日 本 数 学 会

１９９３年度年会

函 数 論 分 科 会
講 演 ア ブ ス ト ラ ク ト

１９９３年3月

於 中 央 大 学

1. Fractional calculus of elementary functions by the extension of their n-th ($n \in \mathbb{Z}^+$) differintegrations

by

Katsuyuki Nishimoto 日大工

Abstract

Many papers ([1] ~ [10]) and books [11, 12] on the fractional calculus have been reported by the author already. In this paper, fractional calculus of elementary functions which are obtained by the extension of their $n(\in \mathbb{Z}^+)$th derivatives and integrals are discussed.

References

[1] K. Nishimoto; Fractional derivative and integral, Part I, J. Coll. Engng. Nihon Univ. B-17 (1976), 11-19.

[2] -----------; Table of fractional differintegration of elementary functions, J. Coll. Engng. Nihon Univ., B-25 (1984), 41-46.

[3] -----------; On the fractional calculus of products z^β, z^γ and log az, J. Coll. Engng. Nihon Univ., B-32 (1991), 1-6.

[4] -----------; On the infinite sum $Q_{m,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \{1/k(k+m)(k+m+1)\cdots(k+m+n)\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}^+$)(A serendipity in fractional calculus), J. Coll. Engng. Nihon Univ., B-32 (1991), 7-14.

[5] -----------; A generalization of Gauss' equation by fractional calculus method, J. Coll. Engng., Nihon Univ., B-32 (1991), 79-87.

[6] K. Nishimoto and S. T. Tu; Fractional calculus method to a generalized linear second order (Nonhomogeneous and homogeneous) ordinary differential equation of Fuchs type, J. Coll. Engng., Nihon Univ., B-33 (1992), 27-52.

[7] K. Nishimoto; Some values of products $(z^\beta \cdot z^\gamma)_\alpha$ obtained by computer, J. F. C., Vol.1, (1992), 1-6.

[8] -----------; Fractional calculus method to a generalized linear third order ordinary differential equation of Fuchs type, J. F. C., Vol.1 (1992), 23-34.

[9] ----------- ; Power functions in fractional calculus of Nishimoto and that of Lacroix and Riemann-Liouville, J. F. C., Vol.2 (1992), - .

[10] ----------- ; Solutions of Gauss equation in fractional calculus, J. F. C., Vol.3 (1993) - .

[11] ----------- ; Fractional Calculus (Vol. I, II, III and IV), Descartes Press, Koriyama (Japan), 1984, 1987, 1989 and 1991.

[12] ----------- ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, Descartes Press, Koriyama (Japan), 1991.

[13] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi; Tables of Integral Transforms, Vol.II, McGraw-Hill, (1954) pp181-212.

[14] J. L. Lavoie, R. Trembley and T. J. Osler; Lecture Notes (Springer) Vol.457 (1974)p.333.

[15] K. B. Oldham and J. Spanier; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).

[16] B. Ross; Methods of Summation, Descartes Press (1987).

2. STARLIKENESS AND CONVEXITY OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}_p$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$. Let $\mathcal{S}_p^1(\alpha)$ be the subclass of $\mathcal{A}_p$ consisting of functions which satisfy

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < p)$. A function $f(z)$ in $\mathcal{S}_p^1(\alpha)$ is called to be p-valently starlike of order α in $\mathbb{U}$. Further, a function $f(z) \in \mathcal{A}_p$ is said to be in the class $\mathcal{K}_p^1(\alpha)$ if and only if $zf'(z)/p$ is in $\mathcal{S}_p^1(\alpha)$. A function $f(z) \in \mathcal{K}_p^1(\alpha)$ is called to be p-valently convex of order α in $\mathbb{U}$. We denote by $\mathcal{S}_p^1(0) = \mathcal{S}_p^1$ and $\mathcal{K}_p^1(0) = \mathcal{K}_p^1$.

Denoting by ${}_sF_t(z)$ the generalized hypergeometric functions, that is,

$${}_sF_t(z) \equiv {}_sF_t\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_s; z \\ b_1, b_2, \ldots, b_t; \end{matrix}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_s)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_t)_k} \frac{z^k}{k!}$$

$$(s \leqq t + 1),$$

we discuss the starlikeness and the convexity of generalized hypergeometric functions ${}_sF_t(z)$.

3. CLOSE-TO-CONVEXITY OF GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}_p$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1,2,...\})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$.
A function $f(z) \in \mathcal{A}_p$ is said to be p-valently close-to-convex of order α in $\mathbb{U}$ if there exists $g(z) \in \mathcal{K}_p^1$ such that

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$. We denote by $\mathcal{C}_p^1(\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}_p$ consisting of functions which are p-valently close-to-convex of order α in $\mathbb{U}$.

Further, a function $f(z) \in \mathcal{A}_p$ is said to be a member of the class $\mathcal{R}_p^1(\alpha)$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z^p}\right\} > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$. Also we denote by $\mathcal{C}_p^1(0) = \mathcal{C}_p^1$ and $\mathcal{R}_p^1(0) = \mathcal{R}_p^1$.

We denote by ${}_sF_t(z)$ the generalized hypergeometric functions, that is,

$$
{}_sF_t(z) \equiv {}_sF_t\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_s; \\ b_1, b_2, \ldots, b_t; \end{matrix} \; z\right)
$$

$$
= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_s)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_t)_k} \frac{z^k}{k!}
$$

$$
(s \leqq t + 1).
$$

In the present talk, we discuss the close-to-convexity of generalized hypergeometric functions ${}_sF_t(z)$.

4. A CRITERION FOR P-VALENTLY STARLIKE FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY
MAMORU NUNOKAWA GUNMA UNIVERSITY
SEIICHI FUKUI WAKAYAMA UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}(p)$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \qquad (p \in \mathbb{N})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathcal{U}$. A function $f(z)$ belonging to $\mathcal{A}(p)$ is said to be p-valently starlike in $\mathcal{U}$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \qquad (z \in \mathcal{U}).$$

We denote by $\mathcal{S}(p)$ the subclass of $\mathcal{A}(p)$ consisting of functions which are p-valently starlike in $\mathcal{U}$.

In the present talk, we show

THEOREM. If $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ satisfies $f(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$ and

$$\left| \arg\left\{ \frac{f(z)}{zf'(z)} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - \left(1 + \frac{1}{4p}\right)\right\}\right|$$

$$> 0 \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then $f(z) \in \mathcal{S}(p)$ and

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| < p \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

5. ON THE DIFFERENTIAL OPERATOR $D^n f(z)$

福井誠一　和歌山大・教育
尾和重義　近畿大・理工

Aを、単位円板U内で正則かつ　$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$　となる関数の集合とする，

この関数f(z)に対して微分作用素 D^n を次のように定義する。

$$D^0f(z)=f(z),\ D^1f(z)=Df(z)=zf'(z),$$

$$n\geqq 2\text{のとき、}\quad D^nf(z)=D^{n-1}(Df(z)).$$

$f(z)\in A$に対して、$F_n(\alpha)$をすべての $z\in U$について

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}\right\}<\alpha$$

を満たす集合とする，このとき、次のことが成立する。

定理． $\alpha>1$を固定すると、すべての n について

$$F_{n+1}(\alpha)\subset F_n(\alpha)$$

が成立する。

Miller and Mocanu の Marx-Strohhäcker differential subordinate system(1987) の結果により次の補題が示される。

補題　f(z)∈Aに対して、すべての z∈Uについて

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}<\frac{3}{2}$$

が成立すれば、$\dfrac{zf'(z)}{f(z)} \prec \dfrac{2(1-z)}{2-z}$ かつ、f(z) は有界である。　これは逆も成立する。

この補題から f(z)∈Fn(α) が星型関数になるための条件も得られる。これらを報告する。

6. 代数型 Riemann 面の Picard 定数について

小沢 満　　東理大 理工
澤田 一成　　東理大 理工

open Riemann 面 R 上の非定数有理型函数の族を $\mathfrak{M}(R)$ とする。$f \in \mathfrak{M}(R)$ に対して，f によってとられない値の個数を $P(f)$ で表すとき，

$$P(R) = \sup_{f \in \mathfrak{M}(R)} P(f)$$

を R の Picard 定数という。一般に $P(R) \geqq 2$。

以下 我々は

(1)　$R : F(z,y) = y^3 - S_1(z)y^2 + S_2(z)y - S_3(z) = 0$

で定義される 3 葉の代数型 Riemann 面を考える。ただし，$S_i(z)$ $(i=1,2,3)$ は整函数で（少なくとも1つは超越的），(1) 式は irreducible である。　この場合，Sellberg の定理によって，$P(R) \leqq 6$。

$P(R)=5$ の面を作るために，$P(y)=5$ の面を調べた。

$\boxed{\text{定理（[1]）}}$　$P(y)=5$ となるのは，

exceptional values $= 0, \infty, a_1, a_2, a_3$ とした.

<u>Case 1</u>

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 \equiv y_1$$

$$S_2 = \frac{\beta}{a_2} e^H + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 \equiv \frac{\beta}{a_2} e^H + y_2$$

$$S_3 = a_1 a_2 a_3 \equiv y_3$$

<u>Case 2</u>

$$S_1 = -\frac{\beta}{a_2^2} e^H + a_1 + a_2 + a_3 \equiv -\frac{\beta}{a_2^2} e^H + y_1$$

$$S_2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 \equiv y_2$$

$$S_3 = a_1 a_2 a_3 \equiv y_3$$

<u>Case 3</u>

$$S_1 = -\frac{\beta}{a_2(a_2 - a_1)} e^H + 2a_2 + a_3$$

$$S_2 = -\frac{a_1 \beta}{a_2(a_2 - a_1)} e^H + a_2^2 + 2a_2 a_3$$

$$S_3 = a_2^2 a_3$$

ただし, a_1, a_2, a_3 は 0 でない定数で, y は 0, a_1 a_2, a_3 (及び ∞) を除外している。また H は非定数整函数である。

[1] Ozawa, M. and Sawada, K. Three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five.

7. Picard定数5のRiemann面

小沢 満　　東理大 理工
澤田 一成　　東理大 理工

(1) $R: F(z,y) = y^3 - S_1(z)y^2 + S_2(z)y - S_3(z) = 0$

で定義された3葉の代数型Riemann面で $P(y)=5$ なるものが，ある場合を除いて，$P(R)=5$ であることを報告する。

$\boxed{\text{定理（[1]）}}$ 前頁の記号の下に，それぞれ次の条件をみたす $P(y)=5$ の面 R は $P(R)=5$ である。

Case 1　　$12y_2 - y_1^2 \neq 0$

あるいは　　$12y_2^2 - 18y_1y_3 - 2y_1^2y_2 \neq 0$

Case 2　　$12y_1y_3 - y_2^2 \neq 0$

あるいは　　$12y_1^2y_3 - 2y_1y_2^2 - 18y_2y_3 \neq 0$

Case 3

$$4a_1^3 - 2(2a_2 + a_3)a_1^2 - 2(a_2 + 2a_3)a_2a_1 + 4a_2^2a_3 \neq 0$$

あるいは

$$(8a_2^2+20a_2a_3-a_3^2)a_1^2-(8a_2^3+38a_2^2a_3+8a_2a_3^2)a_1$$
$$-a_2^4+20a_2^3a_3+8a_2^2a_3^2 \neq 0$$

この定理の証明では，(1)式の Discriminant が重要な役割を果たしている。

次の問題は未解決である。

『定理で述べた各々の条件が成立しない面 R は $P(R)=5$ か？』

[1] Ozawa, M. and Sawada, K. Three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five.

8. 有限リーマン面の接続と周期行列

G.Schmieder　Univ. Oldenburg
柴　雅和　広島大学理学部

Rを種数 g の開 Riemann 面, その理想境界を法とする標準 homology 基底$\chi = \{a_j, b_j\}_{j=1}^g$ を任意に固定する. 普通の意味での印付き閉 Riemann 面 (R', χ') — すなわち標準 homology 基底$\chi' = \{a'_j, b'_j\}_{j=1}^g$ をもった閉 Riemann 面 R' — と (R, χ) から (R', χ') への等角写像 i' の組 (R', χ', i'), $i'(a_j) \sim a'_j, i'(b_j) \sim b'_j$ $(j = 1, 2, \cdots, g)$, を (R, χ) の実現とよぶ. ここに, 記号$\sim$は homology 同値をあらわす. 2 つの実現 (R', χ', i') と (R'', χ'', i'') が同値であることを, R'から R''への等角写像 fで $f \circ i' = i''$となるものが見つかることと定義する. 各々の同値類 $[R', \chi', i']$ を (R, χ) の“(閉じた) 接続” とよぶ. (R, χ) の接続の全体 $C(R, \chi)$ は Torelli 空間のなかに射影され, したがって (R, χ) の接続の周期行列の集合 $M(R, \chi)$ を考察することができる. それは, よく知られているように, Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$の中に実現される. $[R', \chi', i'] \in C(R, \chi)$ にその周期行列$\tau[R', \chi', i'] = (\tau_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,g}$ を対応させる写像 $C(R, \chi) \to \mathfrak{S}_g$ をτとし, さらにその対角線要素 $(\tau_{11}, \tau_{22}, \cdots, \tau_{gg})$ からなる $\mathbf{C}^g$の元を対応させる写像を$\delta : C(R, \chi) \to \mathbf{C}^g$ で表すことにし, $D(R, \chi) := \delta(C(R, \chi))$ とする. 記号τ_{jj}の意味するところは自明であろう. 次の結果は以前に示した:

定理 I.　[A] $\dim_{\mathbf{C}} D(R, \chi)$ は gもしくは 0 である.
[B] $\dim_{\mathbf{C}} D(R, \chi) = 0$ となるのは, Rが族 O_{AD}に属するときかつそのときに限る.
[C] $\dim_{\mathbf{C}} D(R, \chi) = g$ とするとき, つぎのような閉多重円板 $Z := D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_g$ が存在する:
(i) $D(R, \chi) \subset Z$;
(ii) 各 $j = 1, 2, \cdots, g$について, $\partial \tau_{jj}(C(R, \chi)) = \partial D_j$.

D_jの直径$2\rho_j$をあらためて$\sigma_j(R,\chi)$ と書く．上の定理によって，それらの和を (R,χ) の span とよぶことができる．それを$\sigma(R,\chi)$ で示す．同じく上の定理によって，個々の$\sigma_j(R,\chi)$ も span の代用となる．

さて, 上で定義した閉じた接続と全く同様にして“開いた接続”という概念が得られる．その定義をここに述べる必要はあるまい．

とくに Rがコンパクトな縁付き Riemann 面の内部であるときには, 非常に具体的な接続を，あるいは接続の族を，考察することができる．すなわち，その境界曲線のそれぞれに 1 つのパラメータ $[-1,1]$ を固定し，任意の$\varepsilon \in [0,1]$ についてその $[-\varepsilon,\varepsilon]$ に対応する部分を縫合すれば，新しい有限 Riemann 面 R_εが得られる．それははじめの Riemann 面 Rの印χを自然な形で引き継ぐ．こうしてえられた新しい対を $(R_\varepsilon,\chi_\varepsilon)$ と書き，さらにそれらの全体をここでは $\mathcal{F}(R,\chi)$ で示そう: $\mathcal{F}(R,\chi) := \{(R_\varepsilon,\chi_\varepsilon) \mid \varepsilon \in [0,1]\}$.

定理 II． 各 $j = 1,2,\cdots,g$について，$\sigma_j(R_\varepsilon,\chi_\varepsilon)$ はパラメータεの連続関数である．

系． Span はパラメータεの連続関数である．

定理 II と中間値の定理とから容易につぎの定理が得られる．

定理 III． 各々の $D_j(R,\chi)$ は円の族 $\{\partial\tau_{jj}(C(R_\varepsilon,\chi_\varepsilon)) \mid \varepsilon \in [0,1]\}$ によって覆い尽くされる．

系． 各 $j = 1,2,\cdots,g$について，$\tau_{jj}(C(R,\chi)) = D_j$.

注意として，上の結果は多重円板 Zが $D(R,\chi)$ によって埋め尽くされることを— すなわち $D(R,\chi) = Z$ を — 意味するものではない．実際 $D(R,\chi)$ の distinguished boundary point が実現されるような Riemann 面 Rは非常に特殊なものであることがわかっている．

9. 面積有限なリーマン面に関する閉測地線定理とマルコフ写像

益田健彦　阪大 理

ここでは コンパクト リーマン面 については非常に良く知られた次の結果を Bowen & Series [B.S] によって構成された Markov 写像を用いて示す方法を報告させて頂く. その結果とは

<u>Th</u> $\#\{\tau : \exp(\ell(\tau)) \leq t\} \dfrac{\log t}{t} \to 1 \quad (t \to \infty)$

である. ここで τ は与えられた面積有限なリーマン面の閉測地線(向きも考えている) $\ell(\tau)$ はその長さである.
これは、素数定理

$$\#\{p \,;\, p \leq t\} \frac{\log t}{t} \to 1 \quad (t \to \infty)$$

の類似であり'閉測地線定理'と呼ばれることもある.

