日　本　数　学　会

１９９４年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９４年9月

於　東京工業大学

函数論分科会

9月27日（火） 第II会場

9:30~12:00

1	西本　勝之 (Descartes Press Co.)	*	Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus)	15
2	S. B. Yakubovich (ベラルーシ国立大・福岡大理) 西郷　恵 (福岡大理)		On Kontrovich-Lebedev and Mehler-Fock index transform in L_p-space	15
3	尾和　重義 (近畿大理工)		An argument theorem of certain analytic functions	15
4	尾和　重義 (近畿大理工) 黄　心　中 (華僑大数)		A note on the Schwarzian derivative	15
5	戸田　暢茂 (名工大)		On the fundamental inequality of H. Cartan for holomorphic curves	15
6	新濃　清志 (金沢大工) 藤解　和也 (金沢大工)		ある関数方程式と代数型面のピカール定数	15
7	山田　雅博 (北大理)		Bergman 空間における inner-outer 分解に関する一注意	10
8	中路　貴彦 (北大理) 山田　雅博 (北大理)		荷重付き Hardy および Bergman 空間における Riesz 関数について	15
9	M. Shamil (Ufo. State Aircraft Univ. Russia・北大理)		On analytically normal families	15

13:30~15:45

10	斎藤　三郎 (群馬大工)	*	ポアソン方程式における逆問題の解について	15
11	山口　博史 (滋賀大教育)		平衡面電流の思考実験的作成	15
12	宮本　育子 (千葉大理)		境界で0になる柱（シリンダー）上の調和関数	15
13	吉田　英信 (千葉大理) 宮本　育子 (千葉大理)		錐（コーン）上のディリクレ問題について	15
14	朱　文　山 (千葉大自然科学)	*	シェルピンスキー空間上のディリクレ問題	15
15	水田　義弘 (広島大総合科)		単調なソボレフ関数の境界値について	15
16	西尾　昌治 (阪市大理)		Riesz capacities and regular points of parabolic operator of order α	15
17	大津賀　信		開集合上での極値的距離：島のある場合について	15

16:00~17:00　**特別講演**

	相川　弘明 (熊本大理)	*	Capacity とその応用	(16:00~17:00)

9月28日（水） 第II会場

9:30〜12:00

18	笹山　浩良（笹山研）		On the generalized R. Fueter's polynomial $p(z)$ in the quaternionic quadruple spaces	10
19	神　直人（学習院大理）		Riemann 面上の extremal distance について	15
20	栗林　和（中央大理工） 早川　圭蔵（中央大理工）		On higher representations of automorphism groups of compact Riemann surfaces	15
21	松崎　克彦（東工大理）		The isolated points of monodromy representations of covering projective structures	15
22	黄　心　中（京大理） 谷口　雅彦（京大理）		On Teichmüller mappings of infinite type	15
23	大沢　健夫（名大理）		ある種の無限次元 Teichmüller 空間の分類	15
24	中西　敏浩（静岡大理）	*	Punctured surface の Teichmüller 空間の geodesic length parameter についての一注意	10
25	奥村　善英（金沢大工）	*	Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces	15
26	奥村　善英（金沢大工）	*	Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces	15
27	木坂　正史（阪府大総合科学）	*	Local uniform convergence and convergence of Julia sets	15

9月29日（木） 第II会場

9:30〜12:00

28	小松　信（京大数理研）	種数2の曲線族から得られる周期写像	10
29	志賀　潔（岐阜大教養） 竹内　茂（岐阜大教育）	CR リー群と CR リー変換群の不変 CR 構造	10
30	高山　茂晴（名大）	Holomorphic convexity of certain covering spaces of projective manifolds	10
31	辻　元（東工大理）	代数多様体の普遍被覆と小平次元	10
32	大沢　健夫（名大理） K. Diederich（Wuppertal 大）	Bergman 計量と k-Levi 平坦性	10
33	大沢　健夫（名大理）	$(-3,1)$ 型例外集合について	10
34	泉池　敬司（新潟大理） 真次　康夫（信州大理）	Multipliers and Bourgain algebras of $H^\infty + C$ on the polydisk	15
35	神保　敏弥（奈良教育大） 阪井　章（阪府大）	A^∞ の peak interpolation set について	15
36	足立　幸信	On the family of holomorphic mappings into projective space with lacunary hypersurfaces(II)	15

13:30〜14:30

37	渡邊　公夫（筑波大数学）	Three dimensional hypersurface cusp singularities	15
38	都丸　正（群馬大医療技術短大）	$\mathbb{C}^*$-作用を持つ擬単純楕円型特異点について	10
39	児玉　秋雄（金沢大理）	A characterization of generalized complex ellipsoids	15
40	寺田　俊明（滋賀医科大）	有限次元ベクトル空間をなす関数系の1性質とその応用	15

14:45〜15:45　特別講演

松本　圭司（九大数理）　Twisted (co)homology 群の交点理論と超幾何関数　(14:45〜15:45)

1 **Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus)**

Katsuyuki NISHIMOTO Descartes Press Co.

Chapter 1. Fractional calculus of elementary functions by the extension of their n ($\in Z^+$)th order differintegrations

§ 0. Introduction (Definition of fractional calculus)

(I) DEFINITION. (by K. Nishimoto) ([13] Vol. 1)
Let $D=\{\underset{-}{D}, \underset{+}{D}\}$, $C=\{\underset{-}{C}, \underset{+}{C}\}$,

$\underset{-}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $-\infty+i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{+}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $\infty+i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{-}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{-}{C}$, $\underset{+}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{+}{C}$.

(Here D contains the points over the curve C.)

Moreover, let $f=f(z)$ be a regular function in D ($z\in D$),

$$f_\nu=(f)_\nu={}_C(f)_\nu=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}d\zeta \qquad (\nu\notin Z^-), \tag{1}$$

$$(f)_{-m}=\lim_{\nu\to-m}(f)_\nu \qquad (m\in Z^+), \tag{2}$$

where $\qquad -\pi\leqslant\arg(\zeta-z)\leqslant\pi$ for $\underset{-}{C}$, $\quad 0\leqslant\arg(\zeta-z)\leqslant 2\pi$ for $\underset{+}{C}$, $\quad \zeta\neq z$

Γ: Gamma function,

then $(f)_\nu$ is the fractional differintegration of arbitrary order ν (derivatives of order ν for $\nu>0$, and integrals of order $-\nu$ for $\nu<0$), with respect to z, of the function f, if $|(f)_\nu|<\infty$.

§ 1. Lacroix's fractional derivative

§ 2. "F.C. of E-function" by the definition of K. Nishimoto

Chapter 2. On Nishimoto's fractional calculus operator $\mathscr{N}^\nu$ (On an action group)

§ 1. On the fractional calculus operator $\mathscr{N}^\nu$

§ 2. The set $\{\mathscr{N}^\nu\}$ and action group

Chapter 3. Inverse of Nishimoto's integral transformation, inverse of Goursat's transformation and that of Cauchy's one (A serendipity in fractional calculus)

§1. A complex integral transformation and its inverse

§2. Inverse of Goursat's transformation and of Cauchy's one

Chapter 4. Unification of integrals and derivatives

§1. Unification of integrals and derivatives

§2. On the complementary functions

References

[1] K. Nishimoto: Fractional derivative and integral, Part I, J. Coll. Engng. Nihon Univ., **B-17** (1976), 11-19.

[2] K. Nishimoto: Fractional differintegration of products, J. Coll. Engng. Nihon Univ., **B-20** (1979), 1-7.

[3] K. Nishimoto: Table of fractional differintegration of elementary functions, J. Coll. Engng. Nihon Univ., **B-25** (1984), 41-46.

[4] K, Nishimoto: On the fractional calculus of products of functions z^{β}, z^{γ} and $\log az$, J. Coll. Engng. Nihon Univ., **B-32** (1991), 1-6.

[5] K. Nishimoto: Some values of products $(z^{\beta}\cdot z^{\gamma})_{\alpha}$ obtained by computer, J. Frac. Calc., Vol. 1 (1992), 1-6.

[6] K. Nishimoto: On infinite sum $S_{1,\beta}=R_{1,\beta}$ $(\mathrm{Re}(\beta)>-1)$ (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc., Vol. 1 (1992), 7-16.

[7] K. Nishimoto and Shih-Tong Tu: Fractional calculus method to a generalized linear second order (nonhomogeneous and homogeneous) ordinary differential equation of Fuchs Type, J. Coll. Engng. Nihon Univ., **B-33** (1992), 27-52.

[8] K. Nishimoto: Fractional calculus method to a generalized linear third order ordinary differentiation equation of Fuchs Type, J. Frac. Calc., Vol. 1 (1992), 23-34.

[9] K. Nishimoto and S. T. Tu: Fractional calculus method to extended linear ordinary differential equations of Fuchs Type, J. Frac. Calc., Vol. 2 (1992), 35-46.

[10] K. Nishimoto: Fractional calculus method to a generalized Gauss type partial differentegral equation, J. Frac. Calc., Vol. 2 (1992), 47-53.

[11] S. D. Lin, Shih-Tong Tu and K. Nishimoto: A generalization of Legendre's equation by fractional calculus method, J. Frac. Calc., 1, May (1992), 39-47.

[12] K. Nishimoto: On Nishimoto's fractional calculus operator $\mathcal{N}^{\nu}$ (On an action group). J. Frac. Calc., 4, Nov. (1993), 1-11.

[13] K. Nishimoto: Fractional calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Descartes Press, Koriyama (Japan).

[14] K. Nishimoto: An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, Descartes Press, Koriyama (Japan), 1991.

[15] K. S. Miller and B. Ross: An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations (1993), John Wiley & Sons. Inc.

2 On Kontrovich-Lebedev and Mehler-Fock Index Transforms in L_p-Space

S.B. Yakubovich　ベラルーシ国立大・福岡大理
西郷 恵　福岡大理

We study the known integral transforms of Kontrovich-Lebedev and Mehler-Fock:

$$KL_\alpha[f](\tau) = \sinh(\alpha\tau) \int_0^\infty K_{i\tau}(y) f(y) dy \quad (\tau > 0,\ 0 < \alpha < \pi/2), \tag{1}$$

$$MF[f](\tau) = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty P_{-1/2+i\tau/2}(2y^2+1) f(y) dy \quad (\tau > 0), \tag{2}$$

where $K_\nu(y)$ is the Macdonald function, $P_\mu(z)$ is the Legendre function of the first kind [1] and the functions $f(x)$ belong to the space $L_p(\mathbf{R}_+)$ $(1 \leqq p < \infty)$. Several results for these transforms are announced in [2] and [3]. In the present report, we give inversion formulas and mapping properties of these transforms.

Let us introduce the following spaces of images for the transforms (1) and (2):

$$KL_\alpha(L_p) = \{KL_\alpha[f](\tau) : f \in L_p(\mathbf{R}_+)\} \quad (1 \leqq p < \infty,\ 0 < \alpha < \pi/2),$$

$$MF(L_p) = \{MF[f](\tau) : f \in L_p(\mathbf{R}_+)\} \quad (1 \leqq p < \infty).$$

Theorem 1. *Let $g(\tau) = KL_\alpha[f](\tau) \in KL_\alpha(L_p)$ for $f(y) \in L_p(\mathbf{R}_+)$ $(1 \leqq p < \infty,\ 0 < \alpha < \pi/2)$. Then*

$$f(x) = \underset{\varepsilon \to 0+}{\text{l.i.m.}} \left(I_\varepsilon^\alpha g\right)(x), \tag{3}$$

where

$$\left(I_\varepsilon^\alpha g\right)(x) = \frac{2}{\pi^2 x^{1-\varepsilon}} \int_0^\infty \frac{\tau \sinh((\pi-\varepsilon)\tau)}{\sinh(\alpha\tau)} K_{i\tau}(x) g(\tau) d\tau$$

and the limit in the equality (3) is taken in the norm of $L_p(\mathbf{R}_+)$, which exists almost everywhere on $\mathbf{R}_+$.

Theorem 2. *The necessary and sufficient conditions for* $g(\tau) \in KL_\alpha(L_p)$ $(1 \leqq p < \infty,\ 0 < \alpha < \pi/2)$ *are* $g(\tau) \in L_r(\mathbf{R}_+)$ $(1 \leqq r \leqq \infty)$ *and*

$$\underset{\varepsilon \to 0+}{\mathrm{l.i.m.}} (I_\varepsilon^\alpha g) \in L_p(\mathbf{R}_+). \tag{4}$$

Theorem 3. *Let* $g(\tau) = MF[f](\tau) \in MF(L_p)$ for $f(y) \in L_p(\mathbf{R}_+)$ $(1 < p < \infty)$. *Then*

$$f(x) = \underset{\varepsilon \to 0+}{\mathrm{l.i.m.}} (I_\varepsilon g)(x), \tag{5}$$

where

$$(I_\varepsilon g)(x) = \frac{x^{1-\varepsilon}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau \sinh((\pi - \varepsilon)\tau)}{\cosh^2(\pi\tau/2)} P_{-1/2+i\tau/2}(2x^2 + 1) g(\tau) d\tau$$

and the limit in the equality (5) *is taken in the norm of* $L_p(\mathbf{R}_+)$, *which exists almost everywhere on* $\mathbf{R}_+$.

Theorem 4. *The necessary and sufficient conditions for* $g(\tau) \in MF(L_p)$ $(1 < p < \infty)$ *are*

$$\underset{\varepsilon \to 0+}{\mathrm{l.i.m.}} (I_\varepsilon g) \in L_p(\mathbf{R}_+) \tag{6}$$

and $g(\tau) \in L_r(e^{-\alpha\tau}; \mathbf{R}_+)$ $(\pi/4 < \alpha < \pi/2, 1 \leqq r \leqq \infty)$ *at the part of necessity and* $g(\tau) \in L_r(\mathbf{R}_+)$ $(1 \leqq r \leqq \infty)$ *at the part of sufficiency.*

[1] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi: *Higher Transcendental Functions,* Vols. 1, 2, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] S.B. Yakubovich and Yu.F. Luchko: *Hypergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions* (Mathematics and Its Applications, 287), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[3] S.B. Yakubovich and M. Saigo: On the Mehler-Fock index transform in L_p-space, *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* (to appear).

3

AN ARGUMENT THEOREM OF CERTAIN ANALYTIC FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA   KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}_p$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \qquad (p \in \mathbb{N})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$.
A function $f(z)$ in $\mathcal{A}_p$ is said to be a member of the class $S_p(\alpha)$ if it satisfies

$$|f^{(p)}(z) - p!| < p! - \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < p!)$.

THEOREM. If $f(z)$ belongs to $S_p(\alpha)$, then

$$\left|\arg\left(\frac{f^{(p-1)}(z)}{z}\right)\right| \leqq \sin^{-1}\left(\frac{p!-\alpha}{\alpha}|z|\right)$$

for $z \in \mathbb{U}$. The result is sharp.

COROLLARY 1. If $f(z)$ belongs to $S_p(\alpha)$, then

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\beta}\frac{f^{(p-1)}(z)}{z}\right\} > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

where $|\beta| \leqq \pi/2 - \sin^{-1}((p!-\alpha)/p!)$.
The result is sharp.

COROLLARY 2. If $f(z)$ belongs to $S_p(\alpha)$, then

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{f^{(p-1)}(z)}{z} \right\} > \alpha \qquad (z \in U).$$

The result is sharp.

4 A Note on the Schwarzian Derivative

Shigeyoshi OWA Kinki University

Huang XINZHONG Huaqiao University

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathcal{U}$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions in $\mathcal{U}$. The Schwarzian derivative $S_f(z)$ of $f(z)$ belonging to $\mathcal{A}$ is given by

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

$$= \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

It is well-known that

(i) $f(z) \in \mathcal{S} \Longrightarrow |S_f(z)| \leqq 6$

and

(ii) $|S_f(z)| \leqq 2 \Longrightarrow f(z) \in \mathcal{S}$.

In the present talk, we consider the Schwarzian derivative for certain analytic functions.

5

On the fundamental inequality of H. Cartan for holomorphic curves

TODA Nobushige

Nagoya Institute of Technology

1. Let f be a transcendental and non-degenerate holomorphic curve from C into $P^n(C)$, let $(f_1,\ldots,f_{n+1}):C\to C^{n+1}-\{0\}$ be a reduced representation of f and let X be a subset of C^{n+1} in general position. About sixty years ago, H. Cartan([1]) proved the following inequality for f.

Theorem A. For any $a_1,\ldots,a_q$ of X,

$$(q-n-1)T(r,f)\leq \sum_{j=1}^{q} N(r,a_j,f)-N(r,0,W)+S(r,f),$$

where W is the Wronskian of $f_1,\ldots,f_{n+1}$.

The purpose of this talk is to give a result which contains this theorem.

2. Definition 1([3]). For $u(z)=\max_{1\leq j\leq n}|f_j(z)|$,

$$t(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log u(re^{i\theta})d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log u(e^{i\theta})d\theta.$$

Definition 2([2]). (i) X is maximal if for any Y in general position such that $X\subset Y\subset C^{n+1}$, X=Y.

(ii) X is ν-maximal if X is maximal and $\#X(0)=\nu$, where $X(0)=\{a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})\in X:\alpha_{n+1}=0\}$.

Note that $t(r,f) \leqq T(r,f)+O(1)$ and $0 \leqq \nu \leqq n$.

Proposition([2]). For any $\nu(1 \leqq \nu \leqq n)$, there are ν-maximal subsets of C^{n+1}.

Remark 1. There is no 0-maximal subset of C^2, but it is not known whether there is a 0-maximal subset of C^{n+1} for $n \geqq 2$.

3. Our main result is the following theorem.

Theorem([3]). Let x be ν-maximal. For any $a_1, \ldots, a_q$ of X,

$$\sum_{j=1}^{q} m(r,a_j,f)+N(r,0,W) \leqq (\nu+1)T(r,f)+(n-\nu)t(r,f)+S(r,f).$$

Corollary([3]). $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \delta(a,f) \leqq \nu+1+(n-\nu)\Omega$,

where $\Omega = \limsup_{r \to \infty} t(r,f)/T(r,f) (\leqq 1)$.

Remark 2. If $\Omega<1$ and $\nu<n$, then $\nu+1+(n-\nu)\Omega<n+1$.

Remark 3. There are holomorphic curves with $\Omega<1$.

References

[1] H. Cartan, Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] N. Toda, NIT Sem. Rep. on Math., No. 114 (1994), pp. 7.

[3] ———, ibid. No. 117(1994), pp. 12.

6　ある函数方程式と代数型面のピカール定数

新濃 清志　　金沢大学工学部

藤解 和也　　金沢大学工学部

代数型面のピカール定数を計算するとき，また，ピカール定数が大きい代数型面間の解析写像を考えるとき，e^H, e^L 等についての多項式間の函数方程式に出会う．最近，Ozawa–Sawada [2], Sawada–Tohge [5] は3葉代数型面のピカール定数，Ozawa–Sawada [3], [4] は4葉代数型面のピカール定数を計算した．これらの結果の別証あるいは拡張を与えるために，より一般的な函数方程式を考え，次の結果を得た．

定理 *Let H and L be non-constant entire functions with $H(0) = L(0) = 0$, $a_m = b_n = 1$, a_μ $(\mu = 0, 1, \cdots, m-1)$ and b_ν $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$ meromorphic functions with $a_0 \not\equiv 0$, $b_0 \not\equiv 0$ and f a meromorphic function . Further suppose that*

$$T(r, a_\mu) = S(r, e^H) \qquad \mu = 0, \cdots, m-1,$$

$$T(r, b_\nu) = S(r, e^L) \qquad \nu = 0, \cdots, n-1,$$

and

$$N(r, 0, f) + N(r, \infty, f) = o(m(r, e^H) + m(r, e^L)) \qquad r \to \infty$$

outside a set of finite measure. If $m \geq n \geq 1$, $d = (m, n)$, $m = pd$, $n = qd$ and the identity

$$\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu(z) e^{\mu H(z)} = f(z) \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu(z) e^{\nu L(z)}$$

holds, then we have one of the following two cases:

(I) $e^{mH(z)+nL(z)} = a_0(z) b_0(z)$, $\quad f(z) = a_0(z) e^{-nL(z)}$,

$$a_{jp}(z) = e^{-(j/d)(mH(z)+nL(z))} a_0(z) b_{(d-j)q}(z) \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \cdots, d,$$
$$a_\mu(z) \equiv 0 \qquad \text{for } \mu \neq 0, 1p, 2p, \cdots, dp = m,$$

$$
\text{(II)}\quad
\begin{array}{ll}
b_\nu(z) \equiv 0 & for \quad \nu \neq 0, 1q, 2q, \cdots, dq = n; \\
e^{mH(z)-nL(z)} = a_0(z)/b_0(z), \quad f(z) = e^{mH(z)-nL(z)}, & \\
a_{jp}(z) = e^{((d-j)/d)(mH(z)-nL(z))} b_{jq}(z) & for \quad j = 0, 1, 2, \cdots, d, \\
a_\mu(z) \equiv 0 & for \quad \mu \neq 0, 1p, 2p, \cdots, dp = m, \\
b_\nu(z) \equiv 0 & for \quad \nu \neq 0, 1q, 2q, \cdots, dq = n.
\end{array}
$$

この定理から，3葉代数型面に関する Ozawa–Sawada [2] の定理で，有限位数の仮定が不要であることを示した Sawada–Tohge [5] の別証が得られ，また，4葉代数型面に関する Ozawa–Sawada [3], [4] の定理についても，同様な結果が得られる．

参考文献

[1] K. Niino, On regularly branched three-sheeted covering Riemann surfaces, Kōdai Math. Sem. Rep. **18**(1966), 229-250.

