日 本 数 学 会

１９９３年度秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会
講 演 ア ブ ス ト ラ ク ト

１９９３年9月

於 大 阪 府 立 大 学

函数論分科会

9月29日（水） 第Ｖ会場

9:00 ～ 12:00

1	西本 勝之 (日大工) 杜 詩統 (中原大（台湾）)	*	Fractional calculus of Psi functions (Generalized Polygamma functions)	15
2	A.A. Kilbas (ベラルーシ国立大・福岡大理) 西郷 恵 (福岡大理)		On Mittag-Leffler type function, fractinal calculus operators and explicit solution of integral and differential equations	15
3	尾和 重義 (近畿大理工)		On a conjecture for Sakaguchi functions	15
4	尾和 重義 (近畿大理工)		The starlikeness of a class of integral operators	15
5	斎藤 斉 (群馬工業高専)		A linear operator and its applications to certain analytic functions	15
6	斎藤 三郎 (群馬大工)	*	Analyticity in the Meyer wavelets	15
7	E.M.U.S.B. Ekanayake (Univ. Peradeniya) 斎藤 三郎 (群馬大工)	*	ハンケル変換について	15
8	山下 愼二 (都立大理)		有理型単葉函数の係数評価	10
9	山下 愼二 (都立大理)		ポアンカレ密度とリプシッツ連続性	15
10	戸田 暢茂 (名工大)		On the order of holomorphic curves with maximal deficiency sum	15
11	石崎 克也 (東京工高専)		On the Schwarzian differential equation $\{w, z\} = R(z, w)$	15

13:00 ～ 14:15

12	斉ノ内 義一		リーマン面上での正則関数の近似	15
13	栗林 暐和 (中央大理工) 大森 昭治 (東京農大三高)		Riemann-Hurwitz の関係式, Eichler の跡公式, Riemann 面の自己同型群	15
14	小森 洋平 (京大数理研)	*	On the automorphic functions for Fuchsian groups of genus two	15
15	松崎 克彦 (東工大理)		The isomorphism theorem on Kleinian groups	15
16	佐藤 宏樹 (静岡大理)		real type の古典的 Schottky 群の Jørgensen 数について	15

函数論特別講演

増本 誠 (名工大)	Conformal mappings of a once-holed torus	(14:30 ～ 15:30)
S. Nag (The institute of Mathematical Sciences C.I.T. Campus)	Period matrices for universal Teichmüller space, Diff(S^1), and string theory	(15:40 ～ 16:40)

9月30日（木） 第V会場

9:00 ～ 12:00

17	宮川 幸隆 (静岡県立沼津東高校)		レムニスケート関数の一性質に関する証明法について	10
18	正岡 弘照 (京都産大理) 瀬川 重男 (大同工大)		Harmonic dimension of covering surfaces	15
19	前田 文之 (広島大理)		掃散空間の共役性と掃散空間上の Dirichlet 積分	15
20	伊東 由文 (徳島大総合科)	*	劣指数型正則関数の理論	15
21	梶原 壌二 (九大理) 西原 賢 (福工大) 吉田 守 (福大理) 李 琳 (済南電視大)		無限次元空間の領域からの正則写像の接続	15
22	梶原 壌二 (九大理) 坂西 文俊 (有明高専) 李 琳 (済南電視大)		Gauss maps of nearly minimal surfaces	15
23	松野 高典 (阪大理)		正規特異点と基本群	10
24.	渡辺 公夫 (筑波大数学)		Three dimensional hypersurface purely elliptic singularities of (0,1)-type	15
25	梅野 高司 (九州産大教養)		トロイダル群の de Rham cohomology と複素直線バンドルの Chern class について	15
26	増田 一男 (東工大理) 野口 潤次郎 (東工大理)		A construction of hyperbolic hypersurface of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$	15
27	高山 茂春 (都立大)		A characterization of Moishezon spaces	10

13:00 ～ 13:45

28	上田 哲生 (京大総合人間)	射影空間上の複素力学系	15
29	西村 保一郎 (大阪医大)	$\mathbf{C}^2$ の単位球での $\bar{\partial}$-閉形式の拡張と $\bar{\partial}$-方程式の解の積分表示	15
30	清水 悟 (東北大理)	2次元チューブ領域の分類	15

函数論特別講演

松本 和子 (新潟大 自然科学)　Kähler 多様体の一般位数擬凸領域の境界距離関数と q-convexity (14:00 ～ 15:00)

7.

Fractional calculus of Psi functions
(Generalized Polygamma functions)

Katsuyuki Nishimoto — College of Engineering, Nihon University

and

Shih-Tong Tu — Chung Yuan Christian University

Abstract

Many papers and books on fractional calculus ([1] ~ [9]) have been published already by the author. In this paper, fractional calculus of Psi functions are discussed.

§0. Introduction (Definition of fractional calculus)

(I) DEFINITION. ([1], [5] Vol. 1)

$\underset{-}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $-\infty+i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{+}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $\infty+i\,\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{-}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{-}{C}$, $\underset{+}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{+}{C}$.

(Here D contains the points over the curve C.)

Moreover, let $f=f(z)$ be a regular function in D $(z\in D)$,

$$f_\nu=(f)_\nu={}_C(f)_\nu=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}d\zeta \qquad (\nu\notin Z^-), \tag{1}$$

$$(f)_{-m}=\lim_{\nu\to -m}(f)_\nu \qquad (m\in Z^+), \tag{2}$$

where $-\pi\leqq\arg(\zeta-z)\leqq\pi$ for $\underset{-}{C}$, $0\leqq\arg(\zeta-z)\leqq 2\pi$ for $\underset{+}{C}$,

$\zeta\neq z$, $z\in C$, $\nu\in R$, Γ: Gamma function,

then $(f)_\nu$ is the fractional differintegration of arbitrary order ν (derivatives of order ν for $\nu>0$, and integrals of order $-\nu$ for $\nu<0$), with respect to z, of the function f, if $|(f)_\nu|<\infty$.

Note 1. Consider the principal value for many valued function f.

Note 2. For the complex ν, we consider the principal value for our convenience.

Note 3.

$$f_\nu=(f)_\nu \text{ is } \left\{\begin{array}{lll}\text{derivative} & \text{for} & \mathrm{Re}(\nu)>0,\\ \text{original} & \text{for} & \nu=0,\\ \text{integral} & \text{for} & \mathrm{Re}(\nu)<0,\end{array}\right\} \quad \text{where } \nu\in C, \text{ if } |(f)_\nu|<\infty .$$

And in case of $\mathrm{Re}(\nu)=0$, f_ν is only formal differintegration regardless of $\mathrm{Im}(\nu)\gtrless 0$. That is, we have no derivative and integral for pure imaginary ν.

(II) The set $\mathscr{F}$

We call the function $f=f(z)$ such that $|f_\nu|<\infty$ in D as fractional differintegrable functions by arbitrary order ν and denote the set of them with a notation $\mathscr{F}=\{f\,|\,|f_\nu|<\infty,\ \nu\in R\}$.

Then we have $\qquad |f_\nu|<\infty \Longleftrightarrow f\in\mathscr{F}$ (in D).

(III) Unification of integrations and differentiations

Notice that the definition (in the above description) for our fractional calculus means the unification of integrations and differentiations. That is, by the formula (1)—having (2)—we can unify the integrations of arbitrary order and the differentiations of arbitrary order.

(IV) Lemmas

(i) $(z^{\beta})_{\alpha}=e^{-i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}z^{\beta-\alpha}$ $\quad\left(\left|\dfrac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}\right|<\infty\right)$ ([8] Vol. 1) (3)

(ii) $((a-z)^{\beta})_{\alpha}=\dfrac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}(a-z)^{\beta-\alpha}$ $\quad\left(\left|\dfrac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}\right|<\infty\right)$ [6] (4)

$$((z-a)^{\beta})_{\alpha}=e^{-i\pi\alpha}\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}(z-a)^{\beta-\alpha}\quad\left(\left|\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)}\right|<\infty\right)\quad[6]\tag{5}$$

(iii)
$$\begin{cases}(\log(a-z))_{\nu}=-\Gamma(\nu)(a-z)^{-\nu}=e^{-i\pi\nu}\Gamma(\nu)(z-a)^{-\nu} & (z\neq a)\ (|\Gamma(\nu)|<\infty)\ [6]\ (6)\\ (\log(a-z))_{\nu}=(\log(z-a))_{\nu} & (z\neq a)\ (|\Gamma(\nu)|<\infty)\ [6]\ (7)\end{cases}$$

(iv) Let $u=u(z)\in\mathscr{F}$ and $v=v(z)\in\mathscr{F}$ respectively, then

$$(u\cdot v)_{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n+1)}u_{\alpha-n}v_{n}\quad([8]\ \text{Vol. 1})\tag{8}$$

formally (Generalized Leibniz rule).

§1. Fractional calculus of Psi function

Theorem 1. We have

$$\psi_{\alpha}=(\psi(z))_{\alpha}=-e^{-i\pi\alpha}\Gamma(1+\alpha)\sum_{m=0}^{\infty}(z+m)^{-1-\alpha}\tag{1}$$

where $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$, $z\notin\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}$ and $\psi=\psi(z)$ is the well known Psi function.

Proof. We have the Psi function [10]

$$\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m}\right)\qquad(z\notin\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\}),\tag{2}$$

where γ is the constant of Euler. Hence differentiating both sides of (2), with respect to z by arbitrary order $\alpha>0$, we obtain

$$\psi_{\alpha}=-(\gamma)_{\alpha}-(z^{-1})_{\alpha}+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{m}\right)_{\alpha}-\left(\frac{1}{z+m}\right)_{\alpha}\right\}$$

$$=-e^{-i\pi\alpha}\Gamma(1+\alpha)z^{-1-\alpha}-e^{-i\pi\alpha}\Gamma(1+\alpha)\sum_{m=1}^{\infty}(z+m)^{-1-\alpha}\tag{3}$$

by Lemmas (ii). Therefore we obtain (1) from (3) at once, under the conditions.

References

[8] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[9] ———————; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, Descartes Press, Koriyama (Japan), 1991.

2.

On Mittag-Leffler Type Function, Fractional Calculus Operators and Explicit Solution of Integral and Differential Equations

Anatoly A. Kilbas　ベラルーシ国立大・福岡大理
西郷 恵　福岡大理

We introduce the function of the form

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

with

$$c_0 = 1,\ c_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma[\alpha(im+l)+1]}{\Gamma[\alpha(im+l+1)+1]}\ (n = 1, 2, \cdots),$$

where α, m and l are real numbers such that

$$\alpha > 0,\ m > 0,\ \alpha(im+l)+1 \neq 0, -1, -2, \cdots\ (i = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{2}$$

$E_{\alpha,m,l}(z)$ is an entire function of a complex variable z. In particular, if $m = 1$ then $E_{\alpha,1,l}(z) = \Gamma(\alpha l+1)E_{\alpha,\alpha l+1}(z)$, where $E_{\alpha,\beta}(z)$ is the Mittag-Leffler function [1, Chapter 18] and therefore we call $E_{\alpha,m,l}(z)$ the Mittag-Leffler type function.

We denote by $I^{\alpha}_{0+}\varphi$ and $D^{\alpha}_{0+}\varphi$ the Riemann-Liouville fractional integrals and derivatives [2, Section 2]. The following two statements give connections between such fractional calculus operators and the Mittag-Leffler type function (1).

Theorem 1. *If $\alpha > 0,\ m > 0,\ l > -1/\alpha$, then*

$$ax^{(m-1)\alpha}\left(I^{\alpha}_{0+}[t^{\alpha l}E_{\alpha,m,l}(at^{\alpha m})]\right)(x) = x^{\alpha l}[E_{\alpha,m,l}(ax^{\alpha m}) - 1],\quad a \neq 0.$$

Theorem 2. *If $\alpha \neq 1, 2, \cdots$, m, l be real numbers satisfying* (2) *and $l > m - 1 - 1/\alpha$, then*

$$\left(D^{\alpha}_{0+}[t^{\alpha(l-m+1)}E_{\alpha,m,l}(at^{\alpha m})]\right)(x)$$
$$= \frac{\Gamma[\alpha(l-m+1)+1]}{\Gamma[\alpha(l-m)+1]}x^{\alpha(l-m)} + ax^{\alpha l}E_{\alpha,m,l}(ax^{\alpha m}),\ a \neq 0.$$

In particular, if $\alpha(l-m) = -1, -2, \cdots, -[\alpha] - 1$, then

$$\left(D^{\alpha}_{0+}[t^{\alpha(l-m+1)}E_{\alpha,m,l}(at^{\alpha m})]\right)(x) = ax^{\alpha l}E_{\alpha,m,l}(ax^{\alpha m}),\ a \neq 0.$$

We apply these results to find explicit solutions of integral and differential equations.

Theorem 3. *Let $\alpha > 0$, $m > 0$, and let $\mu_k > -1/\alpha$, f_k $(k = 0, 1, \cdots, l)$ be real constants. Then the Abel-Volterra type equation*

$$\varphi(x) = \frac{ax^{\alpha(m-1)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \sum_{k=0}^{l} f_k x^{\mu_k \alpha}, \quad 0 < x < \infty, \ a \neq 0,$$

is solvable in the space of functions such that $x^{\mu_k \alpha}\varphi(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, l)$ are locally bounded on $(0, \infty)$ and its solution $\varphi(x)$ is given by the formula

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{l} f_k x^{\mu_k \alpha} E_{\alpha, m, \mu_k}(ax^{\alpha m}).$$

Theorem 4. *Let $\alpha > 0$ with $\alpha \neq 1, 2, \cdots$, $m > 0$, and f_k, μ_k $(k = 0, 1, \cdots, l)$ be real numbers such that $\alpha(im + \mu_k) \neq -1, -2, \cdots$ $(i = 0, 1, 2, \cdots; k = 0, 1, \cdots, l)$ and $\mu_k > m - 1 - 1/\alpha$ $(k = 0, 1, \cdots, l)$. If $\alpha(\mu_k - m) \neq -1, -2, \cdots, -[\alpha] - 1$ $(k = 0, 1, \cdots, l)$, then the differential equation of fractional order*

$$\left(D_{0+}^{\alpha}[t^{\alpha(1-m)}\varphi(t)]\right)(x) = a\varphi(x) + \sum_{k=0}^{l} f_k x^{\alpha(\mu_k - m)}, \quad 0 < x < \infty, \ a \neq 0,$$

is solvable in the space of functions such that $x^{\mu_k \alpha}\varphi(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, l)$ are locally bounded on $(0, \infty)$ and its solution $\varphi(x)$ is given by the formula

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{[\alpha]+1} c_j x^{\alpha l_j} E_{\alpha, m, l_j}(ax^{\alpha m}) + \sum_{k=0}^{l} f_k \frac{\Gamma[\alpha(\mu_k - m) + 1]}{\Gamma[\alpha(\mu_k - m + 1) + 1]} x^{\alpha \mu_k} E_{\alpha, m, \mu_k}(ax^{\alpha m}),$$

where $l_j = m - j/\alpha$ $(j = 1, \cdots, [\alpha] + 1)$ and c_j $(j = 1, \cdots, [\alpha] + 1)$ are arbitrary real constants.

[1] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F.G. Tricomi: *Higher Transcendental Functions*, Vol. 3, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1955.

[2] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev: *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, New York-Philadelphia-London-Paris-Montreux-Tokyo-Melbourne, 1993.

3. On a conjecture for Sakaguchi functions

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathcal{U}$. A function $f(z)$ in $\mathcal{A}$ is said to be Sakaguchi function of order α if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)} \right\} > \alpha \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1/2)$. We denote by $\mathcal{S}_s(\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all such functions.

Further, let $\mathcal{R}(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{f(z)}{z} \right\} > \alpha \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$.

In 1987, Z. Wu has conjectured

Conjecture. If $f(z) \in \mathcal{S}_s(0)$, then

$f(z) \in \mathcal{R}(1/2)$.

In the present talk, we prove the conjecture by Z. Wu is not true.

THEOREM. Let $(2b+1)/2 \leqq a \leqq (3b+1)/2$, $0 < b < 1$, and $(a+4)b^2 - 2(2+3a)b + a > 0$. Then the function $f(z) = z + az^2 + bz^3$ is not in $\mathcal{R}(1/2)$, but $f(z) \in S_s(0)$.

4. THE STARLIKENESS OF A CLASS OF INTEGRAL OPERATORS

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathcal{U}$. Let $\mathcal{S}^*(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which are starlike of order α in $\mathcal{U}$. For $f(z) \in \mathcal{A}$ and $g(z) \in \mathcal{A}$, we define

$$F(z) = \left\{ \frac{\gamma+\alpha+1}{z^{\gamma}} \int_0^z f(t)^{\alpha} g(t) t^{\gamma-1} dt \right\}^{1/(\alpha+1)}$$

with $\alpha > 0$ and $\gamma > 0$.

Recently, Y. C. Kim, K. S. Lee and H. M. Srivastava have shown that

THEOREM I. Let $f(z) \in \mathcal{S}^*(\beta)$ and $g(z) \in \mathcal{S}^*(\beta)$. Then the function $F(z)$ is in the class $\mathcal{S}^*(\alpha)$.