証明の手順は [B.S] で作られたマルコフ写像 $T: S^1 \to S^1$ に対するゼータ関数

① $$\zeta_T(s) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{T^n x = x} |(\overbrace{T \circ \cdots \circ T}^{n})'(x)|^{-s}\Big)$$

とリーマンゼータの類似で定義されたゼータ関数

$$\zeta(s) = \prod_{\tau} \left(1 - \exp(-s\, \ell(\tau))\right)^{-1}$$

が本質的に一致していることに着目する。

② $\mathrm{Re}\, s > 1$ で non zero analytic $\mathrm{Re}\, s = 1$ をこえて meromorphic extension できることを示す。

③ $s = 1$ は $\mathrm{Re}\, s = 1$ 上の唯一つの極でそれは simple であり留数が 1 ことを示す。

あとは Wiener Ikehara による素数定理の証明と同じである。むずかしいのは cusp がある case である。

[B-S] Publ IHES 50 (1980) 401–418

10. リーマン面上の有理型関数体の体同型

郷間知巳　　　　東京都立大学

2つのコンパクトなリーマン面が等角同値になるための必要十分条件はそれぞれの有理型関数体が $\mathbb{C}$- 同型である、ということが知られている。ここでは有理型関数体がただ単に同型であった場合それらのリーマン面は同値であるということにし、同値なリーマン面について考えてみる。

まず知られている結果として次の定理がある。

定理 (Nakai-Sario [2]). 2つのリーマン面が同値ならばそれらの種数は等しい。

今回この定理に別証明を与え、そこでのアイデアを使うことにより以下のことを得た。

定理. 種数が g である同値なリーマン面の類全体からなる集合を R_g とする。すると $g \geq 1$ に対して、各 R_g は可算無限個の要素からなる。

種数が 1 の類についてはさらに詳しいことがわかる。種

数 1 のリーマン面は式 $y^2 = x(x-1)(x-\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\})$ で定義されるが、このとき次を得る。

定理. 同値なリーマン面の数は式

$$J(\alpha) = \frac{4}{27}\frac{(\alpha^2-\alpha+1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2}$$

の値で決定できる。具体的には $J(\alpha)$ が $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上超越的ならば同値なリーマン面は非可算無限個あり、$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上代数的ならば同値なリーマン面はその代数的次数と同じ数だけ存在する。

REFERENCES

[1] T. Kato, *On the isomorphism theorem of the meromorphic function fields*, Osaka J. Math. 20 (1983), 303-306.

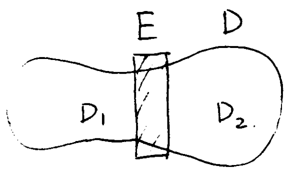
[2] M. Nakai - L. Sario, *Meromorphic function fields on Riemann surfaces*, Hokkaido Math. J. 10 (1981), 531-545.

11. 正則函数の融合とその Schwarz 微分のノルム評価

須川 敏幸　　京大・理

Dは平面領域とし，"細い"の開領域Eを取り除けば2つ（以上）の開集合 D_1, D_2 に分かれるとする。($D \setminus E = D_1 \cup D_2$)

fを $D_1 \cup E$ の近傍で定義された正則函数，gを $D_2 \cup E$ の近傍で定義された正則函数とする。



f, gに対して適当な条件を課せばEにおいてfとgをうまく内挿して quasi-regular map $h: D \to \mathbb{C}$ で

$$h = f \quad \text{on } D_1 \quad , \quad h = g \quad \text{on } D_2$$

なるものを作れる。そこで，

① h の Beltrami 係数 μ (i.e. $h_{\bar{z}} = \mu h_z$) として μ-conformal map $w^\mu: D \to D'$ を作り，$\varphi = h \circ (w^\mu)^{-1}$ とすれば，φ は D' 上正則で，$w^\mu(D_1)$, $w^\mu(D_2)$ では位相的に f, g に近い挙動を持つものが得られる。

② さらに，もし h^{-1} の Beltrami 係数 ν が分枝の取り方によらずに定まるのならば，この場合は（ν を $h(D)$ 以外には適当に拡張しておいて）ν-conformal map $w^\nu: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

を作り，$\psi = w^{\nu} \circ h$ とすれば ψ は D 上正則で，D_1, D_2 では位相的に f, g に近い挙動を持つものが得られる。

時としてこのような φ や ψ の Schwarz 微分の（Nehari）ノルムの評価が必要となるのだが，それには次の結果が有用である。

定理

D を（双曲的）平面領域，$A \geqq 1$，$0 \leqq k < 1$ は定数，$\varphi : D \to \hat{\mathbb{C}}$ は有理型写像とする。もし，円板 $\Delta = \{z ;\ |z-a| < r\}$ で $\Delta_A = \{z ;\ |z-a| < Ar\} \subset D$ なるものについて $\varphi|_\Delta$ がつねに $\hat{\mathbb{C}}$ 上の $\frac{1+k}{1-k}$ - 擬等角写像に拡張されるならば，

$$\| S_\varphi \|_D = \sup_{z \in D} |S_\varphi(z)| \rho_D(z)^{-2} \leqq 96 A^2 k$$

である。

ただし，$S_\varphi = \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$ は φ の Schwarz 微分で，ρ_D は D における曲率 -4 の Poincaré density とする。

12. Residual Julia set について

諸澤 俊介　　　山形大 理

R を有理関数とする。$R^2 = R \circ R$, $R^n = R \circ R^{n-1}$ と帰納的に定義する。また $R^0 = \mathrm{id}$ とする。関数族 $\{R^n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して

$J(R) = \{z \in \hat{\mathbf{C}} \mid z$ のいかなる近傍でも $\{R^n\}$ は正規族とならない。$\}$

$F(R) = \hat{\mathbf{C}} \setminus J(R)$

と定義する。$J(R)$ を R の Julia 集合、$F(R)$ を R の Fatou 集合と呼ぶ。Sullivan は論文 [2] で Julia 集合と Klein 群の limit set の類似性（あるいは Iteration Theory と Theory of Kleinian groups）を指摘している。例えば、その事は Julia 集合が次のように言えることにもあらわれている。

$J(R)$ は少なくとも３点を含む最小の完全不変閉集合。

ここで集合 A が $(R-)$ 完全不変であるとは $R(A) = R^{-1}(A) = A$ となることである。

Abikoff の論文 [1] で定義された residual limit set と同様に $J(R)$ の部分集合 $J_0(R)$ を次のように定義する。

$$J_0(R) = \{z \in J(R) \mid z \notin \partial D \text{ for } \forall D; \text{component of } F(R)\}$$

このとき residual limit set と同様に次が成立する。

定理 1.　$J_0(R) \neq \emptyset$ とする。このとき $J_0(R)$ は完全不変集合であり、$J(R)$ で dense である。さらに $J_0(R)$ は非可算集合である。

次に [1] における function groups についての結果と同様のことを考える。D を $F(R)$ の component で 完全不変とする。$\overline{D}$ も完

全不変であるから $J(R)$ の最小性より $\partial D = J(R)$ となる。この時 $J_0(R) = \emptyset$ である。この逆を考える。

定理 2. $J(R)$ を disconnected とする。$F(R)$ が 完全不変 component を持たなければ $J_0(R) \neq \emptyset$。

R の各 critical point の forward orbit が R の (super-)attracting cycle に収束するとき R を expanding rational map と呼ぶ。$F(R)$ の完全不変 component の数は高々二つである。また、$F(R) = F(R^2)$ である。

定理 3. R を expanding rational map とする。$J_0(R) = \emptyset$ となるのは $F(R)$ が R^2– 完全不変 component をもつ時かつその時に限る。

references.

[1] W. Abikoff, Acta Math., 130(1973), 127-144.
[2] D. Sullivan, Ann. of Math., 122(1985), 401-418

13. On the locally univalent Bloch constant

防大数物教室
柳原 宏

$\Delta(c,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-c| < r\}$ とし特に $\Delta = \Delta(0,1)$ とおく．また $H_0(\Delta) = \{f : f \text{ is analytic in } \Delta \text{ and } f(0) = f'(0) - 1 = 0\}$ とし $f \in H_0(\Delta)$ と $a \in \Delta$ について，

$$\begin{aligned} r(a,f) &= \sup\{r > 0 : \exists\, \Omega \text{ with } a \in \Omega \subset \Delta \text{ such that} \\ &\qquad f \text{ maps } \Omega \text{ conformally onto } \Delta(f(a), r)\}, \end{aligned}$$

とおく．但し $\sup \emptyset = 0$. また $r(f) = \sup_{a \in \Delta} r(a,f)$ とおく．このとき，Bloch constant B と，locally univalent Bloch constant B_0 は

$$\begin{aligned} B &= \inf\{r(f) : f \in H_0(\Delta)\}, \\ B_0 &= \inf\{r(f) : f \in H_0(\Delta) \text{ and } f'(z) \neq 0\} \end{aligned}$$

と定義される．1989 年までの結果は，

$$\begin{aligned} 0.4330\cdots = \frac{\sqrt{3}}{4} &< B \le \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(11/12)}{\sqrt{1+\sqrt{3}}\,\Gamma(1/4)} = 0.4719\cdots \\ &< \frac{1}{2} \le B_0 \le L \le \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} = 0.5433\cdots. \end{aligned}$$

ただし，L は Landau constant であり，$r(a,f)$ の代わりに $\tilde{r}(a,f) = \sup\{r : \Delta(f(a), r) \subset f(\Delta)\}$ を用いて B と同様に定義される．

1990 年 Mario Bonk は，[3] で 52 年ぶりに Ahlfors の評価を定量的に改良し

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 10^{-14} < B$$

という結果を提出した．10^{-14} 自体にはそれほどの意味はないが，証明の手法は興味深い．そこで，おなじ手法で B_0 と L について下からの評価の

改良が出来ないかと試みたところ, そのままでは出来ないが, 2, 3 改良を加えると出来ることがわかった. 得られた評価は

Theorem 1

$$\frac{1}{2} + 10^{-417} < B_0$$

である. 同じ評価が, L についても成り立つことに注意する. これには,

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in H_0(\Delta) : 0 < |f'(z)| \le \frac{1}{1-|z|^2}, \ \ z \in \Delta\}$$

とおくとき,

$$B_0 = \inf_{f \in \mathcal{F}_0} r(f)$$

が成り立つことと, 次の distortion estimate を用いる.

Theorem 2 *Suppose* $f \in \mathcal{F}_0$. *Then*

$$\left| \log f'(z) - 2\log\frac{1}{1-|z|} + \frac{|z|}{1-|z|} \right| \le \frac{|z|}{1-|z|}, \quad \text{for } \ z \in \Delta.$$

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, *An extention of Schwarz's lemma*, Trans. Amer. Math. Soc. **43**(1938), 359-364.

[2] L. V. Ahlfors and H. Grunsky, *Über die Blochsche Konstante*, Math. Z. **42**(1937), 671-673.

[3] M. Bonk, *On Bloch's constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **110**(1990), 889-894.

[4] M. Heins, *On a class of conformal metrics*, Nagoya Math. J. **21**(1962), 1-60.

[5] X. Liu and D. Minda, *Distortion estimates for Bloch functions*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[6] E. Peschl, *Über die Verwendung von Differentialinvarienten bei gewissen Funktionenfamilien und die Übertragung einer darauf gegründeten Methode auf partielle Differentialgleichungen vom elliptische Typus*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI **336**/6(1963), 23 pp.

14. The derivative of a holomorphic curve and its applications

TODA Nobushige — Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. Let $f(z)$ be a transcendental meromorphic function in the complex plane. The following theorem is well-known(see[1]):

Theorem A. If $\Sigma_{a\neq\infty}\delta(a,f)=1$ and $\delta(\infty,f)=1$, then f is of regular growth and the order of f is either infinity or a positive integer.

Our purpose is to generalize Theorem A to holomorphic curves. S.Mori([2],[3]) gave some results in this direction.

2. Definition and Lemma. Let $f:C \to P^n(C)$ be a linearly non-degenerate, transcendental holomorphic curve and let $(f_1,\cdots,f_{n+1}):C \to C^{n+1}-\{0\}$ be a reduced representation of f. The characteristic function $T(r,f)$ of f and the deficiency $\delta(\alpha,f)$ of α in C^{n+1} are defined as usual and we denote the order of f by $\rho(f)$. We introduce "the derivative" of f as follows:

Definition. We call the holomorphic curve induced by the mapping

$$(f_1^{n+1},\cdots,f_n^{n+1},W(f_1,\cdots,f_{n+1})):C \to C^{n+1}$$

the derived holomorphic curve of f and express it by f', where $W(f_1,\cdots,f_{n+1})$ is the Wronskian of $f_1,\cdots,f_{n+1}$([4]).

Lemma 1. $T(r,f')\leq(n+1)T(r,f)+S(r,f)$ ([4]).

Lemma 2. f' is transcendental and $\rho(f)=\rho(f')$.

Remark 1. f' is not always linearly non-degenerate.

3. Theorem. Let X be a subset of C^{n+1} in general position and $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ the standard basis of C^{n+1}. As a generalization of Theorem A, we can prove the following

Theorem. Suppose that f is linearly non-degenerate and that

(1) $\delta(e_j, f)=1$ $(j=1, \cdots, n)$; (2) $\Sigma_{\alpha\varepsilon X}\delta(\alpha, f)=n+1$.

Then, f is of regular growth and $\rho(f)$ is either infinity or a positive integer([4]).

Remark 2. We can extend this theorem to the case of moving targets([4]).

References

[1] A.Edrei and W.H.J.Fuchs, On the growth of meromorphic functions with deficient values, Trans.A.M.S., 93 (1959), 292-328.

[2] S.Mori, Holomorphic curves with maximal deficiency sum, Kodai Math.J., 2(1979), 116-122.

[3] S.Mori, Order of a holomorphic curve with maximal deficiency sum for moving targets (preprint).

[4] N.Toda, On the order of holomorphic curves with maximal deficiency sum, NIT Sem.Rep. on Math., No 87(1992).