[2] M. Ozawa and K. Sawada, Three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five, Kodai Math. J. **17**(1994), 101-124.

[3] M. Ozawa and K. Sawada, Picard constants of four-sheeted algebroid surfaces, I, to appear in Kodai Math. J..

[4] M. Ozawa and K. Sawada, Picard constants of four-sheeted algebroid surfaces, II, to appear in Kodai Math. J..

[5] K. Sawada and K. Tohge, A remark on three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five, to appear in Kodai Math. J..

Valiron – Matsumoto

7　　Bergman空間におけるinner-outer分解に関する一注意

山田雅博　　北大理

Dを複素平面上の開単位円板，mをD上の2次元Lebesgue測度とする。さらに，$\mathcal{H}$をD上の正則関数の全体とし，mに関してD上可積分な非負実数値可測関数，$w \geq 0$に対して，$\|f\|_{p,w} = \left(\int_D |f|^p w \, dm\right)^{1/p}$ $(1 \leq p < \infty)$と書くこととする。このとき，$L^p(w) := \{f : \|f\|_{p,w} < \infty\}$，$L^p_a(w) := L^p(w) \cap \mathcal{H}$とし，特に$L^p_a(w)$を荷重付きBergman空間と呼ぶ。

Beurlingは Hardy空間H^2において，任意の$h \in H^2$に対して$h = g \cdot f$という分解を与えた。ここで，gはinner関数，fはouter関数である。さらに，荷重付きHardy空間$H^2(|h|^2)$を考えたとき，$f^{-1} \in H^2(|h|^2)$でありf^{-1}は荷重付きHardy空間$H^2(|h|^2)$の原点に対する正規化された再生核となり，$\inf_{g(0)=0} \int_{\partial D} |1-g|^2 |h|^2 d\theta/2\pi = |f(0)|^2$であることが知られている。ここでは，荷重の付かないBergman空間L^2_aの元hに対して，先のBeurlingの分解に類似した結果が得られるかどうかについて考察する。Hedenmalm

は任意の$h\in L_a^2$, $h(0)\neq 0$に対して$h=G\cdot f$という分解を与えた。ここで，Gはhの零点をすべてその零点として持つノルム1のL_a^2-関数であり，fは零点を持たないL_a^2-関数である。すなわち，GはHardy空間におけるBlaschke乗積，あるいはinner関数に相当するものと考えられる。fについては殆んどくわしくは調べられていないが，ここでは次を得る。

<u>定理</u>　任意の$h\in L_a^2$, $h(0)\neq 0$に対して$h=G\cdot f$を上の分解とする。このとき，$f^{-1}\in L_a^2(|h|^2)$であり，f^{-1}は荷重付きBergman空間$L_a^2(|h|^2)$の原点に対する正規化された再生核となる。さらに

$$\inf_{g(0)=0}\int_D |1-g|^2|h|^2\,dm$$
$$=\inf_{g(0)=0}\int_D |1-g|^2 |h/G|^2\,dm = |h(0)/G(0)|^2 = |f(0)|^2$$

が成立する。

参　考　文　献

1. H. Hedenmalm, A factorization theorem for square area-integrable analytic functions, J. Reine Angew. Math. 422 (1991), 45-68.

2. M. Yamada, Weighted Bergman space and Szegö's infimum, in preprint.

8 荷重付きHardyおよびBergman空間における Riesz関数について

中路貴彦　北大理
山田雅博　北大理

Dを複素平面上の開単位円板、$\mathcal{P}$を正則な多項式の全体．また$0<p<\infty$とする。μが$\bar{D}$上の有限なBorel正測度で、$a\in\bar{D}$のとき、

$$S(\mu,p,a):=\inf\left\{\int_{\bar{D}}|f|^p d\mu\ ;\ f\in\mathcal{P},\ f(a)=1\right\}$$

とし，これをRiesz関数と呼ぶ。この関数は半平面のL^p空間におけるモーメント問題に関連して、Rieszによって定義されたものである。また，mは$\bar{D}$上の2次元Lebesgue測度を表すものとする。

$\operatorname{supp}\mu\subset\partial D$，かつ$d\mu/(d\theta/2\pi)=w(e^{i\theta})$のときに、Szegöらは$S(\mu,p,a)=(1-|a|^2)\exp\{(\log w)^\wedge(a)$を示した。ここで，$(\ )^\wedge$はPoisson積分を表す。この結果から$\lim_{r\to 1}S(\mu,p,re^{i\theta})=0$ a.e.がわかる。一般的な$\bar{D}$上の測度μに対して、$S(\mu,p,a)$を上のようなきちんとした形で求めることは難しい。ここでは，$S(\mu,p,a)$のDにおける境界での挙動を考察し、これらを評価することを考える。先のSzegöらの結果はRiesz関数が境界において、

殆んど0となることを示しているが，次の定理1は，一般的な測度μに対して、さらに厳密な結果を与えている。

定理 1 μを$\bar{D}$上の有限正測度とするとき，∂Dの可算個の点を除いて，$\lim_{r\to 1} S(\mu, p, re^{i\theta})=0$である。

$u\geq 0$が$\bar{D}$上の可積分関数のとき，$\hat{u}(a)=\int_{\bar{D}} u(z)\times \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\bar{a}z|^4}dm(z)$とし、$\hat{u}$を$u$のBerezin変換と呼ぶ。もし、$S(\mu, p, a)>0$であるならば，明らかにこれは点$a$における点値汎関数が連続であることを示している。それゆえ，Sの下からの評価は重要である。

定理 2 μを$\bar{D}$上の有限正測度とするとき，次が成立する。 (1) $d\mu=W dm$，$a\in D$のとき，

$$(1-|a|^2)^2\exp\{(\log W)^\wedge(a)\}\leq S(\mu, p, a)\leq (1-|a|^2)^2\widehat{W}(a)。$$

(2) $d\mu/dm=W$，KをDの任意のコンパクト集合とすると，

$$(1-|a|^2)^2\exp\{(\frac{1+|a|}{1-|a|})^2\int_{K^c}\log(W\wedge 1)dm\}\leq S(\mu, p, a)。$$

定理2，(2)より$\log W$がK^cで局所可積分であるならば，Sは任意のコンパクト集合上で$S\geq\delta$となることがわかる。このことから，荷重付きBergman空間$L_a^p(W)$は完備な空間となることが得られる。

On analytically normal families

Makhmutov Shamil
北大・理
Ufa State Aircraft University, Russia

Let D be the unit disk. A family $\mathcal{F} = \{f(z) \mid f(z)\text{- analytic in } D\}$ is called analytically normal (finite normal) in D if for every sequence $\{f_n(z)\} \subset \mathcal{F}$ there exists subsequence $\{f_{n_k}(z)\}$ such that the sequence of functions $\{f_{n_k}(z) - f_{n_k}(0)\}$ converges uniformly to some function (see, e.g. [1]).

Theorem The following conditions are equivalent

(1) Family $\mathcal{F}$ is analytically normal

(2) For every positive r there exists positive constant K such that

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \iint_{|z| \le r} |f'(z)|^2 dxdy \le K$$

(3) For every positive r there exists positive constant L such that

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|z|=r} |f'(z)| \cdot |dz| \le L$$

(4) For every point $a \in D$ and every r, $0 < r < 1 - |a|$, there exists positive M such that

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|z|=r} |f(z+a) - f(a)| \cdot |dz| \leq M$$

Application of this theorem to the family of analytic functions $\{f(\frac{z+a}{1+\bar{a}z})\}$, $a \in D$, in the unit disk D gives us well-known properties of Bloch functions.

[1] G. M. Goluzin, Geometric Theory of Functions of a Complex Variables, Amer. Math. Soc., Providence, 1969

10　ポアソン方程式における逆問題の解について

斎藤三郎　群馬大工

次元は，1，2，3として，基本的な方程式であるポアソンの方程式 $\Delta u = -\rho(x)$ において，ポテンシャル u から ρ を求める source problem すなわち，ρ の support 外の u の data で ρ を求める問題を考えよう．

この基本的な問題について，ρ を $L_2(dx)$ に制限するならば，ρ の support を含む円周上の u の data を用いて，support 外に影響を与える ρ のすべての情報を求めることができることを示す．円外に ρ の分布がある場合にも，自然な仮定のもとで，円内に影響を与える ρ のすべての情報を円周上の data で具体的に表すことができる．

ρ の support の外では，ポテンシャル u は調和関数になっており，いわゆる球面調和関数で展開されることを原理的に用いる．具体的に公式を表すために，基本解の具体的な形と関連する特殊関数を用いるので，次

元および方程式の正確な形を必要とする．

1つの具体的公式をあげておく：

球座標 (r, θ, φ) を用いて，ρ の分布している部分を含む半径 a の球に対して，任意の球面 (a', θ', φ') $(a < a')$ 上の u の値 $u(a', \theta', \varphi')$ によって，u に影響を与える $\rho \in L_2(\mathbb{R}^3, d\mathfrak{X})$ の部分 ρ^* が次のように表わされる：

$$\rho^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 (2n+3)}{a^{2n+3}} r^n a'^{\,n+1}$$

$$\times \sum_{m=0}^{n} \frac{\varepsilon_m (n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta)$$

$$\times \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u(a', \theta', \varphi') P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi' - \varphi) \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi'.$$

ここで，ε_m は Neumann factor $2 - \delta_{m0}$ である．

11 平衡面電流の思考実験的作成

山口博史　滋賀大(教育)

D は $\mathbb{R}^3$ の C^ω 滑らかな曲面 Σ で囲まれた領域，$D'=\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$ とする。Σ 上の面電流 $J\,dS_x$ は $\mathbb{R}^3\setminus\Sigma$ に磁場 $B(x)$ を生じる。偶々，$B(x)\equiv 0$ in D' となる場合，$J\,dS_x$ は Σ 上の平衡面電流と呼ばれる。先の講演で次を示した：

<u>定理</u> $\{\gamma_j\}_{j=1}^{g}$ を D の1次元ホモロジー基底とする．$1\leq i\leq g$ を固定する．このとき，Σ 上の平衡面電流 $J\,dS_x$ で，各 γ_j を通過する全電流 $J[\gamma_j]$ が δ_{ij} $(1\leq \forall j\leq g)$ となるものが一意的に存在する。これを $\mathcal{J}_i\,dS_x$ on Σ と記し，それより生じる磁場を $\mathcal{B}_i(x)$ と記す。

その時の証明は，$\mathcal{J}_i\,dS_x$ を作ったのではなくて，ヒルベルト空間を考えて，その存在を示したのであった。今回は古典物理的思考実験によって，$\mathcal{J}_i\,dS_x$ が作れることを示す：即ち，

「Σ 上の初期面電流 $J_0\,dS_x$ として，

$$\text{条件}(\ast)\begin{cases} J_0[\gamma_j]=\delta_{ij} & (1\leq \forall j\leq g),\\ J_0[\gamma]=0 & \text{for } \forall\ 1\text{-cycle } \gamma \text{ in } D', \end{cases}$$

を満すものを勝手に与える．$J_0\,dS_x$ は $\mathbb{R}^3\setminus\Sigma$ に磁場

$B_0(x)$を生じる．　$B_0(x) = \begin{cases} B_0^+(x) & \text{for } x \in D \\ B_0^-(x) & \text{for } x \in D' \end{cases}$　と記すと

$B_0^{\pm}(x)$はΣまで連続である．そこで，Σ上の各点xで

$$J_1(x)\,dS_x := (B_0^+(x) \times n_x)\,dS_x$$

とおく．但しn_xはΣのxにおける単位外法線ベクトルを表す。

されば，$J_1(x)dS_x$はΣ上の面電流となり，条件(*)を満す。　従って，以下同様の操作で

$$\begin{array}{ccccccccc} J_0\,dS_x & & J_1\,dS_x & & J_2\,dS_x & & \cdots & & \text{on } \Sigma, \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & & \\ B_0(x) & & B_1(x) & & B_2(x) & & \cdots & & \text{on } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma \end{array}$$

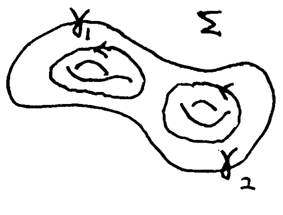
Σ上の面電流の列$\{J_n\,dS_x\}_{n=0,1,2,\cdots}$を得る。

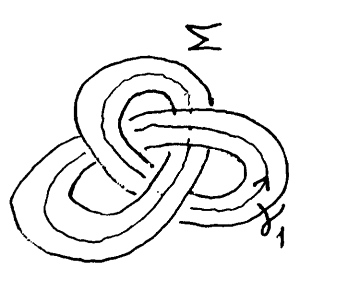
このとき，次が言える：

$$J_n\,dS_x \to j_i\,dS_x \ (n \to \infty). \ \text{weakly on } \Sigma,$$

$$B_n(x) \to \mathcal{B}_i(x) \ (n \to \infty) \quad \text{in norm in } \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$$

証明には，Σ上にdata $\varphi(x)$を与えたとき，Σの内部D，外部D'の色々の函数u_φ^+，u_φ^-（例えば，Dirichlet solutions）に関しての，エネルギーの同値性を示すことによって，なされる。





12　境界で0になる柱（シリンダー）上の調和関数

宮本　育子　　　　千葉大・理

R^n はn次元ユークリッド空間とし、$S \subset R^n$について境界と閉包を　$\partial S, \overline{S}$ で表す。また、$H = \{(x,y) \in R^2; 0 < x < \pi, -\infty < y < \infty\}$ とする。 Widder [2] は次の定理を証明した。

定理 A. $h(x,y)$ は H上調和で、$\overline{H}$上連続関数とし、

(1) $$\forall\, y \in R,\ \ h(0,y) = h(\pi,y) = 0$$

(2) $$\int_0^{\pi} |h(x,y)|dx = O(e^{a|y|}) \quad (|y| \to \infty) \quad (a \geq 1)$$

ならば

$$h(x,y) = \sum_{k=1}^{[a]} (A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}) \sin kx.$$

定理 B. 定理 A において (2) が

(3) $$h(x,y) \geq 0$$

で置き換えられるとき、

$$h(x,y) = (A_1 e^{y} + B_1 e^{-y}) \sin x.$$

以下では Dを十分に滑らかな境界をもつ $R^{n-1} (n \geq 2)$ 上の有界領域とし、Hの一般化として、柱（シリンダー）

$$\Gamma_n(D) = D \times R$$

を考える。

$\Gamma_n(D)$ 上の調和関数について、Bouligand [1] は次の定理を証明した。

定理 C. $h(X,y)$ は $\Gamma_n(D)$ 上有界で調和、$\partial\Gamma_n(D)$ 上 (連続的に)0 になる関数ならば

$$h(X,y) \equiv 0 \quad on \quad \overline{\Gamma_n(D)}.$$

ここで報告する定理は、これらの定理 A, B, C を一般化、精密化している。証明はコーンでの同種の結果 [3, 定理 5] と同様にやる。

ディリクレ問題

$$\begin{aligned}(\Delta_{n-1}+\lambda)f &= 0 \quad in\ D \\ f &= 0 \quad on\ \partial D\end{aligned}$$

の固有値列と対応する正規直交関数列を $\{\lambda(D,k)\}$, $\{f_k^D\}$ $(k=1,2,3,\dots)$ とする。さらに、$\lambda(D,k_i)<\lambda(D,k_{i+1})$ なる整数列を $\{k_i\}$ とする。

定理. p, qは 2 つの正整数で、$h(X,y)$ は $\Gamma_n(D)$ 上調和な、$\partial\Gamma_n(D)$ 上 0 になる関数とする。もし

$$lim_{y\to\infty} e^{-\sqrt{\lambda(D,k_{p+1})}\ y} \int_D h^+(X,y) f_1^D(X) dX = 0$$

$$lim_{y\to-\infty} e^{\sqrt{\lambda(D,k_{q+1})}\ y} \int_D h^+(X,y) f_1^D(X) dX = 0$$

ならば

$$h(X,y)=\sum_{k=1}^{k_{p+1}-1} A_k(h) e^{\sqrt{\lambda(D,k)}y} f_k^D(X) + \sum_{k=1}^{k_{q+1}-1} B_k(h) e^{-\sqrt{\lambda(D,k)}y} f_k^D(X)$$

ただし、$A_k(h)$ $(k=1,2,\dots,k_{p+1}-1)$, $B_k(h)$ $(k=1,2,\dots,k_{q+1}-1)$ は定数。

References

[1] M.G. Bouligand, *Sur les fonctions de Green et de Neumann du cylindre*, Bull. Soc. Math. France 42 (1914) 168-242.

[2] D.V. Widder, *Functions harmonic in a strip*, Proc. Amer. Math. Soc. (1961) 67-72.

[3] H. Yoshida and I. Miyamoto, *Solutions of the Dirichlet problem on a cone with continuous data*, preprint.

