日 本 数 学 会

1992年度年会

函 数 論 分 科 会
講 演 ア ブ ス ト ラ ク ト

1992年4月

於
福　岡　大　学

第VII会場 函 数 論

9:15〜12:30

1	西本勝之(日大工)*	Power functions in fractional calculus of Nishimoto and that of Lacroix and Riemann-Liouville	15
2	斎藤斉(群馬工高専)	On certain multivalent functions	15
3	尾和重義(近畿大理工) 斎藤斉(群馬工高専) 布川護(群馬大教育)	Neighborhoods of certain analytic functions	10
4	谷口彰男(日大文理) 布川護(群馬大教育) 尾和重義(近畿大理工) D. Z. Pashkuleva (Bulgarian Academy) W. M. Causey (Univ. Mississippi)	A note on the radius of starlikeness of certain analytic functions	10
5	尾和重義(近畿大理工)	On quasi-Hadamard products	10
6	尾和重義(近畿大理工)	A note on Briot-Bouquet differential equations	10
7	福井誠一(和歌山大教育) 尾和重義(近畿大理工)	On a certain class of multivalent functions	10
8	関根忠行(日大薬)	負の係数をもつある p-valent な関数の族について	15
9	野田洋二(東工大理)	On the functional equation $f^n = e^{p_1} + \dots + e^{p_n}$	10
10	松井邦光(同志社大工)	開リーマン面上のノルム有限な微分のつくる柴の挙動空間について	15
11	井上純治(北大理) 中路貴彦(北大理)	H^1 の極値問題の有限次元解集合	15
12	中路貴彦(北大理)	H^1 の outer 関数の因数分解	10
13	須川敏幸(京大理)	稠密な開集合に対する Bers projection とその応用	15

13:30〜16:10

14	邊斗源(群馬大工)	Isometrical mapping between the Szegö and the Bergman-Selberg spaces	15
15	邊斗源(群馬大工) 斎藤三郎(群馬大工)	Approximation by the solutions of the heat equation	10
16	戸田暢茂(名工大)	On the frequency of zeros of solutions of $w'' + Aw = 0$, where A is entire and transcendental	15
17	後藤泰宏(京大理)	BMO 関数の拡張可能性について	15
18	後藤泰宏(京大理)	BMO multiplier について	10
19	村澤忠司(京都府大)	A note on the Grishin's lemma	10
20	水田義弘(広島大総合科)	重調和関数の劣平均値定理とその応用	15
21	水田義弘(広島大総合科)	ポテンシャルの細極限値について	10
22	二宮信幸	ポテンシャル論における最小変分の方法	15
23	山口博史(滋賀大教育)	平衡ベクトルポテンシャルについて	15

16:30〜17:30 特別講演

宍倉光広(東工大理)* 複素力学系の幾何学的極限とくり込み理論

9:15〜12:30

24	笹 山 浩 良（笹　山　研）	On non-associative hypercomplex n-tuple spaces associated with normed spaces ……………………10
25	笹 山 浩 良（笹　山　研）	On generalized homogeneous polynomials in non-commutative hypercomplex n-tuple spaces ………5
26	奥 村 善 英（金 沢 大 工）	Trace inequalities characterizing X, Y and $Z=(YX)^{-1}$ of $PSL(2, R)$ ………………………………15
27	松 崎 克 彦（東 工 大 理）	タイヒミュラー空間の基点のとりかえによる変形の不連続性について ………………………………10
28	谷 川 晴 美（名　大　理）	Holomorphic families of geodesic discs in infinite dimensional Teichmüller spaces ……………………15
29	佐 野 公 朗（八戸工大一般教育）	複素クリフォード解析におけるコーシーの積分公式について ‥15
30	足 立 幸 信（姫路学院女短大）	On the hyperbolicity of projective plane with lacunary curves ……………………………15
31	足 立 幸 信（姫路学院女短大）	An extension of the big Picard theorem ………………10
32	東 川 和 夫（富 山 大 理） 盛 本　茂（富山県高志養護学校）	等質有界領域の Bergman 計量の第2 Einstein 性 …………15
33	大 沢 健 夫（名　大　理）	L^2 コホモロジー群のホッジ構造について ………………15
34	真 次 康 夫（信 州 大 理）	Hardy-Orlicz 族に関する Jianzhong の予想について ………15
35	梶 原 壤 二（九　大　理） 李　琳（済南電視大）＊ 渡 邊 英 晴（九　大　理）	複素射影空間上の不分岐被拡領域のスペクトルについて ……15

13:30〜14:30　特別講演

O. Riemenschneider (Hamburg大)　Special surface singularities ― A survey on the geometry and combinatorics of their deformations ―

Power functions in fractional calculus of Nishimoto and that of Lacroix and Riemann-Liouville

Katsuyuki Nishimoto(日大工)

Abstract

We have two difficulties in fractional calculus of power functions. That is, one of them is the problem of index law in fractional calculus and the other is the one of fractional calculus of products of power functions. In this report, these two difficulties in Nishimoto's fractional calculus are compared with that in Lacroix and Riemann-Liouville's fractional calculus.

§0. Introduction (Definition of Fractional Calculus)

(I) Definition of Nishimoto

Let $D=\{\underline{D}, \underset{+}{D}\}$, $C=\{\underline{C}, \underset{+}{C}\}$,

$\underline{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $-\infty+i\mathrm{Im}(z)$,

$\underset{+}{C}$ be a curve along the cut joining two points z and $\infty+i\mathrm{Im}(z)$,

$\underline{D}$ be a domain surrounded by $\underline{C}$,

$\underset{+}{D}$ be a domain surrounded by $\underset{+}{C}$.