15. Martin境界とLoeb compact化について

池上輝男　　阪市大・理
西尾昌治　　阪市大・理

公理論的ポテンシャル論の立場からMartin境界をとり扱うとき，構成的定義と共に記述的定義も又問題となるが，この方面のアプローチは未だ成功していない。1980年P. Loebが新らしいcompact化を構成したことを契機にしてMartin型compact化を定義し，そこでNaïm理論を展開した(1986)．そのときLoebのcompact化での境界点が調和測度に関して殆んど到る処で正則であることに注目し「それがMartin compact化のrefinementではないか?」との疑問をもってきた．1991年前田文之氏がparabolic potential論の枠組でMartin境界を構成したことに触発されて，グリーン関数をもつ調和空間で前田氏のcompact化はMartin型であり，ある意味でLoeb compact化がそのrefinementになっていることを示す．

16. ポテンシャル論における最小変分の方法

二宮信幸

局所コムパクトなハウスドルフ空間 Ω において，

$K(P, Q)$ は

(1) 二点 P と Q について下半連続，$P = Q$ では

∞ であってもよいが，$P \neq Q$ では有限，

(2) P と Q が互に素なコムパクト集合の中にある

とき，$K(P, Q)$ は上に有界，

であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に対して，$K(P, Q)$ を核とするポテンシャルおよび相互エネルギー，エネルギー積分

$$K(P, \mu) = \int K(P, Q)\, d\mu(Q),$$

$$K(\mu, P) = \int K(Q, P)\, d\mu(Q),$$

$$K(\mu, \nu) = \int d\mu(P) \int K(P, Q)\, d\nu(Q),$$

$$K(\mu, \mu) = \iint K(P, Q)\, d\mu(Q)\, d\mu(P)$$

を考える．コムパクト集合 F の上の全質量 1 の正の測度の全体を $\mathfrak{M}_1(F)$ とする．このとき，

定理．Ω のコンパクト集合 F はエネルギー有限な正の測度をその上に持っているとする．$\mathfrak{M}_1(F)$ の測度の中でエネルギー積分を最小にするものを μ とする： $W_F = K(\mu,\mu)$ 。t が $0<t<2$ なる任意の正数であるとき，F の上のエネルギー有限，全質量 1 の任意の正の測度 λ に対して

$$(1+t)W_F \leqq K(\lambda,\mu) + tK(\mu,\lambda),$$

又は

$$(3-t)W_F \leqq K(\lambda,\mu) + (2-t)K(\mu,\lambda)$$

である．

定理において $t=1$ とすれば，

$$2W_F \leqq K(\lambda,\mu) + K(\mu,\lambda)$$

となり，核 $K(P,Q)$ が対称 $(K(P,Q)\equiv K(Q,P))$ であれば，それは

$$W_F \leqq K(\lambda,\mu)$$

であるので，対称核に対するエネルギー積分の最小値を与える測度 μ の特性を示す知られた結果となる．

17. On the spectral synthesis of potentials with respect to continuous function-kernels

伊藤正之　　　　名大教養

X を第２可算公理を満たす局所compact Hausdorff 空間とする。X×X 上の広義連続関数G(x, y)は、$0 \leqq G(x,y) < \infty\ (x \neq y)$, $0 < G(x,x) \leqq \infty$ を満たすとき、連続ポテンシャル関数核と呼ばれる。X上のσ－有限な正のボレル測度全体をM, その部分集合でcompact な台を持つもの全体をM_K と書く。$\mu \in M$に対して、μのG-potential を $G\mu$, μのG-energyを $E(G, \mu)$ と書き、$E(G) = \{\mu \in M ; E(G, \mu) < \infty\}$ と置く。

$\mu \in M$と Xの部分集合 Aに対して、$G\mu$のSpectral synthesis が Aに含まれる($ss(G\mu) \subset A$) とは、台が A に含まれるE(G) 内の測度の列 (μ_n) が存在して、X 上 $G\mu_n \uparrow G\mu$かつ$\mu_n \to \mu$ (漠)($n \to \infty$) を満たすときである。また、任意の$\mu \in M_K$ とμの台 supp(μ) を含む任意の開集合ωに対して $ss(G\mu) \subset \omega$であるとき、G は、spectral synthetic であると言い、$G \in$[SS]と書く。

定理1. Gが優越原理を満たす($G\in[D]$)とする。
$G\in[SS]$であるための必要かつ十分な条件は、
(PC)任意の開集合$\omega\neq\phi$のG-内容量が 0にならない。

定理2. $G\in[D]$ が (PC) を満たすとする。このとき、次の条件(1),(2) を満たす$\xi\in M$が存在する。

(1) 連続ポテンシャル関数核から成る$(G,\ \xi)$-resolvent が存在する。

(2) 任意の$\mu\in M_K$ と $supp(\mu)$ を含む任意の開集合ωに対して、その台がωに含まれ、ξに関して絶対連続であるE(G) 内の測度の列 (μ_n) で、$G\mu_n\uparrow G\mu$, $\mu_n\to\mu$を満たすものが存在する。

ここで得られた測度ξを Gの固有測度と呼ぶ。これより、優調和関数 u,vと開集合ωに対して、ω上 $u\leqq v$ ξ-a.e. ならば、ω上至る所 $u\leqq v$ であることを得る。

定理3. $G\in[D]$ は(PC)を満たすとし、ξを Gの固有測度とする。$(G_p)_{p>0}$ を$(G,\ \xi)$-resolvent とするとき、$G(x,x)=\infty$である任意の $x\in X$ に対して、

$$pG_p\varepsilon_x\xi\ \to\ \varepsilon_x\quad(p\to\infty)$$

である。ただし、ε_x は xにおけるDirac 測度である。

18. 調和空間上の収束性について

村 澤 忠 司　　　京都府立大学

(X, W) は countable base を持つ $\wp$-調和空間，1 ∈ W，とする．

(Doob convergence property)：もしXの任意の開集合 U上の調和関数 h_n の増加列 $\{h_n\}$ の極限関数 h が稠密な集合上で有限ならば、その関数 h は調和である．

(X, W)上でこの性質が成り立つとき、X上の調和関数の成すsheaf は Doob の収束性を持つと言われる．この性質は一般の調和空間では成り立たない。

今、$\wp$－調和空間(X, W)上に、次のGreen 関数の存在を仮定する．　$k(x, y) : X \times X \to [0, \infty]$

1) lower semi-continuous, continuous if $x \neq y$,
2) for every $y \in X$, $x \to k(x, y)$: potential, $\text{s-supp}(k_y(\cdot)) = \{y\}$,
3) $\forall$ continuous potetntial p on X, $\exists \mu \in M^+(X)$: $p = k\mu$

我々は、上記の条件を満たす調和空間上において、次のような結果をえた．

（記号） S：X 上で定義された非負な優調和関数の成す convex cone.

定理１．汎関数　$\Phi : S \to R^+$

(1)　$0 \leqq \Phi(s) < \infty$,　$\forall\ s \in S$

(2)　$\Phi(cs) = c\Phi(s)$,　$\forall c \in R^+$, $\forall\ s \in S$

(3) $s, s' \in S,\ s \leqq s' \Rightarrow \Phi(s) \leqq \Phi(s')$

に対して次の不等式が成り立つ：

$\exists n_0 \in N,\ \exists M \in R^+,\quad \Phi(u) \leqq M\sum_{i=1}^{n_0}\mu_i(u),\ \forall u \in S$、

ただし $\mu_i \in M^+(X) \cap S_0^*$.

（記号） S^*: H-cone[1]の意味で、S のdualを示す.

S_0^*: S^* のuniversally continuousな元の集合.

系. U をXの a relatively compact 開部分集合、

K をU に含まれる compact 集合とするとき、

$$\exists i_0 \in N, \exists M \in R^+,\quad \sup_K \hat{R}^{cU}u \leqq M\sum_{i=1}^{i_0}\mu_i(u),\ \forall u \in S \qquad (*)$$

定理２. 不等式(*) ↔ Doob covergence property.

Green 関数が存在する調和空間上においては、U.Schirmeier[4]によって、他の条件のもとで証明されているが、上記の結果はその別証明になっている.

文　献

[1] N.Boboc, G.Bucur and A. Cornea: Order and convexity in potential theory, LNM 853,Springer 1981.

[2] T.Ikegami: The duality of balayage space, ICPT 1991、Amersfoort.

[3] T.Murazawa: On convergence property on balayage space, (to appear).

[4] U.Schirmeier: Konvergenzeigenschaften in harmonischen Raumen, Inventiones Math. 55,71-95(1979)

19. ヘルダー条件を満足する多調和関数の境界挙動について

水田　義弘　　　　広島大学総合科学部

$\mathbb{R}^n$ 内の単位球 $\boldsymbol{B}$ で定義された多調和関数 u に対して，次の条件の同等性を示す：

$$(1) \qquad |u(x)-u(y)| \leqq M|x-y|^{\alpha}, \qquad \forall x, \ y \in \boldsymbol{B};$$

$$(2) \qquad |\mathrm{grad}\ u(x)| \leqq M(1-|x|^2)^{\alpha-1}, \qquad \forall x \in \boldsymbol{B}.$$

条件 (2) を満足する C^1 関数は，条件 (1) を満足するので，多調和性は (1) $\rightarrow$ (2) を論じるときに必要となる．

定理 1． $0<\alpha\leqq 1$ とするとき，$\boldsymbol{B}$ 上の多調和関数 u が (1) を満足するならば (2) も満足する．

正則関数については，Hardy-Littlewood [2, Theorems 40，41] および Duren [1, Theorem 5.1] を参照して欲しい．

次に，リプシッツ族 $\Lambda_\alpha(G)$ に属する多調和関数に対する除去可能集合について論じる．$k<\alpha\leqq k+1$ なる整数 k をとる．このとき，$u\in\Lambda_\alpha(G)$ とは，

$$|D^j u(x+y)+D^j u(x-y)-2D^j u(x)| \leqq M|y|^{\alpha-k}$$

がすべての $x\in G$，すべての y, $x\pm y\in G$ とすべての j, $|j|=k$, について成立するときをいう．$0<\alpha<1$ のとき，$\Lambda_\alpha(\boldsymbol{B})$ はヘルダー条件 (1) を満足する関数の全体と一致する．

定理 2． K は開集合 G 内のコンパクト集合とし，u は $G-K$ で m 調和とする．このとき，$u\in\Lambda_\alpha(G)$，$\alpha<2m$ かつ $H_{n+\alpha-2m}(K)=0$ ならば，u は G で m 調和である．

これらの結果を示すためには，次の補題が必要である．

補題 1 (cf. [4, Lemma 2.2])．u が球 $B(x,r)$ 上で多調和ならば，

$$|\nabla_k u(x)| \leqq M_k r^{-n-k} \int_{B(x,r)} |u(y)| dy \ ;$$

ここに，∇_k は k 次のグラディエントを表し，従って，

$$|\nabla_k u(x)| = \left(\sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} |D^j u(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

補題 2 (cf. [3, Proposition 3 and Theorem 2 in Chapter III])．もし，$u \in \Lambda_\alpha(G)$ ならば，半径が r，$r \leqq 1$，の任意の球 $B \subset G$ に対して，

$$|u(y) - P_B(y)| \leqq M r^\alpha, \qquad \forall y \in B$$

となる高々$[\alpha]$ 次の多項式 P_B が存在する．

定理 3．$\alpha < 2m < n+k$，K は $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合で $H_{n+\alpha-2m}(K) > 0$ ならば，$u \in \Lambda_\alpha(\mathbf{R}^n)$，$R^n - K$ 上 m 調和であるが $\mathbf{R}^n$ 全体では m 調和でない関数 u が存在する．

調和関数の除去可能集合についての最近の結果 Ullrich [5] の一般化になっている．また Uy [6] の反例にも注意を要する．

参考文献

[1] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, New York, 1970.

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals, II, Math. Z. 34 (1932), 403-439.

[3] A. Jonsson and H. Wallin, Function spaces on subsets of $\mathbf{R}^n$, Harwood Academic Publishers, London, 1984.

[4] Y. Mizuta, Boundary limits of polyharmonic functions in Sobolev-Orlicz spaces, Technical Report No. 16, Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University, 1992.

[5] D. C. Ullrich, Removable sets for harmonic functions, Michigan Math. J. 38 (1991), 467-473.

[6] N. X. Uy, A removable set for Lipschitz harmonic functions, Michigan Math. J. 37 (1990), 45-51.

20. Extremal distance の連続性について

大津賀　信　　学習院大学理学部

R^d 内に開集合 G とコンパクト集合 K_0, K_1 が与えられたとき，G 内の局所的に長さの有限な曲線で K_0 と K_1 を結ぶもの全体の族を $\Gamma = \Gamma(K_0, K_1, G)$ と記し，どの $\gamma \in \Gamma$ に対しても $\int_\gamma \rho\, ds \geq 1$ をみたす Borel 可測な関数 $\rho \geq 0$ を Γ-ad. とよぶ。我々は，

$$M_p(K_0, K_1, G) = \inf\{\int_{R^d} \rho^p dx \ ; \ \rho \ \ \Gamma\text{-ad.}\}$$

と置き，その逆数を $\lambda_p(K_0, K_1, \Gamma)$ と記して，G に関する K_0 と K_1 の間の extremal distance と言う。

いま，K_0 と K_1 を $K_0^{(n)} \downarrow K_0$, $K_1^{(n)} \downarrow K_1$ のように近似するコンパクト集合の列 $\{K_0^{(n)}\}$, $\{K_1^{(n)}\}$ に対して，$\lambda_p(K_0^{(n)}, K_1^{(n)}, G) \uparrow \lambda_p(K_0, K_1, G)$ かという問題を，講演者は 20 年以上前にのべた。それを最近 Shlyk [1] は見事に解決した。さらに彼は Marden - Rodin [2] と同様に，$G - K_0 - K_1$ 内の相対的に閉な集合を島のように伝いながら，K_0 と K_1 を G 内で結ぶ曲線族の場合に一般化して論じている。

今回Shlykと違い，曲線列の収束を考えないで次のkey lemmaを与え，重さωのついた場合に証明した。

Lemma. $p \geq 1$とする. ωはA_p条件をみたすとし，G, K_0, K_1は同上とする。$\varepsilon > 0$およびR^d内の下半連続(l.s.c.)な関数$\rho > 0$で，$G - K_0 - K_1$内連続なものが与えられたとき，l.s.c.な$\rho' \geq \rho$で$\int_{R^d} \rho'^p \omega\, dx \leq \int_{R^d} \rho^p \omega\, dx + \varepsilon$をみたし，さらに次の条件をみたすものが存在する：両端点がそれぞれK_0, K_1に近づきかつ$\int_{\gamma_k} \rho' ds < 1$をみたす曲線列$\{\gamma_k\}$に対し，$\int_{\tilde{\gamma}} \rho\, ds \leq \inf_{k \to \infty} \int_{\gamma_k} \rho' ds + \varepsilon/2$をみたす$\tilde{\gamma} \in \Gamma(K_0, K_1, G)$が存在。

証明の一番肝心な所はShlykのideaに負う。

[2]におけるように，$G - K_0 - K_1$内の閉集合を考える一般の場合のShlykの証明は理解し難い。しかし自分なりの証明は持っているつもりである。

[1] V. Shlyk: Condenser p-capacity and p-modulus, to appear.

[2] A. Marden and B. Rodin: Extremal and conjugate extremal distance on open Riemann surfaces with applications to circular-radial slit mappings. Acta Math. 115 (1966), 237-269.

21.

On Stein-Weiss Theorem and Two Weighted Estimates for Integral Operators

Anatoly A. Kilbas ベラルーシ国立大学・福岡大学
Silla Bubakar ベラルーシ国立大学
西郷 恵 福岡大学

Stein and Weiss [1] proved the following results.

Theorem 1. *Let* $\alpha > 0, 1 < p < \infty, 1 < q < \infty, \alpha p - n < \mu < n(p-1), 1/p - \alpha/n \leq 1/q \leq 1/p, (\nu + n)/q = (\mu + n)/p - \alpha$. *Then the Riesz potential*

$$(I^\alpha \varphi)(x) = c_n(\alpha) \int_{R^n} \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{n-\alpha}},\ c_n(\alpha) = \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)}, \tag{1}$$

for $0 < \alpha < n$ *is a bounded operator from* $L_p(R^n; |x|^{\mu/p})$ *into* $L_q(R^n; |x|^{\nu/q})$:

$$\left(\int_{R^n} |x|^\nu |(I^\alpha \varphi)(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq k \left(\int_{R^n} |x|^\mu |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \tag{2}$$

where the constant $k > 0$ *does not depend on* φ.

The condition $\alpha p - n < \mu < n(p-1)$ in Theorem 1 can be weakened on subsets $\Omega \in R^n$. Let $B = \{y \in R^n : |y| < 1\}$ be a ball in R^n and $B^c = \{y \in R^n : |y| > 1\}$ be its exterior, and define operators

$$(I_B^\alpha \varphi)(x) = c_n(\alpha) \int_B \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{n-\alpha}},\ (I_{B^c}^\alpha \varphi)(x) = c_n(\alpha) \int_{B^c} \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{n-\alpha}} \tag{3}$$

with the constant $c_n(\alpha)$ given in (1).

Theorem 2. *Let* $\alpha > 0, 1 < p < \infty, 1 < q < \infty, 1/p - \alpha/n \leq 1/q \leq 1/p, (\nu + n)/q = (\mu + n)/p - \alpha$. *If* $\mu > \alpha p - n$, *then the operator* I_B^α *is bounded from* $L_p(B; |x|^{\mu/p})$ *into* $L_p(B; |x|^{\nu/q})$. *If* $\mu < n(p-1)$, *then the operator* $I_{B^c}^\alpha$ *is bounded from* $L_p(B^c, |x|^{\mu/p})$ *into* $L_q(B^c, |x|^{\nu/q})$.

Theorem 1 can be extended to the weighted spaces $L_p(R^n; u)$ with a general power weight $u(x) = (1 + |x|)^{\mu/p} \prod_{i=1}^n |x - x_i|^{\mu_i/p}$, $0 \leq |x_1| < |x_2| < \ldots < |x_n| < \infty$.

The results above are closely connected with the so-called theory of two weighted estimates for the integral operators

$$(K\varphi)(x) = \int_\Omega K(x,t)\varphi(t)dt,\ x \in \Omega, \tag{4}$$

with a given kernel $K(x,t)$ being measurable on $\Omega \times \Omega$. This theory deals with finding conditions on measurable non-negative functions $u(x)$ and $v(x)$ given on Ω such that the estimate of the form (2), its reverse or a weak type estimate hold (see for example [2]). The following assertion is true.

