日 本 数 学 会

１ ９ ９ ４年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

１ ９ ９ ４年3月～4月

於 神 戸 大 学

第V会場　函　数　論

3月31日

9:00 ~ 12:00

1	西本勝之	(日大工)*	Inverse of Nishimoto's integral transformation, inverse of Goursat's transformation and that of Cauchy's one (A serendipity in fractional calculus)	15
2	邊斗源 斎藤三郎	(ソウル大)* (群馬大工)	A real inversion formula for the Laplace transform	15
3	水本久夫 原平八郎	(川崎医療福祉大)* (島根大理)	Maximum principles for finite element solutions on a Riemann surface	15
4	関根忠行 尾和重義	(日大薬) (近畿大理工)	星型, 凸型関数の係数不等式	15
5	尾和重義	(近畿大理工)	Sufficient conditions for close-to-convexity	15
6	戸田暢茂	(名工大)	A note on the number of asymptotic points of holomorphic curves	15
7	米谷文男	(京都工繊大工芸)	単葉型 Painlevé の定理について	10
8	中路貴彦	(北大理)	Outer 関数の分解と H^p の極値問題	15
9	吉田英信	(千葉大理)	境界で 0 になる錐 (コーン) 上の調和関数	15
10	相川弘明	(熊本大理)	Quasiadditivity and measure property of capacity	15
11	樋口功	(愛知工大)	On the behavior of potentials at the point at infinity for regular function kernels	15

13:30 ~ 15:00

12	渡辺ヒサ子	(お茶の水女大理)*	フラクタルな境界を持つ領域における2重層ポテンシャル	15
13	二宮信幸		ポテンシャル論における最小変分の方法	15
14	大津賀信		与えられた集合に交わる曲面族の極値的長さについて	15
15	大津賀信		極値的長さに関する Chinak の結果の拡張	15
16	須川敏幸	(京大理)	Schottky 型 Fuchs 群の Teichmüller 空間について	15
17	志賀啓成 谷川晴美	(東工大理) (名大理)	不連続な monodromy 群を持つ Riemann 面上の projective structures について	15

15:20 ~ 16:20　特別講演

松崎克彦	(東工大理)*	無限生成双曲的離散群の剛性定理	(15:20 ~ 16:20)

4月1日

9:00 ~ 12:00

18	笹山浩良	(笹山研)	On the supra-Frechet differentiability and generalized R. Fueter's regularity of composite functions in associative hypercomplex n-tuple spaces	10
19	田辺正晴	(東工大理)	Severi, de Franchis の定理について	15
20	山口博史	(滋賀大教育)	磁場に関する新直交分解公式とその応用	15
21	加藤満生	(琉球大教育)	Appell F_4 の昇降演算子	15
22	石村隆一 岡田純一	(千葉大教養) (千葉大理)	調和函数及び整函数に対する河合の条件 (S) と正則増大性との同値性について	15
23	上田哲生	(京大総合人間)	吸引不動点の標準形について	15
24	西野利雄	(九大工)	星型擬凹状集合について	15
25	鈴木誠	(広島大理)	関数体上の Mordell 予想のある高次元版: 非コンパクト双曲的ファイバー空間の場合	15
26	大沢健夫 K. Diederich	(名大理) (Wuppertal 大)	Bergman 核の安定性について	15

27	大 沢 健 夫 (名 大 理) K. Diederich (Wuppertal 大)	Bergman 計量による強擬凸領域の特徴付け	5
28	大 沢 健 夫 (名 大 理) K. Diederich (Wuppertal 大)	Bergman 距離の評価について	5
29	大 沢 健 夫 (名 大 理)	対数容量と Bergman 核	5
30	大 沢 健 夫 (名 大 理)	L^2 正則関数の拡張について, III, IV	15

13:30 ~ 14:30 特 別 講 演

竹 腰 見 昭 (阪 大 教 養)	コンパクトケーラー空間の複素解析族上のコホモロジーの調和形式による表現定理	(13:30 ~ 14:30)

特別講演

コンパクトケーラー空間の複素解析族上のコホモロジーの調和形式による表現定理

竹腰見昭　大阪大学・教養

1. $f:X\to Y$を解析空間(以下、常に解析空間は被約とする)の間の全射な固有正則写像とし、Xは非特異とする. ω_XをX上のエルミート計量とし、更に(E,h)をエルミート計量hをもつX上の正則ベクトル束とする. この講演では$(S,\Psi)\subset Y$を滑らかな汲み尽くし強擬凸関数Ψをもつスタイン開集合とするとき、ある条件の下でコホモロジー群 $H^q(X(S),\Omega_X^p(E))$ $(X(S):=f^{-1}(S))$ のω_Xとhに関する調和形式の空間による$\mathcal{O}(S)$-加群としての表現定理を報告する([9]).
この状況下で次の定理が成立する.

定理 A　上述の$f:X\to Y$にたいしてω_Xはケーラー計量であり、(E,h)は中野の意味で半正の曲率をもつと仮定する(§2、定義). $\Phi:=f^*\Psi$とおく. このときE-値(n,q)型の調和形式の空間$(n=\dim_{\mathbb{C}}X,\ q\geq 1)$

$$H^{n,q}(X(S),E,\Phi):=\{\ u\ ;\ \bar\partial u=\bar\partial_h^* u=0 \text{ and } \partial\Phi\wedge * u=0 \quad \text{on } X(S)\ \}$$

は$\mathcal{O}(S)$-加群となり、自然な$\mathcal{O}(S)$-準同型

$$H^{n,q}(X(S),E,\Phi)\ni u\ \to [u]\in H^q(X(S),\Omega_X^n(E))$$

は同型対応を与える. 更にこの同型対応により、ω_Xに関するホッジ星型作用素$*$は$\mathcal{O}(S)$-準同型

$$L^q:\ \Gamma(X(S),\Omega_X^{n-q}(E))\ni\sigma\ \to [\omega_X^q\wedge\sigma]\in H^q(X(S),\Omega_X^n(E))$$

にたいして分解準同型

$$\delta^q:\ H^q(X(S),\Omega_X(E))\ \to\ \Gamma(X(S),\Omega_X^{n-q}(E))\ ,\ \ L^q\circ\delta^q=\mathrm{id}$$

を与える.

定理 Aは(X,ω_X)がコンパクトケーラー多様体の場合、表現定理は小平のそれ

であり、後半の主張は半正なベクトル束にたいする強リフシッツ定理として榎、[2]、により知られていた．したがって上述の定理はそれらの性質のコンパクトケーラー空間の複素解析族における"安定性"を主張している（この点に関しては§2でより詳しく述べる．定理2.1及び[9]参照）．この定理の帰結として次の定理を得る．

定理 B 定理 Aの$f:X\to Y$とEにたいして、層の準同型 $\mathcal{L}^q: R^0 f_*\Omega_X^{n-q}(E)\to R^q f_*\Omega_X^n(E)$ は分解射 $\delta^q: R^q f_*\Omega_X^n(E)\to R^0 f_*\Omega_X^{n-q}(E)$、$\mathcal{L}^q\circ\delta^q=\mathrm{id}$ をもつ．特に $R^q f_*\Omega_X^n(E)$ は捩れをもたない（$n=\dim_{\mathbb{C}}X$、$q\geq 1$）．

定理 BはEが自明なベクトル束であるとき斉藤、[6]、によりケーラー射にたいするホッジ加群の理論をもちいてしめされていた．定理 Aからはその他、コホモロジー群の単射定理(§2、定理2.2)、消滅定理などが導かれ、定理 Bも$f:X\to Y$が固有なケーラー射とEが半正な曲率をもつベクトル束とそれぞれ双有理同値でありさえすれば成立することがわかる．なお、X上にケーラー計量が存在しないとき定理Bは一般に成立しないことが知られている．

2. この節では定理 Aについて、特に$f:X\to Y$の繊維上のコホモロジーの"安定性"に的をしぼって更に詳しく解説する．

$f:X\to S$を解析空間の間の固有正則写像とし、Xは非特異で$\dim_{\mathbb{C}}X=n$、$\dim_{\mathbb{C}}S=m$とする．以下Sはl次元複素ベクトル空間$(\mathbb{C}^l,(t^1,\ldots,t^l))$の原点中心の開球の中の原点を含む解析集合とし、$X$の各連結成分は$S$上に写されているとする．更に$\Psi:=\sum_{j=1}^{l}|t^j|^2$、$\Phi=f^*\Psi$ と定義し、$S_c=\{\Psi<c\}$、$X(S_c)=f^{-1}(S_c)$（$c>0$）と記す．便宜上ここでは十分小さい$c>0$のみを考える．

定義 X上の正則ベクトル束(E,h)のhに関する曲率形式$\Theta_h:=\bar{\partial}(h^{-1}\partial h)$が$X$の各点でベクトル束$E\otimes TX$（$TX$は$X$の正則接ベクトル束）上の二次形式として半正値(半負値)であるとき、(E,h)は中野の意味で半正(半負)であるという．

直線束のときは中野の意味での半正(半負)は小平のそれと一致する．
先の定理 Aはより詳しく次のように述べることができる．

定理 2.1.　$f:X\to S$にたいして、Xはケーラー計量ω_Xをもち、(E,h)は中野の意味で半正な曲率をもつX上の正則ベクトル束とする.

このとき任意のc $(0<c\leqq c_*\ll 1)$にたいして次が成立する.

(i)　$q\geqq 1$にたいしてE-値 (n,q) 型の調和形式の空間

$$H^{n,q}(X(S_c),E,\Phi):=\{\ u\ ;\ \bar\partial u=\bar\partial_h^* u=0 \text{ and } \partial\Phi\wedge *u=0 \quad \text{on } X(S_c)\ \}$$

は$\mathcal{O}(S)$-加群となり、自然な$\mathcal{O}(S)$-準同型

$$H^{n,q}(X(S_c),E,\Phi)\ni u\ \to\ [u]\in H^q(X(S_c),\Omega_X^n(E))$$

は同型対応を与える.　更にこの同型対応により、ω_Xに関するホッジ星型作用素$*$は$\mathcal{O}(S)$-準同型

$$L^q:\ \Gamma(X(S_c),\Omega_X^{n-q}(E))\ni\sigma\ \to\ [\omega_X^q\wedge\sigma]\in H^q(X(S_c),\Omega_X^n(E))$$

にたいして分解準同型

$$\delta^q:\ H^q(X(S_c),\Omega_X^n(E))\ \to\ \Gamma(X(S_c),\Omega_X^{n-q}(E))\ ,\quad L^q\circ\delta^q=\mathrm{id}$$

を与える.

(ii)　Sの特異点集合とdfの退化集合のfによる像の和集合をΣとおき（ΣはSの解析的部分集合となる)、$M=S\setminus\Sigma$とおく. 更にκをM上の零点をもたない正則m-形式とする（$m=\dim_{\mathbb{C}}S$).

このとき$1\leqq q\leqq d:=n-m$であるqにたいし$H^{n,q}(X(S_c),E,\Phi)$の任意の調和形式uの$X(S_c\setminus\Sigma)(:=f^{-1}(S_c\setminus\Sigma))$上への制限は $\Gamma(X(S_c\setminus\Sigma),\Omega_{X/M}^{d-q}(E))$の元$\sigma_u$をもちいて、$X(S_c\setminus\Sigma)$上 $u=L^q(\sigma_u\wedge f^*\kappa)$ と書かれる.　$\Omega_{X/M}^p(E)$は$f:X\setminus f^{-1}(\Sigma)\to M$の繊維($d$次元コンパクトケーラー多様体)に沿う$E$-値正則$p$-形式の層.

(iii)　$q>n-m$ ならば $H^q(X(S_c),\Omega_X^n(E))=0$

(iv) Sは非特異とし、(G,h_G)をX上の中野の意味で半負な曲率をもつ正則ベクトル束とする.　$0\leqq q\leqq d:=n-m$であるqにたいして、$\mathcal{O}(S_c)$-準同型

$$L^q\ :\ \Gamma(X(S_c),\Omega_X^{d-q}(G\otimes f^*\Omega_S^m))\ \to\ H^q(X(S_c),\Omega_X^n(G))$$

は単射となる.

(v) Sは非特異とし、fはS上非退化とする．さらにS上には零点をもたない正則m-形式が存在するとする．　(F, h_F) が平坦な曲率($\Theta_F \equiv 0$)をもつベクトル束とするとき、$d = n - m$にたいして$O(S_c)$-準同型

$$L^q : \Gamma(X(S_c), \Omega^{d-q}_{X/S}(F \otimes f^* \Omega^m_S)) \to H^q(X(S_c), \Omega^n_X(F))$$

は同型を与える．

(i)において上記調和形式の空間が$O(S_c)$-加群であること、準同型$u \to [u]$が単射であることは容易に確かめられる．(ii)以下の主張は(i)を示す過程から自然に導かれる．問題は全射を示す所にある．その点は次節以下で述べることにして、定理2.1の(i)より導かれる結果の一つとして次の定理を述べておく([3]、[4])．

定理2.2.　Xをn次元正則凸多様体とし、K_XをXの標準直線束、EをX上の中野の意味で半正な曲率をもつ正則ベクトル束とする．Xはケーラー多様体と双有理同値と仮定する．　このとき次のコホモロジー群に関する単射定理が成立する．

(i)　任意の$s \neq 0 \in O(S_c)$と$q \geq 0$にたいして準同型

$$\mu^q_s : H^q(X, \Omega^n_X(E)) \to H^q(X, \Omega^n_X(E))$$

は単射である．　特に$A = \{s = 0\}$とおくとき、A上$ds \neq 0$であれば、制限写像

$$r : \Gamma(X, O_X(E \otimes K_X)) \to \Gamma(A, O_A([E \otimes K_X]_A))$$

は全射である．

(ii)　(F, h_F)は半正な曲率をもつ直線束であり$j \geq 1$回のFのテンソル積F^jが正則切断$\sigma \neq 0$をもつと仮定する．　このとき任意の$k \geq 1$と$q \geq 0$にたいして準同型

$$\mu^q_\sigma : H^q(X, \Omega^n_X(F^k \otimes E)) \to H^q(X, \Omega^n_X(F^{j+k} \otimes E))$$

は単射である．　特に$B = \{\sigma = 0\}$とおくとき、B上$d\sigma \neq 0$であれば、制限写像

$$r : \Gamma(X, O_X(F^k \otimes E \otimes K_X)) \to \Gamma(B, O_B([F^{j+k} \otimes E \otimes K_X]_B))$$

は全射である．

(iii)　(L, h_L)を半負な曲率をもつ正則直線束とし、Lが正則切断$\theta \neq 0$をもつと仮定する．　このとき任意の$q \geq 0$にたいして準同型

$$\mu_\theta^q : H^q(X, \Omega_X^n(E)) \to H^q(X, \Omega_X^n(L \otimes E))$$

は単射である. 特に$C=\{\theta=0\}$とおくとき、C上$d\theta \neq 0$であれば、制限写像

$$r : \Gamma(X, \mathcal{O}_X(E \otimes L \otimes K_X)) \to \Gamma(C, \mathcal{O}_C([E \otimes L \otimes K_X]_C))$$

は全射である.

3. この節では完備ケーラー多様体上の中野の意味で半正な曲率をもつベクトル束に値をもつL^2-調和形式と有界な多重劣調和関数の間に成立する関係式がCalabi-Nakano-Vesentini及びDonnelly-Xavierの公式より導かれることを解説する. 前節で述べた自然な準同型$u \to [u]$の全射性の証明に用いる次の定理が目標である.