In the present talk, we improve the above theorem.

THEOREM 2. Let $f(z) \in S^*(\eta_1)$ and $g(z) \in S^*(\eta_2)$. Then the function $F(z)$ with $\alpha \geqq 0$, $\gamma > 0$, $0 \leqq \eta_1 \leqq \eta_2$, and $\alpha\eta_1+\eta_2-\eta<1$ is in the class $S^*((\alpha\eta_1+\eta_2-\eta)/(\alpha+1-\eta))$, where

$$F(z) = \left\{ \frac{\gamma+\alpha+1-\eta}{z^\gamma} \int_0^z f(t)^\alpha g(t) t^{\gamma-1-\eta} dt \right\}^{1/(\alpha+1-\eta)} .$$

REMARK. If we take $\eta_1 = \eta_2$ and $\eta = 0$ in Theorem 2, then we have Theorem 1.

5. A Linear Operator and Its Applications to Certain Analytic Functions

斎藤 斉　群馬高専

単位円板 $U=\{z: |z|<1\}$ で正則である

$$f(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (p\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\})$$

の形をした関数族を A_p と書く.

次に $c\neq 0,-1,-2,\cdots$ に対して, 関数 $\phi_p(a,c)$ が

$$\phi_p(a,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}z^{n+p} \qquad (z\in U)$$

で定義されるとする. ここで $(a)_n$ は以下で与えられる Pochhammer symbol である.

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=\begin{cases}1, & (n=0)\\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

さらに, $f(z)\in A_p$ と $c\neq 0,-1,-2,\cdots$ に対して A_p 上のある linear operator $L_p(a,c)$ を

$$L_p(a,c;z)f(z)=\phi_p(a,c;z)*f(z)$$

で定義する. ただし, $*$ は convolution である.

定理 λ を $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ である複素数とする．

$f(z) \in A_p$ がある α $(0 \leq \alpha < 1)$ と $\mu > 0$ に対して

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{L_p(a,c)f(z)}{z^p}\right)^{\mu} + \lambda \cdot \frac{L_p(a+1,c)f(z)}{z^p}\left(\frac{L_p(a,c)f(z)}{z^p}\right)^{\mu-1}\right\}$$

$$> \alpha \quad (z \in U).$$

とすると，そのとき

$$\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{L_p(a,c)f(z)}{z^p}\right)^{\mu}\right\} > \alpha + (1-\alpha)(2\gamma - 1) \quad (z \in U)$$

を得る。ここで $\gamma = F\left(1, 1; 1 + \frac{\mu a}{\mathrm{Re}\,\lambda}; \frac{1}{2}\right)/2$ であり，この評価は sharp である．

証明には，S. Ponnusamy の最近の結果を用いる．また，この定理は Ruscheweyh derivative や Libera operator に関する系をもつ．

6.

Analyticity in the Meyer Wavelets

SABUROU SAITOH

Department of Mathematics, Gunma University, Kiryu 376, Japan

The identification of the images of the integral transform by the Meyer wavelets is examined from the point of view of analytic function theory. Furthermore, the interrelationship among multiresolution analysis, sampling theorem and interpolation problem is referred.

The theory of wavelets is developing enormously in both mathematical sciences and pure mathematics. See, for example, I. Daubechies [4] and C. Chui [3] as basic references. The theory will match the theory of reproducing kernels (see [4, pp. 31-33]), in particular, the general method (see [5] and [6, chapter 6]) for integral transforms using the theory of reproducing kernels. The theory of reproducing kernels will give a good understanding as a unified one for the wavelet transforms, frames, multiresolution analysis and the sampling theorem in the theory of wavelets. The general method for integral transforms needs case by case arguments, in a crucial point ([6, pp. 84-85]), and so, in this paper we shall examine typical wavelets of the Meyer wavelets from our viewpoint using the theory of reproducing kernels. The general interrelationship the theories of frames in the wavelet transforms and of reproducing kernels, see [6, chapter 7]. We will not refer to it in this paper for its generality.

References

1. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337-404.
2. J. Burbea, *Total positivity of certain reproducing kernels*, Pacific J. Math. **67** (1976), 101-130.

Typeset by 日本語-$\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

3. C. K. Chui, "An Introduction to Wavelets," Academic Press, New York, 1992.
4. I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets," Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
5. S. Saitoh , *Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 74-78.
6. ———, "Theory of Reproducing Kernels and its Applications," Pitman Res. Notes in Math. Series 189, Longman Scientific & Technical, England, 1988.
7. ———, *The Weierstrass transform and an isometry in the heat equation*, Applicable Analysis **16** (1983), 1-6.
8. K. Yao, *Application of reproducing kernel Hilbert spaces - Bandlimited signal models*, Information and Control **11** (1967), 429-444.

7. ハンケル変換について

E.M.U.S.B. Ekanayake　University of Peradeniya
斎藤 三郎　群馬大工

最近，D. Klusch によって，ハンケル変換の新しい側面からの研究がなされて来ている。例えば，non-band-limited signal 関数に対するサンプリング定理と Poisson の summation formula に対応する Dirichlet series の関係であり，これは解析数論における Riemann Zeta 関数の満たす関数方程式と深く結びついていること等である。そこで，再生核の理論を用いる積分変換の一般論の立場から，古典的なハンケル変換について考察してみた。現在のところ次のような結果が得られている。

(1) 一般的な関数族 $L_2[(0,\infty), t^{\nu}dt]$ の積分変換を考えると，ハンケル変換の像が解析関数からなる場合が生じる。このときの像空間の完全な特徴付け，およびそのような場合における Parseval-Plancherel 型の定理と逆変換の公式の確立。

(2) 実軸から strip 領域上への新しい型の解析接

続の公式。

(3) ハンケル変換の像が解析関数にならないある場合における像空間の特徴付けおよびそのときの Parseval-Plancherel 型の定理と逆変換公式の確立。また，このときに成り立つ積分不等式を得る。

偶然に，次の奇妙な不等式を得た。

(i) $x > a > 0$ で，$f(x)$ は実絶対連続な関数，

(ii) $\lim_{x \to a+0} f(x) = 0$,

(iii) $\int_a^\infty f'(x)^2 \, x \, dx < \infty$,

を満たす関数 $f(x)$ に対して，不等式

$$a \int_a^\infty f'(x)^2 \, e^{2f(x)} \, dx \leqq e^{\int_a^\infty f'(x)^2 x \, dx}$$

が成り立つ。

8. 有理型単葉函数の係数評価

山下慎二　都立大理

円板 $D=\{|z|<1\}$ で有理型単葉函数

$$f(z)=z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

の除外値集合 $E(f)=\{|z|\le+\infty\}\setminus f(D)$ は常にコムパクトである。

(I) $E(f)$ が凸ならば，$3|a_2|\le 1-|a_1|^2$。

等号成立 $\Longleftrightarrow$ $|\gamma|\le 1=|\varepsilon|$ として，

$a_1=\varepsilon\gamma$，$a_2=3^{-1}\varepsilon(1-|\gamma|^2)$，

$(n+1)(n+2)a_{n+1}=(n-3)(n-2)\varepsilon a_{n-2}$

$+(n-2)(n-1)\varepsilon\gamma a_{n-1}-n(n+1)\bar{\gamma}a_n$，$n\ge 2$，

a_0 は任意。（$|\gamma|=1$ なら $\varepsilon'=\varepsilon\gamma$ として，

$f(z)=z^{-1}+a_0+\varepsilon' z$.）

(II) $E(f)$ が 0 を含み，0 に関して星型なら，

$|a_1-(a_0/2)^2|\le 1-|a_0/2|^2$. 等号成立.

$\Longleftrightarrow$ $|\gamma|\le 1=|\varepsilon|$ として，

$a_0 = 2\varepsilon\gamma$, $a_1 = \varepsilon(1+\varepsilon\gamma^2 - |\gamma|^2)$,

$(n+1)a_n = (3-n)\varepsilon a_{n-2} - ((n-2)\varepsilon\gamma + n\bar{\gamma})a_{n-1}$,

$n \geq 2$. ($\gamma = 0$ なら $f(z) = z^{-1} + \varepsilon z$ また

$|\gamma| = 1$ なら $f(z) = z^{-1}(1+\varepsilon' z)^2$, $\varepsilon' = \varepsilon\gamma$.)

(I) では $\gamma = 0$ のときでも extremal function は複雑である。(*)

当然 β-凸, β-星型 ($0 \leq \beta < 1$) の場合も考えたくなるが, これらも含めて,

"一般化の流行"

に対する"予防ワクチン"も述べる. 正則単葉凸, また A.W.Goodman の一様凸函数についても述べる.

(*) $$f(z) = z^{-1} + a_0 + \int_0^z w^{-2}\{1-(1-\varepsilon w^3)^{2/3}\}dw$$

$$= z^{-1} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n-1} z^{3n-1},$$

$$a_{3n-1} = \begin{cases} \varepsilon^n (4n-3)^{-1} 3^{-n} & , n = 1, 2; \\ \dfrac{4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-5)(2\varepsilon^n)}{n!(3n-1)3^n} & , n \geq 3. \end{cases}$$

The Poincaré density of domains on the Riemann sphere

変更

9. ポアンカレ密度とリプシッツ連続性

山下慎二　都立大理

複素平面 $\mathbb{C}=\{|z|<+\infty\}$ 内の領域 Ω はその補集合 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ が少くとも2点を含めばポアンカレ測度 $P_\Omega(z)|dz|$ を持つ。ここで、ポアンカレ密度 P_Ω は $1/P_\Omega(z)=(1-|w|^2)|f'(w)|$, $z=f(w)$ により定義される。但し、f は円板 $\{|w|<1\}$ から Ω の上への普遍被覆射影で、右辺は $z=f(w)$ である限り、f, w の取り方に依存しない。点 $z\in\Omega$ と Ω の $\mathbb{C}$ での境界との距離を $\delta_\Omega(z)$ とするとき、もしも、$\delta_\Omega(z)P_\Omega(z)$ の Ω での下限が正なら Ω は有限型と呼ばれる。単連結なら有限型である。

(I) Ω が有限型 $\Longleftrightarrow$ $1/P_\Omega$ が Ω でリプシッツ連続：$|1/P_\Omega(z)-1/P_\Omega(w)|\le K|z-w|$.

(II) Ω が単連結 $\Rightarrow$ $1/P_\Omega$ が Ω でリプシッツ連続：$|1/P_\Omega(z)-1/P_\Omega(w)|\le 4|z-w|$.

定数4はこれより小さい数で置き換えれない.

(Ⅲ) Ωが凸. $\Leftrightarrow$ $1/P_\Omega$がΩでリプシッツ連続: $|1/P_\Omega(z)-1/P_\Omega(w)|\leq 2\,|z-w|$.

次にΩの2点z, wのポアンカレ距離を$d_\Omega(z,w)$と書けば

$$d_\Omega(z,w)=\inf_\gamma \int_\gamma P_\Omega(\zeta)\,|d\zeta|,$$

但し, γはz, wをΩ内で結ぶ曲線.

(Ⅳ) $1/P_\Omega$がΩでd_Ωに関してリプシッツ連続: $|1/P_\Omega(z)-1/P_\Omega(w)|\leq K d_\Omega(z,w)$.
$\Leftrightarrow$ $1/P_\Omega^2$がΩでリプシッツ連続:
$|1/P_\Omega^2(z)-1/P_\Omega^2(w)|\leq 2K\,|z-w|$.

ここで定数Kは共通.

(Ⅴ) $1/P_\Omega$がΩで有界 $\Rightarrow$ $1/P_\Omega^{\,2}$はΩでリプシッツ連続.

10. On the order of holomorphic curves with maximal deficiency sum

TODA Nobushige Nagoya Institute of Technology

Let $f:C\to P^n(C)$ be a transcendental holomorphic curve, let $(f_1,\cdots,f_{n+1})$ be a reduced representation of f and let X be a subset of C^{n+1} in general position. Put

$\lambda=\dim\{(c_1,\cdots,c_{n+1})\varepsilon C^{n+1}:c_1f_1+\cdots+c_{n+1}f_{n+1}=0\}$.

Then, it is easy to see that $0\leq\lambda\leq n-1$.

It is known that

$$\Sigma_{a\varepsilon X}\ \delta(a,f)\leq n+\lambda+1.$$

<u>Theorem</u>. Suppose that

(i) $\delta(e_j,f)=1$ $(j=1,\cdots,n)$.

If there exists a subset $\{a_j\}_{j=1}^{q}(n+\lambda+1\leq q\leq\infty)$ of X such that

(ii) $\Sigma_{j=1}^{q}\ \delta(a_j,f)=n+\lambda+1$,

then

(I) there exist λ elements (say $b_1,\cdots,b_\lambda$) in $\{a_j\}_{j=1}^{q}$ such that $\delta(b_j,f)=1$ $(j=1,\cdots,\lambda)$;

(II) f is of regular growth and the order of f is either infinity or a positive integer.

Remark. 1) When $\lambda=n-1$, we can give an example satisfying (ii) for which neither (I) nor (II) holds.

2) We can extend this theorem to moving targets.

Bibliography

TODA, N., On the order of holomorphic curves with maximal deficiency sum, II (degenerate case). NIT Sem. Rep. on Math., No. 98 (1993).

11.

On the Schwarzian differential equation $\{w, z\} = R(z, w)$

石崎　克也

東京工高専

本講演では、$\mathbb{C}$ 上で Schwarzian 方程式

$$(1) \qquad \{w, z\} = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = R(z, w) = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)},$$

ここで、$P(z, w)$, $Q(z, w)$ は wについての多項式でその係数は有理型函数とする。Schwarzian 方程式は Ishizaki [1], Laine [2] の中で取り扱われたが、Steinmetz [3] で扱われた微分方程式

$$(2) \qquad (w')^2 + 2B(z, w)w' + A(z, w) = 0,$$

ここで、$B(z, w)$, $A(z, w)$ は wについての多項式でその係数は有理型函数との関係を調べる。

定理 **1.** *Schwarzian*方程式 (1) が許容解 $w(z)$ を持つとする。このとき、$w(z)$ は、*Riccati*方程式または一階の方程式 (2) を満たすか、(1) は以下の形である:

$$(3) \qquad \{w, z\} = \frac{P(z, w)}{(w + b(z))^2},$$

$$(4) \qquad \{w, z\} = c(z),$$

ここで $b(z)$, $c(z)$ は $w(z)$ に対して *small* な函数。特に、$w(z)$ が (2) を満たす場合には、適当な一次分数変換 $u = 1/(w - \tau)$, $\tau \in \mathbb{C}$で、$u(z)$ が (2) の形で、$\deg_u B(z, u) \leqq 1$, $\deg_u A(z, u) = 3$ なるものに帰着される。

定理 1 の中で現れた (2) の特別な場合について以下の定理を述べる。

定理 2. (2) で $\deg_w B(z,w) \leqq 1$, $\deg_w A(z,w) = 3$ を仮定し、許容解 $w(z)$ を持つとする。このとき、適当な一次分数変換

$$y = \frac{\alpha(z)w + \beta(z)}{\gamma(z)w + \delta(z)}, \quad \alpha(z)\delta(z) - \beta(z)\gamma(z) \not\equiv 0,$$

によって、(2) は以下のいずれかに帰着される:

$$(y')^2 = a(z)(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3), \tag{5}$$

$$(y' + b(z)y)^2 = a(z)y(1+c(z)y)^2, \tag{6}$$

$$\left(y' - \frac{a'(z)}{2a(z)}y\right)^2 = y(y^2 - a(z)), \tag{7}$$

$$\left(y' - \frac{a'(z)}{3a(z)}y\right)^2 = y^3 - a(z), \tag{8}$$

ここで、$a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ は $w(z)$ に対して *small* な函数で、e_1, e_2, e_3は異なる定数.

References

1. K. Ishizaki, *Admissible solutions of the Schwarzian differential equations*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **50** (1991), 258–278.

2. I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. Gruyter, Berlin–New York, 1992.

3. N. Steinmetz, *Ein Malmquistscher Satz für algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung*, J. Reine Angew. Math. **316** (1980), 44–53.

Department of Mathematics Tokyo National College of Technology, 1220-2 Kunugida-cho Hachioji, Tokyo 193, Japan

12. リーマン面上での正則関数の近似

有ノ内義一

genus g の閉リーマン面 R, R から一点 q を除いた $R-\{q\}$ 上の正則関数の族を $H(R-\{q\})$, $R-\{q\}$ 内の Runge 領域を G, q でのみ極を持つ R 上の有理関数の族を $M(R)$ とすると G での制限で $M(R) \subset H(R-\{q\}) \subset H(G)$ であるが次の定理が成り立つ.

