日　本　数　学　会

１９９５年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９５年３月

於　立命館大学理工学部

第3日　3月29日（水）

第IV会場　函　数　論

9:00 ～ 12:15

1	西本勝之	(Descartes Press Co.)*	N-transformation of elementary functions and their inverses	15
2	尾和重義 布川護	(近畿大理工) (群馬大教育)	Applications of a subordination theorem	15
3	S. Makhmutov	(北大理)	On functions of Yosida's Class (A)	15
4	城崎学	(阪府大工)	多項式による正則写像の一意性	10
5	野田洋二	(東工大理)	On the functional equation $f^n = e^{P_1} + \cdots + e^{P_m}$ II	10
6	石崎克也	(日本工大)	Complex oscillation theory on $f'' + A(z)f = 0$	15
7	戸田暢茂	(名工大)	An extension of the defect relation for holomorphic curves	15
8	柴田敬一	(岡山理大理)*	On singular set of analytic function	15
9	齊ノ内義一		一点で穴をあけたトーラス上の Weierstrass の定理	15
10	松井邦光 米谷文男	(同志社大工) (京都工繊大工芸)	開リーマン面上ある種のアーベル微分の空間の存在及びその応用について	15
11	奥村善英	(金沢大工)*	Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces II	15
12	志賀啓成	(東工大理)	Riemann 面の holomorphic family について	15
13	河井真吾	(東大数理)	リーマン面上の射影接続のモジュライのシンプレクティック構造	15

13:15 ～ 15:50

14	松崎克彦	(東工大理)*	無限 circle packing の変形空間の連分数座標について	15
15	松崎克彦	(東工大理)*	フックス群の極限集合のハウスドルフ次元が 1 となるための条件	15
16	井関裕靖	(都立大理)	高次元の擬 Fuchs 群の limit set の Hausdorff 次元について	10
17	相川弘明 村田実	(熊本大理)* (東工大理)	Cranston-McConnell の不等式の一般化とその応用	15
18	酒井良	(都立大理)	Sharp estimates of the distance from a fixed point to the frontier of Hele-Shaw flows	15
19	宮本育子	(千葉大理)	与えられた境界値を持つシリンダー上の調和関数	15
20	鈴木紀明	(名大理)	A local Hopf lemma for solutions of the one dimensional heat equation	15
21	中井三留	(名工大)	調和測度のディリクレ積分	15
22	大津賀信		Gončar の問題への解答 —— 3 次元の場合	15
23	二宮信幸		ポテンシャル論における最小変分の方法	15

16:00 ～ 17:00　特別講演

A. Cornea (Katholische Univ. Eichstätt)*　Solution of the Dirichlet problem by means of control function

第4日　3月30日（木）

第IV会場　函　数　論

9:30 ～ 11:30

24	笹山浩良（笹山研）	On the generalized representation of elements of hypercomplex n-tuple spaces $E(\ )$ for non-associative non-commutative algebra without the unity element	10
25	笹山浩良（笹山研）	On the generalization of F. Ringleb's analytic hypercomplex function theory for associative non-commutative hypercomplex n-tuple spaces	10
26	鶴見和之（東京電機大）	Φ-like holomorphic mappings in C^n	15
27	鶴見和之（東京電機大）	Radial limits of starlike holomorphic mappings in C^n	10
28	渡辺公夫（筑波大数学） 奥間智弘（筑波大数学）	Unimodular type singularities and bimodular type singularities	15
29	大沢健夫（名大理）	リーマン面の解析族の被覆空間について	10
30	梶原壌二（九大数理）* 辻美輝（九大数理）	Byun-Saitoh の反転公式の数値解析について	15
31	辻美輝（九大数理）*	大沢問題の反例について	15

13:00 ～ 15:15　**特別講演**

E. Bedford	(Indiana Univ.)	Dynamics of polynomial automorphisms of C^2	(13:00 ～ 14:00)
H. Alexander	(Univ. of Illinois at Chicago)*	Holomorphic chains and the support conjecture	(14:15 ～ 15:15)

N-Transformations of elementary functions and their inverses

1

Katsuyuki Nishimoto **Descartes Press Co.**

Abstract

Many papers ([1] ~ [18]) and books ([19],[20]) on the fractional calculus have been reported by the author already. In a previous paper, the author discussed the inverse of N(Nishimoto)-transformation which is a complex integral form . In this paper, N-transformations of elementary functions and their inverses are discussed.

§0. Introduction (Definition of fractional calculus)

(I) DEFINITION. (by K. Nishimoto) ([1] Vol. I)
Let $D=\{\underset{-}{D}, \underset{+}{D}\}$, $C=\{\underset{-}{C}, \underset{+}{C}\}$,

$\underset{-}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $-\infty+i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{+}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $\infty+i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{-}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{-}{C}$, $\underset{+}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{+}{C}$.

(Here D contains the points over the curve C.)
Moreover, let $f=f(z)$ be a regular function in D ($z\in D$),

$$f_\nu=(f)_\nu={}_C(f)_\nu=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}d\zeta \qquad (\nu\notin Z^-), \tag{1}$$

$$(f)_{-m}=\lim_{\nu\to -m}(f)_\nu \qquad (m\in Z^+), \tag{2}$$

where $\quad -\pi\leqslant\arg(\zeta-z)\leqslant\pi$ for $\underset{-}{C}$, $\quad 0\leqslant\arg(\zeta-z)\leqslant 2\pi$ for $\underset{+}{C}$, $\quad \zeta\neq z$

Γ: Gamma function,

then $(f)_\nu$ is the fractional differintegration of arbitrary order ν (derivatives of order ν for $\nu>0$, and integrals of order $-\nu$ for $\nu<0$), with respect to z, of the function f, if $|(f)_\nu|<\infty$.

Note 1. See Figs. 1 and 2 for the integral curves $\underset{-}{C}$ and $\underset{+}{C}$, and the domains $\underset{-}{D}$ and $\underset{+}{D}$ respectively.

Note 2. More generally, if $f(z)$ is regular except the singular points in a finite (or infinite) number and there are no these singularities inside C and on C, then $f_\nu(z)$ can be defined again with the above definition.

Note 3. If $f(z)$ is a many valued regular function, we define $f_\nu(z)$ for the principal values of $f(z)$.

Lemmas

(i) THEOREM *A*. *Let Nishimoto's complex integral transformation be*

$$\mathfrak{N}\{f(\zeta)\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\mu+1}}\,d\zeta = F(z), \tag{3}$$

for a given constant $\mu \in R$, *then the inverse to* $F(z)$ *is given by*

$$\mathfrak{N}^{-1}\{F(z)\} = \frac{\Gamma(-\mu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{(z-\zeta)^{-\mu+1}}\,dz, \tag{4}$$

where $f(\zeta)$ *is a regular function in D and* $0 \neq |F(z)| < \infty$. *(For the integral contour C and the domain D of formula* (3), *see the definition in* §0. *And when* $\mu = -n\,(n \in Z^+)$ *in* (3), *refer to* §0. (2). *For the integral contour C and the domain D of formula* (4) *see the Fig. 1' and Fig. 2'.)* [17]

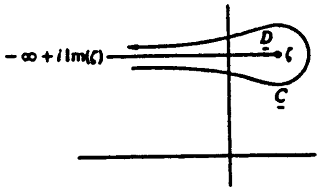


Fig. 1'.

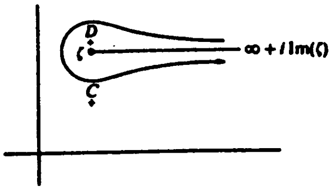


Fig. 2'.

(ii) COROLLARY A. *Let a complex integral transformation be*

$$\mathfrak{N}\{f(\zeta)\} = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta = F(z), \tag{5}$$

for a given constant $n \in Z^+$, *then the inverse to* $F(z)$ *is given by*

$$\mathfrak{N}^{-1}\{F(z)\} = \frac{\Gamma(-n+1)}{2\pi i}\oint \frac{F(z)}{(z-\zeta)^{-n+1}}\,dz, \quad (\textit{see } §0.\ (2)) \tag{6}$$

under the same conditions with that of Theorem A, where $\oint$ *means a complex contour integration along a closed simple Jordan curve which surrounds z for formula* (5) *and* ζ *for formula* (6).

Formula (5) is the Goursat's transformation, hence formula (6) is the inverse Goursat's transformation.

(iii) COROLLARY B. *Let a complex integral transformation be*

$$\mathfrak{N}\{f(\zeta)\} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z) = F(z), \tag{7}$$

then the inverse to $F(z)$ *is given by*

$$\mathfrak{N}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz \tag{8}$$

under the same conditions with that of Theorem A.

Formula (7) is the Cauchy's transformation, hence formula (8) is the inverse Cauchy's transformation.

2 APPLICATIONS OF A SUBORDINATION THEOREM

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)

MAMORU NUNOKAWA (GUNMA UNIVERSITY)

Let $\mathcal{A}(n)$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$. For analytic functions $g(z)$ and $h(z)$ with $g(0) = h(0)$, $g(z)$ is said to be subordinate to $h(z)$ in $\mathbb{U}$ if there exists an analytic function $w(z)$ so that $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ $(z \in \mathbb{U})$ and $g(z) = h(w(z))$.

Applying a subordination theorem by D.J.Hallenbeck and St.Ruscheweyh (Proc. Amer. Math. Soc. 52(1975), 191 - 195), we prove

THEOREM I. Let $p(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$ with $p(0) = 1$, $p'(0) = \ldots = p^{(n-1)}(0) = 0$. If

$$\mathrm{Re}\{p(z) + \alpha z p'(z)\} > \beta \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then

$$\mathrm{Re}\{p(z)\} > \beta + (1 - \beta)\left\{2\int_0^1 \frac{d\rho}{1 + \rho^{n\mathrm{Re}(\alpha)}} - 1\right\},$$

where $\alpha \neq 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geqq 0$ and $\beta < 1$.

THEOREM 2. Let $p(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$ with $p(0) = 1$, $p'(0) = \ldots = p^{(n-1)}(0) = 0$. If

$$\mathrm{Re}\{p(z) + \alpha z p'(z)\} < \beta \quad (z \in \mathbb{U}),$$

then

$$\mathrm{Re}\{p(z)\} < \beta + (1 - \beta)\left\{2\int_0^1 \frac{d\rho}{1 + \rho^{n\mathrm{Re}(\alpha)}} - 1\right\},$$

where $\alpha \neq 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geqq 0$ and $\beta < 1$.

3 ON FUNCTIONS OF YOSIDA'S CLASS (A)

MAKHMUTOV SHAMIL 北大・理
Ufa Aircraft Technical University
ロシア

1. Consider classes of meromorphic functions on $\mathbb{C}$ with given growth of the spherical derivative $\rho(f(z))$. Meromorphic function $f(z)$ belongs to the class $W_p(\mathbb{C})$, $p > 1$, if $\lim\limits_{|z|\to\infty} |z|^{2-p}\rho(f(z)) < \infty$.

Classes $W_p(\mathbb{C})$, $p > 1$, can be also characterized in the terms of normality, i.e. $f(z) \in W_p(\mathbb{C}) \Leftrightarrow$ the family of functions $\{f(a_n + |a_n|^{2-p}z)\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, is normal in $\mathbb{C}$ [1]. If in addition all the limit functions of the convergent sequences of functions $\{f(a_n + |a_n|^{2-p}z)\}$ are not constant then $f(z) \in W_p^o(\mathbb{C})$. The class $W_1(\mathbb{C})$ is known as class of Julia's exceptional functions and class $W_2(\mathbb{C})$ is Yosida's class (A) [2].

Theorem 1. *If $f(z) \in W_p(\mathbb{C})$ (or $f(z) \in W_p^o(\mathbb{C})$), $p > 1$, then all the limit functions of the convergent sequences of family $\{f(a_n + |a_n|^{2-p}z)\}$ belong to $W_2(\mathbb{C})$ (resp. $W_2^o(\mathbb{C})$).*

Corollary 1. *If $f(z) \in W_p^o(\mathbb{C})$, $p > 1$, then there exists such $R > 0$ that function $f(z)$ takes all the values of extended complex plane $\bar{\mathbb{C}}$ in each weighted disk $D_p(a, R) = \{z : |z - a| \le R \cdot |a|^{2-p}\}$.*

2. Now let $f(z)$ be defined in the unit disk D. Meromorphic function $f(z) \in W_p(D)$, $p > 1$, if $\lim\limits_{|z| \to 1} (1 - |z|^2)^p \rho(f(z)) < \infty$. It is known that $f(z) \in W_p(D) \Leftrightarrow$ the family of functions $\{f(a_n + (1 - |a_n|^2)^p z)\}$, $\lim\limits_{n \to 1} |a_n| = 1$, is normal in $\mathbb{C}$. If in addition this family doesn't have as a limit functions of convergent sequences the constant functions then meromorphic function $f(z) \in W_p^o(D)$, $p > 1$.

