D_n$ such that*

$$D_i = \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad 1 \leqq i \leqq m,$$
$$D_i = D^{\alpha_i}, \quad |\alpha_i| \leq i - m + 1, \quad m + 1 \leqq i \leqq n,$$

and that the generalized Wronskian

$$W(f_0(z), \ldots, f_n(z)) = \begin{vmatrix} f_0(z) & \cdots & f_n(z) \\ D^1 f_0(z) & \cdots & D^1 f_n(z) \\ D^2 f_0(z) & \cdots & D^2 f_n(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D^n f_0(z) & \cdots & D^n f_n(z) \end{vmatrix}$$

satisfies

$$W(\xi(z) f_0(z), \ldots, \xi(z) f_n(z)) = \xi(z)^{n+1} W(f_0(z), \ldots, f_n(z)).$$

for a holomorphic function $\xi(z)$.

We show the Main Theorem by making use of this generalized Wronskian $W(f_0(z), \ldots, f_n(z))$ and Cartan's method.

The Main Theorem implies a ramification theorem and generalized Borel's theorem.

Function Field Case.

Let R be a complex projective algebraic manifold. Let $x : R \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ be a rational mapping with rank μ. Let l be the dimension of the smallest projective linear subspace containing $x(R)$. Then we have

Theorem. *Let the notation be as above, and let $H_j, 1 \leqq j \leqq q$ be as in the Main Theorem. Then*

$$(q - 2n + l - 1)\mathrm{ht}(x) \leqq \sum_{j=1}^{q} N_{l-\mu+1}(x^* H_j) + C(R, \mu, n),$$

where $C(R, \mu, n)$ is a constant depending only on R, μ, and n.

Remark. If R is a curve of genus g, then $C_R = n(n+1)(g-1)$.

特別講演

平衡電磁場の作成

山口博史（滋賀大学　教育学部）

1　序

３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に置かれた滑らかな電導体に+1 の電荷を与えると、電荷はその表面に均等に分布し、それより生じる電場が導体内では恒等的に 0 となる状態、いわゆる平衡状態に到る。その時の電荷分布は平衡電荷分布と言われる。これより空間内に平衡電場が生じる。この事実はポテンシャル論の基盤の一つになっている。この講演では、ソレノイドの一般化として、磁場についても数学的には同様のことが言えること：即ち、平衡面電流 及び それより生じる平衡磁場が存在することを述べる。 更に、勝手に与えられた面電流から平衡面電流に到達するアルゴリズムを示す。

2　面電流

先ず、空間 $\mathbb{R}^3$ の C_0^∞ 級のベクトル場 $J(x) = (f_1, f_2, f_3)$ が条件「 $\mathrm{div}\, J(x) = 0$」を満たす時、Jdv_x を**体積電流**と言う。但し、dv_x は $\mathbb{R}^3$ の体積要素である。次のベクトル値積分：

$$\begin{aligned} A_J(x) &= \mathcal{N} J(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{J(y)}{\|y-x\|}\, dv_y\,, \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ B_J(x) &= \mathrm{rot}\ A_J(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{y-x}{\|y-x\|^3} \times J(y) dv_y\,, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

を考える。Biot-Savart に従って、 A_J, B_J を それぞれ **電流 Jdv_x より生じるベクトルポテンシャル** 及び **磁場** と呼ぶ。空間内の任意の閉曲線 γ に対して、γ を**通過する Jdv_x の全電流** を

$$J[\gamma] = \int_Q J(y) \cdot n_y\, dS_y$$

で定義する。ここに、Q は $\partial Q = \gamma$ となる曲面、dS_x, n_y は Q の点 x における面素 及び 単位法ベクトルを表す。体積電流の全体を $\mathcal{V}_c$ と記す。

次に、有限個の C^ω 級滑らかな閉曲面 Σ で囲まれた領域 D ($\subset\subset \mathbb{R}^3$) を考え、$D' = \mathbb{R}^3 \setminus (D \cup \Sigma)$ と置く。Σ 上の C^∞ 級ベクトル場 $J(x) = (f_1, f_2, f_3)$ が条件「体積電流の列 $\{J_n dv_x\}_{n=1,2,\dots}$ が存在して 超関数の意味で $J_n dv_x \to J dS_x (n \to \infty)$ である。」を満たす時、JdS_x を Σ **上の面電流** と言う。但し、dS_x は Σ の面素を表す。次のベクトル値積分:

$$\begin{aligned} A_J(x) &= \mathcal{N} J(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{J(y)}{\|y-x\|} dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ B_J(x) &= \operatorname{rot} A_J(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{y-x}{\|y-x\|^3} \times J(y)\, dS_y, \quad x \in D \cup D' \end{aligned}$$

