日　本　数　学　会

1992年度秋季総合分科会

函　数　論　分　科　会
講　演　ア　ブ　ス　ト　ラ　ク　ト

1992年10月

於
名　古　屋　大　学

函 数 論

9.00～12.00

1	西本勝之（日大工）*	On the fractional calculus of functions $(a-z)^{q-1}$ and $\log(a-z)$	15
2	尾和重義（近畿大理工）	Univalency of certain analytic functions	15
3	尾和重義（近畿大理工） W. Ma (Univ. Cincinnati)	Coefficient estimates for strongly starlike functions	15
4	石崎克也（東京工高専）	On the complex oscillation of the third order linear differential equations	15
5	谷口彰男（日大文理）	Results on the multivalent functions	15
6	邊斗源（群馬大工）	Relationship between the analytic solutions of the heat equation	10
7	邊斗源（群馬大工）	Inversions of Hermite semigroup	15
8	斎藤三郎（群馬大工）	Inequalities for the solutions of the heat equation	15
9	渡辺ヒサ子（お茶の水女大理）	熱方程式の境界値問題	15
10	黒川隆英（鹿児島大教養）	Singular difference integrals と Riesz potential 空間について	15
11	池上輝男（阪市大理）	ポテンシャルの積分表示について	15

13.00～16.50

12	石村隆一（千葉大教養）	Convolution 方程式の特性集合についての一注意	10
13	藤解和也（東京理大理工）	対数的導函数とある斉次微分多項式	15
14	藤解和也（東京理大理工）	微分多項式 $g''g-ag'^2$ の零点について	15
15	戸田暢茂（名工大工）	Some notes on the oscillation theory for higher order linear differential equations with entire coefficients	15
16	西尾昌治（阪市大理） 鈴木紀明（名大教養）	Minimal thickness and uniqueness of kernel functions for the heat equation	15
17	大貝聖子（明治学園） 梶原壌二（九大理） 金鍾晋（全北大）* 李琳（済南電視大） 西原賢（福岡工大工） 本田竜広（有明工高専）	Hilbert 空間と Hilbert-Schmidt 型写像の列の極限空間の領域に対する核関数について	15
18	梶原壌二（九大理） 金鍾晋（全北大）* 李琳（済南電視大） 渡辺英晴（九大理）	トロイダル多様体上の領域に対するスペクトルについて	15
19	真次康夫（信州大理） 山田尊彦（信州大理）	On the isometries of $H_E^\infty(B)$	15
20	清水悟（東北大教養）	チューブ領域の自己同型	15
21	清水悟（東北大教養）	有界な底をもつチューブ領域の自己同型と同値性	15
22	城崎学（阪府大工）	有理形関数の一意性定理の拡張について	10
23	藤本坦孝（金沢大理）	極小曲面のガウス写像に対する一意性定理	15
24	大沢健夫（名大理） 遠藤浩太郎（東芝情技研）	Hodge 構造の分類空間の境界について	5
25	鈴木誠（広島大理）	双曲的埋め込みを持つ完備双曲的複素解析空間への有理型写像について	15
26	竹腰見昭（阪大教養）	A degenerate metric induced on the dual of nef line bundles	10
27	竹腰見昭（阪大教養）	Torsion free theorems for higher direct image sheaves of nef vector bundles	15

函数論特別講演

大沢健夫（名大理）　Cheeger-Goresky-MacPherson 予想の証明 …… (17.00〜18.00)

8.45〜12.00

28	山下愼二（都立大理）	Schwarz-Pick の補題もう一歩	10
29	山下愼二（都立大理）	Poincaré 密度の比較	15
30	栗林暲和（中大理工） 大森昭治（東京農大三高）	Riemann 面の自己同型群について	15
31	松井邦光（同志社大工）	On the convergence of the sequence of the Shiba's behavior spaces	15
32	神　直人（学習院大理）	On two-sheeted covering surfaces of the unit disc	15
33	堀内龍太郎（同志社大工） 柴　雅和（広島大理）	トーラスとリーマン球面を交差的に縫い合わせて得られる新しいトーラスのモジュラス	15
34	西川金二郎（近江八幡高） 米谷文男（京都工繊大工芸）	Moduli of ring domains obtained by a conformal welding	10
35	古沢治司（金沢女短大）	Commutators in discrete groups	15
36	神谷茂保（岡山理大工）	$U(1, n; C)$の離散部分群の point of approximation について	15
37	佐藤宏樹（静岡大理） 山田竜二（修善寺工高）	Extreme Kleinian groups について	15
38	大鹿健一（東工大理）*	幾何学的有限 Klein 群の代数的極限についての Ahlfors 予想の成立	20
39	中西敏浩（静岡大理）*	Punctured surface の Teichmüller 空間について	15
40	志賀啓成（東工大理） 谷川晴美（名大理）*	Grunsky の不等式とその Teichmüller 空間への応用	15

13.00〜13.45

41	大津賀　信（学習院大理）	Tube の extremal length について	15
42	大津賀　信（学習院大理）	Gončar の問題について	15
43	大津賀　信（学習院大理）	Extremal distance の評価の応用	15

函数論特別講演

後藤泰宏（京大理）　2 次元 BMO 空間の等角不変性と quasi-hyperbolic metric について ………… (14.00〜15.00)

1. On the fractional calculus of functions

$(a-z)^{q-1}$ and $\log(a-z)$

by

Katsuyuki Nishimoto

Abstract

Many papers and books on fractional calculus have been published by the author already ([1]~[9]). In this paper, fractional calculus of functions $(a-z)^{q-1}$, $\log(a-z)$ and $\log\{(z-a)(z-b)\}$ etc. are discussed.

§0. Introduction (Definition of Fractional Calculus)

(I) Definition. ([1], [5] Vol.1)

Let $D=\{\underset{-}{D}, \underset{+}{D}\}$, $C=\{\underset{-}{C}, \underset{+}{C}\}$,

$\underset{-}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $-\infty+i\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{+}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $\infty+i\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{-}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{-}{C}$, $\underset{+}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{+}{C}$.

(Here D contains the points over the curve C.)

Moreover, let $f=f(z)$ be a regular function in D $(z\in D)$,

$$f_\nu=(f)_\nu={}_C(f)_\nu=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\,d\zeta \qquad (\nu\notin \mathbb{Z}^-), \tag{1}$$

$$(f)_{-m}=\lim_{\nu\to -m}(f)_\nu \qquad (m\in\mathbb{Z}^+), \tag{2}$$

where

$-\pi\leq\arg(\zeta-z)\leq\pi$ for $\underset{-}{C}$, $0\leq\arg(\zeta-z)\leq 2\pi$ for $\underset{+}{C}$,

$\zeta\neq z$, $z\in\mathbb{C}$, $\nu\in\mathbb{R}$, Γ; Gamma function,

then $(f)_\nu$ is the fractional differintegration of arbitrary order ν (derivatives of order ν for $\nu>0$, and integrals of order $-\nu$ for $\nu<0$), with respect to z, of the function f, if $|(f)_\nu|<\infty$.

Note 1. Consider the principal value for many valued function f.

Note 2. For the complex ν, we consider the principal value for our convenience.

Note 3.

$$f_\nu=(f)_\nu \text{ is } \begin{cases} \text{derivative} & \text{for } \mathrm{Re}(\nu)>0, \\ \text{original} & \text{for } \nu=0, \\ \text{integral} & \text{for } \mathrm{Re}(\nu)<0, \end{cases}$$

for $\nu\in\mathbb{C}$, if $|(f)_\nu|<\infty$.

And in case of $\mathrm{Re}(\nu)=0$, f_ν is only formal differintegration regardless of $\mathrm{Im}(\nu)\gtrless 0$. That is, we have no derivative and integral for pure imaginary ν.

(II) The set $\mathcal{F}$

We call the function $f = f(z)$ such that $|f_\nu| < \infty$ in D as fractional differintegrable function by arbitrary order ν and denote the set of them with symbol $\mathcal{F}$. Then we have

$$|f_\nu| < \infty \Longleftrightarrow f \in \mathcal{F} \qquad (\text{in D}).$$

(III) Lemmas

We have the following lemmas ([5]Vol.1, pp46-75, [5]Vol.2, pp129-142, [5]Vol.4, pp6-41)

Lemma 1. Let $u = u(z) \in \mathcal{F}$ and $v = v(z) \in \mathcal{F}$ respectively, then

$$(u \cdot v)_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n+1)} u_{\alpha-n} v_n \tag{3}$$

formally.

Lemma 2. We have ([5]Vol.1, p.28)

$$(z^\beta)_\alpha = e^{-i\pi\alpha} \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(-\beta)} z^{\beta-\alpha} \quad \text{for } |\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(-\beta)| < \infty. \tag{4}$$

Note. We calculate as (for example)

$$\frac{\Gamma(-1)}{\Gamma(-2)} = \lim_{\nu\to 0} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu-2)} = \lim_{\nu\to 0} \frac{\Gamma(\nu-2+1)}{\Gamma(\nu-2)} = \lim_{\nu\to 0} \frac{(\nu-2)\Gamma(\nu-2)}{\Gamma(\nu-2)} = -2 \tag{5}$$

However we calculate this as $\Gamma(-1)/\Gamma(-2) = \Gamma(1-2)/\Gamma(-2)$ $= (-2)\Gamma(-2)/\Gamma(-2) = -2$ for our convenience, if $|\Gamma(-\beta)| = |\Gamma(\alpha-\beta)| = \infty$ in (4), using the relationship $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

§2. Fractional calculus of functions $(a - z)^{q-1}$.

Theorem 1. We have

$$((a-z)^{q-1})_{-p} = \frac{\Gamma(1-q-p)}{\Gamma(1-q)} (a-z)^{p+q-1} \qquad \left(\left| \frac{\Gamma(1-q-p)}{\Gamma(1-q)} \right| < \infty \right) \tag{1}$$

where $z \in \mathbb{C}$, and $p (\in \mathbb{R})$, $q (\in \mathbb{R})$ and $a (\in \mathbb{C})$ are constants, and $z \neq a$.

§3. Fractional calculus of $\log(a - z)$

Theorem 1. We have

(i) $$(\log(a-z))_\nu = -\Gamma(\nu)(a-z)^{-\nu} \tag{1}$$

$$= -e^{-i\pi\nu}\Gamma(\nu)(z-a)^{-\nu} \qquad (z \neq a) \tag{2}$$

(ii) $$(\log(a-z))_\nu = (\log(z-a))_\nu \tag{3}$$

(iii) $$(\log\{(z-a)(z-b)\})_\nu = -e^{-i\pi\nu}\Gamma(\nu) \frac{(z-b)^\nu + (z-a)^\nu}{(z-a)^\nu (z-b)^\nu} \qquad (z \neq a, b) \tag{4}$$

(iv) $$(\log(z^2-a^2))_\nu = -e^{i\pi\nu}\Gamma(\nu) \frac{(z+a)^\nu + (z-a)^\nu}{(z^2-a^2)^\nu} \qquad (z \neq \pm a) \tag{5}$$

(v) $$(\log(\frac{z-a}{z-b}))_\nu = -e^{-i\pi\nu}\Gamma(\nu) \frac{(z-b)^\nu - (z-a)^\nu}{(z-a)^\nu (z-b)^\nu} \qquad \begin{pmatrix} z \neq a, b \\ a \neq b \end{pmatrix} \tag{6}$$

where $|\Gamma(\nu)| < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}$, and a and b are given constants.

2 UNIVALENCY OF CERTAIN ANALYTIC FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}(n)$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\})$$

which are analytic in the unit disk $\mathbb{U}$.

For n = 1, Ozaki and Nunokawa (Proc. Amer. Math. Soc. 33(1972), 392 - 394) have shown that

LEMMA I. If $f(z) \in \mathcal{A}(1)$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{f(z)^2}{z^2 f'(z)} \right\} \geqq \frac{1}{2} \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

then f(z) is univalent in $\mathbb{U}$.

THEOREM I. If $f(z) \in \mathcal{A}(n)$ satisfies $f(z)f'(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$ and

$$\mathrm{Re}\left\{ \alpha \frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \beta \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(\alpha \geqq 0)$ and β $((2\alpha - n)/2 \leqq \beta < \alpha)$, then

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{f(z)^{\alpha}}{z^{\alpha} f'(z)} \right\} > \frac{n}{n + 2\alpha - 2\beta} \qquad (z \in \mathcal{U}).$$

COROLLARY 1. If $f(z) \in \mathcal{A}(n)$ satisfies $f(z)f'(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$ and

$$\operatorname{Re}\left\{ 2\frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \frac{4 - n}{2} \qquad (z \in \mathcal{U}),$$

then $f(z)$ is univalent in $\mathcal{U}$.

COROLLARY 2. If $f(z) \in \mathcal{A}(n)$ satisfies $f(z)f'(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$ and

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \beta \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some β $((2-n)/2 \leqq \beta < 1)$, then $f(z)$ is starlike in $\mathcal{U}$.

COROLLARY 3. If $f(z) \in \mathcal{A}(n)$ satisfies $f(z)f'(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$ and

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} < \beta \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some β $(0 < \beta \leqq n/2)$, then $f(z)$ is close-to-convex in $\mathcal{U}$.

3

Coefficients Estimates for Strongly Starlike Functions

Shigeyoshi Owa — Kinki University

Wancang Ma — University of Cincinnati

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are holomorphic and univalent in the unit disk $\mathcal{U}$. If $f(z)$ in $\mathcal{A}$ satisfies

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some α $(0 < \alpha \leqq 1)$, then $f(z)$ is said to be strongly starlike of order α in $\mathcal{U}$. We denote by $S^*(\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which are strongly starlike of order α in $\mathcal{U}$.

Theorem 1. If $f(z) \in S^*(\alpha)$, then

$$|a_4| \leqq \begin{cases} \dfrac{2}{3}\alpha & (0 < \alpha \leqq \sqrt{2/17}\,) \\[2ex] \dfrac{2\alpha(1 + 17\alpha^2)}{9} & (\sqrt{2/17} \leqq \alpha \leqq 1). \end{cases}$$

When $0 < \alpha < \sqrt{2/17}$, equality holds if and only if $f(z)$ is $K_{\alpha 3}(z)$ or one of its rotations.

The inequality becomes equality if and only if $f(z)$ is equal to $K_\alpha(z)$ or one of its rotations when $\sqrt{2/17} < \alpha \leqq 1$. If $\alpha = \sqrt{2/17}$, equality holds for $K_\alpha(z)$, $K_{\alpha 3}(z)$ and their rotations.

THEOREM 2. Let $f(z) \in S^*(\alpha)$ and

$$F(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$$

be the inverse function of $f(z)$. Then

$$|A_2| \leqq 2\alpha,$$

$$|A_3| \leqq \begin{cases} 5\alpha^2 & (1/5 \leqq \alpha \leqq 1) \\ \alpha & (0 < \alpha \leqq 1/5) \end{cases}$$

and

$$|A_4| \leqq \begin{cases} \dfrac{2\alpha(1 + 62\alpha^2)}{9} & (1/\sqrt{31} \leqq \alpha \leqq 1) \\ \dfrac{2}{3}\alpha & (0 < \alpha \leqq 1/\sqrt{31}). \end{cases}$$

4. **On the complex oscillations of the third order linear differential equations**

石崎　克也

東京工高専

本講演では、$\mathbb{C}$ 上で線型３階の微分方程式

$$(1) \qquad w''' + 2A(z)w' + (A'(z) + b(z))w = 0,$$

ここで $A(z)$, $b(z)$ は有理型函数、の有理型解の位数と zero と pole の収束指数を調べることについて報告する。有理型函数 f の位数は $\sigma(f)$, zero の収束指数は $\lambda(f)$ で表すことにする。この分野の論文はかなり多くあって (e.g.[1])、特に２階の方程式についてのものは多い。しかし、高階なものも含めて係数が有理型のもので単に整函数のもののアナロジーからできるものを除けば、[2] などを含め少ないと思われる。[4] の中に (1) の形が登場している。Langley は (1) の基本解のロンスキャンが定数になることを用いていくつか結果を出している。ここでは、(1) に対する adjoint 方程式

$$(2) \qquad w''' + 2A(z)w' + (A'(z) - b(z))w = 0.$$

を用いた結果を紹介する。[3] にあるように、(1) が基本解 $\{f_1, f_2, f_3\}$ を持つとすると $g_1 = W(f_2, f_3)$, $g_2 = W(f_3, f_1)$, $g_3 = W(f_1, f_2)$ は (2) の基本解をなす。この性質に基づいて議論を進めることにより、位数に関して次の結果を得る。

定理 1: (1) が基本解 $\{f_1, f_2, f_3\}$ を持つとする。仮に、$\sigma(f_1) > \sigma(f_2)$ ならば、

$$(3) \qquad \sigma(f_1) = \sigma(f_3) = \sigma(g_1) = \sigma(g_3) \geqq \sigma(g_2).$$

この定理から (1) が基本解を持てば (1) および (2) の非自明解の位数は異なっても２つしかなく、小さい方は特定できることが示される。ここで大きい方を σ^* と書くことにする。収束指数に関しては

定理 2: (1) が基本解 $\{f_1, f_2, f_3\}$ を持つとする。ある基本解 $\{h_1, h_2, h_3\}$ が存在して

$$\sigma^* = \max_{1 \leqq j \leqq 3} \{\bar{\lambda}(h_j), \bar{\lambda}(1/h_j)\}. \tag{4}$$

定理 2 の証明については次の命題が有用である。

命題: (1) が線型独立な解 f_1, f_2を持つとする。$f = c_1 f_1 + c_2 f_2$ (c_1, c_2 constants), $g = W(f_1, f_2)$ と置けば、

$$\frac{f''}{f} - \frac{f'}{f}\frac{g'}{g} + \frac{g''}{g} = -2A(z). \tag{5}$$

References

[1]. S.B.Bank and I.Laine, *On the oscillation theory of $f'' + Af = 0$ where A is entire*, Trans. Amer. Math. **273** (1982), 351-363.

[2]. S.B.Bank and I.Laine, *On the zeros of meromorphic solutions of second-order linear differential equations*, Comment. Math. Helvetici **58** (1983), 656-677.

[3]. M.Greguš, "Third Order Linear Differential Equations," D.Reidel Publishing Company, Dordrecht Boston Lancaster Tokyo, 1987.

[4]. J.K.Langley, *Some oscillation theorems for higher order linear differential equations with entire coefficients of small growth*, Results in Math. **20** (1991), 517-529.

Department of Mathematics Tokyo National College of Technology, 1220-2 Kunugida-cho Hachioji, Tokyo 193, Japan

5 Results on the multivalent functions

谷口 彰男　　日大 文理

$n, p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $U = \{z : |z| < 1\}$ に対し、~~関数族~~

$$A_p(n) = \{f : f(z) = z^p + \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k \text{ は } U \text{ で正則}\}$$

を考える。このとき、次の結果が知られている。

LEMMA A (Ozaki, Ono, Umezawa [1]).

$f \in A_1(1)$, $|f''(z)| \leq 1$ $(z \in U)$ $\Rightarrow$ f: univalent.

LEMMA B (Nunokawa, Kwon, Cho [2]). $p-1 \in \mathbb{N}$

$f \in A_p(1)$, $|f^{(p+1)}(z)| < 2(p!)$ $(z \in U) \Rightarrow f$: p-valent.

今回、これらの lemmas を拡張した結果をえたので、報告する。

THEOREM 1. $n-2 \in \mathbb{N}$, $f \in A_1(1)$,

$|f^{(n)}(z)| + |f^{(n-1)}(0)| + \cdots + |f''(0)| \leq 1$ $(z \in U) \Rightarrow f$: univalent.

COROLLARY 1 (Lemma A の拡張). $n-2 \in \mathbb{N}$,

$f \in A_1(n-1)$, $|f^{(n)}(z)| \leq 1$ $(z \in U) \Rightarrow f$: univalent.