13　錐（コーン）上のディリクレ問題について

吉田　英信　　千葉大・理
宮本　育子　　千葉大・理

非有界領域である半空間でのディリクレ問題の解について、一意性がないことは Helms [1, p.42 と p.158] で指摘されている通りであるが、ある意味での一意性があることも Siegel [2] によって証明された。 Yoshida [4] はまた、Siegel の論文中の問題に答えて、より弱い条件のもとで、同種の一意性の結果を証明した。ここでは、半空間を特殊なケースとして含む、より一般な非有界領域であるコーンに対して、[4] の結果を拡張した結果が得られたので報告する。

$\Omega \subset S^{n-1}$ $(n \geq 2)$ を十分に滑らかな境界を持つ領域とし、Ω上で、ラプラシアンΔ_n の球面部分 Λ_nに関するディリクレ問題

$$\begin{aligned}(\Lambda_n + \lambda)f &= 0 \quad on \quad \Omega \\ f &= 0 \quad on \quad \partial\Omega\end{aligned}$$

の固有値列と対応する正規直交関数列を $\{\lambda(\Omega, k)\}$, $\{f_k^\Omega(\Theta)\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ とする。また、 $\lambda(\Omega, k_i) < \lambda(\Omega, k_{i+1})$ なる整数列を $\{k_i\}$ とする。

$$t^2 + (n-2)t - \lambda(\Omega, k) = 0$$

の正解、負解を $\alpha(\Omega, k), -\beta(\Omega, k)$ とする。$\partial\Omega$ は Ω の境界とする。

$$C_n(\Omega) = \{(r, \Theta) \in R^n; 0 < r < +\infty, (1, \Theta) \in \Omega\}$$

$$S_n(\Omega) = \{(t, \Xi) \in R^n; 0 < t < +\infty, (1, \Xi) \in \partial\Omega\}$$

定理 1　l, m は 2 つの非負整数、$g(Q) = g(t, \Xi)$ は $S_n(\Omega)$ 上の連続関数で

$$\int^{+\infty} t^{-\alpha(\Omega, k_{l+1})-1}\left(\int_{\partial\Omega} |g(t, \Xi)| d\sigma_\Xi\right) dt < +\infty$$

$$\int_0 t^{\beta(\Omega, k_{m+1})-1}\left(\int_{\partial\Omega} |g(t, \Xi)| d\sigma_\Xi\right) dt < +\infty$$

を満たすものとする。このとき、

$$H(C_n(\Omega), l, m; g)(P) = \int_{S_n(\Omega)} g(Q) K(C_n(\Omega), l, m)(P, Q) d\sigma_Q$$

は g を境界値にもつ調和関数で

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\alpha(\Omega, k_{l+1})} \int_\Omega |H(C_n(\Omega), l, m; g)(r, \Theta)| f_1^\Omega(\Theta) d\sigma_\Theta$$

$$= \lim_{r\to 0} r^{\beta(\Omega, k_{m+1})} \int_\Omega |H(C_n(\Omega), l, m; g)(r, \Theta)| f_1^\Omega(\Theta) d\sigma_\Theta = 0$$

を満たす。但し、$K(C_n(\Omega),l,m)(P,Q)$ はコーン上の（一般化された）ポアソン核である。

定理 2. 定理 1 に加えて、更に、p, q を $p \geq l$, $q \geq m$ を満たす 2 つの正整数とする。もし $h(r,\Theta)$ が g を境界値にもつ $C_n(\Omega)$ 上の調和関数で

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\alpha(\Omega,k_{p+1})} \int_\Omega h^+(r,\Theta) f_1^\Omega(\Theta) d\sigma_\Theta$$

$$= \lim_{r\to 0} r^{\beta(\Omega,k_{q+1})} \int_\Omega h^+(r,\Theta) f_1^\Omega(\Theta) d\sigma_\Theta = 0$$

ならば、

$$h(r,\Theta) = H(C_n(\Omega),l,m;g)(P) + \sum_{k=1}^{k_{p+1}-1} A_k(h) r^{\alpha(\Omega,k)} f_k^\Omega(\Theta)$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_{q+1}-1} B_k(h) r^{-\beta(\Omega,k)} f_k^\Omega(\Theta)$$

但し、$A_k(h)$ $(k = 1,2,\ldots,k_{p+1}-1)$, $B_k(h)$ $(k = 1,2,\ldots,k_{q+1}-1)$ は定数。

注意 Yoshida [3, 定理 3] は上記定理 2 の $p = q = 1$ の場合に含まれる。

References

[1] L.L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-·Interscience, 1969.

[2] D. Siegel, *The Dirichlet problem in a half-space and a new Phragmén-Lindelöf principle*, Maximum Principles and Eigenvalue Problems in Partial Differential Equations, e.d. P.W. Schaefer, Pitman, 1988.

[3] H. Yoshida , *Harmonic Majorization of a Subharmonic Function on Cone or on a Cylinder*, Pacific J. Math. 148 (1991), 369-395.

[4] H. Yoshida, *A Type of Uniqueness for the Dirichlet Problem on a Half-Space with Continuous Data*, Pacific J. Math. (to appear).

14　シェルピンスキー空間上のディリクレ問題

朱　文　山　　　千葉大学自然科学研究科

n 次元ユークリッド空間を $\mathbb{R}^n$ とし, 非負整数の全体を $\mathbb{N}$ とする. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ は $\mathbb{R}^n$ 上の異なった $n+1$ 個の点とし, もし n 個のベクトル $\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_0x_n}$ が 1 次独立で, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ の任意の異なった 2 点間の距離が等しいとき, 集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{x_0x} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{x_0x_i},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1,\ \alpha_i \geq 0\ (0 \leq i \leq n)\}$$

を, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ を頂点とする単体と言い, $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ で表わす. $\frac{x_0+x_j}{2}, \frac{x_1+x_j}{2}, \ldots, \frac{x_n+x_j}{2}$ を頂点とする単体 $(0 \leq j \leq n)$ を $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ の部分単体と言う. 以後, 単体の頂点を強調しない時, 単体を記号 $\hat{\sigma}$ と書く. $\hat{\sigma}$ の $n+1$ 個の部分単体の集合を $\mathrm{s}(\hat{\sigma})$ で表わす. また, $\hat{\sigma}$ の頂点の集合を $\mathrm{v}(\hat{\sigma})$ で表わす.

ここで, $\mathbb{R}^n$ 上のシェルピンスキー空間を定義しよう. まず, σ_0 を一辺の長さが 1 の単体とし, 単体集合 S_m $(m \in \mathbb{N})$ を

$$S_0 = \{\hat{\sigma}_0\}, \quad S_m = \cup_{\hat{\sigma} \in S_{m-1}} \mathrm{s}(\hat{\sigma}) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

で帰納的に定める. また, X_m $(m \in \mathbb{N})$ を

$$X_m = \cup_{\hat{\sigma} \in S_m} \hat{\sigma}$$

とし, X を

$$X = \cap_{m \geq 0} X_m$$

とする．この集合 X を $\mathbb{R}^n$ 上のシェルピンスキー空間という．この X に $\mathbb{R}^n$ の相対位相を入れる．

シェルピンスキー空間上のポテンシャル論は **Kigmi [1]** ではじめて扱われた．そこでは，開集合 $\sigma = (\hat{\sigma} \cap X) \setminus \mathbf{v}(\hat{\sigma})$ 上の調和関数が定義され，σ 上のディリクレ問題，すなわち「σ の境界で与えられた関数を境界値にもつ，σ 上の調和関数の存在」を証明した．

ここでは，上記の kigmi の結果をもとにして得られた次の結果，すなわち，σ に限らず，X の任意の開部分集合 G 上のディリクレ問題;

(1) G の境界上で定義された関数 ρ に対して，Perron-Wiener-Brelot の方法での G 上の調和関数 h の構成

(2) $x \in G$ が G の境界点 ξ に収束する時の，$h(x)$ の $\rho(\xi)$ への収束性

に関する結果を報告する．例えば，「G のすべての境界点が正則点である」という結果は，**Metz [2]** による，公理的ポテンシャル論の観点から得られた結果の別証明になっている．

参考文献

1. J. Kigami, *A Harmonic Calculus on Sierpinski Space*, Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 259–290.

2. V. Metz, *Potentialtheorie auf dem Sierpinski gasket*, Math. Ann. **289** (1991), 207–237.

15　単調なソボレフ関数の境界値について

水田　義弘　　　　広島大学総合科学部

$\mathbf{R}^n$ の半空間 H で定義された連続関数 u が（ルベーグの意味で）単調であるとは，H 内の相対コンパクトな領域 D に対して，

$$\max_{\overline{D}} u = \max_{\partial D} u \qquad \text{かつ} \qquad \min_{\overline{D}} u = \min_{\partial D} u$$

が常に成立するときをいう．調和関数は単調であるし，最大値原理・最小値原理を満たす偏微分方程式の解はもちろんその定義の仕方から単調である．

境界上の点 $\xi \in \partial\mathrm{H}$ に対して，放物体状領域

$$T_\gamma(\xi) = \{x = (x_1, ..., x_n) : |x - \xi|^\gamma < x_1\}$$

を考える．関数 u が ξ で T_∞-極限値 ℓ をもつとは，

$$\lim_{x \to \xi, x \in T_\gamma(\xi)} u(x) = \ell$$

が，すべての $\gamma > 1$ に対して成立するときをいう．

定理．H 上の単調関数 u が，ディリクレ積分有限，すなわち，

(1)
$$\int_{\mathrm{H}} |\mathrm{grad}\ u(x)|^n dx < \infty$$

とするとき，u はベッセル容量 $B_{1,n}$ ゼロの集合を除いて，すべての境界点で T_∞-極限値をもつ．

この定理の証明は，まず，u を次のように積分表示する：

(2)
$$u(x) = c \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{R}^n} k_j(x, y)(\partial/\partial y_j)\overline{u}(y)dy + A ;$$

ここに，c は u によらない定数，A は定数，

$$k_j(x,y)=\begin{cases}(x_j-y_j)|x-y|^{-n} & |y|\le 1,\\ (x_j-y_j)|x-y|^{-n}-(-y_j)|y|^{-n} & |y|>1\end{cases}$$

かつ

$$\overline{u}(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{cases}u(y_1,y_2,\ldots,y_n) & y_1>0,\\ u(-y_1,y_2,\ldots,y_n) & y_1<0.\end{cases}$$

従って，u の細極限値について論じることができ，次に，単調関数についての性質

$$(3)\qquad |u(x)-u(y)|^p\le Mr^{p-n}\int_{B(x,2r)}|\mathrm{grad}\ u(z)|^p dz,\quad y\in B(x,r)$$

を利用する；ここで，$p>n-1$．(3) は，$n-1$ 次元空間でのソボレフの不等式（$p>n-1$ に注意されたい）と単調性を組み合わせて得られる．

系．$\mathbf{H}$ 上の有界な擬等角写像の各成分は，ベッセル容量 $B_{1,n}$ ゼロの集合を除いて，すべての境界点で T_∞-極限値をもつ．

有界な擬等角写像 f について，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{H}}|f'(x)|^n dx &\le K\int_{\mathbf{H}}J_f(x)dx\\ &= \int_{f(\mathbf{H})}dy<\infty\end{aligned}$$

が成立している．

16 Riesz capacities and regular points of parabolic operator of order α

西尾昌治　　大阪市大　理

$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ 上の α 次方物型作用素

$$L^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^\alpha$$

を考え $(0 < \alpha \leq 1)$ 、 Dirichlet 問題に関する境界点の正則性を問題にする。 $X_0 \in \mathbf{R}^{n+1}$、閉集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ と $s_0 > 0$ に対し、

$$T_{X_0}^{(\alpha)}(E, s_0) = \{X_0 + (s^{\frac{1}{2\alpha}} x, -s); x \in E, 0 \leq s \leq s_0\}$$

と置く。 [1]、[3] において、開集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の境界点 X_0 が $L^{(\alpha)}$ に関して正則点であるための十分条件として、 (*) 「内点をもつ閉集合 $E \subset \mathbf{R}^n$、 $s_0 > 0$ が存在して、 $\Omega \cap T_{X_0}^{(\alpha)}(E, s_0) = \emptyset$ となる。」が知られている。ここでは、条件 (*) の E が内点をもつという条件をどこまで弱められるかを考える。 $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ に対しては E の 2α-Riesz capacity で特徴づけられるが、 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ のときは、別の capacity があらわれる。

<u>定理</u>。 $X_0 \in \mathbf{R}^{n+1}$、閉集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ とする。そのとき X_0 が $L^{(\alpha)}$ に対して $\mathbf{R}^{n+1} \setminus T_{X_0}^{(\alpha)}(E, s_0)$ の正則境界点であるための必要十分条件は $C_{2\alpha}(E) > 0$ である。ここで $C_{2\alpha}(E)$ は核

$$K_{2\alpha}(x,y) = \begin{cases} 1 & (n = 1, \alpha > \frac{1}{2}) \\ \max(0, \log \frac{1}{|x-y|}) & (2\alpha = n) \\ |x-y|^{2\alpha - n} & (1 \leq 2\alpha < n) \\ \min(|x|^{2\alpha-1}, |y|^{2\alpha-1}) & (n = 1, \alpha < \frac{1}{2}) \\ |x-y|(|x-y|\theta + |x-y|^{\frac{1}{2\alpha}})^{1-n-2\alpha} & (n \geq 2, \alpha < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

に関する capacity である。 θ は y と $x-y$ の間の角度を表わす。

とくに

系。H を $\mathbf{R}^n$ の超平面、E を H の内点を持つ閉集合とする。そのとき X_0 が $L^{(\alpha)}$ に対して $\mathbf{R}^{n+1}\setminus T^{(\alpha)}_{X_0}(E,s_0)$ の正則境界点であるのは $0\in H$、$\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$ あるいは $0\notin H$、$\alpha\neq\frac{1}{2}$ のときである。

References

[1] E. Effros and J. Kazdan, On the Dirichlet problem for the heat equation, Indiana Univ. Math. J.,20(1971), 683–693.

[2] L. Evans and R. Gariepy, Wiener's criterion for the heat equation, Arch. Rational Mech. Anal.,78 (1982), 293–314.

[3] M. Itô and M. Nishio, Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order α, Nagoya Math. J.,115(1989), 1–22.

[4] M. Nishio, The Wiener criterion of regular points for the parabolic operator of order α, Nagoya Math. J., 116(1989), 163–179.

[5] N. A. Watson, Thermal capacity, Proc. London Math. Soc., 37(1978), 342–362.

17　開集合上での極値的距離：島のある場合について

大津賀　信

昨年の春の学会において，extremal distanceの連続性について講演した。今回は島のある場合を論ずる。[1]に似た表題の論文をShlykは欧州のある雑誌に送ったが，結局[2]の形で最近発表された。かなり書き直され，島の無い場合に限られているがかなり難解である。

GはR^d内の有界開集合，$\overline{G}$はその閉包，F_0, F_1はR^d内の互いに素なコンパクト集合で，いずれも$\overline{G}$と交わるものとする。Eは$\overline{G}\setminus F_0\setminus F_1$の相対的閉部分集合であるが，$E$の各成分の閉包は，$F=F_0\cup F_1$と交わらないものとする。$E$の各成分を島とよぶ。さて島を通る曲線とは何かを定義しよう。

そのため，$R^d\setminus F\setminus E$の点はそのままで，$F\cup E$の各成分は一点と見るように位相を導入して得られる空間をΞと記す。R^dのΞへの射影をpで表す。Ξ内の曲線γの族で，$p(F_0)$と$p(F_1)$を$p((G\setminus F)\cup E)$上で結ぶもの全体を$\Gamma(F_0, F_1, E, G)$と記し，$\gamma\cap(G\setminus F\setminus E)$の各成分はそ

の局所的長さ有限とする。γは$p(\partial G\cap E)$の点を含んでよいことに注意する。Borel可測なR^d内の関数$\rho\geq 0$に対して，$\int_{\gamma\setminus E}\rho ds$を$\int_\gamma \rho ds$と書く。

$\Gamma=\Gamma(F_0, F_1, E, G)$の元$\gamma$に対し，$\int_\gamma \rho ds\geq 1$の時$\rho$は$\Gamma$-ad. と言い，$\Gamma$-ad. な$\rho$に関する$\inf\int_{R^d}\rho^p dx$を$\Gamma$の$p$-module と呼び，$M_p(\Gamma)=M_p(F_0, F_1, E, G)$と記す。extremal distance はその逆数である。

$Z=R^d\setminus F\setminus E$上の exhaustion $\{Z_n\}$を用いて，F_0，F_1，Eの外側からの近似を$\{F_0^{(n)}\}$，$\{F_1^{(n)}\}$，$\{E^{(n)}\}$とし，$M_p(F_0^{(n)}, F_1^{(n)}, E^{(n)}, G)$を$M_p(\Gamma)$のように定義すると，$n\to\infty$の時それは，島のない時と同様に，$M_p(F_0, F_1, E, G)$に近づくというのが本講演の主張である。

証明には，島のない時に用いたShlykの1つのアイデアと，[1]にある2つの方法を用いる。

参考文献

[1] A. Marden and B. Rodin: Extremal and conjugate extremal distance on open Riemann surfaces with applications to circular-radial slit mappings. Acta Math. 115(1966), 237-269.

[2] V. Shlyk: The equality between p-capacity and p-modulus. translation in Siberian Math. J. 34(1993), 1196-1200.

特別講演

Capacityとその応用

相川弘明　　熊本大学 理学部

1. Capacity 一般

定義. Capacity

様々な種類の capacity が研究されているが，ここでは次の形の capacity を考察する．$k(x,y)$ を x, yの非負の下半連続関数とし，測度 $d\mu(y)$ による積分を $k(x,\mu)$ で表す．μが絶対連続で密度 fを持つときは，単に $k(x,f)$ と書く．任意の集合に対して，

$$C_k(E) = \inf\{\|\mu\| : k(\cdot,\mu) \geq 1 \text{ on } E\}$$

とおき，Eの (kに対する)capacity と呼ぶ．$k(x,y)$ が領域 Dの Green 関数 $G(x,y)$ であるときや，$\mathbb{R}^n$上の convolution に対応する核 $k(x-y)$ であるときが，特に大切である．$0 < \alpha < n$ のとき $k_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$ とおき，α次の Riesz 核という．k_αに対応する capacity をα次の Riesz capacity という．$\alpha = 2$ のときは Newton capacity と呼ぶ．$n = 2$ のときは対数 capacity を考える．

考察. Capacity の基本的な性質

- 単調性 $E \subset F \implies C_k(E) \leq C_k(F)$.
- 加算劣加法性 $C_k(\bigcup E_j) \leq \sum C_k(E_j)$.
- 左連続性 $E_j \uparrow E \implies C_k(E_j) \uparrow C_k(E)$.
- コンパクトに対する右連続性 $K_j \downarrow K \implies C_k(K_j) \downarrow C_k(K)$.
- Capacitability $C_k(E) = \inf_{\substack{U \supset E \\ U \text{ open}}} C_k(U) = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compact}}} C_k(K)$.
- 双対な定義 $C_k(E) = \sup\{\|\mu\| : k(\mu,\cdot) \leq 1, \operatorname{supp}\mu \subset E\}$.

Capacity が有効になる典型的な例

最も有名な例は正則性に関する Wiener criterion であろう．

Eが yで thin であるとはある Newton(または対数 $n=2$ のとき) ポテンシャル u で $\lim_{\substack{x\to y \\ x\in E}} u(x) > u(y)$ なるものがあるときを言う．一般に，$E_j(y) = \{x \in E : 2^{-j} \leq |x-y| < 2^{1-j}\}$ とおく．

定理. Wiener criterion

$y \in \partial D$, $E = \mathbb{R}^n \setminus D$とする．このとき以下は同値．

- yは Dirichlet 問題に関する正則点.
- $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(n-2)} C_2(E_j(y)) = \infty$. ($n=2$ のときは少し形が異なる.)
- Eは yで thin でない.

Capacity は Sobolev の不等式にも応用される. 領域 Dと $p \geq 1$ に対して capacity を $C_p(E, D) = \inf\{\|\nabla u\|_p^p : u \geq 1 \text{ on } E, u \in C_0^\infty(D)\}$ で定義する.

定理. Sobolev-Hardy の不等式 ([13])
$1 \leq p \leq q < \infty$ とすると次は同値.
- すべての Borel 集合 Eに対して$\mu(E)^{p/q} \leq A_1 C_p(E, D)$.
- すべての $u \in C_0^\infty(D)$ に対して$\left(\int_D |u|^q d\mu\right)^{1/q} \leq A_2 \|\nabla u\|_p$.

問題. Capacity は極値問題の解として与えられるから, その値は一般には, 計算しずらい. 上の定理は必要十分条件を与えるが, それだけでは不足で, 具体的問題への応用には, capacity の評価, 性質を調べることが, 必要不可欠である.
例えば, Newton capacity の $n-2$ 次の同次性を示して, 初めて正則点に対する, Poincaré の cone 条件が言える. 実は, cone でなくても, 次元の落ちた '三角形' が外部に取れれば良いという, Kuran の条件[11] も出る. これらの条件は Wiener 条件と違って, 十分条件でしかないが, 直感的に分かるし, 場合によってはこれで十分でもある.
Sobolev の不等式について言えば, μを具体的な測度, 例えば, Lebesgue 測度として, 最初の条件を検証して, はじめて有効になる.
Capacity を用いると, 様々な問題に sharp な条件を与えることが出来るが, 問題はそれで終わるのではなく, そこに表れる capacity の詳しい性質を研究する問題の出発点になるのである.

目標.
- 解析的な性質を capacity を用いて特徴づけること.
- capacity を詳しく調べること.
- capacity による条件を解析的な性質に直すこと.

この問題を minimal thinness, boundary layer, Nagel-Stein の定理, Nagel-Rudin-Shapiro の定理などを通して考えていこう. とりわけ, 加算劣加法性の逆向きの不等式が成立する現象 (quasiadditivity),

$$A^{-1} \sum_k C_k(E_j) \leq C_k(\bigcup_j E_j) \leq \sum_k C_k(E_j)$$

は興味深く, 様々な局面で表れる.