を考える。A_J, B_J をそれぞれ **面電流 JdS_x より生じるベクトルポテンシャル** 及び **磁場** と言う。A_J は $\mathbb{R}^3$ で連続であるが B_J は Σ に沿って

$$\underline{\text{落差}}: \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} B_J(x) - \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D'}} B_J(x) = n_{x_0} \times J(x_0), \qquad x_0 \in \Sigma$$

を持つ。これは静電磁気学で良く知られた事実である（参照：[F-L-S]）。

Σ 上の面電流の全体を $\mathcal{S}(\Sigma)$ と書き、特に、C^ω 級面電流の全体を $\mathcal{S}^\omega(\Sigma)$ と書く。面電流に関する次の諸性質を準備して置く：

命題 2.1 $J(x)$ を Σ 上の C^∞ 級ベクトル場とする。このとき

$$JdS_x \in \mathcal{S}(\Sigma) \iff \begin{cases} \text{(a)} \ J \text{ は } \Sigma \text{ 上の接ベクトル場である。} \\ \text{(b)} \ (n_x \times J(x)) \cdot dx \text{ は } \Sigma \text{ 上の閉 1 形式である。} \end{cases}$$

命題 2.2 任意の $JdS_x \in \mathcal{S}(\Sigma)$ に対して

1. $\omega_J := B_J(x) \cdot *dx$ と置けば、$\omega \in Z_2(\mathbb{R}^3) \cap H_2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$ であり、$D \cup D'$ 内の任意の 1 サイクル γ に対して $J[\gamma] = \displaystyle\int_\gamma *\omega_{B_J}$ が成り立つ。

2. $x = \infty$ では $A_J(x) = O(1/\|x\|^2)$ 及び $B_J(x) = O(1/\|x\|^3)$ である。 従って

$$\Lambda_J(x) = \mathcal{N} B_J(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{R^3} \frac{B_J(y)}{\|y-x\|} dv_y, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

は 空間 $\mathbb{R}^3$ での C^1 級ベクトル場である。

3. 次の 4 つの対応を考える：

$$\begin{cases} \eta := J(x) \cdot dx \quad \text{on } \Sigma, & p := A_J(x) \cdot dx \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \omega := B_J(x) \cdot *dx \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma, & \lambda := \Lambda_J(x) \cdot *dx \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

このとき、次の回帰性定理が成立する：

(1) $\delta\omega = \eta$ （超関数の意味で）．

(2) $\delta\lambda = p \quad \text{in } \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \eta \arrow[dl, "\mathcal{N}"'] & \\
p \arrow[rr, "d"] & & \omega \arrow[ul, "\delta\ (\text{超関数})"'] \arrow[dl, "\mathcal{N}"] \\
 & \lambda \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}
$$

図 1: 回帰性

3 平衡面電流

Σ 上の面電流 JdS_x から生じる $D \cup D'$ 上の磁場 B_J が 偶々 D' で 恒等的に 0 になるとき、JdS_x を Σ **上の平衡面電流** と名ずける。それより生じる A_J, B_J をそれぞれ **平衡ベクトルポテンシャル** 及び **平衡磁場** と言う。Σ 上の平衡面電流の全体を $\mathcal{E}_c$, 平衡磁場の全体を $\mathcal{E}_m$ と記す。次の存在定理が成立する：

定理 3.1 $\{\gamma_i\}_{i=1,\ldots,q}$ を D の 1 次元ホモロジー基底とする。このとき、

1. 各 $1 \le i \le q$ に対して、$J[\gamma_j] = \delta_{ij}$ $(1 \le \forall j \le q)$ を満たす平衡面電流 $\mathcal{J}_i dS_x$ が一意的に存在する。

2. Σ 上の任意の平衡面電流は $\{J_i dS_x\}_{i=1,\ldots,q}$ の一次結合で表せる。

$\mathcal{J}_i$ より生じる平衡ベクトルポテンシャル 及び 平衡磁場を $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$ と書く。