(Here D contains the points over the curve C.)

Moreover, let $f=f(z)$ be a regular function in D ($z\in D$),

$$f_\nu=(f)_\nu={}_C(f)_\nu=\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}d\zeta \qquad (\nu\notin\mathbb{Z}^-) \tag{1}$$

$$(f)_{-m}=\lim_{\nu\to-m}(f)_\nu \qquad (m\in\mathbb{Z}^+), \tag{2}$$

where

$-\pi\leqslant\arg(\zeta-z)\leqslant\pi$ for $\underline{C}$, $0\leqslant\arg(\zeta-z)\leqslant 2\pi$ for $\underset{+}{C}$,

$\zeta\neq z$, $z\in\mathbb{C}$, $\nu\in\mathbb{R}$,

Γ ; Gamma function,

then $(f)_\nu$ is the fractional differintegration of arbitrary order ν (derivatives of order ν for $\nu>0$, and integrals of order $-\nu$ for $\nu<0$), with respect to z, of the function f, if $|(f)_\nu|<\infty$.

Note 1. Consider the principal value for many valued function f.

Note 2. For the complex ν, we consider the principal value for our convenience.

Note. 3.

$$f_\nu = (f)_\nu \quad \text{is} \quad \begin{cases} \text{derivative} & \text{for} \quad \mathrm{Re}(\nu) > 0, \\ \text{original} & \text{for} \quad \nu = 0, \\ \text{integral} & \text{for} \quad \mathrm{Re}(\nu) < 0, \end{cases}$$

for $\nu \in \mathbb{C}$, if $|(f)_\nu| < \infty$.

And in case of $\mathrm{Re}(\nu) = 0$, f_ν is only formal differintegration regardless of $\mathrm{Im}(\nu) \gtrless 0$. That is, we have no derivative and integral for $\nu =$ pure imaginary.

The set $\mathcal{F}$

We call the function $f = f(z)$ such that $|f_\nu| < \infty$ in D as fractional differintegrable function by arbitrary order ν and denote the set of them with notation $\mathcal{F}$. Then we have

$$|f_\nu| < \infty \iff f \in \mathcal{F} \qquad \text{(in D)}.$$

(II) Definitions of Lacroix and Riemann-Liouville

(i) Lacroix's fractional derivative for power functions

The following fractional derivative of order α of the function x^β was given by S.F. Lacroix(1819).

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha} \qquad (D = d/dx,\ \beta \notin \mathbb{Z}^-,\ \alpha \geqq 0). \tag{3}$$

(ii) **Riemann-Liouville's fractional integral**

In 1876, following definitions on fractional calculus are reported by G. F. Bernhard Riemann and J. Liouville.

Fractional integral of order α:

$$f_\alpha^+(a, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \qquad \text{(right hand)}, \tag{4}$$

$$f_\alpha^-(x, b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt \qquad \text{(left hand)}, \tag{5}$$

where $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha > 0$ and Γ is the Gamma function.

Fractional derivative of order α:

$$f_{-\alpha}^+(a, x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}^+(a, x) \qquad \text{(right hand)}, \tag{6}$$

$$f_{-\alpha}^-(x, b) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}^-(x, b) \qquad \text{(left hand)}, \tag{7}$$

where $a \leqslant x \leqslant b$ and $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Starting with the above definitions, we will discuss the difficulties described in abstract.

On Certain Multivalent Functions

斎藤 斉　　群馬工業高専

$A(p)$ で単位円 U 内で正則な関数

$$f(z)=z^p+\sum_{k=1}^{\infty}a_{p+k}z^{p+k}\qquad (p\in N=\{1,2,3,\cdots\})$$

の族を表す。さらに、$\lambda\in\mathbb{C}$, $f(z)\in A(p)$ に対して

$$F(z)=(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)$$

を定義する。 また、$\prec$ で subordination を表す。

これらの関数について得られた結果を報告する。

定理 1　　$\mathrm{Re}(\lambda)>0$ とする。このとき、もし

$$\frac{F^{(j)}(z)}{(1-\lambda+\lambda p)z^{p-j}}\prec\frac{\delta+(\delta-2\alpha)z}{1-z}\quad\left(0\leqq\alpha<\delta=\frac{p!}{(p-j)!}\right)$$

ならば

$$\frac{f^{(j)}(z)}{z^{p-j}}\prec g(z)$$

である。ただし、$g(z)=\delta+\dfrac{2(\delta-\alpha)(1-\lambda+\lambda p)}{\lambda z^{(1-\lambda+\lambda p)/\lambda}}\displaystyle\int_0^z\frac{t^{(1-\lambda+\lambda p)/\lambda}}{1-t}dt$

$(0\leqq j\leqq p)$. また、$g(z)$ は best dominant である。

定理2　$\lambda > 0$ とする。このとき、もし

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F^{(j)}(z)}{z^{p-j}}\right\} > (1-\lambda+\lambda p)\alpha \quad \left(0 \leqq \alpha < q = \frac{p!}{(p-j)!}\right)$$

ならば、

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f^{(j)}(z)}{z^{p-j}}\right\} > q + 2(q-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\gamma}{\gamma+k}$$

である。ただし、$0 \leqq j \leqq p$ で、$\gamma = \dfrac{1-\lambda+\lambda p}{\lambda}$ とする。

この評価は sharp である。

NEIGHBORHOODS OF CERTAIN ANALYTIC FUNCTIONS

Shigeyoshi Owa — Kinki University
Hitoshi Saitoh — Gunma College of Technology
Mamoru Nunokawa — Gunma University