Theorem 3. *Let* $1 \le p \le q < \infty, 1/p + 1/p' = 1,\ \beta \in R$ *and*

$$k(x,K,p,q,\beta) = \left[\int_\Omega K(t,x)^{\beta q} v(t)^q \left(\int_\Omega K(t,s)^{(1-\beta)p'} u(s)^{-p'} ds \right)^{q/p'} dt \right]^{1/q}$$

if $1 < p \le q < \infty$,

$$k(x,K,p,q,\beta) = \left[\int_\Omega K(t,x)^{\beta q} v(t)^q \left(\text{ess } \sup\nolimits_{s\in\Omega} [K(t,s)^{1-\beta} u(s)^{-1}] \right)^q dt \right]^{1/q}$$

if $1 = p \le q < \infty$.

If there is β, $0 \le \beta \le 1$, *such that* $k = \sup_{x\in\Omega} k(x,K,p,q,\beta) < \infty$, *then the two weighted estimate holds*

$$\left(\int_\Omega |v(x)(K\varphi(x))|^q dx \right)^{1/q} \le k \left(\int_\Omega |u(x)(\varphi(x))|^p dx \right)^{1/p}. \tag{5}$$

Similar statement is also true for $q = \infty$. When $0 < q \le p < 1$, the conditions are given for the estimates reverse to (5) for the operator (4) to be hold. Discrete analogue of such results are given. From Theorem 3 we obtain the following power estimate for the operator I_B^α given in (3).

Theorem 4. *Let* $1 < p \le q < \infty, 0 < \alpha < n, \mu_1 < n/p', \mu_2 < 1/p', \nu_1 > -n/q, \nu_2 > -1/q$. *Let there is* β, $0 \le \beta \le 1$, *such that* $-\alpha + n/p < (n-\alpha)\beta < n/q, 2(\nu_1+\nu_2)+n+2/q < (n-\alpha)\beta < 2(\mu_1+\mu_2) - \alpha - 2/p'$. *Then the operator* I_B^α *is bounded from* $L_p(B; |x|^{\mu_1}(1-|x|)^{\mu_2})$ *into* $L_q(B; |x|^{\nu_1}(1-|x|)^{\nu_2})$.

[1] E.M. Stein and G. Weiss: Fractional integrals on n-dimensional Euclidean spaces, *J. Math. Mech.* **7**(1958), 503-524.

[2] E.M. Dyn'kin and B.P. Osilenker: Weighted estimates of singular integrals and their applications. *J. Sov. Math.* **30**(1985), 2094-2154.

特別講演

Some Topics in Nevanlinna Theory, Hyperbolic Manifolds and Diophantine Geometry

Junjiro Noguchi* (東工大·理)

We will discuss open problems in the Nevanlinna theory in several complex variables, the theory of hyperbolic manifolds, and Diophantine geometry. Some of them are already posed ones and known, and the others may be new. In the course, we will give a survey of the affirmative solution of S. Lang's conjecture on rational points of hyperbolic spaces over function fileds ([No10]). We will also give new methods to construc hyperbolic hyperbolic hypersurfaces of large degree of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, and those of which complements are hyperbolic and hyperbolically imbedded into $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, which affirmatively support some problems posed by S. Kobayashi in his famous book [Ko1]. (These are joint works with K. Masuda.) In the end we will propose algebraic and arithmetic analogues of hyperbolic pseudodistances, and discuss some problems.

Remark. This is an expanded version of [No12].

§1. Nevanlinna Theory

1.1. Transcendental Bezout problem

The transcendental Bezout problem, say, on $\mathbf{C}^n$ asks if it is possible to estimate the growth of the intersection of two analytic (effective) cycles, X_1 and X_2 by the growths of $X_i, i = 1, 2$. In general, the answer is negative; M. Cornalba and B. Shiffman [CS] constructed an example of $X_i, i = 1, 2$ in $\mathbf{C}^2$ such that the orders of $X_i, i = 1, 2$ are 0, but that of $X_1 \cap X_2$ can be arbitrarily large. On the other hand, W. Stoll [St] established an *average Bezout theorem* as follows. Let $X_i, i = 1, ..., q$ be effective divisors defined by entire functions $F_i(z), i = 1, ..., q$ on $\mathbf{C}^n$ with $F_i(O) = 1$. One says that X_i or $F_i(z)$, $i = 1, ..., q$ define a complete intersection $Y = \cap_{i=1}^q X_i$ if Y is of pure dimension $n - q$, or empty, and that $F_i(z), i = 1, ..., q$ define a stable complete intersection if $F_{it}(z) = F_i(t_1 z_1, ..., t_n z_n), i = 1, ..., q$ define complete intersections for all $t = (t_1, ...t_n)$ q with $0 < t_j \leq 1$. Put $Y_t = \cap_{i=1}^q \{F_{it}(z) = 0\}$ (with multiplicities). Let $N(r; Y)$ denote the ordinary counting function of Y and set

$$\hat{N}(r, Y) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 N(r; Y_t) dt_1 \cdots dt_n. \quad q$$

Let $M(r; F_i)$ denote the maximum modulus function of $F_i(z)$. Then W. Stoll [St] proved

1.1.1 Theorem. *For any $\theta > 1$ there is a positive constant C_θ such that*

$$\hat{N}(r, Y) \leq C_\theta \prod_{i=1}^q \log M(\theta r; F_i).$$

* Research partially supported by Grant-in-Aid for Coperative Research (A) 04302006 represented by Prof. Fumiyuki Maeda (Hiroshima University), and by Grant-in-Aid for Scientific Research 92087.

In the proof the following type of estimate plays an essential role:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \log \frac{1}{|F_t(z)|} dt_1 \cdots dt_n \leq C_\theta \log M(\theta r; F)$$

for an entire function $F(z)$ and $\|z\| < r$.

Any probabilistic measure μ in the unit disk would give a similar result if the above type of estimate holds. Therefore it is interesting to ask

1.1.2 Problem. *Characterize what kind of measures can be applied to get an average Bezout estimate?*

1.2. Nevanlinna's inverse problem

For a meromorphic function F on $\mathbf{C}$ we have Nevanlinna's defect relation:

$$\sum_{a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} \delta_F(a) \leq 2.$$

The defect $\delta_F(a)$ has a property such that $0 \leq \delta_F(a) \leq 1$ and $\delta_F(a) = 1$ if F omits the value a. As a consequence, there are at most countably many $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ such that $\delta_F(a) > 0$; such a is called Nevanlinna's exceptional value. Conversely, for a given (at most) countably many numbers $0 < \delta_i \leq 1$ with $\sum \delta_i \leq 2$ and points $a_i \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. D. Drasin [Dr] proved the existence of a meromorphic function F such that $\delta_F(a_i) = \delta_i$. It is known that the defect relation holds for a linearly non-degenerate meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ with respect to hyperplanes in general position (H. Cartan, L. Ahlfors, W. Stoll), and for a dominant meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to V$ into a projective manifold V with respect to hypersurfaces with simple normal crossings (P. Griffiths et al.). W. Stoll asked

1.2.1 Problem. *Does Nevanlinna's inverse problem hold for $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ with respect to hyperplanes in general position, or for a dominant meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to V$ into a projective manifold with respect to hypersurfaces with simple normal crossings?*

This may be a hard problem, but the following will be easier.

1.3. Order of convergence of Nevanlinna's defects

Given a divergent sequence $\{z_i\}_{i=1}^\infty$, we classically defines its order by the infimum of $\rho > 0$ such that $\sum_{i=1}^\infty |z_i|^{-\rho} < \infty$. Thus for a sequence $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ converging to 0 we may define its order of convergence by the supremum of $\alpha > 0$ such that $\sum_{i=1}^\infty |w_i|^\alpha < \infty$. As seen in 1.2, there are at most countably many Nevanlinna's defects values a_i of a meromorphic function F on $\mathbf{C}$. W.K. Hayman [Ha] proved that the order of convergence of $\{\delta_F(a_i)\}$ is 1/3 for F of finite lower order λ; i.e.,

1.3.1 $$\sum \delta_F(a_i)^\alpha \leq A(\alpha, \lambda) < \infty$$

for $\alpha > 1/3$. Moreover, A. Weitsman [W] proved the above bound for $\alpha = 1/3$.

Let f denote a linearly non-degenerate meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Then V.I. Krutin' [Kr] proved that

1.3.2 Theorem. *Let f be of finite lower order λ and $\alpha > 1/3$. Then there is a constant $A(\alpha, \lambda) > 0$ such that*

$$\sum \delta_f(D_i)^\alpha \le A(\alpha, \lambda) < \infty$$

for any family of hyperplanes D_i of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ in general position.

1.3.3 Conjecture. *The above estimate still holds for $\alpha = 1/3$.*

Now let f be a dominant meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^m \to V$ as in 1.1, and D_i hypersurfaces of V with simple normal crossings.

1.3.4 Problem. *Does the estimate*

$$\sum \delta_f(D_i)^\alpha \le A(\alpha, \lambda) < \infty$$

hold for $\alpha \ge 1/3$ and for f of finite lower order λ?

1.4. Order of a meromorphic mapping into a projective manifold

Let $f : \mathbf{C}^n \to V$ be a dominant meromorphic mapping into a projective manifold V of dimension n.

1.4.1 Conjecture. *If the order of f is less than 2, V is unirational.*

Note that if the order of f is less than 2, then any global holomorphic section of tensors of $\Omega^k(V)$, $k = 0, 1, \dots, n$ must identically vanish; hence, V is rational for $n \le 2$, and for $n = 3$ V is rationally connected by J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori [KMM].

Here one also should remark that any non-constant holomorphic mapping of $\mathbf{C}^m$ into a complex torus has order ≥ 2. Similarly, one may ask

1.4.2 Conjecture. *If V admits a holomorphic curve $f : \mathbf{C} \to V$ of order less than 2, then V contains a rational curve.*

In other words, can one construct a holomorphic curve $g : \mathbf{C} \to V$ from f such that $T_g(r) = O(\log r)$?

1.5. Holomorphic curves

Let $f : \mathbf{C} \to V$ be an algebraically non-degenerate holomorphic curve into a projective manifold V, and D_i, $i = 1, \dots, q$ hypersurfaces of V with simple normal crossings whose first Chern classes are the same $\omega > 0$. P. Griffiths [Gr] posed

1.5.1 Conjecture. *The following defect relation holds:*

$$\sum_{i=1}^{q} \delta_f(D_i) \le \left[\frac{c_1(-K_V)}{\omega}\right],$$

where $\left[\frac{c_1(-K_V)}{\omega}\right] = \inf\{t \in \mathbf{R}; t\omega + c_1(K_V) > 0\}$.

Assume that V is an Abelian variety A. Then $c_1(K_A) = 0$. By making use of the solution of Bloch's conjecture (A. Bloch [B], T. Ochiai [O], M. Green and P. Griffiths [GG], and Y. Kawamata [K]), the above conjecture implies that

any non-constant holomorphic holomorphic curve into A can not miss a smooth ample divisor of A.

This is a part of the following conjecture due to Griffiths [Gr]

1.5.2 Conjecture. *Any non-constant holomorphic curve into A intersects an ample divisor D of A.*

Ax [Ax] confirmed this when f is a one-parameter subgroup, answering a question raised by S. Lang. M. Green [G2] proved that $A\backslash D$ is complete hyperbolic if D contains no translation of an Abelian subgroup. J. Noguchi [No1] proved Conjecture 1.5.2 in the case where D contains two distinct irreducible components which are ample and homologous to each other. His arguments were based on an inequality of the second main theorem type ([No1], [No3], [No4], [No6]):

1.5.3 Theorem. *Let V be an n-dimensional complex projective manifold, D a complex hypersurface of V and $\alpha : V\backslash D \to \mathcal{A}$ the quasi-Albanese mapping. Let $f : \mathbf{C} \to V$ be a holomorphic curve. Assume that the closure of $\alpha(V\backslash D)$ in $\mathcal{A}$ is of dimension n and of log-general type, and that $f(\mathbf{C})$ is non-degenerate with respect to the linear system of $H^0(V, \Omega^n(\log D))$. Then we have the following inequality of the second main theorem type:*

$$KT_f(r) \leq N(r, f^*D) + \text{small order term},$$

where K is a positive constant independent of f.

If $K > 1$ for an Abelian variety, then this implies Conjecture 1.5.2. Thus it is interesting to investigate K.

1.5.4 Problem([No2]). *Compute the above positive constant K.*

See [No9] for a new type application of the Nevanlinna calculus to a moduli problem. Cf. [GG], [No8], [LY] and [Lu] to see how the methods used in the Nevalinna theory are related to the topics dicussed in the next section.

§2. Hyperbolic Manifolds

2.1. Finiteness and rigidity theorems

Let X and Y be compact complex spaces. Assume that Y is hyperbolic. In 1974 S. Lang [L1] posed a conjecture to claim the *finiteness of the number of surjective holomorphic mappings from X onto Y* (cf. also Kobayashi [Ko2]). This has motivated many works. See Zaidenberg-Lin [ZL]. The first result in this direction was given by S. Kobayashi and T. Ochiai [KO]:

2.1.1 Theorem. *There are only finitely many surjective meromorphic mappings from a compact complex space onto a complex space of general type.*

At the Taniguchi Symposium, Katata 1978, T. Sunada asked the following problem:

2.1.2 Problem. *Let $f, g : M \to N$ be two holomorphic mappings from a compact complex manifold M onto another N of general type. If f and g are topologically homotopic, then $f \equiv g$.*

This is true for Kähler N with non-positive curvature and negative Ricci curvature (Hartman [H] and Lichnerovich's theorem), but still open for N with $K_N > 0$.

The above Lang's finiteness conjecture was affirmatively solved by Noguchi [No10] in 1992:

2.1.3 Theorem. *Let X and Y be as above. Then* $\mathrm{Mer}_{\mathrm{surj}}(X, Y)$ *is finite.*

It is interesting to recall the following conjecture also by T. Sunada [Su]:

2.1.4 Conjecture. *Let $f, g : X \to Y$ be two topologically homotopic surjective holomorphic mappings. Then $f \equiv g$.*

In the case of C-hyperbolic manifolds there are works by A. Borel and R. Narasimhan [BN] and Y. Imayoshi [I1], [I2], [I3]. H. Nakamura [Na] recently gave a partial answer to this conjecture for varieties of a special type, too.

Lately, Makoto Suzuki [SuzMk] proved the non-compact version of Theorem 2.1.3. In view of his result we may ask

2.1.5 Conjecture. i) *Let Y be a complete hyperbolic complex space with finite hyperbolic volume. Then* $\mathrm{Aut}(Y)$ *is finite.*

ii) *Let X be also a complete hyperbolic complex space with finite hyperbolic volume. Then* $\mathrm{Hol}_{\mathrm{dom}}(X, Y)$ *is finite.*

G. Arérous and S. Kobayashi [AK] proved that if M is a complete Riemannian manifold of non-positive curvature with finite volume, and if M admits no non-zero parallel vector field, then there are only finitely many isometries. The proof based firstly on the fact that $\mathrm{Is}(M)$ is compact. In the case of Conjecture 2.1.5 $\mathrm{Aut}(Y)$ and $\mathrm{Hol}_{\mathrm{dom}}(X, Y)$ are compact, too.

In the case of dimension 1, Theorem 2.1.3 is de Franchis' theorem, and we know a stronger theorem called Severi's theorem.

One may ask for a similar statement for compact hyperbolic complex spaces.

2.1.6 Conjecture. *We fix a compact complex space X and set*

$$\mathrm{Sev}(X) = \{(f, Y); Y \text{ is hyperbolic and } f : X \to Y \text{ is surjective, holomorphic}\}.$$

Then $\mathrm{Sev}(X)$ *is finite.*

Making use of the idea of the proof of Mordell's conjecture over function fields for hyperbolic spaces proved by Noguchi [No10], Theorem B (see 2.2), we see that any element of $\mathrm{Sev}(X)$ is rigid ([No10]).