開リーマン面上の Ahlfors [Ah] の真似をして、閉領域 $\overline{D}$ ($\subset\subset \mathbb{R}^3$) での調和 2 形式の全体を $H_2(\overline{D})$ と記し、その部分空間

$$H_{20}(\overline{D}) := \{\omega \in H_2(\overline{D}) \mid \Sigma \text{ 上では } \omega \text{ の法成分は } 0 \text{ である。}\}$$

を考える。$\dim H_{20}(\overline{D}) = q$ から、定理 3.1 の証明の為には次の補題を示せば十分である：

補題 3.1 任意の $\omega = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot *dx \in H_2(\overline{D})$ に対して、$D \cup D'$ 上のベクトル場

$$S_m(\omega) := \begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) & \text{in } D \\ (0,0,0) & \text{in } D' \end{cases}$$

を対応さす。このとき

$$S_m(\omega) \in \mathcal{E}_m \iff \omega \in H_{20}(\overline{D}).$$

この補題の証明には次節に述べる補題 5.2 を利用する方法と 与えられた $\omega \in H_{20}(\overline{D})$ に対して 次の 3 性質を持つ 1 形式 $\mathcal{A} \in C_1^\omega(V)$（但し、$V$ は Σ の適当な筒近傍である）を作り、それを利用する方法と がある：

$$d\mathcal{A} = \omega \ \text{ in } V, \quad \delta\mathcal{A} = 0 \ \text{ in } V, \quad \mathcal{A} = 0 \ \text{ on } \Sigma.$$

定理 3.1 で述べた平衡磁場 $\mathcal{B}_i$ は 次の**極値的性質** を持っている：

$$\|\mathcal{B}_i\|_{\mathbb{R}^3} = \operatorname*{Min}_{JdS_x \in \mathcal{S}(\Sigma)} \{\|B_J\|_{\mathbb{R}^3} \mid 条件\ J[\gamma_j] = \delta_{ij}\ (1 \le \forall j \le m)\ を満す。\}$$

4 アルゴリズム

任意に $i : 1 \le i \le q$ を与えるとき、定理 3.1 で述べた 平衡面電流 $\mathcal{J}_i dS_x$ へ到るアルゴリズム（逐次近似法）を述べよう。簡単のために、$D^+ = D, D^- = D'$ と書き、$\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ で定義されたベクトル場や形式 V に対して $V(x) = V^\pm(x),\ x \in D^\pm$ と書く。また、$JdS_x \in \mathcal{S}^\omega(\Sigma)$ であって、条件：

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} J[\gamma_j] &= \delta_{ij} \quad (1 \le \forall j \le m) \\ J[\gamma] &= 0 \quad \text{for } \ \forall\text{1-cycle } \gamma \text{ in } D^- \end{cases}$$

を満たすものの全体を $\mathcal{S}_i^\omega(\Sigma)$ と表す。

<u>第 0 段階</u> 任意に $J_0 dS_x \in \mathcal{S}_i^\omega(\Sigma)$ を与える。これより生じる磁場を B_0 とする。

<u>第 n 段階</u> $J_{n-1} dS_x \in \mathcal{S}_i^\omega(\Sigma)$ と それより生じる磁場 B_{n-1} が定まったとき、

$$\text{(4.2)} \qquad J_n dS_x := (B_{n-1}^+(x) \times n_x) dS_x \quad \text{on} \ \ \Sigma$$

と定義する。

このとき、$J_n dS_x \in \mathcal{S}_i^\omega(\Sigma)$ であり、この $J_n dS_x$ より生じるベクトルポテンシャル 及び 磁場を A_n, B_n とすると $\|B_{n-1}\|_{\mathbb{R}^3} \ \ge\ \|B_n\|_{\mathbb{R}^3} \ \ge\ \|\mathcal{B}_i\|_{\mathbb{R}^3}$ である。

$$\begin{tikzcd}
J_0dS_x \arrow[d] & J_1dS_x \arrow[d] & J_2dS_x \arrow[d] & \cdots & J_ndS_x \arrow[d] & \cdots\cdots\rightsquigarrow \mathcal{J}_i \\
B_0 \arrow[ur] & B_1 \arrow[ur] & B_2 \arrow[ur] & \cdots & B_{n-1} \arrow[ur] & \cdots\cdots\rightsquigarrow \mathcal{B}_i
\end{tikzcd}$$