Let T_n be the class of functions of the form

$$p(z) = 1 + \sum_{k=n}^{\infty} p_k z^k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$.
A function $p(z) \in T_n$ is said to be in the class $P_n(\alpha)$ if it satisfies

$$\operatorname{Re}(p(z)) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(\alpha < 1)$. For any $p(z) \in P_n(\alpha)$ and $\delta_n \geqq 0$, we define the δ_n-neighborhood $N_{\delta_n}(p(z))$ of $p(z)$ by

$$N_{\delta_n}(p(z)) = \{q(z) \in T_n : \sum_{k=n}^{\infty} |p_k - q_k| \leqq \delta_n\},$$

where

$$q(z) = 1 + \sum_{k=n}^{\infty} q_k z^k .$$

Further, let $Q_n(\alpha)$ be the subclass of T_n consisting of functions $p(z)$ which satisfy

$$\mathrm{Re}(zp(z))' > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(\alpha < 1)$. In the present talk, we show the following result.

Theorem. If $p(z) \in \mathcal{Q}_n(\alpha)$ $(\alpha < 1)$, then

$$N_{(1-\alpha)\delta_n}(p(z)) \subset P_n(\alpha) \ ,$$

where

$$\delta_n = \int_0^1 \frac{2}{1 + t^n}\, dt \ - 1.$$

The result is sharp.

A note on the radius of starlikeness of certain analytic functions

谷口彰男, 布川護, 尾和重義　日大文理, 群馬大教育, 近畿大理工

D.Z. PASHKULEVA, W.M. CAUSEY　Bulgarian Academy, The Univ. of Mississippi

$\gamma\ (0<\gamma\leqq 1)$, 自然数 n, $\alpha\ (0\leqq\alpha<1)$ に対し、U_r, U, A_n, $S_n^*(\alpha)_r$ をそれぞれ、

$$U_r=\{z : |z|<r\},\quad U=U_1,$$

$$A_n=\{f(z) : f(z)=z+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_n z^n \text{ は } U \text{ で正則}\},$$

$$S_n^*(\alpha)_r=\{f(z)\in A_n :\ \mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha,\ z\in U_r\}$$

と定め、また $\beta\ (\beta>0)$ に対し N_n, $N_n(\beta)$ をそれぞれ、

$$N_n=\{f(z) : f(z)=1+\sum_{k=n}^{\infty}a_n z^n \text{ は } U \text{ で正則}\},$$

$$N_n(\beta)=\{f(z)\in N_n : |\arg f(z)|<\frac{\pi}{2}\beta,\ z\in U\}$$

と定める。このとき、次の結果を得たので報告する。

定理　関数 $f(z)\in A_n$ に対し、$\dfrac{f(z)}{g(z)}\in N_n(\beta)$ を満足する関数 $g(z)\in S_n^*(\gamma)_1$ が存在するならば、$f(z)\in S_n^*(\alpha)_R$ である。ただし

$$R=\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha+2n\beta}\right)^{\frac{1}{n}}\quad (\text{if } 1+\alpha=2\gamma),$$

$$R=\left(\frac{B-\sqrt{C}}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\quad (\text{if } 1+\alpha>2\gamma),\qquad R=\left(\frac{B+\sqrt{C}}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\quad (\text{if } 1+\alpha<2\gamma),$$

$$A=1+\alpha-2\gamma,\quad B=1+n\beta-\gamma,\quad C=(\alpha+n\beta-\gamma)^2+2n\beta(1-\alpha)$$

である。この結果は sharp である。

ON QUASI-HADAMARD PRODUCTS

Shigeyoshi Owa   Kinki University

Let $A_n(p)$ be the class of functions of the form

$$f(z) = a_p z^p - \sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k \qquad (a_p > 0;\ a_k \geqq 0)$$

with $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$. Let $T_n(p,\alpha)$ and $C_n(p,\alpha)$ be the subclasses of $A_n(p)$ consisting of functions $f(z)$ which are p-valently starlike of order α, and are p-valently convex of order α, respectively. Denoting by $(f_1 * f_2)(z)$ the quasi-Hadamard product of functions $f_1(z)$ and $f_2(z)$ belonging to $A_n(p)$, we have

Theorem I. If $f_j(z) \in T_n(p,\alpha_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$, then $(f_1 * f_2 * \cdots * f_m)(z) \in T_n(p,\beta)$, where

$$\beta = p - \frac{np^{m-1}\prod_{j=1}^{m}(p-\alpha_j)}{\prod_{j=1}^{m}(p+n-\alpha_j) - \prod_{j=1}^{m}(p-\alpha_j)} .$$

The result is sharp.

Theorem 2. If $f_j(z) \in T_n(p, \alpha_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$, then $(f_1 * f_2 * \cdots * f_m)(z) \in C_n(p, \beta)$, where

$$\beta = p - \frac{n(p+n)^{m-1} \prod_{j=1}^{m} (p-\alpha_j)}{p^{m-1} \prod_{j=1}^{m} (p+n-\alpha_j) - (p+n)^{m-1} \prod_{j=1}^{m} (p-\alpha_j)} .$$

The result is sharp.

Theorem 3. If $f_j(z) \in C_n(p, \alpha_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$, then $(f_1 * f_2 * \cdots * f_m)(z) \in C_n(p, \beta)$, where

$$\beta = p - \frac{np^{m-1} \prod_{j=1}^{m} (p-\alpha_j)}{(p+n)^{m-1} \prod_{j=1}^{m} (p+n-\alpha_j) - p^{m-1} \prod_{j=1}^{m} (p-\alpha_j)} .$$

The result is sharp.