Theorem 2. *If $f(z) \in W_p(D)$ (or $f(z) \in W_p^o(D)$), $p > 1$, then all the limit functions of the convergent sequences of family $\{f(a_n + (1 - |a_n|^2)^p z)\}$ belong to $W_2(\mathbb{C})$ (resp. $W_2^o(\mathbb{C})$).*

Corollary 2. *If $f(z) \in W_p^o(D)$, $p > 1$ then there exists such $R > 0$ that function $f(z)$ takes all the values of extended complex plane $\bar{\mathbb{C}}$ in each weighted disk $D_p(a, R) = \{z : |z - a| \leq R \cdot (1 - |a|^2)^p\}$.*

Remark. The class $W_1(D)$ is the class of normal functions and subclass $W_1^o(D)$ is the subclass of the normal functions of the first kind in the sense of Noshiro. It is known that if $f(z) \in W_1^o(D)$ (or $f(z) \in W_1^o(D)$) then all the limit functions of the convergent sequences of the family $\left\{f(\frac{z+a}{1+\bar{a}z})\right\}$, $a \in D$, belong to the class $W_1(D)$ (resp. $W_1^o(D)$).

[1] Gavrilov V.I. Math., USSR - Izvestija, 2(1968), 684-694.

[2] Yosida K. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, v.16 (1934), p.227-235

4　多項式による正則写像の一意性

城崎　学　　大阪府立大学

工学部

R. Nevanlinna の 2 つの次の一意性定理，すなわち，

Theorem A. f, g を C 上の相異なる非定数有理形関数とする．$\overline{C}$ の 4 つの点 $a_1, \ldots, a_4$ に対し，$f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j)$ $(j = 1, \ldots, 4)$ が重複度も込めて成り立つならば，g は f の Möbius 変換である．

Theorem B. C 上の 2 つの非定数有理形関数の$\overline{C}$ の 5 つの点に対する逆像がそれぞれ等しいならば，これらの写像は一致する，

においては,（実際は行わないが）4 個または 5 個の有理形関数の対をチェックしなくてはいけないので面倒である．しかし，最近 H.-Y. Xin は次を示した：

Theorem C. n, m は $n > 2m + 4$ を満たす互いに素な正の整数とする．a, b を $P(w) = w^n + aw^m + b = 0$ が重根をもたないようにと

る．このとき，2 つの非定数整関数 f, g が 零点をもたないある整関数 α に対し，

$$P(g) = \alpha P(f)$$

をみたすならば，$f = g$ が成り立つ．

ここでは，これに関連して次の定理を紹介する：

Theorem. $w_0, \cdots, w_n$ の同次多項式 H_n で次を満たすものが存在する：

$\boldsymbol{C}$ から n 次元複素射影空間への代数的に非退化な 2 つの正則写像 $f = (f_0 : \cdots : f_n), g = (g_0 : \cdots : g_n)$ が零点をもたないある整関数 α に対し，

$$H_n(g_0, \cdots, g_n) = \alpha H_n(f_0, \ldots, f_n)$$

をみたすならば，$f = g$ が成り立つ．

References

[1] R. Nevanlinna, Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Functionen, Acta Math. 48 (1926), 367–391.

[2] M. Shirosaki, On polynominals which determine holomorphic mappings, preprint.

[3] H-Y. Xin, A question of Gross on the uniqueness of entire functions, preprint.

On the functional equation $f^n = e^{P_1} + \cdots + e^{P_m}$ II

5

野田　洋二　　　　　東京工大・理

$E_N = \{e^{P_1} + \cdots + e^{P_m} : P_j \in \mathbf{C}[z],\ \deg P_j \le N,\ m \in \mathbf{N}\}$ とおく．このとき E_N が整関数環の中で代数的に閉じているかという問題があり，この問題に関して参考文献 [1] で次の結果を示した．

$A_1 < \cdots < A_s$, $g_1, \ldots, g_s \in E_{N-1}$，$f$ を $\{|\arg z| < \epsilon\}$ $(\epsilon > 0)$ 上の正則関数で $f^n = g_1 e^{iA_1 z^N} + \cdots + g_s e^{iA_s z^N}$ をみたすものとする．このとき $g_1 = e^P, P \in \mathbf{C}[z]$ （又は $g_s = e^Q, Q \in \mathbf{C}[z]$ ）ならば ${g_s}^{1/n} \in E_{N-1}$ （又は ${g_1}^{1/n} \in E_{N-1}$ ）．

ここで　f が E_N に含まれるか否かは [1] では不明だった．本講演では，その点が証明できたことを報告する．

定理． $A_1 < \cdots < A_s$, $g_1, \ldots, g_s \in E_{N-1}$，$f$ を $\{|\arg z| < \epsilon\}$ $(\epsilon > 0)$ 上の正則関数で $f^n = g_1 e^{iA_1 z^N} + \cdots + g_s e^{iA_s z^N}$ をみたすものとする．このとき $g_1 = e^P, P \in \mathbf{C}[z]$ （又は $g_s = e^Q, Q \in \mathbf{C}[z]$ ）ならば，$f \in E_N$．

証明には [1] の結果を用いる．この結果で「 $g_1 = e^P$, $P \in \mathbf{C}[z]$ 又は $g_s = e^Q, Q \in \mathbf{C}[z]$ 」という条件を「 ${g_1}^{1/n} \in E_{N-1}$ 又は ${g_s}^{1/n} \in E_{N-1}$ 」で置き換えられるかという問題が残されている．

参考文献

[1] Y. Noda, On the functional equation $f^n = e^{P_1} + \cdots + e^{P_m}$ and rigidity theorems for holomorphic curves, Kodai Math. J., Vol. 16, No. 1, pp. 90–117, 1993.

6

Complex oscillation theory on $f'' + A(z)f = 0$

石崎　克也　　　日本工大

本講演では複素平面上での微分方程式

$$(1) \qquad f'' + A(z)f = 0, \qquad A(z) \text{ は整函数}$$

の解の零点の値分布についての結果を報告する．複素平面上での微分方程式論の中で解の値分布を調べることに関しては，ある意味で2階以上の同次線形の方程式は特別である．方程式 (1) についての組織だった研究は Bank and Laine [1] のあたりから始まったと言って良いと思われる．以降，数十本にあたる (1) に関しての学術論文が現れたが未解決の問題も少なくない．文献のタイプは大きく分けると (1) の任意の基本解の組 $\{f_1, f_2\}$ に対してのものと，任意の解 f についてのものである．勿論，後者の方でよい結果が出てしまえば前者の方を含むわけであるが，前者の研究論文の中でしばしば登場する Bank–Laine 恒等式，$f_1 f_2 = E$, $W(f_1, f_2) = c$ として

$$4A(z) = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 - \left(\frac{c}{E}\right)^2 - 2\frac{E''}{E}$$

に見合う道具が後者の方にないのが現実である．後者の方の研究成果で代表的なものにいわゆる "$\frac{1}{16}$-Theorem" と言われるものがある．

Theorem A, Bank, Laine and Langley [2]. Pを非定数多項式としその次数を n とする．Q を位数有限の整函数とし$\sigma(Q) < n$とする．(1) で $A(z) = e^{P(z)} + Q(z)$ とした微分方程式が非自明な解 f で$\lambda(f) < n$ を満たすものを持つならば，fは零点を持たず Q は多項式で

$$Q = -\frac{1}{16}(P')^2 + \frac{1}{4}P''$$

である．

ここで，$\sigma(A)$ は A の位数，$\lambda(f)$ は fの零点の収束指数である．

Theorem A の条件でもそうであったように $A(z)$ の位数は有限という仮定のもとで取り扱われた場合が決定的に多い．今後，位数無限大のときどのように扱っていくのかがひとつの問題である．ようやく最近になって，$\frac{1}{16}$-Theorem は Chiang, Laine and Wang [3] の中で位数有限の枠が外されている現状である．[1] の中で位数の有限無限に関わらない定理に次のものがある．

Theorem B. (1) で A は $\lambda(A) < \sigma(A)$, $0 < \sigma(A) \leqq \infty$ を満たすとする．このとき非自明な解は $\lambda(f) \geqq \sigma(A)$ を満たす．

Theorem B の若干の進展があったので報告する．

Theorem. (1) で A は $0 < \sigma(A) \leqq \infty$ と，$\varepsilon > 0$ に対し

$$(8+\varepsilon)\overline{N}\left(r, \frac{1}{A}\right) \leqq T(r, A), \quad r \notin E_0$$

を満たすとする，ここで E_0は測度有限な除外区間である．このとき非自明な解は $\lambda(f) \geqq \sigma(A)$ を満たす．

References

[1] Bank, S. and I. Laine, *On the oscillation theory of $f'' + Af = 0$ where A is entire*, Trans. Amer. Math. **273** (1982), 351–363.

[2] Bank, S., I. Laine and J. K. Langley, *Oscillation results for solutions of linear differential equations in the complex domain*, Resultate Math. **16** (1989), 3–15.

[3] Chiang Y.-K., I. Laine and S.-P. Wang, *Oscillation results for some linear differential equations*, Math. Scand. (to appear).

7

An extension of the defect relation for holomorphic curves

TODA Nobushige Nagoya Institute of Technology

1. Let $f=[f_1,\cdots,f_{n+1}]$ be a transcendental holomorphic curve from C into $P^n(C)$ with a reduced representation $(f_1,\cdots,f_{n+1}):C\to C^{n+1}-\{0\}$, $S_o(r,f)$ any quantity satisfying $S_o(r,f)=o(T(r,f))$ $(r\to\infty)$, $M_o(f)=\{a:\text{meromorphic in } |z|<\infty \text{ and } T(r,a)=S_o(r,f)\}$, $H_o(f)=\{A=[a_1,\cdots,a_{n+1}]:T(r,A)=S_o(r,f)\}$, X a subset of $H_o(f)$ in general position, $X_o=\{A=[a_1,\cdots,a_{n+1}]\in X:a_{n+1}=0\}$ and $\#X_o=\nu$ $(0\leq\nu\leq n)$. We suppose that f is linearly non-degenerate over $M_o(f)$. The following theorem is known.

Theorem A. $\sum_{A\in X}\delta(A,f)\leq n+1$ ([1]).

The purpose of this talk is to give a result which contains Theorem A.

2. Definition 1. (a) For $u(z)=\max_{1\leq j\leq n}|f_j(z)|$,

$$t(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log u(re^{i\theta})d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log u(e^{i\theta})d\theta.$$

(b) $\Omega=\limsup_{r\to\infty} t(r,f)/T(r,f)$ ([2]).

Remark 1. $t(r,f)\leq T(r,f)+O(1)$ and $0\leq\Omega\leq 1$.

Definition 2. We say that X is ν-maximal in the sense of general position if it satisfies the following (i) and (ii):

(i) X is maximal in the sense of general position; namely, for any Y in general position such that $X \subset Y \subset H_o(f)$, $X=Y$;

(ii) $\#X_o = \nu$.

Remark 2. For any ν, there is a ν-maximal subset of $H_o(f)$ in the sense of general position $(1 \leq \nu \leq n)$([4]).

3. Theorem. For any $A_1, \cdots, A_q \in X - X_o$ and $B_1, \cdots, B_p \in X_o$ $(0 \leq p \leq \nu)$

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(A_j, f) + \sum_{k=1}^{p} \delta(B_k, f) \leq p+1+(n-p)\Omega \qquad ([3]).$$

Corollary. If X is ν-maximal in the sense of general position,

$$\sum_{A \in X} \delta(A, f) \leq \nu+1+(n-\nu)\Omega \qquad ([3]).$$

Remark 3. $\nu+1+(n-\nu)\Omega \leq n+1$ and the equality holds if and only if $\Omega=1$ or $\nu=n$.

4. References.

[1] W. Stoll, Math. Ann., 282(1988), 185-222.

[2] N. Toda, NIT Sem. Rep. on Math., 117(1994), pp.12.

[3] ------, ibid., 122(1994), pp.10.

[4] ------, ibid., 125(1994), pp.6.