図 2: 平衡面電流 $\mathcal{J}_idS_x$ へのアルゴリズム

本講演の主目的は次の定理を説明することである：

定理 4.1 上の方法で得られた３つのベクトル場の列 $\{J_ndS_x\}_n$, $\{A_n\}_n$, $\{B_n\}_n$ に関して 次の極限定理が成立する：

1. $\lim_{n\to\infty} J_ndS_x = \mathcal{J}_idS_x$ （超関数の意味で）.
2. $\lim_{n\to\infty} \|A_n - \mathcal{A}_i\|_{\mathbb{R}^3} = 0$.
3. $\lim_{n\to\infty} \|B_n - \mathcal{B}_n\|_{\mathbb{R}^3} = 0$.

この定理は思考実験によって容易に予想されることである。これを証明する為に必要な３つの補題を次節で示そう。そのうちの後の２つの補題は、それ自身、ポテンシャル論に於いて明確な意味を持つ。

5 補題

閉曲面 Σ の適当な筒近傍 U を取り、各点 $x \in U$ から Σ までの符号付き（ユークリッドの）距離を $R(x)$ とすれば、$R(x) \in C^\omega(U)$ であって、Σ 上では $\nabla R(x) = n_x$ である。各 $n \geq 1$ に対して, 次の条件を満たす $(-\infty, \infty)$ 上の C^∞ 級関数 $\chi_n(R)$ を考える:

$$0 \leq \chi_n(R) \leq 1, \qquad \chi_n(R) = \begin{cases} 1 & \text{on } (-\infty,\ -\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{on } [-\frac{1}{2n}, +\infty), \end{cases}$$

$$0 \leq |\chi_n'(R)| \leq nM, \qquad |\chi''(R)| \leq n^2M.$$

但し、$M > 0$ は n (≥ 1) にも $x \in \mathbb{R}$ にも依らない定数である。更に、D の特性関数 $\chi_D(x)$ 及び 各 $n\,(\geq \exists n_0)$ に対して 次式で定義される $\mathbb{R}^3$ での C_0^∞ 級関数 $\widetilde{\chi_n}(x)$ を考える：

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{in} \quad D \\ 0 & \text{in} \quad D', \end{cases} \qquad \widetilde{\chi_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{in} \quad D \setminus U \\ \chi_n(R(x)) & \text{in} \quad U \\ 0 & \text{in} \quad D' \setminus U. \end{cases}$$

従って、各 $x \in D \cup D'$ について $\lim_{n\to\infty} \widetilde{\chi_n}(x) = \chi_D(x)$ である。曲面 Σ の点 x における平均曲率を $H(x)$ と記す。このとき

補題 5.1 (近似条件) 各 $n\,(\geq n_0)$ に対して 次式で定義される $\mathbb{R}^3$ での C^∞ 級関数 $I_{1n}(x)$ 及び $I_{2n}(x)$ を考える:

$$
\begin{aligned}
I_{1n}(x) &= \int_U \frac{\chi_n'(R(y))\,g(y)}{\|y-x\|}\,dv_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \\
I_{2n}(x) &= \int_U \frac{\chi_n''(R(y))\,g(y)}{\|y-x\|}\,dv_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}
$$

更に

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= -\int_\Sigma \frac{g(y)}{\|y-x\|}dS_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \\
I_2(x) &= \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{g(y)}{\|y-x\|}\right) + \frac{g(y)H(y)}{\|y-x\|} \right\} dS_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma
\end{aligned}
$$

と置く。このとき

1. $\lim_{n\to\infty} I_{1n}(x) = I_1(x)$　($\mathbb{R}^3$で一様に)。

2. $\lim_{n\to\infty} I_{2n}(x) = I_2(x)$　($\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$の完全内部で一様に)。

3. 関数列 $\{I_{2n}(x)\}_n$ は $\mathbb{R}^3$ で一様に有界である。

証明は 面 Σ が平坦のときには実際の計算によってなされる。Σ が曲がっているときは モース の初等的な正則特異点定理（参照：佐武一郎著、多様体入門）によって 局所的に平坦に直して証明される。