A NOTE ON BRIOT-BOUQUET DIFFERENTIAL EQUATIONS

Shigeyoshi Owa   Kinki University

Let $f(z)$ and $g(z)$ be analytic in the open unit disk $\mathbb{U}$, and let α and β be complex numbers.

In 1978, S. S. Miller and P. T. Mocanu have studied the Briot-Bouquet differential equation

$$(1) \qquad w(z) + \frac{zw'(z)}{\alpha w(z) + \beta} = g(z) \qquad (w(0) = g(0)).$$

In the present talk, we consider the following Briot-Bouquet differential equation

$$(2) \qquad w(z) + \frac{f(z)w'(z)}{f'(z)(\alpha w(z) + \beta)} = g(z) \qquad (w(0) = g(0)),$$

where $f(0) = 0$ and $f'(0) \neq 0$.

Note that if $f(z) = z$, then the Briot-Bouquet differential equation (2) becomes (1).

Theorem. Let α and β be complex numbers with $\alpha \neq 0$, $f(z)$ and $g(z)$ be analytic in $\mathbb{U}$ with $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, and $g(0) = c$. Further let

$$P(z) = \frac{f(z)}{zf'(z)(\alpha g(z) + \beta)}$$

and

$$S(z) = \frac{1}{\alpha g(z) + \beta}.$$

If either $\mathrm{Re}(P(z)) \geqq a \geqq 0$ $(z \in U)$, $\mathrm{Re}(S(z)) < b$ $(z \in U)$, $\alpha w(0)+\beta$ is real, and

$$\frac{1}{\alpha w(0) + \beta} < b \leqq - \frac{a}{2(\alpha w(0) + \beta)}$$

or

$\mathrm{Re}(P(z)) \geqq a \geqq 0$ $(z \in U)$, $\mathrm{Re}(S(z)) > b$ $(z \in U)$, $\alpha w(0)+\beta$ is real, and

$$- \frac{a}{2(\alpha w(0) + \beta)} \leqq b < \frac{1}{\alpha w(0) + \beta},$$

then the solution of the Briot-Bouquet differential equation

$$w(z) + \frac{f(z)w'(z)}{f'(z)(\alpha w(z) + \beta)} = g(z)$$

$$(w(0) = g(0) = c)$$

is analytic in U and it can be calculated explicity.

On a certain class of multivalent functions

福井誠一　和歌山大・教育
尾和重義　近畿大学・理工

$A_n(p)$ を単位円板U内で解析的な関数 $f(z)$

$$f(z)=z^p+\sum_{k=p+n}^{\infty} a_k z^k$$

の集合とする。ここに、p と n は正の整数である。また $A_n(p)$ の関数 $f(z)$ で、$0 \leqq \alpha < p$ に対し

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| < p - \alpha \qquad z \in U$$

を満たす集合を $S_n(p, \alpha)$ とする。このとき、次のことが成立する

定理 1 $f(z) \in A_n(p)$ が $0 \leqq \alpha < p$, $0 \leqq \beta < 1$ に対し

$$\left| \beta\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right) + (1-\beta)\left\{\frac{z^2 f''(z)}{f(z)} - p(p-1)\right\} \right|$$

$$< (p-\alpha)\{(1-\beta)(p+n+\alpha-1)+\beta\}$$

$z \in U$、を満たせば $f(z) \in S_n(p, \alpha)$ となる。この不等式は最良で関数 $f(z)=z^p \exp((1-\alpha)z^n/n)$ がその値を与える。

これから、$\beta=0$、$1/2$ または $p=1$ と置くと興味ある結果を得る。　さらに、

定理２ $f(z) \in A_n(p)$ が $0 \leqq \alpha < p$ に対し、

$$\left| \frac{zf'(z)}{f'(z)} - (p-1) \right| < \frac{(p-\alpha)(2p+n-\alpha)}{2p - \alpha}$$

$z \in U$、を満たせば $f(z) \in S_n(p, \alpha)$となる。この不等式は最良で関数 $f(z) = z^p \exp((1-\alpha)z^n / n)$ がその値を与える。

これより、特別な場合として

$f(z) \in A_n(1)$ が $0 \leqq \alpha < 1$ に対し、

$$\left| \frac{zf'(z)}{f'(z)} \right| < \frac{(1-\alpha)(2+n-\alpha)}{2p - \alpha} \qquad z \in U$$

ならば、$f(z) \in S_n(1, \alpha)$となる。不等式が最良なことは、関数

$f(z) = z \cdot \exp((1-\alpha)z^n / n)$ が示す。

参考文献

[1] S.Fukui,A remark on a class of certain analytic functions,Proc.Japan Acad.66(1990),191-192.

[2] S.S.Miller and P.T.Mocanu,Second order differential inequalities in the complex plane,J.Math.Anal.Appl. 65(1978),289-305.