2. Minimal Thinness

定義. Martin 空間

Martin 空間は Poisson 積分を一般化し，一般の領域で Dirichlet 問題を考えるために Martin によって導入された．G を領域 Dの Green 関数とし，$x_0 \in D$を固定点として，$g(x) = G(x, x_0)$ とおく．このとき比 $K(x,y) = G(x,y)/g(y)$ を考えよう．$K(x,y)$ は yを止めて考えれば，$D \setminus \{y\}$ の上で，x の調和関数であり，Harnack 原理より $y_j \to y' \in \partial D$ ならば $K(\cdot, y_j)$ は収束部分列を含む．必要なら部分列をとって，収束するとして、y_jの行き先を y^*とする．y^*の全体を Dの Martin 境界といい，Δで表す．$y \in \Delta$に対して，$K(x,y) = K_y(x)$ は $K_y(x_0) = 1$ を満たす，x の正の調和関数になる．

Martin 境界は本質的な部分とそれ以外に分けられる．一般に正の調和関数 h はそれ以下の正の調和関数が h の定数倍になってしまうとき，minimal と呼ばれる．K_yが minimal になるような，$y \in \Delta$の全体をΔ_1で表し，minimal boundary と言う．D上の任意の正の調和関数 h に対して，Δ_1上の有限測度μ_hが一意的に存在して

$$h = \int_{\Delta_1} K(\cdot, y) d\mu_h(y)$$

と表されるというのが，有名な **Martin の定理**である．

Martin 境界を決定するのは大切な問題である．Dが滑らかなときは，Martin 境界は普通の位相境界と一致し，すべての境界点は minimal であることが知られている．実際には，NTA 領域 (Non Tangentially Accesssible) についてこのことが成立する ([10])．NTA 領域は十分に一般な領域で，境界の Hausdorff 次元が $n-1$ よりも大きいような領域さえ存在する．

定義. Minimal thinness

$\widehat{R}_u^E$を正の優関数 u の集合 Eに対する regularized reduced function とする．これは E上で u 以上となる正の優調和関数全体の，下限を取り，下半連続になるように正規化したものである．大雑把にいえば，E上で u, その外では E上で u; ∂D上で 0 とおいた Dirichlet 問題の解である．$y \in \Delta_1$に対して，Eが yで minimally thin とは$\widehat{R}_{K_y}^E \neq K_y$の時をいう．これは，$K_y$が minimal であることから，$E$の上で K_y以上となる Green potential が存在することと同値である．これはまた，$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in E}} K(\nu, x) > K(\nu, y)$ となる，測度νの存在と同値で，普通の thinness の定義と比べられる．

定義. Minimal fine limit
D上の関数 fが $y \in \Delta_1$で minimal fine limit αを持つとは，yで minimally thin である集合 $E \subset D$があって $\lim_{\substack{x\to y\\ x\in D\setminus E}} f(x) = \alpha$ となるときを言い，$\mathrm{mf}\lim_{x\to y} f(x) = \alpha$ と書く．

定理. Minimal fine limit theorem
$h = K\mu_h$を D上の正の調和関数とする．このとき，$H = K\mu_H$を別の正の調和関数，u を Green potential とすれば，

$$\mathrm{mf}\lim_{x\to y} \frac{H(x)}{h(x)} = \frac{d\mu_H}{d\mu_h}(y), \quad \mathrm{mf}\lim_{x\to y} \frac{u(x)}{h(x)} = 0$$

がμ_h a.e. $y \in \Delta_1$に対して成立する．

問題. Minimal thinness の特徴付
Minimal fine limit theorem は大変一般であるが，具体的な境界挙動はどのように得られるだろうか? 特に，minimally thin set の定義は抽象的で，具体的な集合が，minimally thin かどうかの分かりやすい判定条件が欲しい．

以上の問題に対して，Dが半空間や，球のとき及び，$C^{1,\alpha}$領域のときには，次の形の Wiener 条件が知られている．$E \subset D$に対して，$\widehat{R}_g^E$は Green potential になるがその Green energy を$\gamma(E)$ で表す．これは$\Theta(x,y) = G(x,y)/[g(x)g(y)]$ を Naïm のΘ核とすると，第 1 節で定義した capacity $C_\Theta(E)$ に一致する．

定理. Wiener criterion 1 ([12])
$E \subset D$が $y \in \partial D$で minimally thin であるための必要十分条件は $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{jn}\gamma(E_j(y)) < \infty$ である．

上の定理は必要十分条件を与えるが，Green energy では分かった気にならないのも事実である．もっと具体的に条件を書けないだろうか? そのために，γを詳しく調べる．一般に開集合は辺の長さが境界までの距離と比較可能な立方体 Q_kの直和に Whitney 分解することが出来る．Q_kの境界までの距離を t_kとする．このとき，ひとつの Whitney cube Q_kの中で考えれば，$\gamma(E \cap Q_k) \approx t_k^2 C_2(E \cap Q_k) \geq A|E \cap Q_k|$ であることに注意する．

定理. Quasiadditivity ([1])
$E \subset D$に対して，

$$\gamma(E) \approx \sum_k \gamma(E \cap Q_k) \approx \sum_k t_k^2 C_2(E \cap Q_k) \geq A|E|.$$

Quasiadditivity を用いれば，同心球による分割をさらに細分できて，次の Wiener criterion が得られる，と同時に，積分条件も得られる．

定理．Wiener criterion 2 ([1])
境界点 y から Q_k の辺までの距離を $R_k(y)$ とすると，E が y で minimally thin であるための必要十分条件は

$$\sum_k \frac{t_k^2}{R_k(y)^n} C_2(E \cap Q_k) < \infty.$$

定理．積分条件 ([6])
可測集合 E が境界点 y で minimally thin であれば，

$$\int_E |x-y|^{-n} dx < \infty.$$

さらにもし E が滑らかなグラフの下であればこれは十分条件でもある．

考察． γ の quasiadditivity は一般の NTA 領域でも成立する ([3])．これは Hardy の不等式 ([4]) と，Green energy を Dirichlet 積分で書くことにより示される．

3. Boundary Layer

Volberg([16]) によって調和測度に関する boundary layer が定義されている．しばらく D を単位円板とする．

定義．Boundary Layer 1
$E \subset D$ を閉集合とし，$\Omega = D \setminus E$ が原点を含む領域だと仮定する．Ω の調和測度 ω に対し，ある正数 c があって

$$\omega(0, I) \geq c|I|$$

がすべての円弧 $I \subset \partial D$ に対して成立するとき，Ω を boundary layer と呼ぶ．

Boundary layer は minimal thinness と密接な関係がある．ここでは，D を一般の領域に拡張して，boundary layer を定義し，その capacity による条件を与えてみよう．$\tilde{\omega}$ を D 全体の調和測度とすれば，$\tilde{\omega}(0, I) = (2\pi)^{-1}|I|$ である．従って，次の一般化は自然であろう．

定義. Boundary Layer 2
一般領域に対して

$$\omega(0,I) \geq c\widetilde{\omega}(0,I)$$

が成立するとき$\Omega = D \setminus E$を boundary layer と呼ぶ．ただし，ここでIは境界∂D上のすべての surface ball を動くとする．

この定義をさらに言い換えてみよう．しばらくIを固定して，$\omega = \omega(\cdot, I)$, $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}(\cdot, I)$ とする．このとき，reduced function の定義からΩ上 $\widetilde{\omega} - \omega = \widehat{R}^E_{\widetilde{\omega}}$となるので，原点 0 を代入することにより，boundary layer の必要十分条件は

$$\widehat{R}^E_{\widetilde{\omega}}(0) \leq (1-c)\widetilde{\omega}(0)$$

となる．ここでIを境界上の点 yに収束させれば，比$\widetilde{\omega}(x,I)/\widetilde{\omega}(0,I)$ はyにおける Martin 核 K_yに収束する．従って boundary layer の必要十分条件は

$$\widehat{R}^E_{K_y}(0) \leq 1-c$$

がすべての境界点 yに対して成立することになる．さらにこれは Martin の定理から

$$\widehat{R}^E_h(0) \leq (1-c)h(0)$$

がすべての正の調和関数 h に対して成立することと同値である．
$K_y(0) = 1$ であるから minimal thinness の定義より，$\Omega = D \setminus E$が boundary layer であれば，Eはすべての境界点 yで minimally thin である ([7])．さらに quasiadditivity を使うとより定量的な次の定理を得る．
前節の級数を境界点 yの関数と考え，$\Phi(y) = \sum_k \dfrac{t_k^2}{R_k(y)^n} C_2(E \cap Q_k)$ とおく．

定理. Dを $C^{1,\alpha}$領域とすると次が成立する．
- ある定数$\varepsilon > 0$ があって $\|\Phi\|_\infty < \varepsilon$ならば$\Omega$は boundary layer である．
- Ωが boundary layer であれば，$\|\Phi\|_\infty < \infty$.

前半の証明には，$\widehat{R}^E_{K_y}(0)$ を集合 Eの集合関数と思い，その加算劣加法性，$\widehat{R}^E_{K_y}(0) \leq \sum_k \widehat{R}^{E\cap Q_k}_{K_y}(0)$ を用いる．後半には，$\widehat{R}^E_{K_y}(0)$ の quasi-additivity を用いたいのだが，これは単純ではなく，$\widehat{R}^E_{K_y}(0)$ が真に 1 より小さいことと，Martin 核の精密な評価を要する．

4. Boundary thinness

Boundary layer は大雑把に言えば，すべての境界点で一様に minimally thin であるような条件である．ほとんど至る所の thinness (statistical thiness) からは何が言えるだろうか? しばらく，Dを半空間 $\{x : x_n > 0\}$ としよう．1点を固定して考えるのではなく，境界全体で，thin な集合 Eと Fを考える．Eは

$$\sum_k t_k C_2(E \cap Q_k) < \infty,$$

Fは$\Lambda(F) = \inf\{\sum r_j^{n-1} : F \subset \bigcup B(x_j, r_j), x_j \in \partial D\}$ (Hausdorff type content) として,

$$\Lambda(F \cap \{x_n < t\}) \to 0$$

となるものである ([2]).

定理. Statistical thinnes and boundary thinness

- 上の 2 つの形の thin 集合はほとんどすべての境界点で minimally thin である.
- 逆に，ほとんどすべての境界点で minimally thin となる集合は，この 2 つの形の集合の和で表される.

このような集合を考えた動機は，minimal fine limit theorem の限界にある．積分条件を見ても分かるように，境界である程度のスピードで接するような集合は，minimally thin になってしまう．これは，接的境界値には，minimal fine limit theorem は有効ではないことを示唆する．ところが Nagel-Stein([15]) は，Fatou の定理が，ある程度の接的境界値に拡張できることを示した．そこで，minimal fine limit theorem に代わる定理で，Nagel-Stein の定理を導くような，fine limit theorem を作れないかという問題が起きてきた．上の 2 つの形の thin 集合がこの目的に丁度合うことが分かる.

定理. Boundary behavior

Ωを原点のみで，境界と交わる D内の閉集合とする．このとき，u を D上の正の優調和関数とすると，上の 2 つの形の thin 集合 Eと Fがあり，その外からΩに沿って境界に近づくと，ほとんどすべての境界点で u の境界値が存在する．さらに u が調和ならば，$E = \emptyset$ とでき，一方，Fは Nagel-Stein の接近領域とは，ほとんど交わらない.

5. Sets of detemination

今までは，境界で'小さい'集合を考えてきたが，ここでは逆に'大きい'集合を考えよう．簡単のために Dを $C^{1,\alpha}$領域とする．この時は，Martin 核の代わりに Poisson 核 $P(x,y) = -\partial G(x,y)/\partial n_y$ を用いて，D上のすべての調和関数を Poisson 積分$\int_{\partial D} P(x,y)d\mu(y)$ で表すことができる．Bonsall-Walsh([5]) はこれとは逆に，D内の測度νで積分し，$\int_D P(x,y)d\nu(x)$ が境界上の関数をどの程度表すか考えた．

定義. P.P.B.
$E \subset D$が Positive Poisson Basic (P.P.B.) とは，∂D上の任意の正の連続関数 fに対して，$\lambda_j > 0$ と $x_j \in E$があって，$f = \sum_j \lambda_j P(x_j, \cdot)$ なるときを言う．

一方，minimal thinness の定義を逆にしたような性質が考えられている．

定義. Determination
$E \subset D$が $y \in \partial D$に点測度を定めるとは，任意の正調和関数 $h = P\mu_h$ が E上 $P(\cdot, y)$ 以上ならば，$\mu_h(\{y\}) \geq 1$ となるときを言う．

P.P.B. と，点測度を定めること，及び，minimal thinness の関係は次のとおりである．$0 < \rho < 1$ に対して $E_\rho = \bigcup_{x\in E} B(x, \rho\delta(x))$, $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ とおく．

定理. ([8]) $E \subset D$に対し以下は同値．
- Eは P.P.B.
- 任意の正調和関数の差 h に対し $\sup_E h(x) = \sup_D h(x)$.
- Eはすべての境界点 yに点測度を定める．
- 任意の (またはある) ρに対し E_ρはすべての境界点 yで minimally thin でない．
- 任意の (またはある) ρに対し$\int_{E_\rho} |x-y|^{-n} dx = \infty$.

考察. Dを一般の NTA 領域としたとき，P.P.B. の定義を Martin 核を用いて，同様にすれば，上の定理は積分条件を除いて成立する．これには，Martin 核の詳しい評価が必要である．一般の Martin 空間への拡張が可能かどうかは知られていない．

6. Capacity と測度の比較

Riesz capacity と Hausdorff 測度の比較は良く知られている．一般に $n-\alpha<\beta\leq n$ のとき $C_\alpha(E)=0$ ならば Eのβ次元 Hausdorff 測度は 0 である．これは，$M_\beta(E)=\inf\{\sum r_j^\beta : E\subset\bigcup B(x_j,r_j)\}$ をβ次元 Hausdorff content とするとき，

$$M_\beta(E)^{1/\beta}\leq AC_\alpha(E)^{1/(n-\alpha)}$$

であることから従う．ここで$\beta>n-\alpha$は本質的であって$\beta=n-\alpha$のときには反例がある．しかし，一方では $C_\alpha(E)$ は $n-\alpha$次の集合関数である．そこでなんらかの意味で $n-\alpha$次の量と比較したい．そのために，$\delta_E(x)=\mathrm{dist}(x,E^c)$, $\widetilde{E}_\gamma=\bigcup_{x\in E}B(x,\delta_E(x)^\gamma)$ とする．

定理． $n-\alpha<\beta\leq n$, $\gamma=(n-\alpha)/\beta$とする．Uを有界集合とするとUの部分集合 Eに対して

$$M_\beta(\widetilde{E}_\gamma)\leq AC_\alpha(E).$$

考察． $\beta=n$ のときは春の学会で発表したように，quasiadditivity から容易に証明される．$\beta<n$ のときには本質的な困難さが表れる．それは Lebesgue 測度のような base measure が存在しないからである．また，Riesz 容量そのものよりも，Bessel 核 g_αに基づく Bessel 容量を考えたほうが都合がよい．それは Bessel 核が無限の方で速く収束し，可積分だからである．Bessel 容量に対しては，有界集合に含まれるという付加条件は不用である．さらに，L^p容量への拡張を考えられる．

定理． $p\geq 1$, $n-\alpha p<\beta\leq n$, $\gamma=(n-\alpha p)/\beta$ とすると，(α,p) に対する Bessel capacity $B_{\alpha,p}$に対して

$$M_\beta(\widetilde{E}_\gamma)\leq AB_{\alpha,p}(E).$$

この不等式と Capacity Strong Inequality (C.S.I.) ([9]) と組合せると，Nagel-Rudin-Shapiro([14]) の結果の改良を与える．これは第 1 節で紹介した，Sobolev-Hardy の不等式と同じ精神である．$\mathcal{M}_\gamma(F)$ で $\mathbb{R}^n$上の関数 Fを $\mathbb{R}^{n+1}_+$に調和延長し，tangency γの tangential region による maximal function を取ったものとする．また，Hausdorff content M_βによる積分を

$$\int|u|^p dM_\beta=\int_0^\infty M_\beta(\{x:|u(x)|>t\})dt^p$$

と定義する．

定理． $p > 1$, $n - \alpha p < \beta \leq n$, $\gamma = (n - \alpha p)/\beta$ とすると，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_\gamma (g_\alpha * f)^p dM_\beta \leq A\|f\|_p^p.$$

References

[1] H. Aikawa, *Quasiadditivity of Riesz capacity*, Math. Scand. **69** (1991), 15–30.

[2] H. Aikawa, *Thin sets at the boundary*, Proc. London Math. Soc. (3) **65** (1992), 357–382.

[3] H. Aikawa, *Quasiadditivity of capacity and minimal thinness*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Mathematica **18** (1993), 65–75.

[4] A. Ancona, *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$, J. London Math. Soc. (2) **34** (1986), 274–290.

[5] F. F. Bonsall and D. Walsh, *Vanishing ℓ^1-sums of the Poisson kernel and sums with positive coefficients*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **32** (1989), 431–447.

[6] B. E. J. Dahlberg, *A minimum principle for positive harmonic functions*, Proc. London Math. Soc. (3) **33** (1976), 238–250.

[7] M. Essén, *On minimal thinness, reduced functions and Green potentials*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **36** (1992), 87–106.

[8] S. J. Gardiner, *Sets of determination for harmonic functions*, Trans. American Math. Soc **338** (1993), 233-243.

[9] K. Hansson, *Imbedding theorems of Sobolev type in the potential theory*, Math. Scand. **45** (1979), 77–102.

[10] D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), 80–147.

[11] U. Kuran, *A new criterion of Dirichlet regularity via the quasi-boundedness of the fundamental superharmonic function*, J. London Math. Soc. (2) **19** (1979), 301–311.

[12] J. Lelong-Ferrand, *Étude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positive dans un demi-espace*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **66** (1949), 125–159.

[13] V. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer, 1985.

[14] A. Nagel, W. Rudin and J. H. Shapiro, *Tangential boundary behavior of functions in Dirichlet-type spaces*, Ann. of Math. **116** (1982), 331–360.

[15] A. Nagel and E. M. Stein, *On certain maximal functions and approach regions*, Adv. in Math. **54** (1984), 83–106.

[16] A. L. Volberg, *A criterion on a subdomain of the disc to have its harmonic measure comparable with Lebesgue measure*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 153–162.

On the generalized R.Fueter's polynomial p(z) in the quaternionic quadruple spaces.

18

笹山浩良　　SASAYAMA INSTITUTE

四元複素函数論の論文でR.Fueterは左右正則な多項式p(z)を導入し任意の原点で右正則な函数f(z)は

$$w=f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{(n_1+n_2+n_3=m)} c_{n_1n_2n_3}p_{n_1n_2n_3}(z)$$

の形に級数展開できることを示した。(1936) この多項式は筆者が1987年に導入したQuaternionic quadruple space $E(\Xi_R)$へ拡張できることが分かったので報告する。

B,B'をノルム空間、それに夫々附随するQuaternionic quadruple spaceを $E(\Xi_R)$, $E'(\Xi_R)$ とする。$F(\mathscr{X})$を$E(\Xi_R)$より$E'(\Xi_R)$への右正則な函数で、その成分が m>0 次斉次多項式なる時、

$$m!F(\mathscr{X})=\sum_{k_1,\dots,k_m=2}^{4}\partial^m_{x_{k_1}\dots x_{k_m}}F(\mathscr{X};x_{k_1}-i_{k_1}x_1;\dots;x_{k_m}-i_{k_m}x_1)$$

が得られる。ここに $\mathscr{X}\equiv x_1+i_2x_2+i_3x_3+i_4x_4$ で $1,i_2,i_3,i_4$ はquaternion unitsとする。

B^mよりB'への有界対称なmultilinear function $\ell_m(x_1,\dots,x_m)$及び$E(\Xi_R)^m$より$E'(\Xi_R)$へのm-linear函数$\ell_m(\mathscr{X}_1,\dots,\mathscr{X}_m)$によりp(z)の拡張$p_{m_2m_3m_4}(\mathscr{X})$ $(m_2+m_3+m_4=m)$が R.Fueterの前記論文におけると同様に導入出来、拡張

された意味で左正則且つ右正則である。例へば

$(m=0)$ $p_{ooo}\equiv 1$; $(m=1)$ $p_{1oo}=\ell_1(x_2-i_2x_1)$, $p_{o1o}=\ell_1(x_3-i_3x_1)$,

$p_{oo1}=\ell_1(x_4-i_4x_1)$:

$(m=2)$ $p_{2oo}=1/2[\ell_2(x_2,x_2)-\ell_2(x_1,x_1)]-\ell_2(x_1,x_2)i_2$,

$p_{11o}=\ell_2(x_2,x_3)-i_2\ell_2(x_1,x_3)-i_3\ell_2(x_1,x_2)$,

$p_{o2o}=1/2[\ell_2(x_3,x_3)-\ell_2(x_1,x_1)]-\ell_2(x_1,x_3)i_3,\ldots$

$p_{1o1}=\ell_2(x_2,x_4)-i_2\ell_2(x_1,x_4)-i_4\ell_2(x_1,x_2)$;

$(m=3)$ $p_{3oo}=\frac{1}{6}\ \ell_3(x_2-i_2x_1,x_2-i_2x_1,x_2-i_2x_1)$.