［定理］ G での広義一様収束に関して

$$\overline{M(R)} = H(G)$$

証明の方針は Behnke-Stein の方法でコーシー核

$$dw(s,p) = d\Pi_{p,q}(s) - \sum_{i=1}^{g} \frac{d\Pi_{p,q}}{dh}(P_i)\, dC_i(s)$$

$((s,p) \in R\times R)$ を作る（$d\Pi_{p,q}$ は第3種正規微分, dC_i は第一種微分, $P_i\ (i=1,\cdots,g)$ は q の近傍 U 内の $(U\cap G=\phi)$ 互いに異なる non special な点, $h(p)$ は $M(R)$ の一つの関数で P_i では $dh \neq 0$ とする） $dw(s,p)$ は s に関しては第3種微分で, p に関して R 上一価関数, s, $P_i\ (i=1,\cdots,g)$ で一次の極を持つ. K を G 内の compact set で領域 G_0, D を $K \subset G_0 \Subset D \Subset G$ とし $f(p) \in H(G)$

の積分表示 $f(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(s)\,d\omega(s,p)$ $(p\in K)$
をリーマン和で近似し更にその和の各項に表はれる極を
$Q\in V-\{g\}$ に移動（Runge の Polvershiebung）
して $f(p)$ の近似函数として $g+1$ 個の点 Q, P_i $(i=1,\cdots,g)$
でのみ極を持つ有理函数 $g(p)$ を得る。次に この極
を $h(p)$ を用いて g に移し近似函数として $H(p)P[h(p)]$
の形の有理函数（$P[x]$ は x の多項式. $H(p)\in M(R)$）
を得る。 定理 の系として

$$\overline{H(R-\{g\})}=H(G)$$

これは 特別な面 $R-\{g\}$ における Behnke-Stein
の定理である。又 $R-\{g\}$ 上での Merigelyan の定理における近似函数として $M(R)$ の函数が取れることに
注意する。更に $g=1$ の場合の応用として平面上の有界な
単連結領域での正則函数の Weierstrass の $\wp(z)$, $\wp'(z)$
の多項式 $P_1[\wp(z)]+\wp'(z)P_2[\wp(z)]$ による近似可能性を
示す。

13. Riemann-Hurwitzの関係式，Eichlerの跡公式，Riemann面の自己同型群

栗林暲和　中央大理工
大森昭治　東京農大三高

$GL(g,\mathbb{C})$の有限部分群Gがconjugate rotation class datum τをもつと仮定し，GがE条件を満すと仮定する．$\{K_1, K_2, \cdots, K_r\}$を$G$の1つのnon-trivialなconjugate classな完全系とする．そのときは公式

$$(*)\quad \chi_G(x) = \chi_0(x) + (g_0-1)\chi_{reg}(x) + \sum_{k=1}^{r} l([a_k])\chi_{K_i}(x)$$

を得る．χ_{reg}はGのregular characterを表し，χ_{K_i} $(i=1, \cdots, r)$はinduced characterを表す．この公式はEichlerの跡式を指標の形で表したもので，$x=1$とするときRiemann-Hurwitzの関係式を得る．χ_Gの既約指標による分解

$$(**)\quad \chi_G(x) = n_0\chi_0(x) + n_1\chi_1(x) + \cdots + n_r\chi_r$$

とを比較して，つぎの関係式を得る．

$$(***)\quad n_k = (n_0-1)\lambda_k(1) + \sum_{i=1}^{n-1} l_i(\chi_{K_i}, \lambda_k)$$

λ_kをGの最大巡回部分群（位数n）の既約指標とする．(***)から群GがRiemann面から来るための条件を得る．これはHarvey等の結果をcoverする．

14. On the automorphic functions for Fuchsian groups of genus two.

小森 洋平　　京都大学
数理解析研究所

種数 $g \geq 2$ の閉リーマン面は、上半平面 $\mathbb{H}$ をフックス群 Γ で割った商空間 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ としての表示と、その上の有理型函数体の $\mathbb{C}$ 上の2つの生成元の間の代数関係、つまり代数曲線としての表示の2つを持っている。そこで、以下、次のような問題を考える。

（問題）「種数2のフックス群 Γ の表示

$$\Gamma = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \mid \prod_{i=1}^{2}(\alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}) = id \rangle \subset PSL_2(\mathbb{R})$$

が与えられた時、リーマン面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ の超楕円曲線としての表示式 $y^2 = \prod_{k=1}^{5}(X - g_k)$ を Γ の言葉で記述せよ。」

以下、次の順でこの問題に答える。

① まず Γ を指数2で含む、種数0のフックス群 G

$$G = \langle g_1, \cdots, g_6 \mid g_1^2 = \cdots = g_6^2 = g_1 \cdots g_6 = id \rangle$$

を Γ の表示から記述する。

② G の生成元 g_k $(k=1\cdots6)$ の、$\mathbb{H}$ 上の固定点を P_k $(k=1\cdots6)$ とする。

③ 同型写像 $G\backslash\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (射影直線) を実現する、$\mathbb{H}$ 上 G 不変な有理型函数全体のなす体の生成元 $F(z)$ で、$F(P_6)=\infty$ なるものを構成する。

④ リーマン面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ は $y^2=\prod_{k=1}^{5}(X-F(P_k))$ と表示される。//

以上をまとめると、右図のようになる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[d] \arrow[ddr, "F"] & \\
\Gamma\backslash\mathbb{H} \arrow[d, "\text{分岐2重被覆}"'] \arrow[dr] & \\
G\backslash\mathbb{H} \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

上の方法は、種数1の場合の以下の類似である。すなわち、$\mathbb{C}$ の解析的自己同型群の離散部分群 $\Lambda(\tau)=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ $(\tau\in\mathbb{H})$ に、$\begin{matrix}\mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}\\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ z & \mapsto & -z\end{matrix}$ を添加した群を G とすると、G は $\Lambda(\tau)$ を指数2で含み、$\mathbb{C}$ 上の G の固定点の $\Lambda(\tau)$-同値類の代表元として、$\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}, 0$ がとれる。一方 $\mathbb{C}$ 上 G 不変な有理型函数体の生成元として、ワイエルストラスの $\wp$-函数がとれ、リーマン面 $\mathbb{C}/\Lambda(\tau)$ は $y^2=(X-\wp(\frac{1}{2}))(X-\wp(\frac{\tau}{2}))(X-\wp(\frac{1+\tau}{2}))$ とかける。つまり上の③で構成した函数 $F(z)$ は、$\wp$-函数の種数2での類似であり、具体的にはポアンカレ級数の比の形で構成する。この時 $F(z)$ が恒等的に 0 でないことをいうために、I. Kra によるアイヒラー・コホモロジーの議論 (Acta. Math 153 (1984)) を本質的に用いる。

15 The isomorphism theorem on Kleinian groups

松崎克彦　東工大・理

Fenchel-Nielsenの isomorphism theoremは、有限生成Fuchs群の間のtype-preserving isomorphismが常に単位円板の自己同相写像によって誘導されることを主張するが、これを拡張して Klein群に対しても様々な仮定の下で、代数的同型写像が幾何学的であることが証明されている（Marden, Maskit 等）。

一方 Waldhausenによれば、incompressibleな境界を許すコンパクト既約三次元多様体 M, M' の基本群の間の同型 φ が幾何学的である（$\Leftrightarrow$ $^\exists$同相写像 $f: M \to M'$ s.t. $f_* = \varphi$）ための十分条件は、peripheral structure を保存する（$\Leftrightarrow$ $^\forall S$：境界成分 of M に対して $\varphi(\pi_1(S)) = \pi_1(S')$ （$^\exists S'$ of M'））ことである。よって peripheral structureがいつ保存されるかが問題であるが、Johannsonは Mが acylindricalな場合には OKであることを示している。

この講演では、この結果に対応する Klein群に関する以下の主張を紹介する。もちろん cuspidal partをくりぬいた Kleinian manifold（= pared manifold）に対して、上述の結果を適用しても示せることとは思うが、ここではより初等的に Klein群 G の limit set $\Lambda(G)$ の性質

から、簡単な証明を与えるものである。(多くのコンパクト三次元位相多様体の内部に幾何学的有限な双曲構造がはいることに注意すれば、Klein群的方法も価値があると思う。) さらに、定理は一般に torsion を許す場合に対しても成立している。

定理

(仮定) G, G': 幾何学的有限 Klein 群
$\Omega(G) = \hat{\mathbb{C}} - \Lambda(G)$ の連結成分はすべて単連結であり、任意の2つの成分 Δ_1, Δ_2 に対して、
$\Lambda(\mathrm{stab}_G(\Delta_1)) \cap \Lambda(\mathrm{stab}_G(\Delta_2))$ は高々1点からなる。 G は APT (accidental parabolic transf.) を持たない。

このとき任意の type-preserving isomorphism $\varphi: G \to G'$ に対して $\hat{\mathbb{C}}$ の自己同相写像 f で $\varphi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$ $(\forall g \in G)$ となるものが存在する。

16. real typeの古典的Schottky群のJørgensen数について

佐藤　宏樹　　　静岡大学理学部

A_1とA_2をMöbius変換とする．$G=\langle A_1, A_2\rangle$を$A_1$と$A_2$により生成された(marked)群とする．

$$J(G) := |\mathrm{tr}^2(A_1)-4| + |\mathrm{tr}(A_1A_2A_1^{-1}A_2^{-1})-2|$$

を(marked)群GのJørgensen数という．このとき，次の結果はよく知られている(Jørgensen [2])：

$G=\langle A_1, A_2\rangle$がnon-elementary discrete groupならば，$J(G)\geq 1$．また，下界1はbest possibleである．

$G=\langle A_1, A_2\rangle$を(marked) Schottky群とする．$A_1, A_2$のmultipliersをそれぞれ$1/t_1$ $(0<|t_1|<1)$，$1/t_2$ $(0<|t_2|<1)$とする．A_1, A_2のrepelling fixed pointsをそれぞれ$0, 1$，attracting fixed pointsをそれぞれ∞, p $(p\in\mathbb{C}-\{0,1\})$のようにGを正規化する．t_1, t_2, pがすべて実数であるとき，Gをreal typeの群といい，次の8種類に分類される：

$t_1>0, t_2>0, p>0$のときType I　　$t_1>0, t_2<0, p>0$のときType II

$t_1>0, t_2<0, p<0$のときType III　　$t_1>0, t_2>0, p<0$のときType IV

$t_1<0,\ t_2>0,\ \rho>0$ のとき Type V　$t_1<0,\ t_2<0,\ \rho>0$ のとき Type VI

$t_1<0,\ t_2<0,\ \rho<0$ のとき Type VII　$t_1<0,\ t_2>0,\ \rho<0$ のとき Type VIII

Type I と Type IV については Jørgensen 数 $J(G)$ の下限はそれぞれ 16 と 4 で, それらは共に best possible であることが知られている (Gilman [1], Sato [3, 4]). ここでは残りの6つのタイプについて $J(G)$ の下限を得たので報告する.

定理　$G=\langle A_1, A_2\rangle$ を古典的 Schottky 群とする.

(1) G が Type II ならば $J(G)>16$.

(2) G が Type III ならば $J(G)>4$.

(3) G が Type V ならば $J(G)>4(1+\sqrt{2})^2$.

(4) G が Type VI ならば $J(G)>16$.

(5) G が Type VII ならば $J(G)>4(1+\sqrt{2})^2$.

(6) G が Type VIII ならば $J(G)>16$.

また, (1) ~ (6) の下界はすべて best possible である.

参考文献

[1] J. Gilman, Adv. in Math. 85 (1991), 193-197.

[2] T. Jørgensen, Amer. J. Math. 98 (1976), 739-749.

[3] H. Sato, Tôhoku Math. J. 43 (1988), 51-75.

[4] H. Sato, Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ. 26 (1992), 1-9.

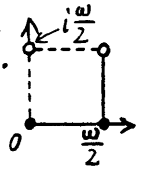
17. レムニスケート関数の一性質に関する証明法について

宮川 幸隆　静岡県立沼津東高校

$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ -----(1) は区間 $-1<x<1$ における単調増加関数である．$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ は収束するから，この値を $\frac{\omega}{2}(>0)$ とおくと，区間 $-\frac{\omega}{2}\leqq u\leqq\frac{\omega}{2}$ において(1)の逆関数 $x=\varphi(u)$ が定まる．$\varphi(0)=0$, $\varphi(\frac{\omega}{2})=1$, $\varphi(-u)=-\varphi(u)$ が成り立つ．$\varphi(iu)=i\varphi(u)$ ---(2) $(-\frac{\omega}{2}\leqq u\leqq\frac{\omega}{2})$ と定める（i は虚数単位）．加法定理 $\varphi(u+v)=\dfrac{\varphi(u)\sqrt{1-\varphi(v)^4}+\varphi(v)\sqrt{1-\varphi(u)^4}}{1+\varphi(u)^2\varphi(v)^2}$ $(0<u,v,$ $u+v<\frac{\omega}{2})$ が成り立つ．この加法定理によって $\varphi(u)$ の定義域を複素数体 $\mathbb{C}$ の全体に拡張する．このように拡張しても φ は奇関数であり，(2)も成立する．$\mathbb{C}$ で定義されたこの関数 $\varphi(u)$ をレムニスケート関数と呼ぶ．加法定理と(2)とから $\varphi(u+\omega)=\varphi(u+i\omega)=\varphi(u)$ が成り立つ．このように，レムニスケート関数は2重周期を持つ．またレムニスケート関数は有理型関数であり，その極は $(\mu+\frac{1}{2})\omega+i(\nu+\frac{1}{2})\omega$ (μ,ν は整数）なる点である．

本稿の目標は，$M=a+ib$; $a,b\in\mathbb{Z}$（ここに $\mathbb{Z}$ は有理整数環），$b\neq 0$, $p=a^2+b^2$ は $p\equiv 1\ (mod.4)$ なる

素数とするとき，$\varphi(Mu)/\varphi(u)$ が $\varphi(u)^4$ の有理関数となることの証明法の紹介である．さて，$D(\omega, i\omega)=\{\mu\omega+\nu i\omega \mid \mu, \nu\in\mathbb{Z}\}$ とおく．$\Omega=(\omega, i\omega)$ ($\in M_{1,2}(\mathbb{C})$；$\mathbb{C}$ を成分とする 1×2 型行列の全体)，m ($\in M_{2,1}(\mathbb{Z})$) を用いて，$D(\omega, i\omega)$ の要素は Ωm の形に表される．任意の Ωm ($\in D(\omega, i\omega)$) に対して，$\mathbb{C}\ni u\longmapsto(\Omega m)u\equiv u+\Omega m\in\mathbb{C}$ は複素解析的写像である．$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $F(u)$ が $D(\omega, i\omega)$ に関する保型関数であるとは，$F((\Omega m)u)=F(u)$ for $\forall\,\Omega m\in D(\omega, i\omega)$ が成り立つことをいう．$\mathbb{C}$ 上の点集合 $F''=\{u\in\mathbb{C}\mid 0<\mathrm{Re}(u)\leqq\frac{\omega}{2}, 0\leqq\mathrm{Im}(u)<\frac{\omega}{2}\}\cup\{0\}$ を考える．



$\varphi(u)^4$ をこの F'' に制限したものは F'' から $\mathbb{C}$ の上への1対1の正則関数である．$K=K(u)=\varphi(u)^4$ とおく．上述のガウス整数 M に対して，$\frac{\varphi(Mu)}{\varphi(u)}$ は $D(\omega, i\omega)$ に関する保型関数であり，更に，$\frac{\varphi(M(-u))}{\varphi(-u)}=\frac{\varphi(M(iu))}{\varphi(iu)}=\frac{\varphi(M(-iu))}{\varphi(-iu)}=\frac{\varphi(Mu)}{\varphi(u)}$ であるから，$\frac{\varphi(Mu)}{\varphi(u)}$ を K の関数と考えて $\frac{\varphi(Mu)}{\varphi(u)}=H(K)$ とする．K は F'' において正則かつ単葉故その逆関数も正則かつ単葉である．u 平面上の F'' は K 平面を実軸の $(0, \infty]$ の部分で切り割いたものに対応するが，ここにおいて $H(K)$ は K に関して有理型である．更に K と φ の保型性から，∞ を込めて全 K 平面において有理型であることが示される．

18. Harmonic Dimension of Covering Surfaces

正　岡　弘　照　　　　　　京都産大理

瀬　川　重　男　　　　　　大同工大

Vを Heins の意味の end（末端）とする．V上の非負値調和函数の部分族

$$P(V)=\{u:\Delta u=0,\ u\geq 0,\ u|\partial V=0\}$$

の生成元の個数を $\dim P(V)$ と表し，Vの**調和次元**と呼ぶ．

$0<b_{n+1}<a_n<b_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ をみたす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して，領域 $D=D(\{a_n\},\{b_n\})$ を

$$D(\{a_n\},\{b_n\})=\{0<|z|<1\}-\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$$

と定める．Dの copy$D_1,\cdots,D_m$を，$\cup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ で D_iの上岸と D_{i+1}の下岸 (mod. m) を貼り合わせて得られる end を $W=W(\{a_n\},\{b_n\})$ とする．

Heins は「(i) $\limsup_{\mathbf{R}\ni x\to -0}\hat{R}_f^I(x)<\infty$（ここで，$\hat{R}_f^I$は $\{|z|<1\}$ における $I=\cup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ に関する $f(z)=\log\dfrac{1}{|z|}$ の balayage ）ならば，$\dim P(W)=m$; (ii)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{b_n}{a_n}=\infty$ ならば $\dim P(W)=1$」であることを示したが，次のことが成立する．

定理. (I) $z=0$ が領域 Dの非正則境界点のとき，$\dim P(W)=m$.
(II) $z=0$ が領域 Dの正則境界点のとき，$\dim P(W)=1$.