負の係数をもつあるp－valentな関数の族について

関根忠行　　　日大薬学部

Uを単位円板とする。

A（p）（p ∈ N）をUで正則な次の形の関数の族とする。

$$f(z)=z^{p}-\sum_{k=1}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}, \quad a_{p+k} \geqq 0$$

Mp，nをA（p）の部分族で条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{D^{n+p} f(z)}{D^{n+p-1} f(z)}\right\} < \frac{2n+2p+1}{2n+2p}, \quad z \in U$$

を満たすものとする。

$$\text{ただし}\quad D^{n+p-1} f(z)=\frac{z^{p}}{(1-z)^{n+p}} * f(z)$$

次の結果を報告する。

定理　f（z）∈ Mp，n

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+p+k-1}{k} a_{p+k} \leqq 1,$$

f（z）はUでp－valently starlike

定理　f（z）∈ A（p），

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\binom{n+p+k-1}{k} a_{p+k} \leqq 1$$

$$\Rightarrow \quad f(z) \in M_{p,n}$$

On the functional equation $f^n = e^{P_1} + \cdots + e^{P_m}$

野田洋二　　東工大理

自然数 N に対して

$$E_N = \{e^{P_1} + \cdots + e^{P_m}; P_i \in \mathbf{C}[z], \deg P_i \leqq N, m \in \mathbf{N}\}$$

とおく。このとき J. F. Ritt [2] は次の定理を示した。

定理．f を整関数、$P_1, \ldots, P_n \in E_1$ とするとき、$P_n f^n + P_{n-1} f^{n-1} + \cdots + P_0 = 0$ ならば、$f \in E_1$ である。

ここで E_1 を E_N $(N \geqq 2)$ でおきかえて上の結果が成り立つかという問題が考えられるが、$P_n = 0$ のときは $f(z) = \sin(\pi z^2)/\sin(\pi z)$ が反例となる。M. Green [1] は $f^2 = e^{\varphi_1} + e^{\varphi_2} + e^{\varphi_3}$ の場合にこの問題を解いている。本講演では次の結果を述べる。

定理１．f を整関数、$n(\geqq 2)$ を整数、$P_1, \ldots, P_m$ を多項式、$N = \max \deg P_i$、$N \geqq 2$、$A_i = P_i^{(N)}(0)/N!$ $(i = 1, \ldots, m)$ とする。さらに $\{A_i\}_{i=1}^m$ の convex hull の全ての頂点 v に対して $\#\{i; A_i = v\} = 1$ とする。このとき $f^n = e^{P_1} + \cdots + e^{P_m}$ ならば、$f \in E_N$ である。

定理２．f を整関数、$n(\geqq 2)$ を整数、$P_1, \ldots, P_4$ を多項式で $\sum_{j \in J} e^{P_j} \neq 0$ $(\forall J \subset \{1, \ldots, 4\}, J \neq \emptyset)$、$P_j - P_k = \mathrm{const.}$ $(\exists j, k)$ をみたすものとする。このとき $f^n = e^{P_1} + \cdots + e^{P_4}$ ならば、次のいずれかが成りたつ。

(1)　$n = 2, 3$、$f = e^P + e^Q$ (P, Q は多項式)。

(2)　$n = 2$、$f = e^P R(e^Q)$ (P, Q は多項式で $R(w) = w^2 + \sqrt{2}\sigma w - \sigma^2$ $(\sigma \neq 0)$)。

定理２から次の結果が得られる。

定理３．$g:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{P}_2$ を有限位数の holomorphic curve、D_0，D_1（$\subset\mathbf{P}_2$）を相異なる lines、D_2（$\subset\mathbf{P}_2$）を conic とする。このとき $D_0\cap D_1\cap D_2=\emptyset$，$g(\mathbf{C})\cap(D_0\cup D_1\cup D_2)=\emptyset$ ならば、高々３次の斉次多項式 $Q(w_0,w_1,w_2)$ が存在して $g(\mathbf{C})\subset\{Q(w_0,w_1,w_2)=0\}$ が成りたつ。（ここで Q を高々２次とすることはできない。）

定理４．$g:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{P}_3$ を有限位数の holomorphic curve（$\neq$const.）で $g(\mathbf{C})\cap(\{w_0=0\}\cup\{w_1=0\}\cup\{w_2=0\}\cup\{w_0{}^n+\cdots+w_3{}^n=0\})=\emptyset$ をみたすもの、n（≥ 2）を整数とする。このとき、高々２次の斉次多項式 $Q(w_0,\ldots,w_3)$ が存在して $g(\mathbf{C})\subset\{Q(w_0,\ldots,w_3)=0\}$ が成りたつ。さらに $n\geq 4$ ならば g は次の reduced representation (g_0,g_1,g_2,g_3) をもつ。$(g_j)_{j=0}^{3}=(a_0,a_1,a_2,e^P)$ または $(g_j)_{j=0}^{3}=(a_0,a_1,a_2e^P,a_3e^P)$。ここで a_j は定数、P は多項式。

参考文献

[1] M. Green, On the functional equation $f^2=e^{2\varphi_1}+e^{2\varphi_2}+e^{2\varphi_3}$ and a new Picard theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 195 (1974), 223~230.

[2] J. F. Ritt, Algebraic combinations of exponentials, Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929), 654~679.

2158 開リーマン面上ノルム有限な調和微分のつくる挙動空間について

松井邦光　同志社大学工学部

R；リーマ面で種数 $g \leqq \infty$，$\{A_j, B_j\}$ は R の標準基底

$\{R_n\}$；R の標準近似列，

$D_K(J) = \{1, 2, \cdots, g\}$ の K 組への分割 $= \{J_k\}_{k=1}^{K}$

$\mathcal{L}_K = \{L_k\}_{k=1}^{K}$；$L_k$ は zー平面上原点を通る直線

$\Lambda_h = \Lambda_h(R)$；ノルム有限な R 上の複素調和微分の実数体上になるヒルベルト空間で内積は実ディリクレ内積，

$\Gamma_h = \Gamma_h(R) = \{\omega ; \omega$ は実；且 $\omega \in \Lambda_h(R)\}$，

Λ_{hse}，Γ_{hse}，--- 夫々は対応する Λ_h の部分空間，

$S(J_\ell) = \{\sigma(A_j), \sigma(B_j), j \in J_\ell\}$ の張る空間，ただし $\sigma(\gamma)$ は曲線 γ にかんする再生微分，

Λ_1^+ (resp. Γ_1^+) $= \Lambda_1$ (resp. Γ_1) の Λ_h (resp. Γ_h) での直交補空間，

$J_{kn} = \{j ; j \in J_k$ 且 $j < g_n = R_n$ の種数$\}$

$J_n' = \{j ; j > g_n\}$.