8 **On singular set of analytic function**

柴田敬一　岡山理大理

$\mathbb{C}$の空でないコンパクト集合をEとするとき，Eの近傍での1価解析函数$f(z)$があらわす特異性について考察する。

9 一点で穴をあけたトーラス上の Weierstrassの定理

斉ノ内義一

ω_1, ω_2 は $\mathbb{R}$ 上一次独立 $(\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0)$
$\Gamma:=\{m\omega_1+n\omega_2 \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$, トーラス $\mathbb{C}/\Gamma$
を $P:=\{a+\lambda\omega_1+\mu\omega_2 \mid \lambda,\mu\in[0,1]\}$ で表わす。
a は P が原点を内部に含むようにとる。点列 $\{a_\nu\}$,
$a_\nu\in P$, $|a_\nu|\searrow 0$ が与えられたとき各点 a_ν で
一位の零点を持ち ω_1, ω_2 を基本周期とする $P-\{0\}$ で
正則な2重周期関数 $F(u)$ を構成する問題を考える。

一般に開リーマン面では解の存在についてはよく知られたことであるが，平面の場合のように具体的な関数を用いての表示を得るには一般的過ぎる。面をトーラスから一点を除いた $P-\{0\}$ にすれば $\wp(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ など周知の関数を利用することが出来て $F(u)$ を

$$F(u)=e^{H(u)}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{\sigma(u-a_\nu)}{\sigma(u)}e^{a_\nu\zeta(u)+P_\nu(\wp(u),\wp'(u))}\right]$$

と表示することが出来ることを示す。ここで $p_\nu(x,y)$ は x, y の多項式，$H(u)$ は $P-\{0\}$ で2重周期正則関

数で $\wp(u)$, $\wp'(u)$ の多項式の極限で表示される。

証明は次の順序に従う。du, $\wp(u)du$, $[\zeta(u-a_\nu)-\zeta(u)]du$ は P 上の才1〜3種アーベル微分でこれを用いて $P-\{0\}$ 上 a_ν で一次の極(留数 1)を持ち A, B 周期 0 のアーベル微分 $d\varpi_\nu$ を作る。次にその積分を $P_\nu(\wp(u), \wp'(u))$ で近似する(近似可能なことは一昨年秋の学会で示した)。更に関係式 $\wp(u)=-\zeta'(u)$ $\zeta(u)=\frac{d}{du}\log\sigma(u)$ を使って $\varpi(u)$ の表示を得る。

応用として, Gunning-Narasimhan によって示された局所単葉な $P-\{0\}$ 上の2重周期正則関数 $G(u)$ ($G'(u)\neq 0$) が上記の表示を持つことがいえる。

最後に $\omega_1\to\infty$, $\omega_2\to\infty$ のときの考察を述べる。

10 開リーマン面上ある種のアーベル微分の空間の存在及びその応用について

松井邦光　同志社大 工
米谷文男　京都工繊大工芸

R; 開リーマン面, $g \leqq \infty$ 種数,

$\{R_n\}$; ~~標準近似列~~, g_n : R_nの種数

Λ_h; ノルム有限な複素調和微分全体が実軸上に張るヒルベルト空間で内積は実デリクレ内積。

$\Gamma_h = \{\omega \in \Lambda_h,\ \omega は実\}$, $\Lambda_{hse}, \Lambda_{ho}, \Lambda_a, \Lambda_{\bar{a}}$,

, $\Gamma_{ho}, \Gamma_{hm}, \cdots$, は夫々に対応する空間,

$J = \{1, 2, \cdots, g\}$, $J = \bigcup_{p=1}^{K} J_p$; JのK-分割.

$\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^{K}$; L_jは同一平面上原点を通る直線,

$\Lambda_n^1 = \{\lambda \in \text{closure}(\Lambda_{he} + \Lambda_{ho})$, (i) $\int_{A_j, B_j} \lambda \in L_p$, $j \in J_p$ 且 $j \leqq g_n$, (ii) $\int_{A_j, B_j} \lambda \in i\mathbb{R}$, $j > g_n$, $\mathbb{R}$は実軸, (iii) $\mathcal{J}m\lambda \in \Gamma_{ho}\}$.

$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_g\}$, p_jは実数で $\{p_j\}$; 有界

$\Lambda_n^2 = \{\lambda \in \text{closure}(\Lambda_{ee} + \Lambda_{eo})$, (i) $\int_{A_j} \lambda = p_j \int_{B_j} \lambda$, $j \leqq g_n$, (ii) $\int_{A_j, B_j} \lambda \in i\mathbb{R}$, $j > g_n$ (iii) $\mathcal{J}m\lambda \in \Gamma_{ho}\}$,

このとき $\Lambda_n^1 = i\Lambda_n^{1*\perp}$, $\Lambda_n^2 = i\Lambda_n^{2*\perp}$ が成立して

$\Lambda_x^k = \{\lambda;\ \exists\ (\lambda_n \in \Lambda_n^k);\ \|\lambda - \lambda_n\| \to \infty \text{ as } n \to \infty\}$,

$$\Lambda^1_{n0} = \text{closure}\left\{ \Gamma_{he} + \Lambda_{ee} \cap \Lambda_{eo} + \sum^{g_n} \tau_j \{\sigma(A_j), \sigma(B_j)\} \right\},$$

$$\Lambda^2_{n0} = \text{closure}\left\{ \Gamma_{he} + \Lambda_{ee} \cap \Lambda_{eo} + \sum^{g_n} \omega_j \{\sigma(A_j) - \tau_j \sigma(B_j)\} \right\}$$

ここに $\tau_j \in H_j$, ω_j は任意の複素定数, $\sigma(\gamma)$ は γ-cycle の period reproducer, $\{\sigma(A_j), \sigma(B_j)\}$ は $\sigma(A_j)$, $\sigma(B_j)$ で生成される空間　とおく。(但し $|\tau_j| = 1$).

Th. 各々の n に対し $\Lambda^k_{n0} < \Lambda^k_m$, $\forall m > n$, $k = 1, 2$

$\Rightarrow$ $\{\Lambda^k_n\}$ よりつくられた $\hat{\Lambda}^k_x$ に対し

(1) $\hat{\Lambda}^k_x = i \hat{\Lambda}^{k\,*\perp}_x$

(2) $\{\lambda,\ \exists \{\lambda_{n_p} \in \Lambda^k_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ s.t. $\sup_p \{\|\lambda_{n_p}\|\} < \infty$, $\lambda_{n_p} \to \lambda$ 広義一様$\} = \tilde{\Lambda}^k_x$ とおくと $\tilde{\Lambda}^k_x = \hat{\Lambda}^k_x$, $k = 1, 2$

註. $\Lambda^k_{n0} \not\subset \Lambda^k_m$ (る.B, m を偶, 奇に対し $\mathfrak{L}_e$, $\mathfrak{P}$ を変える) と $\hat{\Lambda}^k_x \subsetneq \tilde{\Lambda}^k_x$, $\tilde{\Lambda}^k_x \cap i\tilde{\Lambda}^{k*}_x \neq \{0\}$, $k = 1, 2$ となる。

Cor として柴のTh より $\tilde{\Lambda}^k_x$, $k = 1, 2$ の各々に対するリーマンロックのTh が成立する。更に $\tilde{\Lambda}^2_x$ に対し楠, 吉田の方法を適用すれば, ~~リーマンのTh が成立する。~~ Λ^k_x-挙動を境界挙動としてもつ有理型関数に関しアーベルのTh が成立する。

11

Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces II

金沢大学工学部　奥村善英

今回は、有限次元 Teichmüller 空間の幾何的な解釈を持つ角度変数 (angle parameter) からなる実解析的座標について報告する。

Fuchs 群は種数 g の閉 Riemann 面を表現するとき $(g,0,0)$ 型といわれ、図 1 のような不動点の配置を持つ双曲型一次変換からなる標準生成元系

$$\Sigma = (A_1, B_1, ..., A_g, B_g);$$

$$B_g^{-1}A_g^{-1}B_gA_g \cdots B_1^{-1}A_1^{-1}B_1A_1 = identity$$

を持つ。Σ の一次変換による共役類 $[\Sigma]$ の各元は同じ Riemann 面を表現する。以下、$g \geq 2$ としよう。$(g,0,0)$ 型標準生成元系の共役類の集合は $(g,0,0)$ 型 Teichmüller 空間 $T(g,0,0)$ といわれ、$6g-6$ 次元実解析的多様体となる。

$[\Sigma]$ が表現する Riemann 面上の閉測地線の長さに対応する変数から $T(g,0,0)$ の大域的実解析的座標が得られることが、Fricke の時代から知られている。このような変数は、長さ変数 (length parameter) といわれる。Teichmüller 空間を記述する長さ変数の最小個数を N_1 とすると、

$$N_1 = 6g - 5 = \dim(T(g,0,0)) + 1$$

であることが、1993 年に Schmutz により示された。私も同時期に全く別方法で、この結果と長さ変数の空間を記述した。

一般の Riemann 面は building blocks といわれる簡単ないくつかの Riemann 面を結合することで得られる。Building blocks と結合の仕方は Riemann 面上のいくつかの測地線間の交角で決まることが示される。よって、一般の Riemann 面は、面上のいくつかの測地線間の交角で決まることがわかる。このような交角を角度変数 (angle parameter) といおう。このような手順で、角度変数による Teichmüller 空間の座標付けが可能であることが示される。

双曲幾何においては、三角形は三辺の長さと三内角のどちらからでも決定でき、また角度には負の値が考えられることから、長さより角度の方が情報量が

多いように思える。これから、Teichmüller 空間を記述する角度変数の最小個数を N_2 とすると、

$$N_2 = \dim(T(g,0,0)) \ (< N_1)$$

が予想される。長さ変数の空間は複雑な多項式系で記述された。cosine や sine の多項式系は線形方程式系に帰着されることから、角度変数の空間の記述は、長さ変数の場合より、容易と予想される。

前回は、$T(2,0,0)$ に関する結果を報告した。

講演では、角度変数による $T(g,0,0)$; $g \geq 3$ に関する結果を報告する。

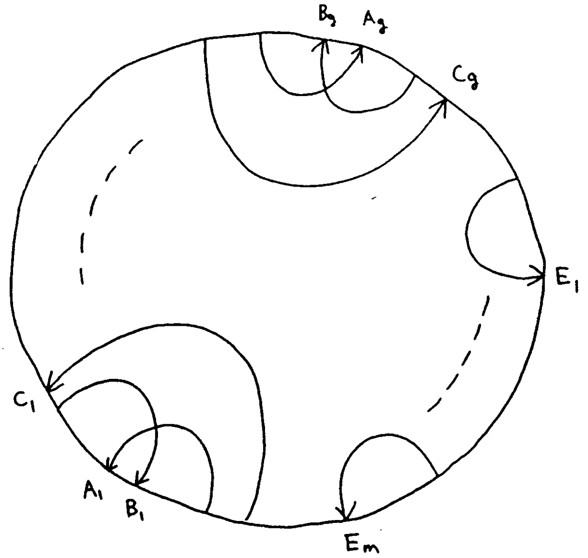


図 1

12 RIEMANN 面の HOLOMORPHIC FAMILY について

HIROSHIGE SHIGA

東京工業大学　理学部

有限型 Riemann 面上の有限型 Riemann 面の局所非自明な正則族を考える。Base surface 及び fiber の surface が共に双曲型なら、その個数は有限個しかないことが知られている。本講演ではその個数評価について考察する。

一般に上のような正則族が与えられたとき、それは base surface の普遍被覆面から fiber のタイヒミュラー空間への正則写像と、 monodoromy と呼ばれる base surface の基本群からタイヒミュラーモジュラー群への準同型の組として表現することが出来る。すなわち、$B = \mathbb{H}^2/\Gamma$ が (g,n) 型の Riemann 面で base surface、与えられた正則族の fiber の Riemann 面が (g',n')型であったとすると、上半平面 $\mathbb{H}^2$ からタイヒミュラー空間 $T(g',n')$ への非定数正則写像 Φ と B を表すフックス群 Γ からタイヒミュラーモジュラー群 $Mod(g',n')$ への準同型 χ (monodoromy) が存在して、任意の $\gamma \in \Gamma$ と $z \in \mathbb{H}^2$ に対して $\Phi(\gamma(z)) = \chi(\gamma)(\Phi(z))$ が成立する。（このとき、Φ の取り方は $Mod(g',n')$ の作用を除いて一意的である。）

冒頭で述べたように、本講演では、

問題 B 上の (g',n') 型の Riemann 面の正則族で局所非自明なものの個数を評価せよ。

という問題を考えるが、これを上のような正則写像の個数評価という観点から考察する。

上に述べたように、Riemann 面の正則族に対しては monodoromy が決まるが、実はこの逆も言えることが知られている。 すなわち、

Proposition 1 (Imayoshi-Shiga). *Riemann* 面 B 上の (g',n') 型の *Riemann* 面の正則族で局所非自明なものが二つ与えられているとする。ここで Φ_1, Φ_2 : $\mathbb{H}^2 \to T(g',n')$ をそれらに対応する正則写像、準同型写像 χ_1,

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

$\chi_2 : \Gamma \to Mod(g', n')$ をその monodoromy とする。もし、$\chi_1 = \chi_2$ ならば $\Phi_1 = \Phi_2$ である。

したがって、正則族を決定することと、その monodoromy を決めることは同値になる。そこで、最初に monodoromy χ の像として現れる $Mod(g', n')$ の部分群はどのようなものになるかを考える。

Theorem 1. $\chi(\Gamma)$ は $Mod(g', n')$ の無限位数 *irreducible subgroup* である。

すると Ivanov の結果から、直ちに次のことが分かる。

Corollary 1. $\chi(\Gamma)$ は必ず *hyperbolic modular transformation* を含む。

(g, n) 型の Riemann 面の moduli 空間を $M(g, n)$ とする。$B \in M(g, n)$ に対して、B上の (g', n') 型の Riemann 面の正則族で局所非自明なものの個数を $n(B, (g', n'))$ と書くことにする。また、$M(g, n)$ の部分集合 K に対して

$$N(K, (g', n')) = \sup\{n(B, (g', n')); B \in K\}$$

とおく。このとき、次のことが証明できる。

Proposition 2. K が $M(g, n)$ の *compact* 集合ならば、$N(K, (g', n')) < \infty$.

そこで、compact 集合 K の代わりに $M(g, n)$ となるかどうかが問題になり、更にそのとき、$N(M(g, n), (g', n'))$ を上から評価すれば最初の問題の解答になる。ここでは、$g' = 0$ の場合と fiber が hyperelliptic の場合に解答が得られたことを報告する。

Theorem 2. $N(M(g, n), (0, n')) < \infty$. また、実際に (g, n, n') を使って $N(M(g, n), (0, n'))$ を上から評価することができる。

Corollary 2. $HN(M(g, n), (g', 0))$ で *fiber* が種数 g' の *hyperelliptic Riemann* 面からなる局所非自明な *Riemann* 面の正則族の個数をあらわすものとすると、

$$HN(M(g, n), (g', 0)) < \infty.$$

特に

$$N(M(g, n), (2, 0)) < \infty.$$

しかも、いずれの個数も具体的に評価することが出来る。

References

1. Y. Imayoshi and H. Shiga, *A finiteness theorem for holomorphic families of Riemann surfaces*, Holomorphic Functions and Moduli II, vol. 11, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 1988 207–219.