与えられた領域 $D\,(\subset \mathbb{R}^3)$ に対して、通常のごとく、D 内の2乗可積分な $i\,(=1,2)$ 形式の作る空間を $L_2^i(D)$、D での C_0^∞ 級 i 形式の作る空間を $C_{i,0}^\infty(D)$, $\overline{D}$ での C^∞ 級 i 閉形式の空間を $Z_i^\infty(\overline{D})$ と記し、$Z_i(D) = \mathrm{Cl}\,[Z_i^\infty(\overline{D})]$, $B_i(D) = \mathrm{Cl}\,[dC_{i-1,0}^\infty(D)]$ と置く。このとき 次のワイルの直交分解定理 [Wy] が成立する：

$$
L_i^2(D) = *Z_{3-i}(D) \dotplus B_i(D). \tag{5.1}
$$

空間 $\mathbb{R}^3$ に於いて 台がコンパクトな任意の符号付き測度 $d\nu$ を **一般化された電荷密度** と言い、ベクトル値積分：

$$
E_\nu(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{y-x}{\|y-x\|^3}\,d\nu(y)
$$

を $d\nu$ **より生じる電場** と言う。更に、$\mathbb{R}^3$ に於いて 台がコンパクトな任意の符号付き測度の３つの組 $d\boldsymbol{\mu} = (d\mu_1, d\mu_2, d\mu_3)$ が条件：

$$\exists \{J_n dv_x\}_{n=1,2,\cdots} \in \mathcal{V}_c \quad s.t. \quad \lim_{n\to\infty} J_n dv_x = d\boldsymbol{\mu} \quad \text{（超関数の意味で）}$$

を満たすとき **一般化された電流** と言い、ベクトル値積分：

$$B\boldsymbol{\mu}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{y-x}{\|y-x\|^3} \times d\boldsymbol{\mu}(y)$$

を $d\boldsymbol{\mu}$ **より生じる磁場** と言う。そのような $d\nu$ 及び $d\boldsymbol{\mu}$ の全体を $\boldsymbol{G}_e$ 及び $\boldsymbol{G}_m$ と記す。

以下では 与えられた $\sigma \in C_1^{\omega}(\overline{D})$ について 次の記号を用いる：

(1) $\overline{D}$ 上で $\sigma = \boldsymbol{f}\cdot dx$ と書くとき

$$d\boldsymbol{\mu}_\sigma := \begin{cases} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f})\,dv_x & \text{in } D \\ -(n_x \times \boldsymbol{f})\,dS_x & \text{on } \Sigma, \end{cases} \qquad d\nu_\sigma := \begin{cases} (\mathrm{div}\,\boldsymbol{f})\,dv_x & \text{in } D \\ -(n_x \cdot \boldsymbol{f})\,dS_x & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

(2) $\chi_D\,\sigma \in L_1^2(\mathbb{R}^3)$ に対して ワイルの直交分解：

$$\chi_D\sigma = *\omega_\sigma \dotplus \tau_\sigma \ \text{ in } L_1^2(\mathbb{R}^3), \qquad \text{但し } \omega_\sigma \in Z_2(\mathbb{R}^3),\ \tau_\sigma \in B_1(\mathbb{R}^3)$$

を行うとき、ω_σ 及び τ_σ の定めるベクトル場を $\boldsymbol{\alpha}_\sigma$ 及び $\boldsymbol{a}_\sigma$ と書く。即ち、

$$\omega_\sigma = \boldsymbol{\alpha}\cdot *dx, \qquad \tau_\sigma = \boldsymbol{a}\cdot dx \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

補題 5.2 (ワイルの直交分解定理の静電磁場的意味) [1] 任意の $\sigma \in C_1^{\omega}(\overline{D})$ に関して 上記の記号のもとで

1. ω_σ 及び τ_σ ついて 次の積分表示が成立する：

$$\begin{cases} \omega_\sigma(x) &= dp_\sigma(x) \ \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \\ \tau_\sigma(x) &= du_\sigma(x) \ \text{ in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

但し

$$\begin{cases} p_\sigma(x) &:= \left(\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|y-x\|}\, d\boldsymbol{\mu}_\sigma\right)\cdot dx, \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ u_\sigma(x) &:= \dfrac{-1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|y-x\|}\, d\nu_y, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