19. 掃散空間の共役性と掃散空間上の Dirichlet 積分

前　田　文　之　　　　　広島大理

$(X, \mathcal{W})$ を Bliedtner-Hansen の意味の掃散空間で $1 \in \mathcal{W}$ とし，$\mathcal{P}_b$ を X 上の有界連続ポテンシャルの全体，$\mathcal{H}_b$ を X 上の有界調和関数の全体，$\mathcal{R}_b = \mathcal{H}_b + (\mathcal{P}_b - \mathcal{P}_b)$ とおく．$\mathcal{R}_b$ は algebra である．$\mathcal{M}$ を X 上の signed Radon 測度の全体とする．線形写像 $\sigma : \mathcal{R}_b \to \mathcal{M}$ が条件

$f \in \mathcal{R}_b$ と Xの開集合 V に対し，$\sigma(f)|_V \geq 0 \Leftrightarrow f$ は V で優調和.

を満たすとき，$\mathcal{W}$ に対する測度表現と呼ぶ．測度表現 σ が与えられたとき，$f, g \in \mathcal{R}_b$ の相互 gradient 測度と，$f \in \mathcal{R}_b$ の gradient 測度を，調和空間の場合と同様に

$$\delta_{[f,g]} = \frac{1}{2}\{f\sigma(g) + g\sigma(f) - \sigma(fg) - fg\sigma(1)\}, \quad \delta_f = \delta_{[f,f]}$$

で定義すると，$\delta_f \geq 0$ $(\forall f \in \mathcal{R}_b)$ が示される．$D[f] = \delta_f(X)$ を f の Dirichlet 積分と定義する．

同じ X 上にもう一つの掃散構造 $\mathcal{W}^*$ $(1 \in \mathcal{W}^*)$ が与えられたとし，$\mathcal{P}_b$, $\mathcal{R}_b$ に対応する族を $\mathcal{P}_b^*$, $\mathcal{R}_b^*$ で表すことにする．$\mathcal{W}^*$ に対する測度表現 $\sigma^* : \mathcal{R}_b^* \to \mathcal{M}$ があって，次の条件を満たすとき，$\mathcal{W}$ と $\mathcal{W}^*$ は互いに共役であるという：

$$f \in \mathcal{P}_b,\ g \in \mathcal{P}_b^* \Rightarrow \int f\, d\sigma^*(g) = \int g\, d\sigma(f).$$

この条件は次の条件と同値である：

$$f \in \mathcal{R}_b \cap \mathcal{C}_c,\ g \in \mathcal{R}_b^* \cap \mathcal{C}_c \Rightarrow \int f\, d\sigma^*(g) = \int g\, d\sigma(f).$$

ただし，$\mathcal{C}_c$ は support compact な X 上の連続関数の全体.

以下，$\mathcal{W}$ は共役な掃散構造 $\mathcal{W}^*$ $(1 \in \mathcal{W}^*)$ を持つものと仮定する. このとき，共役な調和構造を持つ調和空間の場合と同様に，次の結果が成り立つ.

(I) $\mathcal{P}_{bi} = \{p \in \mathcal{P}_b \,|\, \int p\, d\sigma(p) < \infty\}$ は covex cone で，$f \in \mathcal{Q}_{bi} = \mathcal{P}_{bi} - \mathcal{P}_{bi}$ ならば

$$D[f] + \frac{1}{2}\int f^2\, d\sigma(1) \le \int f\, d\sigma(f) < \infty.$$

(II) $\mathcal{H}_{be} = \{u \in \mathcal{H}_b \,|\, D[u] + \int u^2 d\sigma(1) < \infty\}$, $\mathcal{P}_{bf} = \{p \in \mathcal{P}_b \,|\, \sigma(p)(X) < \infty\}$ とおくとき，$f \in \mathcal{H}_{be} + \mathcal{Q}_{bi}$, $g \in \mathcal{P}_{bf} - \mathcal{P}_{bf}$ に対し $|f| \le p^*$ をみたす $p^* \in \mathcal{P}_b^*$ が存在すれば，

$$2\delta_{[f,g]}(X) + \int fg\, d\sigma(1) + \int fg\, d\sigma^*(1) = \int f\, d\sigma(g) + \int g\, d\sigma(f).$$

掃散空間の特別なものに無限ネットワークがあり，例えば離散シリンダー上の離散放物型ポテンシャル論における双対性，Dirichlet 積分（和）に関する話は，上の一般論に含まれる.

20\. 劣指数型正則関数の理論

伊 東 由 文　　　徳島大総合科

この講演では河合の定義した劣指数型正則関数の層 $\tilde{\mathcal{O}}$ の関数論的研究について報告いたします．河合による $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域の概念の定義には，それが $\tilde{C}^n$ の相対コンパクト開集合に対してだけあてはまるような技術的条件が付けられていました．したがって，$\tilde{C}^n$ は $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域とは考えられていませんでした．この報告ではこの技術的条件なしに $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域の概念を定義します．これによって，$\tilde{C}^n$ は新しい意味で $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域になることがわかります．これによって，$\tilde{C}^n$ の $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域と C^n の擬凸領域の関係が明らかになりました．すなわち，$\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域 Ω は $\tilde{C}^n$ の開集合であって，$\Omega\cap C^n$ が C^n の擬凸領域であるものに他ならないことがわかりました．したがって，C^n の擬凸領域に対応する無限遠点をつけ加えただけでは，それが $\tilde{C}^n$ の開集合でなければ $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域にはなりません．この意味で，C^n 上の正則関数の理論と $\tilde{C}^n$ 上の劣指数型正則関数の理論の違いが存在します．もちろん，河合の意味の $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域は我われの意味でも $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域であります．河合の意味の $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域に対しては岡-Cartan-河合の定理 B が成りたつことがわかっていますが，我われの意味での $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域に対して，岡-Cartan-河合の定理 B が成りたつかどうかはまだ未解決です．また，$\tilde{C}^n$ 上の $\tilde{\mathcal{O}}$ 正則領域の概念が定義できまして，$\tilde{\mathcal{O}}$ 正則領域は $\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸であることはわかりましたが，逆に，$\tilde{\mathcal{O}}$ 擬凸領域が $\tilde{\mathcal{O}}$ 正則領域かどうかは未解決

です．また，急減少正則関数に対する Runge の定理の証明に必要なキーレンマの簡単で応用範囲の広い形での証明が得られました．これは $\tilde{O}$ 多重劣調和関数の概念を用いることによって，Hörmander の教科書に書いてある方法が適用できるようになったことによるものです．この報告の結果を論文にしている途中で，C.A.Berenstein と D.C. Struppa の論文を入手しました．そのなかで河合の $\tilde{O}$ 擬凸領域の概念の一般化を試みていますが，我われのより強い条件がついているために，彼等の意味でも $\tilde{C}^n$ は $\tilde{O}$ 擬凸にはならないようです．ねんのために報告しておきます．

21. 無限次元空間の領域からの正則写像の接続

梶原　壌二　九大理　　西原　賢　福工大
吉田　守　福大理　　李　琳　濟南電視大

Ｅをしかるべき複素線形位相空間、Ｄをその領域、Ｌを、しかるべき複素線形位相空間ＢをモデルLie空間とする、複素Lie群とする。

本講演では、ＤからＬへの正則写像ｆがＤの正則被迄解析接続される事を示す。

右の参考論文の８及び９の結果を含む上述の結果は右の参考論文１の安達謙三－鈴木正昭－吉田守の結果の無限次元化である。

引用文献

1. K. Adachi, M. Suzuki and M. Yoshida, *Continuation of holomorphic mappings with values in a complex Lie group*, Pacific J. Math. 47 (1973), 1-4.
2. T. Barton, S. Dineen and R. Timoney, *Bounded Reinhardt domains in Banach spaces*, Comp. Math. 59 (1986), 265-321.
3. J. Colombeau and J. Mujica, *The Levi problem in nuclear Silva spaces*, Arkiv for mat. 18-1 (1980), 117-123.
4. S. Dineen, Sheaves of holomorphic functions on infinite dimensional vector spaces, Math. Ann. 202 (1973), 337-345.
5. S. Dineen, *Cousin's first problem on certain locally convex topological spaces*, Acad. Brasil Cienc. 48-1 (1976), 229-23.
6. L. Gruman, *The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces*, Illinois J. Math. 18(1974), 20-26.
7. J. Kajiwara and H. Kazama, *Oka's principle for relative cohomology set*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 23(1969), 33-70.
8. J. Kajiwara, L. Lin, M. Nishihara and M. Yoshida, *Continuation of holomorphic sections of holomorphic sections of holomorphic fiber bundles over domains of infinite dimensional spaces*, Fukuoka Univ. Sci. Reports 23-2(1993) (in Press).
9. J. Kajiwara, L. Lin, M. Nishihara and M. Yoshida, *On the Levi problem for holomorphic functions of domains of infinite dimensional spaces with values in a complex Lie group*, Research Bulletin of Fukuoka Institute of Technology 26-2(1993) (in Press).

22.

Gauss Maps of Nearly Minimal Surfaces

JOJI KAJIWARA *

Kyushu University 33, Fukuoka 812, Japan

Facsimile: Japan(=81)-92-632-2737 e-mail: kajiwara@math.sci.kyushu-u.ac.jp

LIN LI

Jinan Television University, Jinan, Shandon, China

FUMITOSHI SAKANISHI**

Ariake College of Technology, Ōmuta 836, Japan

This is a result of Chinese-Japanese Joint Work in Kyushu University. Let x: $M \to \mathbf{R}^3$ be a connected oriented minimal surface immersed in $\mathbf{R}^3$. By definition, the Gauss map g of M is the map which associates each point $p \in M$ with the unit normal vector $g(p) \in S^2$ of M at p. At the 1992 Summer Seminar on the theory of functions of several complex variable in Nagano Prefecture, Prof. H. Fujimoto gave an one-hour invited talk, explained his results [4], [5], [6], [7] and [8], then Prof. N. Sasakura gave a question: How about the Gauss map G when g maps each point $p \in M$ to a unit vector $g(p) \in S^2$ which is not necessarily a normal of M at p but close to the unit normal vector?. The aim of the present paper is to give the following answer to the above Sasakura's problem:

Let M be a minimal surface, G be its Gauss map M, and $F : M \to \mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$ be a C^1-mapping. When the first derivatives of F are close to those of G so as to satisfy some inequalities with a constant C, we prove that the Gauss map of F is $1/(1-2C)$-quasiconformal. We also prove that the Gauss map of a 2-dimensional manifold immersed in $\mathbf{R}^m$ is quasiconformal when its mean curvature vector H satisfies $|H|^2 \leq -CR$ for the Gauss curvature R.

AMS No. 53A10, 30C60, 30A10

*Supported in part by Grant-in-Aid for General Scientific Research (C). no. 04640082 from the Ministry of Education, Science and Culture of Japan, 1992

*Supported by Program for sending College Teachers to Domestic Institution of Japan

References.

[1] L. A. Ahlfors, Conformal invariants,Topics in Geometric Function Theory, McGraw Hill, New York, 1973.

[2] S. S. Chern and R. Osserman, Complete minimal surface in euclidean n-space, *J. Analyse Math.*19(1967),15-34.

[3] M. J. Cowen and P. A. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature, *J. Analyse Math.*29(1976),93-153.

[4] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, *J. Math. Soc. Japan* 40(1988), 235-247.

[5] H. Fujimoto, Examples of complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^m$ whose Gauss maps omit m(m+1)/2 hyperplanes in general position, *Sci Rep. Kanazawa Univ*33(1988),37-43.

[6] H. Fujimoto, Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces, *J. Differential Geom.* 29(1989), 245-262.

[7] H. Fujimoto, Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces II, *J. Differential Geom.* 31(1990), 365-385.

[8] H. Fujimoto, Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces III, *Nagoya Math. J.* 124(1991),13-40.

[9] J. Kajiwara, L. Lin and F. Sakanishi, Gauss maps of nearly minimal surfaces, *Complex Variables* (in Press).

[10] H. B. Lawson, Lectures on minimal submanifold I, Publish of Perish, 1980.

[11] X. Mo and Osserman, On the Gauss map and total curvature of complete minimal surfaces and an extension of Fujimoto's theory, *J. Differential Geom.* 31 (1990),345-355.

[12] J. Väisälä, Lectures on n-dimensional conformal mappings, *Lecture Notes in Math.* 229, Springer, 1971.

[13] B. White, Complete surfaces of finite total curvature, *J. Differential Geom.* 26(1987),315-326.

23. 正規特異点と基本群

松野高典　大阪大学 大学院
理学研究科
博士後期課程

以下の結果を得た。

主定理　$\mu : E \to M$ を連結な複素多様体 M 上の正則直線束とする。S を E の超曲面で次の性質をもつものとする。(i) $\mu_{|S} : S \to M$ は固有有限写像。(ii) M の超曲面 B が存在して $\tilde{\mu} := \mu_{|S-\mu^{-1}(B)} : S-\mu^{-1}(B) \to M-B$ は n 対 1 の不分岐被覆で $(d\tilde{\mu})_P$ は $S-\mu^{-1}(B)$ の各点 P で同型。さらに、$\xi(M) \cap S = \phi$ となる μ の連続切断 $\xi : M \to E$ が存在すると仮定する。このとき、

$$\pi_1(E-S) \cong \langle \gamma_1, \cdots, \gamma_n \mid \gamma_j = \varphi(\theta(\beta_k))(\gamma_j),\ (1 \leqq j \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq t) \rangle \overset{\text{半直積}}{\rtimes} \pi_1(M) .$$

ここで β_k $(1 \leqq k \leqq t)$ は、$B = B_1 \cup \cdots \cup B_l$ を B の既約分解としたときに、各 B_j のメリディアン $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ を含む $\pi_1(M-B)$ の最小の正規部分群の生成元である。θ は μ に関するブレイドモノドロミー表現で、φ は B_n から $\mathrm{Aut}(F_n)$ への準同型で $\varphi(\sigma_j)(\gamma_j) = \gamma_{j+1}^{-1}\gamma_j\gamma_{j+1}$, $\varphi(\sigma_j)(\gamma_{j+1}) = \gamma_j$, $\varphi(\sigma_j)(\gamma_k) = \gamma_k$ $(k \neq j, j+1)$ で定義されているものとする。ここで σ_j, γ_j はそれぞれ n 次ブレイド群 B_n, n 次自由群 F_n の生成元である。

系　Mが単連結のとき、$\xi(M)\cap S=\phi$ となる連続切断ξが存在すると、

$$\pi_1(E-S)\cong\langle \gamma_1,\cdots,\gamma_n \mid \gamma_j=\varphi(\theta(\beta_k))(\gamma_j)\ (1\leqq j\leqq n,\ 1\leqq k\leqq t)\rangle$$

補題　$E=M\times\mathbb{C}$ をM上の自明な直線束，$f_1,\cdots f_n$ をM上の正則関数として、Eの超曲面Sが $S=\{(p,z)\in M\times\mathbb{C}\mid z^n+f_1(p)z^{n-1}+\cdots+f_n(p)=0\}$ で定義されているとき、$\xi(M)\cap S=\phi$ となる連続切断ξが存在する。

系と補題より次の定理を得る。

定理　$f_1,\cdots,f_n\in\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_{m-1}]$ を$(m-1)$変数の多項式とし、$\mathbb{C}^m$ の代数的超曲面Sが、$S=\{z_m^n+f_1z_m^{n-1}+\cdots+f_n=0\}$ で定義されているとする。このとき、

$$\pi_1(\mathbb{C}^m-S)\cong\langle \gamma_1,\cdots,\gamma_n \mid \gamma_j=\varphi(\theta(\beta_k))(\gamma_j),\ (1\leqq j\leqq n,\ 1\leqq k\leqq t)\rangle$$

さらにSの$\mathbb{P}^m$での閉包を$\overline{S}$とする。ここで$\mathbb{P}^m$の斉次座標$(x_0:\cdots:x_m)$を$(x_1/x_0,\cdots,x_m/x_0)=(z_1,\cdots,z_m)$となるようにとった。$P_\infty=(0:\cdots:0:1)\in\mathbb{P}^m$とおく。$P_\infty\notin\overline{S}$ と仮定すると、

$$\pi_1(\mathbb{P}^m-\overline{S})\cong\langle \gamma_1,\cdots,\gamma_n \mid \gamma_n\cdots\gamma_1=1,\ \gamma_j=\varphi(\theta(\beta_k))(\gamma_j),\ (1\leqq j\leqq n,\ 1\leqq k\leqq t)\rangle$$

応用

この定理とReidemeister-Schreierの方法を組み合わせて、興味あるいくつかの正規解析空間の非特異点集合の基本群が計算できる。

24. Three dimensional hypersurface purely elliptic singularities of (0, 1)-type

渡辺公夫 筑波大学数学系

In the theory of normal two-dimensional singularities, simple elliptic singularities and cusp singularities are regarded as the next most reasonable class of singularities after rational double points. They are characterized as two-dimensional purely elliptic singularities of (0, 1)-type and of (0, 0)-type, respectively. What are natural generalizations in three-dimensional case of simple elliptic singularities. The notion of a simple K3 singularity was defined as a three-dimensional isolated Gorenstein purely elliptic singularity of (0, 2)-type. A simple K3 singularity is characterized as a normal three-dimensional isolated singularity such that the exceptional set of any Q-factorial terminal modification is a normal K3 surface. Here we are interested in a three-dimensional hypersurface purely elliptic singularities of (0, 1)-type. Let $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2, z_3]$ be a polynomial which is nondegenerate with respect to its Newton boundary $\Gamma(f)$, and whose zero locus $X = \{ f = 0 \}$ in $\mathbb{C}^4$ has an isolated singularity at the origin $0 \in \mathbb{C}^4$. Then the condition for (X, x) to be a purely elliptic singularity of (0, 1)-type is given by a property of the Newton boundary of $\Gamma(f)$ of f.