定理3.1. (E, h)をn次元完備ケーラー多様体(X, ω_X)上の中野の意味で半正な曲率をもつ正則ベクトル束とする. このとき$u \in L_2^{n,q}(X, E) \cap \mathrm{Ker}\,\square_h$ $(q \geq 1)$は次式を満たす.

(i) $\bar{\partial} u = 0$, $\bar{\partial}_h^* u = 0$, $\partial^* u = 0$, $\langle i\, e(\Theta_h) \Lambda u, u \rangle_h = 0$ がX上成立.

(ii) $\sup_{x \in X} \{|\varphi(x)| + |d\varphi(x)|_X\} < \infty$ を満たすX上の滑らかな多重劣調和関数φにたいして $e(\bar{\partial}\varphi)^* u = 0$, $\langle i\, e(\partial\bar{\partial}\varphi) \Lambda u, u \rangle_h = 0$ がX上成立.

この定理は次の積分等式から導かれる.

命題3.2. (E, h)をn次元完備ケーラー多様体(X, ω_X)上の中野の意味で半正な曲率をもつ正則ベクトル束とする. X上の滑らかな多重劣調和関数φが条件 $\sup_{x \in X} \{|\varphi(x)| + |d\varphi(x)|_X\} < \infty$ 満たすとき、$\eta := \exp\varphi$ とおいて 積分等式

$$\|\sqrt{\eta}(\bar{\partial} + e(\bar{\partial}\varphi))v\|_h^2 + \|\sqrt{\eta}\,\bar{\partial}_h^* v\|_h^2$$

$$= \|\sqrt{\eta}(\partial^* - e(\partial\varphi)^*)v\|_h^2 + (\eta\, i\, e(\Theta_h + \partial\bar{\partial}\varphi)\Lambda v, v)_h$$

が任意の$v \in \mathrm{Dom}(\bar{\partial}) \cap \mathrm{Dom}(\bar{\partial}_h^*) \subset L_2^{n,q}(X, E)$ にたいして成立する.

(注意) ω_Xの完備性、曲率条件及びφに関する仮定から上等式はコンパクトな台を

もつvにたいして示せば十分である. 更に上等式の右辺のφのレビ形式の前の符号"+"は決定的に重要である. 特に右辺第2式の被積分関数は滑らかなvにたいして、仮定より常に非負である.

微分形式の空間上の作用素A, Bにたいして、$[A, B] := AB - (-1)^{ab} BA$ ($a = A$の次数、$b = B$の次数)とするとき、上等式は次のケーラー多様体上の公式から導かれる.

・Calabi-Nakano-Vesentiniの公式・

$$\Box_h = \overline{\Box}_h + i\,[e(\Theta_h), \Lambda] \quad 、ここで\ \Box_h := [\bar\partial, \bar\partial_h^*]\ 、\overline{\Box}_h := [D_h', \partial^*]$$

・Donnelly-Xavierの公式([1]、[5])・

$$[D_h', e(\partial\varphi)^*] + [\bar\partial_h^*, e(\bar\partial\varphi)] = i\,[e(\partial\bar\partial\varphi), \Lambda]$$

(注意) Donnelly-Xavierの公式において、右辺の交換子はもう一つの表現

$$[\bar\partial, e(\bar\partial\varphi)^*] + [\partial^*, e(\partial\varphi)] = i\,[e(\partial\bar\partial\varphi), \Lambda]$$

をもち、こちらの表現は既にL^2-正則関数の拡張定理、ケーラー多様体上の擬凸領域でのコホモロジー群のホッジ分解([3]、[4]、[5])等への応用がある.

Calabi-Nakano-Vesentiniの公式が本来"コンパクト"ケーラー多様体上の調和積分論を展開する過程で見いだされたものであるのにたいして、Donnelly-Xavierの公式は"非コンパクト"完備リーマン多様体上のL^2-調和形式の性質をある種の"ポテンシャル関数"との関係から導く、という立場から見いだされたものである([7]、[8]).

4. 準同型の全射性の証明の概略.

Grauertの順像層の連接性定理とDolbeaultの定理から、$H^q(X(S_c), \Omega_X^n(E))$は有限個の$\bar\partial$-閉な$\{v_1, \ldots, v_k\} \subset C^{n,q}(X(S_a), E)$ ($c < c_* < a$)の決めるクラスにより$O(S_c)$上生成されているとしてよい. そこで汲み尽くし多重劣調和関数Φを用いて、$X(S_a)$上の完備ケーラー計量ω_*とEのエルミート計量h_*で$X(S_{c*})$上では与えられたω_Xとhに一致し、$\{v_j\} \subset L_2^{n,q}(X(S_a), E, \omega_*, h_*)$ (ω_*とh_*に

関するL_2-空間)を満たすものを構成する. 各v_jのこの空間の調和形式の成す空間への直交射影をu_jとおくと、コホモロジー群の分離性より、$v_j = u_j + \bar{\partial} w_j$、$w_j \in C^{n,q-1}(X(S_a), E)$と書くことができる. 定理3.1により$u_j$は$X(S_c)$上件の調和形式の空間を生成する. これで全射が示された.

参考文献

[1] Donnelly,H. Xavier,F.,On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds, Amer.J.Math. 106 (1984),169-185

[2] Enoki,I., Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Keahler manifolds, preprint

[3] Ohsawa,T., On the extension of L^2 holomorphic functions II, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 24 (1988),265-275

[4] Ohsawa,T. Takegoshi,K., On the extension of L^2 holomorphic functions, Math.Zeit. 195 (1987),197-204

[5] Ohsawa,T.Takegoshi,K.,Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains, Math.Zeit. 197 (1988),1-12

[6] Saito,M., Decomposition theorem for proper Keahler morphisms, Tohoku Math.J. 42 (1990),127-148

[7] Takegoshi,K., Energy estimates and Liouville theorems for harmonic maps, Ann.Scient.Ec.Norm.Sup. 23 (1990),563-592

[8] Takegoshi,K., Application of a certain integral formula to complex analysis, "Prospects in Complex Geometry" Proc.25-th Taniguchi International Symp. Lecture Notes in Math. No.1468, 94-114

[9] Takegoshi,K.,Torsion freeness theorems for higher direct image sheaves of semi-positive vector bundles, preprint

1. Inverse of Nishimoto's integral transformation, inverse of Goursat's transformation and that of Cauchy's one

(A serendipity in fractional calculus)

Katsuyuki Nishimoto   College of Engineering
Nihon University

Abstract

Many papers and books ([1] ~ [14]) on fractional calculus have been reported by the author already. In this paper, motivated by "the Fractional Calculus Operator Group $\{\mathcal{N}^\nu\}$ for the functions $f \in \mathfrak{F} = \{f \mid 0 \neq |f_\nu| < \infty,\ \nu \in R\}$" [12], the inverse integral transformation to the author's fractional calculus, which is defined by a complex integral transformation, is discussed.

Moreover the inverse of Goursat's integral transformation and that of Cauchy's one are reported as special cases of inverse of Nishimoto's one.

§0. Introduction (Definition of fractional calculus)

(I) Definition. (by K. Nishimoto)([13]Vol.1)
Let $D=\{\underset{-}{D}, \underset{+}{D}\}$, $C=\{\underset{-}{C}, \underset{+}{C}\}$,

$\underset{-}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $-\infty+i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{+}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $\infty+i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{-}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{-}{C}$, $\underset{+}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{+}{C}$.

(Here D contains the points over the curve C.)

Moreover, let $f=f(z)$ be a regular function in D $(z \in D)$,

$$f_\nu=(f)_\nu={}_C(f)_\nu=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\,d\zeta \qquad (\nu \notin Z^-) \tag{1}$$

$$(f)_{-m}=\lim_{\nu\to -m}(f)_\nu \qquad (m \in Z^+), \tag{2}$$

where $\quad -\pi \leqslant \arg(\zeta-z) \leqslant \pi$ for $\underset{-}{C}$, $\ 0 \leqslant \arg(\zeta-z) \leqslant 2\pi$ for $\underset{+}{C}$, $\ \zeta \neq z$

Γ: Gamma function,

then $(f)_\nu$ is the fractional differintegration of arbitrary order ν (derivatives of order ν for $\nu>0$, and integrals of order $-\nu$ for $\nu<0$), with respect to z, of the function f, if $|(f)_\nu|<\infty$.

Note 1. See Figs. 1 and 2 for the integral curves $\underset{-}{C}$ and $\underset{+}{C}$, and the domains $\underset{-}{D}$ and $\underset{+}{D}$ respectively.

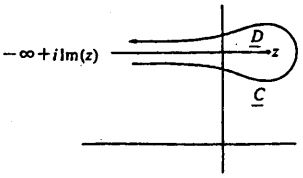

Fig. 1.

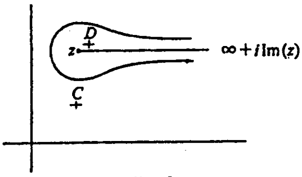

Fig. 2.

Note 2. More generally, if $f(z)$ is regular except the singular points in a finite (or infinite) number and there are no these singularities inside C and on C, then $f_\nu(z)$ can be definite again with the above definition.

Note 3. If $f(z)$ is a many valued regular function, we define $f_\nu(z)$ for the principal values of $f(z)$.

Note 4. For the complex ν, we consider the principal value of it, and f_ν $(\mathrm{Re}(\nu)>0)$ is the fractional derivative of order $\mathrm{Re}(\nu)$, and f_ν $(\mathrm{Re}(\nu)<0)$ is the fractional integral of order $-\mathrm{Re}(\nu)$, if $|f_\nu|<\infty$.

And in case of $\mathrm{Re}(\nu)=0$, f_ν is only formal differintegration regardless of $\mathrm{Im}(\nu)\gtrless 0$. That is, we have no derivative and integral for pure imaginary ν.

However, as a matter of convenience, we will assume that $\nu\in \boldsymbol{R}$ in this paper.

Note 5.

$$f_\nu(z)=\frac{d^\nu}{dz^\nu}f(z) \quad \text{and} \quad f_{-\nu}(z)=\int f(z)(dz)^\nu \qquad \text{for} \quad \nu>0,$$

where $\nu\in \boldsymbol{R}$.

Note 6. Formula (1) is a complex integral transformation of Mellin type.

Note 7. *Notations*

$\boldsymbol{C}$: set of a complex number	$\boldsymbol{R}$: set of a real number
$\boldsymbol{Z}$: set of an integer (contains zero)	$\boldsymbol{R}^+$: set of a positive real number
$\boldsymbol{Z}^+$ $(=\boldsymbol{N})$: set of a positive integer	$\boldsymbol{R}^-$: set of a negative real number
$\boldsymbol{Z}^-$: set of a negative integer	

(II) The set $\mathscr{F}$

We call the function $f=f(z)$ such that $|f_\nu|<\infty$ in D as fractional differintegrable functions by arbitrary order ν and denote the set of them with a notation $\mathscr{F}=\{f \mid |f_\nu|<\infty, \nu\in \boldsymbol{R}\}$.

Then we have $$|f_\nu|<\infty \Longleftrightarrow f\in\mathscr{F} \quad (\text{in } D).$$

(III) Unification of integrations and differentiations

Notice that the definition (in the above description) for our fractional calculus means the unification of integrations and differentiations. That is, by the formula (1)—having (2)—we can unify the integrations of arbitrary order and the differentiations of arbitrary order.

§1. A complex integral transformation and its inverse

Theorem 1. Let Nishimoto's complex integral transformation be

$$\mathcal{N}\{f(\zeta)\}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\mu+1}}\,d\zeta=F(z), \tag{1}$$

for a given constant $\mu\in\mathbf{R}$, then the inverse to $F(z)$ is given by

$$\mathcal{N}^{-1}\{F(z)\}=\frac{\Gamma(-\mu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{(z-\zeta)^{-\mu+1}}\,dz, \tag{2}$$

where $f(\zeta)$ is a regular function in D and $0\neq|F(z)|<\infty$. (For the integral contour C and the domain D, see the definition in §0. And when $\mu=-n(n\in\mathbf{Z}^+)$ in (1), refer to §0. (2)).

2. A Real Inversion Formula for the Laplace Transform

DU-WON BYUN AND SABŪROU SAITOH

Department of Mathematics, Faculty of Engineering,
Gunma University, Kiryu 376, Japan

Let f be the Laplace transform of a square integrable function F and set

$$F_N(t) = \int_0^\infty f(s)e^{-st}P_N(st)ds \qquad (N = 0, 1, 2, \ldots)$$

for the polynomials

$$P_N(\xi) = \sum_{0 \le \nu \le n \le N} \frac{(-1)^{\nu+1}(2n)!}{(n+1)!\nu!(n-\nu)!(n+\nu)!}\xi^{n+\nu}$$
$$\times \left\{ \frac{2n+1}{n+\nu+1}\xi^2 - \left(\frac{2n+1}{n+\nu+1} + 3n + 1\right)\xi + n(n+\nu+1)\right\}.$$

Then it is proved that the sequence $\{F_N\}_{N=0}^\infty$ converges to F in the sense that

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\infty |F(t) - F_N(t)|^2 dt = 0.$$

Furthermore, a general formula for this result is established.

References

[1]. ARONSZAJN, N., *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337 – 404.
[2]. BURBEA, J., *Total positivity of certain reproducing kernels*, Pacific J. Math. 67 (1976), 101 – 130.
[3]. BYUN, D.-W., *Isometrical mappings between the Szegö and the Bergman-Selberg spaces*, Complex Variables 20 (1992), 13 - 17.

Typeset by 日本語-$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

[4]. SAITOH, S., "Theory of reproducing kernels and its applications," Pitman Res. Notes in Math. Series: Vol. 189, Longman Scientific & Technical, England, 1988.

[5]. SAITOH, S., *Representations of the norms in Bergman-Selberg spaces on strips and half planes*, Complex Variables 19 (1992), 231 - 241.

[6]. SCHWARTZ, L., *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants)*, J. Analyse Math. 13 (1964), 115 – 256.

[7]. WIDDER, D. V., "The Laplace transform," Princeton University Press, 1972.

(to appear in Zeitschrift fuer Analysis und ihre Anwendungen)

Current Address of Dr. Du-Won Byun
Department of Mathematics
Global Analysis Research Center
Seoul National University
Seoul 151-742, Korea

Compare our formula with

A. G. Ramm: Multidimensional Inverse Scattering Problems (Longman Scientific & Technical,1992) pp. 218-222:

Let

$$\int_0^b \exp(-pt)f(t)dt = F(p), \quad p > 0 \tag{1}$$

where $b > 0$ is a fixed number. We have

$$f(t) = \frac{2tb^{-1}}{\pi}\frac{d}{du}\int_0^u \frac{F_7(v)dv}{(u-v)^{1/2}}\Bigg|_{u=t^2b^{-2}}. \tag{18}$$

Here

$$F_7(v) = v^{-1/2}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dy\cos(y\cosh^{-1} v^{-1})\cosh(\pi y)$$
$$\times \int_0^\infty dz\cos(zy)(\cosh z)^{-1/2}\int_0^\infty dpF(p)J_0\left(p\frac{b}{(\cosh z)^{1/2}}\right). \tag{19}$$

The inversion formula (18) is of interest since it uses only the data $F(p)$ on the real line and there is no need to continue $F(p)$ analytically onto the Mellin contour, as in the usual inversion formula.