13

リーマン面上の射影接続のモジュライのシンプレクティック構造

河井真吾　　東大数理

Xを種数≥ 2の閉リーマン面，Hを上半平面とする。一意化定理によりフックス群Γをとって，$X=H/\Gamma$と表すことができる。H上のΓに関する正則二次微分全体を$A_2(H,\Gamma)$と表そう。$q\in A_2(H,\Gamma)$に対して，H上での方程式 (1) $S(f)=q$ （$S(f)$はfのシュワルツ微分を表す）の任意の解fは，Hからリーマン球面$\mathbb{P}^1$への局所双正則写像となり，$f(\gamma z)=\rho(\gamma)f(z)$ $(\gamma\in\Gamma, z\in H)$によって，準同型$\rho:\Gamma\to PSL(2,\mathbb{C})$を定める。(1)の解の一般形は$A\circ f$ $(A\in PSL(2,\mathbb{C}))$と表され，対応する準同型は$\gamma\mapsto A\rho(\gamma)A^{-1}$の形であるから，各$q\in A_2(H,\Gamma)$に対して表現$\Gamma\to PSL(2,\mathbb{C})$の共役類が一つ定まることになる。これを$q$の（または$q$に対応する$X$上の射影構造の）モノドロミーという。

次に，リーマン面Xの複素構造を動かして考えるために，(標識付き)フックス群Γのタイヒミュラー空間$T(\Gamma)$と普遍タイヒミュラー曲線$\pi: V(\Gamma)\to T(\Gamma)$を導入しよう。

各$\tau \in T(\Gamma)$に対して，擬半平面H_τと擬フックス群Γ_τが対応し，射影πのτ上のファイバーはτの表す標識付きリーマン面H_τ/Γ_τとなる。各τに対して，H_τ上のΓ_τに関する正則二次微分全体を$A_2(H_\tau, \Gamma_\tau)$とすれば，これらの全体は正則ベクトル束$Q \to T(\Gamma)$を形成する。各$q \in A_2(H_\tau, \Gamma_\tau)$は表現$\Gamma_\tau \to PSL(2, \mathbb{C})$の共役類を一つ定めることから，結局モノドロミー写像

$$F : Q \to \mathrm{Hom}(\Gamma, PSL(2, \mathbb{C}))/PSL(2, \mathbb{C}) =: R$$

が，自然な同型$\Gamma_\tau \cong \Gamma$を通じて定義される。写像Fについての基本的事実として，(i) $\mathrm{Im}\,F$の各点はRの正則点であり，(ii) Fは局所双正則写像となることが知られている（Hejhal, Earle, Hubbard）。今回の研究の着眼点は，(i)空間Qが$T(\Gamma)$の正則余接束$(T^{1,0})^* T(\Gamma)$とみなされ，したがってその上には自然なシンプレクティック構造ω_Qが定まることと，(ii)表現類の空間R上にもコホモロジーのポアンカレ双対性によるシンプレクティック構造ω_Rが定義されることである。

$\boxed{\text{定理}}$ 写像$F : Q \to R$はシンプレクティック構造を（定数$\pi\sqrt{-1}$を除いて）保つ，すなわち

$$\pi\sqrt{-1}\, F^*\omega_R = \omega_Q \quad \text{が成立する。}$$

14

無限 circle packing の変形空間の連分数座標について

松崎克彦　　東工大・理

$\mathcal{C}=\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の互いに内部 $\mathrm{Int}\,C_j$ が交わらない無限個の円の集合で次を満たすものとする：(i) $\mathbb{C}-\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{Int}\,C_j$ の各連結成分は、$\mathcal{C}$ の円弧で囲まれた三稜形 または四稜形 (ii) $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ の集積点全体は2次元ルベーグ測度に関する零集合。

$\mathcal{C}$ の擬等角変形空間 $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ とは、$\mathcal{C}$ と擬等角同値な $\mathcal{C}'=\{C_j'\}_{j=1}^{\infty}$ 全体の集合 $\{\mathcal{C}'\}$（ただし、$\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$ で同値なものは同じとみなす）のことと定義する。$\Gamma_{\mathcal{C}}$ を $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ に関する反転で生成されるクライン群とすると、$\mathcal{T}(\mathcal{C})$ は $\Gamma_{\mathcal{C}}$ の擬等角変形空間と一致し、さらにこれは orbifold $\Omega(\Gamma_{\mathcal{C}})/\Gamma_{\mathcal{C}}$ のタイヒミュラー空間と一致するので、このタイヒミュラー距離をもって $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ を距離空間とみなす。$\mathcal{C}$ の外部にある四稜形の集合を $\{Q_i\}$ とし、写像 $\mathcal{T}(\mathcal{C})\to\ell_{\infty}$（実数列の sup ノルムによるバナッハ空間）を $[f]\mapsto\left(\log\frac{\mathrm{mod}(f(Q_1))}{\mathrm{mod}(Q_1)},\ \log\frac{\mathrm{mod}(f(Q_2))}{\mathrm{mod}(Q_2)},\ \cdots\right)$ で定義するとこれは同相写像となるので、ℓ^{∞} の点を

$\mathcal{T}(\mathcal{C})$のパラメーターと考え、$\mathcal{T}(\mathcal{C})$のモジュール座標と呼ぶ。

Brooksは円弧四角形Qに対して、その内部をcircle packingするアルゴリズムからある連分数を定義し、その値$\mathrm{rem}(Q)$を用いて、$\mathcal{C}$が有限個の円からなる場合に$\mathcal{T}(\mathcal{C})$のパラメーターを与えた。本講演では$\mathcal{C}$が無限個の円からなる場合にもこの事実が拡張できることを示す。すなわち、写像$B: \mathcal{T}(\mathcal{C}) \cong l_\infty \to \mathbb{R}^\infty$を$[f] \mapsto \left(\log\frac{\mathrm{rem}(f(Q_1))}{\mathrm{rem}(Q_1)}, \log\frac{\mathrm{rem}(f(Q_2))}{\mathrm{rem}(Q_2)}, \cdots\right)$により定義し、Brooks写像と呼ぶとすると、

定理 仮定(i)(ii)を満たす$\mathcal{C}$に対して、Brooks写像Bは、$\mathcal{T}(\mathcal{C})$から$l_\infty (\subset \mathbb{R}^\infty)$の上への同相写像である。

証明は、Bが連続、単射、開写像、全射であることをそれぞれ示すのであるが、ポイントはBの$\mathbb{R}^\infty$の各成分への射影B_iの"一様性"を言う所にあり、そのためには$\mathcal{C}$が4円からなる場合($\Gamma_{\mathcal{C}}$が擬フックス群の場合)について、$\mathcal{T}(\mathcal{C})$のコンパクト化、$b: \mathcal{T}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$が一様連続であることおよび$b, b^{-1}$は$\mathbb{R}^2$の直線を"それに近い曲線"に写すこと等を用いる。

15

フックス群の極限集合のハウスドルフ次元が1となるための条件

松崎克彦　　東工大・理

有限生成とは限らない一般のFuchs群 Γ に対して、その limit set $\Lambda(\Gamma)$ の Hausdorff 次元 $\dim(\Lambda(\Gamma))$ が 1 となるための必要条件と十分条件を考える。Γ の conical limit set $\Lambda_c(\Gamma)$ については、双曲的リーマン面 $N(\Gamma)=\mathbb{H}/\Gamma$ の幾何学的性質（双曲的ラプラシアンに関する固有値スペクトル、等周不等式など）や Γ のポアンカレ級数の収束指数等の条件により与えることができるが、$\Lambda(\Gamma)$ についてはあまり知られていないようである。

完備双曲面 $N(\Gamma)=\mathbb{H}/\Gamma$ の convex core $C(\Gamma)=\mathrm{hull}(\Lambda(\Gamma))/\Gamma$ の相対境界を $\partial C(\Gamma)$ と書く。$N(\Gamma)$ の thin part $P(\Gamma)$ とは、マルグリス定数を r_0 としたとき、単射半径が r_0 以下の $N(\Gamma)$ の点全体の集合と定める。Tukia は n 次元双曲的離散群 Γ が第2種で幾何学的有限ならば $\dim(\Lambda(\Gamma))<n$ であることを示したが、その証明法を翻訳すると次の結果を得る。

定理1　任意の $x \in C(\Gamma)-P(\Gamma)$ が $\rho(x, \partial C(\Gamma)) \leq K$（ただし ρ は双曲的距離）をみたすような $K>0$ が存在すれば、$\dim \Lambda(\Gamma) \leq d(K) < 1$（$d(K)$ は K のみによる定数）。

逆に、$\partial C(\Gamma)$ から遠ざかる $C(\Gamma)-P(\Gamma)$ の点列が存在すれば $\dim \Lambda(\Gamma)=1$ か？といえば、これだけでは一般に正しくないが、Bishop-Jones による幾何学的有限でない有限生成クライン群 Γ が $\dim(\Lambda(\Gamma))=2$ を満たすことの証明法を再び翻訳すると次を得る。

定理2　$C(\Gamma)-P(\Gamma)$ 内の点列 $X=\{x_n\}$ で次の2条件を満たすものが存在すれば $\dim(\Lambda(\Gamma))=1$ である。
(i) $\rho(x_n, \partial C(\Gamma)) \to \infty$　(ii) $r(y) := \rho(X, y)$，$\lambda_0 = \lambda_0(\Gamma)$ をラプラシアンの L^2-スペクトルの inf，$\partial\tilde{C}(\Gamma) := \partial(C(\Gamma)-P(\Gamma)) - \partial P(\Gamma)$ としたとき、

$$\int_{\partial\tilde{C}(\Gamma)} \lambda_0 \exp\left(-\frac{\lambda_0}{2} r(y)\right) dS(y) < \infty$$

なお、定理2の証明は「$\lambda_0(\Gamma)>0$（$\Leftrightarrow \dim \Lambda_c(\Gamma)<1$）かつ (i) & (ii) $\Rightarrow$ 1次元測度 $m(\Lambda(\Gamma))$ が正」より $\dim(\Lambda(\Gamma))=1$ を示すものであり、定理2からは判定できないが、$\dim(\Lambda(\Gamma))=1$ である Γ の例はある。実際、$\dim(\Lambda(\Gamma))=1$ かつ $\dim(\Lambda_c(\Gamma))<1$ かつ $m(\Lambda(\Gamma))=0$ となる Γ を構成した。

16

高次元の擬 FUCHS 群の LIMIT SET の HAUSDORFF 次元について

井関裕靖　　　東京都立大学理学部

以下では、向きを保つ Möbius 変換群（round k-sphere, $k \leq n-1$, を round k-sphere に写す n 次元球面の微分同相写像の作る群）の離散群を S^n に作用する Klein 群と呼ぶことにする。ここで round k-sphere とは、S^n を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の単位球面とみなしたとき、$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の $k+1$-plane と S^n との交わりとして得られる k 次元球面のことをいう。

Γ_0 を n 次元球面 S^n $(n \geq 2)$ に作用する convex cocompact な Klein 群で limit set $\Lambda(\Gamma_0)$ が round k-sphere になっているものとする。 Klein 群 Γ が convex cocompact であるとは、limit set の convex hull の Γ の作用による商空間がコンパクトになることと定義する。これは、Γ が geometrically finite で parabolic element を持たないことと同値である。ここでは、上のような Γ_0 で limit set が round $(n-1)$-sphere になるようなものを Fuchs 群と呼ぶ。また、Fuchs 群の擬等角変形によって得られる Klein 群を、擬 Fuchs 群と呼ぶことにする。

定理 ([2]). Γ_0 を上述のような *Klein* 群とする。Γ を Γ_0 と（群として）同形で *convex cocompact* な、S^n に作用する *Klein* 群とす

る。このとき、Γ の *limit set* $\Lambda(\Gamma)$ の *Hausdorff* 次元 $\dim_H(\Lambda(\Gamma))$ は k 以上である。さらに、$dim_H(\Lambda(\Gamma)) = k$ となるための必要十分条件は、$\Lambda(\Gamma)$ が *round k-sphere* になることである。

この定理の $n = 2,\ k = 1$ の場合は、[1] で証明されている。証明には、Γの domain of discontinuity $\Omega(\Gamma)$ の商空間として得られる conformally flat な多様体 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ 上の Riemann 幾何的な考察を用いる。定理の $k = n - 1$ の場合から、特に次の系を得る。

系. 擬 *Fuchs* 群 Γ の *limit set* の *Hausdorff* 次元が $n - 1$ に等しいならば、Γ は *Fuchs* 群である。

References

[1] R. Bowen, *Hausdorff dimension of quasicircles*, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. **50** (1979), 11–25.

[2] H. Izeki, *Limit sets of Kleinian groups and conformally flat Riemannian manifolds*, preprint.