In this talk, we show how to classify the principal parts of defining equations which define three-dimensional hypersurface purely elliptic singularities of (0, 1)-type, and refer to the relation to simple K3 singularities with respect to the deformation theory.

Examples $(s \geq 1)$

No. 2, $x^3 + yz^3 + y^2w^2 + z^4 + w^{6+s} + xyzw = 0$

No. 4, $x^3 + y^3 + z^3w^3 + z^4 + w^{12+s} + xyzw = 0$

No. 6, $x^2 + y^5 + yz^4 + y^3w^4 + w^{10+s} + xyzw = 0$

No. 7, $x^2 + y^4 + z^{8+r} + z^4w^4 + w^{8+s} + xyzw = 0$

No. 8, $x^2 + y^4 + z^6 + z^4w^4 + w^{12+s} + xyzw = 0$

No. 9, $x^2 + y^4 + z^5 + z^4w^4 + w^{20+s} + xyzw = 0$

No. 10, $x^2 + y^3 + z^{12+r} + z^6w^6 + w^{12+s} + xyzw = 0$

No. 11, $x^2 + y^3 + z^{10} + z^6w^6 + w^{15+s} + xyzw = 0$

No. 12, $x^2 + y^3 + z^9 + z^6w^6 + w^{18+s} + xyzw = 0$

No. 13, $x^2 + y^3 + z^8 + z^6w^6 + w^{24+s} + xyzw = 0$

No. 14, $x^2 + y^3 + z^7 + z^6w^6 + w^{42+s} + xyzw = 0$

$$x^2 + y^3 + z^7 + \lambda z^6w^6 + \mu w^{42} + w^{42+s} + xyzw = 0$$

(1) $\mu \neq 0$: purely elliptic (0,2)-type

(2) $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$: purely elliptic (0,1)-type

(3) $\mu = 0$, $\lambda = 0$: purely elliptic (0,0)-type

No. 15, $x^2 + y^3z + z^{5+r} + z^2w^3 + w^{4+s} + xyzw = 0$

No. 16, $x^2 + y^3w + z^4 + z^3w^2 + w^{8+s} + xyzw = 0$

No. 18, $x^3 + y^3 + z^4w + z^3w^3 + w^{9+s} + xyzw = 0$

No. 19, $x^2y + y^4 + yz^3 + yw^6 + w^{8+s} + xyzw = 0$

No. 20, $x^2z + y^3 + z^4 + z^3w^6 + w^{24+s} + xyzw = 0$

No. 24, $x^2z + y^3 + z^6 + z^3w^6 + w^{12+s} + xyzw = 0$

No. 25, $x^2z + y^3 + z^9 + z^3w^6 + w^{9+s} + xyzw = 0$

25. トロイダル群の de Rham cohomology と 複素直線バンドルの Chern class について

梅野高司　　九州産業大学教養部

$G = \boldsymbol{C}^n/\Gamma, (\Gamma = \boldsymbol{Z}\{e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_q\})$ をトロイダル群,
$\boldsymbol{R}_\Gamma = \boldsymbol{R}\{e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_q\}$ とする。 $v_i = \sqrt{-1}e_i \quad (q+1 \leq i \leq n)$
とおいたとき, $e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_n$ は $\boldsymbol{R}$ 上一次独立とする。
$W = (v_1, \cdots, v_n), \quad \beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) = \mathrm{Im}W,$
$\zeta \in \boldsymbol{C}^n; \zeta = \zeta_1\beta_1 + \cdots + \zeta_n\beta_n = t_1e_1 + \cdots + t_ne_n + t_{n+1}v_1 + \cdots + t_{2n}v_n$
とおく。

<u>補題</u>　φ を $d-$ closed , $p-$ form on G とすると, constant form

$$\varphi_0 = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_p \leq n+q} c_{i_1 \cdots i_p} dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_p}$$

が一意的に存在して, φ は φ_0 と cohomologous である。

<u>定理</u>　
$$\begin{aligned} H^p(G, \boldsymbol{C}) &= \textstyle\bigwedge^p \boldsymbol{C}\{dt_1, \cdots, dt_{n+q}\} \\ &= \textstyle\bigwedge^p \boldsymbol{C}\{d\zeta_1, \cdots, d\zeta_n, d\bar{\zeta}_1, \cdots, d\bar{\zeta}_q\} \end{aligned}$$

$E \in H^2(G, \boldsymbol{Z})$ とすると、E は Γ 上の整数値交代形式である。 E_R を E の $\boldsymbol{R}_\Gamma \times \boldsymbol{R}_\Gamma$ への, extension とし, $E_c = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n+q} E_{ij} dt_i \wedge dt_j$ を E の $H^2(G, \boldsymbol{C})$ への像とする。

<u>定理</u>　$E = c_1(L)$ となる複素直線バンドル L が存在するための必要十分条件は, 定数係数の実 1-1 form $F = \sum_{1 \leq i,j \leq n} F_{ij} d\zeta_i \wedge d\bar{\zeta}_j$ が存在して, E_c は F と cohomologous in $H^2(G, \boldsymbol{C})$ である。また、存在は, 一意的である。

ここで, $T_\Gamma := \boldsymbol{R}\{\frac{\partial}{\partial t_i}; i = 1, \cdots, n+q\}$ とおくと,

$$E_C|T_\Gamma \times T_\Gamma = F|T_\Gamma \times T_\Gamma$$

$H_{ij} := 2\sqrt{-1}F_{ij}$, $\quad u, v \in T' = \boldsymbol{C}\{\frac{\partial}{\partial \zeta_i}; i = 1, \cdots, n\}$ にたいし,

$\mathcal{H}(u, v) := {}^t u(H_{ij})\bar{v}$, $\quad \hat{u} := u + \bar{u} \in T = \boldsymbol{R}\{\frac{\partial}{\partial t_i}; i = 1, \cdots, 2n\}$ とおくと,

$$\mathrm{Im}\mathcal{H}(u, v) = F(\hat{u}, \hat{v})$$

系 $\quad E = c_1(L)$ となる複素直線バンドル L が存在するための必要十分条件は, $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^n$ 上の hermitian form H が存在して,

$$\mathrm{Im}H|\boldsymbol{R}_\Gamma \times \boldsymbol{R}_\Gamma = E_R|\boldsymbol{R}_\Gamma \times \boldsymbol{R}_\Gamma$$

26.

A Construction of Hyperbolic Hypersurface of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$

増田一男 (東工大理)
野口潤次郎 (東工大理)

S. Kobayashi conjectured in 1970 that a generic hypersurface of large degree of the complex projective space $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ of dimension n is hyperbolic, and that its complement is hyperbolic and moreover hyperbolically embedded into $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ ([K1, p. 132]). Hyperbolic manifolds have attracted interest not only from the view point of complex analytic geometry, but also in relation with Diophantine problem. It has been hoped to write down an arbitrary dimensional equation which defines a hyperbolic manifold.

The above Kobayashi's conjecture is still far from the solution, but there have been some progresses on the existence of such smooth hypersurfaces of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ for small n. Cf. Brody-Green (1977) and Nadel (1989) for hypersurfaces of $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$; Azukawa-Suzuki (1980), Nadel (1989), Zaiden berg (1989), Grauert (1989), etc. for complements of curves of $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$
Adachi-Suzuki
There has been no known example of dimension greater than 3 (~~or 2 in the latter case~~).

We will prove the following existence theorem in a constructive way.

Main Theorem. *There exists a smooth hyperbolic hypersurface of every degree $d \geq d(n)$ of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, such that its complement is complete hyperbolic and hyperbolically embedded into $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, where $d(n)$ is a positive integer depending only on n.*

Furthermore we will confirm Kobayashi's conjecture for a family of hypersurfaces of a restricted type.

Let $\{M_j(z_1, \ldots, z_n)\}_{j=1}^{s}$ be a set of distinct monomials of degree 1 with non-negative rational exponents. We will introduce a notion that $\{M_j\}$ is a *k-admissible* set ($2 \leq k \leq n$), which will be explained in the talk. Let l_j be the smallest positive integer l such that all the exponents of M_j^l are integers. Let $d_j, 1 \leq j \leq s$, be positive integers such that $l_j d_1 = \cdots = l_s d_s = d$.

Let X be a hypersurface of degree d of $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ defined by

$$X: \quad c_1 M_1^{l_1 d_1} + \cdots + c_s M_s^{l_s d_s} = 0, \quad c_j \in \mathbf{C}^*.$$

Theorem A. *Let the notation be as above. Assume that*

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{d_j} < \frac{1}{(s-2)}.$$

i) *If $\{M_j(z_1, \ldots, z_n)\}_{j=1}^{s}$ is n-admissible, then X is hyperbolic for all $(c_j) \in (\mathbf{C}^*)^s$.*

ii) *If $\{M_j(z_1, \ldots, z_n)\}_{j=1}^{s}$ is not n-admissible, then there is an algebraic subset $\Sigma \subset (\mathbf{C}^*)^s$ such that X is hyperbolic if and only if $(c_j) \in (\mathbf{C}^*)^s \setminus \Sigma$.*

iii) *There is an integer $d(n-1)$ such that for all $d \geq d(n-1)$ there are smooth hyperbolic hypersurfaces of degree d of $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$.*

For the hyperbolicity of complements of hypersurfaces we have the following.

Theorem B. *Let the notation be as above. Assume that*

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{d_j} < \frac{1}{s-1}.$$

i) *If the set $\{M_j, z_{n+1}\}$ added a new variable z_{n+1} is $(n+1)$-admissible, then the complement $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \setminus X$ of X is complete hyperbolic, and*
X and
hyperbolically embedded into $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$.

ii) *If $\{M_j, z_{n+1}\}$ is not $(n+1)$-admissible, then there is an algebraic subset $\Xi \subset (\mathbf{C}^*)^s$ such that $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \setminus X$ is complete hyperbolic, and hyperbolically embedded into $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ if and only if $(c_j) \in (\mathbf{C}^*)^s \setminus \Xi$.*

iii) *There is an integer $d'(n-1)$ such that for all integers $d \geq d'(n-1)$ there are smooth hyperbolic hypersurfaces of degree d of $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ such that their complements are complete hyperbolic and hyperbolically embedded into $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$.*

In the course of the proof, we use the Nevanlinna-Cartan thoery, especially the ramification thoerem for holomorphic curves, and an elementary, but a bit complicated algebraic computation.

27. A Characterization of Moishezon Spaces

高山茂晴　　東京都立大学

We consider sufficient conditions for a singular Hermitian line bundle (L, h) over a compact complex space X to be big and, cosequently, for X to be a Moishezon space. A holomorphic line bundle L is said to be big if $\dim \Phi_{|L^{\otimes\nu}|}(X) = \dim X$ for some $\nu \in \mathbb{N}$, where $\Phi_{|L^{\otimes\nu}|}$ is the meromorphic map to some $\mathbb{P}^N$ by means of the global sections of $L^{\otimes\nu}$. A reduced and irreducible compact complex space X is said to be Moishezon if the transcendence degree of the meromorphic function field of X over a complex number field $\mathbb{C}$ is equal to the dimension of X. X is Moishezon if and only if there exists a bimeromorphic holomorphic map from a projective manifold to X. This problem arose from an attempt to generalize the following theorem due to Kodaira: A compact complex manifold is projective algebraic if and only if there exists a positive line bundle on it. There are several works in this direction. Demailly and Siu used *smooth* Hermitian metrics, their theorem are motivated by the conjecture of Grauert and Riemenschneider: A compact complex manifold admits a smooth Hermitian holomorphic line bundle whose curvature form is positive definite on a dense subset of it, then it is Moishezon. But it is not enough to characterize Moishezon spaces by smooth metrics as is mentioned below. Let X be a non-projective Moishezon manifold. Then there exists a proper modification $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ from a projective manifold. By Kodaira, $\tilde{X}$ carries a smooth integral Kähler form $\tilde{\omega}$. Then the push-forward $\pi_*\tilde{\omega}$ is an integral Kähler *current* which is smooth on the complement of some proper analytic subset of X. However, X does not have a smooth Kähler *form* (Kähler and Moishezon imply projectivity). On the other hand, Li and Shiffman used *singular* Hermitian metrics and proved:

A compact complex manifold is Moishezon if and only if there exists an integral Kähler current on it. In our Main Theorem, the curvature current of a line bundle may have singularities and nagative parts.

Let M be an n-dimensional complex manifold and let L be a holomorphic line bundle over M with a smooth Hermitian metric h. We denote the curvature form of h by $c(L,h) := \sqrt{-1}(2\pi)^{-1}\bar{\partial}\partial \log h$. Set $M(q,L) := \{m \in M; c(L,h)$ has q negative eigenvalues and $n-q$ positive eigenvalues at $m\}$ for each $q = 0, 1, \cdots, n$ and put $M(\leq q, L) := M(0,L) \cup M(1,L) \cup \cdots \cup M(q,L)$. Our goal is the following:

Main Theorem. *Let X be an n-dimensional reduced and irreducible compact complex space and let L be a holomorphic line bundle over X with a singular Hermitian metric h. Assume that the curvature current $c(L,h)$ is smooth on the complement of some proper analytic subset $Z \subset X$ and that $c(L,h)$ is strictly positive on some tubular neighborhood B of Z. Then $\int_{X_{\mathrm{reg}}(\leq 1,L)} c(L,h)^n$ exists, where X_{reg} is the smooth locus of X. If $\int_{X_{\mathrm{reg}}(\leq 1,L)} c(L,h)^n > 0$, then L is big, in particular X is Moishezon.*

The proof is based on some lemmas; the decomposition principle, Demailly's generalization of Weyl's formula for the asymptotic spectrum and the absence of essential spectrum. As a corollary, we reprove a characterization of Moishezon manifolds.

Corollary. *Let X be a compact complex manifold. Then X is Moishezon if and only if X has an integral Kähler current which is smooth on the complement of some proper analytic subset of X.*

28. 射影空間上の複素力学系

上田 哲生　　京大 総合人間学部

1変数の有理関数の iteration の理論の多変数の場合への拡張として n 次元複素射影空間 $\mathbf{P}^n$ からそれ自身への正則写像で定まる複素力学系を考える.

$\mathbf{P}^n$ の点を斉次座標 $p = [x_0 : \cdots : x_n]$ で表すと, 正則写像 $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ は次のように表される:

$$p = [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto f(p) = [f_0(x_0, \ldots, x_n) : \cdots : f_n(x_0, \ldots, x_n)]$$

ここで, f_i は d 次斉次多項式. 以下では $d \geq 2$ の場合を考える.

f の Fatou 集合 Ω を

$$\Omega = \left\{ p \in \mathbf{P}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{点 } p \text{ の或る近傍 } V \text{ において} \\ f^j|V \ (j = 1, 2, \ldots) \text{ が正規族をなす} \end{array} \right\}$$

で定義する.

<u>定理</u>: Fatou 集合 Ω は正則領域かつ, Kobayashi 双曲的.

f は $\mathbf{P}^n$ の d^n 葉分岐解析的被覆である. f の set of critical points C を次で定める:

$$C = \{ p \in \mathbf{P}^n \mid \operatorname{rank} df(p) < n \}.$$

また, f の critical orbit を $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^j(C)$ で定める

<u>定義</u>: f が critically finite とは D が閉集合となることをいう.
　これは D がの解析的集合 (代数的集合) となることと同値.

1次元の場合, f が critically finite であれば, そのFatou 集合は超吸引的周期点の収束領域のみからなる. 特に超吸引的周期点が存在しないとき(preperiodic), Fatou 集合は空である.

これを高次元の場合に拡張しよう. 2次元の最も簡単な場合について定理および例を述べる.