3. **Maximum Principles for Finite Element Solutions on a Riemann Surface**

Hisao MIZUMOTO — Department of Medical Informatics, Kawasaki University of Medical Welfare

Heihachiro HARA — Department of Information Science, Shimane University

We shall establish the maximum principles for the finite element solutions of the partial differential equation: $\Delta u - qu = f$ on a compact bordered Riemann surface $\overline{\Omega}$.

Let Ω be a subdomain of a Riemann surface W whose closure $\overline{\Omega}$ is a compact bordered subregion of W. We construct a triangulation K of $\overline{\Omega}$. We choose a fixed finite collection Φ of local parameters φ_j and parametric disks U_j ($j = 1, \cdots, m$) such that $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_j$, and construct a triangulation K of $\overline{\Omega}$ with width h associated to Φ. K is the sum of subtriangulations $K_1, \cdots, K_m$ of K such that each 2-simplex of K belongs to one and only one K_j ($j = 1, \cdots, m$), and the carrier $|s|$ of each 2-simplex s of K_j is contained in U_j. The naturalized triangulation K' associated with K is also defined. We assume that all angles of the triangles $\varphi_j(s)$ $(s \in K_j : j = 1, \cdots, m)$ are $\leq \pi/2$.

For a partition to two parts C_1 and C_2 of the boundary $\partial\Omega$, we define the boundary value problem: $\Delta u - qu = f$ on Ω, $u = \chi$ on C_1 and $*du = 0$ along C_2, where $q \geq 0$ and f are the Hölder continuous (with exponent α $(0 < \alpha \leq 1)$) covariant tensors, and by $*du$ we denote the conjugate differential of du.

Further we introduce two classes of element functions on K and K': the comparable class $S = S(K)$ (with u) and the computable class $S' = S'(K')$. S' is a collection of modifications $v'_h = F(v_h)$ of $v_h \in S$, where F defines a one-to-one mapping of S onto S'. We introduce the finite element approximations ω_h and u'_h of u in S and S' respectively.

Then the maximum principles for the finite element solutions are stated as follows:

THEOREM 1. *If $h > 0$ is sufficiently small, then for the finite element approximation ω_h of the original solution u, the inequality*

$$|\omega_h| \ \leq \ \exp\left(\frac{4\pi M}{\sin\theta} \ \max_{\overline{\Omega}} q\right) \cdot \left(\max_{C_1} |\chi| + \frac{2}{\sin\theta} \iint_{\Omega} |f| \, dx \, dy\right)$$

holds, where θ is the smallest value of all angles of the triangles $\varphi_j(s)$ $(s \in K_j;\ j = 1, \cdots, m)$, M is a constant which is independent of the individual triangulation K and $\max_{\overline{\Omega}} q$ *means*

$$\max_{\overline{\Omega}} q \equiv \max_{1 \le j \le m} \max_{\varphi_j(\overline{U_j \cap \Omega})} q.$$

THEOREM 2. *If $h > 0$ is sufficiently small, then for the finite element approximation u'_h of the original solution u, the inequality*

$$|u_h| \le \exp\left(\frac{2\pi M}{\sin\theta} \max_{\overline{\Omega}} q\right) \cdot \left(\max_{C_1} |\chi| + \frac{1}{\sin\theta} \sum_{s \in K'} \iint_{|s|} |f| \, dx \, dy\right)$$

holds, where $u_h = F^{-1}(u'_h)$ and other notations are the same as in Theorem 1.

The detailed theories are shown in [5] and [6]. The results in the present paper will be applied to error estimation for the finite element approximations in the forthcoming paper [7].

References

[1] Mizumoto, H. and Hara, H., Finite Element Method in Engineering Science: Theory (in Japanese). Morikita, Tokyo, 1983.

[2] Mizumoto, H. and Hara, H., Finite Element Method in Engineering Science: Programs (in Japanese). Morikita, Tokyo, 1983.

[3] Mizumoto, H. and Hara, H., Finite element approximations of harmonic differentials on a Riemann surface. Hiroshima Math. J., 18 (1988), 617-654.

[4] Hara, H. and Mizumoto, H., Determination of the modulus of quadrilaterals by finite element methods. J. Math. Soc. Japan, 42 (1990), 295-326.

[5] Mizumoto, H. and Hara, H., Maximum principles for finite element solutions on a Riemann surface. Kawasaki Medical Welfare J., 2 (1992), 267-275.

[6] Mizumoto, H. and Hara, H., Maximum principles for finite element solutions on a Riemann surface, II. Kawasaki Medical Welfare J., 3 (1994), to appear.

[7] Hara, H., Mizumoto, H. and Kikuchi, S., Finite element approximations for $\Delta u - qu = f$ on a Riemann surface. to appear.

4. 星型，凸型関数の係数不等式

関根忠行　　日大薬

尾和重義　　近畿大理工

Ｕを単位円板とする。

ＳをＵで正則，単葉な次の形の関数のクラスとする：

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n .$$

関数 $f(z)\in S$ が $\mathrm{Re}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha$ $(0\leqq\alpha<1)$ を満たすとき，$f(z)$ は オーダー α の星型関数と言われる。この関数のクラスを $S^*(\alpha)$ で表す。

また 関数 $f(z)\in S$ が $\mathrm{Re}\left\{1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$ $(0\leqq\alpha<1)$ をみたすとき，$f(z)$ は オーダー α の凸型関数と言われる。この関数のクラスを $K(\alpha)$ で表す。

１９７５年にＨ．Ｓｉｌｖｅｒｍａｎは関数 $f(z)\in S$ が星型，あるいは凸型関数になるための十分条件として，次の結果を示している。

定理．$f(z)\in S$ とする。もし $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n|\leqq 1-\alpha$ ならば $f(z)\in S^*(\alpha)$。

系．$f(z)\in S$ とする。もし $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n|\leqq 1-\alpha$ ならば $f(z)\in K(\alpha)$。

我々はこれらの定理を再考する。

5. SUFFICIENT CONDITIONS FOR CLOSE-TO-CONVEXITY

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathcal{U}$. A function $f(z)$ in $\mathcal{A}$ is said to be a member of the class $\mathcal{R}$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}(f'(z)) > 0 \qquad (z \in \mathcal{U}).$$

Then a function $f(z) \in \mathcal{R}$ is said to be close-to-convex in $\mathcal{U}$.

In the present talk, we give sufficient conditions for $f(z)$ to be in the class $\mathcal{R}$.

THEOREM. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1 - \alpha)\frac{1}{f'(z)} \neq \alpha + i\beta$$

for some α ($\alpha \geqq 1$) and β ($|\beta| \geqq \sqrt{2\alpha(3\alpha - 2)}$), and for all $z \in \mathcal{U}$, then $f(z) \in \mathcal{R}$.

COROLLARY 1. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \neq 1 + i\beta$$

for some β ($|\beta| \geq \sqrt{2}$), and for all $z \in \mathcal{U}$, then $f(z) \in \mathcal{R}$.

COROLLARY 2. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\left|\arg\left(\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)} + (1 - \alpha)\frac{1}{f'(z)}\right)\right| \neq \frac{\pi}{2}$$

for some α ($\alpha \geq 1$), and for all $z \in \mathcal{U}$, then $f(z) \in \mathcal{R}$.

6. A note on the number of asymptotic points of holomorphic curves

TODA Nobushige

Nagoya Institute of Technology

Let $f:C\to P^n(C)$ be a transcendental holomorphic curve and let $T(r,f)$ be its characteristic function. More than ten years ago, we gave the following definition and theorem ([3]).

Definition. A point p of $P^n(C)$ is an asymptotic point of f if there exists a curve $z=z(t)$ $(0\le t<1)$ in $|z|<\infty$ which satisfies with $(p,f)\neq 0$

(i) $\lim_{t\to 1} z(t)=\infty$ and (ii) $\lim_{t\to 1} \frac{|(p,f)|}{\|p\|\|f\|} = 0.$

Theorem A. If $\liminf_{r\to\infty} T(r,f)/(\log r)^2<\infty$, the number of asymptotic points of f in general position is at most n.

The purpose of this note is to give a result on the number of asymptotic points of holomorphic curves of finite lower order.

We introduce "an asypptotic spot of first kind" (cf.[2]) and applying Theorem 8.3 in [1] we obtain the following result.

Theorem. Let N be the number of asymptotic spots of first kind and in general position. If the lower order μ of f is finite, then

(a) $N \leqq 2n\mu + n$;

(b) $N \leqq 2n-1$ $(0<\mu<1)$ and $N \leqq 2n\mu$ $(1 \leqq \mu < \infty)$.

References

[1] W.K. Hayman, Subharmonic functions, Vol.2, Academic Press, London 1989.

[2] M. Heins, On Lindelöf principle, Ann. of Math. 61(1955), 440-473.

[3] N. Toda, Boundary behavior of systems of entire functions, Res. Bull. Coll. Gen. Education, Nagoya Univ., Ser. B, 25(1980), 1-9.

7. 単葉型 Painlevé の定理について

米谷文男　　京都工繊大　工芸

複素平面 C 内の円環領域

$A = \{z : a < |z| < 1\}$ と $B = \{z : 1 < |z| < b\}$ を

それらの境界$\{z : |z| = 1\}$ で A の z に対して B の $\phi(z)$ を対応させて接着する。この $\phi(z)$ は$\{z : |z| = 1\}$の同相写像とし，接着函数と呼ぶ。元の面の部分の解析構造を変えずに接着した部分に解析構造 J を入れることができる時，等角接着可能といい，これをリーマン面とみなす。これが等角写像 $f_{\phi,J}$ によって円環領域 $A(\phi,J) = \{z : 1 < |z| < d(\phi,J)\}$ に等角写像されるとする。この modulusを$M(\phi, J) = \log d(\phi,J)$ として，

$M(\phi) = \{M(\phi, J) : J$ はϕ の等角接着を与える解析構造$\}$ と置く。

及川先生は $M(\phi)$ が1点でありながら異なる解析構造を持つ場合があるかどうかを問題にされている。そこで，$\{z : |z| = 1\}$ に対応するリーマン面の接着部分をβとして$f_{\phi,J}(\beta) = \beta_{\phi,J}$ と置く。$M(\phi, J) = M(\phi, J')$ の時，$f_{\phi,J'} \circ f_{\phi,J}{}^{-1}$ は $A(\phi,J)$ 上連続で，$A(\phi,J) - \beta_{\phi,J}$ 上等角である。$\beta_{\phi,J}$ 上等角でない点があるとしよう。$f_{\phi,J'}{}^{-1} \circ f_{\phi,J}$ は $C - \beta_{\phi,J}$ の擬等角写像に拡張できる。そのBeltrami係数を μ として $A(\phi,J)$ 上等角で $C - A(\phi,J)$ 上 μ と一致するBeltrami係数を持つ C 上の擬等角写像をhとする。$f = f_{\phi,J'} \circ f_{\phi,J}{}^{-1} \circ h^{-1}$ は C 上の連続函数で $C - h(A(\phi,J))$ 上等角

$\gamma = h(A(\phi,J))$ 上等角でない点がある。 従って，複素平面内の連続函数が Jordan曲線 γ を除いて単葉解析的である時，γ においても解析的となる γ の条件を求める Painlevé型の定理が関係してくることが分かる。

さて，複素平面から compact 集合Eを除いた所に Dirichlet 積分有限な解析函数はあるが Dirichlet積分有限で単葉な解析函数はない時，E は $N_{SD}-N_D$ に属するという。γ が $N_{SD}-N_D$ に属するE を含む時，γ を除いて単葉解析的であるが複素平面全体では解析的とならない連続函数があることが知られている。そして γ を除いて単葉解析的な複素平面上の連続函数で γ の像が正の測度を持つようにできる。

逆に，γ を除いて単葉解析的であるが複素平面全体では解析的とならない連続函数 f があるとすれば，

$$S = \{\frac{f(\zeta_1) - f(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} : (\zeta_1,\zeta_2) \in C \times C - \{(\zeta,\zeta)\}_{\zeta \in C}\}$$

は半平面を含む。もし $S \cup \{0\}$ が C に一致しなければ，$C - S - \{0\}$ に属する点 t に対して $g(\zeta) = f(\zeta) - t\zeta$ と置けば g は γ を除いて単葉解析的な複素平面上の連続函数で $g(\gamma)$ は正の測度を持つ。そして γ は $N_{SD}-N_D$ に属する E を含む。解析構造を表す曲線が正の測度を持てばそこで解析構造の変形が可能であり，$M(\phi)$ は常に連結で，$M(\phi)$ が 1 でありながら異なる解析構造を持つ場合はないことが示せるのではないかと思っている。

8. Outer関数の分解とH^pの極値問題

中路 貴彦　　北大 理

H^p $(1 \leq p \leq \infty)$ は単位円板の普通のHardy空間とする。$q \in H^1$ が境界で絶対値1のとき、inner関数と呼ばれる。$h \in H^1$ が outer関数とは、どんな定数でない inner関数 q でも、H^1の中で割れないものである。$g \in H^1$ が strong outer関数とは、どんな定数でない inner関数 q でも、$g/|g|$ が $\{f/|f| ; f \in H^1\}$ の中で割れないものである。strong outer関数ならば outer関数となるが、これは様々の分野に現われる。

$h \in H^1$ が outer ならば、ある inner q と strong outer g があって、$h/|h| = q(g/|g|)$ かつ $h = Fg$、$F \in H^1$ と分解ができるとは、E.Hayashiの深い結果である。F は outer関数の bad part であるから、我々は $q = F/|F|$ となる outer関数 $F \in H^1$ に興味がある。$F = (s + q\bar{s})^2$ かつ $s \in L^2$ ならば、$q = F/|F|$ であるが、逆もまた真である。$s + q\bar{s}$ は $s = 1$ のとき、$1 + q$ であり、$s = q_1$ かつ $q = q_1 q_2$ の

とき、$\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$ である。ある$F \in H^1$によって2つのinner $\mathfrak{z}_1$、$\mathfrak{z}_2$ について $\overline{\mathfrak{z}_1}\mathfrak{z}_2 = F/|F|$ とできるとき、$\mathfrak{z}_1 \prec \mathfrak{z}_2$ と書く。

$\boxed{\text{定理1}}$ $f \in H^1$ が零関数でないならば、あるinner $\mathfrak{z}$とstrong outer gがあって、$f/|f| = \mathfrak{z}(g/|g|)$ かつ $f = Fg$、$F \in H^1$ と分解できる。さらに $F = \mathfrak{z}_0 = (s + \mathfrak{z}\bar{s}/1 + \mathfrak{z}_0)^2$ と書ける。ここで$\mathfrak{z}_0$はinner、$s \in H^2 \ominus \mathfrak{z} z H^2$ かつ $(s + \mathfrak{z}\bar{s}/1 + \mathfrak{z}_0) \in H^2 \ominus \mathfrak{z} z H^2$ はouterである。また $\mathfrak{z}_0 \prec \mathfrak{z}$ 。