$p_{o3o}=1/6[\ell_3(x_3-i_3x_1,x_3-i_3x_1,x_3-i_3x_1)]$,

$$
\begin{aligned}
p_{21o}=1/6[&\ell_3(x_2-i_2x_1,x_2-i_2x_1,x_3-i_3x_1)+\\
&\ell_3(x_2-i_2x_1,x_3-i_3x_1,x_2-i_2x_1)+\\
&\ell_3(x_3-i_2x_1,x_2-i_2x_1,x_2-i_2x_1)],
\end{aligned}
$$

... .

19　Riemann 面上の extremal distance について

神　直人　学習院大学理学部

リーマン面 R を Kuramochi compact化する。ideal boundary Δ 上の互いに交わらない2つの compact 集合 F_0, F_1 を考える。R 上の曲線族 $\Gamma(F_0, F_1) = \{\gamma : \gamma$ は locally rectifiable で F_0 と F_1 を結ぶ$\}$ の extremal length $\lambda(\Gamma(F_0, F_1))$ を F_0 と F_1 の extremal distance という。

本講演では extremal distance の連続性、即ち、$\{F_n^{(j)}\}_{n=1,2,\cdots}$ $j=0,1$ を F_j の近似［即ち、1) $F_n^{(j)}$ は $R \cup \Delta$ の compact 集合、2) $F_n^{(j)} \subset F_{n-1}^{(j)}$、3) $\bigcap_n F_n^{(j)} = F_j$ ］としたとき、次のことが成り立つ。

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty} \lambda(\Gamma(F_n^{(0)}, F_n^{(1)})) = \lambda(\Gamma(F_0, F_1))$$

更に、$(*)$ を用いて extremal distance $\lambda(\Gamma(F_0, F_1))$ が、ある Dirichlet finite な調和函数 $\omega^{F_0 \cup F_1}$ の Dirichlet 積分の逆数に等しいことを述べる。ここで $\omega^{F_0 \cup F_1}$ は、次の函数族 $S(F_0, F_1)$ の中で Dirichlet 積分を最小にするものである。

$$S(F_0, F_1) = \{ f \in D(R) : \begin{array}{l} f = 0 \quad \text{q.e. on } F_0 \\ f = 1 \quad \text{q.e. on } F_1 \end{array} \}.$$

また、F_0, F_1 以外に Δ 上にそれらと交わらない compact 集合 E があるとき、E を経由して F_0 と F_1 を結ぶ曲線族 $\Gamma(F_0, F_1 : E)$ の極値的長さについても述べる。

20

On higher representations of automorphism groups of compact Riemann surfaces

栗林暲和　中央大理工
早川圭藏　中央大理工

Xを種数$g \geqq 2$のコムパクトRiemann面とする。正則なq次微分$\Omega^{\otimes q}$ ($q=1,2,\cdots$)のmodulesに$\mathrm{Aut}(X)$は作用する。$\mathrm{Aut}(X)$は$GL(\sigma,\mathbb{C})$, $\sigma=(2q-1)(g-1)+\delta_{q,1}$ ($g\geq 2$, $q\geq 1$)の部分群として表現される。この表現を$\rho^*:\mathrm{Aut}(X)\to GL(\sigma,\mathbb{C})$と表し$\rho^*$を$q\geq 2$の場合高次な表現という。$\mathrm{Aut}(X)$の部分群$AG$の$\rho^*$による像を$\rho^*(AG;X)$と表す。そしてこの表現の跡を$\chi^{(q)}$により表す。$G$を有限群とする。$\rho: G\to GL(\sigma,\mathbb{C})$を1次表現とする。対$(G,\rho)$は、$\rho^*(AG;X)$が$\rho(G)$に$\rho^*(AG;X)$-共役であるように存在する場合、種数$g$のコンパクトRiemann面$X$から生ずるという。この講演では$G$の完全共役類系に対するrotation datum $\omega=(n_0,l_1,\dots,l_s)$を導入して$(G,\rho)$がRiemann面から来るための必要十分を与える。第2にRiemann-Hurwitzの一般化である公式

$$\chi_\omega = \chi_0 + \left(n_0 - 1 + \frac{2(q-1)(g-1)}{|G|}\right)\chi_{reg} + \sum_{i=1}^{s} l_i \chi_{C_i}^{(q)}$$

をを得る。Gの既約指標による分解

$$\chi_\omega = n_0^{(g)}\chi_0 + n_1^{(g)}\chi_1 + \cdots + n_s^{(g)}\chi_s$$

から生ずる $n^{(g)}$'s と l's との間の重要な1次関係式を得る：

$$n_0^{(g)} = \delta_{g,1} + (2g-1)(g_0-1)\sum_{i=1}^{s} l_i$$

$$n_j^{(g)} = \chi_j(1)\left(g_0 - 1 + \frac{2(g-1)(g-1)}{|G|}\right) + \sum_{i=1}^{s}(\chi_{C_i}^{(g)}, \chi_j)\, l_i$$

ここに $j = 1, 2, \cdots, s$，そして $C_1, \cdots, C_s$ は G の自明でない共役類の完全系である．$(\chi_{C_i}^{(g)}, \chi_j)$ は誘導指標 $\chi_{C_i}^{(g)}$ と χ_j との scalar product で，その計算が可能である．即ち，G を位数 N の巡回群 $\langle a\rangle$，χ_j を既約指標：$a \mapsto \eta^j$ $(\eta = \exp(-2\pi\sqrt{-1}/|a|))$ とする．そのときは，

$$(\chi_{a^i}^{(g)}, \chi_j) = \overline{\left(\frac{i \times j + \frac{N}{|a^i|}(g-1)}{N}\right)}.$$

ここに $\bar{x} = x - [x]$ である．$[x]$ は x の Gauss 記号．

第3に，第2で得られた諸事実の応用について考察する．$g = 1$ の場合では分らない高次な表現から生ずる諸性質．Hurwitz 群への その応用．Riemann 面がそこから生ずる simple な群に対する応用．超楕円面に対する応用等について述べる．

21 The isolated points of monodromy representations of covering projective structures

松崎克彦　　東工大・理

In a similar way to define a complex analytic structure on a two dimensional manifold S, we define a complex projective structure on S as a certain equivalent class of projective coordinate coverings $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_\alpha$ over S. Here, $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_\alpha$ is a projective coordinate covering by definition if the transition functions $f_{\alpha\beta} : z_\alpha \to z_\beta$ on $U_\alpha \cap U_\beta$ are complex projective mappings = Möbius transformations. A projective structure determines a unique complex structure on S. In general, a Riemann surface S with a fixed complex structure admits distinct projective structures subordinate to the complex structure.

We consider representation of the projective structures on a Riemann surface S. Let $\pi : \tilde{U} \to S$ be the universal cover of S with the covering transformation group $\tilde{\Gamma}$. The pull back of a projective structure on S determines a projective structure on $\tilde{U}$, and analytic continuation of the projective coordinate coverings defines a local homeomorphism $\tilde{f}: \tilde{U} \to \hat{\mathbf{C}}$ globally, which is called the developing map. Since the projective structure on $\tilde{U}$ determines complex structure, $\tilde{U}$ is identified with the unit disk U. Then, the developing map become a holomorphic local homeomorphism $f: U \to \hat{\mathbf{C}}$ and $\tilde{\Gamma}$ become a Fuchsian group Γ acting on U. For each element $\gamma \in \Gamma$, f differs from $f \circ \gamma$ by the left composition of a complex projective mapping m. Hence a homomorphism $\chi : \Gamma \to$ Möb = { Möbius transformations } is defined by the assignment $\chi(\gamma) = m$. This homomorphism is called the monodromy representation of the projective structure.

We are interested in projective structures on hyperbolic Riemann surfaces of finite volume which are identified with cusp forms in the Banach space

$$B_2(\Gamma) = \{\varphi = S_f \mid f \text{ is a devepoling map compatible with } \Gamma \text{ and } \|\varphi\|_\infty < \infty \},$$

where S_f is the Schwarzian derivative of f and $\|\varphi\|_\infty$ is the hyperbolic sup-norm of φ. Further, we consider bounded projective structures whose developing maps are covering:

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \{ \varphi = S_f \in B_2(\Gamma) \mid f \text{ is a unbranched (unlimited) covering map } \}.$$

Their monodromy images $\chi^\varphi(\Gamma)$ are finitely generated non-elementary Kleinian groups which have the invariant component f(U) of the region of discontinuity. They are called function groups. Their classification was done by Maskit, which informs us of the possibility of these covering projective structures. We investigate the structure of $\mathcal{S}(\Gamma)$ as a subset of $B_2(\Gamma)$, in particular the isolated points of it.

Hejhal proved that if $\chi^\varphi(\Gamma)$ is a Schottky group, then φ is isolated in $\mathcal{S}(\Gamma)$. Later, Kra gave the necessary and sufficient condition for a geometrically finite φ to be isolated in case $\chi^\varphi(\Gamma)$ does not contain a parabolic element of rank 2. Though this assumption was not stated in his theorem, it must be required in the proof. We remove the assumption about parabolic elements and establish the final statement concerning the isolation of geometrically finite covering projective structures. This improvement is motivated by Gallo's work.

Theorem. *Geometrically finite φ is an isolated point of $\mathcal{S}(\Gamma)$ if and only if $(\chi^\varphi(\Gamma), \Delta)$ is a Koebe group without an APT and without a non-rigid parabolic subgroup of rank 2 such that all the component subgroups except for Δ are triangle groups.*

22 *On Teichmüller mappings of infinite type*

黄 心 中　　京大理
谷口雅彦　　京大理

Let B_2 be the Banach space consisting of all φ holomorphic on E with the norm $\|\varphi\lambda^{-2}\|_\infty = \operatorname{ess.sup}_{z\in E}|\varphi(z)\lambda(z)^{-2}| < \infty$, where $\lambda^2(z)|dz|^2$ is the Poincare metric on E. Then following are the common concerned problems

Extremality Conjecture 1. *If φ belongs to B_2, then the Teichmüller mapping corresponding to φ is extremal.*

Tameness Conjecture 2. *Suppose that a Teichmüller mapping corresponding to holomorphic quadratic differential φ is extremal. Then φ belongs to B_2.*

Uniqueness Conjecture 3. *If φ and ψ belong to B_2, the the Teichmüller mappings corresponding to φ and ψ concide with each other if and only if $\varphi = \psi$.*

These conjectures have partially solved by many authors such as Sethares, Reich, Strebel, Hayman. Based on these results, Reich further asked the question whether a Hamilton sequence, if one does exist, can be obtained in a more direct manner.

We give a partial answer for Extremality conjecture 1 and

Reich's problem. Our result can be stated as follows

THEOREM 1. *Let $\varphi(z)$ be holomorphic in E, if* $\underline{\lim}_{r\to 1} \frac{\log\frac{1}{1-r}}{A(r,\varphi)} = 0$, *and*

$$I_1(r,\varphi) = O(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}),\ r \to 1.$$

Then the Teichmüller mapping corresponding to φ is extremal for its boundary values, and there exists a sequence of numbers $\{\widetilde{R}_n\}$ such that $0 < \widetilde{R}_n < 1$, $\lim_{n\to\infty}\widetilde{R}_n = 1$, and $\{\varphi(\widetilde{R}_n z)\}$ is a Hamilton sequence.

From Theorem 1, two corollaries are derived to show that Extremality Conjecture 1 is true under some suitable conditions which are more general than those of Sethares, Reich and Strebel. For conjecture 2, we give a counterexample to show that conjecture 2 is false. For the uniqueness problem, we consider a close relating class of Teichmüller mappings Q_I which keep boundary points fixed, comparing with the results of Sethares and Reich, we obtain a deeper conclusion as follows.

THEOREM 2. *Suppose $f \in Q_I$, and $\mu(z) = \frac{f_{\bar z}}{f_z} = k\frac{\bar\varphi(z)}{|\varphi(z)|}$, where $\varphi(z)$ is holomorphic in E. Suppose*

$$I_1(r,\varphi) = O(\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}), \quad r \to 1.$$

Then $A(r,\varphi) = O(\log\frac{1}{1-r})$, $r \to 1$, and $\underline{\lim}_{r\to 1}(1-r)I_1(r,\varphi) = a \neq \infty$.

23　ある種の無限次元Teichmüller空間の分類

大沢健夫　　名大理

有限型Riemann面については少数の例外を除き、その擬等角同値類とTeichmüller空間の双正則同値類は一対一に対応することが分っている。ある種の無限次元Teichmüller空間の同型問題はこの事実に帰着できる。

定義　一点とそのまわりの局所座標が指定された二つのRiemann面 (R_i, p_i, z_i) $(i=1,2)$ に対し、それらの r-連結和 $R_1 \#_r R_2$ を、$z_1 z_2 = r$ により $R_i \setminus \{|z_i| < r\}$ を貼り合わせたものとして定義する。また同様に、列 $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対しても(局所座標と点のとり方に依存するが)無限連結和 $R_1 \#_{r_1} R_2 \#_{r_2} R_3 \cdots$ $(=: \#_{i=1}^{\infty}{}_{r_i} R_i)$ を定義する。

定義 ① 二つのノルム空間 V, W に対し、$V \underset{K}{\simeq} W \iff$
$\exists\, \Phi : V \xrightarrow[\text{bij.}]{\sim} W$ s.t. $\forall v$, $K^{-1}\|v\| \leq \|\Phi(v)\| \leq K\|v\|$.
② V が K-既約 $\iff$「$V \underset{K}{\simeq} V_1 \oplus V_2 \Rightarrow V_1 = \{0\}$ 又は $V_2 = \{0\}$」
③ V が K-純既約 $\iff$ 任意の2次元部分空間が K-既約

Riemann面 R に対し、R 上の可積分正則二次微分全体の集合を $A_2^1(R)$ で表す。

定理　Riemann面の列 $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ が次を満たすとする。
1) $R_i \neq \hat{\mathbb{C}}$ $(\forall i)$　2) $\sup_i \dim A_2^1(R_i) < \infty$

このとき次のような連結和 $R = \#_{i=1}^{\infty} \gamma_i R_i$ が存在する。

$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in (1, 1+\varepsilon)\ \exists i_0$ s.t.

$$A_2^1(R) \underset{K}{\simeq} A_2^1(\#_{i=1}^{i_0} \gamma_i R_i \setminus 1点) \oplus \left(\bigoplus_{i=i_0+1}^{\infty} A_2^1(R_i \setminus 2点)\right) \oplus \ell^1$$

かつ右辺の ℓ^1 以外の成分は K^3-純既約.

上の R_i が全てコンパクト、かつある $K_0 > 1$ に関して $A_2^1(R_i)$ が K_0-純既約でありさえすれば、列 $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ は（連結和の作り方にはよるが）$\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ にはよらずにとれる。このことと Gardiner の定理：「Teichmüller 距離 = 小林距離」かつ「Teichmüller 空間 $T(R)$ の $(R,[id])$ における接空間 $= (A_2^1(R))^*$」を用いると次を得る。

系：Riemann 面のある非可算無限族 $\{R_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して

$$t \neq t' \Rightarrow T(R_t) \not\cong T(R_{t'})$$

定理の本質的な部分は二つの双曲的 Riemann 面の γ-連結和に対する漸近的分解定理であり、その証明には荷重つき L^2 ノルム評価つきの $\bar{\partial}$-方程式の解の存在定理が役に立った。（$A_2^1(R)$ の話なので L^1 ノルムの評価が必要だが、それを Cauchy-Schwarz の不等式から出せる所がポイントである。）

24

Punctured surface の Teichmüller 空間の geodesic length parameter についての一注意

中西　敏浩　　　　　　　　　静岡大学理学部

$\Sigma_{g,s}$ を向きのついた種数 g の閉曲面から s 個の点を除いたものとし、$2g-2+s>0, s>0$ をみたすとする。$\Sigma_{g,s}$ 上の面積有限な (曲率 -1 の) 双曲構造の Teichmüller 空間を $T(\Sigma_{g,s})$ とかく。$\Sigma_{g,s}$上のある有限個 (残念ながら $6g-6+2s$ よりは大きい数) の閉曲線の組が定める geodesic length functions が $T(\Sigma_{g,s})$ の実代数的表現を与えることについて報告する。それだけです。

25

Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces

金沢大学工学部　奥村善英

今回は有限次元 Teichmüller 空間の幾何的な解釈を持つ実解析的座標について報告する。

Fuchs 群は種数 g の閉 Riemann 面を表現するとき $(g,0,0)$ 型といわれ、図 1 のような不動点の配置を持つ双曲型一次変換からなる標準生成元系

$$\Sigma = (A_1, B_1, ..., A_g, B_g);$$

$$B_g^{-1}A_g^{-1}B_gA_g \cdots B_1^{-1}A_1^{-1}B_1A_1 = identity$$

を持つ。Σ の一次変換による共役類 $[\Sigma]$ の各元は同じ Riemann 面を表現する。以下、$g \geq 2$ としよう。$(g,0,0)$ 型標準生成元系の共役類の集合は $(g,0,0)$ 型 Teichmüller 空間 $T(g,0,0)$ といわれ、$6g-6$ 次元実解析的多様体となる。$[\Sigma]$ が表現する Riemann 面上の閉測地線の長さに対応する変数から $T(g,0,0)$ の大域的実解析的座標が得られることが、Fricke の時代から知られている。このような変数は 長さ変数 (length parameter) といわれる。Teichmüller 空間を記述する長さ変数の最小個数を N_1 とすると、$N_1 \geq 6g-6$ となる。$6g-5 \leq N_1$ が Wolpert により $N_1 \leq 6g-4$ が Seppälä-Sorvali と私により示され、1993 年に Schmutz により $N_1 = 6g-5$ が示された。私も同時期に全く別方法で、この結果と長さ変数の空間を記述した。$T(2,0,0)$ の場合には、次の定理が得られる：

定理　$T(2,0,0)$ は $[\Sigma]$ が表現する Riemann 面上の 7 個の単純閉測地線の長さからなる大域的実解析的座標を持つ。このような長さ変数として、Σ が生成する群の次の 7 個の元の trace の絶対値がとれる：

$$A_1,\ B_1,\ B_1A_1,$$

$$A_2,\ B_2,\ B_2A_2A_1,\ B_2A_2B_1^{-1},$$

(図 2 を参照せよ)。また、変数空間は次のように記述される：

$$x_j, y_j, z_1, u, v > 2 \quad (j = 1, 2),$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_1y_1z_1 = x_2^2 + y_2^2 + |trB_2A_2|^2 - x_2y_2|trB_2A_2| < 0,$$

$$|trB_2A_2| = \frac{1}{z_1^2-4}\Big(z_1\sqrt{x_1y_1z_1 - (x_1^2+y_1^2+z_1^2)+4}\sqrt{uvz_1 - (u^2+v^2+z_1^2)+4}$$
$$+2(x_1u + y_1v) - z_1(y_1u + x_1v)\Big) > 2,$$

但し、$x_j = |trA_j|$, $y_j = |trB_j|$ $(j = 1, 2)$, $z_1 = |trB_1A_1|$, $u = |trB_2A_2A_1|$ そして $v = |trB_2A_2B_1^{-1}|$ とする。