THEOREM 2. $p-1, q-1 \in \mathbb{N}$, $f \in A_p(1)$,

$|f^{(p+q)}(z)| + |f^{(p+q-1)}(0)| + \cdots + |f^{(p+1)}(0)| < 2(p!)$ $(z \in U)$

$\Rightarrow f$: p-valent.

COROLLARY 2 (Lemma B の拡張). $p-1, n \in \mathbb{N}$, $f \in A_p(n)$, $|f^{(p+n)}(z)| \leqq 2(p!)$ $(z \in U) \Rightarrow f$: p-valent.

References

[1] Ozaki S., Ono I., and Umezawa T., On a general second order derivative, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sec. A, 5 (1956), 111-114

[2] Nunokawa M., Kwon O. and Cho N.; On the multivalent functions, Tsukuba J. of Mathematics, 15 (1991), 141-143.

6.

Relationship Between the Aalytic Solutions of the Heat Equation

邊　斗源(ベン　ドケン)　　　群馬大学工学研究科

For a fixed real number a, let $T_a = \{t > 0 | 1 - 2at > 0\}$. Then we consider the heat equation

$$(1) \qquad \Delta u(x,t) = \partial_t u(x,t) \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^n \times T_a$$

with the initial condition

$$(2) \qquad u(x,0) = F(x) \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^n,$$

where $F(x)$ satisfies $\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^2 e^{-ax^2} dx < \infty$. The solution of these equations is expressible in the form

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) h(x-\xi,t) d\xi, \quad (x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T_a)$$

for the heat kernel $h(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}$, and $u(x,t)$ has a holomorphic extension $u(z,t)$ to $\mathbb{C}^n$.

For any fixed $t \in T_a$, the integral transform (1.3) is one-to-one because $\{h(x-\xi,t) | x \in \mathbb{R}^n\}$ is complete in $L^2[\mathbb{R}^n, e^{-a\xi^2} d\xi]$. Hence, for $t', t'' \in T_a$, $u(x,t')$ is determined by $u(x,t'')$, and we are interested in the representation of $u(x,t')$ in terms of $u(x,t'')$.

The result is as follows.

Theorem Let $u(x,t)$ be the solution of the heat equation (1) with the initial condition (2), and let $u(z,t)$ be the holomorphic extension of $u(x,t)$ to $\mathbb{C}^n$. Then, for any pair $(t',t'') \in T_a \times T_a$, $u(z,t')$ is expressible in the form

$$u(z,t') = \{8\pi^2 t''(1-2at'')(t'+t''-4at't'')\}^{-\frac{n}{2}} \iint_{\mathbb{C}^n} u(Z,t'')$$
$$\cdot \exp\left\{-\frac{(\overline{Z}-z)^2 - 4a(t'\overline{Z}^2 + t''z^2)}{4(t'+t''-4at't'')}\right\} \exp\left\{W_{a,t''}(X) - \frac{Y^2}{2t''}\right\} dX dY,$$

where $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n$, and $W_{a,t''}(X) = \dfrac{-aX^2}{1 - 2at''}$.

References

1. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.
2. V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part* I, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 187–214.
3. S. Saitoh, *Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 74–78.
4. ———, "Theory of reproducing kernels and its applications," Pitman Res. Notes in Math. Series 189, Longman Scientific & Technical, England, 1988.
5. ———, *The Weierstrass transform and an isometry in the heat equation*, Applicable Analysis **16** (1983), 1–6.

Mathematica Japonica, to appear.

7

Inversions of Hermite Semigroup

邊 斗源 (ベン ドケン) 群馬大学工学研究科

We let μ be the Gaussian measure $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx$ on $\mathbb{R}$. Then the family of the normalized Hermite polynomials

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

is a complete orthonormal system in $\mathrm{L}^2(\mu)$. For any $f \in \mathrm{L}^2(\mu)$, let $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x)$. If c is nonnegative, then the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-cn} h_n(x)$ converges in $\mathrm{L}^2(\mu)$. Hence we can define the linear operator e^{-cH} on $\mathrm{L}^2(\mu)$ by

$$[e^{-cH}f](x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-cn} h_n(x),$$

and the operator norm of e^{-cH} is 1. The Hermite semigroup on $\mathbb{R}$ means the family $\{e^{-cH} | c \geq 0\}$. More generally, for every complex number c, we consider the operator e^{-cH} which was examined in several papers (for instance, see [4] and [10]).

Let $\mathcal{D}(e^{-cH}) = \{f \in \mathrm{L}^2(\mu) | e^{-cH}f \in \mathrm{L}^2(\mu)\}$. Then we characterize members in $\mathcal{D}(e^{-cH})$.

THEOREM. *For any c with $\Re c < 0$, let $w = e^c$. If f is a C^∞-function in $\mathrm{L}^2(\mu)$, then the followings are equivalent:*

(i) *f is a member in $\mathcal{D}(e^{-cH})$.*

(ii) *The series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1-|w|^4}{4|w|^2}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)\exp\{-\frac{|w|^2x^2}{1+|w|^2}\}\right]\right|^2 dx$$

converges.

(iii) *The integral*

$$\iint_{\mathbb{C}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp\{\frac{(2|w|^2 z - \xi)\xi}{1-|w|^4}\} d\xi \right|^2 \exp\Big[\frac{-2|w|^4}{(1-|w|^4)(|w|^8+|w|^4+1)}$$
$$\cdot \{(|w|^4+|w|^2+1)x^2 - (|w|^4-|w|^2+1)y^2\}\Big] dxdy$$

is finite

REFERENCES

1. T. Ando and S. Saitoh, *Restrictions of reproducing kernel Hilbert spaces to subsets*, Preliminary reports, Suri Kaiseki Kenkyu Jo, Koukyu Roku **743** (1991), 164–187.

2. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

3. V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform.* Part I, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 187–214.

4. W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. **102** (1975), 159–182.

5. N. Hayashi and S. Saitoh, *Analyticity and smoothing effect for the Schrödinger equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique **52** (1990), 163–173.

6. E. Nelson, *The free Markoff field*, J. Functional Analysis **12** (1973), 211–227.

7. S. Saitoh, *Integral transforms in Hilbert spaces*, Proc. Japan Acad. **58** (1982), 361–364.

8. ———, *Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 74–78.

9. ———, "Theory of Reproducing Kernels and its Applications," Pitman Research Notes in Mathematics Series 189, Longman Scientific and Technical, England, 1988.

10. F. B. Weissler, *Two point inequalities, the Hermite semigroup, and the Gauss-Weierstrass semigroup*, J. Functional Analysis **32** (1979), 102–121.

Proceedings of AMS, to appear.

8

INEQUALITIES FOR THE SOLUTIONS OF THE HEAT EQUATION

SABUROU SAITOH, GUNMA UNIVERSITY

In this paper, we shall examine the time dependence of $D^\alpha u(t,x)$ for the solutions $u(t,x)$ of the heat equation

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \tag{1}$$

satisfying the initial condition

$$u(0,x) = F(x) \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^n \tag{2}$$

for $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$ functions F. Here,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

For the functions $D^\alpha u(t,x)$, we obtain naturally the following inequalities.

THEOREM 1. For the solutions $u(t,x)$ of (1) and (2), the derivatives $D^\alpha u(t,x)$ at any fixed x are extensible analytically onto the right half plane $R^+ = \{Re\tau = t > 0\}$ on the complex $\tau = t + i\hat{t}$ plane in the form $D^\alpha u(\tau, x)$.
If $2|\alpha| + n > 2$, then we have the inequality

$$\frac{\pi^{n-1}2^{|\alpha|+\frac{3}{2}n-2}(|\alpha| + \frac{n}{2} - 1)}{\Pi_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j + \frac{1}{2})} \cdot \iint_{R^+} |D^\alpha u(\tau, x)|^2 t^{|\alpha|+\frac{n}{2}-2} dt d\hat{t} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |F(\xi)|^2 d\xi.$$

If $n = 2$ and $|\alpha| = 0$, then we have the inequality

$$2\int_{\mathbb{R}} |u(i\hat{t}, x)|^2 d\hat{t} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |F(\xi)|^2 d\xi,$$

in the sense of Fatou's nontangential boundary values $u(i\hat{t}, x)$ from R^+.
If $n = 1$ and $|\alpha| = 0$, then we have the inequality

$$2\int_{\mathbb{R}} |u(i\hat{t}, x)|^4 d\hat{t} \le \{\int_{\mathbb{R}} |F(\xi)|^2 d\xi\}^2,$$

in the sense of Fatou's nontangential boundary values $u(i\hat{t}, x)$ from R^+.

For the solutions $u(t, x)$ for $L_2(\mathbb{R}^n, e^{a|x|^2}dx)$ initial functions F, we have

THEOREM 2. For any fixed x, the solutions $u(t, x)$ of (1) and (2) for $L_2(\mathbb{R}^n, e^{a|x|^2}dx)$ functions F are extensible analytically in the form $u(\tau, x)$ to the following domain D_a on the τ plane such that

$$\text{for} \quad a > 0, D_a = \{|\tau + \frac{1}{4a}| > \frac{1}{4a}\} \setminus \{t \le -\frac{1}{2a}, \hat{t} = 0\},$$

$$\text{for} \quad a = 0, \qquad D_a = R^+,$$

and

$$\text{for} \quad a < 0, D_a = \{|\tau + \frac{1}{4a}| < \frac{1}{4|a|}\}.$$

In particular, for $n = 1$ we have the inequality

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left|\int_{\mathbb{R}} u(\frac{1}{t + i\hat{t}}, x)\frac{e^{i\xi\hat{t}}}{(t + i\hat{t})^{\frac{1}{2}}}d\hat{t}\right|^2 \frac{\sqrt{\xi}e^{2\xi(t+2a)}}{\cosh(4ax\sqrt{\xi})}d\xi \le \int_{\mathbb{R}} |F(\xi)|^2 e^{a\xi^2} d\xi$$

for any $t > -2a$ and for any point x.

(to appear in, General Inequalities = International Series of Numerical Mathematics 103(1992)

9.

熱方程式の境界値問題

渡辺ヒサ子　　　お茶の水女子大学理

R^{n+1} 内の非円筒状領域 D で、熱方程式に対する境界値問題を、一重層と二重層の混合ポテンシャルを使って解く。すなわち、D は R^{n+1} の三つの境界 B_D, T_D, S_D で囲まれた領域とする。B_D, T_D は、それぞれ、局所的に $t=0$, $t=T$ で表され、S_D は局所的に次の条件を満たす C^1 関数 ϕ で表されているものとする。

$$|\nabla_x \phi(x,t) - \nabla_y \phi(y,s)| \leqq M(|x-y|^{\alpha} + |t-s|^{\alpha/2}).$$

ここで、$0<\alpha<1$ である。

また、σ は側面 S_D 上の面測度とし、$p>1, \lambda>(n+1)/p$ とする。S_D 上の境界関数族としては、集合

$$\Lambda_{\lambda}^{p}(\sigma) := \left\{ f \in L^p(\sigma) ; \iint \frac{|f(X)-f(Y)|^p}{\delta(X,Y)^{\lambda p}} d\sigma(X) d\sigma(y) < \infty \right\}$$

にノルム

$$\| f \| := \| f \|_p + \left(\iint \frac{|f(X)-f(Y)|^p}{\delta(X,Y)^{\lambda p}} d\sigma(X) d\sigma(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

を入れたバナッハ空間を考える。ここで、$\delta(X,Y) = (|x-y|^2 + |t-s|)^{1/2}$ である。

さらに、b>0 として、$P\in S_D$ における双曲型接近領域

$$\Gamma_b(P):=\{X\in D;\ \delta(X,P)<(1+b)\delta(X,S_D)\}$$

を考える。D にもう少し条件を付けて、$\Lambda^p_\lambda(\sigma)$の境界関数に対する Dirichlet 問題は次のように解ける。

<u>定理 1</u>. $p>1$, $\lambda>(n+1)/p$, $f\in\Lambda^p_\lambda(\sigma)$ とする。このとき、D で熱方程式を満たし、次の性質を持つ関数 u がある。

$$\text{(a)}\quad \lim_{X\to P,\,X\in D} u(X)=0 \quad (P\in B_D/S_D),$$

$$\text{(b)}\quad \lim_{X\to P,\,X\in\Gamma_b(P)} u(X)=f(P) \quad \sigma\text{-a.e. } P\in S_D.$$

また、Neumann 問題に対応する次の定理が得られる。

<u>定理 2</u>. 定理 1 と同じ仮定のもとで、$f\in\Lambda^p_\lambda(\sigma)$ に対し、定理 1 の (a) と次の(c)を満たす熱方程式の解 u がある。

$$\text{(c)}\quad \lim_{X\to P,\,X\in\Gamma_b(P)} \langle\nabla_x u(X),N_p\rangle-(1/2)N_s u(X)$$

$$=f(P) \quad \sigma\text{-a.e. } P\in S_D.$$

ここで、(N_p,N_s)は $P=(p,s)$における外法線方向の単位ベクトルを表す。

10 Singular difference integrals と Riesz potential 空間について

黒川隆英　鹿児島大学教養部

R^n の Bessel potential 空間 $B^p_\alpha(\alpha > 0, 1 < p < \infty)$ について 次の特徴付けが知られている (E.M.Stein)。 $0 < \alpha < 2$ のとき

$$u \in B^p_\alpha \leftrightarrow (i) \quad u \in L^p, (ii) \quad \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| \ge \epsilon} (u(x+t) - u(x))/|t|^{n+\alpha} dt \quad \text{exists in } L^p.$$

ここでの目的は Riesz potential 空間について これと同種の特徴付けを与えることである。 $\kappa_\alpha(x)(\alpha > 0)$ をα次 Riesz 核、整数 $k < \alpha$ に対し

$$\kappa_{\alpha,k} = \begin{cases} \kappa_\alpha(x-y) - \sum_{|\gamma| \le k} (x^\gamma/\gamma!) D^\gamma \kappa_\alpha(-y), & k \ge 0 \\ \kappa_\alpha(x-y), & k < 0 \end{cases}$$

とし

$$U^f_{\alpha,k}(x) = \int \kappa_{\alpha,k}(x,y) f(y) dy$$

とする。Riesz potential 空間 $R^p_\alpha(\alpha > 0, 1 < p < \infty)$ を次のように定義する。
$k = [\alpha - (n/p)]$ として

$$R^p_\alpha = \begin{cases} \{U^f_{\alpha,k}; & f \in L^p\} \\ \{U^{f_1}_{\alpha,k-1} + U^{f_2}_{\alpha,k}; & f \in L^p, f_1 = f|_{B_1}, f_2 = f - f_1\} \end{cases}$$

そこで $B_1 = \{|x| < 1\}$ 。また $R^p_\alpha \ni u = U^f_{\alpha,k}$ のノルムは $\|u\|_{R^p_\alpha} = \|f\|_p$ によって定義する。さらに$\alpha > 0, 1 < p < \infty$, 正整数 ℓに対し次の空間を導入する。

$$S^p_{\alpha,\ell} = \{u; u \in L^{p,-\alpha}, D^{\alpha,\ell}u = lim_{\epsilon\to 0} D^{\alpha,\ell}_{\epsilon}u \text{ exists in } L^p\}$$

そこで

$$L^{p,-\alpha} = \{u; ||u||_{p,\alpha} = (\int |u(x)|^p (1+|x|)^{-\alpha p} (\log(e+|x|))^{-p} dx)^{1/p} < \infty\}$$

$$D^{\alpha,\ell}_{\epsilon} u(x) = \int_{|t|\geq\epsilon} \Delta^{\ell}_t u(x)/|t|^{n+\alpha} dt$$

$$\Delta^{\ell}_t u(x) = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j C^{\ell}_j u(x+(\ell-j)t)$$

である。$S^p_{\alpha,\ell} \ni u$ のノルムは $||u||_{S^p_{\alpha,\ell}} = ||u||_{p,-\alpha} + ||D^{\alpha,\ell}u||_p$ で与える。主な結果として適当な ℓ に対する $R^p_\alpha + P_k$ と $S^p_{\alpha,\ell}$ のノルムを含めての同値性を報告する。ただし P_k は k 次多項式全体である。

ポテンシャルの積分表示について

11

池上輝男　　阪市大理

$(X, \mathcal{W})$ を Bliedtner-Hansen (Potential Theory, Universitext, Springer 1986) の balayage space, $1 \in \mathcal{W}$ とする。条件

(α) $\exists k(x, y) : X \times X \to [0, \infty]$, 下半連続, $x \neq y$ のとき連続, $x \to k(x, y)$ は X 上の extremal potential, $\neq 0$ $\forall y \in X$.

(β) x が finely isolated point のとき $y \to k(x, y)$ は X で有限連続.

(γ) u が X 上の extremal hyperharmonic, $X \setminus \{y\}$ で harmonic ならば $u(x) = c\,k(x, y)$.

の下で

「すべての連続な potential $p(x)$ に対して X 上の Radon 測度 μ が唯1つ存在して

$$p(x) = \int k(x, y)\, d\mu(y)$$」

が成りたつ。

12

Convolution方程式の特性集合についての一注意

石村 隆一　　　千葉大・教養

$u(x)$ を $\mathbb{R}^1$ に於ける，compact 台 $[a, b]$ をもつ hyperfunction，$\sqrt{-1}\omega$ を $\sqrt{-1}\mathbb{R}$ の開集合とするとき，u による convolution 作用素 $u*$ は $\mathbb{R}\times\sqrt{-1}\omega$ 上の正則函数の空間 $\mathcal{O}(\mathbb{R}\times\sqrt{-1}\omega)$ に作用する．作用素 $u*$ に対し，その特性集合 $Ch(u*)$ を次で定義する：

$$Ch(u*) := \{\sqrt{-1}\eta \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \mid \mathbb{C} \text{ の列 } (\zeta_\nu) \text{ が存在して，} \quad |\zeta_\nu| \to \infty, \quad \zeta_\nu/|\zeta_\nu| \to i\eta \ (\nu\to\infty) \quad \hat{u}(\zeta_\nu) = 0 \quad \}$$

但し，$\hat{u}(\zeta)$ は u の Fourier-Borel 変換を表わす．この時，次の定理を証明した：

<u>Theorem.</u> $\hat{u}(\zeta)$ が或る $\varepsilon > 0$ に対し，集合

$$\{\zeta\in\mathbb{C} \mid |\arg\zeta - \tfrac{\pi}{2}| < \varepsilon\}$$

$$(\text{resp. } \{\zeta\in\mathbb{C} \mid |\arg\zeta + \tfrac{\pi}{2}| < \varepsilon\})$$

で完全正規増大 (completely regular growth) とすれば $\sqrt{-1}\mathbb{R}_+ \subset Ch(u*)$ (resp. $\sqrt{-1}\mathbb{R}_- \subset Ch(u*)$)

である．

<u>Example</u>. $j = 1, 2, \cdots, \ell$ に対し，$p_j(\zeta)$ を多項式，λ_j を実数とするとき，hyperfunction $u(x) = \sum_{j=1}^{\ell} p_j(D_x)\, e^{\lambda_j D_x}\, \delta(x)$ を考える．u^* は微分・差分作用素 $\sum p_j(D_x)\, e^{\lambda_j D_x}$ であるが，その特性集合 $\mathrm{Ch}(u^*)$ は $\sqrt{-1}\,\mathbb{R}$ 全体となる．

対数的導函数と或斉次微分多項式

藤解 和也　　東理大・理工

平面$\mathbb{C}$の有理型函数gの値分布がその対数的導函数$\frac{g'}{g}$によって表現されることは、偏角の原理や

$$T(r,\frac{g'}{g}) = \overline{N}(r,0,g) + \overline{N}(r,g) + S(r,g)$$

という等式でよく知られている。我々は$T(r,\frac{g'}{g})$をより任意性がある別のものを用いて評価することを考える。

Wronskian $W(f_1,f_2)=f_1f_2'-f_1'f_2$ を用いて定義されるgの微分多項式（但し$a\in\mathbb{C}$とする）

$$W_a(z)=g''(z)g(z)-a\,g'(z)^2=W((a-1)z\,g'(z)+g(z),\,g'(z))$$

は以下の場合を除いて，$\not\equiv 0$となる：$\alpha(\neq 0),\ \beta\in\mathbb{C}$で

1°. $g(z)\equiv\beta$，但しaは任意；　2°. $g(z)=e^{\alpha z+\beta}$，但し$a=1$；

3°. $g(z)=(\alpha z+\beta)^m$，但し$a=\frac{m-1}{m}$，mは非零整数.