$\boxed{\text{定理2}}$ $f \in H^\ell$ $(1 \leq \ell \leq \infty)$ とする。$\|f + z\bar{H}^\ell\| = \|f\|_\ell$ が成立することは次のそれぞれと同値である。(1) $\ell = 2$ のときfは任意の関数、(2) $2 < \ell < \infty$ のとき $f = \mathfrak{z}(s + \mathfrak{z}\bar{s}/1 + Q)^{2/\ell-2}$ かつ $Q \prec \mathfrak{z}$、(3) $1 \leq \ell < 2$ のとき $f = \mathfrak{z}(s + \mathfrak{z}\bar{s}/1 + \mathfrak{z})^{2/2-\ell}$ かつ $\mathfrak{z} \prec Q$、(4) $\ell = \infty$ のとき $\bar{f}$ の H^1 での極値問題の解が存在するなら、$f = \mathfrak{z}$。

定理1は、H^1の極値問題の解を一般的に描いている。H^p $(1 < p < \infty)$ の極値問題の解はそれを用いて一般的に描けて、それは有理関数の場合のMacintyre-Rogosinskiの定理を与える。定理2の証明に定理1は不要。

9. 境界で0になる錐（コーン）上の調和関数

吉田　英信　　　　千葉大・理

$\mathbb{R}^n$ は n 次元ユークリッド空間とし、$\mathbb{S}^{n-1}$ ($\mathbb{S}_+^{n-1}$) は (n-1) 次元単位（上半）球面とする。次の結果は、ピカールの定理の一般化としてよく知られている。

定理 A（例えば、Brelot [1, Appendix, §26]）. $\mathbb{R}^d$ ($d \geqq 2$) 上の調和関数 $H(r,\Theta)$ が、正数 t に対して

$$\lim_{r\to\infty} r^{-t}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} H^+(r,\theta)d\sigma_\theta = 0$$

（$d\sigma_\theta$ は $\mathbb{S}^{d-1}$ 上の面積要素）

ならば、H は t より小さい次数の $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ の調和多項式である。

Kuran [2, 定理 10] は、この定理 A を利用して、半空間

$$\mathbb{T}_n = \{(X,y)\in\mathbb{R}^n;\ X\in\mathbb{R}^{n-1},\ y>0\} = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^n;\ (1,\theta)\in\mathbb{S}_+^{n-1},\ 0<r<+\infty\}$$

上で次の結果を証明した。

定理 B. $h(X,y) = h(r,\Theta)$ は $\mathbb{T}_n$ 上調和で、境界 $\partial\mathbb{T}_n$ 上（連続的に）0 になる関数とする。正数 t に対して

(*) $$\lim_{r\to\infty} r^{-t-2}\int_{S_r} yh^+(r,\theta)dS_r = 0$$

（dS_r は $S_r = \{(r,\theta)\in\mathbb{T}_n;\ (1,\theta)\in\mathbb{S}_+^{n-1}\}$ 上の面積要素）

ならば、$h(X,y) = y\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$, 但し、$\Pi$ は t+1 より小さい次数の $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$ の多項式で、y に関しての偶関数である。

十分に滑らかな境界を持つ $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の領域 Ω に対して、$\Omega = \mathbb{S}_+^{n-1}$ なる場合が半空間であることを考えれば、錐（コーン）$C_n(\Omega) = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^n;\ (1,\theta)\in\Omega,\ 0<r<+\infty\}$ 上の調和関数に対して kuran の結果を含むような結果を得ることは、条件（*）の意味と、結果が導かれる理由を知ることが出来るだろう。この観点で、次の結果を得たので報告する。なお、この結果は錐に関するディリクレ問題の解のある意味での一意性を証明す

るために利用される。

上記 Ω（境界を持つ、連結かつコンパクトな微分可能リーマン多様体）上で、

$$\Delta_n = \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-2}\Lambda_n$$

の球面部分 Λ_n（Beltrami-Laplace 作用素）に関するディリクレ問題

$$\begin{aligned}(\Lambda_n + \lambda)F &= 0 \quad \text{on } \Omega\\ F &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega\end{aligned}$$

の固有値列と対応する正規直交関数列を$\{\lambda(\Omega,k)\}$, $\{f_k^\Omega(\theta)\}$ $(k=1,2,...)$とする。

$$t^2 + (n-2)t - \lambda(\Omega,k) = 0$$

の正解、負解を$\alpha(\Omega,k)$, $-\beta(\Omega,k)$とする。更に、$\lambda(\Omega,k_i)<\lambda(\Omega,k_{i+1})$なる整数列を$\{k_i\}$ とし、$I(\Omega,k_i)$は k_i より小さいすべての正整数の集合を表す。

定理. p, q は２つの正整数で、$h(r,\Theta)$ は$C_n(\Omega)$上調和な境界$\partial C_n(\Omega)-\{O\}$上 0 となる関数とする。もし、

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\alpha(\Omega,k_{p+1})}\int_\Omega h^+(r,\theta)f_1^\Omega(\theta)d\sigma_\theta = \lim_{r\to 0} r^{-\beta(\Omega,k_{q+1})}\int_\Omega h^+(r,\theta)f_1^\Omega(\theta)d\sigma_\theta = 0$$

ならば、

$$h(r,\theta) = \sum_{k\in I(\Omega,k_{p+1})} A_k r^{\alpha(\Omega,k)} f_k^\Omega(\theta) + \sum_{k\in I(\Omega,k_{q+1})} B_k r^{-\beta(\Omega,k)} f_k^\Omega(\theta)$$

但し、A_k, B_k は定数。

[1] M. Brelot, Élements de la théorie classique du potentiel (Paris, 1965).

[2] Ü. Kuran, Study of superharmonic functions in $R^n\times(0,+\infty)$ by a Passage to R^{n+3}, Proc. London Math. Soc. 20(1970), 276-302.

10. Quasiadditivity and measure property of capacity

相川弘明　　　　　熊本大学 理学部

これは A. Borichev との共同研究である．

C_αを $\mathbb{R}^N$におけるα次の容量とする．このとき C_αは $N-\alpha$次の集合関数であり，特に $C_\alpha(B(0,r)) = Ar^{N-\alpha}$ となる．従って，Eが $\bigcup B(x_j, r_j)$ によって覆われているならば，C_αの劣加法性から

$$C_\alpha(E) \le \sum C_\alpha(B(x_j, r_j)) = A\sum r_j^{N-\alpha}$$

となる．これは $C_\alpha(E)$ は Eは $N-\alpha$次の content の定数倍で上から評価できる事を意味する．

一般に $C_\alpha(E)$ の下からの評価は $N-\alpha$次の content では不可能なことが知られている．しかし，何らかの意味で $N-\alpha$次の量と比較できないだろうか？

そのために$\delta_E(x) = \mathrm{dist}(x, E^c)$ とおき，

$$\widetilde{E}_\alpha = \bigcup_{x\in E} B(x, \delta_E(x)^{(N-\alpha)/N})$$

とする．もし $E = B(0,r), r > 0$ 十分小，ならば$\widetilde{E}_\alpha$は半径が $r^{(N-\alpha)/N}$ と比較可能な球で，

$$|\widetilde{E}_\alpha| \approx r^{N-\alpha} = A|E|^{(N-\alpha)/N}$$

となる．このことは，$|\widetilde{E}_\alpha|$ がある意味で $N-\alpha$次の量である事を意味する．

Theorem 1. Uを有界集合とすると Uの部分集合 Eに対して

$$|\widetilde{E}_\alpha| \le AC_\alpha(E).$$

より一般に核 $K(x) = K(|x|)$ に対応する容量を C_Kとする．正の関数$\eta(r)$ を

$$|B(0, \eta(r))| = C_K(B(0,r))$$

とし

$$\widetilde{E}_K = \bigcup_{x\in E} B(x, \eta(\delta_E(x)))$$

とおく．

Theorem 2. Kを $\mathbb{R}^N$で可積分とすると

$$|\widetilde{E}_K| \le AC_K(E).$$

Riesz 核は局所的に可積分であるから Theorem 1 は Theorem 2 から導かれる．

容量 C_Kが quasiadditivity を持つとは，Eの適当な分割$\bigcup E_j$ に対して

$$C_K(E) \approx \sum C_K(E_j)$$

となる時をいう．[1], [3] では Whitney 分解に対応する quasiadditivity について考察した．Theorem 2 はそれらとは異なった形の次の quasi-additivity より従う．

Theorem 3. Kを $\mathbb{R}^N$で可積分とする．$\eta^*(r) = \max\{\eta(r), 2r\}$ とおき，$\{B(x_j, \eta^*(r_j))\}$ は *disjoint* を仮定する．この時 Eが$\bigcup B(x_j, r_j)$ の部分集合ならば，

$$C_K(E) \approx \sum C_K(E \cap B(x_j, r_j)).$$

以上の定理は L^p-容量，エネルギー容量にもほとんどそのままの形で拡張される．さらに，それらの定理を調和関数の境界挙動に応用し，[2], [4], [5] の結果を一般化する事ができる．

References

[1] H. Aikawa, *Quasiadditivity of Riesz capacity*, Math. Scand. **69** (1991), 15–30.

[2] H. Aikawa, *Thin sets at the boundary*, Proc. London Math. Soc. (3) **65** (1992), 357–382.

[3] H. Aikawa, *Quasiadditivity of capacity and minimal thinness*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Mathematica **18** (1993), 65–75.

[4] A. Nagel, W. Rudin and J. H. Shapiro, *Tangential boundary behavior of functions in Dirichlet-type spaces*, Ann. of Math. **116** (1982), 331–360.

[5] A. Nagel and E. M. Stein, *On certain maximal functions and approach regions*, Adv. in Math. **54** (1984), 83–106.

11. On the behavior of potentials at the point at infinity for regular function kernels

樋口　功　　　愛知工大 自然科学教室

$G=G(x,y)$を，加算基を持つ局所コンパクトな Hausdorff 空間 X 上の連続関数核，すなわち

$$0 \leqq G(x,y) \leqq +\infty \quad \text{for } \forall (x,y)\in X\times X \ \text{ s.t. } x\neq y$$
$$0 < G(x,x) \leqq +\infty \quad \text{for } \forall x\in X$$

を満たす $X\times X$ 上の広義連続な関数とする。

X 上の Radon 測度 μ の G-potential $G\mu$ を次式で定義する。

$$G\mu(x) = \int G(x,y)d\mu(y)$$

X 上の測度族に関する記号を次のように定める。

$$M = \{ \mu \ ; \text{正の Radon 測度} \}$$
$$E = E(G) = \{ \mu\in M \ ; \int G\mu(x)d\mu(x) < +\infty \}$$
$$F = F(G) = \{ \mu\in M \ ; G\mu(x) \text{ が } X \text{ 上で有限連続} \}$$

更に，台がコンパクトな測度全体から成るこれらの部分族を M_0, E_0, F_0 で表す。

X 上の非負 l.s.c. 関数 u は，$u(x) < +\infty$ G-n.e. X で，次の性質を持つとき，G-優調和(G-superharmonic)であると言われる。

$$\mu\in E_0(G),\ G\mu(x) \leqq u(x) \text{ on } S\mu \ \Rightarrow\ G\mu(x) \leqq u(x) \text{ on } X$$

G-superharmonic な関数の全体を $S(G)$ で表す。

非負 Borel 関数 u および 閉集合 F に対し，u の F 上への，および F 上無限遠点δへの reduced function を次式で定義する。

$$R_G^F(u)(x) = \inf \{ v(x);\ v\in S(G),\ v(x) \geqq u(x) \ \text{G-n.e. on } F \}$$
$$R_G^{F,\delta}(u)(x) = \inf_{\omega\in\Gamma_0} R_G^{F\cap C\omega}(u)(x)$$

ここで，Γ_0 は相対コンパクトな開集合の全体である。

閉集合 F に対し

$$S_0(F,G) = \{\ u\in S(G);\ R_G^{F,\delta}(u)(x) = 0 \quad G\text{-n.e. on } X\ \}$$

と置く。 任意の $\mu\in M_0$ に対し $G\mu\in S_0(X,G)$ が成り立つとき，G は正則(regular)であると言われる。

Abel 群上の合成核の理論における G.Choquet-J.Deny および M.Itô の結果によると，完全最大値原理を満たし非周期的な核 κ が正則であれば，κ は Hunt 核になる。

正則性は，potential が無限遠点 δ で一様に 0 に収束するという性質の拡張であるが，どのような拡張であろうか?

閉集合 F に対し，二種類の“尖細性”を次のように定義する。

(a) $\inf\limits_{\omega\in\Gamma_0} \mathrm{cap}_G^i(F\cap C\omega) = 0$ が成り立つとき，F は δ で G-容量尖細である(G-cap.thin at δ)と言われる。

(b) $1\in S_0(F,G)$ が成り立つとき，F は δ で G-1-尖細である(G-1-thin at δ)と言われる。

上記二種類の尖細性の相互関係を調べることにより，正則性に関する次の特徴付けが得られたので，報告する。

定 理. X 上の連続関数核 G および adjoint 核 $\check{G}$ が共に完全最大値原理を満たすとき，つぎの (1)～(3) は同値である。

(1) G は正則である。

(2) $\forall\mu\in F_0(G)$, $\forall c>0$ に対し，集合$\{\ x\in X;\ G\mu(x)\geq c\ \}$ は無限遠点 δ で G-1-尖細である。

(3) $\forall\mu\in F_0(G)$, $\forall\nu\in F_0(\check{G})$ および $\forall c>0$ に対し，集合

$$\{\ x\in X;\ G\mu(x)\geq c\ \}\cap\{\ x\in X;\ \check{G}\nu(x)\geq c\ \}$$

は無限遠点 δ で G-容量尖細である。

従って，G か $\check{G}$ potential のいずれかが，内容量 0 の集合を除いて δ で 0 に近づけば，G は正則となることが分かった。

12. フラクタルな境界を持つ領域における2重層ポテンシャル

渡辺ヒサ子　　　　　お茶の水女子大　理

D は d次元ユークリッド空間内のジョルダン領域で、フラクタルな境界を持つとする。すなわち、D の境界のハウスドルフ次元βは$d-1<\beta<d$を満たすとする。このような領域でも2重層ポテンシャルを考えたい。そのため、領域 D はさらに次の条件(u-β)を満たすとする。

(u-β) すべての r ($0<r<r_0$) とすべての境界点 z に対して

$$c_1 \leq \frac{\mu(B(z,r)\cap\partial D)}{r^\beta} \leq c_2$$

を満たす、D の境界上のボレル正測度μと正数 r_0, c_1, c_2がある。

$1>\alpha>d-\beta$とする。R^d の閉集合 F 上でα-Hölder連続な関数全体からなる族を考え、この空間にノルム

$$\|f\| = \sup\{|f(z)| : z\in F\} + \sup\{\frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|^\alpha} : z,\ w\in F, z\neq w\}$$

を入れたバナッハ空間を$\Lambda_\alpha(F)$で表す。このとき次のように、$\Lambda_\alpha(\partial D)$の関数は$\Lambda_\alpha(R^d)$の関数に拡張される。

<u>補題</u>　$\Lambda_\alpha(\partial D)$から$\Lambda_\alpha(R^d)$への連続な線形作用素 E で次の性質(a),(b)を持つものがある。

(a) supp $E(f)\subset B(0,2R)$ $(\forall f\in\Lambda_\alpha(\partial D))$,

(b) 各 $f\in\Lambda_\alpha(\partial D)$に対し、$E(f)$は $R^d\setminus\partial D$で無限回微分可能。

これを使って、$f\in\Lambda_\alpha(\partial D)$に対し2重層ポテンシャル$\Phi(f)$を、$x\in D$なら、

$$\Phi f(x) = -\int_D \langle \nabla_y E(f)(y), \nabla_y N(x-y)\rangle dy + E(f)(x)$$