時間があれば、一般の有限次元 Teichmüller 空間に対する N_1 の結果も報告する。

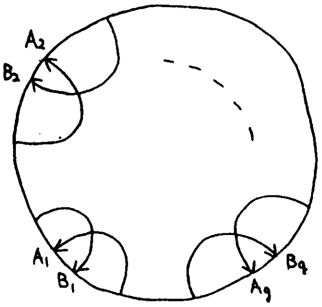


図 1

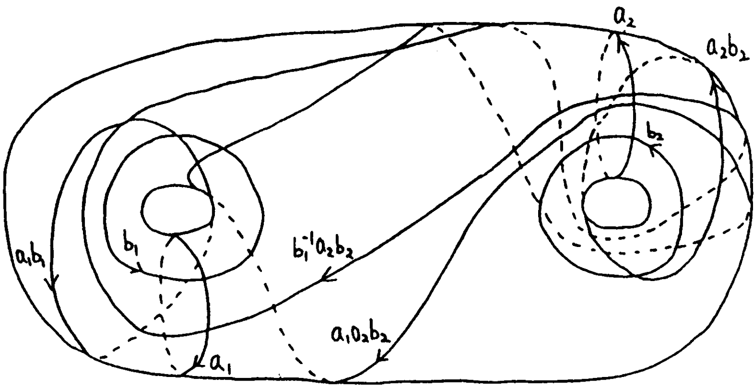


図 2　a_1, b_1, a_1b_1 等は A_1, B_1, B_1A_1 等に対応する測地線とする

26

Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces

金沢大学工学部　奥村善英

本講演では、[Σ] が表現する Riemann 面上のいくつかの測地線間の交角から得られる Teichmüller 空間の大域的実解析的座標について報告する。

このような角度は角度変数 (angle parameter) といわれる。一般の Riemann 面は building blocks といわれる簡単ないくつかの Riemann 面を結合することで得られる。Building blocks と結合の仕方は角度変数で決まることが示され、一般の Riemann 面が角度変数で決まることがわかる。これから、角度変数による Teichmüller 空間の座標付けが可能であることが示される。

双曲幾何においては、三角形は三辺の長さと三内角のどちらからでも決定でき、また角度には負の値が考えられることから、長さより角度の方が情報量が多いように思える。これから、Teichmüller 空間を記述する角度変数の最小個数を N_2 とすると、$N_2 \leq N_1$ が予想される。cosine や sine の多項式系は変形すると次数の低い多項式系、さらに線形方程式系に帰着できることから、角度変数の空間の記述は容易であろうと予想できる。$T(2,0,0)$ に関しては次の結果が得られる：

定理　$T(2,0,0)$ は図 1 のような [Σ] が表現する Riemann 面上の七個の角度変数からなる大域的実解析的座標を持つ。また、変数空間は次のように記述される：

$$\theta(A_j),\ \theta(B_j),\ \theta(B_jA_j),\ \mu \in (0,\pi) \quad (j=1,2),$$

$$\theta(A_j)+\theta(B_j)+\theta(B_jA_j) < \pi \quad (j=1,2),$$

$$F(\theta(A_1),\theta(B_1),\theta(B_1A_1)) = F(\theta(A_2),\theta(B_2),\theta(B_2A_2)) > 1,$$

但し、

$$F(x,y,z) := \frac{\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z - 1}{\sin x \sin y \sin z}$$

とする。

講演では、一般の有限次元 Teichmüller 空間に対する N_2 の結果も報告する。

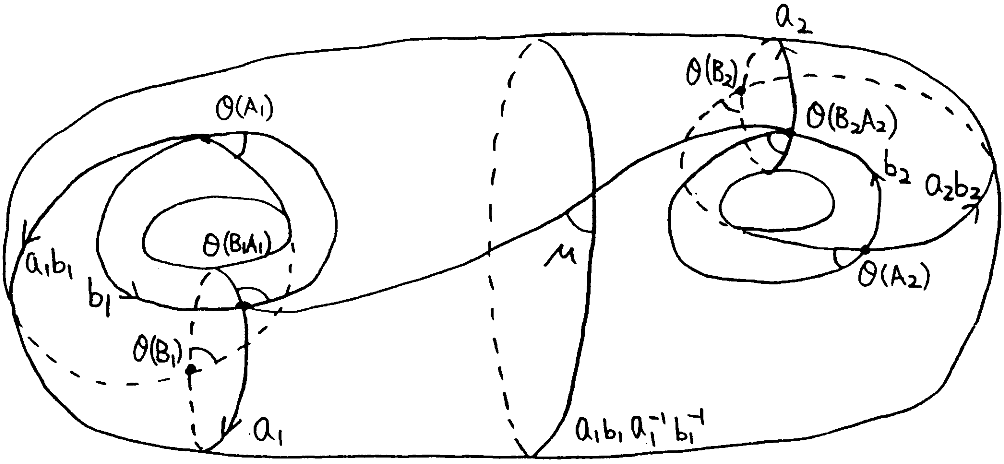


図 1

27

Local Uniform Convergence and Convergence of Julia Sets

木坂正史　　大阪府立大学
総合科学部

$f_n (n=1,2\cdots)$, f を整関数とし、f_n は f に $\mathbb{C}$ 上広義一様収束しているとする。このとき次の問題を考える。

(I) どのような条件の下で f_n の Julia set J_{f_n} が f の Julia set J_f に Hausdorff metric で収束するか？

(II) f_n から f の singular value について何がいえるか？

ここでは Bergweiler [B] に従って、整関数 f を $f:\mathbb{C}\to\hat{\mathbb{C}}$ と考え、f の Fatou set を

$F_f = \{z\in\hat{\mathbb{C}} \mid \{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ が z の近傍で定義でき、そこで正規族$\}$

とし、f の Julia set を $J_f=\hat{\mathbb{C}}\setminus F_f$ で定義する。すると J_f は $\hat{\mathbb{C}}$ の compact set で、多項式のときは $\infty\in F_f$、超越的なときは $\infty\in J_f$ となる。また上記の Hausdorff metric は $\hat{\mathbb{C}}$ の空でない compact subset 全体からなる集合上で定義される距離である。　まず(I)については次が成立する。

Theorem I

F_f が attracting cycle の basin だけからなる、または $F_f=\phi$ (i.e $J_f=\hat{\mathbb{C}}$) ならば、J_{f_n} は J_f に Hausdorff metric で収束する。

Corollary I

f が McMullen ([M]) の意味で expanding なら、f は Theorem I の仮定を満たす。よってこのとき $J_{f_n} \longrightarrow J_f$ となる.

(II)については次が成立する.

Theorem II

c を f の singular value とすると、十分大きな任意の n に対し f_n の singular value $c^{(n)}$ が存在し、$c^{(n)} \longrightarrow c$ となる.

これの1つの応用として …

$f \in S = \{ g \mid g$ の singular value は有限個$\}$

とする。$c_1, c_2, \cdots, c_p$ を f の singular value とすると、f_n の singular value の列 $\{c_j^{(n)}\}$ $(j=1,\cdots,p)$ で $c_j^{(n)} \to c_j$ なるものが存在する. このとき

Corollary II

各 j に対し $\lim_{k\to\infty} a_{j,k} = \infty$ なる列があり、$|f_n^k(c_j^{(n)})| \geq a_{j,k}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) が成立するなら、$J_f = \hat{\mathbb{C}}$ であり. よって $J_{f_n} \longrightarrow J_f$ となる.

詳細については、Kisaka [K] を参照されたい.

references

[B] Iteration of meromorphic functions, Bull. AMS. 29 (1993) 151-188

[K] Local uniform convergence and convergence of Julia sets, preprint

[M] Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions Trans. AMS. 300 (1987), 329-342

28 種数2の曲線族から得られる周期写像

小松 信(まこと) 京大数理研

楕円曲線 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 上のサイクルに沿う、正則1形式の積分による周期写像の話の類似を種数2の曲線 $C(g): y^2=x^5+g_2x^3+g_3x^2+g_4x+g_5$ について考察している。

$H_1(C(g),\mathbb{Z})$ の symplectic basis $A_1(g), A_2(g), B_1(g), B_2(g)$ に沿って $C(g)$ 上の正則1形式 $\frac{x^{i-1}dx}{y}$ $(i=1,2)$ を積分することにより，曲線のパラメーター g の空間（のうちで $C(g)$ が退化しない部分）の monodromy 被覆から $\mathbb{C}^8$ への写像 P を定義する．この枠組で P が単射であり局所的に埋め込みであることは既知である．超楕円曲線（あるいは特に種数2の曲線）の Weierstrass 点の座標を、その曲線の周期行列で表わす古典的な公式を使うと更に次のことがわかる．

主張：P の像は Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_2$ から $A:=\left\{\begin{pmatrix}\tau_1 & 0\\ 0 & \tau_2\end{pmatrix} \middle| \tau_1,\tau_2\in\mathbb{C},\ \mathrm{Im}\,\tau_i>0\ (i=1,2)\right\}^{Sp(2,\mathbb{Z})}$ （$\{\cdots\}$ の $Sp(2,\mathbb{Z})$ による orbit）を除いた集合 $\mathfrak{S}_2\setminus A$ の上の自明な $\mathbb{C}^*$ bundle になっている。

29　CR リー群と CR リー変換群の不変 CR 構造

志賀　潔（岐阜大学　教養部）
竹内　茂（岐阜大学　教育学部）

G をリー群、$L(G)$ をその左不変ベクトル場の作るリー環とする。G は CR 多様体であって群演算が CR 写像であるとき CR リー群とよび、$L(G)$ は CR ベクトル空間であって括弧積が CR 双線形写像のとき CR リー環と呼ぶ。このとき次の関係が成立ち、これは (複素) リー群と (複素) リー環の間の関係の自然な一般化を与える。

定理 1　*CR* リー群 G のリー環 $L(G)$ は *CR* リー環の構造をもち、逆に $L(G)$ が *CR* リー環ならば、G は *CR* リー群になりそのリー環に入る *CR* 構造はもとの *CR* 構造と一致する。

CR ベクトル空間はその上にヤコビ律を満たす括弧積が定義され、それに関して CR 構造が可積分のとき UCR リー環と呼ぶ。CR 多様体Mの上のベクトル場 X はその生成する局所変換 $\mathrm{Exp}tX$ が局所 CR 変換であるとき M の CR ベクトル場と呼ぶが、その全体 $CR(M)$ は括弧積に関してリー環となり、その上の (誘導) CR 構造に関して UCR リー環となる。M に CR リー変換群 G が (左から効果的に) 作用しているとき、G の右不変ベクトル場のなすリー環 $R(G)$ は $CR(M)$ の部分環として埋め込まれ、UCR 部分リー環の構造を受け継ぐ。

次に、CR 多様体 M に CR リー変換群 G が (左から効果的に) 作用しているとき、G には、

(i) 作用 $f : G \times M \longrightarrow M$ が CR 写像となる極大 CR 構造 A_1 が入り、

(ii) 作用 f が CR 写像となりかつ、G が CR リー群となる極大 CR 構造 A_2 が入るが、それらの CR 構造の構成法とその性質について述べる。

具体例としては CR ベクトル空間の一般 CR 線形群 $GL_{CR}(V)$ とそのリー環 $\mathrm{End}_{CR}(V)$ の対応を取り上げる。

30 **Holomorph-convexity of certain covering spaces of projective manifolds**

SHIGEHARU TAKAYAMA NAGOYA UNIVERSITY

A complex space Y is said to be *holomorphically convex* if, given a sequence of distinct points $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ in Y without a limit point in Y, there exists a holomorphic function f on Y such that $\{f(y_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ is unbounded. Obviously a compact complex space is holomorphically convex. Y is said to be *Stein* if it is holomorphically convex and *holomorphically separable*, i.e., if x and y are two distinct points of Y, then there is a holomorphic function f on Y such that $f(x) \neq f(y)$.

In this talk, we give a partial affirmative answer to the following conjecture due to Shafarevich:

Conjecture. *The universal covering space of a projective manifold is holomorphically convex.*

It is necessary to assume manifolds to be projective, since $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ is the universal covering of Hopf surface and it is not holomorphically convex by Hartogs' theorem. Kodaira has shown that any compact manifold whose universal covering coincides with $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ is not algebraic. Furthermore, $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ does not cover compact Kähler manifolds.

Let (X, ω) be a compact complex manifold with a Hermitian metric ω. Let (L, h) be a holomorphic line bundle on X with a smooth Hermitian metric h, and denote the curvature form $\Theta := \sqrt{-1}\bar{\partial}\partial \log h$. Let $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ be a holomorphic infinite étale covering from a complex manifold $\widetilde{X}$. We denote the pull back $\widetilde{\omega} := \pi^*\omega, \widetilde{L} := \pi^*L, \widetilde{h} := \pi^*h$ and $\widetilde{\Theta} := \pi^*\Theta$ respectively. Fix an origin $x_0 \in \widetilde{X}$ and denote $d(x_0, x)$ the distance between x_0 and $x \in \widetilde{X}$ with respect to the complete Hermitian metric $\widetilde{\omega}$.

If L is ample, L has a smooth Hermitian metric h of positive curvature and $\widetilde{L}^{\otimes k}$ has enough holomorphic L^2 sections $H^0_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{L}^{\otimes k})$ with respect to $\widetilde{h}$ and $\widetilde{\omega}$ for large $k \in \mathbb{N}$ by L^2-estimate. Furthermore, if $\widetilde{X}$ has a compact subvariety V of positive dimension, then, obviously, $\widetilde{X}$ is not Stein and $(\sigma)_0$, the zero locus of $\sigma \in H^0_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{L}^{\otimes k})$, must intersect with V. So $(\sigma)_0$ can not go far away from x_0, that is

$$d(x_0,(\sigma)_0) := \inf_{x\in(\sigma)_0} d(x_0,x) \leq \sup_{x\in V} d(x_0,x) < +\infty.$$

Note that the above properties and the following assumption $(*)$ do not depend on the choice of the metrics h, ω and x_0. Our main results are to show that the existence of non-constant holomorphic functions on $\widetilde{X}$ under the assumption which, in a certain sense, is opposite to what we talked above.

Theorem 1. *Let*

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{L},\widetilde{h}) & \longrightarrow & (L,h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\widetilde{X},\widetilde{\omega}) & \xrightarrow{\pi} & (X,\omega) \end{array}$$

,$x_0 \in \widetilde{X}$ and $d(x_0,\ )$ be as above, but not necessarily L is ample. Assume that

$$(*) \qquad \varlimsup_{k\to+\infty} \sup\{d(x_0,(\sigma)_0) \mid \sigma \in H^0_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{L}^{\otimes k})\} = +\infty.$$

Then $\widetilde{L}$ admits a flat Hermitian structure, that is, $\widetilde{L}$ is given by a representation $\pi_1(\widetilde{X}) \longrightarrow S^1$ in the unit circle. In particular, $\widetilde{L} \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ if $\widetilde{X}$ is the universal cover.

We have existence theorems on condition that L is not trivial in some sense.

Theorem 2. *Assume that $\widetilde{X}$ is the universal cover, $\kappa(L) > 0$ and $(*)$. Then there exists a non-constant holomorphic function on $\widetilde{X}$.*

Where $\kappa(L)$ stands for the Kodaira dimension of L, i.e.,

$$\kappa(L) := \begin{cases} -\infty & \text{if } H^0(X,L^{\otimes\nu}) = 0 \text{ for any } \nu \in \mathbb{N}, \\ \max\{\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \mid \varlimsup_{\nu\to+\infty} \nu^{-k} \dim H^0(X,L^{\otimes\nu}) > 0\ \} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Theorem 3. *Assume that L is ample and $(*)$. Then $\widetilde{X}$ is Stein and $\widetilde{L}$ is torsion, i.e., there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $\widetilde{L}^{\otimes m} \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$.*

31 代数多様体の普遍被覆と小平次元

辻 元 東工大理

代数多様体の普遍被覆については、いくつかの予想（Shafarevic予想など）があるもののまとまった結果は何もないと思われる。

ここでは、代数多様体の普遍被覆が、どの程度代数多様体の構造を決定するか考えたい。

定理. X_1, X_2 を共通の普遍被覆 $\tilde{X}$ をもつ代数多様体であるとする。X_1が一般型なら、X_2も一般型である。この時 □

上の定理は対数的な場合にも拡張される。さらに一般的に、小林予想：measure hyperbolic なコンパクト複素多様体は一般型か？というものもあるが、上の定理はこれを support している。

32

Bergman計量とk-Levi平坦性

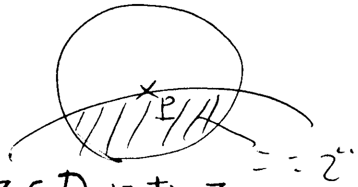
大沢健夫　名大理
Klas Diederich　Wuppertal大

$D\subset\mathbb{C}^n$ を滑らかな境界を持つ有界擬凸領域、ds_D^2 を D の Bergman 計量とし、D の境界点 p における ∂D の Levi 形式の階数を k とする。ds_D^2 の境界挙動と k の関係を調べたい。今までに次が知られている。($\delta(z):=\inf\{|z-w| \mid w\in\partial D\}$ とおく。)

定理1 (春の学会での報告の改良形)

$k=n-1$ (即ち ∂D が p で強擬凸)

$\Longleftrightarrow$



~~ある定数 C が存在して、~~

~~$|z-p|<C\delta(z)$ なる $z\in D$ において~~

$$\frac{\partial\delta\bar\partial\delta}{\delta^2}+\frac{ds_e^2}{\delta} < C\,ds_D^2$$ (ds_e^2 は Euclid 計量)

更に一歩進んで、$k<n-1$ なる場合を考えてみよう。Cauchy の評価式から直ちに分かるように、∂D が p の近傍で複素 $n-k-1$ 次元の葉層構造を持てば、$z\to p$ のとき ds_D^2 は少なくとも $n-k-1$ 次元の

T_zD ($\simeq T_z^{1,0}D$)の部分空間に沿って有界にとどまる。次の結果はこの逆の成立を保証するものと言える。

<u>定理2</u>　近傍 $U \ni p$ 及び TU 上の半正定値二次形式 Σ で連続かつ階数が(各点で) $k+1$ のものが存在して、ある定数 C に対し

$|z-p| < C\delta(z)$ なる $z \in D$ において

$$\frac{\Sigma}{\delta^{1/32n}} < C\, ds_D^2$$

証明には荷重つき L^2 正則関数の拡張定理の他に、再生核に関する次の比較定理が用いられる。

<u>定理3</u>　$\varphi : D \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{R}$ は次をみたす多重劣調和関数とする。

1) $\inf \varphi > -\infty$　2) $\partial\bar\partial\varphi \geq \partial\varphi\bar\partial\varphi$　3) $\exists C>0$ s.t.,

$C|z_1 - z_2| > |e^{\varphi(z_1)} - e^{\varphi(z_2)}|$, $\forall z_1, z_2 \in D$.

このとき L^2 ノルム $\left(\int_D e^{-\alpha\varphi}|f|^2\right)^{1/2}$ に関する荷重つき Bergman 核 $K_{D,\alpha}(z,w)$ について、

$\exists C' > 0$ s.t.、$0 \leq {}^\forall\alpha < {}^\forall\beta$

$$K_{D,\alpha}(z,z) < C' \exp\left(-\frac{\beta-\alpha}{32n}\varphi(z)\right) K_{D,\beta}(z,z).$$

この証明に用いる荷重関数は多重劣調和ではない!