次が示される：

Theorem. 或$a\in\mathbb{C}$に対して$W_a\not\equiv 0$ならば、

(i) $a=\frac{1}{2}$のとき　$g(z)=\alpha z^2+\beta z+\gamma$，但し$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$，$\beta^2-4\alpha\gamma\neq 0$；

(ii) $a=1$のとき　$g(z)=c_1e^{\lambda_1 z}+c_2e^{\lambda_2 z}$，但し$\lambda_i,c_i\in\mathbb{C}$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，$c_1c_2\neq 0$

を除いて次の不等式が成り立つ：

$$T(r,\frac{g'}{g}) \leqq A_a m(r,\frac{g'}{g}) + B_a m(r,\frac{W_a'}{W_a}) + C_a\{\bar{N}(r,0,W_a)+\bar{N}(r,g)\}$$
$$+ U_a(r) \qquad (r\to\infty).$$

ここで A_a, B_a, C_a は a にのみ依る定数で

$$0 \leqq A_a \leqq \begin{cases} 4 & (a \neq 1, \frac{1}{2}) \\ 2 & (a=1) \\ 1 & (a=\frac{1}{2}) \end{cases}, \quad 0 \leqq B_a \leqq \begin{cases} 5 & (a\neq 1, \frac{1}{2}, 0) \\ 2 & (a=1) \\ 4 & (a=\frac{1}{2}) \\ 1 & (a=0) \end{cases}, \quad 0 \leqq C_a \leqq 5$$

であり、また $U_a(r)$ は $[0,\infty)$ 上で定義された実函数で一次元測度有限な或集合(aに依る)の外側で $r\to\infty$ とすれば

$$U_a(r) = \begin{cases} O[\log^+ T(r,\frac{g'}{g}) + \log^+ m(r,\frac{g'}{g}) + \log^+\{\bar{N}(r,0,W_a)+\bar{N}(r,g)\} + \log r] \\ \qquad\qquad (a \neq \frac{1}{2}, 0), \\ O[\log^+ T(r,\frac{g'}{g}) + \log^+\{\bar{N}(r,0,W_0)+\bar{N}(r,g)\} + \log r] \quad (a=0), \\ O(1) \quad (a=\frac{1}{2}) \end{cases}$$

となるものである。

この結果を得る方法により次のことも示される:

<u>Corollary</u>. Theorem の仮定の下、g が整函数で

$$m(r, W_a) = S(r, g)$$

ならば、$W_a \equiv$ 定数 かつ g は (i), "(ii) で $\lambda_2=-\lambda_1\neq 0$" 又は (iii) $a\neq 0, \frac{1}{2}$ のとき $g(z) = \alpha z+\beta$, 但し $\alpha(\neq 0), \beta \in \mathbb{C}$ に限る。特に g が位数 $\rho(<+\infty)$, W_a の位数 λ が $\lambda<\rho$ なら $\lambda=0$, $\rho=1$ となる(これはいわゆる A. Edrei の問題:
'f, g: entire, of order $\rho(<+\infty)$, $W(f,g)$: $\neq 0$, of order $\lambda<\rho \Rightarrow \rho \in \mathbb{N}/2$?'
の特別な場合 ($f=g'$) の解を与えているとも言える)。

14 微分多項式 $g''g-ag'^2$ の零点について

藤解 和也　　東理大・理工

平面$\mathbb{C}$の有理型函数とその二階導函数の零点に関するHaymanの問いに関連してE. Muesは次の考察を行なっている:

1°. 超越整函数gの微分多項式 $W_a := g''g - ag'^2$ が或 $a \in \mathbb{C}-\{0\}$ に対して零点を1つも持たないのは,

(A)　$g(z) = \beta e^{\alpha z}$, 但し $\alpha, \beta \in \mathbb{C}-\{0\}$

である場合に限る.

2°. $a=1$の場合については次の2つの反例がある;

(1)　$g(z) = \sin z$　$[W_1(z) \equiv -1]$,

(2)　$g(z) = e^{Q(z)-h(z)}$　$[W_1(z) = e^{2Q(z)}]$,

但しhは任意の整函数, Qは次の式を満たす整函数,

$$Q''(z) = h''(z) + e^{2h(z)}.$$

今回はこの考察が, ① $a \neq 1$で拡張可能なこと, ② $a=1$では或付加条件の下に類似な結果が成立し, 更に別の反例を挙げ得ることを報告する.

①. gは$\mathbb{C}$の有理型函数, $W_a \not\equiv 0$ $(a \neq 1)$とする。或定数γ_a, $0 \leqq \gamma_a < \frac{1}{23}$, に対し $r \to \infty$ のとき, 不等式

$(*)\ \overline{N}(r,0,W_a)+\overline{N}(r,g)\leqq \gamma_a T\left(r,\frac{g'}{g}\right)+S\left(r,\frac{g'}{g}\right)+O(\log r)$

が満たされていれば、有理函数 $R,\not\equiv 0,$ と多項式 $P,\ P(0)=0,$ が存在して

$$g(z)=R(z)\,e^{P(z)}$$

となる。特に(*)の右辺を $S(r,\frac{g'}{g})$ で置き換えれば(A)のみ。

②. $a=1$ のときには［(1)を含み $W_1(z)=C_1C_2(\lambda_1-\lambda_2)e^{(\lambda_1+\lambda_2)z}$ となる］

(i) $g(z)=C_1e^{\lambda_1 z}+C_2e^{\lambda_2 z}$, 但し $\lambda_i, C_i\in\mathbb{C}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $C_1C_2\neq 0$

を除き、(*)の左辺に $\frac{4}{5}m(r,\frac{g'}{g})$ を加えた不等式(**)が或定数 $\gamma_1, 0\leqq\gamma_1<\frac{1}{5}$, に対して成立すれば①と同じ結論を得る。又(**)の右辺が $S(r,\frac{g'}{g})$ ならば(i)の他に

(ii) $R(z)=C_2z+C_1$, $P(z)=\lambda z$ $\quad[\,W_1(z)=-C_2^2e^{2\lambda z}\,]$,

(iii) $R(z)\equiv C$, $P(z)=\alpha z^2+\beta z$ $\quad[\,W_1(z)=2\alpha C e^{2(\alpha z^2+\beta z)}\,]$,

但し $C_1, C_2(\neq 0), C(\neq 0), \lambda, \alpha(\neq 0), \beta\in\mathbb{C}$ だけが可能である。(この(iii)は(2)で与えられる g が有限位数となる唯一の場合である。) また整函数 h, $h''(z)=\dfrac{e^{\pi i\sin z}+1}{\cos^2 z}$, を用いて

$$g(z)=(\cos z)\,e^{h(z)}\quad[\,W_1(z)=e^{2h(z)+\pi i\sin z}\,]$$

という整函数を構成する。そのときこれは(**)が(*)で置き換え不可能であること、そして($\frac{1}{5}$の最良性は不明だが)定数 γ_1 は $\frac{4}{5}$ 以上となることはできないことを示す例となる。この例は(2)と異なり零点を無限個持つものである。

15

Some notes on the oscillation theory for higher order linear differential equations with entire coefficients

TODA Nobushige   Nagoya Institute of Technology

1. Introduction.

We are concerned with the linear differential equation

$$(1) \qquad w^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-2} A_j(z) w^{(j)} = 0,$$

where $k \geqq 2$ and $A_0, \cdots, A_{k-2}$ are entire functions at least one of which is transcendental.

For a meromorphic function g in $|z| < \infty$, we denote the order of g by $\rho(g)$ and the order of $N(r, 1/g)$ by $\lambda(g)$.

Let $\{w_1, \cdots, w_k\}$ be a fundamental set of solutions of (1). Then, it is known that

(I) At least one of $w_1, \cdots, w_k$ is of order infinity.

(II) Suppose that $k \geqq 3$ and that for some s $(1 \leqq s \leqq k-2)$ (resp. for $s=0$), A_s is transcendental of order $< 1/2$, while for $j \neq s$, either A_j is a polynomial or $\rho(A_j) < \rho(A_s)$. Then, $\lambda(w_1 \cdots w_k) = \infty$. (resp. $\lambda(w_i w_j) = \infty$ $(i \neq j)$).

2. Result.

<u>Lemma</u>. There are w_i, w_j such that $\rho(w_i/w_j)=\infty$.

<u>Theorem</u>. Let $f_1,\cdots,f_{k+1}$ be any k+1 solutions of the DE (1) any k of which are linearly independent. Then, $\lambda(f_1\cdots f_{k+1})=\infty$.

3.References

[1]S.B.Bank and J.K.Langley, Oscillation theory for higher order linear differential equations with entire coefficients, Complex Var.,16 (1991), 163-175.

[2]J.K.Langley, Some oscillation theorems for higher order linear differential equations with entire coefficients of small growth, Results in Math., 20(1991), 517-529.

[3]M.Frei, Uber die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Ganzen Funktionen als Koeffizienten, Comment.Math.Helv., 35(1961), 201-222.

16 Minimal thickness and uniqueness of kernel functions for the heat equation

西尾昌治 大阪市大 理
鈴木紀明 名大 教養

$n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の熱方程式

$$Lu = \partial_t u - \Delta u = 0$$

を考える．Ω を $\mathbb{R}^{n+1}$ の領域とし，その境界点 Y (resp. ∞) に対し

$$H(\Omega, Y) = \{u \geq 0 ; Lu = 0 \text{ on } \Omega,\ u = 0 \text{ on } \partial_p\Omega \setminus Y\}$$
$$(\text{resp. } \partial_p\Omega)$$

とおき，$H(\Omega, Y)$ が 1 次元の錐になるかどうかを問題にする．ここで $\partial_p\Omega$ は Ω の parabolic boundary．

今，$\mathbb{R}^n$ の有界 Lipschitz 領域 D と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\Omega^{\beta}(D) = \{(x, t) ;\ t > 0,\ t^{-\beta}x \in D\}$$
$$\Omega_{\alpha}(D) = \{(x, t) ;\ t < 0,\ (-t)^{-\alpha}x \in D\}$$

とする．

定理　D を原点について starlike な R^n の有界 Lipschitz 領域とし (c.f. [1]), $\alpha, \beta \in R$ とする.

(1). $\beta > 0 \iff \dim H(\Omega^{\beta}(D), 0) = 1$

(2). $\alpha < 1 \iff \dim H(\Omega_{\alpha}(D), \infty) = 1$

$0 < \beta \leqq 1/2$ に対しては, [2] よりすぐにわかるので, ここでは, $\beta \geqq 1/2$ に対して, 次元が1であることを示せばよい. その証明は, $\Omega^{\beta}(D)$ の原点に対する non-tangential set が, 原点について minimally thick であることを示すことによってなされる.

References

[1]. R. Hunt and R. Wheeden, Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 507–527.

[2]. M. Nishio, preprint.

17. Hilbert空間とHilbert-Schmidt型写像の列の極限空間の領域に対する核関数について

大貝　聖子　明治学園高校
梶原　壌二　九州大学理学部
金　　鍾晋　全北大学校
李　　琳　　濟南電視大学
西原　賢　　福岡工業大学
本田　竜広　有明工業高専

咋秋の、札幌での学会, 並びに, 咋冬の福大での科研費研究集会にて抽象Wiener空間の領域に対する核関数を論じたが、この名古屋では標記抽象Wiener空間

$$\cdots \to H_\alpha \xrightarrow{i_\beta^\alpha} H_\beta \to \cdots$$

列の極限空間の領域に対する核関数を論じる。

References

[1] N. Aronszaijn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68(1950),337-404.

[2] S. Bergman, Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, avec les application à la théorie des fonctions analytiques, Mémoriales des Sciences Math.106(1947), Gauthies-Villars(Paris).

[3] S. Bergman, Sur la fonction-noyaus d'un domaine et ses

applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes, Mémoriales des Sciences Math. 108(1948),Gauthies-Villars(Paris).

[4] Cameron-Martin, Transformation of Wiener Integrals under translations, Annals of Math. 45-2(1944),386-396.

[5] J.F. Colombeau, Differential Calculus and Holomorphy, North-Holland Math. Series, 64 (1982).

[6] L. Gross, Harmonic analysis on Hilbert spaces, Mem. Amer. Math. Soc.46,1963.

[7] L. Gross, Abstract Wiener spaces, in Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 2-I(1965),31-42.

[8] L. Gross, Potential theory on Hilbert space, J. Functional Analysis 1(1967),123-181.

[9] L. Gross, Abstract Wiener measure and infinite dimensional potential theory in Lectures in Modern Analysis and Applications II., Lecture-Notes in Mathematics, New York(Springer)140(1970),84-116.

[10] Honda-Kajiwara-Kim-Li-Nishihara-Ohgai-Sugawara, Kernel functions for domains of dimension infinite, submitted to the Math. Rep. Coll. Gen. Educ. Kyushu Univ.

[11] J. Kajiwara, Opérateur d'' dans les espace de Hilbert avec croissance polynomiale, Lectur Note in Mathematics (Springer) 474, Séminare Piere Lelong(Analyse) Année 1973/74,91-108.

[12] J. Kajiwara, M. Nishihara, S. Ohgai and N. Sugawara, Uniform approximation of continuous functions and C^∞-functions in nuclear spaces by entire functions, Portugaliae Math. 48-3(1991),327-344.

[13] J. Mercer, Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser.A 209(1909), 415-446.

[14] A. V. Skorohod, Integration in Hilbert spaces, Erg. der Math. 79, Springer Verlag(1974).

[15] K. Yosida,Theory of Hilbert spaces, Kyoritu Zensho 49(1953).

18 トロイダル多様体上の領域に対する
スペクトルについて

梶原　壌二　　九州大学理学部
金　　鍾晋　　全北大学校自然科学大学
李　　琳　　　濟南電視大学
渡辺　英晴　　九州大学理学部

有限次元でも無限次元でも、良い多様体上の不分岐被拡領域 Ω に対するスペクトルはMalgrangeの意味での Ω の正則包のRemmertのreductionであろうと予想し、位相が最も弱い、積位相について、春の学会では有限次元の複素射影空間の有限又は無限個の直積がなすトロイダル多様体に関しては、上の我々の予想が肯定的である事を、示した。ここでは、対照的に、複素射影空間をより抽象的なものに置き換え、位相も最も強い有限開位相に置き換えて得る、無限次元複素多様体で、トロイダル多様体でもある、複素射影空間上の不分岐被拡領域 Ω について同様の事が肯定的に成立する事を示し、我々の予想をより一層確かめる。

References

[1] A. Bayoumi, The Levi problem for domains spread over locally convex Frechet space with bounded approximation property, Complex Variables Theory Appl. 10-2-3(1988), 141-152.

[2] R. Fujita, Domaine sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, J. Math. Soc. Japan 15(1963), 443-473.

[3] R. Fujita, Domaine sans point critique intérieur sur l'espace produit, J. Math. Kyoto Univ. 4-3(1965),493-514.

[4] L. Gruman, The Levi problem in certain infinite dimension vector spaces, Illinois J. Math.,18(1974),20-26.

[5] R. Iwahashi, Domains spread over a complex space,J.M.Soc. Japan 9-4(1957),452-463.

[6] R. Iwahashi, A characterization of holomorphically complete spaces, Proc. Jap. Acad.36-4(1960),205-206.

[7] J. Kajiwara, J-J. Kim, L. Li and H. Watanabe, On spectrum for a domain over a product space of complex projective spaces, to appear in Math. Rep. of Coll. of Gen. Educ. Kyushu Univ..

[8] B. Malgrange, Lectures on the theory of functions of several complex variables, Tata Inst. Bombay(1958),130 pages.

[9] R. Narasimhan, The Levi problem on algebraic manifolds, Complex geometry and analysis(Pisa 1988), 85-91, Lecture Notes in Math.,1422, Springer, Berlin 1990.

[10] R. Remmert, Reduction of complex spaces, Sem. on analytic func. I,Princeton,1957,190-205.

[11] H. Rossi, On Envelope of Holomorphy,Comm. on Pure and Appl. Math.,16(1963),9-17.

[12] M. Schottenloher , Michael problem and algebras of holomorphic functions, Arch. Math. 37(1981), 241-247.

[13] M. Schottenloher , Spectrum and envelope of holomorphy for infinite dimensional Riemann domains, Math. Ann. 263(1983),213-219.

[14] R. L. Soraggi, The Cauchy-Riemann Operator in Infinite Dimensional Spaces, Revista Matematica de la Univ. Complutense de Madrid 3(1990), 143-150.

[15] Y. Togari, On ramified Riemann domain, Nagoya J. Math.14(1959),173-191.

[16] T. Ueda, Pseudoconvex domain over Grassmann manifolds, J. Kyoto Univ.20-2(1980),391-394.

19

On the isometries of $H^\infty_E(B)$

真次康夫　　信州大理
山田尊彦　　信州大理

Bを$\mathbb{C}^n$の単位開球, EをBanach空間とする。B上のE-値有界正則関数全体のつくるBanach空間を$H^\infty_E(B)$で表す。特に, $E=\mathbb{C}$の場合, $H^\infty_{\mathbb{C}}(B)=H^\infty(B)$とかく。$B$から$B$の上への双正則写像全体を$\mathrm{Aut}(B)$で表す。

［定義］　E上の有界線型作用素Aは, 次の条件を満たすとき, E上のmultiplierとよばれる:

「$\forall e_1, e_2 \in E$, $\forall r>0$に対し,

$$\|e_1-\lambda e_2\|\le r \ \text{for}\ \forall\lambda\in\mathbb{C}\ \text{with}\ |\lambda|\le\rho \Rightarrow \|e_1-Ae_2\|\le r$$

を成立せしめる正数$\rho>0$が存在する.

E上のmultiplier全体を$\mathrm{Mult}(E)$で表す。

$H^\infty(B)$の(線型)等長変換に関して, Ahern-Schneider [1] は次を示した:

［定理A］　$H^\infty(B)$から$H^\infty(B)$の上への等長変換Tはすべて次の形で与えられる:

$$Tf = c\cdot f\circ\varphi, \quad f\in H^\infty(B),$$

ここで $c\in\mathbb{C}$, $|c|=1$ かつ $\varphi\in \mathrm{Aut}(B)$.

この定理は, Nagasawa [4], de Leeuw-Rudin-Wermer [3] が独立に証明した, $n=1$ の場合の任意次元 $n\geqq 1$ への拡張になっている.

定理 A は, $E=\mathbb{C}$ の場合の, $H^\infty_E(B)=H^\infty(B)$ についてのものである。一般の Banach 空間 E について次の結果を得た：

［定理］ E を, $\mathrm{Mult}(E)=\mathbb{C}$ を満たす Banach 空間とする. このとき, $H^\infty_E(B)$ から $H^\infty_E(B)$ の上への等長変換 T はすべて次の形で与えられる：

$$(TF)(z) = \mathcal{T}F(\varphi(z)), \quad F\in H^\infty_E(B),\ z\in B,$$

ここで $\mathcal{T}$ は E から E の上への等長変換, $\varphi\in \mathrm{Aut}(B)$.

この定理は, Cambern-Jarosz [2] が証明した $n=1$ の場合の任意次元 $n\geqq 1$ への一般化である.

[1] P. R. Ahern & R. Schneider, Duke Math. J. **42**(1975), 321-326.