$x\in R^d\setminus\overline{D}$ならば、

$$\Phi f(x) = -\int_D \langle \nabla_y E(f)(y), \nabla_y N(x-y)\rangle dy$$

と定める。ただし、$N(x-y)$ は、$d\geqq 3$ ならばニュートン核、$d=2$ ならば対数核である。このように定義された$\Phi(f)$は $R^d\setminus\partial D$ で調和であり、なめらかな境界を持つ領域における2重層ポテンシャルの自然な拡張になっていることがわかる。

この2重層ポテンシャルを使って、フラクタルな境界をもつ領域で デイリクレ問題を考え、次の定理が得られる。

定理　Dは境界のハウスドルフ次元がβ($d-1<\beta<d$)であるような R^d のジョルダン領域で、条件(u-β)を満たすとする。このとき、境界上のどんな連続 f に対しても、D の閉包で連続で、D では調和であり、かつ、境界上では f と等しい関数が存在する。

13. ポテンシャル論における最小変分の方法

二宮信幸

局所コムパクトなハウスドルフ空間 Ω において $K(P, Q)$ は，

(1) 二点 P と Q について下半連続，$P=Q$ では ∞ であってもよいが，$P \neq Q$ では必ず有限，

(2) P と Q が互に素なコムパクト集合の上にあるとき，$K(P, Q)$ は上に有界，

であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に対して，ポテンシャル，相互エネルギー積分，エネルギー積分．

$$K(P, \mu) = \int K(P, Q)\,d\mu(Q), \quad K(\mu, P) = \int K(Q, P)\,d\mu(Q),$$

$$K(\mu, \nu) = \int d\mu(P) \int K(P, Q)\,d\nu(Q),$$

$$K(\mu, \mu) = \iint K(P, Q)\,d\mu(Q)\,d\mu(P)$$

を考える．コムパクト集合 F の上の正の測度で全質量 1 であるものゝ全体を $\mathfrak{M}_1(F)$ で表わす．

このとき，次の定理が成立つ．

定理. F をエネルギー積分有限な正の測度を持つ Ω のコムパクト集合とする. $\mathfrak{M}_1(F)$ の中に $K(\mu,\mu)$ の値を最小にするものがある. その一つを μ とする. σ_1 及び σ_2 を F の上の全質量 0 の測度, かつ $\mu+\sigma_1$ 及び $\mu+\sigma_2$ が $\mathfrak{M}_1(F)$ の測度であるとき, 常に不等式

$$0 \leqq K(\sigma_1,\mu) + K(\mu,\sigma_2)$$

が成立つ.

これは σ_1 と σ_2 が同じならばよく知られている事柄である. 然し同じでなくてもよろしい, ということを主張する. これは, $K(\mu,\mu)=W_F$ なる量に対して最小変分を考えるのでなく,

$$\max\begin{pmatrix} K(\mu_1,\, t_1\mu_1+t_2\mu_2) \\ K(\mu_2,\, t_1\mu_1+t_2\mu_2) \end{pmatrix},$$

ただし t_1 と t_2 は任意の正数, μ_1 と μ_2 は $\mathfrak{M}_1(F)$ の測度, なる量に対して最小変分を考えることによって得られる.

14. 与えられた集合に交わる曲面族の極値的長さについて

大津賀　信

Fuglede [1, pp. 189–198] の結果を重さのついた場合に拡張する。与えられた空でない集合 $X \subset R^d$ に交わる k 次元の Lipschitz 曲面族を $\Sigma_k(X)$ と記す。重さのついた Sobolev 不等式（例えば、[2, (1.1)] 参照）におけるように、重さ ω に対して次のような $A_{p,q}$ 条件をつける。

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^q dx\right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega^{-p'} dx\right)^{1/p'} < \infty.$$

ここに、Q は座標軸に平行な辺を持つ開立方体、$|Q|$ はその体積、$p, q > 1$、$1/p + 1/p' = 1$ とする。次に集合 $X \subset R^d$ に対して、積分 $\int_{R^d} |f|^p \omega\, dx$ が有限な Borel 可測な関数 f が存在して、ポテンシャル $\int |x-y|^{\alpha-d} f(y)\, dy$ が X 上 ∞ に等しいが $\equiv \infty$ ではないとき、X は (α, p, ω)-極集合であると言う。

定理 1. $1 < p \leq d/k$ とし、ω は重さとする。また、β, $0 \leq \beta < k$, に対し、q_β を $1/q_\beta = 1/p - (k-\beta)/d$ によって定めるとき、$\omega \in A_{p, q_\beta}$ であると仮定する。もし

$X \subset R^d$ に対し $M_p(\Sigma_k(X); \omega^p) = 0$ ならば, X は (k, p, ω^p)-極集合である.

定理 2. $1 < p \leq d/k$ とし, $1/q = 1/p - k/d$ によって定められた q に対して $\omega \in A_{p,q}$ ならば, 定理 1 の逆が成り立つ。

参 考 文 献

[1] B. Fuglede: Extremal length and functional completion. Acta Math. 98(1957), 171-219.

[2] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden: Weighted norm inequalities for fractional integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 192(1974), 261-274.

15. 極値的長さに関するChinakの結果の拡張

大津賀 信

Coarea formula を用いて，Chinak [1, p. 592, 定理 1] は次の定理を証明した：Dは平面領域，$t=f(x_1,x_2)$ は $[a,b]$ 内の値を取る実数値関数で，各tに対する逆像は，長さもその逆数も有界なJordan曲線で，$|\mathrm{grad}\, f|$が正の下限を持てば，$\Gamma=\{f^{-1}(t)\}$ の module $M_2(\Gamma)=\int_a^b dt\left(\int_{f^{-1}(t)}|\mathrm{grad}\, f|ds\right)^{-1}$.

我々はこの結果を次のように拡張する。

定理。pは $1<p<\infty$，整数 k, d, j は $1\leq j\leq \min(k,d)$ をみたし，ωは重さ，すなわちR^k内の局所可積分な非負関数で，$y=f(x)$はR^k内のBorel集合B_0をR^d内へ写す局所Lipschitz関数で，$f(B_0)$はHausdorff測度m_jに関してσ−有限とする。$(J_jf)^2$はマトリックス$(\partial y_m/\partial x_n)$の次数jの小ヤコビアンの二乗和とし，

$$\Sigma=\{f^{-1}(y);\, y\in R^d,\ \int_{f^{-1}(y)}(J_jf)^{1/(1-p)}\omega^{1/(1-p)}dm_{k-j}>0\}$$

と置くと，重さωのついた module $M_p(\Sigma;\omega)$ は

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{f^{-1}(y)}(J_j f)^{1/(p-1)}\omega^{1/(1-p)}dm_{k-j}\right)^{1-p}dm_j(y)$$

に等しい。Σが空でなければ，極値関数が具体的に求められる。

証明には，[2] にある一般化された coarea formula が用いられる。

最後に，

$$\Sigma_0=\{f^{-1}(y)\,;\,y\in\mathbb{R}^d,\ m_{k-j}(\{x\in f^{-1}(y)\,;\,J_j f(x)=0\})>0\}$$

と置くと，$m_j(\{y\,;\,f^{-1}(y)\in\Sigma_0\})=0$ が分かる。しかし $M_p(\Sigma_0;\omega)$ については何も分かっていない。

参考文献

[1] M. A. Chinak : Isoperimetric properties of the module and quasiconformal mappings. Siber. Math. J. 27 (1987), 591-598.

[2] M. Ohtsuka : Area formula. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 6 (1978), 599-636

16. Schottky型Fuchs群のTeichmüller空間について

須川 敏幸　　京大・理

単位円板 U に作用するFuchs群 Γ が Schottky型であるとは、ここでは Γ が第2種有限生成純双曲的であることと定める。（本当はFuchs型のSchottky群と呼ぶべきかもしれない）また Γ が巡回群の場合も含める。

$B_2(\Gamma)$ を次の複素Banach空間

$\{\varphi : U \to \mathbb{C}$; 正則函数, $\|\varphi\|_U < \infty$, $(\varphi\circ\gamma)\cdot(\gamma')^2 = \varphi \quad {}^\forall\gamma\in\Gamma\}$

とする。ただし、ここに $\|\varphi\|_U := \sup_{|z|<1} (1-|z|^2)^2 |\varphi(z)|$ とする。

この部分集合

$S(\Gamma) = \{ S_f \in B_2(\Gamma)$; $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ は単葉有理型函数$\}$

$T(\Gamma) = \{ S_f \in S(\Gamma)$; $f(U)$ は quasidisk $\}$

を考える。（ここに $S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$ は f の Schwarz 微分である。）

$T(\Gamma)$ は Fuchs群 Γ の Teichmüller空間（の Bers モデル）と呼ばれる。$T(\Gamma)$ と $S(\Gamma)$ の関係については Fuchs群の変形理論の立場などから多くの研究がなされているが、

例えば Gehring (1977) により Int $S(1) = T(1)$ であることが示された。(1は単位群. $T(1)$ は普遍 Teichmüller 空間と呼ばれる)

その後, Žulavlev (1980) により「$T(\Gamma)$ は Int $S(\Gamma)$ の 0 を含む連結成分である」ことが示されたが, Int $S(\Gamma)$ が $T(\Gamma)$ の他に成分を持つとは考えにくいので, 自然に Int $S(\Gamma) = T(\Gamma)$ が任意の Fuchs 群について成り立つのではないかと期待される。

(しかし, 一般に $S(\Gamma)$ は closed だが, $S(\Gamma) = \overline{T(\Gamma)}$ ではない.
$\Gamma = 1$ の場合には $S(1)$ は孤立点すら持つことが分かっている. (Thurston))

Γ が第1種有限生成 (i.e., cofinite) の場合には実際、
Int $S(\Gamma) = T(\Gamma)$ であることが志賀氏によって示された (1985).
今回の筆者の結果は Γ が Schottky 型であるときも, やはりこの予想が正しいと主張するものである。

定理

Γ が Schottky 型 Fuchs 群である時,

$$\mathrm{Int}\ S(\Gamma) = T(\Gamma)$$

が成立する。

17.

不連続な Monodromy 群を持つ Riemann 面上の Projective Structures について

東工大　理　志賀　啓成
名大　理　谷川　晴美

Γ を上半平面 H に作用する Fuchs 群で、H/Γ が compact Riemann 面を表すものとする。Γ に関する上半平面上の有界正則２次微分の空間を $B_2(H,\Gamma)$ とする。任意の $\varphi \in B_2(H,\Gamma)$ に対して、H 上の(正規化された)局所単葉な有理型関数でその Schwarz 微分が φ になるものがとれる。これを W_φ と書く。これは、

$$\chi_\varphi(\gamma)\circ W_\varphi = W_\varphi \circ \gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$$

によって、Γ から $PSL(2, \mathbf{C})$ への準同型 χ_φ を導く。この準同型を monodromy と呼ぶが、この monodromy の imageが不連続群となるような $\varphi \in B_2(H,\Gamma)$ 全体 $K(\Gamma)$ を考える。このような集合は閉集合になるが、Bersによるタイヒミュラー空間の埋め込み $T(\Gamma)$ と関連が深い。実際、$T(\Gamma)$ は $K(\Gamma)$ の内点集合 Int $K(\Gamma)$ の連結成分で原点を含むものと一致している。更に、Int $K(\Gamma)$ が $T(\Gamma)$ 以外に連結成分を持つとき（そのような Fuchs 群の存在はMaskit[2]による）、W_φ はcovering map にはならず、上半平面の像は Riemann 球面全体になる([3])。一方、W_φ が covering map になれば $K(\Gamma)$ に属し、かつそのような集合は compact になっている。

講演では、$T(\Gamma)$ 以外のInt $K(\Gamma)$ の任意の連結成分 K について、

(1) K の任意の元 φ に対して、monodromy 群 $\chi_\varphi(\Gamma)$ を決定すること。

(2) K の（解析的）性質を考察すること。

についての結果を中心に報告する。

また、関連した結果についても触れる。

参考文献

1. Kra, I. and B. Maskit, Remarks on projective structures. Ann. Math. Studies. **97** (1981), 343–359.

2. Maskit, B., On a class of Kleinian groups. Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math. **442** (1969), 1–8.

3. Shiga, H., Projective structures on Riemann surfaces and Kleinian groups. J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987), 433–438.

特別講演

（無限生成）双曲的離散群の剛性定理

松崎克彦　東工大・理

0. 前おき

$\mathbb{H}^{n+1}$ を $n+1$ 次元双曲空間の上半空間モデルとし、その等長変換で向きを保つものの全体のなす群を $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{n+1})$ で表わす。$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{n+1})$ の（有限生成とは限らない）離散部分群 Γ の変形に対する剛性およびそれに関連する話題を述べる。様相は、$n=1$ の場合（Fuchs群）と $n\geq 2$ の場合で異なるが、後者は簡単のためと周辺の結果にも言及するため $n=2$ の場合（Klein群）で代表する。単に剛性定理等に関しては、ほとんど同様のことが高次元でも成立するが、$\partial\mathbb{H}^3=\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角写像が Beltrami 微分を与えれば構成できる（measurable Riemann mapping theorem）のに対し、高次元の擬等角写像に関してそれに対応する結果がないためにおこる不都合もある。

1. Klein群の剛性と保存性

剛性定理として最もよく知られているものに次のMostowの定理がある：$N=\mathbb{H}^3/\Gamma$ をコンパクトな完備双曲的多様体とし、別の完備双曲的多様体 N' に対して $\pi_1(N)\cong\pi_1(N')$ であるならば、N と N' は等距離同値である。証明のステップは、

(1) $\pi_1(N)\cong\pi_1(N') \Rightarrow \exists f: N\to N'$ psedo-isometry

(2) f の持ち上げ $\tilde{f}:\mathbb{H}^3\to\mathbb{H}^3$ は $\partial\mathbb{H}^3=\hat{\mathbb{C}}$ の擬等角写像に拡張される。

(3) $\tilde{f}|\hat{\mathbb{C}}$ の歪曲係数は自明なものとなる。

である。

この(1)はコンパクト（ただし、カスプを保つ同型とすれば有限体積の場合にも拡張できる）であることが必要であるが、(2)(3)についてはより一般のKlein群 Γ に対しても考察できる。そこで、（有限生成とは限らないが簡単のため第一種 $\Lambda(\Gamma)=\hat{\mathbb{C}}$ と仮定する）Klein群 Γ が剛性を持つとは、psedo-isometry $f:\mathbb{H}^3/\Gamma\to\mathbb{H}^3/\Gamma'$ は常に isometry にホモトープであることと定義する。これは言いかえれば、擬等角写像 $\tilde{f}|\hat{\mathbb{C}}$ が等角であることである。よって問題は、

(3) において、Γ に関する非自明な Beltrami 微分が存在するかということになる。そこで、$\hat{\mathbb{C}}$ を Γ の作用により二つの部分に分割する。すなわち、Γ の"基本領域"のとれる部分 $\mathcal{D}(\Gamma)$ とその補集合 $R(\Gamma)$ である。

$\mathcal{D}(\Gamma)$ が正の (Lebesgue) 測度を持てば、その上で非自明な Beltrami 微分が構成され、擬等角写像 $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ が $\mathbb{H}^3$ の psedo-isometry に Γ と両立するように拡張される (Douady - Earle - Tukia) ので、Γ は剛性を持たない。逆に $R(\Gamma)$ 上では、Γ に関する Beltrami 微分は自明なものしかない (Sullivan)。従って、