正則写像 f: $\mathrm{P}^2 \to \mathrm{P}^2$ は critically finite とする．

$$f^{j-1}(D) = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(C), \quad j = 1, 2, \ldots$$

は代数的集合の下向列であるから， 或る l_0 が存在して

$$f^{l_0-1}(D) = f^{l_0}(D) = \cdots$$ が成り立つ．

これを E で表す（純１次元代数的集合）．

C と E とは共通の既約成分を持たない(weakly preperiodic)と仮定する．このとき，$C' = C \cap E$ は有限集合． $D' = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^j(C')$ とおく．

<u>補題</u>： D' は $E \cap \mathrm{sing}(D)$ に含まれる．従って有限集合．

$$f^{j-1}(D') = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(C'), \quad j = 1, 2, \ldots$$

は有限集合の下向列であるから， 或る l_1 が存在して

$$f^{l_1-1}(D') = f^{l_1}(D') = \cdots$$ が成り立つ．

これを E' で表す（空でない有限集合）．

<u>定理</u>： $C \cap E'$ が空ならば，Fatou 集合は空である．

<u>例</u>： $[x:y:z] \to [(-x+y+z)^2 : (x-y+z)^2 : (x+y-z)^2]$

この場合， $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$，ただし

$C_1 = \{-x+y+z = 0\}$，$C_2 = \{x-y+z = 0\}$，$C_3 = \{x+y-z = 0\}$．

これらは f によって次のように写される：

$$C_1 \to D_1 \to D_4 \circlearrowleft$$
$$C_2 \to D_2 \to D_5 \circlearrowleft$$
$$C_3 \to D_3 \to D_6 \circlearrowleft$$

$D_1 = \{x = 0\}$， $D_2 = \{y = 0\}$， $D_3 = \{z = 0\}$，

$D_4 = \{y - z = 0\}$， $D_5 = \{z - x = 0\}$， $D_6 = \{x - y = 0\}$，

これより $E = D_4 \cup D_5 \cup D_6$． $C' = C \cap E$ は次の６点からなる：

$[2:1:1]$，$[1:2:1]$，$[1:1:2]$，$[0:1:1]$，$[1:0:1]$，$[1:1:0]$．

これらは次のように写される：

$$[2:1:1] \to [0:1:1] \to [1:0:0] \searrow$$
$$[1:2:1] \to [1:0:1] \to [0:1:0] \to [1:1:1] \circlearrowleft$$
$$[1:1:2] \to [1:1:0] \to [0:0:1] \nearrow$$

従って E' は１点 $[1:1:1]$ のみからなる． $C \cap E'$ は空．

これより f のFatou 集合は空である．

29. $\mathbb{C}^2$の単位球での$\bar\partial$-閉形式の拡張と$\bar\partial$-方程式の解の積分表示

西村保一郎　　大阪医科大学

$\mathbb{C}^2$の単位球を $B = \{z = (z_1, z_2); |z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$, 単位球面を $S = \{z; |z| = 1\}$ とする。B上の$\bar\partial$−閉な (0,1) 形式 Fが与えられたときの B上の$\bar\partial$−方程式$\bar\partial U = F$の解 Uを表示する積分公式を問題とする。これは既に多数の著者が作っている (G. M. Henkin, H. Skoda, P. Charpentier, F. R. Harvey-J. C. Polking, I. Lieb-R. M. Range, K. Kimura など)。我々も彼らとは異なる自然な構成方法で積分公式を作る。次の記号を用いる。$\omega_1(z) = \frac{z_2}{|z|}dz_1 - \frac{z_1}{|z|}dz_2, \omega_2(z) = \frac{\bar z_1}{|z|}dz_1 + \frac{\bar z_2}{|z|}dz_2$ また $dz_\Omega = dz_1 \wedge dz_2 = \omega_1(z) \wedge \omega_2(z)$ と置く。通常の球面要素 $d\sigma(z)$ は $d\sigma(z) = \frac{-1}{2}|z|dz_\Omega \wedge \bar\omega_1(z)$ と書ける。$\iota : S \to \mathbb{C}^2$と置く。

1. $\bar\partial$−閉 (2,1) 形式への拡張問題

$\bar B$で連続な$\bar\partial$−閉 (2,1) 形式$\phi = \frac{-1}{2}\{\phi_1|z|dz_\Omega \wedge \bar\omega_1(z) + \phi_2|z|dz_\Omega \wedge \bar\omega_2(z)\}$ に対してϕ_1の Sへの制限$\iota^*\phi_1$を fと置くと$\iota^*\phi = fd\sigma$である。fは,$\bar B$の正則関数 gに対して$\int_S fgd\sigma = 0$ を満たす。ϕを S上の $fd\sigma$の Bの$\bar\partial$−閉形式への拡張とよぶ。

逆に, $\bar B$の正則関数 gに対して$\int_S fgd\sigma = 0$ を満たすような S上の $fd\sigma$ が与えられたとき$\bar\partial$−閉拡張ϕが存在する。我々はϕを表す積分核

$$\Lambda(\zeta, \eta) = \frac{-1}{2}\{\lambda_1|\zeta|d\zeta_\Omega \wedge \bar\omega_1(\zeta) + \lambda_2|\zeta|d\zeta_\Omega \wedge \bar\omega_2(\zeta)\} \quad ((\zeta, \eta) \in B \times S)$$

を構成する ($\phi(\zeta) = \int_S \Lambda(\zeta, \eta)f(\eta)d\sigma(\eta)$) 。

$\lambda_1(\zeta, \eta) = \frac{1}{2\pi^2}\{\frac{1 - |\zeta|^2}{|\zeta - \eta|^4} - \frac{1}{(1 - \bar\zeta \cdot \eta)^2}\}$ と置く。これは Poisson 核と Szegö 核の差である。S上で$\eta, \bar\eta$について の斉次 (q, p) 次の調和多項式 $\lambda_{1pq}(\zeta, \eta)$ に展開する ($\lambda_1 = \sum_{p \geq 1, q \geq 0} \lambda_{1pq}$) と$\lambda_{1pq}$は$\zeta, \bar\zeta$については (p, q) 次

になる。$\zeta,\bar{\zeta}$について斉次 $(p-1,q+1)$ 次の調和多項式$\lambda_{2(p-1)(q+1)}(\zeta,\eta)$ で$\Lambda_{pq}=\dfrac{-1}{2}\{\lambda_{1pq}|\zeta|d\zeta_\Omega\wedge\bar{\omega}_1(\zeta)+\lambda_{2(p-1)(q+1)}|\zeta|d\zeta_\Omega\wedge\bar{\omega}_2(\zeta)\}$ が$\zeta\in B$ について$\bar{\partial}-$閉になるようなものが一意に存在する。これを p,qについて足して$\Lambda(\zeta,\eta)$ を得る。和は explicit に書ける。
なお,$n\geq 3$ の場合に同様のことを行うと一意性が成り立たないので $n\geq 3$ でのΛ_{pq}に当たるものが確定しない。これが, この話が現在まで $n=2$ の場合しかうまくいかないことの理由である。

2. $\bar{\partial}-$方程式の Skoda の意味の解

B上の$\bar{\partial}-$閉 $(0,1)$ 形式 Fが与えられたとき S上の関数 u は, 任意の$\bar{\partial}-$閉 $(2,1)$ 形式$\phi\in C^1(\bar{B})$ に対して$\int_S u\phi=\int_B F\wedge\phi$を満たすとき, $\bar{\partial}-$方程式の Skoda の意味の解と呼ばれる。1. の$\Lambda(\zeta,\eta)$ が Skoda の意味の解 u を表示する積分核になる $(u(\eta)=\int_B F(\zeta)\wedge\Lambda(\zeta,\eta))$。

3. Bでの$\bar{\partial}-$方程式の解

次は Bochner-Martinelli 核である。

$$B(\zeta,z)=\frac{-1}{4\pi^2}\{\frac{1-\bar{z}\cdot\zeta}{|z-\zeta|^4}d\zeta_\Omega\wedge\bar{\omega}_1(\zeta)+\frac{\bar{z}_1\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2\bar{\zeta}_1}{|z-\zeta|^4}d\zeta_\Omega\wedge\bar{\omega}_2(\zeta)\}$$

$\bar{\partial}-$方程式の Skoda の意味の解 $u(\eta)$ に対して
$U(z)=\int_B F(\zeta)\wedge B(\zeta,z)+\int_S u(\eta)B(\eta,z)$ が Bでの$\bar{\partial}-$方程式の解になる。$K(\zeta,z)=B(\zeta,z)+\int_S\Lambda(\zeta,\eta)B(\eta,z)$ と置くと, これが解 $U(z)$ を表示する積分核になる。$(U(z)=\int_B F(\zeta)\wedge K(\zeta,z))$

30.

2次元チューブ領域の分類

東北大学理学部　　清水　悟

$\mathbb{C}^n$ の中のチューブ領域 T_Ω とは $T_\Omega = \mathbb{R}^n + \sqrt{-1}\Omega$ により与えられる $\mathbb{C}^n$ の中の領域である。ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ の中の領域で Ω は T_Ω の底と呼ばれる。もし底 Ω の凸包が直線を含まないならば T_Ω は $\mathbb{C}^n$ の中の有界領域と双正則同値となる。このときよく知られたH.Cartanの結果より、T_Ω の正則自己同型全体のなす群 $\mathrm{Aut}(T_\Omega)$ はコンパクト-開位相に関してリー群となり、そのリー環 $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ は T_Ω 上の完備な正則ベクトル場のなす有限次元リー環と標準的に同一視することができる。この講演では、[1]において与えられた $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ に関する構造定理の応用として2次元チューブ領域の分類を与える。

定理１([2])　T_Ω を $\mathbb{C}^2$ の中のチューブ領域とし、T_Ω の底 Ω は直線を含まない凸領域であるとする。このとき T_Ω はつぎの4種類のチューブ領域のいずれか1つに双正則同値となる:

(i) 底 Ω が $\Omega = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 > 0,\ y_2 > 0\}$ により与えられるチューブ領域 T_Ω;

(ii) 底 Ω が $\Omega = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > {y_1}^2\}$ により与えられるチューブ領域 T_Ω;

(iii) 底 Ω が $\Omega = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > -\log\sin y_1,\ 0 < y_1 < \pi\}$ により与えられるチューブ領域 T_Ω;

(iv) $\mathrm{Aut}(T_\Omega)^\circ = \mathrm{Aff}(T_\Omega)^\circ$ を満たすチューブ領域 T_Ω.

ここで $\mathrm{Aff}(T_\Omega)$ は $\mathbb{C}^2$ の複素アフィン変換で T_Ω を不変にするものからなるリー群を表わす。またリー群 G に対して G° は G の単位元を含む連結成分を表わす。

定理２（[2]）　$\partial_i = \partial/\partial z_i$, $i = 1, 2$, とおくと、定理１の(iii)のチューブ領域 T_Ω に対して

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \langle \partial_1,\ \partial_2,\ e^{z_1}(\partial_1 - \sqrt{-1}\partial_2),\ e^{-z_1}(\partial_1 + \sqrt{-1}\partial_2)\rangle_{\mathbb{R}}$$

が成り立つ。とくに $\dim \mathrm{Aut}(T_\Omega) = 4$ である。また T_Ω は、底 Ω' が $\Omega' = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > e^{y_1}\}$ により与えられるチューブ領域 $T_{\Omega'}$ と双正則同値である。

注意　定理２のチューブ領域は[3, Theorem 1, p. 999]の結果に対する反例を与えている。

参考文献

[1] S. Shimizu, Automorphisms of tube domains, to appear.

[2] S. Shimizu, A classification of two-dimensional tube domains, in preparation.

[3] J. Dadok and P. Yang, Automorphisms of tube domains and spherical hypersurfaces, Amer. J. Math. 107 (1985), 999-1013.

特別講演

Kähler 多様体の一般位数擬凸領域の境界距離関数と q-convexity

松本　和子　　　新潟大自然科学

1. M を C^∞ 級の Kähler 計量 G を持つ連結複素多様体, D を M の開集合とする. 計量 G から自然に決まる, M の 2 点 P, Q の距離を $d(P,Q)$ で表し, D の点 P から境界 ∂D までの距離を $d_{\partial D}(P) = \inf\{d(P,Q); Q \in \partial D\}$ とする.

M が n 次元複素射影空間 $\mathbf{P}_n$ で, G が Fubini 計量のとき, D が M で (通常の意味で) 擬凸であれば, 関数 $-\log d_{\partial D}$ は D で強多重劣調和になる (Takeuchi [17]). この結果は, 一般に, M が holomorphic bisectional curvature が正の完備 Kähler 多様体であれば成立し, Greene-Wu [6] により, Kähler 多様体 M の擬凸領域 D に対し, 関数 $-\log d_{\partial D}$ の '多重劣調和性の度合' を表す量が, M の holomorphic bisectional curvature を用いて評価されている (cf. Takeuchi [18], Suzuki [15]).

本講演では, D が n 次元 Kähler 多様体 M の位数 $n-q$ $(1 \leq q \leq n)$ の擬凸領域である場合に, 関数 $-\log d_{\partial D}$ の '位数 $n-q$ の擬凸性の度合' を表す量を導入して評価を行い, その応用として, $\mathbf{P}_n$ や Stein 多様体の部分領域の q-convexity, q-completeness に関する, Barth [1], Suria [14] (Eastwood-Suria [4]) 等の結果 (及びそれらの別証明) を含む結果が得られることを述べることにする.

2. §2 では, M を n 次元 paracompact 連結複素多様体, D を M の開集合とする. D $(\subset M)$ は, 大体, その補集合 $M \setminus D$ が純 $n-q$ 次元の analytic set と同じ様な連続性を持つとき, M で位数 $n-q$ の擬凸であるという ([16]). 位数 $n-q$ の擬凸性は, 境界 ∂D の局所的な性質である. 通常の意味の擬凸領域は位数 $n-1$ の擬凸であり, 任意の領域は位数 0 の擬凸である. M の中の領域 D が (weakly) q-convex であれば, D は M で位数 $n-q$ の擬凸になるが, $2 \leq q \leq n-1$ のとき, $M = \mathbf{C}^n$ の場合でさえ, この逆は成立しない ([3], [8]).

Fujita [5] により, $\mathbf{C}^n$ の開集合 D が位数 $n-q$ の擬凸になるための必

要十分条件は, D が位数 $n-q$ の擬凸関数によって exhaust されることである. この関数は, Hunt-Murray [7] が導入した $(q-1)$-plurisubharmonic function とも同値であるが, ここでは, 本質的には Slodkowski [13] による, 次の形で定義を述べておく.

定義 1 (cf. [13], [5], [11]). $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を上半連続, $P \in D$ とする. φ が P で位数 $n-q$ の擬凸であるとは, P の近くで定義された任意の weakly $(n-q+1)$-convex function f に対し, P の近傍 $U(f)$ で, $P \in \Delta$, $\Delta \Subset U(f)$ である任意の領域 Δ に対し,

$$(\varphi + f)(P) \leq \max\{(\varphi + f)(Q);\ Q \in \partial\Delta\}$$

となるものが存在することをいう. また, φ は, D の各点 P で位数 $n-q$ の擬凸になるとき, D で位数 $n-q$ の擬凸であるという.

通常の意味の多重劣調和関数は位数 $n-1$ の擬凸である. C^2 級の関数 φ が, 位数 $n-q$ の擬凸になるための必要十分条件は, φ が weakly q-convex となることである. 上半連続な多重劣調和関数が C^2 級のもので近似されることは良く知られているが, 位数 $n-q$ の擬凸関数は, 一般には C^2 級のもので近似することができない.

定義 2 (cf. [2]). $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は, D の各点 P に対し, P の近傍 U と U 上の strongly 1-convex function h で, $\varphi - h$ が U で位数 $n-q$ の擬凸となるものが存在するとき, D で位数 $n-q$ の強擬凸であるという.

定義 3 (Diederich-Fornaess [3]). $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}$ は, D の各点 P に対し, P の近傍 U と U 上の q-convex function $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ が存在して $\varphi|_U = \max\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t\}$ と書けるとき, D で q-convex with corners であるという.

Bungart と Diederich-Fornaess による, 次の近似定理が知られている.

Bungart の近似定理 ([2], 1990 年). $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}$ を連続な位数 $n-q$ の強擬凸関数とする. このとき, D 上の任意の連続関数 $\varepsilon > 0$ に対し, D で q-convex with corners である関数 ψ で, D 上 $|\varphi - \psi| < \varepsilon$ となるものが存在する.

Diederich-Fornaess の近似定理 ([3], 1985 年). $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}$ を q-convex function with corners とする. このとき, D 上の任意の連続関数 $\varepsilon > 0$ に対し, D 上の $\widetilde{q}$-convex function ψ で, D 上 $|\varphi - \psi| < \varepsilon$ となるものが存在する. ここで, $\widetilde{q} = n - [n/q] + 1$ で, [ ] は Gauss 記号を表す.

Diederich-Fornaess は, さらに, 任意の pair (n, q) に対し, 上の近似定理の中の $\widetilde{q}$ は, 最良の値であることを示している. $2 \le q \le n-1$ のとき, $\widetilde{q} > q$ であることに注意する.

Bungart の近似定理より, $\mathbf{C}^n$ の開集合 D に対しては, D が $\mathbf{C}^n$ で位数 $n-q$ の擬凸になることと, q-complete with corners になることとは同値である. また, Diederich-Fornaess の近似定理より, このとき, D $(\subset \mathbf{C}^n)$ は $\widetilde{q}$-complete になる.