Let $(f, Y) \in \mathrm{Sev}(X)$. Then the diameter and the volume of Y are bounded by those of X. In light of these facts, it is interesting to ask

2.1.7 Problem. *There is a positive constant $v(n)$ such that the hyperbolic volume* $\mathrm{Vol}(Y) \geq v(n)$ *for every hyperbolic irreducible complex space Y of dimension n.*

2.2. Hyperbolic fiber spaces and extension problems

In Noguchi [No10] (cf. also [No5]) the *analogue of Mordell's conjecture over function fields for hyperbolic space* which was conjectured by S. Lang [L1] was affirmatively solved:

2.2.1 Theorem. *Let R be a non-singular Zariski open subset of $\bar{R}$ with boundary ∂R and $(\mathcal{W}, \pi, R)$ a hyperbolic fiber space such that*

2.2.2 *$(\mathcal{W}, \pi, R)$ is hyperbolically imbedded into $(\overline{\mathcal{W}}, \bar{\pi}, \bar{R})$ along ∂R.*

Then $(\mathcal{W}, \pi, R)$ contains only finitely many meromorphically trivial fiber subspaces with positive dimensional fibers, and there are only finitely many holomorphic sections except for constant ones in those meromorphically trivial fiber subspaces.

It is a question if Condition 2.2.2 is really necessary. In the case of 1-dimensional base and fibers, this is automatically satisfied by a suitable compactification (see J. Noguchi [No7]). On the other hand, we know an example of hyperbolic fiber space $(\mathcal{W}, \pi, \Delta^*)$ over the punctured disk Δ^* such that even after a finite base change it has no compactification at the origin into which $(\mathcal{W}, \pi, \Delta^*)$ is hyperbolically embedded along (over) the origin (see Noguchi [No11]). Condition 2.2.2 was essentially used in the proof to claim the extension and convergence of holomorphic sections, so that the space of holomorphic sections forms a compact complex space.

2.2.3 Question. *Is there any example of a hyperbolic fiber space $(\mathcal{W}, \pi, R)$ of which holomorphic sections do not form a compact space.*

From the viewpoint of holomorphic extension problem it is interesting to ask

2.2.4 Problem. *Let $(\mathcal{W}, \pi, \Delta^*)$ be a hyperbolic fiber space which does not satisfy* 2.2.2 *at the origin. Is there a holomorphic section having an essential singularity at the origin?*

The following is based on the same thought.

2.2.5 Problem. *Let Y be a hyperbolic complex space (or a hyperbolic Zariski open subset of a compact complex space) which does not admit any relatively compact imbedding*

into another complex space so that Y is hyperbolically imbedded into it. Then, is there a holomorphic mapping $f : \Delta^* \to Y$ with essential singularity at the origin.

In the case of a compact Riemann surface M, T. Nishino [Ni] generalized the one point singular set to the set of capacity zero:

2.2.6 Theorem. *Let $E \subset \Delta$ be a closed subset of capacity zero and $f : \Delta \backslash E \to M$ a holomorphic mapping. If the genus of M is greater than* 1, *then f has a holomorphic extension over Δ.*

Later, Masakazu Suzuki [SuzMs] extended this to the higher dimensional case:

2.2.7 Theorem. *Let M be a complex manifold whose universal covering is a polynomially convex bounded domain of $\mathbf{C}^m$. Let D be a domain of $\mathbf{C}^n$ and $E \subset D$ a pluripolar closed subset. Let $f : D \backslash E \to M$ be a holomorphic mapping. If the image $f(D \backslash E)$ is relatively compact in M, in particular if M is compact, then f extends holomorphically over D.*

Thus one may ask

2.2.8 Conjecture. *Let N be a compact Kähler manifold with negative holomorphic sectional curvature, or more generally a compact hyperbolic complex space. If E is a pluripolar closed subset of a domain $D \subset \mathbf{C}^n$, then any holomorphic mapping $f : D \backslash E \to N$ extends holomorphically over D.*

2.3. Hypersurfaces of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$

S. Kobayashi [Ko1] claimed

2.3.1 Conjecture. *A generic hypersurface of large degree d of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ is hyperbolic.*

For example, in the case of $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ the possible smallest degree $d = 5$, since the Fermat quartic of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ is a Kummer K3 surface. Thus we ask

2.3.2 Conjecture. *A generic hypersurface of degree 5 of $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ is hyperbolic.*

The followings are examples for Conjecture 2.3.1.

2.3.3 Exmaples a)(R. Brody and M. Green [BrG]). The hypersurface of $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ defined by

$$z_0^d + \cdots + z_3^d + t(z_0 z_1)^{d/2} + t(z_0 z_2)^{d/2} = 0.$$

is hyperbolic for even degree $d \geq 50$ and for $t \in \mathbf{C}^*$.

b)(A. Nadel [N]). The hypersurface

$$z_0^{6e}(z_0^3 + t z_1^3) + z_1^{6e+3} + z_2^{6e}(z_2^3 + t z_1^3) + z_3^{6e+3} = 0$$

is hyperbolic for $e \geq 3$ and and for $t \in \mathbf{C}^*$ except several numbers.

c)(J. Noguchi). There is a simpler one:

$$z_0^d + \cdots + z_3^d + t(z_0 z_1 z_2)^{d/3} = 0$$

for $d = 3e \geq 24$.

d)(K. Masuda and J. Noguchi). In $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ we have the the following hyperbolic hypersurface:

$$z_0^d + \cdots + z_4^d + t(z_0 z_1 z_2)^{d/3} + s(z_0 z_1 z_3^2)^{d/4} = 0,$$

where $d = 12e, e \geq 6$.

A. Nadel used Siu's theorem ([Si]) to get his Example b). In the case of the other examples, H. Cartan's second main theorem and the ramification theorem ([C]) was used. But you should not try to prove Example e) "by hand", since you have to check possibly about 130 4×4-matrices to be of full rank. We have checked them by computer....Thanks to "MATHEMATICA".

G. Xu [X] recently proved an interesting theorem answering to a conjecture of J. Harris:

2.3.4 Theorem. *On a generic hypersurface of degree $d \geq 5$ in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, there is no curve with geometric genus $g \leq d(d-3)/2 - 3$. This bound is sharp. Moreover, if $d \geq 6$, this sharp bound can be achieved only by a tritangent hyperplane section.*

Now it is of interest to recall Bloch's conjecture [B]:

2.3.5 Conjecture. *Let f be a holomorphic curve from* $\mathbf{C}$ *into a hypersurface of* $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ *of degree* 5*. Then f is algebraically degenerate.*

Note that Conjecture 1.5.1 implies this.

There is a corresponding conjecture for the complements of hypersurfaces of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ by S. Kobayashi [Ko1]:

2.3.6 Conjecture. *The complements of generic hypersurfaces of large degree of* $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ *are hyperbolic.*

In the simplest case of $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, it is known that d must be greater than 4 (M. Green [G1]), and that the complement of 5 lines in general position is hyperbolic and hyperbolically imbedded into $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

2.3.7 Conjecture. *The complement of a generic smooth curve of degree* 5 *of* $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ *is hyperbolic and hyperbolically imbedded into* $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$*.*

We know at least the existence of such a curve by M.G. Zaidenberg [Z].

2.3.8 Theorem. *For each $d \geq 5$ there exists an irreducible smooth curve of degree d of* $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ *whose complement is hyperbolic and hyperbolically imbedded into* $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$*.*

If we allow d to be larger, Eamples 2.3.3 provide such exapmles:

2.3.9 Exmaples a)(K. Azukawa and Masaaki Suzuki [AS]). The complement of the following curve

$$z_0^d + z_1^d + z_2^d + t(z_0z_1)^{d/2} + t(z_0z_2)^{d/2} = 0$$

in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ is hyperbolic and hyperbolically imbedded into $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ for even degree $d \geq 30$ and for $t \neq 2, 4$. Remark that the curve in this case is smooth, and this provided the first example of a smooth curve in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ of which complement is hyperbolic.

b)(A. Nadel [N]). The curve in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

$$z_0^{6e}(z_0^3 + tz_1^3) + z_1^{6e+3} + z_2^{6e}(z_2^3 + tz_1^3) = 0$$

has the same property for $e \geq 3$ and and for $t \in \mathbf{C}^*$ except several numbers.

c)(J. Noguchi). We also have

$$z_0^d + z_1^d + z_2^d + t(z_0z_1z_2)^{d/3} = 0$$

for $d = 3e \geq 24$.

d)(K. Masuda and J. Noguchi). The complement of the hypersurface

$$z_0^d + \cdots + z_3^d + t(z_0z_1z_2)^{d/3} + s(z_0z_1z_3^2)^{d/4} = 0,$$

with $d = 12e, e \geq 6$ in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ is hyperbolic and hyperbolically imbedded into $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$. This is the first example in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ to be found.

The constructions of Examples 2.3.3 d) and 2.3.9, d) can be generalized for any higher dimensional $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

2.4. Non-algebraic hyperbolic manifold

So far, all known compact hyperbolic manifolds or complex spaces are algebraic. I have been once asked by I. Graham and lately by Y. Kawamata

2.4.1 Problem. *Is there any non-algebraic compact hyperbolic manifold?*

§3. Algebraic and arithmetic hyperbolic pseudodistances

3.1. Algebraic hyperbolic pseudodistance

Let V be an algebraic variety defined over a number field K, and $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$ be an imbedding. Then V naturally carries a structure of a complex manifold denoted by V^{σ}. The following conjecture is due to S. Lang [L1].

3.1.1 Conjecture. *If V^{σ} is hyperbolic for a $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$, then there are only finitely many rational points on V.*

Note that its function field analogue was proved as seen in Theorem 2.2.1. G. Faltings [F] proved Conjecture 3.1.1 for V contained in an Abelian variety defined over K. Related to this conjecture he also posed ([L2])

3.1.2 Problem. *Let V be an algebraic variety defined over a number field K. If V^{σ} is hyperbolic, is V^{τ} hyperbolic for another $\tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}$?*

Through a discussion on this problem at M.P.I., Bonn, S. Bando mentioned an idea to use chains of algebraic curves to connect two points on an algebraic variety instead of chains of holomorphic mappings from the unit disk. Here we explore this idea. Let M be a complex algebraic variety, and $P, Q \in M$. Let $\{(f_i, C_i, p_i, q_i)\}_{i=0}^{i=\ell}$ be a chain of smooth algebraic curves with algebraic morphisms $f_i : C_i \to M$ and points $p_i, q_i \in C_i$ so that

$$P = f_0(p_0), \quad f_{i-1}(q_{i-1}) = f_i(p_i), 1 \leq i \leq \ell, \quad f_\ell(q_\ell) = Q.$$

Let $d_{C_i}(p_i, q_i)$ denote the hyperbolic pseudodistance of the 1-dimensional complex space C_i, and set

$$D_M(P, Q) = \inf\left\{\sum d_{C_i}(p_i, q_i)\right\},$$

where the infimum is taken over all possible such chains. Then we have

3.1.3 Theorem. i)$D_M \geq d_M$.

ii)*$D_M(P, Q)$ is a continuous function defining a pseudodistance on M.*

iii)*If $D_M(P, Q)$ is a distance, then it is an inner distance and its topology is the same as the underlying differential topology.*

iv)*(Distance decreasing principle) For an algebraic morphism $f : M \to N$, we have*

$$D_M(P, Q) \geq D_N(f(P), f(Q)).$$

So, we call $D_M(P, Q)$ the *algebraic hyperbolic pseudodistance* of M. For instance, $D_M(P, Q) \equiv 0$ for the complex projective space, the complex affine space, and Abelian varieties.

During the preparation of this paper the author lately learned that J.-P. Demailly and B. Shiffman [DS] proved an approximation theorem for the Kobayashi-Royden infinitesimal form on a complex projective manifold by possibly singular algebraic curves. So far, it is not clear if their result implies that $D_M(P, Q)$ is the same as the original Kobayashi hyperbolic pseudodistance. Thus we ask

3.1.4 Question. *Does the algebraic hyperbolic psuedodistance $D_M(P,Q)$ coincide with the original Kobayashi hyperbolic pseudodistance?*

3.2. Arithmetic hyperbolic pseudodistance

Let V be an algebraic variety defined over a number field K, and $P, Q \in V(K)$. The arguments in 3.1 naturally leads to the following definition of the arithmetic hyperbolic psedodistance. Set

$$D_{V_K}(P,Q) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma} D_{V^\sigma}(P^\sigma, Q^\sigma),$$

where σ runs over all possible imbedding of K into $\mathbf{C}$. We call $D_{V_K}(P,Q)$ the *arithmetic hyperbolic pseudodistance*, which also satisfies the *distance decreasing principle* for K-morphisms. If $L \supset K$ is a field extension, then

$$D_{V_K}(P,Q) = D_{V_L}(P,Q).$$

There is another way to define the *arithmetic hyperbolic pseudodistance* $\tilde{D}_{V_K}(P,Q)$. We use of only chains $\{(f_i, C_i, p_i, q_i)\}_{i=0}^{i=\ell}$, connecting P and Q such that all $f_i : C_i \to V$ are defined over K and $p_i, q_i \in C_i(K)$, and set

$$\tilde{D}_{V_K}(P,Q) = \inf \left\{ \sum D_{C_{iK}}(p_i, q_i) \right\}.$$

Then $\tilde{D}_{V_K}(P,Q) \geq D_{V_K}(P,Q)$, and $\tilde{D}_{V_K}(P,Q)$ satisfies the *distance decreasing principle* not only for *K-morphisms* but also for *field extension L/K*.

$$\tilde{D}_{V_K}(P,Q) \geq \tilde{D}_{V_L}(P,Q).$$

In what follows, $d_{V_K}(P,Q)$ stands for $\tilde{D}_{V_K}(P,Q)$ or $D_{V_K}(P,Q)$. If V is a curve of higher genus, $d_{V_K}(P,Q)$ is a distance. For this moment we do not know any substantial implication from this pseudodistance, but may consider many many problems!!! Some of them are

3.2.1 Problem. i) *What is the lower bound of $d_{V_K}(P,Q)$ in the case where $d_{V_K}(P,Q)$ is a distance.*

ii) *The relation between $d_{V_K}(P,Q)$ and the heights $h_K(P)$ of rational points $P \in V(K)$. For instance, is there a relation between $1/\inf\{d_{V_K}(P,Q); P, Q \in V(K)\}$ and $\sup\{h_K(P); P \in V(K)\}$?*

Here it is of some interest to recall the following result due to J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori [KMM]:

3.2.2 Theorem. *Let k be an algebraically closed field of characteristic 0 whose order is uncountable. Let W be a proper algebraic variety over k. Then the following conditions are equivalent.*

i) *Given finitely many arbitrary points $x_i \in W, i = 1, ..., m$ there is an irreducible rational curve containing all x_i.*

ii)*Given two arbitrary points* $x_1, x_2 \in W$ *there is an irreducible rational curve containing* x_1 *and* x_2.

iii)*For a sufficiently general* $(x_1, x_2) \in W \times W$ *there is an irreducible rational curve containing* x_1 *and* x_2.

If W *is smooth, we have more equivalent conditions.*

iv)*Given two arbitrary points* $x_1, x_2 \in W$ *there is a connected curve containing* x_1 *and* x_2, *which is a union of rational curves.*

v)*There is a morphism* $f : \mathbf{P}^1 \to W$ *with ample* f^*T_W.

References

[AN] Y. Aihara and J. Noguchi, Value distribution of meromorphic mappings into compactified locally symmetric spaces, Kodai Math. J. (1991), **14** 320-334.

[AK] G. Arérous and S. Kobayashi, On the automorphisms of spaces of nonpositive curvature with finite volume, Differential Geometry and Relativity Ed. Cahen and Flato, pp. 19-26, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-Holland, 1976.

[Ax] J. Ax, Some topics in differential algebraic geometry II, Amer. J. Math. **94** (1972), 1205-1213.

[AS] K. Azukawa and Masaaki Suzuki, Some examples of algebraic degeneracy and hyperbolic manifolds, Rocky Mountain J. Math. **10** (1980), 655-659.

[B] A. Bloch, Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension, J. Math. Pures Appl. **5** (1926), 9-66

[BN] A. Borel and R. Narasimhan, Uniqueness conditions for certain holomorphic mappings, Invent. Math. **2** (1967), 247-255.

[BrG] R. Brody and M. Green, A family of smooth hyperbolic hypersurfaces in $\mathbf{P}_3$, Duke Math. J. **44** (1977), 873-874.

[C] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica **7** (1933), 5-31.

[CS] M. Cornalba and B. Shiffman, A counterexample to the "Transcendental Bezout problem", Ann. Math. **96** (1972), 402-4-6

[DS] J.-P. Demailly and B. Shiffman, Algebraic approximations of analytic maps from Stein domains to projective manifolds, preprint.

[Dr] D. Drasin, The inverse problem of the Nevanlinna theory, Acta Math. **138** (1977), 83-151.

[F] G. Faltings, Diophantine approximation on Abelian varieties, Ann. Math. **133** (1991), 549-576.

[G1] M. Green, Some examples and counter-examples in value distribution theory for several complex variables, Compositio Math. **30** (1975), 317-322.