"Γ が剛性を持つ $\Leftrightarrow$ $R(\Gamma) = \mathbb{C}$ a.e" (Sullivan の剛性定理) がわかる。このような (第一種) Klein 群を保存的 Klein 群と呼ぶことにする。

2. 被覆多様体の剛性について

まず、保存的 Klein 群 Γ ($\leftrightarrow$ 剛性をもつ双曲的多様体 $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$) を幾何学的に特徴づける。Sullivan は保存的部分 $R(\Gamma)$ が horospherical limit set $\Lambda_h(\Gamma)$ と a.e. に一致することを示し、

集合とればよい。

命題1. 任意の $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は、凸核の境界が全測地的なある $\mathbb{H}^3/\Gamma'$ を被覆する。

$N=\mathbb{H}^3/\Gamma$ の凸核のダブルを $\tilde{N}=\mathbb{H}^3/\tilde{\Gamma}$ とすれば、$\tilde{\Gamma}$ は半直積分解 $\tilde{\Gamma}=\Gamma\ltimes H$ を持つ。このとき

命題2. $\Lambda(\Gamma)$ が測度0 $\Longleftrightarrow$ H が保存的

が成り立つ。このような見方をすれば、定理1は"幾何学的有限なKlein群に対してAhlfors予想が成立する"に対応する結果であると考えられる。一般のAhlfors予想に相当するように定理1を変形すると次の予想が思いつく。

予想. $N=\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$ を保存的とし、$N'=\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma'$ は非自明な有限生成の被覆変換群を持つ N の正規被覆とすると Γ' は保存的である。

保存的なΓに対する$N=\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$がみたす性質(C)は、遠方の広がりの小ささを表わす指標である。従って被覆多様体が(C)をみたすためには、おおまかに言って、被覆される多様体が小さく、被覆変換群も小さければよいと考えられる。このような方針は、Lyons-Sullivan が Riemann 多様体上の Brown 運動の回帰性や調和函数の Liouville 性(Γのエルゴード性)に対して同様の考察をしたものが、保存性(C)に対して行なっているものと考えられる。

予想には証明も反例も与えられないが、被覆のしかたに次のような仮定をおけば、証明ができ、有限生成の意味が暗示される。

定理2. $N=\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$は性質(C)をみたし$N'=\mathbb{H}^{n+1}/\Gamma'$はその正規被覆で被覆変換群$G\cong\Gamma/\Gamma'$は有限生成であるとする。$G$の生成元($r$個とする)を固定し、その被覆に関する Cayley graph の頂点の集合Vから点$P\in N'$のG-orbit の上への自然な対応を$\varphi_P : V\to G(P)$とする。

このとき，rと次元nのみによって定まる正の定数δとN'のある点qが存在して，次をみたすならば，N'も性質(C)をみたす：任意の$p\in N'$と（有限個を除いて）任意の隣接する頂点v, v'に対し，

$$|d(\varphi_p(v), q) - d(\varphi_p(v'), q)| \geq \delta$$

3. 構造安定性と射影構造の剛性

Γを有限生成Klein群とし，ΓのPSL(2,$\mathbb{C}$)表現空間の中で恒等写像したΓ→PSL(2,$\mathbb{C}$)の近傍を考える。Γが剛性を持つとは，との近傍がすべてPSL(2,$\mathbb{C}$)-共役からなることにほかならない。それに対し，との近傍がすべて同型写像からなるとき，Γは構造安定であるという。SullivanはねじれのないΓに対し，構造安定性の必要十分条件を与え，その条件は極限集合上でexpanding propertyを持つことを示した。これとねじれを許すKlein群Γに拡張すると一般に放物型元も存在しうる。

定理3．有限生成Klein群Γが構造安定であるための必要十分条件は，Γが幾何学的有限でかつΓのカスプは剛性を持つことである。

また，放物型変換を保つ表現の空間において同様のことを考えれば，擬等角安定性が幾何学的有限性と同値であることが示される。

さらに，面積有限なRiemann面 H^2/Γ の射影構造のモノドロミー表現 $\chi: \Gamma \to PSL(2,\mathbb{C})$ 全体からなる空間において，射影構造の展開写像が被覆写像となっている表現全体 $\mathcal{S}(\Gamma)$ を考えるとき，その孤立点（モノドロミー表現として剛性を持つ点）について次の結果を得る。

定理4．$\chi(\Gamma)$ が幾何学的有限となるような χ について，χ が $\mathcal{S}(\Gamma)$ の孤立点であるための必要十分条件は，$\chi(\Gamma)$ が不連続領域の不変成分以外でモジュライを持たず，かつ，additional non-rigid cusp を持たないことである。

例えば，$X(\Gamma)$が additional な torus cusp を持てば，Gallo の構成法と同様にして，Xに幾何学的に収束するモノドロミー表現の列がとれ，Xは孤立しない。

4. Fuchs群の剛性

$n=1$の場合，すなわち Fuchs群Γに対して，双曲的 Riemann面 $\mathbb{H}^2/\Gamma$ は Mostow剛性のようなものは持たない。実際，$\mathbb{H}^2/\Gamma$が種数gのコンパクトな Riemann面とすると，その双曲構造(複素構造)の変形 $f: \mathbb{H}^2/\Gamma \to \mathbb{H}^2/\Gamma'$ 全体には実$6g-6$次元分のパラメーターがはいる。しかし，Γの$\partial\mathbb{H}^2=\hat{\mathbb{R}}$上の作用を考え，それと両立する$f|_{\hat{\mathbb{R}}}$を"なめらかな関数"の範囲で考えれば，やはりそれは Möbius変換しかない。そこで離散群の剛性をその無限遠上で考えて次のように表現すれば$n=1$の場合にも意味がある：

$\Gamma \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^{n+1})$が剛性を持つとは，$\Gamma$と両立する$\partial\mathbb{H}^{n+1}$上の同相写像で絶対連続なものは Möbius変換に限る。

Γを発散型のFuchs群とする。Γが上の意味で剛性を持つことは、$\hat{R}\times\hat{R}$上の作用のエルゴード性を用いてKuusalo, Sullivan, $Ac(\Gamma)=R$ a.e. であることを用いてAgard, Ivanov等により示されている。逆にAstala-Zinsmeisterは剛性を持つならば発散型であることを証明したが、現在この証明はPommerenke, Hamilton, 筆者等により次のような方法で簡明にされている。まず、コンパクト集合のΓ-orbitをさけるようにしてのこぎり型のrectifiable Jordan領域を構成し、その境界のlinear measureとharmonic measureが互いに絶対連続であることが、この領域上等角となる写像に対応する$f|_R$で絶対連続なものを与える。

また、のこぎり型領域を構成する同様の論法で定理1の逆の主張もFuchs群の場合に得られるので、発散型Fuchs群の特徴づけとしてあわせてまとめておく。

定理5. Fuchs群Γについて次は同値である。

(1) $\Lambda_c(\Gamma) = \mathbb{R}$ a.e

(2) Γは剛性をもつ

(3) Γの非自明な正規部分群は保存的である。

なお、Klein群の場合には、剛性と同値な条件であった保存性はFuchs群の場合、擬等角変形で不変な性質ではない。いいかえれば性質(c)はpsedo-isometryで不変でないことを示されている。

最後に、Möbius変換と異なるΓと両立する$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$のなめらかでなさは次のような形にも表わされている。

定理6. Γを有限生成第一種Fucks群とし、$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を$\Gamma$と両立するquasisymmetric functionとするとき、fは

(1) Möbius変換であるか

(2) 正の定数$\varepsilon = \varepsilon(f)$が存在して、$\Gamma$と両立し、$f$と異なるquasisymmetric function $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$に対して$\|g^{-1} \circ f\|_g \geqq \varepsilon$をみたす。

ここで$\| \ \|_q$はquasisymmetric normである。

※印は本社で記入

18. On the supra-Frechet differentiability and generalized R.Fueter's regularity of composite functions in associative hypercomplex n-tuple spaces.

笹山浩良　SASAYAMA INSTITUTE

Hiroyoshi SASAYAMA

$\mathfrak{S}$ を associative n次元 non-commutative algebra(unity element ∃をもつ)とし $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}'$, $\mathbb{B}''$(3つのノルム空間)に associate された hypercomplex n-tuple space を夫々 $E(\mathfrak{S})$, $E'(\mathfrak{S})$, $E''(\mathfrak{S})$ とすると

(定理) $X=X_o \in E(\mathfrak{S})$ の一つの近傍 U_{X_o} 上から $E'(\mathfrak{S})$ への函数 $f(X)$ が X_o で左 Fréchet 微分可能で $Y_o=f(X_o) \in E'(\mathfrak{S})$ の一つの近傍 U_{Y_o} 上より $E''(\mathfrak{S})$ 中への函数 $\Phi(Y)$ が Y_o で左 Fréchet 微分可能ならば，合成函数 $\Psi(X) \equiv \Phi(f(X)) : U_X \to E''(\mathfrak{S})$ は亦 X_o で左 Fréchet 微分可能である．右 Fréchet 微分可能性についても同様。

が成立するが而し拡張された R.Fueter 氏正則性については．対応する定理の成立は困難である．(昨年 8月の Plovdiv における才 4回 微分方程式国際 Colloquuium での招待講演で報告。)

ERRATA I

(1991年4月の報告：On generalized power series in hyper-complex n-tuple spaces)

2ページ目	誤	⇒	正
下から1行目	…あるものとする。		あるものとし $\mathfrak{S}$ は可換とする。

ERRATA II

(1992年4月の報告：On generalized homogeneous polynomials in non-commutative hypercomplex n-tuple spaces)

1ページ目	誤	⇒	正
下から1行	dX についての m 次の斉次多項式である		dX についての n^m ケの拡張された m次斉次多項式の和である。

ERRATA III

(1992年4月の報告：On non-associative hypercomplex n-tuple spaces associated with normed spaces)

2ページ目	誤	正
上から5行目	$E(\mathfrak{S})$は常に	associativeな$\mathfrak{S}$に対する $E(\mathfrak{S})$は常に

ERRATA IV

(1993年3月の報告:On generalized Cauchy-Hadamard's theorem in certain hypercomplex n-tuple spaces)

2ページ目	誤	正
(定理)中(*)	$\mathcal{Q}_m(X_1,\ldots,X_m)=$	$\|\mathcal{Q}_m(X_1,\ldots,X_m)\|=$
下から7行目	$\mathbb{B}$がpre-Hilbert spaceで$n=4$, $\mathfrak{S}=\Xi$の	$\mathbb{B}$がreal pre-Hilbert spaceで$n=4$, $\mathfrak{S}=\Xi_R$ (real quaternion algebra)の
下から4行目	pre-Hilbert space, Hilbert	real pre-Hilbert space, real Hilbert
下から2行目	$E(\Xi)$, $E'(\Xi)$で	$E(\Xi_R)$, $E'(\Xi_R)$で

ERRATA V

(1993年3月の報告):On left-(right-)Fréchet differentiability and generalized R.Fueter's regularity of...)

1ページ目	誤	正
下から7行目	とした。	とし$\mathfrak{S}$は可換とする。
下から6行目	$\mathbb{P}(X)$が左(右)Fréchet	$\mathbb{P}(X)$が左(右)supra-Fréchet
下から4行目	$\mathbb{P}(X)$が左(右)Fréchet	$\mathfrak{S}$が可換のとき, $\mathbb{P}(X)$が左(右) supra-Fréchet
下から2行目	共に、	共に、$\mathfrak{S}$が非可換のとき.

19. Severi, de Franchisの定理について

田辺正晴　東工大理

定理(de Franchis): $\hat{X}, X$; genus ≥ 2 の compact Riemann面。$\hat{X}$からXへの holomorphic (non-const.) mapの数は有限。

定理(Severi): $\hat{X}$; genus ≥ 2の cpt Riemann面。genus ≥ 2 の cpt Riemann面で、$\hat{X}$からの holo. (non-const.) map が存在するものは有限コ。

上記の定理に関連して次の定理1〜3を得た。

定理1: $\hat{X}$, X; genus $\hat{g}, g \geq 2$ の cpt. Riemann面。$h_1, h_2 : \hat{X} \to X$ holo. (non-const) maps. $M_1, M_2 \in M(2g, 2\hat{g}; \mathbb{Z})$; h_1, h_2より induce される homomorphism $H_1(\hat{X}) \to H_1(X)$の行列表現。このとき、$M_1 \equiv M_2$ (mod. $l > \sqrt{8(\hat{g}-1)}$ (~~$> \max(\hat{g}-1, \sqrt{10(\hat{g}-1)})$~~)) $\Rightarrow h_1 = h_2$。

($H_1(\ )$; first homology group).

$M_1 = M_2 \Rightarrow h_1 = h_2$は既に知られている([1])。

定理2; h_1, h_2 定理1と同じ。$M_1 = \begin{pmatrix} m_1^1 \\ \vdots \\ m_1^{2g} \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} m_2^1 \\ \vdots \\ m_2^{2g} \end{pmatrix}$

(m_i^j $(j=1,\cdots,2g)$ $(i=1,2)$ は$2\hat{g}$項行vector)

と表記。このとき、$m_1^j \equiv m_2^j$ (mod. l $(> 10(\hat{g}-1))$)

for $\forall j \in \{1, \cdots, g+1\} \Rightarrow h_1 = h_2$。

定理3; X_1, X_2; 同じ genus ≥ 2 なる cpt. Riemann面。$h_1 : \tilde{X} \to X_1$, $h_2 : \tilde{X} \to X_2$ holo (non-const.) map. M_1, M_2; h_1, h_2 よりinduceされるhomomorphism $H_1(\tilde{X}) \to H_i(X_i)$, $(i=1,2)$ の表現行列。このとき. $M_1 \equiv M_2$ $(\mathrm{mod}.\ l\,(> \cancel{\sqrt{10\tilde{g}}}\ \sqrt{8}(\tilde{g}-1))) \Rightarrow$ X_1, X_2 はconformal eq.。

定理1 (or 2) $\Rightarrow$ 定理 (de Franchis), 定理3 $\Rightarrow$ 定理 (Severi) であることはすぐにわかる。

$\mathcal{S}(\tilde{X})$ は $\tilde{X}$ からの holo. (non-const) map が存在する genus ≥ 2 の cpt. Riemann面全体の集合をあらわすものとする。このとき.

$$n \underset{\text{df.}}{=} \sum_{X \in \mathcal{S}(\tilde{X})} \#\{h : \tilde{X} \to X \mid \text{holo.(non.const)}\}$$

$$\leq \left(2\sqrt{6}(\tilde{g}-1)+1\right)^{2+2\tilde{g}^2} \tilde{g}^2 (\tilde{g}-1) (\sqrt{2})^{\tilde{g}(\tilde{g}-1)} + 84(\tilde{g}-1)$$

であることが知られている([2])。定理1,3を使って.

$$n < 2^{2\tilde{g}} l^{\tilde{g}^2 + \frac{\tilde{g}}{2} + \frac{1}{16}} \times 21(\tilde{g}-1)^2 + 84(\tilde{g}-1)$$

(l; prime かつ $\sqrt{10\tilde{g}} < l < 8\tilde{g}$) がわかる。

[1]. H. Martens, Observations on morphisms of $\cdots$, Bull. London Math. 10 (1978)

[2] A. Howard - A. Somme, On the theorem of de Franchis, Ann. Scola. P. 10 (1983)