[1] 論文 [Y2] では $\sigma \in Z_1^{\omega}(\overline{D})$ の場合に補題を示した。一般の $\sigma \in C_1^{\omega}(\overline{D})$ についても同様に行けると言うコメントは井上惇氏に依る。

2. $d\boldsymbol{\mu}_\sigma \in \boldsymbol{G}_m$, $d\nu_\sigma \in \boldsymbol{G}_e$ であって、電流 $d\boldsymbol{\mu}_\sigma$ より生じる磁場 $B_{\boldsymbol{\mu}_\sigma}$ は ベクトル場 $\boldsymbol{\alpha}_\sigma$ に、電荷密度 $d\nu_\sigma$ より生じる電場 E_{ν_σ} は $\boldsymbol{a}_\sigma$ に等しい。且つ、

$$\chi_D \boldsymbol{f} = B_{\boldsymbol{\mu}_\sigma} \dot{+} E_{\nu_\sigma} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma.$$

[証明]　体積電流 及び 電荷密度を考慮して

$$\eta_n = \delta * \widetilde{\chi_n}\sigma, \qquad \rho_n = \delta \widetilde{\chi_n}\sigma \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

と置くと、$\eta_n \in *Z_{20}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ である。従って、$\mathbb{R}^3$ に於いて

$$\begin{cases} p_n(x) = \mathcal{N}\eta_n(x) \\ u_n(x) = -\mathcal{N}\rho_n(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_n(x) = dp_n(x) \\ \tau_n(x) = du_n(x) \end{cases}$$

と置くと $\omega_n \in Z_2(\mathbb{R}^3)$, $\tau_n \in B_1(\mathbb{R}^3)$ となり、$*\omega_n \perp \tau_n$ が分かる。そこで

$$\eta_n := J_n(x) \cdot dx, \quad \omega_n := B_n \cdot *dx, \quad \tau_n(x) := E_n \cdot dx \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

と置くと、$J_n dv_x \in \mathcal{V}_c$ であり、ベクトル場 B_n, E_n はそれぞれ 体積電流 $J_n dv_x$ 及び 電荷密度 $\rho_n dv_x$ より生じる磁場 及び 電場に他ならない。

ニュートン核 $1/\|y-x\|$ の性質より $\mathcal{N}$ は $*$, d, δ と可換であることに注意する。$\mathbb{R}^3$ での C_0^∞ 2形式 $*\widetilde{\chi_n}\sigma$ にポアソンの方程式 及び $\Delta = \delta d - d\delta$ を適用して

$$\begin{aligned} \omega_n &= d\mathcal{N}\delta(*\widetilde{\chi_n}\sigma) = d\delta(\mathcal{N} * \widetilde{\chi_n}\sigma) \\ &= (-\Delta + \delta d)\mathcal{N}(*\widetilde{\chi_n}\sigma) = *\widetilde{\chi_n}\sigma + *d\mathcal{N}(\delta\widetilde{\chi_n}\sigma) \\ &= *\widetilde{\chi_n}\sigma - *\tau_n \end{aligned}$$

を得る。故に、$\widetilde{\chi_n}\sigma = *\omega_n \dot{+} \tau_n$ in $L_1^2(\mathbb{R}^3)$ である。これは

$$\widetilde{\chi_n}\boldsymbol{f} = B_n \dot{+} E_n \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \tag{5.2}$$

と同じである。ところで 簡単な計算により $\mathbb{R}^3$ に於いて

$$J_n = \chi_n' (\nabla R \times \boldsymbol{f}) + \widetilde{\chi_n} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f}), \qquad \rho_n = \chi_n' (\nabla R \cdot \boldsymbol{f}) + \widetilde{\chi_n} (\mathrm{div}\, \boldsymbol{f})$$

であることが分かる。故に、$n \to \infty$ とすれば、補題 5.1 の *1, 2* によって

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p_n(x) &= p_\sigma(x) \quad (\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma\text{の完全内部で一様に}) \\ \lim_{n\to\infty} u_n(x) &= u_\sigma(x) \quad (\mathbb{R}^3\text{で一様に})。 \end{aligned}$$

更に、補題 5.1 の *3* によって

$$\lim_{n\to\infty} \|\tau_n - \tau_\sigma\|_{\mathbb{R}^3} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|\omega_n - \omega_\sigma\|_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