17 Cranston-McConnellの不等式の一般化とその応用

相川弘明　熊本大学　理学部
村田　實　東京工業大学 理学部

Dを平面領域でラプラシアンに関するGreen関数$G(x,y)$を持つものとする．また$|D|$で領域の面積を表す．CranstonとMcConnell [6] は次の定理を証明した．([2, 3, 5] も参照)

定理 A. 絶対定数cがあってD上のすべての正の調和関数hに対して

$$\frac{1}{h(x)}\int_D G(x,y)h(y)dy \le c|D|$$

が$x \in D$に関し一様に成立する．

Cranston-McConnellの定理の目覚ましい点は領域の滑らかさにまったくよらないことである．上の定理は調和関数のある種の可積分性を意味する．調和関数の可積分性を研究すると直ちに理解できるように，境界の近くでのhの挙動が問題となり，領域の滑らかさが関係してくるのが必然である (cf. [1])．ところが，定理Aでは領域の滑らかさはまったく関係ない．

本講演の目的は定理Aを一般化し,それを有る種の非有界領域のMartin境界の決定に応用する事である．$\Phi(t_1,\dots,t_n)$を$t_j \ge 0$, $j=1,\dots,n$に対する非負関数とする．$\eta>1$に対し$\Psi(t_1,\dots,t_n)=\Psi_\eta(t_1,\dots,t_n)$を

$$\Psi(t_1,\dots,t_n)=\Psi_\eta(t_1,\dots,t_n)=\sup_{\eta^{-2}<c_1,\dots,c_n<\eta^2}\Phi(c_1t_1,\dots,c_nt_n)$$

で定義する．

定理 1. 自然数nおよび正数ηに対し正の定数$c_n=c_n(\eta)$があって

$$\frac{1}{u(x)}\int_D G(x,y)u(y)\Phi(v_1(y),\dots,v_n(y))dy \le c_n\int_D \Psi(v_1(y),\dots,v_n(y))dy$$

が$x\in D$に関し一様に成り立つ．

Ioffe と Pinsky [7] は角型領域$\Omega = \{(x,s) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^1; |s| < a(|x|)\}$ の正調和関数を研究し, 次の定理を示している.

定理 B. a を $[0,\infty)$ 上の正の C^2関数で, $a' \geq 0, a'' \leq 0$ で $a(r)/r$と曲線 $\{(r,a(r)) : r \geq 0\}$ の曲率 $k(r)$ が非増加, さらに $\lim_{r\to\infty} a(r)k(r) = 0$ をみたすものとする. この時Ωの無限における Martin 境界Γは次のようになる.

(i) $\int_1^\infty a(r)r^{-2}dr = \infty$ ならば Γ は 1 点である.

(ii) $\int_1^\infty a(r)r^{-2}dr < \infty$ ならば Γ は単位球面 S^{N-1}に同相である.

定理 1 と村田の方法[8] を使う事により, 定理 B の (ii) を次のように一般化する事ができる.

定理 2. a と b を $[0,\infty)$ 上の Lipschitz 連続な関数で $b < a$ かつ

$$\int_1^\infty \frac{(a-b)(r)}{r^2} dr < \infty.$$

とし,Eを S^{N-1}上の Lipschitz 領域とすると,

$$\Omega = \{(x,s) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^1 : b(|x|) < s < a(|x|), x/|x| \in E \text{ for } x \neq 0\}.$$

の無限遠点における Martin 境界は$\overline{E}$に同相である.

References

[1] H. Aikawa, *Integrability of superharmonic functions and subharmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc **120** (1994), 109–117.

[2] H. Aikawa, *On the upper bounds of Green potentials*, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 617–622.

[3] R. Bañuelos, *On an estimate of Cranston and McConell for elliptic diffusions in uniform domains*, Probab. Th. Rel. Fields **76** (1987), 311–323.

[4] R. Bañuelos, *Lifetime and heat kernel estimates in non-smooth domains*, Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications (B. Dahlberg et al., eds.), Springer-Verlag, New York, 1992, pp. 37-48.

[5] K. L. Chung, *The lifetime of conditional Brownian motion in the plane*, Ann. Inst. Henri Poincaré **20** (1984), 349–351.

[6] M. Cranston and T. R. McConnell, *The life time of conditioned Brownian motion*, Z. Wahrsheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **65** (1983), 1–11.

[7] D. Ioffe and R. Pinsky, *Positive harmonic functions vanishing on the boundary for the Laplacian in unbounded horn-shaped domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), 773–791.

[8] M. Murata, *On construction of Martin boundaries for second order elliptic equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **26** (1990), 585–627.

18

SHARP ESTIMATES OF THE DISTANCE FROM A FIXED POINT TO THE FRONTIER OF HELE-SHAW FLOWS

酒　井　　良　　　　　　都立大理

We denote by $\mathbb{R}^d$ the real d-dimensional Euclidean space and by $|x|$ the norm of $x \in \mathbb{R}^d$. We denote by $B_r(c)$ the ball with radius r and center c. We write B_r for $B_r(0)$. We interpret B_0 as $\{0\}$. For a finite positive measure μ on $\mathbb{R}^d$, we denote by $r(\mu)$ the volume radius of μ. An open set Ω in $\mathbb{R}^d$ is called a quadrature domain of a finite positive measure μ for subharmonic functions if $\mu(\mathbb{R}^d \setminus \Omega) = 0$ and if

$$\int s d\mu \leq \int_\Omega s(x)dx$$

for every integrable subharmonic function s in Ω. In this talk we assume further that Ω is bounded.

Theorem 1. *Let μ be a finite positive measure with support in the closed unit ball $\overline{B_1}$. Then every quadrature domain Ω of μ for subharmonic functions satisfies*

$$\Omega \subset B_{r(\mu)+1}.$$

If $(\partial\Omega) \cap (\partial B_{r(\mu)+1})$ is not empty, then it consists of only one point, say x_0, and μ is the one point measure at $x_0/|x_0|$ and $B_{r(\mu)}(x_0/|x_0|)$ is the unique quadrature domain of μ for subharmonic functions.

Theorem 2. *If $r(\mu) \geq 2$, then there exists a quadrature domain Ω of μ for subharmonic functions and every Ω satisfies*

$$B_{r(\mu)-1} \subset \Omega.$$

If $(\partial\Omega) \cap (\partial B_{r(\mu)-1})$ is not empty, then it consists of only one point, say x_0, and μ is the one point measure at $-x_0/|x_0|$ and

$B_{r(\mu)}(-x_0/|x_0|)$ *is the unique quadrature domain of* μ *for subharmonic functions.*

From Theorem 2, we see that, for any given $\rho \geq 0$, there is a finite number R such that if $r(\mu) > R$, then

$$B_\rho \subset \Omega$$

for every quadrature domain Ω of μ for subharmonic functions. We denote by $r(\rho, d)$ the infimum of such R. Theorem 2 asserts that, for every d, $r(\rho, d) = 1+\rho$ if $\rho > 1$, so we restrict the function onto $[0, 1]$. For fixed d, $r(\rho, d)$ is a nondecreasing function on $[0, 1]$.

For ρ with $0 < \rho \leq 1$, by taking x_0 with $|x_0| = \rho$ and considering $B_{1+\rho}(-x_0/|x_0|) \cup B_{1-\rho}(x_0/|x_0|)$, we see that

$$r(\rho, d) \geq ((1+\rho)^d + (1-\rho)^d)^{1/d}.$$

If $\rho = 0$, by taking a with $|a| = 1$ and considering $B_1(-a) \cup B_1(a)$, we obtain the same estimation of $r(\rho, d)$ from below. As for estimation of $r(\rho, d)$ from above, we obtain the following theorem:

Theorem 3. *If* $d = 1$, *then* $r(\rho, 1)$ *is constant and is equal to* 2. *If* $d = 2$, *then* $r(\rho, 2)$ *is determined implicitly, namely,*

$$r(\rho, 2) = \frac{(1-\rho^2)e^\sigma}{2\sigma},$$

where σ *is determined by* $\rho = \sqrt{1 - 2\sigma/e^\sigma}$. *In particular,* $r(\rho, 2)$ *increases from* $\sqrt{e}$ *to* 2 *and satisfies*

$$r(\rho, 2) \leq (1+\rho)e^{(1-\rho)/2}.$$

If $d \geq 3$, *then* $r(\rho, d)$ *increases from* $(d/2)^{1/(d-2)}$ *to* 2 *and satisfies*

$$r(\rho, d) \leq \left\{ \frac{1}{(1-\frac{\rho}{2})^{d-2}} + \frac{d-2}{2}(1-\rho)(1+\rho)^{d-1} \right\}^{1/(d-2)}$$

19　与えられた境界値を持つシリンダー上の調和関数

宮本　育子　　　　千葉大・理

R^nをn次元ユークリッド空間とする。領域$G \subset R^n$に対して、gを∂G上の連続関数とする。"hがgに関するG上のディリクレ問題の解である" とは、hがG内調和であって、各点$Q \in \partial G$に対して、

$$\lim_{P \in G, P \to Q} h(P) = g(Q)$$

なることとする。

半空間

$$T_n = \{(X, y) \in R^n;\ X \in R^{n-1},\ y > 0\}$$

に対し、$g(X)$を$\partial T_n = R^{n-1}$上の連続関数で、

$$\int_{R^{n-1}} \frac{|g(X)|}{1 + |X|^{n+l}} dX < \infty, \quad (l \text{ は非負整数})$$

を満たすとする。この時、Armitage [1, 定理 2] はgに関するT_n上のディリクレ問題の解を与えた（また、Siegel [4, p.1 と p.7] を参照）。さらに Finkelstein & Scheinberg [2] は∂T_n上の任意の連続関数$g(X)$に関する、T_n上のディリクレ問題の解の存在を示し、Gardiner [3] は解の具体的な形を与えた。なおこれらの結果は、Yoshida & Miyamoto [5] によって、コーンの場合に拡張された。

ここでは、シリンダー$\Gamma_n(D) = D \times R$ (DはR^{n-1}内のなめらかな境界を持つ有界領域) に対して同種な結果を報告する。

Dに関するディリクレ問題

$$\begin{aligned} (\Delta_{n-1} + \lambda) f = 0 \quad &\text{in} \quad D \\ f = 0 \quad &\text{on} \quad \partial D \end{aligned}$$

の固有値列と、それに対応する正規直交固有関数列（固有空間の次元だけ重複して並べられている）を$\{\lambda(D, k)\}$, $\{f_k^D\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$とする。すると、$\lambda(D, k_i) < \lambda(D, k_{i+1})$なる整数列$\{k_i\}$ $(k_1 = 1, k_2 = 2)$がDについて定まってくる。

定理 1.　l, mは2つの非負整数で$g(Q) = g(X^*, y^*)$は$\partial \Gamma_n(D)$上で連続とする。

$$\int^{\infty} \exp(-\sqrt{\lambda(D, k_{l+1})} y^*) (\int_{\partial D} |g(X^*, y^*)| d\sigma_{X^*}) dy^* < \infty$$

$$\int_{-\infty} \exp(\sqrt{\lambda(D, k_{m+1})} y^*) (\int_{\partial D} |g(X^*, y^*)| d\sigma_{X^*}) dy^* < \infty.$$

ならば、

$$H(\Gamma_n(D), l, m; g)(P) = \int_{\partial \Gamma_n(D)} g(Q) K(\Gamma_n(D), l, m)(P, Q) d\sigma_Q$$

はgに関する$\Gamma_n(D)$上のディリクレ問題の解である。ただし、$K(\Gamma_n(D), l, m)(P, Q)$は（一般化された）ポアソン核で、$d\sigma_{X^*}$と$d\sigma_Q$はそれぞれ$\partial D$と$\partial \Gamma_n(D)$上の面積要素である。

定理１ を利用して、次の定理２が証明される。

定理２． $g(Q)$ は$\partial\Gamma_n(D)$ 上の連続関数とする。このとき、

$$H(\Gamma_n(D),\varphi_g;g)(P)=\int_{\partial\Gamma_n(D)} g(Q)K(\Gamma_n(D),\varphi_g)(P,Q)d\sigma_Q$$

は gに関する$\Gamma_n(D)$ 上のディリクレ問題の解である。ただし、$K(\Gamma_n(D),\varphi_g)(P,Q)$ は gに依存して作られたポアソン核。

References

[1] Armitage, D.H.: Representations of harmonic functions in half-spaces. Proc. London Math. Soc. (3) 38 53-71 (1979)

[2] Finkelstein, M., Scheinberg, S.: Kernels for solving problems of Dirichlet type in a half-plane. Advances in Math. 18 108-113 (1975)

[3] Gardiner, S.J.: The Dirichlet and Neumann problems for harmonic functions in half-spaces. J. London Math. Soc.(2) 24 108-113 (1981)

[4] Siegel, D.: The Dirichlet problem in a half-spaces and a new Phragmén-Lindelöf principle, Maximum Principles and Eigenvalue Problems in Partial Differential Equations, e.d.P.W.Schaefer, Pitman, 1988

[5] Yoshida, H., Miyamoto, I.: Solutions of the Dirichlet problem on a cone with continuous data. preprint.