20. 磁場に関する新直交分解公式とその応用。

山口博史　　滋賀大(教育)

$\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面 Σ で囲まれた領域を D とし、$D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ とおく。$\overline{D}$ 上の C^∞ 級 i-forms $(i=1,2)$ の全体を $Z_i^\infty(\overline{D})$ とかく。このとき、

__定理__　$\forall \sigma = a\,dx + b\,dy + c\,dz \in Z_1^\infty(\overline{D})$ に対して、次の(1), (2)が成立する。

(1) $J_\sigma dS_x = (a,b,c) \times n_x \, dS_x$ は Σ 上の面電流である、但し、n_x, dS_x は Σ 上の点 x における単位外法ベクトル及び面素を表わす。

それで、$J\,dS_x$ から生じる磁場を $B_\sigma(x) = (\alpha, \beta, \gamma)$ in $D \cup D'$ とし、$\omega_\sigma(x) = \alpha\, dy \wedge dz + \beta\, dz \wedge dx + \gamma\, dx \wedge dy \in Z_2^\infty(\overline{D})$ とおく。

(2) $\overline{\sigma} = \begin{cases} \sigma & \text{in } D \\ 0 & \text{in } D' \end{cases}$ と拡張する時、

次の直交分解が成立する：

$$*\overline{\sigma} = \omega_\sigma \dotplus dF \quad \text{in } D \cup D'$$

但し $F(x) = \dfrac{-1}{4\pi} \displaystyle\int_\Sigma \frac{n_y \cdot (a,b,c)}{\|x-y\|} dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\operatorname{div}(a,b,c)}{\|x-y\|} dv_y$.

$$F(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right) \text{ at } \infty$$

応用1　$\sigma \in Z_1^\infty(\bar{D})$ として、特に、D内の1-cycle γ に関する period 再生核 $*\sigma_\gamma$ ・∋・ $\int_\gamma \omega = (\omega, *\sigma_\gamma)_D$ for $\forall \omega \in Z_1^\infty(\bar{D})$ を取れば、その場合の面電流 $J_{*\sigma_\gamma} dS_x$ は Σ 上の1つの平衡面電流になる。

応用2　$\sigma \in Z_1^\infty(\bar{D})$ として、$\bar{D}$ 上の調和関数の微分 du を取れば、次の(1), (2)が出てくる：

(1)　$\omega_{du} = *d\left(\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{\|x-y\|}dS_y\right)$ in $D \cup D'$,

即ち、面電流 $(\nabla u \times n_x)dS_x$ on Σ の引き起す磁場は Σ 上の分布 $u\,dS_y$ をもつ2重層ポテンシャルの Gradient に等しい。

(2)　有名な公式：　$\forall x \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$c\,u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\partial u/\partial n_y}{\|x-y\|}dS_y + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{\|x-y\|}dS_y$$

但し $c = 1, \frac{1}{2}, 0$ on D, Σ, D' (respectively).
は、実は、$\mathbb{R}^3$ で考えれば、直交分解である。従って、

$$\|du\|_D^2 \geq \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\int_\Sigma \frac{\frac{\partial u}{\partial n_x}\frac{\partial u}{\partial n_y}}{\|x-y\|}dS_x dS_y .$$

応用3　応用2を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{C}$ へ言いかえると、(2)の最後の式は Grunsky の不等式に他ならない。更に、像領域の境界が piecewise smooth な曲線より成るとき、Grunsky 不等式が等式になる事の必十条件を導びける。

21. Appell F_4 の昇降演算子

加藤満生　琉球大学
教育学部

Appell's hypergeometric series F_4 is defined by

$$F_4(a,b,c,c';X,Y)=\sum \frac{(a,m+n)(b,m+n)}{(c,m)(c',n)(1,m)(1,n)} X^m Y^n,$$

where $c, c' \neq 0,-1,-2,\ldots$.

F_4 has eight contiguous functions, that is

$F_4(a\pm1,b,c,c';X,Y)$, $F_4(a,b\pm1,c,c';X,Y)$,

$F_4(a,b,c\pm1,c';X,Y)$, $F_4(a,b,c,c'\pm1;X,Y)$, in short

$F_4(a\pm1)$, $F_4(b\pm1)$, $F_4(c\pm1)$, $F_4(c'\pm1)$.

We denote

$$\delta_2=X\partial_X^2+Y\partial_Y^2+(X+Y-1)\partial_X\partial_Y+(1-\varepsilon)(\partial_X+\partial_Y),$$

$$\varepsilon=c+c'-a-b-1.$$

Then we have the following step-up(down) operators.

$H(a) = X\partial_X+Y\partial_Y+a$ then $H(a)F_4 = a\,F_4(a+1)$.

$H(b) = X\partial_X+Y\partial_Y+b$ then $H(b)F_4 = b\,F_4(b+1)$.

$B(c) = X\partial_X+c-1$ then $B(c)F_4 = (c-1)F_4(c-1)$.

$B(c')=Y\partial_Y+c'-1$ then $B(c')F_4 =(c'-1)F_4(c'-1)$.

$$H(c)=(c+\varepsilon)Y\delta_2+(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)((X+Y-1)\partial_X+2Y\partial_Y+a+b-c)$$

then

$$H(c)F_4= -(a-c)(b-c)(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)/c\ F_4(c+1).$$

$$H(c')=(c'+\varepsilon)X\delta_2+(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)((X+Y-1)\partial_Y+2X\partial_X+a+b-c')$$

then

$$H(c')F_4= -(a-c')(b-c')(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)/c'\ F_4(c'+1).$$

$$B(a) = (c+c'-2a)XY\delta_2$$
$$+(b+\varepsilon)\{((c'-a)(X+Y-1)+2(c-a)Y)X\partial_X$$
$$+((c-a)(X+Y-1)+2(c'-a)X)Y\partial_Y$$
$$+b(c'-a)X+b(c-a)Y-(c-a)(c'-a)\}$$ then

$$B(a)F_4= -(c-a)(c'-a)(b+\varepsilon)F_4(a-1).$$

$$B(b) = (c+c'-2b)XY\delta_2$$
$$+(a+\varepsilon)\{((c'-b)(X+Y-1)+2(c-b)Y)X\partial_X$$
$$+((c-b)(X+Y-1)+2(c'-b)X)Y\partial_Y$$
$$+a(c'-b)X+a(c-b)Y-(c-b)(c'-b)\}$$ then

$$B(b)F_4= -(c-b)(c'-b)(a+\varepsilon)F_4(b-1).$$

$H(a), H(b), B(c), B(c')$ are well known. $B(a)$ has been obtained by N.Takayama in a different form.

22. 調和函数及び整函数に対する河合の条件 (S) と正則増大性との同値性について

石村隆一 千葉大学教養部

岡田純一 千葉大学理学部

河合 [K] は、超函数の範疇に於いて合成積方程式を統括するべき条件として、次の条件 (S) を提案した：$S(x)$ を台がコンパクトな超函数 (hyperfunction)、$\hat{S}(\zeta)$ をその Fourier 変換として

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon>0, \text{ に対し } N>0 \text{ があって、} \\ \text{全ての } \eta\in\mathbb{R}^n \text{ で } |\eta|>N \\ \text{なるものに対し、} \zeta\in\mathbb{C}^n \text{ が存在して} \\ |\eta-\zeta|<\varepsilon|\eta|, \\ |\hat{S}(\zeta)|\geq e^{-\varepsilon|\eta|}. \end{cases} \text{とできる。}$$

そこでこの条件を使って、石村隆一と岡田靖則 [I-O] は、実軸方向に無限に延びる管状領域で定義された正則函数に作用する、台がコンパクトな超函数による合成積の定義する複体の超局所台を、作用素の特性集合で評価した。一方、 Morzhakov [M] は、 Favorov [F] による調和函数の正則増大に関する結果を用いることにより、正則函数の範疇では、解析的汎函数を核とする合成積方程式の可解性は核の Fourier-Borel 変換の正則増大性とほぼ同値であることを証明した。そこで本講演では、調和函数に対して条件 (S) を次のように一般化し、条件 (S) と実方向への正則増大性とが同値であることを述べる：但し、調和函数 $u(\xi)$ が $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ 方向に条件 (S) を満たすとは

$$(\mathrm{S})_{(\xi_0)}\quad \begin{cases} \text{任意の小さい } \varepsilon>0 \text{ に対し } N>0 \\ \text{で、全ての } r>N \text{ に対し} \\ \xi\in\mathbb{R}^m, \text{ があって } |\xi-\xi_0|<\varepsilon, \\ \dfrac{u(r\xi)}{r}\geqslant \hat{h}_u^*(\xi_0)-\varepsilon. \end{cases}$$

である。

Bibliography

[F] Yu.Favorov, On the addition on the indicators of entire and subharmonic functions of several variables, Mat. Sb., **105** (**147**)(1978), 128–140.

[I-O] R.Ishimura et Y.Okada, The existence and the continuation of holomorphic solutions for convolution equations in tube domains, à paraître dans la Bull. Soc. Math. France.

[K] T.Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **17**(1978), 467–517.

[M] V.V.Morzhakov, On epimorphicity of a convolution operator in a convex domains in $\mathbf{C}^l$, Mat. Sb., **132** (**174**)(1978), 352–370 (Math. USSR Sb., **60**(1988), 347–364).

23.

吸引不動点の標準形について

上田哲生　　　京都大学総合人間学部

U を $0 \in \mathbf{C}^n$ の近傍，$F : U \to \mathbf{C}^n$ を正則写像とし，0 が F の吸引不動点であるとする．即ち，$F(0) = 0$ かつ F の 0 における微分（線型項）dF_0 の固有値$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は $0 < |\lambda_k| < 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ を満たすと仮定する．

以下では F の 0 における germ を問題とする．従って，F の定義域 U を必要に応じて小さく取り直す．また，dF_0 の固有値は

$$1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0$$

なるように番号づけられているとする．

定義　写像 $F : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ が下半三角型であるとは $f_k(x)$ が次の形であることをいう：

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \lambda_1 x_1 \\
f_2(x) &= \lambda_2 x_2 + h_2(x_1) \\
f_3(x) &= \lambda_3 x_3 + h_3(x_1, x_2) \\
\cdots & \quad \cdots\cdots \\
f_n(x) &= \lambda_n x_n + h_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})
\end{aligned}$$

ここで，h_k は $k-1$ 個の変数 $x_1, \ldots, x_{k-1}$ の正則関数で $h_k(0, \ldots, 0) = 0$ $(k = 2, \ldots, n)$.

ここでは，0 を吸引不動点とする任意の写像 F（の 0 における germ）は下半三角型の多項式写像に共役であるということの一証明を述べる．

これをもう少し強い形で述べるために，次の定義をする：k 重指数全体の集合を

$$\mathbf{N}^k = \{I = (i_1, \ldots, i_k) \mid i_1, \ldots, i_k \text{ は非負整数}\}$$

で表す．また $S_k \subset \mathbf{N}^k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ を

$$S_k = \{I = (i_1, \ldots, i_k) \mid \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_k^{i_k} = \lambda_{k+1}\}$$

で定める．これは明らかに有限集合である（generic には空集合）．

多重指数 $I = (i_1, \ldots, i_k) \in S_k$ を持つ単項式 $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}$ の線形結合である k 変数多項式の全体を $\mathcal{P}_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ で表す．(S_k が空のときは $\mathcal{P}_k = \{0\}$.) 関数 $h(x_1, \ldots, x_k)$ が $\mathcal{P}_k$ に属するための必要充分条件は

$$h(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_k x_k) = \lambda_{k+1} h(x_1, \ldots, x_k)$$

である．

定理 1　0 を吸引不動点とする任意の写像 F は，$h_k(x_1,\ldots,x_{k-1}) \in \mathcal{P}_{k-1}$ $(k=2,\ldots,n)$ なる下半三角型多項式写像に共役である．

証明の第１段階では次を示す：F は，各 $h_k(x_1,\ldots,x_{k-1})$ が正則関数である下半三角型写像に共役である．そのために，次の２つの補題を用いる．

補題 2　$a \in T_0\mathbf{C}^n$ を dF_0 の固有値 λ_n に対応する固有ベクトルとする．($dF_0 a = \lambda_n a$.) このとき，U 上の正則ベクトル場 $v(x)$ で $v(0)=a$ かつ

$$dF_x v(x) = \lambda_n v(F(x)) \quad x \in U$$

を満たすものが唯一つ存在する．

補題 3（ベクトル場の直線化定理）　$v(x)$ を開集合 U 上の正則ベクトル場で $v(0) \neq 0$ なるものとする．このとき 0 の近傍 $\widehat{U}$ および単射正則写像

$$\Phi : \widehat{U} \ni \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \longmapsto x = (x_1,\ldots,x_n) \in U$$

で　$\Phi(0)=0$, $d\Phi\frac{\partial}{\partial \xi_n} = v$ なるものが存在する．

証明の第２段階では $h_k(x_1,\ldots,x_{k-1}) \in \mathcal{P}_{k-1}$ とできることを次元に関する帰納法で示す．そのために $V \subset \mathbf{C}^{n-1}$ を 0 の近傍として，次のような正則写像 $F : V \times \mathbf{C} \to V \times \mathbf{C}$ を考察する：

$$F(y,z) \longmapsto (G(y), \mu z + h(y))$$

ここで，$y=(x_1,\ldots,x_{n-1})$，$z=x_n$，$\mu=\lambda_n$ とし，$G: V \to \mathbf{C}^{n-1}$ は，0 を吸引不動点とする正則写像．また $h(y) \in \mathrm{Hol}(V)$ とする．V を適当にとりなおして $F(V) \subset V$ と仮定する．線型作用素 $L : \mathrm{Hol}(V) \to \mathrm{Hol}(V)$ を

$$L[\varphi](y) := \varphi(G(y)) - \mu\varphi(y)$$

によって定める．

補題 4　$h, \widehat{h}, \varphi \in \mathrm{Hol}(V)$ とする．$F(y,z) = (G(y), \mu z + h(y))$ と $\widehat{F}(y,z) = (G(y), \mu z + \widehat{h}(y))$ とが双正則写像 $\Phi : V \times \mathbf{C} \to V \times \mathbf{C}$

$$\Phi(y,z) = (y, z+\varphi(y))$$

によって共役であるための必要十分条件は，$L[\varphi] = h - \widehat{h}$ が成り立つことである．

24. 星型擬凹状集合について

西野利雄　　九州大学工学部

複素変数 z の平面の領域 D と複素変数 w の平面 $\mathbf{C}$ の直積領域 $\Lambda = D \times \mathbf{C}$ において擬凹状集合 E を考える．E の $z = z'$ による切り口 $E(z')$ が常に有限個の点 $f_\nu(z')$ $(\nu = 1, \ldots, \nu_{z'})$ と原点を結ぶ線分 $l_\nu(z') = [0, f_\nu(z)]$ の和集合であるとき E を星型擬凹状集合と言うことにする．そして，$l_\nu(z')$ を $E(z')$ の成分，$f_\nu(z')$ を $l_\nu(z')$ の端点，$|f_\nu(z')|$ を $l_\nu(z')$ の長さ，$\arg f_\nu(z')$ を $l_\nu(z')$ の偏角と言う．