[G2] M. Green, Holomorphic maps to complex tori, Amer. J. Math. **100** (1978), 615-620.

[GG] M. Green and P. Griffiths, Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings, The Chern Symposium 1979, pp. 41-74, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

[Gr] P. Griffiths, Holomorphic mappings: Survey of some results and discussion of open problems, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 374-382.

[H] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, Canad. J. Math. **19** (1967), 673-687.

[Ha] W.K. Hayman, Meromorphic Functions, Oxford Univ. Press, London, 1964.

[I1] Y. Imayoshi, Generalization of de Franchis theorem, Duke Math. J. **50** (1983), 393-408.

[I2] Y. Imayoshi, Holomorphic maps of compact Riemann surfaces into 2-dimensional compact C-hyperbolic manifolds, Math. Ann. **270** (1985), 403-416.

[I3] Y. Imayoshi, Holomorphic maps of projective algebraic manifolds into compact C-hyperbolic manifolds, preprint.

[K] Y. Kawamata, On Bloch's conjecture, Invent. Math. **57** (1980), 97-100.

[Ko1] S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, New York, 1970.

[Ko2] S. Kobayashi, Intrinsic distances, measures, and geometric function theory, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 357-416.

[KO] S. Kobayashi and T. Ochiai, Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type, Invent. Math. **31** (1975), 7-16.

[Kr] V.I. Krutin', On the magnitude of the positive deviations and of the defects of entire curves of finite lower order, Math. USSR Izvestija **13** (1979), 307-334.

[L1] S. Lang, Higher dimensional Diophantine problems, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 779-787.

[L2] S. Lang, Hyperbolic and Diophantine analysis, Bull. Amer. Math. Soc. **14** (1986), 159-205.

[Lu] S. S.-Y. Lu, On meromorphic maps into varieties of log-general type, Proc. Symposia in Pure Math. **52** (1991), Part 2, 305-333.

[LY] S. S.-Y. Lu and S.-T. Yau, Holomorphic curves in surfaces of general type, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **87** (1990), 80-82.

[KMM] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, Rationally connected varieties, J. Alg. Geometry **1** (1992), 429-448.

[N] A. Nadel, Hyperbolic surfaces in $\mathbf{P}^3$, Duke Math. J. **58** (1989), 749-771.

[Na] H. Nakamura, Galois rigidity of algebraic mappings into some hyperbolic varieties, preprint.

[Ni] T. Nishino, Prolongement analytiques au sens de Riemann, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 97-112.

[No1] J. Noguchi, Holomorphic curves in algebraic varieties, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833-853.

[No2] J. Noguchi, Open Problems in Geometric Function Theory, Proc. of Conf. on Geometric Function Theory, p.p. 6-9, Katata, 1978.

[No3] J. Noguchi, Supplement to "Holomorphic curves in algebraic varieties", Hiroshima Math. J. (1980) **10**, 229-231.

[No4] J. Noguchi, Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties, Nagoya Math. J. **83** (1981), 213-233.

[No5] J. Noguchi, A higher dimensional analogue of Mordell's conjecture over function fields, Math. Ann. **258** (1981), 207-212.

[No6] J. Noguchi, On the value distribution of meromorphic mappings of covering spaces over $\mathbf{C}^m$ into algebraic varieties, J. Math. Soc. Japan (1985) **37**, 295-313.

[No7] J. Noguchi, Hyperbolic fibre spaces and Mordell's conjecture over function fields, Publ. RIMS, Kyoto University, **21** (1985), 27-46.

[No8] J. Noguchi, Logarithmic jet spaces and extensions of de Franchis' theorem, Contributions to Several Complex Variables, Aspects Math. p.p 227-249, **E9**, Vieweg, Braunschweig, 1986.

[No9] J. Noguchi, Moduli space of Abelain varieties with level structure over function fields, International J. Math. **2** (1991), 183-194.

[No10] J. Noguchi, Meromorphic mappings into compact hyperbolic complex spaces and geometric Diophantine problem, Internat. J. Math. **3** (1992), 277-289.

[No11] J. Noguchi, An example of a hyperbolic fiber space without hyperbolic embedding into compactification, Proceedings of Osaka International Conference, Osaka 1990.

[No12] J. Noguchi, Some problems in value distribution, and hyperbolic manifolds, to appear in Proc. International Symposium, Holomorphic Mappings, Diophantine Geometry and Related Topics in Honor of Professor Shoshichi Kobayashi on his 60th Birthday at R.I.M.S., Kyoto University, October 26 - October 30, 1992, R.I.M.S. Lecture Notes Series.

[O] T. Ochiai, On holomorphic curves in algebraic varieties with ample irregularity, Invent. Math. **43** (1977), 83-96.

[Si] Y.-T. Siu, Defect relations for holomorphic maps between spaces of different dimensions, Duke Math. J. **55** (1987), 213-251.

[St] W. Stoll, A Bezout estimate for complete intersections, Ann. Math. **97** (1972), 361-401.

[Su] T. Sunada, Open Problems in Geometric Function Theory, Proc. Conf. on Geometric Function Theory, Katata, Ed. T. Ochiai, 1978.

[SuzMk] Makoto Suzuki, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and hyperbolic fibre spaces, preprint.

[SuzMs] Masakazu Suzuki, Comportement des applications holomorphes autour d'un ensemble polaire, II, C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1 **306** (1988), 535-538.

[W] A. Weitsman, A theorem of Nevanlinna deficiencies, Acta Math. **128** (1972), 41-52.

[X] G. Xu, Subvarieties of general hypersurfaces in projective space, preprint (Thesis at UCLA).

[Z] M.G. Zaidenberg, Stability of hyperbolic imbeddedness and construction of examples, Math. USSR Sbornik **63** (1989), 351-361.

[ZL] M.G. Zaidenberg and V.Ya. Lin, Finiteness theorems for holomorphic maps, Several Complex Variables III, Encyclopeadia of Math. Scie. **9**, pp. 113-172, Berlin-Heidelberg-New York 1989.

22. ON GENERALIZED CAUCHY-HADAMARD'S THEOREM IN CERTAIN HYPERCOMPLEX N-TUPLE SPACES

笹山浩良　　SASAYAMA INSTITUTE

故西垣久実氏は1940年の論文で実四元数体 Ξ における圧縮不能な冪級数 $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{p_m} a^{(q)}_{m,0}\, z\, a^{(q)}_{m,1}\cdots z\, a^{(q)}_{m,m}$ を考え、Cauchy-Hadamard's theorem の拡張をのべた。この定理そのものは成立するが、そこに述べられている証明は少し疑問点を感じる。一方、1991年4月の分科会で上記冪級数のノルム空間 $\mathbb{B}$ に associate され unity element ∋ をもつ n次元非可換結合的多元環 $\mathfrak{S}$ をスカラー環にもつ多元複素 n-tuple 空間 $E(\mathfrak{S})$ への拡張 $\mathbb{P}(X) \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{p_m} M^{(a)}_m(X) \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{p_m} \mathcal{K}^{(a)}_{m,0}\, \mathcal{Q}_m(X\mathcal{K}^{(a)}_{m,1},\ldots,X\mathcal{K}^{(a)}_{m,m})$ を述べ絶対収束性に関する2, 3の条件を報告、次いで1992年4月の分科会で m次斉次多項式の rank について $\limsup_{m\to\infty}\sqrt[m]{p_m}=1$ の成立を報告した。ここに $\mathcal{Q}_m(x_1,\ldots,x_m)(x_1,\ldots,x_m\in B; m=1,2,\ldots)$ は $\mathbb{B}^m$ より Banach 空間 $\mathbb{B}'$ への有界完全対称な multilinear function と $\mathbb{L}_m$ と同様に $\mathcal{Q}_m(X_1,\ldots,X_m)(X\text{'s}\in E(\mathfrak{S}))$ を定義し、更に $\mathcal{K}^{(a)}_{m,\ell}(a=1,\ldots,p_m;\ \ell=0,1,\ldots,m;\ m=0,1,2,\ldots)$ 及び $\mathfrak{S}$ の $e_1=\ni$ なる base$(e_1,\ldots,e_n)$ の各 e_i は悉く nilfactor でない

$\mathfrak{S}$の定元素とする。一般に$E(\mathfrak{S})$では scalar 乗法について factor law が成立しないため収束半径は一般に決定できない。而し或条件をつけると$E(\mathfrak{S})$で次の拡張された Cauchy-Hadamard の定理が成立し、西垣氏の定理を特別の場合として含むと共に西垣氏の証明中の疑問点の除去を兼ねる。：

（定理）もし$E(\mathfrak{S}), E'(\mathfrak{S})$におけるスカラー乗法について Factor-Law が成立し p_m が m 次斉次多項式 $\mathbb{P}_m(X)$ の rank で且つ

$$\mathfrak{Q}_m(X_1, \ldots, X_m) = M_m \|X_1\| \ldots \|X_m\| \quad (m=1,2,3,\ldots) \quad (*)$$

が成立するならば

$$\frac{1}{\rho} \equiv \limsup_{m,a} \left(M_m \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,0}\| \ldots \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,m}\|\right)^{1/m}$$

の時$\mathbb{P}(X)$は$\|X\|<\rho$で絶対収束し$\|X\|>\rho$で発散する。ここにM_mは$X_1, \ldots, X_m$に無関係な定数とする。

私は前論文で$\mathbb{B}$が pre-Hilbert space で $n=4, \mathfrak{S}=\Xi$の時は$E(\Xi)$の scalar 乗法について Factor Law が成立する事を示したから

（系）もし$\mathbb{B}, \mathbb{B}'$が夫々 pre-Hilbert space, Hilbert space で $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$に associate された Quaternionic quadruple spaces $E(\Xi), E'(\Xi)$で$(*)$が成立するならば前期定理で定義したρに対して$\mathbb{P}(X)$は$\|X\|<\rho$で絶対収束し，$\|X\|>\rho$で発散する．

23. ON LEFT-(RIGHT-)FRÉCHET DIFFERENTIABILITY AND GENERALIZED R.FUETER'S REGULARITY OF GENERALIZED POWER SERIES IN HYPERCOMPLEX N-TUPLE SPACES

笹山浩良　　SASAYAMA INSTITUTE

1991年4月の分科会で述べたように、非可換，結合的なHypercomplex n-tuple space E(𝔊)における拡張されたべき級数は、もし $\|X\|<\rho$ で絶対収束ならば、$\|X\|<\rho$ で何回でも $(x_1,\ldots,x_n)$ について従って x_i について通常の意味で逐次Fréchet微分可能で、その逐次Fréchet微分は項別に逐次Fréchet微分する事によって得られる。但しBが実又は複素ノルム空間であるのに応じてBは夫々実又は複素Banach空間とした。

而しこれだけではべき級数 $\mathbb{P}(X)$ が左(右)Fréchet微分可能であるかどうかは不明である。

今回は、$\mathbb{P}(X)$ が、左(右)Fréchet微分可能であるための条件及び拡張されたR.Fueter正則性に対する条件と共にこの左(右)Fréchet微分可能性と拡張されたR.Fueter正則性との間の関係を補足してのべる。

前回報告(1992年4月)の正誤表

1ページ目	誤	正
下から7行目	$p_m \leqq n^{H_{m-1}} \times n$	$p_m \leqq n^{H_m} \times n$
下から8行目	次の定理を報告する。	次の定理を報告する。但し $Ж^{(a)}_{m,0}, \dots, Ж^{(a)}_{m,m}$ $(a = 1, \dots, p_m ;\ m = 1, 2, 3, \dots)$ 及び e_i $(i=1, \dots, n)$ は凡べて nilfactor ではないものとする。

2ページ目	誤	正
下から2行目	$\limsup_{\substack{1 \leqq a \leqq p_m, \\ m \to \infty}} \big(\mathcal{R}_{(m)} \Vert Ж^{(a)}_{m,0} \Vert \cdots$	$\frac{1}{\mu} \limsup_{\substack{1 \leqq a \leqq p_m, \\ m \to \infty}} \big(\mathcal{R}_{(m)} \Vert Ж^{(a)}_{m,0} \Vert \cdots$

24. 複素単位球の Dirichlet 空間について

井上　透 （山口大学理学部）

$B_n := \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球、$\mathrm{Aut}(B_n)$ を B_n の正則自己同型群とする。$n = 1$ のとき B_1 上の正則函数で

$$\|f\| = \left(\iint_{B_1} |f'(z)|^2 \, dx \, dy\right)^{1/2} < \infty$$

をみたすもの全体は B_1 の Dirichlet 空間と呼ばれ、これは任意の $\varphi \in \mathrm{Aut}(B_1)$ に対し

$$\|f \circ \varphi\| = \|f\|$$

をみたす正則函数からなる Hilbert 空間として特徴づけられる [1]。ここで内積は

$$(*) \qquad \langle f, g \rangle = \iint_{B_1} f'(z)\overline{g'(z)} \, dx \, dy$$

で、正確には半内積である。

K. Zhu [2] は一般の B_n に対しても正則函数からなる Hilbert 空間で、内積が $\mathrm{Aut}(B_n)$ で不変なものが唯一つ存在することを示した。ただし Zhu が与えた内積はベキ級数展開の係数を用いたもので、$(*)$ の自然な拡張と見なせる内積はいくつか試されているが、いずれもうまくいかないことも示されている。

ここでは B_n に対し、$(*)$ の拡張と見なせる形を与える。
$z, w \in \mathbb{C}^n$ は列ベクトルで表し、$\mathbb{C}^n$ の標準内積を $\langle z, w\rangle = {}^t z \overline{w}$ とし、また行列値函数 $K(z, w)$ を

$$K(z, w) = 1_n - \overline{w}\, {}^t z = \left[\delta_{ij} - \overline{w_i} z_j\right]$$

で定義する。ここで 1_n は n 次単位行列で ${}^t z$ は z の転置行列とする。

$d\nu(z)$ を $\nu(B_n) = 1$ と正規化した $\mathbb{C}^n$ の Lebesgue 測度、
$k(z, w) = (1 - {}^t z \overline{w})^{-(n+1)}$ を対応する B_n の Bergman 核函数とし、
$d\mu(z) = k(z, z)\, d\nu(z)$ とおく。従って $d\mu(z)$ は $\mathrm{Aut}(B_n)$ で不変な B_n の測度である。

B_n で正則な函数 $f(z)$ に対し $D_i f(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z_i}(z)$ とし、
$f'(z) := {}^t(D_1 f(z), \cdots, D_n f(z))$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \lambda \prod_{i=2}^{n} (\lambda - i) &&= \lambda(\lambda-2)(\lambda-3)\cdots(\lambda-n) \\ d(\lambda) &= \prod_{i=0}^{n} (\lambda - i) &&= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n) \end{aligned}$$

とおく。

定 理 1. B_n 上の正則函数で

$$\|f\| = \left(\lim_{\lambda \to 1} c(\lambda) \int_{B_n} \langle K(z,z) f'(z), f'(z) \rangle (1 - |z|^2)^{\lambda} \, d\mu(z) \right)^{1/2} < \infty$$

をみたすもの全体を $\mathcal{H}$ とすると $\mathcal{H}$ は多項式を含み、(半)内積

$$\langle f, g \rangle = \lim_{\lambda \to 1} c(\lambda) \int_{B_n} \langle K(z,z) f'(z), g'(z) \rangle (1 - |z|^2)^{\lambda} \, d\mu(z)$$

により Hilbert 空間になる。さらに任意の $f \in \mathcal{H}$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(B_n)$ に対し

$$\|f \circ \varphi\| = \|f\|$$

をみたす。

定 理 2. 定理 1 における内積は

$$\langle f, g \rangle = \lim_{\lambda \to 0} d(\lambda) \int_{B_n} f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^{\lambda} \, d\mu(z)$$

と一致する。

References

[1] J. Arazy, S. Fisher, *The uniqueness of the Dirichlet space among Möbius invariant Hilbert spaces*, Illinois J. Math. 29 (1985), 449-462.

[2] K. Zhu, *Möbius invariant Hilbert spaces of holomorphic functions in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 823-842.