[2] M. Cambern & K. Jarosz, Bull. London Math. Soc. **22**(1990), 436-466.

[3] K. deLeeuw, W. Rudin & J. Wermer, Proc. AMS **11**(1960), 694-698.

[4] M. Nagasawa, Kodai Math. Sem. Rep. **11**(1959), 182-188.

20. チューブ領域の自己同型

東北大学教養部　　滑水　悟

$\mathbb{C}^n$ の中のチューブ領域 T_Ω とは $T_\Omega = \mathbb{R}^n + \sqrt{-1}\Omega$ により与えられる $\mathbb{C}^n$ の中の領域である。ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ の中の領域で Ω は T_Ω の底と呼ばれる。$\mathbb{C}^n$ の実平行移動の群としてみなされた加法群 $\Sigma := \mathbb{R}^n$ は T_Ω に自然に作用する。$\mathbb{C}^n$ の中のチューブ領域は $\mathbb{C}^n$ の中の Σ-作用をもつ領域とみなすことができる。

命題 $\varphi: T_{\Omega_1} \to T_{\Omega_2}$ を $\mathbb{C}^n$ の中の２つのチューブ領域の間の双正則写像とする。もし φ が T_{Ω_1}, T_{Ω_2} 上へのΣ-作用に関して同変ならば φ は $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{C}^n$ の元により与えられる。ここで $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}^n$ の複素アフィン変換でその線形部分が $GL(n, \mathbb{R})$ に属するものからなる群を表わす。

この命題はチューブ領域の間の $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{C}^n$ の元により与えられる双正則写像がチューブ領域のカテゴリーにおける自然な射であることを意味する。$\mathbb{C}^n$ の中の２つのチューブ領域の間に $GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{C}^n$ により与えられる双正則写像が存在するとき、それらをアフィン的に同値であると呼ぼう。

もし $\mathbb{C}^n$ の中のチューブ領域 T_Ω の底 Ω の凸包が直線を含まないならば T_Ω は $\mathbb{C}^n$ の中の有界領域と双正則同値となる。このときよく知られたH.Cartanの結果[1]より、T_Ω の正則自己同型全体のなす群 $Aut(T_\Omega)$ はコンパクト-開位相に関してリー群となり、そのリー環 $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ は T_Ω 上の完備な正則ベクトル場のなす有限次元リー環と標準的に同一視することができる。以下、本講演ではチューブ領域の底は直線を含まない凸包をもつものとする。

さて底が凸錐体(convex cone)であるチューブ領域は第１種ジーゲル領域と呼ばれる。この種の領域は、チューブ型の対称領域を含むだけでなく、カス

プ特異点の構成などにも現れ、複素有界領域の中でも重要なクラスを占める。第1種ジーゲル領域 T_Ω の正則自己同型や同値性については松島による解説があり([2])、例えば $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ の構造が明らかにされている。他方、底 Ω が必ずしも凸錐体でない場合、つまり Ω が一般な場合についても、正則自己同型や同値性の研究は、等質有界領域のチューブ領域としての実現などの観点から興味あることと思われる。本講演の目的は、一般のチューブ領域 T_Ω に対して、$\mathfrak{g}(T_\Omega)$ の構造定理を与えることである。

定理([3]) T_Ω を $\mathbb{C}^n$ の中のチューブ領域とし、T_Ω の底 Ω は直線を含まない凸包をもつものとする。このとき T_Ω にアフィン的に同値なチューブ領域 $T_{\tilde{\Omega}}$ があってつぎが成り立つ：

$$\mathfrak{g}(T_{\tilde{\Omega}}) = \mathcal{P} + \mathcal{E} \text{ (直和)},$$

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathfrak{g}(T_{\tilde{\Omega}}) \mid X \text{ は多項式ベクトル場}\},$$

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{r} \{e^{z_i}(\partial_i + \sum_{j=r+1}^{n} \sqrt{-1}a_i^j\partial_j),\ e^{-z_i}(\partial_i - \sum_{j=r+1}^{n} \sqrt{-1}a_i^j\partial_j)\}_{\mathbb{R}}.$$

ここで r は 0 と n の間の整数で、a_i^j は実定数である。また $\partial_k = \partial/\partial z_k$ とおく。

参考文献

[1] H. Cartan, Sur les groupes de transformations analytiques, Actualités Sci. Ind., Hermann, Paris, 1935.

[2] Y. Matsushima, On tube domains, in Symmetric Spaces, Pure and Appl. Math., Vol. 8, Dekker, New York, 1972, 255-270.

[3] S. Shimizu, Automorphisms of tube domains, preprint.

21. 有界な底をもつチューブ領域の自己同型と同値性

東北大学教養部　　滑水　悟

$\mathbb{C}^n$ の中のチューブ領域 T_Ω はその底 Ω が $\mathbb{R}^n$ の中の有界領域であるとき有界な底をもつといわれる。この講演ではまず有界な底をもつチューブ領域の正規形を与え、その応用として有界な底をもつチューブ領域に関する正則同値問題などを論ずる。

定理A([2]) T_Ω を $\mathbb{C}^n$ の中のチューブ領域とし、T_Ω の底 Ω は $\mathbb{R}^n$ の中の有界領域であるとする。このとき T_Ω にアフィン的に同値なチューブ領域 $T_{\tilde{\Omega}}$ があって、$T_{\tilde{\Omega}}$ はつぎの条件(i),(ii),(iii)を満たす直積分解 $T_{\tilde{\Omega}} = T_{\tilde{\Omega}'} \times T_{\tilde{\Omega}''}$ をもつ:

(i) $T_{\tilde{\Omega}'}$, $T_{\tilde{\Omega}''}$ はそれぞれ $\mathbb{C}^r$, $\mathbb{C}^{n-r}$ の中のチューブ領域である;

(ii) $T_{\tilde{\Omega}'}$ は $T_{\tilde{\Omega}'} = (T_{(0,\pi)})^r$ により与えられる。ここで $T_{(0,\pi)} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ である;

(iii) $T_{\tilde{\Omega}''}$ は $\operatorname{Aut}(T_{\tilde{\Omega}''})^\circ = \operatorname{Aff}(T_{\tilde{\Omega}''})^\circ$ かつ $\operatorname{Aff}(\tilde{\Omega}'') \subset O(n-r)$ を満たす。ここで $\operatorname{Aff}(T_{\tilde{\Omega}''})$ は $\mathbb{C}^{n-r}$ の複素アフィン変換で $T_{\tilde{\Omega}''}$ を不変にするものからなるリー群を表わし、$\operatorname{Aff}(\tilde{\Omega}'')$ は $\mathbb{R}^{n-r}$ のアフィン変換で $\tilde{\Omega}''$ を不変にするものからなるリー群を表わす。またリー群 G に対して G° は G の単位元を含む連結成分を表わす。

定理Aにおいて与えられた $T_{\tilde{\Omega}}$ を T_Ω の正規形と呼ぼう。

さてチューブ領域に関する正則同値問題は、2つのチューブ領域 T_{Ω_1}, T_{Ω_2} が正則的に同値ならば、アフィン的に同値になるかと定式化するのが自然と思われる。T_{Ω_1}, T_{Ω_2} が第1種ジーゲル領域の場合には肯定的な解答が与

えられている([1])。他方、T_{Ω_1}, T_{Ω_2} が一般のチューブ領域の場合については、単純な反例がある。実際、$\mathbb{C}$ の中のチューブ領域 $T_{(0,\pi)}$, $T_{(0,\infty)}$ は正則的に同値であるが、アフィン的に同値でない。しかし定理Aの応用としてつぎの結果が成り立つ。

定理B([2]) もし $\mathbb{C}^n$ の中の2つのチューブ領域 T_{Ω_1}, T_{Ω_2} が正則的に同値でそれらの底 Ω_1, Ω_2 が $\mathbb{R}^n$ の中の有界領域であるならば、T_{Ω_1}, T_{Ω_2} はアフィン的に同値である。

定理Bの証明の過程における議論はまた有界な底をもつチューブ領域の正規形の正則自己同型の記述を与える。

定理C([2]) $T_{\tilde{\Omega}}$ を定理Aにおいて与えられたチューブ領域とする。このとき $\mathrm{Aut}(T_{\tilde{\Omega}}) = \mathrm{Aut}(T_{\tilde{\Omega}'}) \times \mathrm{Aff}(T_{\tilde{\Omega}''})$ である。

系(Yang [3] 参照) T_{Ω} を $\mathbb{C}^n$ の中のチューブ領域とし、T_{Ω} の底 Ω は $\mathbb{R}^n$ の中の有界領域であるとする。もし Ω がC^1-境界をもつならば $\mathrm{Aut}(T_{\Omega}) = \mathrm{Aff}(T_{\Omega})$ である。

参考文献

[1] Y. Matsushima, On tube domains, in Symmetric Spaces, Pure and Appl. Math., Vol. 8, Dekker, New York, 1972, 255-270.

[2] S. Shimizu, Automorphisms and equivalence of tube domains with bounded base, preprint.

[3] P. Yang, Automorphisms of tube domains, Amer. J. Math. 104 (1982), 1005-1024.

22

有理形関数の一意性定理の拡張について

城崎　学　　大阪府立大学

工学部

1926年、Nevanlinna は次の一意性定理を証明した.

Theorem A. f, g を C 上の相異なる非定数有理形関数とする. $\overline{C}$ の4つの点 $a_1, \ldots, a_4$ に対し、$f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j)$ $(j = 1, \ldots, 4)$ が重複度も込めて成り立つならば、g は f の Möbius 変換であり、f, g は $a_1, \ldots, a_4$ のうちの2つ（a_3, a_4 とする）を値にとらない. また、非調和比 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = -1$.

ここでは、Theorem A を moving targets に拡張しよう. それには、Borel の補題を拡張しなくてはならない. 記号の説明から始める. C 上の有理形関数体 $\mathfrak{M}$ の部分体 $\mathfrak{K}$ に対して、$\overline{\mathfrak{K}} = K \cup \{\infty\}$ とおく. 非定数有理形関数 f に対して、$\Gamma_f = \{h \in \mathfrak{M}; T_h(r) = o(T_f(r))(r \to \infty)\}$ とおく. また、記号 "$R(r)$ //" は、関係 $R(r)$ が、高々有限 Lebesgue 測度の集合を除いて全ての $r \in (r_0, +\infty)$ に対して成り立つという意味で使う.

Borel's lemma. N を2以上の整数とし、$F_1, \ldots, F_N$ を、零点を持たない整関

数とする. $a_j \not\equiv 0$ を

$$T_{a_j}(r) = o(T(r)) \,//\quad (r \to \infty)$$

を満たす有理形関数とする $(1 \leq j \leq N)$. ここで、$T(r) = \sum_{j=1}^{N} T_{F_j}(r)$. 恒等式

$$a_1 F_1 + \ldots + a_N F_N \equiv 1$$

が成り立つとすると、$a_1 F_1, \ldots, a_N F_N$ は C 上で一次従属である.

Theorem. f, g を C 上の 2 つの相異なる非定数有理形関数とする. 相異なる $a_j \in \overline{\Gamma}_f (1 \leq j \leq 4)$ に対し、$f - a_j$ と $g - a_j$ (ただし、$f - \infty, g - \infty$ は、それぞれ $1/f, 1/g$ を意味する) が重複度も込めて同じ零点を持つならば、$AD - BC \neq 0$ なる $A, B, C, D \in \Gamma_f$ があって、

$$g = (Af + B)/(Cf + D)$$

が成り立つ. また、2 つの j (例えば、$j = 3, 4$ とする) に対して、$N_{f, a_j}(r) = o(T_f(r))$ が成り立ち、非調和比の関数 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \equiv -1$ である.

References

[1] R. Nevanlinna, Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Functionen, Acta Math. 48 (1926), 367-391.

[2] M. Shirosaki, An extension of unicity theorem for meromorphic functions, to appear.

23. 極小曲面のガウス写像に対する一意性定理

藤本坦孝　　　　金沢大学理学部

$\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面 M に対し，その Gauss 写像は，定義により，M の各点 p に M の p における単位法線ベクトル $G(p) \in S^2$ を対応させる写像である．G の代わりに G と立体射影 $\pi : S^2 \to \bar{\mathbf{C}}$ との合成写像 $g := \pi \cdot G$ を考える．M は，自然に，共形計量をもつ Riemann 面とみなされ，g は M 上の有理型関数となる．完備極小曲面の Gauss 写像に対しては，複素平面上の有理型関数についての定理とよく似たいくつかの結果が得られている．ここでは，$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像に対し，次の Nevanlinna の一意性定理に似た結果が得られたことを報告する．

定理. 複素平面上の有理型関数 g, $\tilde{g}$ に対し，相異なる 5 個の値の逆像が一致するならば，$g \equiv \tilde{g}$.

$\mathbf{R}^3$ 内に，等角微分同相写像 $\Phi : M \to \tilde{M}$ が存在するような二つの極小曲面 M 及び $\tilde{M}$ を考える．M 及び $\tilde{M}$ それぞれの Gauss 写像 G 及び $\tilde{G}$ に対し $g := \pi \cdot G$, $\tilde{g} := \pi \cdot \tilde{G} \cdot \Phi$ とおく．いま，相異なる q 個の値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ に対し，$g^{-1}(\alpha_j) = \tilde{g}^{-1}(\alpha_j)$ $(1 \leq j \leq q)$ が成り立つと仮定する．このとき，次のことがいえる．

定理 I. $q \geq 7$ であり，M または，$\tilde{M}$ が完備ならば，$g \equiv \tilde{g}$ である．

M 及び $\tilde{M}$ が特殊な場合には，次のことが言える．

定理 II. $q \geq 6$ であり，M 及び $\tilde{M}$ が共に完備であって且つ全曲率が有限ならば，$g \equiv \tilde{g}$ である．

また，これらの結果は，$\mathbf{R}^m$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の場合に一般化されることも分かった．

なお，定理 I に於ける数 7 は最良結果である．実際，0 でも ± 1 でもない数 α を取り，$\mathbf{C} - \{0, \alpha, 1/\alpha\}$ の普遍被覆曲面 M を考え，有理型関数

$$h(z) := \frac{1}{z(z-\alpha)(z-1/\alpha)}, \quad g(z) = z$$

を M 上の関数と見なして，

$$\boldsymbol{x} := \left(\mathrm{Re}\int_0^z h(1-g^2)dz, \mathrm{Re}\int_0^z \sqrt{-1}h(1+g^2)dz, 2\mathrm{Re}\int_0^z hgdz\right)$$

によって，極小曲面 $\boldsymbol{x} : M \to \mathbf{R}^3$ を定義する．また，関数

$$h(z) := \frac{1}{z(z-\alpha)(z-1/\alpha)}, \quad \tilde{g}(z) = \frac{1}{z},$$

を使って同様のやり方で $\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面 $\tilde{M}$ を定義する．このとき，$M, \tilde{M}$ それぞれの Gauss 写像は $G = \pi^{-1}g$, $\tilde{G} = \pi^{-1}\tilde{g}$ で与えられ，定理 I の仮定が満たされ，写像 $g, \tilde{g}$ は，相異なる 6 個の値

$$\alpha_1 := 0,\ \alpha_2 := \infty,\ \alpha_3 := 1,\ \alpha_4 := -1\ \alpha_5 := \alpha,\ \alpha_6 := \frac{1}{\alpha}$$

に対し同じ逆像を持つ．

24 Hodge構造の分類空間の境界について

大沢健夫　名大 理
遠藤浩太郎　東芝

Hodge構造の分類空間を等質空間内の領域と標準的に同一視する方法がある(Griffiths-Schmidt)またその上の標準的な計量について曲率の計算が既に行なわれている。しかしその境界の構造についてはまだ多くのことは知られていないようである。本講演では境界が(主に滑らかな部分で)どの程度の擬凸性を持つか調べた遠藤氏の計算結果を大沢が報告する。

25　双曲的埋め込みを持つ完備双曲的複素解析空間への有理型写像について

鈴木　誠　広島大理

Xを既約コンパクト解析空間$\overline{X}$（以下、解析空間はすべてreducedとする）のZariski開部分集合，Yを既約な解析空間とする。有理型写像$f: X \to Y$について、$f(X)$がYの空でない開部分集合を含むとき、fを支配的（dominant）といい、XからYへの支配的有理型写像の全体を$\mathrm{Mer}_{dom}(X, Y)$で表す。$\mathrm{Mer}_{dom}(X, Y)$の有限性に関するLangの予想［1］は、野口［4］で完全に解かれた。

<u>野口の定理A</u>　Yがコンパクト双曲的ならば、$\mathrm{Mer}_{dom}(X, Y)$は有限集合である。

Yが非コンパクトの場合を考える。Yをコンパクト解析空間$\overline{Y}$のZariski開集合とする。$\partial Y := \overline{Y} - Y$の相異なる任意の2点が$Y$の双曲的距離により分離されているとき$Y$は$\overline{Y}$に双曲的に埋め込まれているという。

<u>定理</u>　Yが完備双曲的解析空間で、既約コンパクト解析空間$\overline{Y}$に双曲的に埋め込まれているならば、$\mathrm{Mer}_{dom}(X, Y)$は有限集合である。

さらに$\partial X := \bar{X} - X$が正規交叉的超曲面とする。Xから$\bar{Y}$への正則写像全体Hol（X, Y）の任意の連結成分ZのHol($\bar{X}$, $\bar{Y}$)における閉包（コンパクト開位相に関する）$\bar{Z}$は、解析空間Hol($\bar{X}$, $\bar{Y}$)の解析部分空間になり、Zは$\bar{Z}$のZariski開集合になる（野口［3］）。このときZは完備双曲的で$\bar{Z}$に双曲的に埋め込まれている。（宮野－野口［2］）。さらにZが非定値写像を含むならば、dim Z ≦ dim Y－1である。

以上はYが有界対称領域の算術離散群による非コンパクト商の場合に得られる結果［3］の一部についての一般化である。

［1］ S. Lang, Higher dimensional Diophantine problems, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 779-787

［2］ T. Miyano and J. Noguchi, Moduli spaces of harmonic and holomorphic mappings and Diophantine geometry, Lecture Notes in Math. 1468 Springer

［3］ J. Noguchi, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces, Invent. Math. 93(1988)

［4］ J. Noguchi, Meromorphic Mappings into Compact Hyperbolic Complex Spaces and Geometric Diophantine Problems, Inter. J. Math. 3(1992)

A degenerate metric induced on the dual of nef line bundles

竹腰見昭　阪大教養

(X, ω_X)をn次元コンパクト複素多様体とし、ω_Xをその上のエルミート計量とする。

定義：Xの上の正則直線束Fがnefであるとは、任意の正数εに対してFの滑らかな計量a_εで$dd_c(-\log a_\varepsilon) + \varepsilon\omega_X > 0$を満たすものが存在することとする

(X, ω_X)がケーラーである時はFがnefであることとFのチャーン類$c_{\mathbb{R}}(F)$がXのケーラー錐の閉包に含まれることと同値であり、(X, ω_X)が代数的である時は、Xに含まれる任意の既約かつ被約な曲線にFを制限した時の次数が非負であることと同値である。またFが半正の曲率をもつ計量をもてばnefであることは明らかであるが、この逆は一般には成立しない。ここで考える問題は$\varepsilon \searrow 0$の時F^*の計量a_ε^{-1}は如何なる計量に如何なる位相で収束するかという問題である。

Fの滑らかな計量 a_0 を固定すると $a_\varepsilon^{-1} = a_0^{-1}\eta_\varepsilon$ とかける. $\int_X \eta_\varepsilon \omega_X^n = 1$ と仮定してよい. この時次が成立する

命題. 正数 $K = K(X, \omega_X)$, 零に収束する単調減少数列 $\{\varepsilon_i\}$ $(\varepsilon_i > 0)$, X上の滑らかな正値函数列 $\{\eta_{\varepsilon_i}\}$ と $W^{1,2}(X)$ の元 η で次の条件を満たすものが存在する. (i) $0 < \eta_{\varepsilon_i} \leqq K$, $0 \leqq \eta \leqq K$ (ii) $\sqrt{\eta_{\varepsilon_i}} \to \sqrt{\eta}$ in $W^{1,2}(X)$ (iii) $dd^c(\log(a_0^{-1}\eta_{\varepsilon_i})) + \varepsilon_i \omega_X > 0$ (iv) $dd^c(\log(a_0^{-1}\eta))$ は X上の正カレント (v) $\{\eta = 0\}$ は測度零

ここで $W^{1,2}(X)$ は X上の L^2 函数で全ての一階導函数が L^2 可積であるものからなるヒルベルト空間である. 前に述べたように $\{\eta = 0\}$ は一般に空集合でないが, 解析的であるかどうかは判らない.