定義 1，$\Lambda_x = \Lambda_x(D_K(J), \mathcal{L}_K) \subset \Lambda_h$ で (1) $\Lambda_x = i\Lambda_x^{*+} \subset \Lambda_{hse}$ (2) $\int_{J_\ell} \Lambda_x \subset L_\ell$, $\ell = 1, 2, \cdots, K$

を満すものをS－空間という。

今 $\Lambda_{1n}=\{\lambda$ (a) $\lambda\in\overline{\Lambda_{he}+\Lambda_{ho}}$, (b) $\int_{J_{kn}}\lambda\in L_k,\ \forall k$,
(c) $\int_{J_n}\lambda\in\mathcal{J}$, (d) $\mathrm{Im}\,\lambda\in\Gamma_{ho}\}$,

$\hat{\Lambda}_{1n}=\{\Lambda_{1n}$ で (a) で $\overline{\Lambda_{he}+\Lambda_{ho}}$ を Λ_{ase} とおく$\}$

$\Lambda_{2n}=\{\Lambda_{1n}$ で (c) で $\int_{J_n}\lambda\in\mathbb{R}$ とおく$\}$,

$\hat{\Lambda}_{2n}=\{\Lambda_{1n}$ で (a) で $\overline{\Lambda_{he}+\Lambda_{ho}}$ を Λ_{ase}, (c) で
$\int_{J_n}\lambda\in\mathbb{R}$ とおく$\}$

とおくと、(イ) $\Lambda_{1n}=\hat{\Lambda}_{1n}=i\Lambda_{1n}^{*\perp}$ はS－空間
(ロ) $\Lambda_{2n}=i\Lambda_{2n}^{*\perp}$ もS－空間 (ハ) $\mathbb{R}\in\{\Gamma_{he}\cap\Gamma_{ho}\cap\Gamma_{hse}^{*}$
$\neq\{0\}\}\iff\hat{\Lambda}_{2n}\supsetneqq i\hat{\Lambda}_{2n}^{*\perp}$ はS－空間でない。

以下 $\Lambda_{pn}=\Lambda_n$ を前の問題に適用すると

$$\Lambda_a^0=\left\{\begin{array}{l}\varphi\in\Lambda_{as}\cap\Lambda_{ase},\quad \int_A\varphi\in L_k,\ \forall k \text{ で}\\ \int_{J_n}\varphi\in\mathbb{R}\ (\text{or } \mathcal{J})\ \text{のとき}\ \varphi=0\end{array}\right\}$$
$=(\Lambda_0+i\Lambda_0^{*})\cap\Lambda_a$ 但し Λ_0 はある空間

次に $K=2$ の S－空間についてのべ 更に

定義2. $\Lambda_B\subset\Lambda_a$, $\Lambda_B=i\Lambda_B^{*\perp}\subset\Lambda_{ase}$ で
$\int_{A_j}\Lambda_B=0,\ \forall j$ をB－空間という。

B－空間についてのべ、此を前の問題に適用すると

$\hat{\Lambda}_a^0=\{\varphi\in\Lambda_{as}\cap\Lambda_{ase},\ \int_A\varphi=0$ なら $\varphi=0\}$
$=(\Gamma_A+i\Gamma_A)\cap\Lambda_a$, 但し Γ_A はある空間 等をのべる。

H^1 の極値問題の有限次元解集合

井上　純治　北大　理
中路　貴彦　北大　理

H^p を単位円周 T 上の普通 Hardy 空間とする。$\varphi \in L^\infty$ のとき H^1 上の有界線形汎関数 T_φ は $T_\varphi(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})d\theta/2\pi$ として定義する。$S_\varphi = \{ f \in H^1 : T_\varphi(f) = \|T_\varphi\|$ かつ $\|f\|_1 \leq 1 \}$ とする。もし $S_\varphi \neq \phi$ ならば $T_\varphi = T_{|f|/f}$ となる $f \in H^1$ が存在する（$\|T_\varphi\| = 1$ のとき）。このときもちろん $S_\varphi = S_{|f|/f}$ である。

もし $f^{-1} \in H^1$ ならば $\dim S_{|f|/f} = 1$ であることは知られていて、示すのはやさしい。また $f^{-1} \in \bigcap_{p<1} H^p$ でも $\dim S_{|f|/f} = \infty$ となる例がある。

$p < 1$ のとき $H^p \cap L^1 = H^1$ である。$f \in H^p$ かつ $a \in T$ とせよ。f が a で局所的に H^1 とは、a を含むある弧 I_a が存在して $f \in H^p \cap L^1(I_a)$ となることとする。もし任意の $a \in T$ について、f が局所的に H^1 となるならば、$f \in H^1$。

$\boxed{\text{定理}}$ $f \in H^1$ かつ $f^{-1} \in H^p$ ($p < 1$) とせよ。f^{-1} が T 上の有限集合を除いて局所的に H^1 に属するならば、$\dim S_{|f|/f} < \infty$ である。