25. APPELL F_4 のREDUCIBLE CASES

加藤　満生　　　　琉球大学教育学部

APPELL F_4 型の微分方程式系は z を未知関数として

$$\begin{cases} x(1-x)z_{xx}-y^2z_{yy}-2xyz_{xy}+cz_x-(a+b+1)(xz_x+yz_y)-abz=0 \\ y(1-y)z_{yy}-x^2z_{xx}-2xyz_{xy}+c'z_x-(a+b+1)(xz_x+yz_y)-abz=0 \end{cases}$$

その解空間は4次元で c, c' が整数でないとき

$$f_0 = F_4(a,b,c,c';x,y) = \sum \frac{(a,m+n)(b,m+n)}{(c,m)(c',n)(1,m)(1,n)} x^m y^n$$

$$f_1 = x^{1-c}F_4(1+a-c, 1+b-c, 2-c, c';x,y),$$

$$f_2 = y^{1-c'}F_4(1+a-c', 1+b-c', c, 2-c';x,y),$$

$$f_3 = x^{1-c}y^{1-c'}F_4(2+a-c-c', 2+b-c-c', 2-c, 2-c';x,y),$$

がひとつの基本系をなす．

$\{x=0\}$, $\{y=0\}$, $C:=\{D:=(x-y)^2-2(x+y)+1=0\}$ が特異点集合．

a or $b=0,-1,-2,...$ のとき f_0 は多項式関数なので $\langle f_0\rangle$ は解析接続で不変な1次元部分空間をなす．同様に

$1+a-c$ or $1+b-c = 0,-1,-2,...$ のとき $\langle f_1\rangle$ は不変部分空間．

$1+a-c'$ or $1+b-c' = 0,-1,-2,...$ のとき $\langle f_2\rangle$ は不変部分空間．

$2+a-c-c'$ or $2+b-c-c' = 0,-1,-2,...$ のとき $\langle f_3\rangle$ は不変部分空間．

ここまでは自明．以下が本講演の主張．

a or $b = 1,2,3,\ldots$ のとき $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ が不変部分空間.

$1+a-c$ or $1+b-c = 1,2,3,\ldots$ のとき $\langle f_0, f_2, f_3\rangle$ が,

$1+a-c'$ or $1+b-c' = 1,2,3,\ldots$ のとき $\langle f_0, f_1, f_3\rangle$ が,

$2+a-c-c'$ or $2+b-c-c' = 1,2,3,\ldots$ のとき $\langle f_0, f_1, f_2\rangle$ が

不変部分空間をなす.

これらの３次元部分空間を定める微分方程式も求まる.

例えば $2+a-c-c'=1$ のとき $D_2(z)=xz_{xx}+yz_{yy}+(x+y-1)z_{xy}$ として

$$D_2(z)+(b+1)(z_x+z_y)=0$$

$2+a-c-c'=2$ のとき

$$(1-(c+c'-b-1)(x/c+y/c'))D_2(z)+p(x,y)z_x+q(x,y)z_y+rz=0$$

が第３の微分方程式となる. ここに, $p(x,y)$, $q(x,y)$ は１次多項式,

r は定数.

26. コホモロジーと一般位数の擬凸性について

渡邊 清　　　神戸大学理学部

１９５３年に Serre は次のことを示した.

定理　Dを C^nの領域とする.　このとき, $H^p(D,\mathcal{O})=0 (p\geq 1)$ ならば, Dは擬凸である. ここに, $\mathcal{O}$は D上の正則函数の芽の層を表す.

この定理は色々な形に拡張された. 例えば, Laufer は D を Stein 多様体の領域の場合に, Siu は D が Stein 多様体の被拡領域の場合に, また, Kajiwara-Kazama は D が 2 次元 Stein 多様体の領域で, $\mathcal{O}$ の代わりに, 複素 Lie 群 L への正則写像の芽のなす層 $\mathcal{A}_L$ の場合に, 等々.

一方, Tadokoro と Fujita は, Oka の擬凸性を拡張して, 位数 p の擬凸性の概念を得た. このとき, 位数 $n-1$ の擬凸が, 普通の擬凸に対応する.

ここでは, 上の二つのことを考え合せて, 次の結果を示す.

定理　D を $\boldsymbol{C}^n$ の領域とする．このとき，$H^p(D,\mathcal{O})=0(p\geq q)$ ならば，D は位数 $n-q$ の擬凸である．

これは，Serre の結果の自然な拡張である． D が Stein 多様体の領域の場合も成り立つ．この結果は，前に，Eastwood-Suria に依って，少し違った形で述べられていた．ここでは，Laufer の方法をもとに，ある特別のコホモロジー類をČech コホモロジーでチェックすることによって示す．

なお，Fujita,Matsumoto と Andreotti-Grauert の結果を使うと次の系も得られる．

系　D を $\boldsymbol{C}^n$ の領域で，その境界が C^2級の実部分多様体であるとするとき，D が q -complete であるための必要十分条件は，$H^p(D,\mathcal{O})=0(p\geq q)$ となることである．

27. 一般位数擬凸状域と解析集合の接続

奈良女子大学 理学部
藤田 收

最近，L. Bungart [1] により，Hunt-Murray [4] の意味の q-plurisubharmonic function を piecewise smooth q-plurisubh. fun. により近似できることが示された。$\mathbb{C}^n$ の領域における位数 k の擬凸状函数は，$(n-k-1)$-plurisubh. であるため，上の結果と [3] を用いて，$\mathbb{C}^n$ の位数 k の擬凸状域は，つねに，Diederich-Fornaess [2] の意味で $(n-k)$-complete with corners となる。また，Rothstein-Sperling の定理（[5], Satz II, II*）を一般化して，次のように formulate できる。

<u>定理 1</u> $\mathcal{D}$ を $\mathbb{C}^n$ の位数 k $(1 \leqq k \leqq n-1)$ の擬凸状域（連結），$K \subset \mathcal{D}$ をコンパクト集合，Σ を $\mathcal{D}-K$ における m 次元既約解析集合で $\mathcal{D}$ において相対コンパクトでないものとするとき，$m \geqq \max(n-k+1, 2)$ ならば，Σ は $\mathcal{D}$ まで接続される。正確には，$\mathcal{D}$ における m 次元既約解析集合 Σ^* と $\mathcal{D}$ のコンパクト集合 $K^* (\supset K)$ で，

$\mathcal{D}-K^*$ において $\Sigma^*=\Sigma$ をみたすものが存在する。
(Σ^* は Σ に対して一意的にきまる。)

<u>定理2</u>　φ を $\mathbb{C}^n$ を exhaust する位数 k ($0\leqq k \leqq n-1$) の擬凸状函数とし, c を一つの実数とする。Σ を $\{\varphi=c\}$ の近傍における m 次元既約解析集合で $\{\varphi=c\}$ と交わるものとするとき, $m \geqq \max(n-k,2)$ ならば, Σ は $\{\varphi\leqq c\}$ の近傍まで接続される。

定理1, 2 共に Σ の次元 m の値の限界が best であることを示す例がある。なお, 定理1, 2 は $\mathbb{C}^n$ を n 次元 Stein 多様体におきかえて, そのまま成立する。

References

[1] L. Bungart, Pieceweise smooth approximations to q-pluri-subharmonic functions, Pacific J. Math., 142 (1990), 227-244.

[2] K. Diederich and J. E. Fornaess, Invent. Math., 82 (1985), 291-305.

[3] O. Fujita, J. Math. Kyoto Univ., 30 (1990), 637-649.

[4] L. R. Hunt and J. J. Murray, Michigan Math. J., 25 (1978), 299-316.

[5] W. Rothstein unt H. Sperling, Einsetzen analytischer Flächenstücke in Zyklen auf komplexen Räumen, Festschrift z. Weierstrass, Westdeutscher Verlag, 1966, S. 531-554.

28.

強擬凸領域の倉西族の Versality について

宮嶋　公夫（鹿児島大・教養）

§0　強擬凸領域の変形.　　X を $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 4$ なる強擬凸複素多様体、r を X 上の exhaustion function とする.　$\Omega_\varepsilon := \{x \in X \mid r(x) < \varepsilon\}$ とおく.

[A1,2] により、$\overline{\Omega}_\varepsilon$ 上の複素構造の canonical family が、所謂、倉西 method により、構成されている。　この canonical family を利用して、次のような変形に対しての存在定理を得ることができる.

（1）$K = \bigcap_{\varepsilon > \alpha} \Omega_\varepsilon$ として、K に沿った complex manifold の germ としての変形、

（2）X 全体の変形.

§1　K に沿った germ の変形

存在定理１ ([M2])　K に沿った germ の変形の versal (i.e. complete & effective) 族が存在する.

証明は、上述の $\overline{\Omega}_\varepsilon$ 上の複素構造の canonical family に対応する複素多様体の family が complete であることを示すことが中心問題になる.

倉西 method により構成された複素構造の canonical family は "倉西-versality" と呼ばれる性質を持つことが知られており、その帰結として、この複素多様体の family は formally versal で、更に reduced complex space を parameter space に持つ族に対しては complete であることを得る.　この family が complete であることは、次の結果から導かれる.

定理 (cf. [E], [Fl])　$p : F \to \mathcal{C}$ を Schlessinger's conditions (S1), (S2) を満たす fibered groupoid とする.　このとき、formally versal element $w \in F(T)$ は次のような lifting property を持つ：　任意の infinitesimal extension $S \to S'$ に関して、次の実線で示された morphisms は必ず破線で示された morphisms に lift される.

$$\begin{tikzcd} w & \\ a \arrow[u] \arrow[r] & a' \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd} \quad \text{over} \quad \begin{tikzcd} T & \\ S \arrow[u] \arrow[r] & S' \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

注　多様体の変形の場合は (S1) が成立することは知られている.　(S2) が成立することは [Si] により保証される.

§2　X 全体の変形.　存在定理１より次の存在定理が得られる.

存在定理２ ([M2])　X 全体の変形に関して、formally versal で X 内の任意の強擬凸 compact subset* に沿った germ の変形としては complete なものが存在する.

注 存在定理２は（$\dim_{\mathbb{C}} X \geq 4$ なる強擬凸複素多様体の変形の場合の）[B-K, Bemarkungen (5.10)]への肯定的解答である．

§３ smoothness． 倉西 method は versal 族の parameter 空間の smoothness についての情報を与える．

系 $H^2(X, \Theta_X)=0 \Rightarrow$ 存在定理１、２で得られた versal 族の parameter 空間は smooth.

更に、Bogomolov-Tian-Todorov's smoothness の analogy が成り立つ．

定理３ $K_X = 1_X \Rightarrow$ 存在定理１、２で得られた versal 族の parameter 空間は smooth.

§４ (1, 1)-凸凹領域の変形． $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 4$ なる(1, 1)-凸凹領域についても、[A1,2] の議論はそのまま成り立つ． 更に、(V,o) を X の normal Stein completion として得られる正規孤立特異点とするとき、depth(V,o)≥3 なる条件の下で (S2) が成り立つことが [Fu1,2] から得られる．

よって、$\dim_{\mathbb{C}} X \geq 4$ かつ depth(V,o)≥3 なる(1, 1)-凸凹領域の変形においては、定理１、２と類似の存在定理が得られる． その spacial case として、特に、次が得られる．

系 M を $\dim_{\mathbb{C}}(V,o) \geq 4$ かつ depth(V,o)≥3 なる正規孤立特異点（の非特異部分）内の強擬凸実超曲面とする． このとき、M に沿った複素多様体の germ の変形の（[M1, Theorem 1] で求めた）formally versal convergent family は complete である．

*) X 内の強擬凸 compact subset とは、Remmert quotient $p: X \to \overline{X}$ に対して $K=p^{-1}$(a Stein compact subset) であるものを言う．

References

[A1] Akahori,T.: The new Neumann operator associated with deformations of strongly pseudo convex domains and its application to deformation theory, Inv. math. **68** (1982), 317-352.

[A2] ---------- : A criterion for the Neumann type problem over a differential complex on a strongly pseudo convex domain, Math. Ann. **264** (1983), 525-535.

[B-K] Bingener, J. and Kosarew, S.: Lokale Moduleraume in der analytischen Geometrie, Aspects of Math. D2, D3, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1987.

[E] von Essen,H.: Nonflat deformations of modules and isolated singularities, Math. Ann. **287** (1990), 413-427.

[Fl] Flenner,H.: Ein Kriterium für die Offenheit der Versalität, Math. Z. **178** (1981), 449-473.

[Fu1] Fujiki,A.: A coherency theorem for direct images with proper supports in the case of a 1-convex map, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. **18** (1982), 31-56.

[Fu2] ------- : Flat Stein completion of a flat (1,1)-convex-concave map, manuscript.

[M1] Miyajima,K.: Deformations of a complex manifold near a strongly pseudo-convex real hypersurface and a realization of Kuranishi family of strongly pseudo-convex CR structures, Math. Z. **205** (1990), 593-602.

[M2] ---------- : Versality of the Kuranishi family of strongly pseudo-convex domains, Preprint

[Si] Siu,Y.-T., The 1-convex generalization of Grauert's direct image theorem, Math. Ann. **190** (1971), 203-214.

29. 正規孤立特異点の変形への Bogomolov-Tian-Todorov's smoothness principle の適用について

赤堀隆夫（姫路工業大・理）・　宮嶋公夫（鹿児島大・教養）

compact Kähler manifold の変形の場合に、versal 族の smoothness に関して次の定理がある。

<u>定理</u> ([B],[G-M], [K],[R], [Ti], [To])　X を compact Kähler manifold とする。　このとき、$K_X = 1_X \Rightarrow$ X の versal 族（の parameter space）は smooth .

正規孤立特異点 (V,o) の変形において、この定理の analogy を考えてみたい。
$U := V \setminus o$ とすると、$\dim_{\mathbb{C}}(V,o) \geq 4$, $\mathrm{depth}(V,o) \geq 3$ の仮定の下に、(V,o) の versal 族と U の versal 族（開多様体の versal 族については少し説明が必要だが）とは一致する（cf. [M]）ので、以下 U の変形において Bogomolov-Tian-Todorov's smoothness theorem の analogy を考えることにする。

単純な analogy は成り立たない。

<u>藤木の反例</u>（cf. [A-M]）　Z をその倉西族が smooth でない代数多様体で $K_Z > 0$ なるものとする。　(V,o) を $(K_Z^{-1}$, 0-section) の contraction から得られる正規孤立特異点とすると、$K_U = 1_U$ だが U の versal 族は smooth ではない。

Bogomolov-Tian-Todorov's smoothness theorem は次の principle に基づいている：

(1) $K_X = 1_X$ ならば、non-vanishing 正則 (n,0)-form を使って、X 上の概複素構造の可積分条件は通常の (n-1,1)-form に関する微分方程式に変換される。

(2) 変換された微分方程式は、$A^{n-1,2}_X$ での $\partial\bar{\partial}$-lemma を使って、障害なしに解ける。

$\partial\bar{\partial}$-lemma は compact Käler manifold 上の pure Hodge structure によって保証されているが、U 上には pure Hodge structure は存在しない（mixed Hodge structure の存在が知られている）ので $\partial\bar{\partial}$-lemma は成り立たない。　この場合でも、（mixed Hodge structure の影響から） versal 族の精密な構造が捉えられないかというのがこの研究の動機であった。

[A] によって、$U := \overline{X} \setminus (E \cup H)$, $\overline{X}$ は代数多様体, H は超平面, E は除外集合で $E \cap H = \phi$ と仮定してよい。　$X_0 := \overline{X} \setminus H$, $X_\infty := \overline{X} \setminus E$ とおくと、U 上の mixed Hodge structure は X_0 上と X_∞ 上の mixed Hodge structure から引き起こされる（cf. [D]）。

X_0 上と X_∞ 上の Hodge structure に関して、それぞれ、[O1], [O2] を使えば、次が得られる。

<u>命題</u>

（１） X_0 上では、$A^{p,q}$ $(p+q\geq n+1)$ で $\partial\bar{\partial}$-lemma が成り立つ。

（２） X_∞ 上では、$A^{p,q}$ $(p+q\leq n-2)$ で $\partial\bar{\partial}$-lemma が成り立つ。

この影響として、次の結果が得られる。

<u>定理</u>

（１） X_0 上に non-vanishing meromorphc (n,0)-form で極 $D\subseteq E$ を持つものが存在すれば、U の変形の versal 族は $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}\left(H^1(X_0, \Theta_{X_0}(-D)) \to H^1(U, \Theta_U)\right)$-次元の多様体を含む。

（２） X_∞ 上に closed meromorphc (2,0)-form $\omega=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_{ij}dz_i\wedge dz_j$ で (ω_{ij}) が U 上正則な逆行列を持つものが存在するとすると、U の変形の versal 族は $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}\left(H^1(X_\infty, \Omega^1_{X_\infty}) \to H^1(U, \Omega^1_U) \cong H^1(U, \Theta_U)\right)$-次元の多様体を含む。

References

[A-M] Akahori, T. and Miyajima, K.: A note on the analogy of the Tian-Todorov type theorem on deformations of CR-structures, Preprint 1992.