20

A local Hopf lemma for solutions of the one dimensional heat equation

鈴木紀明　　　　名大・理

有界 Lipschiz 領域 D 上の非負値調和関数 u に対して，ある定数 $p>0$ が存在して，

$$\liminf_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\delta_D(x)^p}=0$$

ならば，$u\equiv 0$ と結論できる ([2])．ここで，$\delta_D(x)=\mathrm{dist}(x,\partial D)$ である．定数 p は D の Lipschitz 定数によって評価できる．

特に D が十分滑らか (例えば C^2級領域) ならば，$p=1$ とできるので，この時は，D の境界点 x_0 で，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{||x-x_0||}=0$$

を満たす非負値調和関数 u は零のみである．これは古典的な Hopf の lemma として次のように述べることも出来る：

u が $x_0\in\partial D$ で最小値 0 をとる時，

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)=0$$

ならば u は恒等的に零である．

最近 M.S.Baouendi and L.P.Rothschild は d 次元の単位球 B, $d\geq 2$ の調和関数が境界点 x_0 で“極小値 0”をとる場合について，次の local Hopf lemma を示した．

定理 [1]. u を $\bar{B}$ で連続な調和関数とする．x_0 の近傍 V が存在して，$\partial B\cap V$ 上で $u\geq 0$ かつすべての非負整数 n に対して

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{||x-x_0||^n}=0$$

を満たせば u は恒等的に零である．

上記の主張を1次元熱方程式の解について考察し，次の結果が得られたので報告する．熱方程式の解は時間に関して解析的でないので付加的な条件 (B) が必要となった．

定理．T, c を $0 < c < T$ なる定数とする．$u(x,t)$ を長方形 $[0,\pi] \times [0,T]$ で連続，その内部で熱方程式を満たす関数とする．次を仮定する：

(A) $u(0,\cdot) \geq 0$ on $[T-c,T]$

(B) $u(\pi,\cdot) \geq 0$ or $u(\pi,\cdot) \leq 0$ on $[T-c,T]$

(C) すべての非負整数 n に対して

$$\lim_{x \to 0+} \frac{u(x,T)}{x^{2n+1}} = 0$$

この時，$[0,\pi] \times [t-c,T]$ 上で $u(x,t) = 0$．

証明は基本的には定理 [1] の方法に従う．条件 (A), (C) から次を示す：正数 ε が存在して，

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad T-\varepsilon < t \leq T \\ u(x,T) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

ここでは，$u \equiv 0$ on $[0,\pi] \times [T-\varepsilon, T]$ は言えないことに注意する．

条件 (B) から，$x = \pi$ で (A), (C) 対応する同様の条件が成り立つので上述の議論を繰り返し使うことにより結論を得る．

参考文献

[1] M.S.Baouendi & L.P.Rothschild, A local Hopt lemma and unique continuation for harmonic functions, Duke J. Math., International Math. Research Notices, No.8 (1993), 245-251.

[2] N.Suzuki, L'allure à la frontière des fonctions L-harmoniques positives dans un domaine, C. R. Acad. Sc. Paris, 303 (1986), 621-624.

調和測度のディリクレ積分

21

中 井 三 留　　　　　名工大

B^n を n 次元単位球 $(n \geqq 2)$ とし, $1 < p \leqq n$ に対して, $\mathcal{A} : B^n \times R^n \to R^n$ をマルチオ等の意味 (cf. [2, Chap.6]) の指数 p の仮似線形楕円型作用素とし, 方程式 $-\nabla \cdot \mathcal{A}(x, \nabla u) = 0$ で u の $\mathcal{A}$ 調和性を定め, $\int_{B^n} |\nabla u(x)|^p dx$ を u の p ディリクレ積分とする. w と $1-w$ の最大調和劣関数が 0 となる B^n 上の $\mathcal{A}$ 調和関数 w をハインズの意味の $\mathcal{A}$ **調和測度**と言う. B^n 上のすべての非定数 $\mathcal{A}$ 調和測度が p ディリクレ無限となる必要十分条件は $2 \leqq p \leqq n$ である ([3]). しからば $1 < p < 2$ のとき p ディリクレ無限調和測度が存在するかと言うのが**大津賀の問題** ([5, Chap.8]) である. これに肯定的に答える.

2 数列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ を $a_k > b_k > a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を満足する零列とし, 球面 S^{n-1} 上の "矩形" A_k を

$$s^{-1}(A_k) = (b_k, a_k) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \{0\} \subset R^{n-1} \times \{0\}$$

で定める. ただし $s : R^{n-1} \times \{0\} \to S^{n-1} \backslash \{N\}$ は S^{n-1} の北極 N に関する極射影とする. $1 < p < 2$ とすると, $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ の定める $S^{n-1} \backslash \{N\}$

上の相対完閉な開矩形和としての開集合

$$A = A(\{a_k\},\{b_k\}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

の B^n 上の $\mathcal{A}$ 調和測度 $\omega(A,B^n;\mathcal{A}) = \overline{H}_{1_A}(B^n;\mathcal{A})$ はハインズの意味の $\mathcal{A}$ 調和測度となることが示される．そして

$$\min\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k-b_k|^{2-p}, \sum_{k=1}^{\infty}|a_{k+1}-b_k|^{2-p}\right) < \infty \tag{1}$$

ならば $\omega(A,B^n;\mathcal{A})$ は p ディリクレ有限であるが

$$\sum_{k=1}^{\infty}\min\left(|a_k-b_k|^{2-p}, |a_{k+1}-b_k|^{2-p}\right) = \infty \tag{2}$$

であると $\omega(A,B^n;\mathcal{A})$ は p ディリクレ無限である．よって $a_{k+1}-b_k = b_k-a_k = k^{-1/(2-p)}$ $(k=1,2,\cdots)$ にとれば $\omega(A,B^n;\mathcal{A})$ は p ディリクレ無限な $\mathcal{A}$ 調和測度の例を与える ($n=2$ については, cf. [4], [1]).

参 考 文 献

[1] D. A. Herron and P. Koskela: Continuity of Sobolev functions and Dirichlet finite harmonic measures, Preprint.

[2] J. Heinonen, J. Kilpeläinen and O. Martio: Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, Oxford Univ. Press, 1993.

[3] M. Nakai: Existence of Dirichlet finite harmonic measures on Euclidean balls, Nagoya Math. J., **133**(1994), 85-125.

[4] M. Nakai: Existence of Dirichlet infinite harmonic measures on the unit disc, Nagoya Math. J., **138**(1995) (To appear in June).

[5] M. Ohtsuka: Extremal Length and Precise Functions (In preparation).

22

Gončar の問題 — 3次元の場合

大津賀　信

Gončar は F を平面 R^2 内の連結開集合とするとき，集合 $E \subset F$ と $F \setminus E$ を R^2 内で結ぶ曲線全体の族の module $M_2(E, F \setminus E, R^2)$ は ∞ かという問題を提起した。F が線分の時に講演者は以前に解答を与え，それは調和測度に関する中井の結果の別証明を与えている。

今回は類似の問題を R^3 内で論ずる。すなわち，R^3 内の平面 R^2 に含まれる開円板または R^2 全体を W とし，$W \supset E$ なる可測集合 E をとる。E，$W \setminus E$ のいずれも p-exceptional (p-exc. と略す) set ではないものとする。p-exc. set は或る種の capacity としても特徴づけられる。このとき，やはり $M_p(E, W \setminus E, R^3) = \infty$ であることを報告する。それには spherical symmetrization，および $M_p(E, W \setminus E, R^3)$ は condenser capacity $C_p(E, W \setminus E, R^3)$ に等しいことなどを利用する。

23 ポテンシャル論における最小変分の方法

二宮信幸

局所コムパクトなハウスドルフ空間 Ω において

$K(P, Q)$ は，

(1) 二点 P と Q について下半連続，$P=Q$ では

∞ であってもよいが，$P \neq Q$ では必ず有限，

(2) P と Q が互に素なコムパクト集合の中にある

とき，$K(P, Q)$ は上に有界，

であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に

対して，ポテンシャルとエネルギー積分

$$K(P, \mu) = \int K(P, Q)\,d\mu(Q), \quad K(\mu, P) = \int K(Q, P)\,d\mu(Q)$$

$$K(\mu, \nu) = \int d\mu(P) \int K(P, Q)\,d\nu(Q),$$

$$K(\mu, \mu) = \iint K(P, Q)\,d\mu(P)\,d\mu(Q)$$

を考える．コムパクト集合 F の上の正の測度で全質量

が 1 であるものの全体を $\mathfrak{M}_1(F)$ で表わす．

このとき，次の定理が成立つ．

定理．F は Ω のコムパクト集合で，その上に

エネルギー積分有限な正の測度があるものとする．$\mathfrak{M}_1(F)$

の中に $K(\mu,\mu)$ の値を最小にするものがある．その一つを μ とする．σ_1 と σ_2 を $\mu+\sigma_1$ および $\mu+\sigma_2$ が $\mathfrak{M}_1(F)$ の測度であるような測度とするとき，常に

$$0 \leqq K(\sigma_1,\mu)+K(\mu,\sigma_2)$$

である．

これは σ_1 と σ_2 が同じならば知られている事柄である．同じでなくてもよい，ということを主張する．それは

$$K(\mu,\mu) \quad , \mu \in \mathfrak{M}_1(F)$$

なる量に対して最小問題を考えるのでなく，

$$\max\begin{pmatrix} K(\mu_1, t_1\mu_1+t_2\mu_2) \\ K(\mu_2, t_1\mu_1+t_2\mu_2) \end{pmatrix}$$

なる量を考える．ただし，t_1 と t_2 は任意の正数，μ_1 と μ_2 は $\mathfrak{M}_1(F)$ の測度である．この量に対して最小問題を考えるのである．

これによってエネルギー積分 $K(\mu,\mu)$，$\mu\in\mathfrak{M}_1(F)$，を最小にする μ の特性を改めて見直すことができる．

特別講演

Solution of the Dirichlet problem by means of control function

Aurel Cornea Katholische Universität Eichstätt

D-85071 Eichstätt

Abstract.

U subdomain of $\mathbf{R}^d$ (with Green function for $d = 2$),

Δ the boundary of U in the Alexandrov compactification of $\mathbf{R}^d$,

f numerical function on Δ,

h harmonic function on U,

k non-negative harmonic function on U.

Theorem. Following assertions are equivalent:

(a) For any set $A \subset U$ and any point $y \in \overline{A} \cap \Delta$ we have:

($\star$) If $\limsup\limits_{A \ni x \to y} k(x) < +\infty$ then $f(y) \in \mathbf{R}$ and $f(y) = \lim\limits_{A \ni x \to y} h(x)$.

($\star\star$) If $\lim\limits_{A \ni x \to y} k(x) = +\infty$ then $\lim\limits_{A \ni x \to y} \dfrac{h(x)}{1 + k(x)} = 0$.

(b) For any point $y \in \Delta$ we have:

($\star$) If $\liminf\limits_{U \ni x \to y} k(x) < +\infty$ then $f(y) \in \mathbf{R}$ and $\lim\limits_{U \ni x \to y} \dfrac{h(x) - f(y)}{1 + k(x)} = 0$.

($\star\star$) If $\lim\limits_{U \ni x \to y} k(x) = +\infty$ then $\lim\limits_{U \ni x \to y} \dfrac{h(x)}{1 + k(x)} = 0$.

(c) For any real number $\varepsilon > 0$ and any point $y \in \Delta$ we have:

$$\begin{aligned} +\infty &\neq \limsup\nolimits_{U \ni x \to y} (h(x) - \varepsilon k(x)) \leq f(y) \\ &\leq \liminf\nolimits_{U \ni x \to y} (h(x) + \varepsilon k(x)) \neq -\infty. \end{aligned}$$

Definition. If one of the above properties holds we shall call f *controled resolutive* with *solution* h and with *control function* k.

The function f is controled resolutive if and only if it is Perron-Wiener-Brelot resolutive.

A new method for solving the Dirichlet problem is given, and it is shown that the upper and the lower functions in the Perron-Wiener-Brelot method may be taken harmonic.

Boundary behaviour of the solutions and generalizations to the axiomatic potential theory or to pluriharmonic functions on the polydisk are made.

24

On the generalized representation of elements of hypercomplex n-tuple spaces E($\mathfrak{S}$) for non-associative non-commutative algebra $\mathfrak{S}$ without the unity element.

笹山浩良
Hiroyoshi Sasayama　　Sasayama Institute

先に分科会で報告した様に線型空間Bにassociateされたassociative又はnon-associativeで非可換なhypercomplex n-tuple space E($\mathfrak{S}$)の元素Xは$\mathfrak{S}$がunity element $\ni$ をもつ時は$(x,0,...,0) \in E(\mathfrak{S})$を$x \in B$とidentifyする事により

$$X = \Sigma_{i=1}^{n} x_i e_i = \Sigma_{i=1}^{n} e_i x_i$$

と表はされる。但しここに$(e_1,..,e_n)$は$e_1 = \ni$なる如き$\mathfrak{S}$のbasisとする。而し$\mathfrak{S}$がunity elementをもたない時(例えば、Lie algebra $\mathcal{L}$の場合)は、もはや、この表示は成立せず、代りに次のような対応した表示が得られる事を報告する:

(定理)$\mathfrak{S}$がunity elementの無い体K上のn次元non-commutative, non-associative algebraとする。体K'上の線型空間$\mathbb{B}$にassociateされたhypercomplex n-tuple space E($\mathfrak{S}$)の元素$X \equiv (x_1,...,x_n)(x_i \in B)(i=1,...,n)$はscalar乗法を定義する$\mathfrak{S}$のbasis $(e_1,...,e_n)$の$e_i(i=1,...,n)$が凡べてnilfactorでないならば

$$X = \Sigma_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}x_i, \ldots, \alpha_{in}x_i)e_i$$

と表はされる。ここに $\alpha_{ik}(i,k=1,\ldots,n)$ は⑤の multiplication constants γ^i_{jk} より作られた K の或元素とする。

又、K, K'は実数体 R 又は複素数体 C で $(K,K') \neq (C,R)$ とする.