27 *Torsion free theorems for higher direct image sheaves of nef vector bundles*

竹腰見昭　阪大教養

$f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ を既約かつ被約な解析空間の間の固有全射とし，Xは非特異とする．EをX上の正則ベクトル束とする時，高次順像層 $R^q f_*\Omega_X^n(E)$ $(n=\dim_{\mathbb{C}}X)$ は $(Y,\mathcal{O}_Y)$ 上の連接層となる．この層の更なる性質の研究がこの講演の主題である．X，Yが射影代数的であるときはKollár，中山，fが射影射であるときは森脇，斎藤(盛彦)等による研究があるがここではfがケーラー射のときを考える．

定理I　X上にはケーラー計量 ω_X が存在し，EはX上の中野の意味で半正な曲率をもつ正則ベクトル束とする．このとき次が成立する

(i) $R^q f_*\Omega_X^n(E)$ は捻れを持たない．更にfが平坦射であれば $R^q f_*\Omega_X^n(E)$ は再帰的である $(q\geq 0)$

(ii) Eが半正な正則直線束で非自明な正則切断σをもつとする．このとき層射 $\mu^q(E^{\otimes k}): R^q f_*\Omega_X^n(E^{\otimes j}) \to R^q f_*\Omega_X^n(E^{\otimes j+k})$ は単射である $(j,k\geq 1)$

(iii) $g:(Y,\mathcal{O}_Y)\to(Z,\mathcal{O}_Z)$ を固有全射とし, A を Y 上の g-豊富な直線束とする. このとき

$$R^p g_*(\mathcal{O}_Y(A)\otimes R^q f_*\Omega_X^n)=0 \quad (p\geq 1,\ q\geq 0)$$

(iv) Y も非特異とする. このとき

1) f のファイバーが連結ならば $R^{n-m}f_*\mathcal{O}(K_{X/Y})$ は $\mathcal{O}_Y$ に同型 ($m=\dim_{\mathbb{C}}Y$, $K_{X\setminus Y}=K_X\otimes f^*K_Y^{-1}$)

2) f は Y の正規交叉の因子の外では滑射とすれば $R^q f_*\mathcal{O}(K_{X\setminus Y})$ は局所自由である ($q\geq 0$)

定理 II. (X,ω_X) はコンパクトケーラー多様体とし E を X 上の nef 直線束とする. このとき $R^q f_*\Omega_X^n(E)$ は捻れをもたず ($q\geq 0$), $R^q f_*\Omega_X^n(E)=0$ ($q>n-m-\nu(E)$, $\nu(E)=\max\{k:$ $\overset{k}{\wedge}c_{1,\mathbb{R}}(E|X_y)\neq 0$ in $H^{2k}(X_y,\mathbb{R})$, $X_y=f^{-1}(y)$, "y は一般にとる"$\}$) が成立する

これらの主張は弱1完備ケーラー多様体上の $\bar{\partial}$-作用素の L^2-理論から導かれる

特別講演

Cheeger-Goresky-MacPherson 予想の証明

大沢健夫　名大理

1. Xを連結な複素解析空間とする。Xはパラコンパクトかつ純次元nであるとし、その交叉コホモロジー群と局所L^2コホモロジー群について考察する。まず交叉コホモロジー群の公理的定義を与えるためにXのホイットニー分解の復習をする。Xのstratificationとは、Xの閉部分空間族$\mathcal{S}=\{X_i\}_{i=-1}^{n}$であって次をみたすものをいう。

(i) $X=X_n\supset X_{n-1}\supset\cdots\supset X_0\supset X_{-1}=\phi$

(ii) $\overset{\circ}{X}_i:=X_i\setminus X_{i-1}$ はϕ又はi次元複素多様体(連結とは限らない)である。

$\mathcal{S}$が次をみたすとき$\mathcal{S}$はXのホイットニー分解であるという。

(W) $X_i\supset X_j$ かつ、$x_\mu\in\overset{\circ}{X}_i$, $y_\mu\in\overset{\circ}{X}_j$ ($\mu=1,2,\cdots$) をそれぞれ $x\in\overset{\circ}{X}_j$ に収束する点列であってX内のxの近傍を正則に$\mathbb{C}^N$ $(N\gg 1)$に埋め込んで考えたときにx_μとy_μを結ぶ(実)直線が

ある直線ℓに収束したとする。さらにx_μにおける$\mathring{X}_i$の接空間を$\mathbb{C}^N$の部分空間と見たときそれらが部分空間τに収束したとする。このとき$\ell \subset \tau$が成り立つ。

ホイットニー分解は常に存在することは良く知られているが、局所的にはもっと性質の良い分解が存在する。しかし交叉コホモロジー群を定義するにはホイットニー分解を用いるのが良い。

定義 $\mathcal{S} = \{X_i\}_{i=-1}^{n}$ をXのホイットニー分解とする。X上の細層から成る複体$\mathcal{L}^{\cdot} = \{\mathcal{L}^k, d^k\}$が$\mathcal{S}$に付随する交叉複体であるとは、$\mathcal{L}^{\cdot}$が次のi)～iv)をみたすことをいう。

i) $\mathcal{L}^k = 0$ $(k<0)$

ii) $\mathring{X}_n$上の定数層$\mathbb{C}_{\mathring{X}_n}$の(複体としての)自明な延長$\dot{\mathbb{C}}_{\mathring{X}_n}$に対し、quasi-isomorphism

$$\dot{\mathbb{C}}_{\mathring{X}_n} \longrightarrow \mathcal{L}^{\cdot}|\mathring{X}_n$$

が存在する。

iii) $\mathcal{L}^{\cdot}$のコホモロジー層は各$\mathring{X}_i$の連結成分上局所定数層である。

iv) 各 i 及び $x \in \mathring{X}_i$ に対し、x の X における基本近傍系 $\mathfrak{U}$ で、任意の $U \in \mathfrak{U}$ に対して

$$H^r(U, \mathcal{L}^\cdot|_U) = \begin{cases} 0 & r \geq n-i \\ H^r(U \setminus X_i, \mathcal{L}^\cdot|U \setminus X_i) & r < n-i \end{cases}$$

をみたすものが存在する。

X の二つのホイットニー分解 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ が与えられたとき、それらの共通の「細分」をとることができるから、交叉複体 $\mathcal{L}^\cdot$ 係数の X の(ハイパー)コホモロジー群 $\mathbb{H}^r(X, \mathcal{L}^\cdot)$ は実は分解 $\mathcal{S}$ のとり方によらないことがわかる。また、与えられた複体 $\mathcal{L}^\cdot$ が公理系 i) ～ iv) を $\mathcal{S}$ に対してみたすかどうかは $\mathcal{S}$ のある細分に対してそれらがみたされていることがいえれば十分であることもわかる。$\mathbb{H}^r(X, \mathcal{L}^\cdot)$ を X の r 次交叉コホモロジー群といい、$\mathrm{IH}^r(X)$ で表す。

2. X は局所的にユークリッド空間に正則に埋め込めるので、ユークリッド計量の引き戻しを張り合わせることによって X の正則点全体 X' $(\supset \mathring{X}_n)$ にはエルミート多様体の構造が入る。これはもちろん一意的ではないが、

そのようなエルミート計量 ds_1^2, ds_2^2 について、X の任意の点についてその近傍 U を十分小さくとることにより、$X' \cap U$ 上 ds_1^2 と ds_2^2 は計量として同値 (quasi-isometric) であるようにできる。このことから以下に定義する X 上の層 $\mathcal{W}^r$ がこのようなエルミート計量のとり方に依存せずに定まることがわかる。

$\mathcal{W}^r$ の定義：上記のような X' のエルミート計量を一つ固定し、それを ds_X^2 と書く。X の開集合 W に対し、W' $(=W \cap X')$ 上定義された ds_X^2 に関し二乗可積分な r 形式全体の空間を $L^r(W, ds_X^2)$ とし、

$$\hat{L}^r(W, ds_X^2)$$

$$:= \{ f \in L^r(W, ds_X^2) \mid df \in L^{r+1}(W, ds_X^2) \}$$

とおく。自然な制限写像に関して系 $\{\hat{L}^r(W, ds_X^2)\}_{W \subset X}$ は準層をなすから、それから導かれる X 上の層が定まる。これを $\mathcal{W}^r$ で表す。但し、df は f のカレントとしての外微分を表す。

明らかに $\mathcal{W}^r$ は細層であり、複体 $\mathcal{W}^\cdot = \{\mathcal{W}^r, d^r\}$ が得られる。但し $d^r : \mathcal{W}^r \to \mathcal{W}^{r+1}$ は外微分作用素から導かれたものとする。

X の r 次 L^2_{loc} コホモロジー群 $H^r_{(2),loc}(X)$ を次式

で定義する。

$$H^r_{(2),loc}(X) = \mathrm{Ker}(d : \Gamma(X, \mathcal{W}^r) \to \Gamma(X, \mathcal{W}^{r+1})) \Big/ \mathrm{Im}(d : \Gamma(X, \mathcal{W}^{r-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{W}^r))$$

$\mathcal{W}^r$は細層であったから実は

$$\mathbb{H}^r(X, \mathcal{W}^\bullet) \cong H^r_{(2),loc}(X) \quad (\text{標準的な同型})$$

である。

定義．(p, q)形式で代表される$H^r_{(2),loc}(X)$ $(r = p+q)$ の元全体のなす部分空間を$H^{p,q}_{(2),loc}(X)$で表す。

Cheeger・Goresky・MacPherson予想

(I) $\mathcal{W}^\bullet$は交叉複体の公理系 i) 〜 iv)を(任意のホイットニー分解に対して)満足する。特に、

$$H^r_{(2),loc}(X) \cong IH^r(X)$$

(II) Xがコンパクトなケーラー空間ならば、

$$H^r_{(2),loc}(X) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}_{(2),loc}(X)$$

かつ

$$\overline{H^{p,q}_{(2),loc}(X)} = H^{q,p}_{(2),loc}(X)$$

が成立する。

この予想はHsiang-Pati，長瀬，Saper等の先駆的な貢献の後，筆者の一連の仕事によって完全に解決された。その証明は複素解析空間論における重要な二つの結果（広中の定理，Mostowskiの定理）及び、今まで扱われていなかった弱い条件下でのL^2評価の理論に基いており、本質的な新味があると思う。

講演では証明の道筋をたどる他、Youssinにより発見されたNash blow upへの応用や残された問題例えば斎藤盛彦氏のHodge構造と上記のL^2の意味でのHodge構造の一致に関する予想に対するアプローチ等について述べる予定である。

文献 ① On the L^2 cohomology groups of isolated singularities, to appear in advanced stud. in pure math. 22

② On the L^2 cohomology of complex spaces, Math. Z. 209 (1992) 519-530

③ On the L^2 cohomology of complex spaces II, to appear in Nagoya Math. J.

Schwarz-Pick の補題もう一歩

山下慎二　　都立大理

円板 $\Delta=\{|z|<1\}$ で有界正則函数 f, $|f|<1$, の全体を B, また分数一次函数 $\varepsilon(z-a)/(1-\bar{a}z)$, $|\varepsilon|=1>|a|$, の全体を M とする。$M\subset B$ で, $f\in B$ に対して Schwarz-Pick の補題とは,

$$\Gamma(z,f)\leq 1 \quad \forall z\in\Delta,$$

但し, $f\in B$, $z\in\Delta$ に対して,

$$\Gamma(z,f)=(1-|z|^2)|f'(z)|/(1-|f(z)|^2).$$

さらに詳しく, $f\in B$ なら,

(1) $f\in M \Longleftrightarrow \Gamma(z,f)=1\ \exists(\forall) z\in\Delta$;

(2) $f\notin M \Longleftrightarrow \Gamma(z,f)<1\ \ \forall z\in\Delta$.

場合(2)を更に解析する.

$$2(\partial/\partial z)=\partial/\partial x-i\,\partial/\partial y,\ z=x+iy,$$

を使えば, $\Gamma(z,f)\leq 1\ \forall z\in\Delta$ は

$$(1-|z|^2)|(\partial/\partial z)f(z)|\leq 1-|f(z)|^2$$

$\forall z \in \Delta$, に他ならないことを鑑賞の手引

とする.

定理. $f \in B$ なら,

(3) $(1-|z|^2)|(\partial/\partial z)\Gamma(z,f)| \leq 1 - \Gamma(z,f)^2$

$\forall z \in \Delta$. 更に $f \notin M$ なら,

(3) で等号が $z \in \Delta$ で成立. $\Longleftrightarrow$

$$(*)\ f(w) = \frac{\varphi((w-z)/(1-\bar{z}w)) + Q}{1 + \bar{Q}\varphi((w-z)/(1-\bar{z}w))},$$

$w \in \Delta$. 但し, $\varphi(w) = wT(w)$, $T \in M$,

$Q \in \Delta$. また, f が $(*)$ の形なら,

$(1-|w|^2)|(\partial/\partial w)\Gamma(w,f)| = 1 - \Gamma(w,f)^2$

$\forall w \in \Delta$. また, もし, $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Delta$

なら (3) の不等式はあらゆる点 $z \in \Delta$

で, $<$ である.

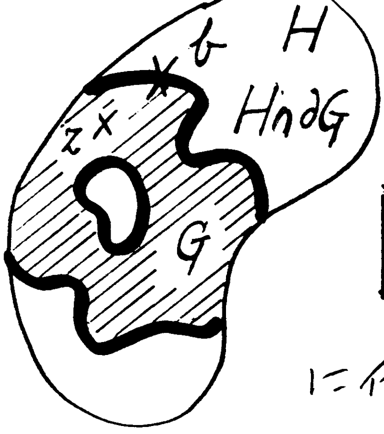
29 Poincaré 密度の比較

山下慎二 都立大理

平面内の双曲領域 R の Poincaré 測度要素を $\mu_R(z)|dz|$ とすると，函数 μ_R は Poincaré 密度と呼ばれる。例．$\Delta = \{z; |z|<1\}$ なら $\mu_\Delta(z) = 1/(1-|z|^2)$．$R$ 内の 2 点 z, w の Poincaré 距離は

$$d_R(z,w) = \inf_\gamma \int_\gamma \mu_R(\zeta)|d\zeta|,$$

但し，γ は z, w を結ぶ長さのある曲線，で与えられる。



双曲領域 H の真部分領域 G を考えると，双曲測度原理とは

$$\boxed{\mu_H(z)/\mu_G(z) < 1, \ \forall z \in G,}$$

に他ならない。

この改良をする。

G の H での相対境界を $H\cap\partial G$ とすれば，
$z\in G$ と $H\cap\partial G$ との d_H に依る距離は

$$d_{G,H}(z)\equiv\inf_{b\in H\cap\partial G} d_H(z,b)>0$$

である。

(1) $\mu_H(z)/\mu_G(z)<\sqrt{1-\exp(-4d_{G,H}(z))}\ (<1)$
$\forall z\in G.$

(2) G が単連結ならば，
(*) $\mu_H(z)/\mu_G(z)\le 1-\exp(-4d_{G,H}(z))$
$\forall z\in G.$

(*) の不等号 $\le$ は "殆んどの場合" $<$ で置き換えが出来る。また，$\exp(\cdot)$ 中の定数 -4 は，C，$-4<C<0$，で置き換えれない。(1) の証明には前講演の結果を使い，(2) の証明には，単葉函数の補題を使う。

30　Riemann面の自己同型群について

栗林暲和　中央大理工
大森昭治　東農大第三高校

Xを種数$g(\geq 2)$のcompactなRiemann面とする．その自己同型群$Aut(X)$は$GL(g,\mathbb{C})$の部分群として表現される．その表現を$\rho: Aut(X) \to GL(g,\mathbb{C})$によって表す．$Aut(X)$の部分群$AG$の像を$\rho(AG;X)$で表す．$GL(g,\mathbb{C})$の部分群$G$は種数$g$のcompactなRiemann面$X$と$Aut(X)$の部分群$AG$が$\rho(AG;X)$が$G$に$GL(g,\mathbb{C})$-共役であるように存在するならば種数$g$のcompactなRiemann面から来るといわれる．

つぎの結果を得る：

定理．有限群$G \subset GL(g,\mathbb{C})$がコンパクトなRiemann面$X$から来るための必要十分な条件は1つのconjugate class rotation datum $r: CY^c(G) \to \mathbb{Q}$が

(i)　rに対してGはRH^*条件を満足する．

(ii)　rに対応したsurjective homomorphism $\xi: \Gamma(G) \to G$が存在する．

ように存在することである．

31 On the convergence of the sequence of the Shiba's behavior spaces.

同志社大学
工学部
松井 邦光

R：リーマン面で種数 $g \leqq \infty$，$\{A_j, B_j\}$ は R の標準基底.

$D_K(J)=\{1,2,\dots,g\}$ の K 組えの分割 $\{J_k\}_{k=1}^{K}$，

$\mathcal{L}_K=\{L_k\}_{k=1}^{K}$；$L_k$ は z-平面上の原点を通る直線.

$\Lambda_h=\Lambda_h(R)$：ノルム有限な R 上の複素調和微分の実数体上にはるヒルベルト空間で内積は実デリクレ内積,

Λ_{hse}, Λ_{h0}, …… は夫々に対応する Λ_h の部分空間,

$\Lambda_1^{\perp}$ は Λ_h の閉部分空間 Λ_1 の Λ_h 内での直交補空間,

定義 1. $\Lambda_x=\Lambda_x(D_K(J),\mathcal{L}_K)\subset\Lambda_{hse}$ は (i) $\Lambda_x = i\Lambda_x^{*\perp}$, (ii) $\int_{J_p}\Lambda_x\subset L_p$, $p=1,2,\dots,K$, 但し $\int_{J_p}\Lambda_x=\left\{\int_{A_j,B_j}\lambda,\ \lambda\in\Lambda_x,\ j\in J_p\right\}$ を満すものを S-space という。

$\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S-space の列, $\Lambda_x'=\{\lambda;\ \exists\{\lambda_n\in\Lambda_n\}$ s.t. $\|\lambda-\lambda_n\|\to 0$ as $n\to\infty\}$, $\Lambda_x=\{\lambda;\ \exists\{\lambda_n\in\Lambda_n\}$ s.t. $\sup_n\{\|\lambda_n\|\}<\infty$, 且 $\{\lambda_n\}$ の広義一様収束する部分列の極限 $=\lambda\}$, とおくと次が成立する。

Lemma 1. (i) $i\Lambda_x^{*\perp}=\Lambda_x'\subset i\Lambda_x^{*\perp}=\Lambda_x$, 但し $i=\sqrt{-1}$.

(ii) $\Lambda_h = \Lambda'_x \dotplus i\Lambda'^*_x \dotplus \Lambda_x \cap i\Lambda^*_x \cap \Lambda_a \dotplus \Lambda_x \cap i\Lambda^*_x \cap \Lambda_{\bar a}$.