33

(−3, 1)型例外集合について

大沢健夫　　名大理

複素多様体 M 内のコンパクト(複素)部分多様体 A が例外集合であるとは、A を一点につぶした M の商空間上に $M\setminus A$ の複素構造が延長できることを言う。例外集合の研究は解析空間の孤立特異点の研究と密接な関係がある。Laufer、安藤によって発見された、$\mathbb{P}^1$ の例外集合としての埋め込みで、法束が正直線束を直和成分として含むものについて、それらの成り立ちをもっと良く理解したい。そのうち Kähler 計量の存在に対する障害となる可能性の指摘された(Vo Van Tan 氏による)法束が $\mathcal{O}(-3)\oplus\mathcal{O}(1)$ に同型な埋め込みについて調べ、次の結果を得た。

<u>定理</u>　$\forall(c_1, c_2)\in\mathbb{C}^2$, $\forall(a, b)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$ に対し、$\mathbb{P}^1$ の非同次座標を w として、貼り合わせ

$$\begin{cases} u_0 = w^3u_1 + (1+c_1w+c_2w^2)v_1^2 + (aw+bw^2)v_1^3 \\ v_0 = w^{-1}v_1 \end{cases}$$

により定まる$\mathbb{P}^1$上の$\mathbb{C}^2$－束の零断面は例外集合である。

注1）　Laufer、安藤の例はそれぞれ、(c_0, c_1, c_2, a, b)の値が$(1,0,0,1,0)$、$(1,0,0,0,1)$の場合に相当する。

注2）　v_1について3次の項がなければ零断面は例外集合ではないが、genericには正則凸な基本近傍系を持つことが分かる。

注3）　以前（16年前）学会で$(-3,1)$型の例外集合の例について報告したことがありますが、当時のプレプリントには計算ミスがあってそのままでは例になっていませんでした。藤木さんにミスを指摘されたのとLaufer氏の論文が出たのが1980年です。近年の安藤氏とVo Van Tan氏の活動に刺激されて昔の計算の続きをやってみたということです。

34

Multipliers and Bourgain algebras of $H^\infty + C$ on the polydisk

泉池 敬司　　新潟大 理
真次 康夫　　信州大 理

$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とする。$(H^\infty + C)(T)$ は $L^\infty(T)$ の closed subalgebra である (Sarason)。しかし, $(H^\infty + C)(T^2)$ は $L^\infty(T^2)$ の closed subspace ではあるが, closed subalgebra ではない (Rudin)。$(H^\infty + C)(T^2)$ の multiplier algebra $\mathcal{M} \equiv \{f \in L^\infty(T^2) : f \cdot (H^\infty + C)(T^2) \subset (H^\infty + C)(T^2)\}$ を考える。

［定理1］ $\mathcal{M}$ は $L^\infty(T^2)$ の closed subalgebra であり,

$$\mathcal{M} = \{f \in H^\infty(T^2) : I_k(f) \text{ と } J_k(f) \in A(T) \ , \forall k \geq 0\}$$

ここで, $A(T)$ は disk algebra であり,

$$I_k(f)(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, e^{i\psi})\, e^{-ik\psi}\, d\psi/2\pi \quad , \text{ a.e. } e^{i\theta} \in T$$

$$J_k(f)(e^{i\psi}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}, e^{i\psi})\, e^{-ik\theta}\, d\theta/2\pi \quad , \text{ a.e. } e^{i\psi} \in T.$$

この定理を基本として, 以下のような諸結果を得る.

［定理2］

$A(T^2) \subset \mathcal{A} \subset H^\infty(T^2)$ なる closed subalgebra $\mathcal{A}$ に対し, 次の2条件は同値である:

i) $\mathcal{A} + C(T^2)$ は $L^\infty(T^2)$ の closed subalgebra である。

ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ かつ $\mathcal{A}$ は $*$-invariant, 即ち,
任意の $f \in \mathcal{A}$ を, 各 $n \geq 0$ に対して

$$f(e^{i\theta}, e^{i\psi}) = F_n(e^{i\theta}, e^{i\psi}) + e^{in(\theta+\psi)} G_n(e^{i\theta}, e^{i\psi})$$

$$F_n \ \& \ G_n \in H^\infty(T^2), \quad \hat{F}_n(i,j) = 0, \ \forall i, j \geq n$$

と表わしたとき, $G_n \in \mathcal{A}$ が満たされる。

［定理3］

$(H^\infty + C)(T^2)$ の $L^\infty(T^2)$ に関する Bourgain algebra

$(H^\infty + C)(T^2)_b \equiv \{ f \in L^\infty(T^2) : \| f f_n + (H^\infty + C)(T^2) \|_\infty \to 0$, for $\forall f_n \to 0$ weakly in $(H^\infty + C)(T^2) \}$ は $\mathcal{M}$ に一致する。

また, $(H^\infty + C)(T^2)_b$ の $L^\infty(T^2)$ に関する Bourgain algebra $(H^\infty + C)(T^2)_{bb}$ も $\mathcal{M}$ に一致する:

$$(H^\infty + C)(T^2)_b = (H^\infty + C)(T^2)_{bb} = \mathcal{M}.$$

定理3に関して, 既知の結果は次のようであった:

$H^\infty(T)_b = (H^\infty + C)(T)$ (Cima-Janson-Yale)

$(H^\infty + C)(T)_b = (H^\infty + C)(T)$ (Gorkin-Izuchi-Mortini)

$H^\infty(T^2)_b = H^\infty(T^2)$ (Izuchi).

35

A^∞ の peak interpolation set について

神保敏弥　　奈良教育大学
阪井章　　大阪府立大学

D を $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする．D の内部で正則で，$\mathbb{C}^n$ に C^k 関数として拡張される関数全体の集合を $A^k(D)$ で表す．∂D の閉部分集合 K に対して，K 上で $f=1$，$\overline{D}\setminus K$ 上で $|f|<1$ となる $f\in A^k(D)$ があるとき，K は $A^k(D)$ の peak set という．また任意の $g\in C^k(\mathbb{C}^n)$，$g\neq 0$，に対して K 上で $f=g$，$\overline{D}\setminus K$ 上で $|f|<\|g\|_K$ となる $f\in A^k(D)$ があるとき，K は $A^k(D)$ の peak interpolation set という（$\|\cdot\|$ は K 上の sup-norm）．

$k=0$ のときは，種々の領域（例えば，多重円板，滑らかな強擬凸領域，ある種の弱擬凸領域）について，peak set が peak interpolation set である．

$k>0$，$n=1$ のとき，円板 D に対して，peak set は有限集合である．$k>0$，$n>1$ のとき，滑らかな境界をもつ強擬凸領域に対して，実 $n-1$ 次元の peak manifold がある．他方 peak interpolation set は有限集合である．

ここでは，∂D が滑らかでないときに，Kが有限集合でない peak interpolation set である場合について述べる．次の仮定をおく．

$$\begin{cases} M,\ \Gamma \text{ は } C^\infty \text{ 実部分多様体で，} M \subset \Gamma \subset \partial D, \\ G \text{ は滑らかな境界をもつ領域で，} D \subset G, \\ \Gamma \subset \partial G \text{ とする} \\ M \text{ は } A^\infty(G) \text{ の peak set とする.} \end{cases}$$

この仮定のもとで，Mが$A^\infty(D)$の peak interpolation set ならば，

$$\dim_{\mathbb{R}} M \leqq n-1-\dim_{\mathbb{C}} T_p^c(\Gamma),\quad p \in M$$

（とくに，$\Gamma = G$のときは，$\dim_{\mathbb{R}} M = 0$）．

また，$D = D_1 \cap D_2$（D_1，D_2は$\mathbb{C}^2$の滑らかな領域）のときおよび，Dが$\mathbb{C}^n$の滑らかでない境界をもつ強擬凸領域の場合に，$\dim_{\mathbb{R}} M > 0$となる例について述べる．

36 On the family of holomorphic mappings into projective space with lacunary hypersurfaces (II)

足立幸信

Xを多様体，Mを相対コンパクトなXの領域，SをXの解析的集合とする。

Mが tautly imbd. mod S in X なら hypb. imbd. mod S in X であるが，逆はどうであろうか？という問題が Kiernan-Kobayashi (1973) によって提起された。$S=\phi$ なら正しいが (Kiernan, 1973) $S\neq\phi$ のときは全く結果がないようである。ここではその特別な場合をあつかう。

まずMの小林擬距離 d_M を下の方法により $\overline{M}$ に拡張する。$p, q\in\overline{M}$ に対し

$$d_M(p, q) = \varliminf_{\substack{p'\to p\\ q'\to q}} d_M(p', q') \quad p', q'\in M.$$

すると $0\leqq d_M(p,q)\leqq\infty$ で，三角不等式をみたす。

いま $S_M(X) := \{p\in\overline{M}\ ;\ {}^{\exists}q\in\overline{M}\setminus\{p\}$ s.t. $d_M(p,q)=0\}$ と定義し，d_Mの退化集合と呼ぶ。

Mが hypb. imbd. mod S in X なら $S\supset S_M(X)$

である。また$S_M(X)$は閉集合であり，更に order 1 の擬凹集合であることがわかっている。（[2]）

M が tautly imbd. mod S in X なら $S \supset S_M(X)$ で，もし S が curve なら $S_M(X)$ は ϕ か curve である。そこで次の定理がいえる。

<u>Th 1.</u> A は既約成分が2コ以上の $\mathbb{P}^2$ の curve，S も $\mathbb{P}^2$ の curve，$X = \mathbb{P}^2$，$M = \mathbb{P}^2 \setminus A$ とすると，

M が tautly imbd. mod S in X

$\Rightarrow M$ は tautly imbd. mod $S_M(X)$ in X.

更に A を既約成分が4コ以上の $\mathbb{P}^2$ の curve とするとき，M が hypb. imbd. mod $S_M(X)$ in X なら ある curve S があって M は tautly imbd. mod S in X ということがわかっているので（[1][3]）

Th 2. A を $\mathbb{P}^2$ の4コ以上の既約成分より成る curve とし，$X = \mathbb{P}^2$，$M = \mathbb{P}^2 \setminus A$ とする。このとき M が hypb. imbd. mod $S_M(X)$ in $X \Rightarrow M$ は tautly imbd. mod $S_M(X)$ in X.

[1] Y. Adachi - M. Suzuki, J. Math. Kyoto Univ. (1990)
[2] 〃, Proc. Symp. in Pure Math. vol 52 (1991)
[3] Y. Adachi, J. Math. Soc. Japan (1994)

37

Three dimensional hypersurface cusp singularities

渡 邊 公 夫　　筑波大学 数学系

Three dimensional quasi-Gorenstein purely elliptic singularities		
TYPE	Cohen-Macaulay	non Cohen-Macaulay
(0,2)	simple K3	simple Abelian
(0,1)	□	□
(0,0)	Gorenstein cusp	cusp

In the theory of normal two-dimensional singularities, simple elliptic singularities and cusp singularities are regarded as the most reasonable class of singularities after rational double points. They are characterized as two-dimensional purely elliptic singularities of (0,1)-type and of (0,0)-type, respectively. What are natural generalizations in higher dimensional case of cusp singularities. The nation of a Gorenstein cusp singularity is defined as a normal isolated Gorenstein purely elliptic singularity of (0,0)-type.

Here we are interested in a three dimensional hypersurface purely elliptic singularities of (0,0)-type, i.e., a three dimensional hypersurface (Gorenstein) cusp singularity.

Let $f \in \mathbf{C}[z_0, z_1, z_2, z_3]$ be a polynomial which is non-degenerate with respect to its Newton boundary $\Gamma(f)$ in the sense of Varchenko, and whose zero locus $X = \{f = 0\}$ in $\mathbf{C}^4$ has an isolated singularity at the origin $0 \in \mathbf{C}^4$. Then the condition for the singularity (X, x) to be a purely elliptic singularity of (0,0)-type is given by a property of the Newton boundary of $\Gamma(f)$ of f.

In this talk, we classify the principal parts of defining equations, which define three-dimensional hypersurface purely elliptic singularities of (0,0)-type.

No.	f
1	$x^{5+p} + y^{5+q} + z^{5+r} + w^{5+s} + xyzw$
2	$x^3 + y^4 + z^4 + w^{7+s} + xyzw$
3	$x^3 + y^3 + z^{6+r} + w^{6+s} + xyzw$
4	$x^3 + y^3 + z^4 + w^{12+s} + xyzw$
6	$x^2 + y^5 + z^5 + w^{10+s} + xyzw$
7	$x^2 + y^4 + z^{8+r} + w^{8+s} + xyzw$
8	$x^2 + y^4 + z^6 + w^{12+s} + xyzw$
9	$x^2 + y^4 + z^5 + w^{20+s} + xyzw$
10	$x^2 + y^3 + z^{12+r} + w^{12+s} + xyzw$
11	$x^2 + y^3 + z^{10} + w^{15+s} + xyzw$
12	$x^2 + y^3 + z^9 + w^{18+s} + xyzw$
13	$x^2 + y^3 + z^8 + w^{24+s} + xyzw$
14	$x^2 + y^3 + z^7 + w^{43+s} + xyzw$
16	$x^3 + y^3w + z^4 + w^{8+s} + xyzw$
17	$x^3 + y^3 + z^5 + w^{8+s} + xyzw$
18	$x^3 + y^3 + z^4w + w^{9+s} + xyzw$
19	$x^2w + y^4 + yz^3 + w^{8+s} + xyzw$
20	$x^2z + y^3 + z^4 + w^{24+s} + xyzw$
21	$x^2y + y^{5+q} + z^{5+r} + w^{5+s} + xyzw$
22	$x^2z + y^3 + xz^3 + w^{15+s} + xyzw$
23	$x^2z + y^4 + z^{6+r} + w^{6+s} + xyzw$
24	$x^2z + y^3 + z^6 + w^{12+s} + xyzw$
25	$x^2 + y^4 + z^{8+r} + w^{8+s} + xyzw$
26	$x^2w + y^4 + z^5 + w^{10+s} + xyzw$
27	$x^2w + y^3 + z^8 + w^{13+s} + xyzw$
28	$x^2w + y^3 + z^7 + w^{22+s} + xyzw$
29	$x^2 + y^5 + z^6 + yw^{7+s} + xyzw$
30	$x^2 + y^5 + z^5w + w^8 + xyzw$
31	$x^2 + y^4z + z^6 + w^{9+s} + xyzw$
32	$x^2 + y^4z + y^4w + z^7 + w^{8+s} + xyzw$

38

C^*-作用をもつ擬単純楕円型特異点について

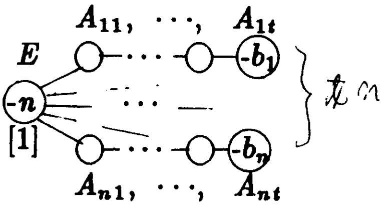
都丸 正　　群馬大学
医療技術短大部

(X, x) を2次元正規特異点とし、$\pi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (X, x)$ をその最小良特異点解消とするとき、A 上の正サイクルでその算術種数が1であるようなものの内で最小なものが一意に存在する。これを最小楕円型サイクルという。以後、これを E で示す。また A 上の正サイクルで、$\tilde{X}$ 上の標準サイクルと算術的に同値なものを標準サイクルといい K で示す。K が整係数サイクルとなるとき、その特異点を Numerically Gorenstein という。以上の仮定のもとで、(X, x) が楕円型で、E が非特異な楕円曲線1本であるとき、(X, x) を擬単純楕円型特異点という (S.S.T. Yau [5])。

一般に、2次元正規特異点が C^*-作用をもつとき、その特異点解消の例外集合 E の双対グラフは星型になる。以下、例外集合が星型グラフを持つような特異点について、次のような結果が得られる。

定理 1. $\pi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (X, x)$ を、楕円型特異点の最小良解消とするとき、A は星型とする。

(1) (X, x) が Numerically Gorenstein である必要十分条件は A の双対グラフが次のようになることである。



ただし $b_1, \cdots, b_n \geqq 2, -E^2 =$ 枝の数 $(= n)$、また全ての枝の長さは同じ $(= t)$ ただし、ここで ○ = ⊖2 としている。

（２）(X,x) が $\mathbf{C}^*$-作用を持つとし、かつ (X,x) は単純楕円型特異点でないとする。このとき、(X,x) が最大楕円型特異点であるための必要十分条件は $R \sim \sum_{i=1}^{n} P_i$（$E$ 上 linearly equivalent）、ただし $\mathcal{O}(R)$ は　E の $\tilde{X}$ における conormal sheaf で $P_i = E \cap A_{i,1}$（$i = 1, \cdots, n$）。

（３）(X,x) が $\mathbf{C}^*$-作用を持ち、かつ (X,x) は単純楕円型特異点でない最大楕円型特異点であるとき、(X,x) の埋め込み次元は次で与えられる。$\max(3, -Z^2)$, このとき $-Z^2 = \sum_{i=1}^{n}(b_i - 1)$.

このらの特異点の具体例は多く存在します。

References

[1]. H. Pinkham, Normal surface singularities with $\mathbf{C}^*$ -action. Math. Ann., 227 (1977), 183-193.

[2]. T. Tomaru, Cyclic quotients of 2-dimensional quasi-homogeneous hypersurface singularities, Math. Z., 210, (1992), 225-244.

[3]. T. Tomaru, On numerically Gorenstein quasi-simple elliptic singularities with $\mathbf{C}^*$-action, Proc. A.M.S.,120 (1) 1994, 67-71.

[4]. K-i. Watanabe, Some remarks concerning Demazure's constructions of normal graded rings, Nagoya J. Math., 83 (1981), 203-211.

[5]. S.S.-T. Yau, Normal 2-dimensional elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., 254 (1979), 117-134.

39

A characterization of generalized complex ellipsoids

児玉 秋雄　　金沢大学 理学部

I would like to announce the following characterization of generalized complex ellipsoid

$$(*)\qquad E(n;n_1,\dots,n_s;p_1,\dots,p_s)$$
$$=\{(z_1,\dots,z_s)\in \mathbf{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{C}^{n_s}\ ;\ \sum_{i=1}^{s}\|z_i\|^{2p_i}<1\}$$

in $\mathbf{C}^n=\mathbf{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{C}^{n_s}$, where $p_i, n_i\in\mathbf{N}$ and $n=n_1+\cdots+n_s$:

Theorem. Let D be a bounded domain in $\mathbf{C}^n$ and E a generalized complex ellipsoid in $\mathbf{C}^n$ as in $(*)$. Let $x\in\partial D$. Assume that:

(1) $x\in\partial E$ and there exists an open n.b.d. Q of x in $\mathbf{C}^n$ such that $D\cap Q = E\cap Q$; and

(2) there exist a point $b\in D$ and a sequence $\{\varphi_\nu\}\subset \mathrm{Aut}(D)$ such that $\varphi_\nu(b)\longrightarrow x$ as $\nu\to\infty$.

Then we have $D=E$ as sets. In particular, at least one of the p_i's must be equal to 1.

This gives an affirmative answer to Problem 1 in [A. Kodama; 数理研講究録 819 (1993), 56-65] in the case where ∂D near x is C^{ω}-smooth. As an immediate consequence of our theorem, we now obtain the following:

Corollary. For arbitrary integers $p_i \geq 2$, any bounded domain D in $\mathbf{C}^n$ with a point $x \in \partial D \cap \partial E(n; n_1, \ldots, n_s; p_1, \ldots, p_s)$ near which ∂D coincides with $\partial E(n; n_1, \ldots, n_s; p_1, \ldots, p_s)$ cannot have any Aut(D)-orbits accumulating at x.

Finally, it should be remarked that, in the joint paper with S. Krantz, D. Ma [Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 173-195], we have already obtained the result as above under the stronger assumption that E also admits a point $\tilde{b} \in E$ and a sequence $\{\tilde{\varphi}_\nu\} \subset \mathrm{Aut}(E)$ such that $\tilde{\varphi}_\nu(\tilde{b}) \longrightarrow x$.

Our proof of the Theorem is based on the scaling technique developed in our previous papers and a recent result on localization principle of holomorphic automorphisms of complex ellipsoids due to G. Dini and A. Selvaggi Primicerio [preprint, 1993, Firenze].

40 有限次元ベクトル空間をなす関数系の1性質とその応用

寺田俊明　　滋賀医科大学

ここでは，　$T=\partial_1^{d_1}\partial_2^{d_2}\cdots\partial_n^{d_n}$　$\left(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$
の形のもののみを"作用素"と呼ぶことにする。

定義. 作用素の列 $T_0, T_1, \cdots, T_m$ が，
$T_0 = id.$，　$1 \leq k \leq m$ のとき $^\exists k_p, k_q$ $(1 \leq k_p \leq n,$
$0 \leq k_q \leq k-1)$ が存在して，$T_k = \partial_{k_p} T_{k_q}$
を満たすとき，stepwise という。

補題 $0 \in \mathbb{C}^n$ での有理型関数の芽で生成される，$\mathbb{C}$上
$m+1$ 次元ベクトル空間 L に対して，L の base
$f_0, f_1, \cdots, f_m$ と stepwise な作用素列 $T_0, T_1, \cdots, T_m$
が存在して，

$$\begin{vmatrix} T_0 f_0 & T_0 f_1 & \cdots & T_0 f_m \\ T_1 f_0 & T_1 f_1 & \cdots & T_1 f_m \\ - & - & - & - \\ T_m f_0 & T_m f_1 & \cdots & T_m f_m \end{vmatrix} \neq 0$$

を満たす。

系. $m = n+1$ のとき，L の任意の元 f は ある 1階

線形の偏微分方程式を満たす.