又、更に

$$\det.\left|\overset{*}{\gamma}{}^i_j\right|_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$$

ならば

$$X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta^i_j(x_j,\ldots,x_j)\ e_i$$

とも表はされる。ここに $\overset{*}{\gamma}{}^i_j \equiv \Sigma_{k=1}^{n}\gamma^i_{jk}(i,j=1,\ldots,n)$ とし $\beta^i_j(i,j=1,\ldots,n)$は γ^i_{jk} から作られた K の元素とする。

25

On the generalization of F.Ringleb's analytic hypercomplex function theory for associative non-commutative hypercomplex n-tuple spaces

笹山浩良

Hiroyoshi SASAYAMA　　Sasayama Institute

1933年の論文でF.Ringlebは実数体R上のn次元結合的多元複素数系Sの領域からS中への一般的な解析函数論を展開した。本報告の目的は単位元をもつ結合的多元環$\mathfrak{S}$上のHypercomplex n-tuple spacesへの拡張である。

$\mathfrak{S}$を体K上の単位元$\ni$をもつn次元associative, non-commutative algebra, $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}'$を体K'上のノルム空間, K, K'はR又は複素数体Cで$(K,K') \neq (C,R)$とする。$\mathbb{B}$, $\mathbb{B}'$にassociateされたhypercomplex n-tuple spacesを夫々$E(\mathfrak{S})$, $E'(\mathfrak{S})$とする時、そのscalar乗法が$e_1 = \ni$なる如きbasis $(e_1, \ldots, e_n)$について定義されているものとする。$E(\mathfrak{S})$の領域DよりE'$(\mathfrak{S})$への函数$Y=f(X)=\Sigma_{i=1}^{n} u_i(x_1,\ldots,x_n)e_i$に対し、解析性を$dY=\Sigma_{k=1}^{n}\Phi_k(x_1,\ldots,x_n|dX)e_k=\Sigma_{j,k=1}^{n} e_j v_{jk}(x_1,\ldots,x_n|dX)e_k$によって定義する。ここで$\Phi_k(x_1,\ldots,x_n|dX)$, $v_{jk}(x_1,\ldots,x_n|dX)$は$x_1,\ldots,x_n$についてanalytic, dXについて通常の意味でlinearな夫々$E'(\mathfrak{S})$値, $\mathbb{B}'$-値函数としYはDでFréchet可微分とする。

又, couple set $(e_{j_a}, e_{k_a})(a=1,\dots,r;\ n\leq r\leq n^2,\ 1\leq j_a, k_a\leq n)$ が存在し dY は

$$dY = \Sigma_{a=1}^{r} e_{j_a} v_{j_a k_a}(x_1,\dots,x_n \mid dX)e_{k_a}$$

と一意に表はされるものと假定する。すると Y は

$$Y=\mathfrak{P}(X)\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\mathfrak{P}_m(X)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{\infty}A_{i_1\dots i_m}(Xe_{i_1},\dots,Xe_{i_m})$$

の形の冪級数展開され、逆も成立つ。ここに $A_{i_1\dots i_m}(X_1,\dots,X_m)$ は普通の意味で m-linear な E'(𝔖)値函数とする。

特に 𝔅'＝𝔅 の時は F.Ringleb と同一形の

$$dY = \sum_{j,k}\varphi_{jk}(x_1,\dots,x_n)e_j dX\ e_k$$

で解析性が定義できる。ここに φ_{jk} は $x_1,\dots,x_n$ について analytic な実数値函数である。この場合は F.Ringleb と同様、differential basis とその rank が定義され、differential basis による dY の表示の一意性が出てくる。又、冪級数展開は

$$Y=\mathfrak{P}^*(X)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathfrak{P}^*_m(X)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}A^*_{i_1\dots i_{m-1}}(Xe_{i_1},\dots,Xe_{i_{m-1}})Xe_{i_m}$$

の形となる。ここに $A^*_{i_1\dots i_{m-1}}(X_1,\dots,X_{m-1})$ は普通の意味で m-linear な 𝔖値函数である。

26

Φ-like holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$

鶴見和之　東京電機大学

$\Omega(\ni 0)$を$\mathbb{C}^n$の領域とし，ΦをΩから$\mathbb{C}^n$への写像で，$\Phi(0)=0$，$\lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{\|z\|^2}\mathcal{Re}\,(z^* D\Phi(z)z)\right\}>0$を満すものとする。$\forall X\in\Omega$に対して，初期値問題

$$\frac{dw}{dt}=-\Phi(w),\quad w(0)=X$$

が解$w=w(t,X)$ $(t\geqq 0)$ s.t. $w(t,X)\in\Omega$ $(t\geqq 0)$，$w(t,X)\to 0$ $(t\to\infty)$を持つとき，ΩをΦ-like domainという。

$f(z)$を単位球$\mathbb{B}:=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \|z\|<1\}$から$\mathbb{C}^n$への写像とする。$f(\mathbb{B})$が$\Phi$-like domainで$f(z)$が単葉写像であるとき，$f(z)$は$\Phi$-likeであるという。いま，

$H(\mathbb{B})$：$\mathbb{B}$から$\mathbb{C}^n$への正則写像の全体

$\mathcal{P}(\mathbb{B}):=\{h(z)\in H(\mathbb{B}) \mid \mathcal{Re}\{z^* h(z)\}>0 \text{ for } \forall z\in\mathbb{B}, z\neq 0\}$．

とおくと，次の定理が成り立つ：

定理1．$f(z)\in H(\mathbb{B})$をnormalized，Φ-likeとすると，次の事が成り立つ：

$$(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))\in\mathcal{P}(\mathbb{B}),$$

$$\lim_{z\to 0} \mathcal{Re}\left\{ \frac{1}{\|z\|^2} z^*(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))\right\} > 0$$

定理2. $f(z)\in H(\mathbb{B})$ を normalized で局所単葉とする。もし，$(Df(z))^{-1}\Phi(f(z))\in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ ならば，写像 $f(z)$ は Φ-like である。

定理3. A を n 次正値 Hermite 行列（最大及び最小固有値をそれぞれ Λ，λ）とし，$\Phi(w) = Aw$ とする。このとき，写像 $f(z)$ が normalized Φ-like ならば，次の式が成り立つ：

$$\left\{ \frac{(1+\|z_1\|)^2}{\|z_1\|}\cdot \frac{\|z_2\|}{(1+\|z_2\|)^2}\right\}^{\lambda/\Lambda} \leqq \frac{\|f(z_2)\|}{\|f(z_1)\|}$$

$$\leqq \left\{ \frac{(1-\|z_1\|)^2}{\|z_1\|}\cdot \frac{\|z_2\|}{(1-\|z_2\|)^2}\right\}^{\Lambda/\lambda} \quad (\|z_1\| < \|z_2\|).$$

系. $f(z)\in H(\mathbb{B})$ が starlike ならば，次の式が成り立つ：

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leqq \|f(z)\| \leqq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2} \quad (z\in \mathbb{B}).$$

27 Radial limits of starlike holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$

鶴見和之　東京電機大学

$f(z) \in H(\mathbb{B})$ に対して, $M_\infty(r, f) = \max_{\|z\|=r} \|f(z)\|$

$(0<r<1)$ とおくと, starlikeな写像に対する Growth Theoremによって, starlikeな正則写像 $f(z)$ に対して

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^2 M_\infty(r, f) = \alpha \ (\leqq 1)$$

が成り立つ. この α をfのHayman indexという。

このとき, 次の定理が成り立つ:

定理; $f(z) \in H(\mathbb{B})$ をHayman index $\alpha > 0$ を持つstarlikeな写像とすると, 次の式が成り立つ $a \in \mathbb{C}^n$, $\|a\|=1$ が存在する:

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^2 \|f(ra)\| = \alpha.$$

[注] 定理の a は1変数と異りただ1つではない。

28

Unimodular Type Singularities and Bimodular Type Singularities

渡辺公夫 筑波大学 数学系
奥間智弘 筑波大学 大学院 数学

Arnold による関数の特異点の分類は以下のようになる。

即ち、単純特異点は2つの無限系列 A_n、D_n および3つの例外的な特異点 E_6、E_7、E_8 から成る。1個モジュラ特異点は3つの放物型特異点（単純楕円型特異点）、3つの添え字をもつ双曲型特異点（尖点特異点）の無限系列および14の例外型特異点の族からなる。2個モジュラ特異点は8つの無限系列と14の例外族からなる。

この講演では2番目の多重種数である δ_2 を用いて最小楕円型特異点を分類することを試みる。

［命題1］

例外型1個モジュラ特異点の minimal good resolution は unimodular type であり、$\delta_2 = 1$ である。

［命題2］

2個モジュラ特異点の minimal good resolution は bimodular type であり、$\delta_2 = 2$ である。

1個モジュラ特異点も2個モジュラ特異点もその幾何種数は1であるから、いずれも最小楕円型特異点 (minimally elliptic singularity) である。これらの命題の一般化とし次の定理を得た。

［定理3］

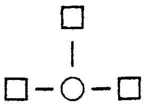
simple elliptic singularity, cusp singularity, unimodular type singularity $<=>$ 最小楕円型特異点で $\delta_2 = 1$.

［定理4］

bimodular type singularity $<=>$ 最小楕円型特異点で $\delta_2 = 2$.

○ = -2 、 □ = −◇

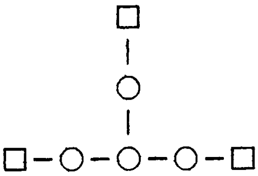
UNIMODULAR TYPE　UNIMODULAR SINGULARITY



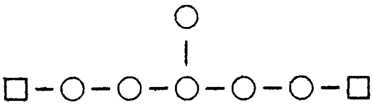
(◇, ◇, ◇) = (2, 3, 7), (2, 3, 8), (2, 3, 9), (2, 4, 5)
(2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 5), (2, 5, 6)
(3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 3, 6), (3, 4, 4)
(3, 4, 5), (4, 4, 4)

(□, □, □) = (-p, -q, -r)

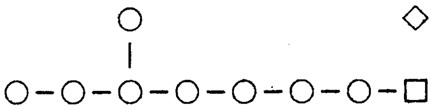
BIMODULAR TYPE　BIMODULAR SINGULARITY



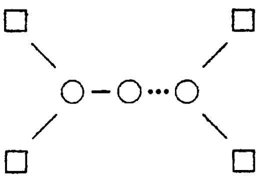
(◇, ◇, ◇) = (2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 2, 5)
(2, 3, 3), (2, 3, 4), (3, 3, 3)



(◇, ◇) = (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3)
(3, 4)



◇ = 3, 4, 5



(◇, ◇ ; ◇, ◇) = (2, 2; 2, 3), (2, 2; 2, 4)
(2, 2; 2, 5), (2, 2; 3, 3)
(2, 2; 3, 4), (2, 3; 2, 3)
(2, 3; 2, 4), (2, 3; 3, 3)

29 リーマン面の解析族の被覆空間について

大沢健夫 名大理

Δを単位円板、$\pi: X \longrightarrow \Delta$ をΔ上のリーマン面の解析族とする。次の結果について報告する。

定理. πが固有射ならば、Xの任意の被覆空間は正則凸である。

証明には *holomorphic motion* の基本的な性質を用いる。パラメータ空間がT_g(タイヒミュラー空間)の場合に通用する議論を模索中です。

30 Byun-Saitoh の反転公式の数値解析について

梶原 壌二 九大数理
辻 美輝 九大数理

昨春の年会で斎藤三郎教授は [1], Laplace 変換の実軸上の値のみを用い，しかも，導関数を用いないで，原関数を得る逆変換の公式を与え，更に，その講演で数値解析を求めた。本講演は，スーパーコンピュータ FACOM VP-2600 と言語 Fortran77 を用い，数値解析を行った，その実行報告である。

非負整数 N に対して次の多項式を定義する。

$$(1)\qquad P_N(\xi)=\sum_{0\le\nu\le n\le N}\frac{(-1)^{\nu+1}(2n)!}{(n+1)!\nu!(n-\nu)!(n+\nu)!}\xi^{(n+\nu)}$$

$$\cdot\{\frac{2n+1}{n+\nu+1}\xi^2-(\frac{2n+1}{n+\nu+1}+3n+1)\xi+n(n+\nu+1)\}.$$

自乗可積分関数 $F(t)$ とその Laplace 変換 $f(s)$ に対して次のように置く：

$$(2)\qquad F_N(t)=\int_0^\infty f(s)e^{-st}P_N(st)ds.$$

斎藤教授の講演によれば $\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$ は L^2 ノルムの意味で F に収束する。Clenshaw-Curtis[2] の方法で数値積分を実行し，この数値解析を行った報告である。

参考文献

[1] Byun, D.-W. and Saitoh, S. *A real inversion formula for the Laplace transform,* Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, Vol.12, (1993), pp. 597-603.