[A] Artin, M.: Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), 23-58.

[B] Bogomolov, F.A.: Hamiltonian Kähler manifolds, Dokl. Akad. Nauk SSSR **243** (1978), 1462-1465.

[D] Durfee,A.H.: Mixed Hodge structures on punctured neighbourhoods, Duke Math. J. **50** (1983), 1017-1040.

[G-M] Goldmann, W. and Millson, J.J.: The homotopy invariance of the Kuranishi space, Ill. J. of Math. **34** (1990), 337-367.

[K] Kawamata, Y.: Unobstructed deformations - a remark on a paper of Z. Ran, to apper in J. Alg. Geom..

[M] Miyajima, K.: Deformations of strongly pseudo-convex CR structures and deformations of normal isolated singularities, in Complex Analysis, ed. by Diederich, K. (1991), pp. 200-204.

[O1] Ohsawa, T.: A reduction theorem for cohomology groups of very strongly q-convex Kähler manifolds, Inv. math. 63 (1981), 335-354.

[O2] --------- : Hodge spectral sequence on compact Kähler spaces, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. **23** (1987), 265-274.

[R] Ran, Z.: Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle, Preprint 1990.

[Ti] Tian, G.: Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric, in Mathematical Aspects of String Theory, ed. by Yau,S.-T. (1988), pp.629-646.

[To] Todorov, A.N.: The Weil-Petersson geometry of the moduli space of SU(n≥3) (Calabi-Yau) Manifolds I, Commun. Math. Phy. **126** (1989), 325-346.

30. Quasiconformal stability of Kleinian orbifords

松崎克彦　　東工大・理

A Kleinian group G is a discrete subgroup of $PSL(2,\mathbf{C})$, which is also regarded as an isometry group acting on the upper half space $H^3=\{(x,y,t) \mid t>0\}$ properly discontinuously. The quotient space $M_G=H^3/G$ admits hyperbolic orbifold structure: when G contains torsion elements, M_G has the exceptional set (branch loci) where the hyperbolic structure is singular. We remove the tubular neighborhoods of the branch loci and the projection of the cusped horoballs from M_G and take the intersection with the convex hull of M_G. The resulting topological manifold with boundary is denoted by $(M_G)_0$.

Combined with the finiteness theorem of Ahlfors (cf. [**4**]) and Sullivan (cf.[**2**]), a recent work of Feighn-Mess [**3**] on finiteness of branch loci can be summalized as;

> $\partial(M_G)_0$ *consists of a finite number of connected components which are topologically finite.*

For a finitely generated group $\Gamma=\langle\gamma_1,\cdots\gamma_m\rangle$, we define $Hom(\Gamma, PSL(2,\mathbf{C}))$ as the set of all $PSL(2,\mathbf{C})$-representations of Γ. It is regarded as an analytic set in $V_\Gamma= (PSL(2,\mathbf{C}))^m$. In the case where Γ is a Kleinian group, we further define an analytic subset of $Hom(\Gamma, PSL(2,\mathbf{C}))$ as

$$Hom_p(\Gamma, PSL(2,\mathbf{C}))=\{\theta \in Hom(\Gamma, PSL(2,\mathbf{C})) \mid \mathrm{tr}^2\theta(\gamma)=4 \text{ for } \forall\gamma : \text{parabolic }\}.$$

We say a finitely generated Kleinian group G is quasiconformally stable if there exists an open neighborhood of U ($\subset V_G$) of the identity representation $\iota : G \to G \subset PSL(2,\mathbf{C})$, such that each point of $Hom_p(\Gamma, PSL(2,\mathbf{C}))\cap U$ is induced by global quasiconformal deformation.

Marden [**5**] proved that geometrically finite torsion-free Kleinian groups are quasiconformally stable. It is easily generalized to the case with torsion ([**7**]). Conversely, Sullivan [**9**] showed that quasiconformally stable Kleinian groups without torsion are geometrically finite. In this note, by developing the Sullivan's argument on $(M_G)_0$ for a Kleinian group G possibly with torsion, we shall give a proof to the following result:

Theorem. *Quasiconformally stable Kleinian groups are geometrically finite even if they contain elliptic elements. Thus, quasiconformal stability and geometric finiteness are equivalent.*

References

[**1**] Culler, M. and P.B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*. Ann. of Math. **117** (1983), 109-146.

[**2**] Feighn, M. and D. McCullough, *Finiteness conditions for 3-manifolds with boundary*. Amer. J. Math. **109** (1987), 1155-1169.

[**3**] Feighn, M. and G. Mess, *Conjugacy classes of finite subgroups of Kleinian groups*. Amer. J. Math. **113** (1991), 179-188.

[**4**] Kulkarni, R.S. and P.B. Shalen, *On Ahlfors' finiteness theorem*. Advances in Math. **76** (1989), 155-169.

[**5**] Marden, A., *The geometry of finitely generated Kleinian groups*. Ann. of Math. **99** (1974), 383-462.

[**6**] Maskit, B., *Kleinian groups*. Springer Verlag, 1988.

[**7**] Matsuzaki, K., *Geometric finiteness, quasiconformal stability and surjectivity of the Bers map for Kleinian groups*. Tôhoku Math. J. **43** (1991), 327-336.

[**8**] McCullough, D., *Compact submanifolds of 3-manifolds with boundary*. Quart. J. Math. Oxford **37** (1986), 299-307.

[**9**] Sullivan, D., *Quasiconformal homeomorpisms and dynamics II : Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups*. Acta Math. **150** (1985), 243-260.

特別講演

Klein群とhyperbolic geometry

大鹿 健一　　　東工大理

本講演では、Klein群の研究にhyperbolic geometryを中心とする幾何学的手法が有効に使われ得ることを、私自身の結果を交え乍ら話すことにする。

§序論

Klein群とは $PSL_2\mathbb{C}$ の離散部分群のことである。$PSL_2\mathbb{C}$ は S^2 の自己等角同型写像の全体であると同時にhyperbolic 3-space $\mathbb{H}^3$ の向きを保つisometries全体とも思える。Klein群 Γ は一般にtorsionをもつこともあるが、Selbergの定理により、そのようなものについても有限指数の部分群 $\Gamma' \subset \Gamma$ （$|\Gamma/\Gamma'| < \infty$）でtorsion-freeなものがある。Klein群の様々な問題を考える時に有限被覆をとることは多くの場合問題に影響を与えない。従って以降Klein群はtorsion freeのもののみを考えることにする。するとKlein群 Γ について $\mathbb{H}^3/\Gamma$ はhyperbolic 3-mfdになる。

ここに於いてKlein群について3次元多様体論や、hyperbolic geometryの手法が使えることになる。

3次元多様体論の中で特にKlein群論で有効にはたらくものとして次のcore theoremがある。

Th: (P.Scott McCullough)

Mを3次元多様体で$\pi_1(M)$は有限生成であるとする。このときMのコンパクト部分多様体$C(M)$で、包含写像がホモトピー同値となるものが存在する。これをMのcoreという。Mが境界をもつときは$C(M)$を、$(C(M), C(M)\cap\partial M)$からの包含写像が対としてのホモトピー同値になるようにとれる。これをrelative coreという。

後述するように、Klein群の研究に於いてはhyperbolic 3-manifold $\mathbb{H}^3/\Gamma$ の"end"を調べることが重要である。その時の足がかりとなるのが上のcoreである。

上でπ_1が有限生成という条件はΓが有限生成という条件に対応する。

さてS^2は$\mathbb{H}^3$のideal boundaryと思える。(S^2_∞とかく。)

ΓをKlein群とするとき、$\overline{\{\gamma\text{の fixed pt.} \mid \gamma\in\Gamma\}}$ (￣は閉包)

のことをΓの極限集合といいΛ_Γとかく。Λ_Γの補集合をΩ_Γとかく。ΓはΩ_Γに properly discontinuous に作用する。Γが有限生成ならΩ_Γ/Γは有限型Riemann面。

$\Lambda_\Gamma \subset S^2_\infty \subset \mathbb{H}^3$と思った時 Λ_Γの convex hullを$\mathcal{C}(\Lambda_\Gamma)$と表す、$\Lambda_\Gamma$は$\Gamma$不変なので$\mathcal{C}(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$が考えられ，これは$\mathbb{H}^3/\Gamma$の部分多様体になる。$\Gamma$が有限生成で$\mathcal{C}(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$（これを$\mathbb{H}^3/\Gamma$の convex core という）が有限体積の時，Γは幾何学的有限 (geometrically finite)であるという。この時 convex coreは前出の意味での core になっている、

§ Klein群の擬等角変形とその極限

measurable function μが$\|\mu\|_\infty < 1$をみたすとき，S^2の homeomorphism $w : S^2 \to S^2$で Beltrami方程式 $w_{\bar{z}} = \mu w_z$ をみたすものを擬等角写像 (quasi-conformal map) という。Γが Klein群でμとして，$\mu \circ \gamma\, \overline{\gamma'}/\gamma' = \mu$ を満たすものを考えると Beltrami方程式 w^μについて $w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1}$は再び Klein群になる。これを$\Gamma$の擬等角変形という。$\Gamma$を有限生成 Klein群とする時 Bers-Maskit-Sullivan

等により，Γの擬等角変形全体を等角写像のconjugateでうつり合うものを同一視した空間$QH(\Gamma)$はTeichmüller空間$\mathcal{T}(\Omega_\Gamma/\Gamma)$とhomeoであることがわかっている。
さて，より一般にKlein群Γと代数的に同型なKlein群全体が（等角同型を同一視して）作る空間を$AH(\Gamma)$と表す。$QH(\Gamma)$は$AH(\Gamma)$の部分空間と看做せる。$\overline{QH(\Gamma)}$を$QH(\Gamma)$の$AH(\Gamma)$の位相に関する閉包とする。

Klein群の構成の基本的な方法として，既に知られているKlein群Γについて$\overline{QH(\Gamma)}-QH(\Gamma)$の群を作ることがある。

例えば最初に作られた幾何学的無限群の体系的な構成法として，Bers [Be] による次の例がある。Γを第1種Fuchs群とする。すると，$QH(\Gamma)\cong\mathcal{T}(S)\times\mathcal{T}(\bar{S})$，但し$S$は$\pi_1(S)$がFuchs群$\Gamma$と同型であるようなRiemann面である。ここでparametrization $\mathcal{T}(S)\times\mathcal{T}(\bar{S})$に関して，$(g,h_i)$，$h_i$は$\mathcal{T}(\bar{S})$で無限遠に行く列を考える。すると部分列をとれば$(g,h_i)$は$AH(\Gamma)$で収束する。([Be] 参照) この極限に現われる群はBersのboundary groupと呼ばれるもので，generic

には geometrically infinite 群になっている。又、Thurston の double limit theorem (Thurston [Th2]) によると、(g_i, h_i) で g_i の $\overline{\mathcal{T}(S)}$ に於ける極限 (Thurston compactification) となる projective lamination μ と h_i のそれ ν が $S-(\mu\cup\nu)$ が単連結な成分から成っているような時、(g_i, h_i) は $AH(\Gamma)$ で収束する。

以上の2つはいずれも Γ が Fuchs 群の時の $\overline{QH(\Gamma)}-QH(\Gamma)$ の元の構成法である。より一般な群については拙論文 ([Oh1], [Oh2]) の収束定理を使うことによって $\overline{QH(\Gamma)}-QH(\Gamma)$ の元が多く構成できる。但し上記の定理は $\mathbb{H}^3/\Gamma$ の core が boundary-irreducible なとき (即ち Γ が indecomposable なとき) にしか適用できない。Γ が decomposable なときに、$\overline{QH(\Gamma)}-QH(\Gamma)$ の元を作る例は例えば、Maskit [Mk] によるものがあるが、一般的な状況下では私の収束定理に相当するものが成立するかどうかはわかっていない。

$\overline{QH(\Gamma)}-QH(\Gamma)$ の元は Klein 群の中で重要なものを全て含むと考えられる。実際次の予想がある。

Bers - Thurston の予想　全ての有限生成 Klein 群はある幾何学的有限群 Γ について $\overline{QH(\Gamma)}$ に含まれるであろう。

§ geometrically tame 群

geometrically finte 群はその定義から, $\mathbb{H}^3/\Gamma$ の各 end はその近傍に閉測地線を含まず位相的にはその end が面する convex core の境界の曲面 S について $S\times\mathbb{R}$ になる。

さてでは geometrically infinite 群については end の様子はどうなっているのだろうか。これは一般には未だ解決されていない問題で次の章で述べる Ahlfors 予想と密切な関係がある。しかし Γ が indecomposable, 即ち core が ∂ - irreducible の場合には Bonahon [Bo] によって次のことがわかっている。

Γ を indecomposable として $\mathbb{H}^3/\Gamma$ の end e (正確には $\mathbb{H}^3/\Gamma$ から cusp の近傍を除いたものの end) が geometrically infinite だとする。S を e が面する $\mathbb{H}^3/\Gamma$ の core の境界の曲面

とする。すると S 上の simple closed curves の列 $\{\gamma_i\}$ で γ_i と homotopic な $\mathbb{H}^3/\Gamma$ の closed geodesic γ_i^* が $i\to\infty$ で end e に行くようなものがある。(このような時 end e は simply degenerate 又は geometrically tame という。)(但ここで S が incompressible であることが重要)

これは別の見方をすると、S に homotopic な pleated surfaces (1次元的にのみ折れ曲がっていて他は totally geodesic な surface) の列で e に行くものがあるということである。

Γ が decomposable の時にこの概念を拡張しようとすると straight forward には行かない。(詳しくは [Ohp] 参照のこと)

§ Ahlfors 予想

"Γ が有限生成 Klein 群のとき Λ_Γ は S^2 全体か Lebesgue measure 0 であろう" というのが Ahlfors 予想である。([Ah]) Ahlfors 自身は Γ が幾何学的有限なら Ahlfors 予想が成立することを示した。Thurston は ([Th]) 全ての end が geometrically finite 又は geometrically tame なら Ahlfors 予想が成立することを示した。Bonahon の結果により Γ が indecomposable なら上の仮定を満たすから、Ahlfors 予想が成立する。

さてこれらの場合 Ahlfors 予想の成立がどのようにして示されるのかの概略を見てみよう。$\Lambda_\Gamma \subset S^2_\infty$ が 0 でも 4π でもない measure をもったとする。すると $\mathbb{H}^3$ 上で Λ_Γ の visual measure を与える関数 $v_\Gamma : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{R}$ が定義される。これは調和関数で Λ_Γ の measure が 0 でも full でもないことにより、non-constant である。又 Λ_Γ は Γ-invariant であるから v_Γ も Γ-invariant で、従って $\mathbb{H}^3/\Gamma$ の調和関数を導く。実は geometrically finite や tame では non-trivial な調和関数が $\mathbb{H}^3/\Gamma$ 上には存在しないことが示されるのである。

Γ が decomposable かつ geometrically infinite の場合の Ahlfors 予想は未解決である。一般的な場合の解決には到っていないが、私は次のことを証明した（[Ohp]）

Thm ([Ohp]) Γ が parabolic 元をもたず, geometrically finite 群の擬等角変形の代数的極限 (i.e. $\overline{QH(G)}$ (G geom. finite) の元) なら Ahlfors 予想は正しい。

これを Bers-Thurston 予想と較べてみると, parabolic 元をもたない場合は Ahlfors 予想は Bers-Thurston 予想に帰着されることがわかる。

§ その他

Klein 群の列について代数的極限 ($AH(\Gamma)$ の極限) 以外に幾何学的極限という概念がある。これと代数的極限の一致・不一致を調べるのにも hyperbolic geometry は有効である。これについては本講演で時間に余裕があれば触れることにし, ここでは紙面の都合上詳述を避ける。
詳しくは ([Oh3] [Oh4] 参照のこと)。

以上

文献

[Ah] Ahlfors, L. Fintely generated Kleinian groups Am. J. Math 86 (1964)

[Be] Bers, L. On boundaries of Teichmüller spaces and Kleinian groups I. Ann. Math 91 (1970)

[Bo] Bonahon, F Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, Ann. Math. 124 (1986)

[Oh1] Ohshika, K On limits of quasi-conformal deformations of Kleinian groups, Math. Z. (1989)

[Oh2] —— Limits of geometrically tame Kleinian groups Inv. Math. 99 (1990)

[Oh3] —— Geometric behaviour of Kleinian groups on the boundaries for deformation spaces Quart. J. Math Oxford 43 (1992)

[Oh4] —— Strong convergence of Kleinian groups and Carathéodory convergence of domains of discontinuity Math. Proc. Cambridge Phil. Soc 112 (1992)