$\boxed{\text{系1}}$ $f \in H^1$ かつある $g \in H^1$ が存在して fg が多項式となるならば、$\dim S_{|f|/f} < \infty$ となる。

$f \in H^1$ かつ $\mathrm{Re} f \geq 0$ ならば $\dim S_{|f|/f} = 1$ は Yabuta の結果である。しかし $\dim S_{|f^2|/f^2} = \infty$ となることがある。$\dim S_{|f|/f} = 1$ のとき strong outer と呼ばれる。

$\boxed{\text{系2}}$ $f \in H^1$ かつ $\mathrm{Re} f \geq 0$ とせよ。f が T 上で連続かつ $\{z \in T : f(z) = 0\}$ が有限集合ならば、任意の $n > 0$ に対して $\dim S_{|f^n|/f^n} < \infty$ となる。

$x_n = n^{-2}$、$\alpha_n = e^{i x_n}$ ($n = 1, 2, \cdots$) かつ $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(z - \alpha_n)(1 - \bar{\alpha}_n z)}{(z-1)(1-z)}$ とおく。$f \in H^1$ かつ f^{-1} は T 上の有限集合を除いて局所的に H^1 に属し、outer であるが $f^{-1} \notin \bigcup_{p>0} H^p$ である。この例では $\dim S_{|f|/f} = \infty$ となっているので、定理で条件 $f^{-1} \in H^p$ は必要である。

H^1 の outer function の因数分解

中路貴彦　北大理

H^p を単位円周 T 上の普通の Hardy 空間とする。$h \in H^1$ とする。h が outer とは「$g \in H^1$ かつ $|h| = |g|$ ならば $\varphi \in H^\infty$ が存在して $g = \varphi h$ となる」ことである。このとき φ は絶対値 1 である。h が strongly outer とは「$g \in H^1$ かつ $h/|h| = g/|g|$ ならば $g = \varphi h$ となる」ことである。このとき φ は正の定数となる。strongly outer ならば outer を見ることはやさしい。逆は成立しない。outer 関数も strongly outer 関数も様々な重要な問題に現われる。outer 関数は関数論的に良く研究されているが、strongly outer 関数は難しくまだ良く知られてない。

$g \in H^\infty$ かつ $|g| = 1$ のとき g は inner と呼ばれる。inner 関数は明らかに outer ではない。g_1、g_2 が inner 関数、$\mathrm{Im}\, g_1 g_2 \leq 0$ かつ $g_1 + g_2$ が定数でないとき、$g_1 + g_2$ は明らかに strongly outer でない。

任意の零でない $f \in H^1$ に対して、inner 関数 g と

outer関数hが存在して$f=gh$と書ける。これはinner-outer因数分解と呼ばれる有名なBeurling (1949)の定理である。

<u>問題</u> 任意のH^1のouter関数は(inner+inner)-strongly outer 因数分解が可能か?

$\boxed{\text{定理}}$ $h\in H^1$はouter関数とせよ。このとき$h=(g_1+g_2)g$と因数分解できる。ここでg_1、g_2はinner、$\mathrm{Im}\,\bar{g}_1 g_2 \le 0$、$(g_1-g_2)^{-1}\in L^1$かつ$g$はstrongly outerである。もし$g_1$がdegree nのfinite Blaschke productならばg_2もdegree nのfinite Blaschke productである。

証明にはH. Helson (1990)のstrongly outer関数の特長づけとE. Hayashi (1986)のToeplitz作用素のkernelの描写が本質的である。

定理でg_1-g_2はouterではない。gをg_1-g_2のinner部分とするとき、gのあるclassに対して、$h=(p_1+p_2)^2 g_0$とできる。ここでp_1、p_2はinnerかつg_0はstrongly outerである。

T. Nakazi、Sum of two inner functions…、to appear in Proc. Edinburgh Math.

稠密な開集合に対する Bers projection とその応用

須川敏幸　　京大・理

Bers projection は Teichmüller 空間論において重要な役割を果たす写像であるが、ここではそれを一般の開集合についても考え、それによってもとの開集合の性質について調べることを目標とする。

まず、Dを境界が 2 点以上からなる複素平面 $\mathbb{C}$ 内の開集合とする。(このような開集合を双曲的と呼ぶことにする。)　$E=\mathbb{C}\setminus D$として、$L^\infty(E)=\{\nu\in L^\infty(\mathbb{C});\nu=0 \text{ on } D\}$, $M(E)=\{\mu\in L^\infty(E);\|\mu\|<1\}$ と定める。　また、$\mu\in M(E)$ を Beltrami 係数に持つ (適当に正規化された) 擬等角写像を $w^\mu:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ と書くことにすると、$w=w^\mu$は D上では等角だから Schwarz 微分 $S_{w^\mu}=(\frac{w''}{w'})'-\frac{1}{2}(\frac{w''}{w'})^2$が D上定義され、しかも

$$S_{w^\mu}\in B_2(D)=\{\varphi:D\to\mathbb{C}:\text{正則}, \|\varphi\|_D=\sup_{z\in D}|\varphi(z)|\rho_D(z)^{-2}<\infty\}$$

である (Beardon-Gehring [1])。ここで、ρ_Dは D(の各成分) 上での定曲率-4 を持つ Poincaré density とする。　$\Phi(\mu)=\Phi_D(\mu)=S_{w^\mu}$と書くことにし、$\Phi:M(E)\to B_2(D)$ を Dに対する Bers projection と呼ぶことにする。(通常の Bers projection は Dが円板または半平面の場合である。)　これに関して、次の性質は基本的である。