M の開集合 D は, ∂D の各点 Q に対し, Q の近くで定義された, Q を通る $n-q$ 次元の complex submanifold S で, $S \subset M \setminus D$ となるものが存在するとき, 条件 (C_q) を満たすということにする. Bungart の近似定理の応用として, $\mathbf{C}^n$ の位数 $n-q$ の擬凸領域は, 条件 (C_q) を満たす部分領域の増大列の極限として特徴付けられることが分かる.

3. §3 では, M を C^∞ 級の Hermite 計量 G を持つ n 次元連結複素多様体, D を M の開集合とする.

M の点 P の回りの局所座標系 $(z_1, \ldots, z_n)$ は, 次の条件

$$z_i(P) = 0, \quad G\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right)(P) = \delta_{ij} \qquad (1 \le i, j \le n)$$

を満たすとき, P で normal であると呼ぶことにする.

M の各点 P は, P で normal な局所座標系を持つ. 2 つの局所座標系 $(z_1, \ldots, z_n)$ と $(w_1, \ldots, w_n)$ が共に P で normal なとき, P での変換行列 $(\partial z_i / \partial w_j)(P)$ は unitary である. したがって, φ が P の近くで C^2 級のとき, Hermite 行列 $(\partial^2 \varphi / \partial z_i \partial \bar{z}_j)(P)$ と $(\partial^2 \varphi / \partial w_i \partial \bar{w}_j)(P)$ の, すべての固有値は一致する.

定義 4 ([11]). $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を上半連続な関数, P を D の 1 点, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ を P で normal な局所座標系とする. このとき, $W_q[\varphi](P)$ を, $\varphi - \alpha \|z\|^2$ が P で位数 $n-q$ の擬凸となるような $\alpha \in \mathbf{R}$

の上限として定義する．ここで，$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ である．そのような $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在しないときは，$W_q[\varphi](P) = -\infty$ とおく．

$W_q[\varphi](P)$ が P で normal な局所座標系の選び方に依らずに決まること，P で normal な任意の局所座標系 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ と，任意の $\alpha < W_q[\varphi](P)$ に対し，$\varphi - \alpha\|z\|^2$ が P で位数 $n-q$ の擬凸になることが確かめられる．

φ が P の近くで C^2 級のとき，φ の Levi form $L[\varphi]$ の，P で normal な局所座標系に関する，P でのすべての固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (但し $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$) で表すと，$W_q[\varphi](P) = \alpha_{n-q+1}$ となる．

operator W_q に関する主な性質を挙げる．

(1)　φ を D で上半連続な関数とする．このとき，φ が D で位数 $n-q$ の擬凸になるための必要十分条件は，D 上 $W_q[\varphi] \geq 0$ となることである．また，φ が D で位数 $n-q$ の強擬凸になるための必要十分条件は，D の各点 P に対し，P の近傍 U と定数 $\varepsilon > 0$ で，U 上 $W_q[\varphi] \geq \varepsilon$ となるものが存在することである．

(2)　α を D 上の連続関数，φ_ν $(\nu \in \mathrm{N})$ を D で上半連続な関数で，$W_q[\varphi_\nu] \geq \alpha$ を満たすものとする．$\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathrm{N}}$ が D 上の一様収束列，または減少列であるとき，D 上 $W_q[\lim \varphi_\nu] \geq \alpha$ となる．

(3)　φ, ψ を共に D で上半連続，$P \in D$ とする．このとき，$\varphi(P) = \psi(P)$ かつ D 上 $\varphi \geq \psi$ であれば，$W_q[\varphi](P) \geq W_q[\psi](P)$ となる．

4.　§4 以後は，M を C^∞ 級の Kähler 計量 G を持つ n 次元連結複素多様体とする．M は自然に，C^∞ の Hermite 計量 $g \equiv \mathrm{Re}\, G$ を持つ実 $2n$ 次元 Riemann 多様体ともみなされる．このとき，Greene-Wu [6] の証明方法を土台として，次を示すことができる．

補題．　D を M の開集合，P を，次の性質を満たす (少なくとも 1 つの) $Q \in \partial D$ が存在するような D の点とする:

(i)　$d_{\partial D}(P) = d(P, Q)$.

(ii)　P と Q は M 内の測地線 ξ で結べる．

(iii)　Q を通る $n-q$ 次元の complex submanifold S で，$S \subset M \setminus D$ となるものが存在する．

このとき,

$$(*) \qquad W_q[-\log d_{\partial D}](P) \geq \frac{1}{4}\min\left\{\frac{\Theta}{3}, \Theta\right\}$$

という評価が成立する. ここで, $\Theta = \Theta(P)$ は, (ii) の中の測地線 ξ 上の M の holomorphic bisectional curvature の最小値である.

証明には, Riemann 幾何学で良く知られた, 測地線の変分に対する第 1, 第 2 変分公式と, operator W_q の性質 (3) を用いる. 関数 $-\log d_{\partial D}$ が, P において '(*) の右辺の値以上の固有値を持つ' 複素 $n-q+1$ 次元の方向を見つける必要があるが, その方向は, S の Q での tangent space を, ξ に沿って P まで平行移動して得られる複素 $n-q$ 次元の tangent space と, 測地線 ξ の P での tangent vector とで張られる方向になる.

D が §2 の条件 (C_q) を満たす M の開集合のとき, M が complete であるか, または $D \Subset M$ であるかの何れかの条件があれば, D の各点 P に対し, 上の補題の条件 (i), (ii), (iii) を満足する $Q \in \partial D$ が常に存在する.

$P \in M$ と $r > 0$ に対し, $B(P,r) = \{Q \in M; d(P,Q) < r\}$ とおく. $P \in D$ に対し, $\Theta(P)$ により $D \cap B(P, d_{\partial D}(P))$ 上の M の holomorphic bisectional curvature の下限を表すことにする.

D が M で位数 $n-q$ の擬凸のとき, 局所的には, 条件 (C_q) を満たすものの増大列の極限として書けることに注意すると, operator W_q の性質 (2) と上の補題から, ∂D を含む開集合 $\Delta\ (\subset M)$ が存在して, $D \cap \Delta$ の各点 P において, 不等式 (*) が成り立つことが分かる. さらに, この結果と Bungart の近似定理を用いると,

(1) M の holomorphic bisectional curvature が正の場合
(2) ∂D を含む M のある開集合上 (strongly) 1-convex function が存在する場合

の各場合には, $D \Subset M$ であるか, M が complete であるかの一方の条件の下で, 境界 ∂D の近くだけでなく D 上 global に不等式 (*) が成立することが示される.

5. §5 では, M を正または非負の holomorphic bisectional curvature を持つ n 次元連結 Kähler 多様体, D を M の位数 $n-q$ の擬凸開集合とする. 関数 $-\log d_{\partial D}$ に対して, 結果は次の様に述べられる.

命題 1. M の holomorphic bisectional curvature が非負 (resp. 正) のとき, ∂D を含む開集合 $\Delta\,(\subset M)$ が存在して, 関数 $-\log d_{\partial D}$ は $D\cap\Delta$ 上, 位数 $n-q$ の擬凸 (resp. 位数 $n-q$ の強擬凸) になる.

命題 2. M の holomorphic bisectional curvature が正で, $D \Subset M$ であるか, M が complete であるかの何れかの場合, 関数 $-\log d_{\partial D}$ は D 全体で位数 $n-q$ の強擬凸になる.

M の開集合 D の境界 ∂D が M の C^2 級の real submanifold (各連結成分の次元は互いに異なっていてもよい) のときは, ∂D を含む開集合 Γ $(\subset M)$ が存在して, 境界距離関数 $d_{\partial D}$ は, $D\cap\Gamma$ 上 C^2 級の関数になる ([9]). したがって, 命題 1 から, 次の結果が得られる.

定理 1. M の holomorphic bisectional curvature を正 (resp. 非負) とする. D が M で位数 $n-q$ の擬凸で, $D \Subset M$ かつ ∂D が M の C^2 級の real submanifold のとき, D は strongly q-convex (resp. weakly q-convex) である.

M と D の仮定が命題 2 と同じとき, Bungart の近似定理より, 関数 $-\log d_{\partial D}$ は q-convex function with corners で近似される. $u:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ が C^2 級で, $u'>0$, $u''>0$ を満たすとき, φ が D で q-convex with corners なら, 合成 $u\circ\varphi$ もまた D で q-convex with corners になることに注意すると, このとき, D は q-convex with corners である exhaustion function を持つことが分かる. したがって, Diederich-Fornaess の近似定理と合わせると, 領域の q-completeness (with corners) に関する次の結果が得られる.

定理 2. M の holomorphic bisectional curvature を正とし, さらに $D \Subset M$ であるか, M が complete であるかの一方を仮定する. このとき, D が M で位数 $n-q$ の擬凸であれば, D は q-complete with corners である. したがって, D は $\widetilde{q}$-complete である.

定理 1 は, S が $\mathbf{P}_n$ の complex submanifold で, 各連結成分の次元が $n-q$ 以上のとき, 補集合 $\mathbf{P}_n\setminus S$ は strongly q-convex であるという Barth [1] の結果の拡張になっている. $M=\mathbf{P}_n$ のとき, 定理 1 は Takeuchi [17]

の拡張として, 微分幾何学的手法を用いない方法でも示すことができる([10]). また, 定理 2 から, S が $\mathbf{P}_n$ の, 各既約成分の次元が $n-q$ 以上の algebraic set のとき, $\mathbf{P}_n \setminus S$ が $\widetilde{q}$-complete であるという Hartshorne の結果も導かれる. S $(\subset \mathbf{P}_n)$ が non-singular のときに限れば, Peternell [12] により, $\mathbf{P}_n \setminus S$ は $\min\{2q-1, \widetilde{q}\}$-complete であるという, より進んだ結果が知られている.

6. 最後に, M を n 次元 Stein 多様体, D を M の位数 $n-q$ の擬凸開集合とする. M の完備 Kähler 計量から, D の境界距離関数 $d_{\partial D}$ を定義したとき, 関数 $-\log d_{\partial D}$ に対し, §4 の不等式 (*) が D の各点で成立する. したがって, h が M の (1 つの) 1-convex exhaustion function のとき, $u' > 0$, $u'' > 0$ である C^2 級の関数 $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ で, $-\log d_{\partial D} + u \circ h$ が D で位数 $n-q$ の擬凸となるものを見つけることができる. よって, 次の結果が得られる.

定理 3. M を n 次元 Stein 多様体, D を M の位数 $n-q$ の擬凸開集合とする. このとき, D は q-complete with corners である. したがって, D は $\widetilde{q}$-complete である.

D の境界 ∂D が M の C^2 級の real submanifold のとき, 前述の関数 $-\log d_{\partial D} + u \circ h$ は, ∂D の近くで C^2 級の関数になる. このことから, 次の結果が導かれる.

定理 4. M を n 次元 Stein 多様体, D を M の位数 $n-q$ の擬凸開集合とする. ∂D が M の C^2 級の real submanifold のとき, D は q-complete である.

∂D が M の C^2 級の real hypersurface である場合, 定理 4 は Suria [14] (Eastwood-Suria [4]) の結果であり, 定理 4 は, その結果の拡張及び別証明になっている.

参考文献

[1] W. Barth, Der Abstand von einer algebraischen Mannigfaltigkeit im komplex-projectiven Raum, Math. Ann., **187** (1970), 150–162.

[2] L. Bungart, Piecewise smooth approximations to q-plurisubharmonic functions, Pacific J. Math., **142** (1990), 227–244.
[3] K. Diederich and J. E. Fornaess, Smoothing q-convex functions and vanishing theorems, Invent. Math., **82** (1985), 291–305.
[4] M. G. Eastwood and G. V. Suria, Cohomologically complete and pseudoconvex domains, Comment. Math. Helv., **55** (1980), 413–426.
[5] O. Fujita, Domaines pseudoconvexes d'ordre général et fonctions pseudoconvexes d'ordre général, J. Math. Kyoto Univ., **30** (1990), 637–649.
[6] R. E. Greene and H. Wu, On Kähler manifolds of positive bisectional curvature and a theorem of Hartogs, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **47** (1978), 171–185.
[7] L. R. Hunt and J. J. Murray, q-plurisubharmonic functions and a generalized Dirichlet problem, Michigan Math. J., **25** (1978), 299–316.
[8] K. Matsumoto, Pseudoconvex domains of general order in Stein manifolds, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **43** (1989), 67–76.
[9] K. Matsumoto, A note on the differentiability of the distance function to regular submanifolds of Riemannian manifolds, Nihonkai Math. J., **3** (1992), 81–85.
[10] K. Matsumoto, Pseudoconvex domains of general order and q-convex domains in the complex projective space, to appear in J. Math. Kyoto Univ., **33** (1993).
[11] K. Matsumoto, Boundary distance functions and q-convexity of pseudoconvex domains of general order in Kähler manifolds, preprint.
[12] M. Peternell, q-completeness of subsets in complex projective space, Math. Z., **195** (1987), 443–450.
[13] Z. Slodkowski, The Bremermann-Dirichlet problem for q-plurisubharmonic functions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **11** (1984), 303–326.
[14] G. V. Suria, q-pseudoconvex and q-complete domains, Compositio Math., **53** (1984), 105–111.
[15] O. Suzuki, Pseudoconvex domains on a Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12** (1976), 191–214.
[16] M. Tadokoro, Sur les ensembles pseudoconcaves généraux, J. Math. Soc. Japan, **17** (1965), 281–290.
[17] A. Takeuchi, Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 159–181.
[18] A. Takeuchi, Domaines pseudoconvexes sur les variétés kählériennes, J. Math. Kyoto Univ., **6** (1967), 323–357.

特別講演

Conformal mappings of a once-holed torus

増本　誠　　　　　　　名古屋工業大学

1.　はじめに

R_1と R_2を二つの Riemann 面とするとき，R_1を R_2の中に等角に埋め込むことができるだろうか．本講演では，この問題を，R_1と R_2が共に once-holed torus である場合に考察する．結果を定量的に述べるために，各 R_kに標準ホモロジー基 $\{a_k, b_k\}$ をとる．そして，等角的埋め込み $f: R_1 \to R_2$で $f(a_1)$, $f(b_1)$ がそれぞれ a_2, b_2にホモローグであるようなものが存在するための必要十分条件を，a_k, b_k, $a_k - b_k$を代表元とするホモロジー類の極値的長さの間の不等式で与える（定理１）．ホモロジー基を取り替えればこれらの極値的長さも変わるが，その変換法則は，三次正方行列で表現される（定理２）．これら二つの定理を合わせると，R_1と R_2が once-holed torus である場合に，冒頭の問題に対する一つの解答を得る．第 3 節で，定理 1 と定理 2 の証明に必要な概念や事実について述べる．

さて，定理 1 に現れる二次形式 Fの正体は，残念ながら，まだ見極められたとは言い難い．第 4 節で，Fの持っている性質をいくつか紹介する．

最後の節で，once-holed torus の Teichmüller 空間について簡単に触れる．

2.　主定理

種数が 1 で，Kerékjártó-Stoïlow の意味の境界成分がただ一つであるような開 Riemann 面を，once-holed torus と呼ぶ．この定義に従えば，トーラス（種数 1 の閉 Riemann 面）から一点を除いたものと等角同値である Riemann 面 (once-punctured torus) も once-holed torus であることに注意されたい．

Once-holed torus Rとその上の標準ホモロジー基$\chi = \{a, b\}$との組 (R, χ) を，marked once-holed torus という．(R', χ')（ただし$\chi' = \{a', b'\}$）を別の marked once-holed torus とする．fが Rから R'の中への等角写像（単射正則写像）で，$f(a)$, $f(b)$ がそれぞれ a', b'とホモローグであるとき，fを (R, χ) から (R', χ') の中への等角写像と呼ぶ．さらに，fが Rから R'の上への等角写像であるとき，fは (R, χ) から (R', χ') の上への等角写像であるという．(R, χ) から (R', χ') の上への等角写像が存在するとき，これらの marked once-holed tori は互いに等角同値であるという．

さて，一般に，R上の（一次元）サイクル c に対し，R上の長さ有限な Jordan 閉曲線で c とホモローグなもの全体の極値的長さ (extremal length) を$\Lambda(R, c)$ と表す．そして，marked once-holed torus (R, χ) に対して，

$$\Phi(R, \chi) = (\Lambda(R, a), \Lambda(R, b), \Lambda(R, a - b))$$

とおく．ここで，$\chi = \{a, b\}$ とする．不等式 $0 < \Lambda(R, c) < +\infty$ ($c = a$, b, $a - b$) が成立するので，$\Phi(R, \chi)$ は $(\mathbb{R}_+)^3 = (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ の点である．

三変数の二次形式 Fを

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

で定める．

定理 1． (R_1, χ_1) と (R_2, χ_2) を二つの marked once-holed tori とし，$\Phi(R_k, \chi_k) = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ $(k = 1, 2)$ とおく．