E を Λ における星型擬凹状集合とするとき，先ず次の補題が得られる．

補題　z_0 を D の点とし，$E(z_0)$ は N 個の成分よりなるとし，さらに δ を z_0 のある近傍とするとき，δ の任意の点 z' にたいし，$E(z')$ は高々 N 個の成分よりなるとする．そして，z_j $(j = 1, 2, \ldots)$ を z_0 に収束する δ の点列，$l_0(z_j)$ を $E(z_j)$ の一つの成分とし，$l_0(z_j)$ の偏角 α_j はある値 α_0 に収束するとする．このとき，α_0 は $E(z_0)$ のどれかの成分の偏角に一致する．

この補題より，次の定理が得られる．

定理 1　D 内の内点を含まない閉集合を除いて，$E(z)$ の各成分 $l_\nu(z)$ $(\nu = 1, \ldots, \nu_z)$ の端点 $f_\nu(z)$ は z の正則函数である．

これらの命題の証明には A. Cornea による次の定理が使われる．

定理 2 (Cornea)　複素変数 z の平面において単位円 $C : |z| < 1$ を考え，e $(e \subset C)$ を原点を含まない点集合とする．そして，任意の正の数 r $(r < 1)$ にたいし，円 $\xi_r : |z| = r$ を考えるとき，常に $e \cap \xi_r \neq \emptyset$ であると仮定する．このとき，C における任意の劣調和函数 $\varphi(z)$ にたいして，等式

$$\varlimsup_{\substack{z \in e \\ z \to 0}} \varphi(z) = \varphi(0)$$

が成立する．

次に D を z 平面の単位円 $|z| < 1$ とし，E を Λ における星型擬凹状集合で $E(0) = \{0\}$ となるものとする．そして，

$$\varphi(z) = \max_{(z,w) \in E} |w|, \qquad \Phi(r) = \max_{|z| = r} \varphi(z)$$

と置き，さらに

$$\lim_{r\to 0}\frac{\log\Phi(r)}{\log r}=\alpha$$

と置く．このとき，次の定理が得られる．

定理 3　α は有理数である．

この定理の証明には，岡による次の定理が使われる．

定理 4 (岡)　*2* 複素変数 z, w の空間の双円筒領域 $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$ において，擬凹状集合の無限列 E_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ を考える．そして E^0 をこの無限列の上極限とし，さらに，Δ_1 の任意の点 z による E_ν の切り口の無限列 $E_\nu(z)$ $(\nu=1,2,\ldots)$ の上極限を $K(z)$ とする．このとき，Δ_1 に描かれた長さを持つ任意の単純曲線 γ 上の点 ξ で，E^0 の ξ による切り口 $E^0(\xi)$ が Δ_2 内に境界を持ち，それが $K(\xi)$ に含まれないようなものの集合は，高々測度零である．

References

[1] A. Cornea, An identity theorem for logarithmic potentials, Osaka J. Math. 28 (1991), 829-836.

[2] K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. Vol. 4, No. 2 (1934), 93-98.

25. 関数体上のMordell予想のある高次元版：非コンパクト双曲的ファイバー空間の場合

鈴木 誠　広島大学理学部

複素解析的ファイバー空間（W, π, R）；即ち、全空間W，底空間Rは既約な解析空間、$\pi: W \longrightarrow R$は、正則射影で各ファイバーが既約，を考える。（W, π, R）が次の性質を持つとき、"（幾何的）Mordellic"と呼ぶことにする：

> 適当なbase changeのもとで、有理的(meromorphically)に自明なファイバー部分空間の自明な正則切断を除けば、（つまり本質的に非自明な）正則切断は高々有限個しかない).

どのような（W, π, R）が（幾何的）Mordellicか？についてLang（及び小林）の予想があるが、ここでは、非コンパクトファイバーの場合を考える.

W，Rがそれぞれある既約コンパクト解析空間$\overline{W}$，$\overline{R}$のZariski開集合で、$\overline{\pi}: \overline{W} \to \overline{R}$が、$\pi: W \to R$の正則拡張になっているようなコンパクト複素解析的ファイバー空間（$\overline{W}$, $\overline{\pi}$, $\overline{R}$）を（W, π, R）のコンパクト化とよぶ。

各ファイバーがコンパクト双曲的なファイバー空間((W,π,R) で、(W,π,R) があるコンパクト化 $(\overline{W},\overline{\pi},\overline{R})$ に $\partial R:=\overline{R}-R$ に沿って双曲的に埋め込めるならば、(W,π,R) は(幾何的)Mordellic である(野口, 1992). また、W が正規曲面, R が非特異曲線、各ファイバーが双曲型で、コンパクト化を持てば (W,π,R) は(幾何的)Mordellicである(Zaidenberg, 1989). ファイバーが高次元非コンパクトな場合には、次のことがわかった:(W,π,R)の各ファイバーは双曲的とする. (W,π,R) がコンパクト化 $(\overline{W},\overline{\pi},\overline{R})$ を持ち、

志賀−今吉

$\partial_h W:=\{\partial W$ の既約成分のうち、$\overline{\pi}^{-1}(\partial R)$ に含まれないものの全体$\}$

とおくとき、$\overline{W}\setminus\partial_h W$ は局所的に完備双曲的で、各 $t\in\overline{R}$ に対し、$\overline{\pi}^{-1}(t)\cap\partial W$ のある近傍 N に $N\setminus\partial W$ が双曲的に埋め込まれているならば、(W,π,R) は(幾何的)Mordellic である.

注) 解析空間はすべて reduced なものを考える.

26. Bergman核の安定性について

大沢健夫　名大理
Klas Diederich　Wuppertal大

有界領域Dの Bergman核 $K_D(z,w)$ の、Dの摂動に関する変分公式は、Hadamard以来の研究対象と言えるかもしれないが、内点における精密な変分公式以前の問題として、境界上の定点 p の近傍 U と $D\setminus U$ における $K_D(z,w)$ の挙動に、U の内部における D の摂動がどのような影響を及ぼすかを調べたい。∂D が強擬凸の場合には、$\bar\partial$-Neumann問題の解法理論の応用として Greene-Krantz による結果があるが、ここでは正則性の条件をできるだけ落として考える。

<u>定義</u>　定点 $p\in\partial D$ における D の局所摂動族とは擬凸領域の 1-parameter 族 $\{D_t\}_{0\le t\le 1}$ で次の条件を満たすものを言う。

1) $D=D_0$

2) p の任意の近傍 U に対し、$\exists t_0>0$ s.t.
$$D_t\setminus U = D\setminus U,\ \forall t\in[0,t_0].$$

非自明な局所摂動族の存在についてはCho (Math. Z. 211) の仕事がある。

<u>定理</u>　$\{D_t\}_{0\le t\le 1}$ を $p\in\partial D$ における D の局所摂動族とする。このとき、$\forall\varepsilon>0$, $\forall U \overset{\text{nbd}}{\ni} p$ に対し、$\exists t_0>0$ s.t. $\forall t\in[0,t_0]$ $\forall z,w\in D\setminus U$,

(1)
$$\left|\frac{K_{D_t}(w,w)}{K_D(w,w)}-1\right|<\varepsilon$$

(2)
$$\frac{|K_{D_t}(z,w)-K_D(z,w)|}{K_D^{1/2}(z,z)\,K_D^{1/2}(w,w)}<\varepsilon$$

(3)
$$(1-\varepsilon)ds_D^2(w)\le ds_{D_t}^2(w)\le(1+\varepsilon)ds_D^2(w)$$

これとは逆に、点 $p\in\partial D$ の近傍 U の外部における D の摂動が K_D の $U\cap D$ における挙動に及ぼす影響を調べることも可能である。その定理の正確な形は講演で述べる。(to appear in Int. J. Math)

27. Bergman計量による強擬凸領域の特徴付け

大沢健夫　名大 理
Klas Diederich　Wuppertal大

Dを滑らかな境界を持つ$\mathbb{C}^n$の有界擬凸領域とする。Dが強擬凸ならば、そのBergman計量ds^2_Dの∂Dにおける漸近挙動は境界距離

$$\delta_D(z) := \inf_{w \in \partial D} |z - w|$$

によって

$$(1) \qquad ds^2_D \sim \delta_D^{-1} ds^2_e + \delta_D^{-2} \partial\delta_D \bar{\partial}\delta_D$$

と表せる。(Diederich, Math. Ann 187)
これをふまえてその逆を考えてみる。即ち、(1)が成り立てばDは強擬凸かというのだが、その答は(予想通り) YES であった。(to appear in C. R. Acad. Sci.)

これ以前に、有限型の領域をBergman計量の漸近挙動で同様に特徴付けることが不可能であることが(これは予想外のことであろう) Diederich-

Herfort (J. Geom. Analysis 3) によって示されている。この二つの事実をどう理解したら良いかは今の所謎である。

28. Bergman 距離の評価について

大沢健夫　名大理
Klas Diederich　Wuppertal 大

有界擬凸領域 D 上の双正則不変な計量の一つに Bergman 計量がある。それは D 上の L^2 正則関数全体のなす Hilbert 空間を $H(D)$ とするとき、$H(D)$ の正規直交基底による D の $H(D)\setminus\{0\}/\mathbb{C}^*$ への埋め込みにより Fubini-Study 計量を引き戻したものとして特徴付けられ、正則写像の境界挙動の研究上重要なものである。Bergman 計量の完備性については、Caratheodory 計量との比較定理（Hahn）からすぐ分ることの他、∂D が滑らかなら完備であるとか（Ligocka, Pflug, 大沢）、D が強擬凸又は2次元有限型なら境界距離で主要項の記述が可能である等（Diederich, Catlin）が知られている。誰しも期待する基本的な予想は、Bergman 計量を ds_D^2, 境界距離を δ_D とするとき

$$(1)\qquad ds_D^2 \gtrsim \delta_D^{-2}\,\partial\delta_D\,\bar\partial\delta_D$$

であろうというものである。これは筆者にとって15年来

の難問の一つで未だに解決のめどはたっていない。ここでは(1)より弱い形ではあるが、完備性の定量的評価を与える次の定理を報告する。

定理 Dの境界がC^2級であれば、定点$z_0 \in D$からのds_D^2に関する距離$\mathrm{dist}(z, z_0)$について

$$\mathrm{dist}(z, z_0) \gtrsim \log(1 + |\log \delta_D(z)|)$$

(to appear in Ann. of Math.)

29. 対数容量とBergman核

大沢健夫　名大 理

$\mathbb{C}^n$の有界領域Dがhyperconvexであるとは、有界なC^2級多重劣調和exhaustion関数を持つ、即ち、

$\exists \varphi : D \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$　s.t.

$\sup \varphi < \infty$

$\partial\bar{\partial}\varphi \geq 0$

$\forall c < \sup \varphi$, $\overline{\{x \mid \varphi(x) < c\}} \subset D$

であることをいう。$n=1$のときDがhyperconvexであるための必要十分条件は、∂Dの各点がDirichlet問題の正則点であることである。$n>1$のとき、Klimek, Demaillyによってそれに対応する結果が完璧な類似物ではないにせよ得られており、多変数のポテンシャル論においてもhyperconvexityが重要な概念であることは確からしい。また近時Krushkálによりhyperconvexityは Teichmüller空間の注目すべき性質の一つとされているようである。(Math.

Ann. 290：議論にgapがありますが結果は正しい)
Bergman核 $K_D(z,w)$ については次が知られている。

<u>定理</u>（Nagoya Math. J. 129）$D \Subset \mathbb{C}^n$ が hyperconvex ならば

$$\lim_{z \to \partial D} K_D(z,z) = \infty$$

証明は L^2 正則関数の拡張定理により $n=1$ の場合に帰着してしまうのだが、一変数函数論においてこれが既に知られていたかどうかは定かではなかった。そこでgreen関数の性質を使ってそれを示したのだが、その証明は一変数函数論の専門家を必ずしも満足させなかったようである。よってこの部分を次の形で示して批判を仰ぐことにした。

<u>定理</u>（preprint）$\exists A \in [\pi, 750\pi]$ s.t. 任意のRiemann面S及びSの局所座標zについて $\sqrt{A K_S(z,z)} \geq c_\beta(z)$。但し $c_\beta(z)$ は対数容量とする。

g_p : green 関数

$$ds^2 = 4 e^{-2g_p} \varepsilon^2 (e^{-2g_p} + \varepsilon^2)^{-2} \partial g_p \bar{\partial} g_p$$

30. L^2正則関数の拡張について, III, IV

大沢健夫　　名大 理

$\mathbb{C}^n$の有界擬凸領域Dと複素超平面Hが与えられたとき、$D\cap H$上の正則関数をD上に拡張することを考える。この問題の動機はSerreによる正則領域の特徴付け(i.e. $H^i(D,\mathcal{O})=0\ \forall i>0$)のL^2 counterpartを確立することにあった。これまでの所、次の定理及びそのmanifold versionsが最良のものである。

定理. $D\cap H$上の任意のL^2正則関数はD上にL^2正則拡張をもつ. (大沢−竹腰. Math. Z. 195)

ここでDの境界に如何なる正則性の条件を課さなくてもよいという点が重要で、Dが滑らかな有限型の境界を持つ場合等に拡張作用素の正則性を論じることが興味深い問題となる訳である。

まず、Bergman核の評価を目的として次の定理が得られた。

定理1. $D\subset\mathbb{C}^n$ を有界擬凸領域、$\nu : D\to[-\infty,\infty)$ を多重劣調和関数、$H\subset\mathbb{C}^n$ を複素超平面、$d(z,H)=\inf\{|z-w| \mid w\in H\}$ とする。このときD上の多重劣調和関数ψで $\sup_D(\psi(z)+2\log d(z,H))<\infty$ なるものに対し、$D\cap H$ 上の正則関数 f が

$$\int_{D\cap H} e^{-\nu(z)-\psi(z)}|f(z)|^2\,dV_H<\infty$$

をみたせば、fのDへの正則拡張Fで

$$\int_D e^{-\nu(z)}|F(z)|^2\,dV \le C\int_{D\cap H} e^{-\nu(z)-\psi(z)}|f(z)|^2\,dV_H$$

をみたすものが存在する。但し、Cは $\sup_D(\psi+2\log d(z,H))$ にのみ依存する定数。(to appear in Math. Z.)

これにより、D'Angelo (Duke Math. 45) による擬楕円体のBergman核の評価の計算の一般的な基礎付けができたことになる。

次にこの方法論を用いてCarlesonの補間定理のSeipによるL^2-versionを多変数に拡張することを試みた。結果を簡潔に記述するために、Beurling-Malliavin-Landauによる密度の概念を多変

Inv. Math. 93

数に一般化する必要がある。それは多様体の境界の、与えられた部分多様体に対する"対数容量"として定義されるが(講演で正確に述べる). それを用いると一般的な補間定理が得られる。

定理2. Mをスタイン多様体. dV_MをM上のC^2級体積要素. SをMの閉複素部分多様体. φをM上のC^2級多重劣調和関数とする. S上の正値Radon測度$d\mu$について. αを$d\mu$の'φ-密度'より大なる任意の実数とするとき、S上の正則関数fが

$$\int_S e^{-\alpha\varphi}|f|^2 d\mu < \infty$$

をみたせば、fのMへの拡張Fで

$$\int_M e^{-\alpha\varphi}|F|^2 dV_M < \infty$$

をみたすものが存在する。(preprint)

$M=\mathbb{C}^n$の場合には. 定理2はLeont'ev, 西村. Seip等の結果の拡張と見なせる。また$-e^{-\varphi}$が多重劣調和なら結果は多少精密になる。