以上の応用として，次の定理が証明できる.

定理. Lauricella の超幾何関数 F_D より生じる Riemann 問題に付随する Wronskian は，その定義域で0をとらない

特別講演

Twisted (co)homology 群の交点理論と超幾何関数

九大 数理　松本 圭司

0. 序

教養の微積分で習った広義 Riemann 積分のところで例として現れた Gamma 関数や Beta 関数を覚えていますか。以下のような積分

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\frac{dt}{t},\quad B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta\frac{dt}{t(1-t)}$$

$(\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)>0)$ で定義され

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},\quad B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

などの関数等式がよく知られています。これらの関数等式により Gamma 関数、 Beta 関数はそれぞれ $\mathbf{C}$、$\mathbf{C}^2$ 上の有理型関数に解析接続できることがわかるだけでなく、 Beta 関数に関する公式

(1)
$$B(\alpha,\beta)B(-\alpha,-\beta)=\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{1-e[\alpha+\beta]}{(1-e[\alpha])(1-e[\beta])}\right)$$

を導くこともできます。ここで $e[\alpha]=\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha)$ です。

みてのとうり Beta 関数 $B(\alpha,\beta)$ は、多価関数 $t^\alpha(1-t)^\beta$ と 1-form $dt/(t(1-t))$ との積を区間 $(0,1)$ 上積分したものです。このようなものを扱うには以下に述べる twisted (co)homology 群が強力な武器となります。多価関数 u と C^∞ 級 form φ との積を外微分してみると

$$d(u\varphi)=ud(\varphi)+d(u)\wedge\varphi=u(d+d\log(u)\wedge)\varphi$$

を得ます。もし $\omega=d\log(u)$ が一価な 1-form なら外微分 d を少しねじった作用素 $\nabla_\omega=d+\omega\wedge$ を用いて form φ に関する作用にだけ注目することにより、多価関数 u を表に出さずに de Rham cohomology

群のようなものを考えることができます。これが u に関する twisted cohomology 群です。

一方 cohomology を考えるとき忘れていた多価関数 u を homology の方に組み込みます。つまり chain としては topological な chain c とその上での多価関数 u の分枝との組 (c, u) で定め、boundary operator ∂_ω としては topological な boundary と多価関数 u の分枝をその上の制限したものの組を対応させるもの、すなわち

$$\partial_\omega(c, u) = (\partial c, u|_{\partial c})$$

で定めます。この chains と ∂_ω で homology を考えたものが多価関数 u に関する twisted homology 群です。

Beta 関数を以下のように考えます。まず $t^\alpha(1-t)^\beta$ を u とみなします。その対数微分

$$\omega = d\log(u) = \frac{\alpha dt}{t} + \frac{\beta dt}{t-1}$$

は $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ 上で一価正則な 1-form であるので $\nabla_\omega = d + \omega\wedge$ を d のかわりに用いて twisted cohomogy を構成します。twisted homology の方は、topological な chain とその上の多価関数 $t^\alpha(1-t)^\beta$ の分枝との組で chain を定め上記の boundary operator ∂_ω とで構成します。多価関数 $t^\alpha(1-t)^\beta$ に関する twisted cohomology 群の元 $dt/(t(1-t))$ と twisted homology 群の元 $((0,1), t^\alpha(1-t)^\beta)$, $(\arg(t) = \arg(1-t) = 0)$ との pairing として Beta 関数 $B(\alpha, \beta)$ が定義されていると考えるのです。同様に $B(-\alpha, -\beta)$ を $t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}$ に関する twisted cohomology 群の元 $dt/(t(1-t))$ と twisted homology 群の元 $((0,1), t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta})$, $(\arg(t) = \arg(1-t) = 0)$ との pairing とみなします。なぜ Beta 関数をわざわざこんなむずかしい見方をするのか、なにかいいことがあるのか、と思われるでしょう。この疑問

に対する答えの一つを等式 (1) を用いて説明しましょう。等式 (1) の右辺にある二つの因数が実は twisted (co)homolgy 群の交点数となっているのです。すなわち前者が form $dt/(t(1-t))$ の自己交点数で、後者が chains $\{(0,1), t^{\alpha}(1-t)^{\beta}\}$ と $\{(0,1), t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\}$ との交点数なのです。このことからこの等式は twisted (co)homology 群間にある三つの自然な pairings (i) 積分　(ii) twisted cohomology 群間の交点　(iii) twisted homology 群間の交点　を結びつける Riemann's relation とみなせるのです。この原理に気が付けば多価関数 $u(t)$ として

$$u(t) = \prod_{j=0}^{n} (t - z_j)^{\alpha_j}$$

とすることにより超幾何関数の公式を容易に見つけだせるのです。以下の章でそのことを説明します。

1. 線形代数からの準備

V と W を n- 次 vector 空間とし V^* と W^* をそれぞれ V と W の双対空間とします。たまたま V と W^* とに非退化な pairing [,] があったとすると、それにより V から W へのおよび W^* から V^* への同型写像と W と V^* との pairing [,] が引き起こされます。四つの vector 空間の基底を

$$e^1, \ldots, e^n \in V, \quad e_1, \ldots, e_n \in V^*,$$
$$f^1, \ldots, f^n \in W, \quad f_1, \ldots, f_n \in W^*,$$

でとり、これらの基底に対して四つの $n \times n$ 行列

$$\Omega_{VV^*} = \left(\langle e^i, e_j \rangle\right)_{ij}, \quad \Omega_{WW^*} = \left(\langle f^i, f_j \rangle\right)_{ij},$$
$$\Omega_{VW^*} = \left([e^i, f_j]\right)_{ij}, \quad \Omega_{WV^*} = \left([f^i, e_j]\right)_{ij},$$

を作ります。ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は dual pairing を表します。ここまでの状

況を次の diagram で表しておきます。

$$\begin{array}{ccccccc}
V \ni \{e^1,\dots,e^n\} & \leftarrow & \overset{\Omega_{VW^*}}{[\ ,\ ]} & \rightarrow & \{f_1,\dots,f_n\} \in W^* \\
\uparrow & \nwarrow & & \nearrow & \uparrow \\
\Omega_{VV^*}\ \langle\ ,\ \rangle & & \text{isom.} & & \langle\ ,\ \rangle\ \Omega_{WW^*} \\
\downarrow & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\
V^* \ni \{e_1,\dots,e_n\} & \leftarrow & \underset{\Omega_{WV^*}}{[\ ,\ ]} & \rightarrow & \{f^1,\dots,f^n\} \in W
\end{array}$$

四つの行列 $\Omega_{VV^*}, \Omega_{VW^*}, \Omega_{WV^*}, \Omega_{WW^*}$ の間には以下の関係式があります。

Lemma 1.

$$\Omega_{WW^*}\Omega_{VW^*}^{-1} = \Omega_{WV^*}\Omega_{VV^*}^{-1}.$$

この Lemma を 種数 g の Riemann 面 X の (co)homology 群に用いると Riemann の周期関係式が得られます。実際 $V = V^* = H^1(X, \mathbf{Z})$ および $W = W^* = H_1(X, \mathbf{Z})$ として dual pairing は交点数で与えられているとし、積分が $H^1(X, \mathbf{Z})$ と $H_1(X, \mathbf{Z})$ との pairing であるとみなします。$\eta_1, \dots, \eta_g$ を X 上の一次独立な正則 1-forms とすると $\eta_1, \dots, \eta_g, \overline{\eta_1}, \dots, \overline{\eta_g}$ で $H^1(X, \mathbf{Z})$ の基底がとれます。$H_1(X, \mathbf{Z})$ の symplectic な基底を $\gamma_1, \dots, g_{2g}$ をとれば、おなじみの Riemann 関係式が得られます。

2. Twisted cohomology 群

t に関する多価関数

$$u(t) = \prod_{j=0}^{n+1} (t - z_j)^{\alpha_j}$$

に対して対数微分すると

$$\omega = d\log(u(t)) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\alpha_j dt}{t - z_j}$$

は、$M(z) = \mathbf{P}^1 - \{z_0, \dots, z_{n+1}\}$ 上の正則 1-form です。$\nabla_\omega = d + \omega\wedge$ による $M(z) = \mathbf{P}^1 - \{z_0, \dots, z_{n+1}\}$ 上の twisted cohomology 群 $H^p(M(z), \nabla_\omega)$ は、$p \neq 1$ のときは 0 となり $H^1(M(z), \nabla_\omega)$ は、n 次元であることが [KN] により知られています。$\{z_0, \dots, z_{n+1}\}$ に一位の極をもつことを許された $\mathbf{P}^1$ 上の meromorphic 1-forms

$$\varphi_j = \frac{dt}{t - z_j} - \frac{dt}{t - z_{j-1}}, \quad (1 \leq j \leq n)$$

の $H^1(M(z), \nabla_\omega)$ への projection φ_j^+ たちで、この群の基底を与えることができます。

t に関する多価関数

$$1/u(t) = \prod_{j=0}^{n+1} (t - z_j)^{-\alpha_j}$$

を用いて同様の議論をすれば、parameter $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1})$ の符号がすべてかわったものである $H^1(M(z), \nabla_{-\omega})$ が得られます。φ の $H^1(M(z), \nabla_{-\omega})$ への projection φ_j^- たちで、この群の基底を与えることができます。この空間は、intersection により $H^1(M(z), \nabla_\omega)$ の双対空間となっています。φ_j^+ と φ_j^- との交点は、以下のようになります。

Theorem 2.

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_j^+, \varphi_j^- \rangle = 2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{\alpha_j} + \frac{1}{\alpha_{j-1}}\right), \\
(2) \qquad &\langle \varphi_j^+, \varphi_{j+1}^- \rangle = \langle \varphi_{j+1}^+, \varphi_j^- \rangle = -2\pi\sqrt{-1}\frac{1}{\alpha_j}, \\
&\langle \varphi_j^+, \varphi_k^- \rangle = 0 \quad \text{if } |j - k| \geq 2.
\end{aligned}$$

Twisted cohomology 群の交点に関しては [CM] を参照してください。

3. Twisted homology 群

多価関数 $u(t)=\prod_{j=0}^{n+1}(t-z_j)^{\alpha_j}$ に関する twisted homology 群 $H_p(M(z),\partial_\omega)$ は、$p\neq 1$ のときは 0 となり $H_1(M(z),\partial_\omega)$ は、n 次元であることが [KN] により知られています。$H_1(M(z),\partial_\omega)$ の基底は以下のように取れます。まず $M(z)$ 内の点 t_0 をとり、そこでの各 $t-z_j$ の argument を定めます。t_0 を基点として点 z_j $(0\leq j\leq n+1)$ のみを正の向きにまわってくる roop を ρ_j とします。$(\rho_j,u(t))$ を ρ_j と $u(t)$ の ρ_j にそった解析接続との組とします。この chains を用いて

$$\gamma_j^+=\frac{1}{1-e[\alpha_j]}(\rho_j,u(t))-\frac{1}{1-e[\alpha_{j-1}]}(\rho_{j-1},u(t)),\quad 1\leq j\leq n$$

としたもので $H_1(M(z),\partial_\omega)$ の基底はとれます。もちろん $\partial_\omega\gamma_j^+=0$ となっています。

t に関する多価関数

$$1/u(t)=\prod_{j=0}^{n+1}(t-z_j)^{-\alpha_j}$$

を用いて同様の議論をすれば、parameter $\alpha=(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1})$ の符号がすべてかわったものである $H_1(M(z),\partial_{-\omega})$ が得られます。$H_1(M(z),\partial_{-\omega})$ の基底 γ_j^- $(1\leq j\leq n)$ を γ_j^+ のときと同様に定めます。この空間は、intersection により $H_1(M(z),\partial_\omega)$ の双対空間となっています。交点数は以下のように定められています。まず、$H_1(M(z),\partial_\omega)$ の元と $H_1(M(z),\partial_{-\omega})$ の元とを表す chains $(\rho,u(t))$, $(\rho',1/u(t))$ をとります。ρ,ρ' の各交点において topological な交点数とその点における $u(t),1/u(t)$ の分枝の値の積を計算し、それらのすべての和で定義されます。[KY] において γ_j^+ と γ_j^- の交点数が計算されています。

Theorem 3.

$$\begin{aligned}
\langle\gamma_j^+,\gamma_j^-\rangle &= \frac{1-e[\alpha_{j-1}+\alpha_j]}{(1-e[\alpha_{j-1}])(1-e[\alpha_j])},\\
\langle\gamma_j^+,\gamma_{j+1}^-\rangle &= \frac{-1}{1-e[\alpha_j]}\\
\langle\gamma_{j+1}^+,\gamma_j^-\rangle &= \frac{-e[\alpha_j]}{1-e[\alpha_j]},\\
\langle\gamma_j^+,\gamma_k^-\rangle &= 0 \quad \text{if } |j-k|\geq 2.
\end{aligned} \tag{3}$$

4. Twisted Riemann's 周期関係式

$H^1(M(z),\nabla_\omega)$ と $H_1(M(z),\partial_\omega)$ との pairing [,] は、以下の twisted 積分で定めます。$H^1(M(z),\nabla_\omega)$ の元 φ^+ が $M(z)$ 上の 1-form φ で表され、$H_1(M(z),\partial_\omega)$ の元 γ^+ が $\sum_\nu(\rho_\nu,u(t))$ で表されているとして

$$[\varphi^+,\gamma^+]=\int_{\gamma^+}\varphi^+=\sum_\nu\int_{\rho_\nu}u(t)\varphi$$

で定めます。$H^1(M(z),\nabla_{-\omega})$ と $H_1(M(z),\partial_{-\omega})$ との間にも同様に pairing が定まります。これらの pairings が compatible になっていることについては、[CM] を参照してください。$V=H^1(M(z),\nabla_\omega)$, $V^*=H^1(M(z),\nabla_{-\omega})$, $W^*=H_1(M(z),\partial_\omega)$, $W=H_1(M(z),\partial_{-\omega})$ とおき、

$$\xi_j^+\in V,\ \eta_j^-\in V^*,\ \delta_j^+\in\Omega^*,\ \varepsilon_j^-\in W\quad(1\leq j\leq n)$$

をこれらの空間の任意の基底として、twisted (co)homology の交点からできる交点行列

$$I_{ch}=\left(\langle\xi_i^+,\eta_j^-\rangle\right)_{ij},\quad I_h=\left(\langle\delta_i^+,\varepsilon_j^-\rangle\right)_{ij}$$

および twisted 積分でできる周期行列

$$P^+=\left([\xi_i^+,\delta_j^+]\right)_{ij},\quad P^-=\left([\eta_i^-,\varepsilon_j^-]\right)_{ij}$$

に対して Lemma 1 を適応すると以下の結果を得ます。

Theorem 4. (Twisted Riemann 周期関係式)

$$P^{+}\,{}^{t}I_{h}^{-1}\,{}^{t}P^{-} = I_{ch}, \tag{4}$$

または、

$$ {}^{t}P^{-}\ I_{h}^{-1}P^{+} = {}^{t}I_{h}. \tag{4'}$$

特に、Section 2, 3 で与えた基底 $\varphi_j^{\pm}$, $\gamma_j^{\pm}$ に関しては、I_{ch}, I_h が (2),(3) で具体的にわかっていることに注意してください。$n=1$ とすればこれはまさしく (1) の式となるのです。

5. 超幾何関数への応用

周期行列 P^{+} (または P^{-}) の各列 vector の成分は、基本的には $n-1$ 変数のある parameter (α,β,γ) の超幾何級数 Lauricella's $F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)$

$$= \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu_1+\cdots+\nu_{n-1}}(\beta_1)_{\nu_1}\cdots(\beta_{n-1})_{\nu_{n-1}}}{(\gamma)_{\nu_1+\cdots+\nu_{n-1}}(1)_{\nu_1}\cdots(1)_{\nu_{n-1}}} z_1^{\nu_1}\cdots z_{n-1}^{\nu_{n-1}},$$

$z=(z_1,\ldots,z_{n-1})$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, $(\alpha)_\nu=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)$

がみたす微分方程式の解の基底となっていて、各列ごとの違いは parameter (α,β,γ) が整数ずれているだけです。もちろん $n=1$ なら Beta 関数、$n=2$ なら Gauss の超幾何関数に関するものとなります。公式 (4') の $(1,1)$ 成分に注目するだけで、$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)$ がみたす二次関係式

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)F_D(1-\alpha,-\beta,1-\gamma;z)-1$$

$$= \frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma-1)} \sum_{j=1}^{m} \beta_j z_j F_D(\alpha, \beta+e_j, \gamma+1; z) F_D(1-\alpha, e_j-\beta, 2-\gamma; z),$$

$$e_j = (\ldots, 0, \overset{j-\mathrm{th}}{1}, 0, \ldots)$$

を簡単に導くことができます。

多価関数 u として k 変数 $t=(t_1,\ldots,t_k)$ の一次式のべきの $n+2$ 個の積

$$U_{k,n}(t) = \prod_{j=0}^{n+1} \left(1 + \Sigma_{i=1}^{k} t_i z_{ij}\right)^{\alpha_j}$$

としたものについても上記の理論が [Cho] で完成されています。[KI1],[KI2],[Ter] により、この場合の Twisted Riemann 周期関係式は (4)(または (4')) の k 次の外積をとったもので得られることも知られています。さらに Twisted Riemann 周期関係式と上記の外積構造に注目して、$U_{k,n}(t)$ と $U_{n-k,n}(t)$ から生じる超幾何関数間の公式が [KM] で求められています。また、この場合の超幾何級数 ([Kit]) がみたす二次関係式への応用は、[Mat] を参照してください。これらの結果の高次元代数多様体の周期の研究への多くの応用が考えられます。

多価関数 u として exponential factor を持っているものをとると [KHT] で研究されている合流型超幾何関数があらわれます。この場合も含めて、q-analogue、有限体上の超幾何関数 ([Koi]) についてのこの理論の完成が期待されています。

References.

[CM] K. Cho and K. Matsumoto, Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations I, (preprint) 1994

[Cho] K. Cho, Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relations III– On P^n, (preprint) 1994

[**KHT**] H. Kimura, Y. Haraoka and K. Takano, The generalized confluent hypergeometric functions, Proc. Japan Acad. **68** (1992) 290–295

[**KI1**] M. Kita and K. Iwasaki, Exterior power structure of the twisted de Rham cohomology associated to arrangements of hyperplanes in general position, (preprint) 1993

[**KI2**] M. Kita and K. Iwasaki, Twisted homology and cohomology of the configuration space of n-points with application to hypergeometric functions, (preprint) 1993

[**KM**] M. Kita and K. Matsumoto, Duality in hypergeometric functions and invariant Gauss-Manin systems (preprint) 1994

[**KN**] M. Kita and M. Noumi, On the structure of cohomology groups attached to integrals of certain many valued analytic functions, Japan. J.Math. **9** (1983) 113–157

[**KY**] M. Kita and M. Yoshida, Intersection theory for twisted cycles I, II, to appear in Math. Nachrichten, 1994

[**Kit**] M. Kita, On the hypergeometric functions in several variables I— New integral representations of Euler type, Japanese J. of Math. **18** (1992) 25–74

[**Koi**] M. Koike, Hypergeometric series over finite fields and Apéry numbers Hiroshima Math. J. **22** (1992) 461–467

[**Mat**] K. Matsumoto, Quadratic identities for hypergeometric series of type (k, l), (preprint) 1994

[**Ter**] T. Terasoma, Exponential Kummer coverings and determinants of hypergeometric funtions (preprint), 1993

[**Wak**] M. Wakayama (ed.), 現象としての双対性, 実験工房 「双対性」 (1993)