[2] Clenshaw, C.W. and Curtis, A.R. *A method for numerical integration on an automatic computer,* Numerische Mathematik 2, (1960) pp.197-205.

[3] McCalla, T.R., *Introduction to numerical methods and Fortran programming.* Science, (1972) p.315.

[4] J. Kajiwara and M.Tsuji, *Program for the numerical analysis of inverse formula for Laplace transform,* Proceedings of the Second Korean-Japanese Colloquium on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, July (1994) (to appear).

[5] Mori, M. *Fortrun 77 Numerical calculation programming,* The Iwanami computer science series, (1986) p.398.

[6] Ramm, A. G. *Numerical solution of some integral equations in distributions.* In abstracts of Second international colloquium on numerical analysis, Bulgaria (1993).

[7] Tsuji, K. *An algorithm for sum of floating-point numbers without rounding error.* In abstracts of Third international colloquium on numerical analysis, Bulgaria, (1994).

大沢問題の反例について

31　辻　美輝　　九大数理

大沢健夫教授は，富山の立山に於ける多変数関数論サマーセミナーでの１９９４年７月１８日の講演にて，次の拡張問題を提出した：

Ω を $\mathbf{C}^n$ の有界擬凸領域，H を $\mathbf{C}^n$ の余一次元の複素線形部分空間，即ち，複素超平面とする時，$\Omega \cap H$ で正則有界な任意の関数 g に対して，Ω で正則有界な関数 f が存在して，f の $\Omega \cap H$ への制限が最初に与えた複素超平面による Ω の切り口 $\Omega \cap H$ 上の有界正則関数 g に一致するか？

H. Alexander[4] は Ω が二重円板次元の場合でも H が複素超平面でなく複素部分多様体の場合に成立しない反例を与え，G. M. Henkin[8] は，Ω が強擬凸の場合に肯定的な拡張理論を与え，安達[1] Ω が弱擬凸の場合でも，強擬凸な境界点を持つ場合に，肯定的な結果を与え，Henkin の理論を拡張した。

ここでは，$n = 2$ の場合に，有界でない弱擬凸領域 Ω と超平面 H と有界正則関数 $g(z, w)$ の反例の組を与える。

引用文献

[1] K. Adachi, Extending bounded holomorphic functions from certain subvarieties of a weakly pseudoconvex domain, Pacific J. Math. **110**(1984), 9-19.

[2] K. Adachi, Continuation of bounded holomorphic functions from certain subvarieties to weakly pseudoconvex domains, Pacific J. Math. **130**(1987), 1-8}

[3] K. Adachi and M. Suzuki, Extension of holomorphic mapping, Kyushu Univ. **24-2**(1970), 238-241.
[4] H. Alexander, Extending bounded holomorphic functions from certain s ubvarieties of a polydisc, Pacific J. Math. **29**(1969), 485-490.
[5] K. Diederich and T. Ohsawa, An estimate for the Bergman distance on pseudoconvex domains, to appear in Ann. of Mathematics.
[6] J. E. Fornaess, Embedding strictly pseudoconvex domains in convex domains, Amer. J. Math. **98**(1976), 529-569.
[7] G. M. Henkin, Integral representations of functions holomorphic in s trictly pseudoconvex domains and applications, Math. USSR **7**(1969), 597-616.
[8] G. M. Henkin, Continuation of bounded holomorphic functions from sub manifolds in general position to strictly pseudoconvex domains, Izv. Akad. Nauk SSSR 36(1972), 540-567.
[9] G. M. Henkin, Integral representations of functions holomorphic in s trictly pseudoconvex domains and applications, Math. USSR **7**(1969), 597-616.
[10] G. M. Henkin and J. Leiterer, Theory of Functions on Complex Mani-folds, Birkhaeuser Verlag(1984), pp 226.
[11] T. Ohsawa, Some applications of L^2 estimates to complex geometry, A bstract of the Summer Seminar of Several Complex Variables held at Tatey ama, Toyama Prefecture, Japan, 18th July 1994, pp. 10.
[12] P.Poljakov, The Cauchy-Weil formula for differential forms(Russian) . Mat. Sb. **85**(1971), 388-402; Engl. transl, in Math. USSR-Sb. **14**(1971), n o.3, 383-398.
[13] P.Poljakov, Extension of bounded holomorphic functions from an anal ytic curve in general position in a polydisc. Functional. Anal. i Priloz en. In press.
[14] M. Tsuji, Counterexample of an unbounded domain for Ohsawa's prob-lem, to appear in Part IV of the master's thesis.

特別講演

Dynamics of polynomial automorphisms of C^2

E. Bedford Indiana Univ.

特別講演

Holomorphic chains and the support hypothesis conjecture

H. Alexander
University of Illinois at Chicago

Let Ω be a complex manifold and let V be a (holomorphic) subvariety of Ω of pure (complex) dimension k. Then integration over V defines a closed current of dimension $2k$ in Ω, denoted by $[V]$. More generally, let $\{V_j\}$ be a locally finite family of irreducible holomorphic subvarieties of Ω of pure dimension k and let $\{n_j\}$ be integers, then $T = \sum n_j[V_j]$ is a $2k$-current in Ω—these are the *holomorphic k-chains* in Ω.

Holomorphic chains are particular examples of the locally rectifiable currents of H. Federer [F]. A *locally rectifiable s-current* T in an open subset Ω of $\mathbf{R}^n$ can be described as follows. We denote s-dimensional Hausdorff measure by $\mathcal{H}^s$. There is a locally $(\mathcal{H}^s, s)$-rectifiable set B in Ω and an s-vector field η on B which is locally $\mathcal{H}^s$-integrable over B such that for $\mathcal{H}^s$-almost all $x \in B$, $\eta(x)$ is a simple s-vector that represents the approximate tangent space to B at x and $||\eta(x)||$ is a positive integer–the *multiplicity* of T at x. Then the s-current T is given by $T(\phi) = \int_B < \phi, \eta > d\mathcal{H}^s$ for all s forms ϕ with compact support in Ω. In $\mathbf{C}^n$, this description can be refined. The s-forms can be decomposed into sums of (a, b) forms with $a + b = s$. A $2k$-current has *bidimension* (k, k) if $T(\phi) = 0$ for all forms ϕ of type (a, b) with $(a, b) \neq (k, k)$. If T has bidimension (k, k) it follows that the approximate tangent space to B is for $\mathcal{H}^{2k}-$almost all $x \in B$ a complex k-dimensional linear space. If the natural orientation of this complex linear space agrees with the orientation induced by $\eta(x)$ for $\mathcal{H}^{2k}$-almost all $x \in B$, one says that the (k, k) current T is *positive*. The space of all locally rectifiable (k, k) currents on Ω is denoted by $\mathcal{R}^{loc}_{(k,k)}(\Omega)$.

Thus every holomorphic k-chain is a closed locally rectifiable (k, k) current. We shall consider the converse. The first result in this direction was due to King [K]. We denote by Ω an open subset of $\mathbf{C}^n$—however, being local, all of the results discussed below hold on complex manifolds.

King's Theorem. Let $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(k,k)}(\Omega)$ be positive with $dT = 0$. Then T is a holomorphic k-chain.

There are some natural problems in which one wants to apply a theorem of this type—especially when T is a difference of elements of $\mathcal{R}^{loc}_{(k,k)}(\Omega)$—but for which the positivity hypothesis is not satisfied. This difficulty was overcome by Harvey and Shiffman [HS] who proved the following extension of King's theorem. Here supp T is the support of T in Ω.

Harvey-Shiffman Theorem. Let $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(k,k)}(\Omega)$ with $dT = 0$. Suppose that $\mathcal{H}^{2k+1}(\text{supp } T) = 0$. Then T is a holomorphic k-chain.

Harvey and Shiffman derived many nice applications of this theorem. They conjectured that the "support hypothesis" ($\mathcal{H}^{2k+1}(\text{supp } T) = 0$) could be dropped—they were able to weaken the hypothesis somewhat. More recently Shiffman [S] succeeded in verifying the conjecture in the hypersurface case, $k = n - 1$. Our main result is that the conjecture is true in general.

Theorem. Let $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(k,k)}(\Omega)$ with $dT = 0$. Then T is a holomorphic k-chain.

Our proof differs from that of Harvey and Shiffman who utilize the Poincaré-Lelong formula to treat the hypersurface case and then reduce to that by projections. We treat the case $k = 1$ first. This has several advantages: (i) To handle the putative 1-variety which is the support of T, we can use the techniques of uniform algebras, which—especially in the hands of Errett Bishop [B]—have proved to be powerful tools in treating 1-dimensional varieties, (ii) we can use, in the $k = 1$ case, Federer's structure theorem for integral 1-currents—there is no hope for such a structure theorem in higher dimensions—and (iii) we can then use induction on k starting from the case $k = 1$ together with the nice slicing properties of rectifiable currents.

In this lecture we shall concentrate on the case $k = 1$. Let $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(1,1)}(\Omega)$ with $dT = 0$. The main point is to establish the lower bound

$$\mathcal{H}^2(\text{supp } T \cap B(a,r)) \geq \pi r^2$$

whenever the ball $B(a,r)$ with center a and radius r is contained in Ω and $a \in$ supp T. It follows from this by a general result of measure theory that supp T has locally finite $\mathcal{H}^2$ measure; in particular, the support hypothesis holds for T. Then our desired conclusion, that T is a holomorphic 1-chain, follows either from the Harvey-Shiffman theorem or by an alternate argument, which we shall not give here.

It is illuminating to consider first how Bishop proved the lower bound in the well-known case in which supp T is replaced by a 1-variety A that passes through the point a. The lower bound on the area follows from a lower bound on length ($= \mathcal{H}^1$):

$$\mathcal{H}^1(A \cap B(a,r)) \geq 2\pi r.$$

Indeed, integrating this with respect to r then yields the above lower bound for area.

To prove this length estimate, Bishop argues as follows. Let γ_r be the real curve $A \cap bB(a,r)$. (1) From the maximum principle applied to the compact set γ_r, one concludes that there is a 'representing' measure μ on γ_r which represents evaluation at the point a. (2) Bishop shows that for such a representing measure $d\mu/ds \leq \frac{1}{2\pi r}$, where ds denotes arclength on γ_r. Since μ is a probabilty measure, the lower bound on length follows by integrating this inequality with respect to ds over γ_r.

We shall adapt this line of reasoning to prove the required estimate for T. The real curve γ_r is replaced by $bT(r)$, the slice of T on the sphere $bB(a,r)$. For almost all r, $bT(r)$ is a closed rectifiable 1-current on $bB(a,r)$. Moreover $bT(r)$ is an integral current on $bB(a,r)$ and is given by integration over a countable union Γ_r of (oriented) closed rectifiable Jordan curves contained in $bB(a,r)$. Our objective now is to show that

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_r) \geq 2\pi r.$$

However for step (1) we cannot apply the maximum principle to get a measure μ concentred on Γ_r. This is because we cannot assert that Γ_r is compact; indeed Γ_r might be dense in $bB(a,r)$. This, of course, is the core of the problem—how does one deal with the possibility that supp T might be dense in Ω. To get μ on Γ_r we first prove a Cauchy integral formula.

Cauchy Formula. Suppose that the slice $bT(r)$ exists as a closed rectifiable 1-current supported on $bB(a,r)$. Let $\alpha \in \mathbf{C}$. Suppose that

$$bT(r)(|dz_n|/|z_n - \alpha|) < \infty$$

and that

$$\text{the slice } < T(r), \pi, \alpha > \text{ exists and equals} \sum_1^s n_j[w_j].$$

Then for all polynomials f in $\mathbf{C}^n$.

$$bT(r)(\frac{f dz_n}{z_n - \alpha}) = 2\pi i \sum n_j f(w_j).$$

It is not difficult to use this to obtain the desired representing measures on Γ_r.

To adapt step (2) we need to extend Bishop's estimate for measures μ living on the real curve γ_r to measures whose supports may be all of $bB(a,r)$. This is the following.

Proposition. Let $\mathcal{A}$ be the uniform algebra of functions holomorphic on the ball $B(a,r)$ in $\mathbf{C}^n$ and continuous on $\bar{B}(a,r)$. Let μ be a representing measure for $\mathcal{A}$ for the origin with support of μ contained in $bB(a,r)$. Let γ be a rectifiable (open) Jordan arc in $bB(a,r)$. Then $\mu|\gamma << \mathcal{H}^1|\gamma$ and

$$\frac{d\mu|\gamma}{d\mathcal{H}^1|\gamma} \leq \frac{1}{2\pi r}.$$

References

[B] E. Bishop, Conditions for the analyticity of certain sets, Mich. Math. J. 11 (1964), 289-304.

[F] H. Federer, *Geometric Integration Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[HS] R. Harvey and B. Shiffman, A characterization of holomorphic chains, Ann. Math. 99 (1974), 553-587.

[K] King, The currents defined by analytic varieties, Acta Math. 127 (1971), 185-220.

[S] B. Shiffman, Complete characterization of holomorphic chains of codimension one, Math. Ann. 274 (1986), 233-256.