定義 2. $\Lambda_x = \Lambda'_x$ のとき $\{\Lambda_n\}$ は Λ_x に収束するといい

$\Lambda_n \Rightarrow \Lambda_x$ で示す。 明らかにこの時 Λ_x は S-space

である。

今各 $\varphi \in \Lambda_a$ (resp. $\psi \in \Lambda_{\bar a}$) に対し $\varphi = \lambda_n \dotplus i\lambda_n^*$,

$\lambda_n \in \Lambda_n$, $\forall n$. と分解可能故 $\exists \{\lambda_{n_k}\}$ s.t. $\lambda_{n_k} \to \lambda$,

広義一様, 且 $\varphi = \lambda + i\lambda^*$. この時

$$\lambda = \alpha_n \lambda_n \dotplus (1-\alpha_n) i\lambda_n^* + \lambda'_n - i\lambda'^*_n, \quad \Lambda_n \ni \lambda'_n \perp \lambda_n,$$

$$\lambda_n = \alpha_n \lambda + (1-\alpha_n) i\lambda^* + \mu_x^n - i\mu_x^{n*}, \quad \Lambda_x \ni \mu_x^n,$$

なる実数の列 $\{\alpha_n\}$, ([illegible] $\frac{1}{2} \leqq \alpha_n \leqq 1$) が φ に対応する。

各 $\psi \in \Lambda_{\bar a}$ に対しても同様。 この時次が成立.

定理. $\Lambda_n \Rightarrow \Lambda_x$ なる為の必要且充分なる条件は

$\forall \varphi \in \Lambda_a$ (resp. $\forall \psi \in \Lambda_{\bar a}$) に対し, 対応する α

$= \lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k}$ (resp. $\beta = \lim_{k\to\infty} \beta_{n_k}$) が $\{\alpha = \frac{1}{2}$ or

$\alpha = 1\}$ 且 $\{\beta = \frac{1}{2}$ or $\beta = 1\}$ なる事である。

次に $\{\Lambda_n\}$ として特定の Λ_n (z.B. $\Lambda_n = \Lambda_{1n}$, Λ_{1n} は

春の学会でのべた S-space) をとった時 $\Lambda_{1n} \Rightarrow \Lambda_{1x}$

かどうかを考える。

32 On two-sheeted covering surfaces of the unit disc

神 直人 学習院大・理

(R, π) を単位円板 $\Delta = \{|z|<1\}$ の分岐した限界のない被覆リーマン面，π を射影とする。本講演では特に2葉の被覆面を考える。分岐点の π による像を $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ とすれば，次のことが成り立つ。

定理 (R, π)，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上記の通り，このとき，

$$(*) \quad \sum_{z_n \neq 0} \frac{1}{\log \frac{1}{1-|z_n|}} < +\infty$$

ならば，R は極大なリーマン面ではない。特に disc with crowded ideal boundary をもつ。

上記の条件 $(*)$ は，Blaschke の条件，$\sum_n (1-|z_n|) < +\infty$ より強いことに注意しておく。

逆に $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で表わされる，(R, π) が

極大なリーマン面となるための十分条件は
得られていない。

33. トーラスとリーマン球面を交差的に縫い合わせて得られる新しいトーラスのモジュラス

堀内　龍太郎　　同志社大学工学部
柴　雅　和　　広島大学理学部

与えられたリーマン面を変形する方法は色々ある；たとえば，擬等角写像を用いる方法・Schiffer の変分を用いる方法などはよく知られたものである．私たちの目的はこれらとは異なる型の変形を与える操作を調べることである．考える操作は実に簡明である：与えられたリーマン面の上に1点を固定しそこからでる(解析的な)Jordan 弧に沿ってリーマン球面を交差的 (crosswise) につなぐ．Jordan 弧を長くしたり短くしたりすれば，あるいはもっと一般に，Jordan 弧の終点を動かせば，得られるリーマン面のモジュラスは変わる．このようにして新しいリーマン面を得る操作は，Schiffer 変分によく似てはいるが，切り抜く部分が円板ではなくまた同時につけ加えるものがいつも一定という点で，Schiffer の変分とは異なるものである．議論を詳細に行うために対象をトーラスに絞る．このように簡単な場合でも，出来上がるトーラスのモジュラスを決定するのはそれほど容易なことではない．この問題はまた物理的に意味を持っている．すなわちいわゆる Rankine の卵形の関数論的な表現である．考える Jordan 弧がトーラス上の測地線の一部であるときには，上のようにリーマン球面を縫い合わせることは，トーラスの上の一様な流れに対して障害物または湧き出しをおいたときの新しい流れを考えることでもある．平面の場合は古典的だが，トーラスの場合にはまだ知られていないと思われる．

私たちは上の問題を代数的に取り扱う．Tを与えられたトーラスとし，それはリーマン球面Σ_y上の 2 枚の被覆面として実現されているとする．その分岐点は $0, 1, \lambda$ および ∞ の上にあるとしてよい．この面の

上に ∞ 上にある点を始点とする Jordan 弧γをとる；その終点のリーマン球面への射影をτで示すことにする．トーラス上にγ に沿って切り込みをいれ，さらにリーマン球面上にもγの射影 (それもγと書く) に沿って切り込みをいれて，これら 2 つのリーマン面をγに沿って交差状につなぐ．得られたリーマン面を $T_\lambda(\tau)$ と書くことにする．明らかに，$T_\lambda(\tau)$ は，截線入りのトーラス $T_\lambda \setminus \gamma$と截線入りのリーマン球面 $\Sigma_y \setminus \gamma$とに分解する．さらに，$T_\lambda(\tau)$ は

$$(*)\quad y^2+3(u^2-1)v^2xy+\{(\pm 2u^3+3u^2-1)v^3-1\}y-x^3-3vx^2=0$$

の形の式で書けることがわかる；ここに u,vは関係式

$$(**)\qquad \begin{array}{lcl} 4(u^2-1)^3v^6-4(\pm u^3+1)v^3+1 &=& \lambda+\tau, \\ 4(\pm 2u^3+3u^2-1)v^6-4v^3 &=& \lambda\tau \end{array}$$

に従う．

私たちは，トーラスに球面をつなぐのではなく，逆に，$\lambda,\tau\in\mathbb{C}$ を固定することから出発する．方程式 $(*)$, $(**)$ で定義されるトーラスの族を記号 $T_{\lambda,\tau}$で表す．それは $(**)$ の解の集合 $\mathbf{S}_{\lambda,\tau}$によって parametrize される；$(u,v)\in\mathbf{S}_{\lambda,\tau}$に対応するトーラスを $T[u,v]$ で表す．先ほど構成した $T_\lambda(\tau)$ は確かに $T_{\lambda,\tau}$に属するが，一方，$T_{\lambda,\tau}$のすべての元が 2 つのリーマン面に分解するとは限らないことを例をもって知ることができる．適当な $(u,v)\in\mathbf{S}_{\lambda,\tau}$に対して $T[u,v]=T_\lambda(\tau)$ ではあるのだが，(u,v) の値を正確に知ることは困難である．その代わりになる方法として，私たちは，与えられたλ,τからトーラス $T_\lambda(\tau)$ とそのモジュラス $J_\lambda(\tau):=J(T_\lambda(\tau))$ を得るアルゴリズムを与える．この際に重要なのはリーマン面 $(*)$ の分岐点が果たす役割である；簡単にいえば，その 3 枚の葉がいかにつながっているかである．

34 Moduli of ring domains obtained by a conformal welding

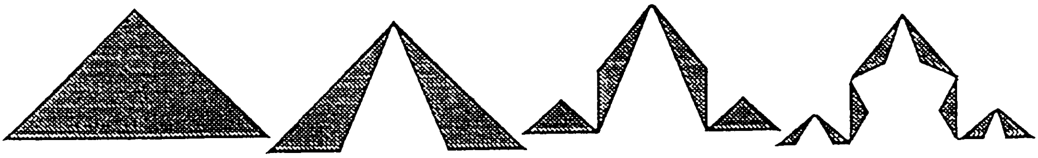
西川金二郎　　近江八幡高
米谷　文男　　京都工繊大　工芸

及川先生は，正方形の上辺と下辺の conformal welding によって得られる円環領域の moduli 全体が区間 $(0,2\pi]$ になることを示され，その際，数多くの興味深い問題を上げられた中で，一つの conformal welding によって得られる円環領域の moduli が取る値の範囲を問題とされています。

ここでは，その範囲が 0 の正近傍を含む場合があることを報告致します。

さて，長方形 $Q = \{x+iy;\ 0<x<a,\ 0<y<b\}$ の上辺$L_+ = \{x+iy;\ 0<x<a,\ y=b\}$，下辺 $L_- = \{x+iy;\ 0<x<a,\ y=0\}$ として，向きを保つ位相写像 $\phi : L_+ \to L_-$ に対して，次の条件を満たす(G,C,f)が存在する時，ϕ による conformal welding 可能という。(ただし，G は 円環領域，C は円環の境界を結ぶ Jordan 曲線，$f : Q \cup L_+ \cup L_- \to G$ は 連続，Q上等角，$f = f \circ \phi$ on L_+ で $f(L_+) = C$ である。この(G,C,f)をϕ による Q の conformal weldingといい，ϕ を welding function という。Gと等角同値な同心円環 を$\{z;\ r_1<|z|<r_2\}$ として $\log\dfrac{r_2}{r_1}$ が G の modulus である。それを M(G) と表す。ここでは，$M_\phi = \{M(G) : (G,C,f)$ は ϕ による Q の conformal welding$\}$ を問題としている。任意の (G,C,f) と $(\underline{G},\underline{C},\underline{f})$ に対して $\underline{f} \circ f^{-1}$が G から $\underline{G}$ への等角写像となるとき，conformal welding は一意であるという。このとき勿論 M_ϕ は一点である。 C の2次元測度が正ならば M_ϕ は区間を含み conformal welding は一意ではない。 例は次のように構成される。

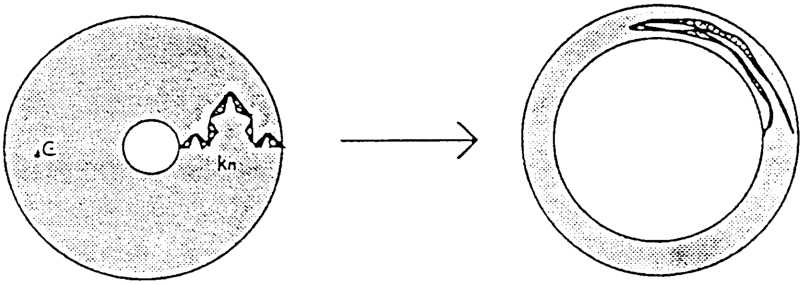
まずコンパクト集合の減少列 $\{K_n\}_{n=1..}$ $(K_n \supset K_{n+1})$ を次のように取る。



K_1　　K_2　　K_3　　K_4

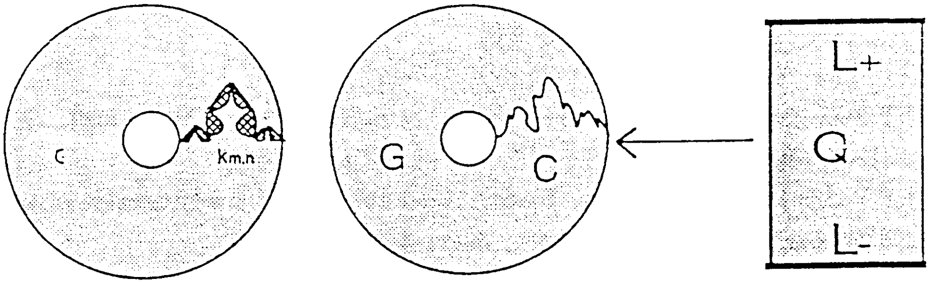
$K_\infty = \cap K_n$ は Jordan 曲線となる。

コンパクト集合 K_n がGの境界を橋渡ししているものとして，円環 G 内の K_n 上の等角構造の変形によってその modulus をいくらでも小さくすることができる。



次にコンパクト集合の減少列 $\{K_{2,n}\}_{n=2..}$ $(K_1 \supset K_{2,2}, K_{2,n} \supset K_n)$ を選んで Jordan 曲線 $K_{2,\infty} = \cap K_{2,n}$ 上の等角構造の変形によってその modulus を $M(G)/2$ まで変えられるようにできる。以下同様にして，コンパクト集合の減少列 $\{K_{m,n}\}_{n=m..}$ $(K_{m-1,m-1} \supset K_{m,m}, K_{m,n} \supset K_{m-1,n})$ を選んで Jordan 曲線 $K_{m,\infty} = \cap K_{m,n}$ 上の等角構造の変形によってその modulus を $M(G)/m$ まで変えられるようにできる。

そうして Jordan 曲線 $C = \cap K_{m,m}$ 上の等角構造の変形によって，その modulus をいかようにも小さくすることができる。



G－C からある長方形 Q への等角写像 g の連続的拡張で C は長方形の下辺，上辺に移っているとして，$\phi = g \circ g^{-1}: L_+ \to L_-$ によってQ の welding function を定義すれば，この ϕ に対する Q の conformal welding によって得られる円環領域の moduli 全体は0 の正近傍を含む。又，及川先生の一つの定理によって，この ϕ の導関数は殆ど至る所 0 となっていることがわかる。

35 commutators in discrete groups

古沢 治司 金沢女子短期大学

Auto($\bar{\mathbb{C}}$)の要素 f は f $=(az+b)/(cz+d)$, $(a,b,c,d\in C, ad-bc=1)$ と表わされる。

f の行列表示に関係なく SL(2,C)の要素 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ があって，次の事については

$tr(f)=tr(A)=a+d$ とおけば，$\beta(f)=tr^2(f)-4$，$\gamma(f,g)=tr([f,g])-2$ が定まる。ここで，$f,g\in$ Auto($\bar{\mathbb{C}}$), $[f,g]$は commutator $fgf^{-1}g^{-1}$ を表す。

G.Rosenberger(1986)は Auto(H) の要素 f，g から生成される群が非初等的 Fuchs 群 $\langle f,g\rangle$であるとき，$|\gamma(f,g)|\geqq 2-2\cos(\pi/7)$ を証明した。

Auto($\bar{\mathbb{C}}$) の要素 f，g から生成される 非初等的 discrete group $\langle f,g\rangle$ について，$\beta(f)=\beta(g)$ の条件のもとに $|\gamma(f,g)|$ の下からの評価が Jϕrgensen, Gehring-Martin によって得られた。

ここでは，これらの結果と予想の紹介をして，さらにこれに関する定理の報告と collarの補題との関係を述べる。

参考文献

[1] H.Furusawa, A remark on the hyperbolic collar lemma, Tohoku Math. J. 39 (1987)291-298.

[2] F.W.Gehring & G.J.Martin, Inequalities for mobius transformations and discrete groups, J.Rein Angew. Math. 418(1991)31-76.

[3] F.W.Gehring & G.J.Martin, preprint.

[4] T.Jϕrgensen, Commutators in SL(2,C), Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, Princeton Univ. press 1980,301-303.

[5] G.Rosenberger, All generating pairs of all two-generator Fuchsian groups, Arch. Math. 46(1986)198-204.

36 $\mathcal{U}(1, n; \mathbf{C})$ の離散部分群の point of approximation について

神谷茂保　岡山理科大学
工学部

G を、ユニタリ群 $\mathcal{U}(1, n; \mathbf{C})$ の離散部分群とする。その Limit Set を $L(G)$ と書く。
$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \overline{B^n}$ に対して $d^*(z, w)$ を、次の様に定義する。すなわち $d^*(z, w) = |1 - \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j w_j|^{\frac{1}{2}}$.
$\zeta \in \partial B^n$ に対して $D_a(\zeta)$ を、

$$D_a(\zeta) = \{ z \in B^n \mid d^*(z, \zeta) < a\, d^*(z, z) \}$$

で定義する。（ここで $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ とする。）
$\zeta \in L(G)$ が、G の point of approximation であるとは、G のことなる元の列 $\{g_k\}$、および $D_a(\zeta)$ が次を満たす様にとれる時をいう。すなわち $g_k(0)$ が $D_a(\zeta)$ の内より ζ に近づく。G の point of approximation 全体の集合を $L_D(G)$ と書くことにする。$L_D(G)$ の点に対して、次のことを報告したいと思います。

(I) $\zeta \in L(G)$, $g_1, g_2, \cdots$: Gのことなる元の列に対して次の(1), (2), (3), (4)は同値である。

(1) $\zeta \in L_D(G)$;

(2) $^\forall w \in B^n$ に対して $d^*(\zeta, g_k(w)) = O(\|g_k\|^{-1})$,

(3) $^\forall w \in B^n$, ζでおわるgeodesic ray L に対して $d(g_k(w), L) = O(1)$;

(4) B^nのcompact subset K で $g_k(L) \cap K \neq \phi$ となるものが存在する。

(II) $\zeta \in L_D(G)$は、Dirichlet polyhedronの境界には存在しえない。($n > 1$の時Dirichlet polyhedronはconvexとは限らない。)

(III) $n > 1$の時のζへの$g_k(z)$の近づき方は、non-tangentialとは限らない。

37 Extreme Kleinian groups について

佐藤 宏樹 静大・理

山田 竜二 修善寺工高

2-generator group $G=\langle X,Y\rangle, X,Y\in SL(2,\mathbb{C})$ が discrete group であるための次の必要条件はよく知られている．

定理A(Jørgensen [1]). $G=\langle X,Y\rangle$ が non-elementary discrete group ならば

$$J(G):=|\mathrm{tr}^2X-4|+|\mathrm{tr}(XYX^{-1}Y^{-1})-2|\geqq 1.$$

ここで，下限 "1" は best possible である．

J(G) のことを $G=\langle X,Y\rangle$ の Jørgensen 数という．J(G)=1 となる klein 群(extreme Kleinian group という)については Jørgensen-Kiikka[2]の結果がある．その論文の最後に次の注意がある：非加算個の extreme non-Fuchsian Kleinian groups が存在する．しかし，具体的なことはそこには何も書かれていない．これに関し2年程前に得られた結果[4]を報告する．その一部はYamada[5]の修士論文で発表された．尚，最近 Jørgensen-Lascurain-Pignataro[3]も類似の結果を得たことをFaxにより知った．

A,B,S,T,U を次のようにおく：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B_k=\begin{pmatrix}ik & -(1+k^2)\\ 1 & ik\end{pmatrix}\quad (k\geqq 0)$$

$$S_k=AB_k^{-1}AB_k=\begin{pmatrix}ik & 1-k^2-ik\\ -1 & 1-ik\end{pmatrix},$$

$$T_k=AB_kAB_k^{-1}=\begin{pmatrix}-ik & 1-k^2+ik\\ -1 & 1+ik\end{pmatrix},$$

$$U_k = B^{-1}A^{-1}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2ik \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>補題</u>．G を上の A,B により生成された群とする：$G=\langle A,B\rangle$．このとき，$A, U, A^{-1}S^{-1}, A^{-1}T^{-1}$ も G の生成元である．

<u>定理 1</u>．G を上の A,B により生成された群とする：$G=\langle A,B\rangle$．このとき，

(1) $k>1$ ならば，G は第 2 種の Klein群であり，$\Omega(G)/G$ は signature $(0;2,2,3,3)$ の Riemann 面である．

(2) $k=1$ ならば，G は第 2 種の Klein群であり，$\Omega(G)/G$ は signature $(0;3,3,\infty)$ の Riemann面である．

(3) $\sqrt{3}/2<k<1$ の場合 $\Omega(G)/G$ が signature $(0;3,3,q)$，$q=4,5,6\cdots$ なる，Riemann面である第 2 種の Klein群 G が存在する．ここで，$2k^2-1=\cos(\pi/q)$．

(4) $0<k\leqq\sqrt{3}/2$ の場合，第 1 種 Klein群 G が存在する．

(5) $k=0$ ならば，G は modular群であり，$\Omega(G)/G$ は signature $(0;2,3,\infty)$ なるふたつの Riemann面の和である．

<u>定理 2</u>．G を上の A,B により生成された群とする：$G=\langle A,B\rangle$．このとき，G は extreme Kleinian group である：$J(G)=1$．

引用文献

[1] T.Jørgensen, On discrete groups of Möbius transformations, Amer.J.Math.,98(1976), 739-749.