従って、(5.2) に於いて $n \to \infty$ とすれば、補題 5.2 を得る。 □

特に、$\sigma \in Z_1^\omega(\overline{D})$ の場合に補題 5.2 を適用すると

系 5.1 *$JdS_x \in \mathcal{S}^\omega(\Sigma)$ とする。もし Σ 上の C^ω 級閉 1 形式 $(n_x \times J)\cdot dx$ が $\overline{D}$ 内の或る C^∞ 級閉 1 形式 σ に拡張されるならば、$\chi_D\sigma \in L_1^2(\mathbb{R}^3)$ のワイルの直交分解 (5.1) に於ける $*Z_2(\mathbb{R}^3)$-成分 $*\omega_\sigma$ は $B_J \cdot dx$ に等しい。*

任意の $u \in H(\overline{D})$ に対して 次の等式は良く知られている：

$$\chi_D u(x) = p_{1u}(x) \; - \; p_{2u}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{但し} \quad \begin{cases} p_{1u}(x) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial n_y}\right) \frac{1}{\|y-x\|} dS_y, & x \in \mathbb{R}^3 \\ p_{2u}(x) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Sigma u(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{\|y-x\|}\right) dS_y, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

従って、$\sigma = du$ に補題 5.2 を適用すると

系 5.2 任意の $u \in H(\overline{D})$ に対して

1. $\chi_D\, du = dp_{1u} \dotplus d(-p_{2u})$ in $L_1^2(\mathbb{R}^3)$, $\quad dp_{1u} \in B_1(\mathbb{R}^3)$, $\quad dp_{2u} \in *Z_2(\mathbb{R}^3)$.

2. ∇p_{1u} は曲面 Σ 上の電荷密度 $\dfrac{\partial u}{\partial n_x} dS_x$ より生じる電場に等しく、∇p_{2u} は Σ 上の面電流 $(n_x \times \nabla u)dS_x$ より生じる磁場に等しい。

さて、各 $u \in H(\overline{D})$ に対して 次の 7 つのノルム $\{\mathbf{e}_j(u)\}$ $(1 \le j \le 7)$：

$$\{\mathbf{e}_j(u)\}_{1\le j\le 7} = \Big\{ \; \|du\|_D, \; \|dp_{iu}\|_{\mathbb{R}^3}, \; \|dp_{iu}^\pm\|_{D^\pm} \; \Big\}_{i=1,2}$$

を考える。$H(\overline{D})$ の次の部分空間：

$$H^b(\overline{D}) = \left\{ u \in H(\overline{D}) \mid \Sigma \text{ の各連結成分 } \Sigma_i \text{ について } \int_{\Sigma_i} \frac{\partial u}{\partial n_x} dS_x = 0. \right\}$$

を定義する。このとき

補題 5.3 (同価性条件) [2]　次の不等式を満たす定数 $K > 1$ が存在する：

$$\frac{1}{K}\boldsymbol{e}_j(u) \le \boldsymbol{e}_i(u) \le K\,\boldsymbol{e}_j(u) \quad (1 \le \forall i, j \le 7) \ \ for\ \forall u \in H_b(\overline{D}).$$

証明は D の境界 Σ 上に C^ω 関数 f を与えるとき、Σ の内部 D^+ 及び 外部 D^- に関するノイマン 及び ディリクレ問題の解をフレッドホルムの方法によって 一重層 及び 二重層ポテンシャルで表し（参照：[Fo]）、それらのノルムを比較することによってなされる。

補題 5.3 と系 5.2 を合わせて、主定理の証明に必要な次の系を得る：

系 5.3 次の不等式を満たす定数 c: $1 > c > 0$ が存在する：

$$\|dp_{iu}\|_{\mathbb{R}^3} \le c\,\|du\|_D \quad (i = 1, 2) \quad for\ \ \forall u \in H_b(\overline{D}). \tag{5.3}$$

注意　ポアンカレ [Po] は領域 D が球と C^∞ 級同相のとき、ノイマンの逐次近似法でディリクレ問題を解くために、二つのノルム $\{dp^{\pm}_{1u}\}$ 及び $\{dp^{\pm}_{2u}\}$ の同価性を示している。