(i) (R_1, χ_1) から (R_2, χ_2) の中への等角写像が存在するための必要十分条件は，不等式

$$(1) \qquad \begin{cases} F(\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2, \gamma_1 - \gamma_2) \leq 0, \\ F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \leq F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \end{cases}$$

が成立することである．

(ii) (R_1, χ_1) と (R_2, χ_2) が互いに等角同値であるための必要十分条件は，(1) の二つの不等式において共に等号が成立することである．こ

の条件は，また，

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

とも同値である．

この定理では，あらかじめ指定した標準ホモロジー基χ_1をχ_2に写すような等角的埋め込み $R_1 \to R_2$だけを取り扱っている．このように標準ホモロジー基に言及することなく，ただ単に，R_1を R_2に等角的に埋め込めるかどうかを議論するためには，さらに，標準ホモロジー基の取り替えによって，$\Phi(R,\chi)$ がどう変わるかを調べる必要がある．$\chi = \{a, b\}$ を once-holed torus Rの標準ホモロジー基とするとき，

$$\{pa+qb, ra+sb\} \qquad (p,q,r,s \in \mathbb{Z},\ ps-qr=1)$$

も Rの標準ホモロジー基であり，これらの基によって，R上の標準ホモロジー基は（本質的に）尽くされている．

一般に，行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ から定まる三次正方行列

$$\begin{pmatrix} p(p+q) & q(p+q) & -pq \\ r(r+s) & s(r+s) & -rs \\ (p-r)(p+q-r-s) & (q-s)(p+q-r-s) & -(p-r)(q-s) \end{pmatrix}$$

を$\Theta(P)$ と表す．

定理 2． $(R, \{a, b\})$ を marked once-holed torus とし，$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を $SL(2,\mathbb{Z})$ の元とする．

$$\Phi(R, \{a, b\}) = (\alpha, \beta, \gamma),$$
$$\Phi(R, \{pa+qb, ra+sb\}) = (\alpha', \beta', \gamma')$$

とし，縦ベクトル${}^t(\alpha,\beta,\gamma)$, ${}^t(\alpha',\beta',\gamma')$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$と表す．すると，

$$\boldsymbol{a}' = \Theta(P)\boldsymbol{a}$$

が成立する．

3. トーラスへの埋め込み

トーラスT'と，T'上の標準ホモロジー基$\chi' = \{a', b'\}$との組(T', χ')を，marked torus という．T'上には，a'-周期が1であるような正則Abel微分φ'がただ一つ存在するが，このφ'のb'-周期$\tau(T', \chi')$を，marked torus (T', χ')の modulus という．$\tau(T', \chi')$は上半平面$\mathbb{H}$に属す．逆に，任意の$\tau \in \mathbb{H}$に対し，$\tau = \tau(T', \chi')$となる marked torus (T', χ')が存在する．二つの marked tori が互いに等角同値であるための必要十分条件は，それらの moduli が一致することである．

さて，(R, χ)を marked once-holed torus とするとき，(R, χ)を等角に埋め込ませるような marked torus は必ず存在するが，そのような marked tori は一体どのくらい存在するだろうか．この問については，次に述べる Shiba の定理が基本的である．(R, χ)を等角に埋め込ませる marked once-holed tori (T', χ')の moduli $\tau(T', \chi')$の全体を，$M(R, \chi)$と表す．

定理3 (Shiba [3]). $M(R, \chi)$は，$\mathbb{H}$内の閉円板（一点に退化した場合も含む）である．

この円板$M(R, \chi)$は，$\Phi(R, \chi)$から次のようにして決定される．

定理4 ([2]). $\Phi(R, \chi) = (\alpha, \beta, \gamma)$とし，

$$U_1 = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} \tau \geq \frac{1}{\alpha} \right\},$$
$$U_2 = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{\tau} \right) \geq \frac{1}{\beta} \right\},$$
$$U_3 = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-\tau} \right) \geq \frac{1}{\gamma} \right\}$$

とおく．

(i) $\partial U_1 \cap \partial U_2 \cap \partial U_3 \neq \phi$ならば，$M(R, \chi)$は一点からなり，それは$\partial U_1 \cap \partial U_2 \cap \partial U_3$に一致する．

(ii) $\partial U_1 \cap \partial U_2 \cap \partial U_3 = \phi$ならば，$U_1 \cap U_2 \cap U_3$は空でない円弧三角形で，$M(R, \chi)$はそれの内接円である．

定理 1 の証明のために，まず次の定理を準備する．

定理 5． (R_1, χ_1) と (R_2, χ_2) を marked once-holed tori とする．

(i) (R_1, χ_1) から (R_2, χ_2) の中への等角写像が存在することと，包含関係

$$M(R_1, \chi_1) \supset M(R_2, \chi_2)$$

が成立することとは同値である．

(ii) (R_1, χ_1) と (R_2, χ_2) が互いに等角同値であることと，

$$M(R_1, \chi_1) = M(R_2, \chi_2)$$

が成立することとは同値である．

定理 4 と 5 を使えば，定理 1 は，大変面倒ではあるけれども全く初等的な計算により証明される．定理 2 もやはり定理 4 から初等的計算により得られる．

4.　二次形式 F

定理 6． (R, χ) を marked once-holed torus とし，$\Phi(R, \chi) = (\alpha, \beta, \gamma)$ とする．$\mathbb{H}$ の双曲的計量 $|d\tau|/\mathrm{Im}\,\tau$ に関する $M(R, \chi)$ の直径をσとすると，

$$\sigma = \log\left(-\frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{4}\right)$$

である．

χ'を同じ Rの別の標準ホモロジー基とすると，$M(R, \chi')$ は，$\mathbb{H}$ の自己等角写像による $M(R, \chi)$ の像であるから，$M(R, \chi)$ と $M(R, \chi')$ の双曲的直径は等しい．よって，定理 6 のσは，標準ホモロジー基のとり方によらず Rだけで定まる量，すなわち，等角不変量である．σを Rの双曲的スパンという (Shiba [4])．定理 6 より，χを取り替えても（(α, β, γ) は変わるが）$F(\alpha, \beta, \gamma)$ は不変であることが分かる：

系． χとχ'を once-holed torus Rの二つの標準ホモロジー基とすると，

$$F(\Phi(R, \chi)) = F(\Phi(R, \chi'))$$

が成立する．

この系により，定理2に現れた三次正方行列$\Theta(P)$と，二次形式Fとの関係が浮かび上がってくる．

定理7． 二次形式Fを不変にする三次正方行列全体のなすLie群をGとすると，Θは$SL(2,\mathbb{R})$からGの中への準同型写像である．その像$\Theta(SL(2,\mathbb{R}))$はGの単位元を含む連結成分に一致し，核$\operatorname{Ker}\Theta$は$\{\pm I\}$である．ここで，Iは$SL(2,\mathbb{R})$の単位元である．

Fの係数行列の固有値は，2, 2, -1なので，GはLorentz群$O(2,1)$と同型である．定理7より，Θは，$PSL(2,\mathbb{R})$から$O(2,1)$の単位元を含む連結成分$SO^{+}(2,1)$の上への同型写像を誘導することが分かる．$PSL(2,\mathbb{R})$と$\mathbb{H}$の自己等角写像全体のなす群$\text{Möb}(\mathbb{H})$の間には標準的な同型があるので，結局，$\text{Möb}(\mathbb{H})$から$SO^{+}(2,1)$の上への同型写像を得る．しかし，この同型写像は，既によく知られているもの (cf. Ahlfors [1]) と内部自己同型の違いしかないことが，初等的計算により知られる．

5. Once-holed torus の Teichmüller 空間

R_0をRiemann面とする．Riemann面Rと，R_0からRの上への擬等角写像fとの組(R,f)の全体を考える.（上への擬等角写像$f: R_0 \to R$が存在するようなRばかりをとる.）そのような二つの組(R_1,f_1)と(R_2,f_2)が互いに同値であるとは，$f_2 \circ f_1^{-1}$がR_1からR_2の上への等角写像とホモトピックであることと定義する．この同値関係による同値類$[R,f]$の全体$T(R_0)$を，R_0の（縮約）Teichmüller空間という．$T(R_0)$は，実または複素解析的Banach多様体の構造を持つ．それが有限次元となるのは，R_0がコンパクトな面から高々有限個の点を除いたものに同相のとき，かつ，そのときに限る．

さて，marked once-holed torus (R,χ)の等角同値類$[R,\chi]$全体の集合を$\mathcal{T}$とする．$\mathcal{T}_1$をmarked once-punctured toriの等角同値類全体からなる$\mathcal{T}$の部分集合とし，$\mathcal{T}_0$をその補集合とする：$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_1$. Marked once-holed torus $(R_0,\{a_0,b_0\})$を固定する．各$[R,f] \in T(R_0)$

に $[R, \{f(a_0), f(b_0)\}] \in \mathcal{T}$ を対応させる写像を考える．この写像は，R_0 が once-punctured torus であるか否かに応じて，$T(R_0)$ から $\mathcal{T}_1$ または $\mathcal{T}_0$ の上への一対一対応であることが分かる．こうして，$\mathcal{T}_1$ または $\mathcal{T}_0$ を $T(R_0)$ と同一視することにする．特に，これらは，複素または実解析的多様体となる．

写像 $\bar{\Phi} : \mathcal{T} \to (\mathbb{R}_+)^3$ を $\bar{\Phi}[R, \chi] = \Phi(R, \chi)$ と定義する．この写像 $\bar{\Phi}$ について，次の定理が証明される．

定理 8． (i) $\bar{\Phi} : \mathcal{T} \to (\mathbb{R}_+)^3$ は単射であり，

$$\bar{\Phi}(\mathcal{T}_0) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid F(\alpha, \beta, \gamma) + 4 < 0\},$$
$$\bar{\Phi}(\mathcal{T}_1) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid F(\alpha, \beta, \gamma) + 4 = 0\}$$

である．

(ii) $\bar{\Phi} : \mathcal{T}_0 \to \bar{\Phi}(\mathcal{T}_0)$ と $\bar{\Phi} : \mathcal{T}_1 \to \bar{\Phi}(\mathcal{T}_1)$ はいずれも実解析的微分同型写像である．特に，$\bar{\Phi}$ は Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_0$ の実解析的な大域座標を与える．

$\bar{\Phi} : \mathcal{T} \to (\mathbb{R}_+)^3$ が単射であることは，定理 1 (ii) より直ちに分かる．$\mathbb{H}$ 内の任意の閉円板 Δ に対し，$\Delta = M(R, \chi)$ となる marked once-holed torus (R, χ) が存在するという事実から値域 $\bar{\Phi}(\mathcal{T})$ が求められる．$\bar{\Phi}(\mathcal{T}_1)$ は，直線 $\alpha = \beta = \gamma$ を軸とする回転で不変な二葉双曲面の連結成分の一つである．

$\bar{\Phi}$ により，$\mathcal{T}$ に境界のある実解析的多様体の構造を導入することができる．この構造は，Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ の解析構造と両立している．$\mathcal{T}$ を once-holed torus の Teichmüller 空間と呼ぶことにする．

再び一般論に戻り，R_0 を任意の Riemann 面とする．R_0 の自己擬等角写像 ω は，Teichmüller 空間 $T(R_0)$ の微分同型写像 $[R, f] \mapsto [R, f \circ \omega^{-1}]$ を誘導する．このような微分同型写像全体のなす群を，R_0 の（縮約）モデュラー群という．

Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_0$ と $\mathcal{T}_1$ においては，モデュラー群の各元は

$$(2) \quad [R, \{a, b\}] \mapsto [R, \{pa + qb, ra + sb\}], \qquad \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

の形をしている．$\mathcal{T}$から$\mathcal{T}$の上への写像で (2) の形のもの全体のなす群を，once-holed torus のモデュラー群と呼び，$\mathcal{M}$ で表す．

$\mathcal{T}$上の大域座標系$\bar{\Phi} = (\alpha, \beta, \gamma)$ を使えば，$\mathcal{M}$ は行列群$\Theta(SL(2, \mathbb{Z}))$で表現される（定理２）．$\mathcal{M}$ は$\mathcal{T}$から$\mathcal{T}$の上への微分同型写像ばかりからなる群で，$\mathcal{T}$に真性不連続に作用する．その基本領域も簡単に計算される：

定理９．

$$\bar{\Phi}(\mathcal{F}) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \bar{\Phi}(\mathcal{T}) \mid \alpha < \beta < \gamma < 2\alpha + \beta\}$$

で定義される$\mathcal{T}$の部分集合$\mathcal{F}$は，$\mathcal{T}$における$\mathcal{M}$ の基本領域である．

References

[1] L. V. Ahlfors, Möbius Transformations in Several Dimensions, Lecture Notes, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, 1981.

[2] M. Masumoto, On the moduli set of continuations of an open Riemann surface of genus one, to appear in J. Analyse Math.

[3] M. Shiba, The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), 299-311.

[4] M. Shiba, The euclidean, hyperbolic, and spherical spans of an open Riemann surface of low genus and the related area theorems, Kodai Math. J. **16** (1993), 118-137.

特別講演

PERIOD MATRICES FOR UNIVERSAL TEICHMÜLLER SPACE, DIFF(S^1), AND STRING THEORY.

SUBHASHIS NAG
The Institute of Mathematical Sciences,
Madras 600113, INDIA.

Abstract

In the Fall of 1988 we found ([9], [7]) that there is a **completely natural and intimate relationship between the diffeomorphism group of the circle and the Teichmüller spaces of Riemann surfaces.** Such a relationship had been sought-after by the physicists from conjectures connecting the loop-space (geometric quantization) approach to string theory with the path-integral approach. In fact, the coadjoint orbit spaces of Diff(S^1) appear as the fundamental complex analytic Kähler manifolds that are the "phase spaces" in the loop-space method. On the other hand, the Teichmüller spaces of Riemann surfaces are the basic spaces over which one has to integrate in string theory when following the Polyakov sum-over-moduli approach.

We showed that indeed there is **a holomorphic and Kähler-isometric relationship** between the coadjoint orbits of Diff(S^1) and the Teichmüller space. (The latter is equipped with the Weil-Petersson Kähler metric.) More precisely, the remarkable homogeneous space Diff(S^1)$/SL(2,R)$ (which is one of the coadjoint orbits of Diff(S^1) we mentioned above) embeds as a complex analytic and Kähler submanifold of the universal Teichmüller space. Surprisingly, an infinitesimal version of the Mostow rigidity theorem follows immediately as a corollary of this work.

Later (in [4], [5], [6]) I found that this very homogeneous space, Diff$(S^1)/SL(2,R)$ — considered by the previous work as a Kähler submanifold of the universal Teichmüller space — allows on it a **natural period mapping** Π. This Π is a holomorphic immersion into an infinite dimensional version of the Siegel upper half-space, and it precisely generalises the classical map associating to a genus g Riemann surface its Jacobi variety (or, equivalently, its period matrix). We prove that in infinite dimensions the Siegel symplectic metric from period-matrix space *coincides* with the Weil-Petersson on Teichmüller space. Utilising the fact that the group of quasisymmetric homeomorphisms of S^1 acts by bounded symplectic operators on the Sobolev space of order 1/2 on the circle, we (Nag and Sullivan [8]) have recently extended Π to the entire universal Teichmüller space.

It should be mentioned that all this is related to "non-perturbative string theory" via the search for universal moduli spaces parametrizing simultaneously all Riemann surfaces of arbitrary topology.

References

[1] Y.Katznelson, S.Nag and D.Sullivan, *On Conformal Welding Homeomorphisms Associated to Jordan Curves*, Annales Acad. Scient. Fennicae A1, Math., 15, 1990, 293-306.

[2] O.Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer Verlag, New York, 1987.

[3] S.Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Wiley-Interscience, New York, 1988.

[4] S.Nag, *A Period Mapping in Universal Teichmüller Space*, Bull. Amer. Math. Soc., April 1992, pp.280-287.

[5] S.Nag, *Non-perturbative String Theory and the Diffeomorphism Group of the Circle*, in Proc. International Sympos. "Topol. & Geom. Methods in Field Theory", Turku, Finland 1991, World Scientific, 26 pages (ed: J.Mickelsson and O.Pekonen).

[6] S.Nag, *On the tangent space to the Universal Teichmüller Space*, Annales Acad. Scient. Fennicae, A1, Math, 1993, vol. 18, (in press).

[7] S.Nag, *Diff(S^1) and the Teichmüller spaces: a connection via string theory*, "New Trends in Geometric Function Theory" Proc of International Conference, World Scientific, 1991, 57-59. (eds: R.Parvatham and S. Ponnuswamy).

[8] S.Nag and D.Sullivan, *Teichmüller theory and the universal period mapping via quantum calculus and the $H^{1/2}$ space of the circle*, preprint (IHES, Paris 1992-93, 1st version).

[9] S.Nag and A.Verjovsky, *Diff(S^1) and the Teichmüller Spaces, Parts I and II*, Commun. Math. Phys., 130, 1990, 123-138. (Part I by S.N and A.V. ; Part II by S.N.)

[10] E.Witten, *Coadjoint Orbits of the Virasoro Group*, Commun. Math. Phys. 114, 1988, 1-53.