[2] T.Jørgensen and M.Kiikka, Some extreme discrete groups, Ann.Acad.Sci.Fenn.,1 (1975),245-248.

[3] T.Jørgensen, A.Lascurain and T.Pignataro, Translation extensions of the classical modular group, to appear.

[4] H.Sato and R.Yamada, Extreme Kleinian groups, to appear.

[5] R.Yamada, On Jørgensen's inequalities for Kleinian groups, Master's thesis ,1991 (in Japanese).

38 幾何学的有限Klein群の代数的極限についてのAhlfors予想の成立

大鹿 健一　　東工大理

部分的解決

Γを有限生成Klein群とする時Ahlfors予想とは次のようなものである。

◎ΓをS^2へのactionと見た時，そのlimit set Λ_Γについて $\Lambda_\Gamma = S^2$ 又は Λ_Γ の Lebesgue measure $= 0$ が成立する。

現在点，この予想は，Γがgeometrically finiteな時，Γがindecomposableな時には解かれている。(それぞれAhlfors，Bonahon)

従って残された問題はdecomposable，geometrically infiniteなKlein群についてAhlfors予想を解くことである。

現在点に知られているこのような群の例は全てgeometrically finite群のalgebraic limitとして構成されたものである。

一般にThurstonは次のように予想している。

予想：全てのfinitely generated Klein群は，geometrically finite群の列のalgebraic limitであろう。

この予想を念頭に置いて，次の定理を証明した。

主定理　Γがpurely loxodromic finitely generated Klein群で，geometrically finte Klein群の列のalgebraic limitであるとする。この時ΓについてAhlfors予想は正しい。

証明は，$\mathbb{H}^3/\Gamma$のendの構造をΓに収束するgeometrically finite群の情報から引き出すことにpointがある。その為にgeometric limit，branched cover等を使う。

39 Punctured Surface の Teichmüller 空間について

中西 敏浩 静岡大学理学部

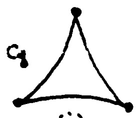
－だんな、そいつぁ本当ですかい?－

種数 g の向きのついた閉曲面 Σ_g から点 $x_0, x_1, \cdots, x_s$ を除いたものを Σ_g^{s+1} とする。 $T_{g,s+1}$ で 種数 g の $(s+1)$-punctured Riemann 面の Teichmüller 空間を表わす。$T_{g,s+1}$ の点は marked Riemann 面 (R, f) の同値類である (f は Σ_g^{s+1} から R への向きを保つ同相写像)。$T_{g,s+1}$ は $d(=6g-6+2(s+1))$ 次元球と同相である。

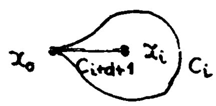
<u>命題</u> $s \geqq 0$, $2g-2+(s+1)>0$ とする。このとき $T_{g,s+1}$ は $\mathbb{R}_+^{d+1}$ の次の方程式で定まる部分空間として表現される。

$$\sum_{q=1}^{Q} \frac{L_{1(q)}^2 + L_{2(q)}^2 + L_{3(q)}^2}{L_{1(q)} L_{2(q)} L_{3(q)}} + \sum_{i=1}^{s} \frac{2}{L_i} = 2\alpha \qquad (1)$$

座標系 $(L_1, L_2, \cdots, L_{d+1})$ は次のようなものである: まず $\{x_0, x_1, \cdots, x_s\}$ に端点をもつ互いに素な Σ_g^{s+1} 上の arcs $C_1, \cdots, C_{d+1}, C_{d+2}, \cdots, C_{d+s+1}$ を Σ_g^{s+1} を3角形分割するように取る。 即ち $\Sigma_g^{s+1} - \bigcup_{i=1}^{d+s+1} C_i$ の各成分は次の図の形の領域となるようにする。



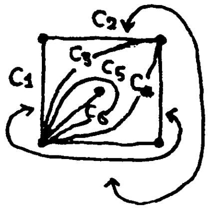
(i)



(ii)

更に C_{d+1+i} $(i=1,\dots,s)$ は x_0 と x_i を結ぶ simple arc

で C_i は x_0 を基点にもつ simple arc（端点を除いて）



で C_{d+1+i} を他の arcs から分離するもの

とする（左図は twice punctured torus の場合）。

このとき (i) の形の領域が $Q=4g+s-2$ 個

あるが、それらを $T_1,\dots,T_Q$ とし $C_{1(q)}, C_{2(q)}, C_{3(q)}$ を T_q の

境界上の arc とする。 $[(R,f)]\in T_{g,s+1}$ に対して R の各

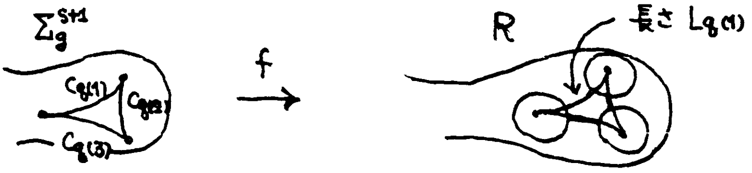
puncture のまわりの punctured disc を双曲的面積 $a<1$

をもち、かつ universal covering $\mathbb{H}=\{z=x+iy \mid y>0\}$ (with $ds=\frac{|dz|}{y}$)

内の horodisc にリフトされるように取る。 $f(C_i)$ $(i=1,\dots,d+1)$

と端点固定でホモトピックな geodesic を取り、端点のまわ

りの punctured discs にはさまれた部分弧の長さを L_i とする



のである。 d は a のみに依存する定数である。

（命題の主張おわり、やれやれ）

(1) で定まる表現は R.C. Penner による decorated Teichmüller

space への $T_{g,s+1}$ の自然な埋め込みである。

40.

Grunskyの不等式とそのTeichmüller空間への応用

東工大 理 志賀 啓成
名大 理 谷川 晴美

単位円Δに作用するFuchs 群のTeichmüller空間のBers embedding $T(\Gamma)$においては、各点は単位円板の外部Σにおける（∞で正規化された）単葉関数の Schwarzian derivative である。一般に、∞ の近傍で単葉な有理型関数fに対して、fの Grunsky 係数 $\{b_{mn}(f)\}_{m,n=1}^{\infty}$ は

$$\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=-\sum_{m,n=1}^{\infty}b_{mn}(f)z^{-m}\zeta^{-n}$$

なる関係式で定義される。$\varphi\in T(\Gamma)$に対してはその点が定める単葉関数の Grunsky 係数を$\{b_{mn}[\varphi]\}_{m,n=1}^{\infty}$と書くことにする。また、

$$\kappa(\varphi)=\sup\left\{\left|\sum\nolimits_{m,n=1}^{\infty}\sqrt{x_m x_n}\,b_{mn}[\varphi]\right|:x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell^2,\|x\|\le 1\right\}$$

とおく。

ここでは、Krushkal (1989) の結果を拡張して次の定理を示す。

定理 1 $\varphi\in T(\Gamma)-\{0\}$で

(1) $$\rho(\kappa(\varphi),0)=c_{T(\Gamma)}(0,\varphi)=\tau_{T(\Gamma)}(0,\varphi)$$

を満たすものが存在するための必要十分条件は$\|\Theta_\Gamma\|=1$となることである。ここに、$c_{T(\Gamma)}$, $\tau_{T(\Gamma)}$はそれぞれ、Teichmüller space $T(\Gamma)$におけるCarathéodory distance、Teichmüller-Kobayashi distanceである。また、ρはΔにおける Poincaré distance。Γが特に単位円Δに作用する初等的な Fuchs 群ならば、零点が全て偶数 order となる、可積分な Γ に対する正則２次微分で定義された Teichmüller disk 上で Teichmüller-Kobayashi distance と Carathéodory distance は等しく、(1) が成立する。

一般に Teichmüller-Kobayashi distance は単純な被覆に対してはその

持ち上げで不変になることが知られているが、初等的な Fuchs 群上 Carathéodory distance に対しても類似の結果が示せる。

系 1 定理 1 と同じ仮定の下で、同様の Teichmüller disk 上

$$c_T = c_{T(\Gamma)} = \tau_T = \tau_{T(\Gamma)}$$

が成立する。ここに c_T, τ_T は universal Teichmüller space 上の Carathéodory distance, Teichmüller-Kobayashi distance である。

次に、Γ を任意の Fuchs 群としたとき、

定理 2 任意の $\varphi \in T(\Gamma)$ に対応する quasi Fuchsian group を Γ^{φ} とすると

$\delta(\Gamma)$ = Γ の critical exponent

$$\frac{1}{1+\kappa(\varphi)}\delta(\Gamma) \leq \delta(\Gamma^{\varphi}) \leq \frac{1}{1-\kappa(\varphi)}\delta(\Gamma)$$

が成り立つ。特に、φ と 0 との Teichmüller distance を d とすると

$$\frac{e^d+1}{2e^d}\delta(\Gamma) \leq \delta(\Gamma^{\varphi}) \leq \frac{e^d+1}{2}\delta(\Gamma).$$

geometrcally finite な Klein 群に対してはその critical exponent と limit set の Hausdorff 次元が等しい（Sullivan）から、

系2 Γ が有限生成であるとき、定理と同じ記号のもとで

$$\frac{1}{1+\kappa(\varphi)}H(\Gamma) \leq H(\Gamma^{\varphi}) \leq \frac{1}{1-\kappa(\varphi)}H(\Gamma)$$

$$\frac{e^d+1}{2e^d}H(\Gamma) \leq H(\Gamma^{\varphi}) \leq \frac{e^d+1}{2}H(\Gamma)$$

が成り立つ。ここに、$H(G)$ は Klein 群 G の limit set の Hausdorff dimension である。

また、関連した結果にも触れる。

41 tubeのextremal lengthについて

大津賀 信 学習院大・理

開集合$G\subset R^d$内のC^1ベクトル場をvとし，$E=\{x;v(x)=0\}$とおく。$G-E$内のC^1曲面上にある$(d-1)$次元開集合τの各点yを通る，$dx/dt=v$の解$x(t;y,0)$，すなわち軌道の部分弧でyを含むものをγ_yとし，$\Gamma=\{\gamma_y;y\in\tau\}$が互いに素で開集合をなすとき，これを$\tau$を通るtubeとよぶ。また，$\Gamma$の一部で$\tau$との交わりがBorel集合ならば，それをsubtubeとよぶ。subtube上の関数の可測性はτ上で調べる。

以下vはsolenoidal，すなわち$\operatorname{div} v\equiv 0$と仮定する。$R^d$内の曲線族$\Lambda$に対する通常のmoduleやその逆数であるextremal lengthの定義を一般化して，q，$\omega\geq 0$がBorel可測で，$\int_\gamma \rho q\,ds\geq 1$ for $^\forall\gamma\in\Lambda$のとき，非負Borel可測なρは(Λ,q)-ad.とよばれ，module $M_p(\Gamma;q,\omega)$を$\inf\{\int_{R^d}\rho^p\omega\,dx;\ \rho\ (\Lambda,q)\text{-ad.}\}$で定める。以下$\Gamma$はsubtubeで，$^\forall c\in\Gamma$に対して$\int_c q\,ds>0$とする。

定理 1。$p>1$のとき，$g(c)=\int_c q^{p'}|v|^{p'}\omega^{1-p'}dt$は$\Gamma$上

可測で，$M_p(\Gamma;q,\omega)=\int_\Gamma d\Phi(c)/g(c)$。ここに $1/p+1/p'=1$，$[\Gamma]=\bigcup_{c\in\Gamma}c$ で ν は法線のとき，flux $\Phi(\Gamma)$ は $\int_{\tau\cap[\Gamma]} v\cdot\nu\, dS$ で与えられる。次に，$M_p(\Gamma';q,\omega)=0$ である $\Gamma'\subset\Gamma$ に対し，ρ が $(\Gamma-\Gamma',q)$-ad. でかつ $\int\rho^p\omega\, dx=M_p(\Gamma;q,\omega)$ のとき，ρ を p-alm. extremal とよぶ。いま $\Gamma_0=\{c\in\Gamma;\ g(c)=0\}$ の flux 0 のとき，$x\in c\in\Gamma$ なら $\rho(x)=q^{p'-1}|v|^{p'-1}\omega^{1-p'}\cdot(g(c))^{-1}$，$[\Gamma]$ 外で $\rho=0$ とすると，ρ は p-alm. extremal である。

定理2。$M_1(\Gamma;q,\omega)=\int_\Gamma d\Phi(c)/g(c)$，ここに $g(c)=\mathrm{ess.\,sup}_c(q|v|\omega^{-1})$ で $\Phi(\{c\in\Gamma;\ g(c)=0\})=0$ と仮定する。1-alm. extremal 関数の存在のためには，$E_c=\{x\in c;\ q(x)|v(x)|(\omega(x))^{-1}=g(c)\}$ とおいて，$m_1(E_c)>0$ が a.e. $c\in\Gamma$ に対して成り立つことが必要十分条件である。又 ρ が 1-alm. extremal であるためには，$\rho(x)$ が c 上 a.e. に $\psi_c(t)/|v(x)|$ の形をしていることが必要十分である。ここに $c:\ x(t;y,0)$ で，$\psi_c(t)$ は c 上非負，$\int_c\psi_c(t)q\,dt=1$，$c-E_c$ 上 a.e. に $\psi_c(t)=0$ をみたす。

上の条件をみたさないものは容易に作られ，従って昨秋の学会でのべたように，$p>1$ のときと違って，$p=1$ のときには 1-alm. extremal なものが存在すると限らない。

42　　Gončarの問題について

大津賀　信　　学習院大・理

Barth, Brannan, Hayman: Research Problems in Complex Analysis, Bull. London Math. Soc. 16 (1984), 490-517の中にあるGončarの問題7.58を解く。7.57としてVuorinenが提出している問題はDubininがすでに解いている。それをさらに拡張できるが，ここでは7.58のみを論ずる。そのためには，やはりGončarが提起し，Tamrazovが解き，Dubininが綺麗な証明を与えた1つの結果 —— G-Tの定理とよぼう —— を使うので，それを説明しよう。まず一般にR^2内の集合X_0, X_1に対し，X_0とX_1を結ぶ曲線全体のなす族を$\Gamma(X_0, X_1)$，そのp-module $M_p(\Gamma(X_0, X_1))$を$M_p(X_0, X_1)$と略記する。逆数がX_0, X_1間のextremal distanceである。いま(x_1, x_2)平面のx_2軸R上の区間$[-a, a]$内の互いに素な閉集合J_0, J_1に対して，$[-a, -a+m_1(J_0)]$, $[a-m_1(J_1), a]$をJ_0^*, J_1^*とおすと，$M_2(J_0, J_1) \geq M_2(J_0^*, J_1^*)$。これがG-Tの定理である。彼等はcondenser の p-capacity を用いているが，それは p-module と一致するので，我々は後者のみを用いる。Gončar の問題 7.58 は，平面上の x_2 軸 R 上の区間 $[0,1]$ 内の開集合 J に対して，$M_2(J, R-J)=\infty$ かどうかを問うている。

証明中で我々は次の評価を使う。

Lemma. $p \geq 2$, J_0, J_1 は $[0,1]\subset R$ 内の互いに素な開集合とし，$l=\min(m_1(J_0), m_1(J_1))$, $m=m_1([0,1]-J_0-J_1)$ とおくと，

$$M_p(J_0, J_1) \geq \begin{cases} \dfrac{1}{(p-2)\pi^{p-1}}\left(\dfrac{1}{(m/2)^{p-2}}-\dfrac{1}{(m/2+l)^{p-2}}\right) & (p>2) \\ \dfrac{1}{\pi}\log\dfrac{m/2+l}{m/2} & (p=2). \end{cases}$$

右辺を $\varphi(m, l, p)$ としるしてあとで使う。

定理。$p>2$ とする。$E\subset R$ は可測，E も $R-E$ も空集合でないなら $M_p(E, R-E)=\infty$. 共に対数容量正なら $M_2(E, R-E)=\infty$.

$1<p<2$ の時は分らない。E が R 上の閉区間ならば $M_p(E, R-E)<\infty$ である。

43　extremal distanceの評価の応用

大津賀　信　　学習院大・理

開集合$G\subset R^2$において，p-module 0のある曲線族に属するものを除き，どの曲線上でもfは絶対連続で，$\int_G |\mathrm{grad}\, f|^p dx<\infty$のとき，$f$はG内でp-preciseという。

定理1。$p\geq 2$とする。E_0，E_1は互いに素な，$[0,1]\subset R$上の可測集合で，$l=\min(m_1(E_0), m_1(E_1))>0$とし，前述のlemma中のように$m$，$\varphi(m,l,p)$を考える。$f$は$x_1>0$でp-preciseで，$\forall(0,x_2)\in E_0$において$\limsup_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)\leq b$，$\forall(0,x_2)\in E_1$において$\liminf_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)\geq c>b$ならば，

$$\int_{x_1>0} |\mathrm{grad}\, f|^p dx \geq (c-b)^p\varphi(m,l,p).$$

応用例．平面内の正方形D：$0<x_1<1$，$0<x_2<1$の左辺に集積する線分の列$\{l_n\}$，$l_n=\{x_1=1/n, 0<x_2<1-1/n\}$，により，左辺は境界要素となる。左上方の点$(0,1)$を中心とし，辺はDの辺に平行で辺長$2\delta$の小正方形を$D_\delta$とする。Dを$|w|<1$へ$w=u+iv=F(z)$により等角に，上の境界要素を$w=1$に写像する。$D_\delta$外のるDの部分の

像をE_sとすると，$|w|=1$上の$A_t: 0<\theta<t$に対して，定理1より

$$1 = D\text{の面積} = \int_{|w|<1} \left|\frac{dF^{-1}(w)}{dw}\right|^2 du\,dv = \int_{|w|<1} |\mathrm{grad}\ \mathrm{Im}\,F^{-1}|^2 du\,dv$$
$$> \frac{s^2}{\pi} \log\left(1+\frac{2l_{s,t}}{t-l_{s,t}}\right).$$

ここに，$l_{s,t}=m_1(A_t \cap E_s)$，$t-l_{s,t}=m_1(A_t - E_s)$。よって

$$\frac{1}{2}\left(e^{\pi/s^2}-1\right) > \frac{l_{s,t}}{t-l_{s,t}}.$$

左辺を$M=M(s)$とすると，$l_{s,t}/t < M/(1+M)$．この左辺はA_tに現れるE_sの部分の長さの比率を示す。

定理2. hは$x_1>0$で調和とし，x_2軸R上に閉区間列$\{I_n\}$と，可測集合$E_0^{(n)}$, $E_1^{(n)} \subset I_n$，定数b_n, c_n $(b_n<c_n)$で次の性質をもっているものがあるとする。$\limsup_{x_1\to 0} h(x_1,x_2) \le b_n$ for $\forall(0,x_2)\in E_0^{(n)}$，$\liminf_{x_1\to 0} h(x_1,x_2)\ge c_n$ for $\forall(0,x_2)\in E_1^{(n)}$，$(c_n-b_n)^2 l_n/m^{(n)} \to \infty$．ここに$l_n=\min(m_1(E_0^{(n)}), m_1(E_1^{(n)}))$，$m^{(n)}=m_1(I_n-E_0^{(n)}-E_1^{(n)})$．すると，
$$\int_{x_1>0} |\mathrm{grad}\ h|^2 dx = \infty.$$

系（中井） $D: |x|<1$において，$E \subset \partial D$の調和測度$h \neq$定数なら$\int_D |\mathrm{grad}\ h|^2 dx = \infty$.