6　主定理の証明

定理 4.1 に述べた $\mathcal{J}_i dS_x, \mathcal{B}_i, \mathcal{A}_i, J_n dS_x, A_n, B_n$ を用いて

$$\begin{cases} \Xi = (n_x \times \mathcal{J}_i)\cdot dx & \text{on } \Sigma \\ \xi_n = (n_x \times J_n)\cdot dx & \text{on } \Sigma, \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega = \mathcal{B}_i \cdot *dx & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \\ \omega_n = \mathcal{B}_n \cdot *dx & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{A}_i \cdot dx & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ p_n = A_n \cdot dx & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

と置く。(4.2) から $*\omega^+_{n-1}$ は ξ_n の $\overline{D}$ への C^∞ 級閉 1 形式拡張であるから、系 5.2 から

$$\chi_D * \omega^+_{n-1} \ = \ *\omega_n \dotplus \tau_n \quad \text{in } L^2_1(\mathbb{R}^3). \tag{6.1}$$

ここに、$\omega_n \in Z_2(\mathbb{R}^3) \cap H_2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$, $\tau_n \in B_1(\mathbb{R}^3)$ である。各 $J_n dS_x$ は 条件 (4.1) を満たすから、次の性質を有する調和関数 $u_n \in H(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$ が見つかる:

$$\begin{array}{lll} du_n & = *\omega_n - *\omega_{n-1} & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \\ \chi_D\, du^+_n & = du_{n+1} \dotplus dv_{n+1} & \text{in } L^2_1(\mathbb{R}^3) \\ u_{n+1} & = -p_{2u^+_n}, \quad v_{n+1} = p_{1u^+_n} & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{array}$$

[2] これを示すにあたり、証明に直接使った訳ではないが、岡部-中野両氏より教わった岡部の揺動散逸原理と言う考えが有益であった（参照：[ON]）。

然るに、各 $\omega_n \in Z_2(\mathbb{R}^3)$ より、$u_n \in H_b(\overline{D})$ である。故に、系 5.3 より

$$\|du_{n+1}\|_{\mathbb{R}^3} \leq c\,\|du_n^+\|_D \leq c\,\|du_n\|_{\mathbb{R}^3}.$$

従って、$0 < c < 1$ であるから、$\{\omega_n\}_n$ は $L_2^2(\mathbb{R}^3)$ でコーシー列をなし、極限

$$\omega := \lim_{n\to\infty} \omega_n \ \in Z_2(\mathbb{R}^3) \cap H_2(\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma)$$

が存在する。(6.1) に於いて $n \to \infty$ とすれば D^- で恒等的に $\omega = 0$ であり、命題 2 の *1* 及び $J_n[\gamma_j] = \delta_{ij}$ から $\int_{\gamma_j} *\omega = \delta_{ij}$ $(1 \leq \forall j \leq q)$ である。故に、空間 $\mathbb{R}^3$ で $\omega = \Omega$ が分かる。即ち、

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \Omega \quad \text{in } L_2^2(\mathbb{R}^3).$$

これと第 2 節で述べた回帰性定理を組み合わせて

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \Xi \ \text{(超関数の意味で)}, \qquad \lim_{n\to\infty} p_n = \mathcal{P} \ \text{ in } L_1^2(\mathbb{R}^3)$$

を得る。これら 3 つの極限の等式は主定理の (3),(1),(2) に他ならない。 □

References

[Ah] L. V. Ahlfors, Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. Comm. Math. Helv., **24**(1950), 100-129.

[F-L-S] P. P. Feynman, R. B. Leighnton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics, Vol. II (Electromagnetism and matter).* Addison-Wesley Pub. Comp., (1964).

[Fo] G. B. Folland, *Introduction to partial differential equations,* Math. Notes, Princeton Univ. Press, (1965).

[ON] Y. Okabe and Hl. Nakano, The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (I) : Stationary Analysis, Hokkaido Math. J., **20**(1991), 45-90.

[Po] H. Poincaré, La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, Acta Math., **20**(1896), 59-142.

[Wy] H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math. J., **7**(1940), 411-444.

[Y1] H. Yamaguchi, Equilibrium vector potentials in $\mathbb{R}^3$. Proc. Japan Acad., **68**(1992), 164-166.

[Y2] H. Yamaguchi, Orthogonal decomposition related to magnetic field, and Grunsky inequality, to appear in Kodai Math. J..