定理3. $x_1>0$でhは調和で，$\{I_n\}$はR上互いに素，上と同じ記号を用いて$\sum_n (b_n-c_n)^2 l_n/m^{(n)}=\infty$なら
$$\int_{x_1>0} |\mathrm{grad}\ h|^2 dx = \infty.$$

2 次元 BMO 空間と quasi-hyperbolic metric について

京都大学理学部 後藤 泰宏

§1. BMO 空間の等角不変性

領域 $D \subset \mathbf{C}$ 上の局所可積分な関数 f は

$$\|f\|_* = \|f\|_{*,D} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| dm < \infty,$$

なるとき BMO 関数 (function of bounded mean oscillation) といいその全体を $BMO(D)$ とあらわす. ここで sup は軸に平行な辺を持つ D 内の全ての閉正方形についてとるものとし dm は 2 次元 Lebesgue 測度, $f_Q = m(Q)^{-1}\int_Q f dm$ とする. 常に $L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{loc}(D)$, $0 < p < \infty$, となりまた $BMO(D)$ は定数を 0 とみなして Banach 空間となる.

この $BMO(D)$ は関数論で通常扱われる 1 次元の BMO 空間とは別の空間であることに注意しよう. このような一般領域上の BMO 空間を扱う上で次の局所化定理は基本的である. この定理より D の境界の形状から生じる困難をかなりの部分回避することができる.

定理 1. (cf. Reimann-Rychener[12]) $f \in L^1_{loc}(D)$ について f は $d(Q, \partial D) \geq \lambda l(Q)$, $\lambda \geq 1$, なる D 内の任意の正方形 Q 上 BMO 関数となりしかも $\|f\|_{*,Q} \leq K$ であるとする. そのとき f は $BMO(D)$ 関数となりしかも $\|f\|_{*,D} \leq AK\lambda$. ここで $d(\cdot,\cdot)$ は *Euclid* 距離, $l(Q)$ は Q の辺長, $A > 0$ は絶対定数である.

Whitney 分解を用いたこの定理の証明の手法は BMO 関数を扱う上で典型的なものでありそれは正方形 $Q, Q' \subset D$ について $a^{-1} \leq l(Q')/l(Q) \leq a$, $Q \cap Q' \neq \emptyset$ かつ $Q \cup Q' \subset Q'' \subset D$ なる正方形 Q'' が存在すれば $|f_Q - f_{Q'}| \leq C_a\|f\|_{*,D}$ となるという簡単な性質に基づいている. この性質の定式化及びその応用については §4 において改めて触れる.

この定理によって例えば BMO の定義において “座標軸に平行な辺を持つ閉正方形” を “座標軸に平行な辺を持つ開正方形”, “必ずしも座標軸に平行な辺を持たない(開)(閉) 正方形”, “(開)(閉) 球” 等に置き換えても同値な norm が得られるという意味において構わないこと, また D 上の quasi-hyperbolic metric $|dz|/d(z, \partial D)$ に関し一様連続な関数は $BMO(D)$ 関数であり特に $f \in C^1(D)$ は $|\nabla f(z)| \leq K/d(z, \partial D)$ を満たせば $BMO(D)$ 関数であることなどがわかる. 特に調和関数に対してはこの逆も成立し $f \in H(D)$ が $BMOH(D)$ 関数であるための必要十分条件は f が

Bloch 型の調和関数となることである. quasi-hyperbolic metric は以下においても本質的な役割を果たすことになる.

同様の手法を用いれば BMO に関し一点は除去可能であること, 立体射影により平面領域上の BMO 空間が単位球面の領域上の BMO 空間と同一視できることなどがわかる.

$BMO(D)$ はその定義が Lebesgue 測度に依存しているにもかかわらず擬等角写像によって不変となる. これは L^p 空間や Hölder 連続な関数空間にはない著しい性質である. Reimann[11] は $\mathbf{C}$ 上の擬等角写像に対してこの事を証明しさらに Jones[8] は局所化定理にを用いれば一般の領域上の擬等角写像に対しても成立することに注意している.

定理 2. (Reimann[11], Jones[8], cf. Astala[1]) $g : D \to D'$ を 平面領域間の位相同型とする. さらに g, g^{-1} は共に絶対連続で, g は ACL とする. そのとき g が擬等角写像であるための必要十分条件は任意の $f \in BMO(D)$ に対し $f' = f \circ g^{-1} \in BMO(D')$ なることである. またこのとき g の *maximal dilatation* K にのみ依存する定数 $C \geq 1$ が存在し $C^{-1}\|f\|_{*,D} \leq \|f'\|_{*,D'} \leq C\|f\|_{*,D}$. 特に g が等角写像である場合には絶対定数 $A \geq 1$ が存在して $A^{-1}\|f\|_{*,D} \leq \|f'\|_{*,D'} \leq A\|f\|_{*,D}$.

注目すべきことは定数 C が領域 D, D' によらないということである. 等角写像 g 及び調和な $BMO(D)$ 関数 f に対してはこの主張は quasi-hyperbolic metric の等角不変性からもわかる.

また BMO 空間は quasi-disk を特徴付ける. H を上半平面とするとき $BMO(H)$ 関数は常に $BMO(\mathbf{C})$ 関数に拡張できる. 実際 $f \in BMO(H)$ に対しその $\mathbf{C}$ への拡張 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in H, \\ f(\bar{z}), & z \in \mathbf{C} \setminus H, \end{cases}$$

により定めれば $\tilde{f}$ は $BMO(\mathbf{C})$ 関数となる. よって 領域 D が qiasi-disk (すなわち $\hat{\mathbf{C}}$ 上の擬等角写像による単位円板の像) であれば $BMO(D)$ 関数は常に $BMO(\mathbf{C})$ 関数に拡張できることがわかるがこの逆も成立し

定理 3. (Jones[8]) 単連結な領域 $D \neq \mathbf{C}$ について $BMO(D)$ 関数が常に $BMO(\mathbf{C})$ 関数に拡張できるための必要十分条件は D が *quasi-disk* なることである.

必要性は次の Jones の定理及び quasi-disk が一様領域であるという事実による.

定理 4. (Jones[8]) 領域 $D \neq \mathbf{C}$ について $BMO(D)$ 関数が常に $BMO(\mathbf{C})$ 関数に拡張できるための必要十分条件は D が一様領域となることである.

この定理の証明はかなり面倒なものである. しかし残念ながらこの定理を用いない, より簡単な定理 3 の証明は知られていないようである.

§2. 問題設定

定理 2 は平面領域 D に対し $BMO(D)$ が Riemann 面 D 上の空間として定まることを示しており BMO 空間論を Riemann 面上で展開しようとすることはごく自然なことといえる. その試みの一つとしてここでは以下の問題を考える.

(1) BMO 空間を保存する Riemann 面間の正則写像を特徴付けること.

(2) Jones の定理を一般の Riemann 面に拡張すること.

以下の §2 で問題 (1) を, §3 で問題 (2) を扱う. (2) については一般の Riemann 面に拡張することは最終目標でありここではその前段階として一般の平面領域上へ拡張する.

まず BMO 空間を Riemann 面 R 上において定義しよう. 簡単のため, 単位円板 $\pi : U \to R$ を普遍被覆とする Riemann 面 R について考えよう. この場合最も素朴な定義は

$$BMO'(R) = \{f \in L^1_{loc}(R) | f \circ \pi \in BMO(U)\}$$

である. しかし残念ながら R が平面領域である場合 $BMO'(R)$ は一般にはもはや $BMO(R)$ と一致しない. 実際

定理 5. (Osgood[10], Gotoh[3]) D を普遍被覆 $\pi : U \to D$ を持つ平面領域とする. そのとき常に $BMO'(D) \subset BMO(D)$ が成立する. さらに以下の条件は同値である.

(1) $BMO'(D) = BMO(D)$.

(2) $BMO'(D) \cap H(D) = BMO(D) \cap H(D)$.

(3) D の *hyperbolic metric* $\rho_D(z)|dz|$ に関する単射半径は一様に下から評価できる. すなわちある定数 $K > 0$ が存在し

$$\frac{|dz|}{d(z, \partial D)} \leq K \rho_D(z)|dz|,$$

よって例えば D が puncture を持てば $BMO'(D) \neq BMO(D)$ となる.

そこで新たに

$$\|f\|''_{*,R} = \sup_{\phi} \|f \circ \phi\|_{*,U} < \infty$$

なる関数 $f \in L^1_{loc}(R)$ のなす空間を $BMO''(R)$ と定めよう. ここで sup は 中への等角写像 $\phi : U \to R$ の全体について取るものとする. BMO の等角不変性よ

り R が平面領域である場合には $BMO''(R)=BMO(R)$ となりさらにそれらの norm は互いに他の絶対定数倍で評価できることがわかる．よって $BMO''(R)$ は $BMO(D)$ の一般化とみなせるので以下 $BMO''(R)$ を $BMO(R)$ とあらわすことにしよう．

§3. BMO 写像

Riemann 面間の非定数正則写像 $g:R\to R'$ について任意の $f'\in BMO(R')$ に対し $f\circ g\in BMO(R)$ となるとき f を BMO 写像と呼ぶことにする．対数関数 $\log|z|$ は典型的な $BMO(\mathbf{C})$ 関数であるがさらに Riemann 面上の Evans-Selberg potential, Green 関数も BMO 関数となりしかもそれらの norm は有界であることがわかる．この性質を利用して R' が compact でない場合については BMO 写像を特徴付けるができる．R を任意の Riemann 面としその上の Hahn metric $\hat{\rho}_R(z)|dz|$ を

$$\hat{\rho}_R(z)=\inf_G \rho_G(z)$$

により定める．ここで inf は R 内の，点 z を含む単連結領域 $G\subset R$ の全体について取るものとし $\rho_G(z)|dz|$ は hyperbolic metric とする．$R\neq\hat{\mathbf{C}},\mathbf{C}$ であれば $\hat{\rho}_R(z)|dz|$ は退化しない．$\hat{\rho}_R(z)|dz|$ は "単射的" 小林擬距離ともいえる．$\hat{\rho}_R(z)|dz|$ は平面領域 D における quasi-hyperbolic metric $|dz|/d(z,\partial D)$ の Riemann 面への一般化となっている．

定理 6. (Gotoh[4]) 正則写像 $g:R\to R'$ において R' は *compact* でないとする．そのとき g が BMO 写像となるための必要十分条件は

(1) $R\neq\mathbf{C}$ なる場合についてはある定数 $r>0$ 及び自然数 p が存在し任意の $z\in R$ に対し g は $\hat{B}(z,r)$ 上高々 p 葉となることである．ここで $\hat{B}(z,r)$ は *Hahn metric* についての点 z の r 近傍とする．

(2) $R=\mathbf{C}$ なる場合 *(*このとき R' は $\mathbf{C}$ または $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ であるが*)* については $R'=\mathbf{C}$ かつ g が多項式となることである．

また調和な BMO 関数を保存する写像 ($BMOH$ 写像) についても R' が平面領である場合についてはそれを特徴付けることができる．

定理 7. (cf. Gotoh[3]) R' を平面領域とするとき正則写像 $g:R\to R'$ が $BMOH$ 写像であるための必要十分条件はある定数 $K>0$ が存在し

$$\hat{\rho}_{R'}(g(z))|dg(z)|\leq K\hat{\rho}_R(z)|dz|$$

となることである．これはまたある定数 $K>0$ が存在し任意の $z\in R$ に対し $g(\hat{B}_{z,K})$ が R' において可縮であることと同値である．

他方 R' が compact である場合については例えば楕円関数 $g: \mathbf{C} \to \hat{\mathbf{C}}$ が BMO 写像となっており局所的な写像の葉数が BMO 写像としての作用素 norm で評価できなくなるなど状況はかなり複雑になる．さらに任意に与えられた平面領域 D 及び D 上の内部に集積しない点列 $\{z_n\}$ に対し $\{z_n\}$ にのみ極を持つ有理型関数 $g: D \to \hat{\mathbf{C}}$ で BMO 写像となるものが常に存在することもわかっている．最も扱いよいと思われる有理関数についてもその BMO 写像としての作用素 norm の評価についてはよくわかっていない．以下有理関数について部分的に得られた結果を述べよう．単位円板 U 上の点列 $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ を零点とする Blaschke 型の有理関数 $g: \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$;

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}$$

に対し点列 $\{z_k\}$ の導く Carleson 測度 $d\mu(z) = \sum_{k=1}^{n}(1 - |z|^2)d\delta_{z_k}(z)$ の Carleson 定数を $\mathrm{C}(g)$ とおきさらに $g_\zeta(z) = (g(z) - \zeta)/(1 - \bar{\zeta}g(z))$, $\zeta \in U$, $\mathrm{C}_*(g) = \sup_{\zeta \in U} \mathrm{C}(g_\zeta)$ とおく．そのとき

定理 8. (Gotoh[5]) g の BMO 写像としての作用素 *norm* と $\mathrm{C}_*(g)$ は互いに他の値にのみ依存する定数で評価できる．

特に有理関数の列 f_n で $\deg f_n \to \infty$ となるにもかかわらず作用素 norm が有界となるものが存在することがわかる．

§4. Jones の定理の一般化

定理 1 において触れた BMO 関数の簡単な性質は様々な場面で利用されるにもかかわらずきちんとした定式化のなされていないことは不思議なことのように思われる．以下においてはこの性質を定式化すると共にその応用として Jones による BMO 関数の拡張可能性に関する結果の一般の平面領域への一般化について述べよう．以下に与える定式化は例えば pointwise BMO multiplier の特徴付け問題にも有効である (cf. Nakai-Yabita[9], Gotoh[7]).

$\lambda > 0$ を十分大きい定数とする．平面領域 D 上の正方形 Q は $\mathrm{d}(Q, \partial D) \geq \lambda l(Q)$ を満たすとき許容正方形といいその全体を $\mathcal{A}(D)$ とする．D 内の許容正方形の列 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$ は

$$Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{l(Q_i)}{l(Q_{i+1})} \leq 2, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

なるとき許容鎖と呼ぶ．D 内の許容正方形 Q, Q' に対し

$$\delta_D(Q, Q') = \min\{n \geq 0 | Q = Q_0.Q_1, \cdots, Q_n = Q' \text{ は 許容鎖 }\}$$

と定める．そのとき $BMO(D)$ 関数 f は

$$|f_Q - f_{Q'}| \le C\|f\|_{*,D}\delta_D(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D)$$

を満たす．逆に各 $Q,Q' \in \mathcal{A}(D)$ に対し $C(|f_Q - f_{Q'}|+1) \ge \delta_D(Q,Q')$, $\|f\|_{*,D} \le 1$ なる $f \in BMO(D)$ が存在する．

実際に議論を進めていく上では主に D の $\lambda \le d(Q,\partial D)/l(Q) \le 2\lambda + 2$ なる dyadic な正方形の族への Whitney 分解により得られる $\mathcal{A}(D)$ の部分族 $\mathcal{D}(D)$ について考察することになる．先と同様に $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n \in \mathcal{D}(D)$ は $Q_i \cap Q_{i+1} \ne \emptyset$ をみたすとき Whitney 鎖と呼ぶことにし $Q,Q' \in \mathcal{D}(D)$ に対し

$$W_D(Q,Q') = \min\{n \ge 0 | Q = Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q' \text{ は } Whitney \text{ 鎖}\}$$

と定める．W_D は D 上の quasi-hyperbolic metric に対応しており $\mathcal{D}(D)$ 上では metric W_D と δ_D は比較できしかも空間 $(\mathcal{A}(D), \delta_D)$ の構造は本質的に $(\mathcal{D}(D), W_D)$ の構造によって決まる．

定理 4.(再)(Jones[8]) 領域 $D \ne \mathbf{C}$ について $BMO(D)$ 関数が常に $BMO(\mathbf{C})$ 関数に拡張できるための必要十分条件は

$$W_D(Q,Q') \le M\psi(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{D}(D),$$

なる定数 $M > 0$ の存在することである．ここで

$$\psi(Q,Q') = \log\left(1 + \frac{l(Q) + l(Q') + \mathrm{d}(Q,Q')}{l(Q)}\right)\left(1 + \frac{l(Q) + l(Q') + \mathrm{d}(Q,Q')}{l(Q')}\right)$$

この条件を満たす領域は一様領域 (uniform dimain) と呼ばれる．この定理の条件は

$$\delta_D(Q,Q') \le M\delta_{\mathbf{C}}(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D),$$

と翻訳できこのことから予想されるように

定理 9.(Gotoh[6]) 領域 D_2 及びその部分領域 D_1 について $BMO(D_1)$ 関数が常に $BMO(D_2)$ 関数に拡張できるための必要十分条件は

$$\delta_{D_1}(Q,Q') \le M\delta_{D_2}(Q,Q'), \quad Q,Q' \in \mathcal{A}(D_1),$$

なる定数 $M > 0$ の存在することである．

$BMO(D_1)$ 関数は $(\mathcal{A}(D_1), \delta_{D_1})$ 上の Lipschitz 連続関数を導くがこの定理はそれ

が $(\mathcal{A}(D_2),\delta_{D_2})$ 上の Lipschitz 連続関数に拡張できればもとの $BMO(D_1)$ 関数も $BMO(D_2)$ 関数に拡張できることを示している. 実際十分性については $f\in BMO(D_1)$ に対しこのようにして得られた $(\mathcal{A}(D_2),\delta_{D_2})$ 上の Lipschitz 連続関数を g として f の $D_2\setminus D_1$ 上への拡張 $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(z)=g(Q)$, $z\in Q\in\mathcal{D}(D_2\setminus D_1)$ と定めればこの $\tilde{f}$ が求める $BMO(D_2)$ 関数となっている.

Jones の構成した拡張作用素が線形であったのに対し我々の構成した拡張作用素は残念ながら線形ではない. それを線形にとれるかどうかについてはわかっていない. また領域 D 上の quasi-hyperbolic metric が導く距離関数を k_D とするとき $\delta_{D_2}(Q,Q')$, $Q,Q'\in\mathcal{D}(D_1)$ は

$$j_{D_1,D_2}(z,z')=\begin{cases} k_{D_2}(z,z')+\log\dfrac{d(z,\partial D_2)}{d(z,\partial D_1)}\dfrac{d(z',\partial D_2)}{d(z',\partial D_1)}, & |z-z'|\ge d(z,\partial D_2)/2,\\ \log\left(1+\dfrac{|z-z'|}{d(z,\partial D_1)}\right)\left(1+\dfrac{|z-z'|}{d(z',\partial D_1)}\right), & |z-z'|< d(z,\partial D_2)/2,\end{cases}$$

に対応し定理の条件は

$$k_{D_1}(z,z')\le Kj_{D_1,D_2}(z,z')+L,\quad z,z'\in D_1$$

と表わすことができる.

参考文献

[1] K. Astala, A remark on quasi-conformal mappings and BMO-functions, Michigan Math. J., 30 (1983), 209-212.

[2] F. W. Gehring, Uniform domains and the Ubiquitous Quasidisk, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 89 (1987), 88-103.

[3] Y. Gotoh, On some extension property for BMO functions on Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 141-152.

[4] Y. Gotoh, On the composition of functions of bounded mean oscillation with analytic functions, J. Math. Kyoto Univ., 29 (1989), 309-315.

[5] Y. Gotoh, On the composition of functions of bounded mean oscillation with meromorphic functions, J. Math. Kyoto Univ., 31 (1991), 635-642.

[6] Y. Gotoh, BMO extension theorem for relative uniform domains, J. Math. Kyoto Univ., to appear.

[7] Y. Gotoh, Remarks on multipliers for BMO on general domains, to appear.

[8] P. Jones, Extension theorems for BMO, Indiana Univ. Math. J., 29 (1980), 41-66.

[9] E. Nakai and K. Yabuta, Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 207-218.

[10] B. G. Osgood, Some properties of f''/f' and the Poincaré metric, Indiana Univ. Math. J., 31 (1982), 449-461.

[11] H. M. Reimann, Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings, Comm. Math. Helv., 49 (1974), 260-276.

[12] H. M. Reimann and T. Rychener, Funktionen beschränkter mittelerer Oszillation, Lecture Notes in Math. 489, Springer, 1975.