命題.　*Bers projection* $\Phi:M(E)\to B_2(D)$ は有界正則写像で、特に *0* に於ける *Gateau* 微分 $d_0:L^\infty(E)\to B_2(D)$ は次のように表せる。

$$d_0\Phi[\nu](z)=-\frac{6}{\pi}\iint_E\frac{\nu(\zeta)}{(\zeta-z)^4}d\xi d\eta\quad(\zeta=\xi+i\eta)\nu\in L^\infty(E)$$

この講演では外点を持たない開集合に対する Bers projection について得られた結果を紹介する。まず、

定理. $\mathbb{C}$ に於いて稠密な双曲的開集合 Dが高々有限個の連結成分からなるとき、これに対する Bers projection $\Phi : M(E) \to B_2(D)$ は単射である。 特に、Dが連結の時、各点に於けるΦの Gateau 微分は単射である。

この定理の一つの応用として次の系が容易に証明できる。

系 (Overholt[**2**]). Dが conformally rigid な領域とすると、$\mathbb{C}$ に於ける補集合は面積 0 である。

また、この定理に於いて、一般に Dの成分を無限にすることは出来ない。

例. Cを区間 (0,1) に於ける粗な (すなわち、内点を持たない) コンパクト集合で 1 次元測度が正のものとする。Cをやはり測度が正の 2 つの可測な集合 C_1, C_2に分け、定数 $k_1, k_2 \in (0,1)$ を $k_1 m(C_1) = k_2 m(C_2)$ となるように取り、狭義単調増加の絶対連続函数 u を

$$u(x) = \int_0^x (1 + k_1\chi_1(t) - k_2\chi_2(t))dt,$$

ただしここでχ_1, χ_2はそれぞれ C_1, C_2の特性函数とする。そこで、$[x]$は実数 x の整数部分として

$$F(x + iy) = [x] + u(x - [x]) + iy \quad \text{for } x + iy \in \mathbb{C}$$

と定めれば、$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は $\frac{1+k}{1-k}$-擬等角写像となる。ただしここに、$k = \max\{\frac{k_1}{2+k_1}, \frac{k_2}{2-k_2}\}$ とする。 一方作り方から明らかに、写像 Fは稠密な開集合 $D = \{x+iy \in \mathbb{C}; x-[x] \in [0,1) \setminus C\}$ の各連結成分に於いては実軸方向への平行移動であるが、global には平行移動ではない。従って、μを Fの Beltrami 係数とすれば、$\mu \in M(E) \setminus \{0\}$ ではあるが、$\Phi(\mu) = 0$ である。 従って、特に$\Phi : M(E) \to B_2(D)$ は単射ではない。

【参考文献】

[1]. Beardon, A. F. and F. W. Gehring, *Schwarzian derivatives, the Poincaré metric and the kernel function*, Comment. Math. Helvetici **55** (1980), 50–64.

[2]. Overholt, M., *The area of the complement of a conformally rigid domain*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 448–450.

[3]. Sugawa, T., *The Bers projection and the λ-lemma*, J. Math. Kyoto Univ. (to appear).

Isomerical Mapping between the Szegö and the Bergman-Selberg Spaces

辺 斗源　　群馬大学工学研究科

For a simply connected planar domain Ω, let $\partial\Omega$ denote the boundary of Ω in the complex plane $\mathbb{C}$. We suppose that there exists a conformal mapping φ of Ω onto the upper half plane $U = \{\Im z > 0\}$ such that, for some sets $A_\Omega (\subset \partial\Omega)$ and A_U $(\subset \partial U)$ consisting of finite numbers of points, φ is extended to $\partial\Omega \setminus A_\Omega$ analytically and topologically, and the image of $\partial\Omega \setminus A_\Omega$ under the extension coincides with $\partial U \setminus A_U$. A function f analytic in Ω belongs to the Szegö space on Ω if there exists a sequence of rectifiable Jordan curves $C_1, C_2, \cdots$ in Ω, tending to the boundary $\partial\Omega$ in the sense that for any bounded subdomain Ω_α of Ω with $\partial\Omega_\alpha \subset \Omega$ and for all $n \geq N_\alpha$(depending on Ω_α) C_n surrounds Ω_α, such that $\int_{C_j} |f(z)|^2 |dz| \leq M < \infty$ [3, p.168]. Then f has the nontangential boundary values f^* belonging to $L^2[\partial\Omega, |dz|]$ and the Szegö norm of f is equipped by $\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} |f^*(z)|^2 |dz|\}^{\frac{1}{2}}$. For any $q > \frac{1}{2}$, we shall consider the function space $H_q(\Omega)$ as follows:

$$H_q(\Omega) = \{g : \text{analytic in } \Omega | \iint_\Omega |g(z)|^2 K(z,\overline{z};\Omega)^{1-q} dxdy < \infty\}$$

and the norm $\|g\|_{q,\Omega}$ in $H_q(\Omega)$ is given by

$$\|g\|_{q,\Omega}^2 = \frac{1}{\pi\Gamma(2q-1)} \iint_\Omega |g(z)|^2 K(z,\overline{z};\Omega)^{1-q} dxdy,$$

where $K(z,\overline{u};\Omega)$ is the Bergman kernel on Ω with respect to the measure $dxdy/\pi$. The space $H_q(\Omega)$ is, in common, said to be the Bergman-Selberg space on Ω and $H_1(\Omega)$ is exactly the Bergman space on Ω. For any $q > 0$, let $K_q(z,\overline{u};\Omega) = \Gamma(2q)K(z,\overline{u};\Omega)^q$. Then, for any $q > \frac{1}{2}$, $K_q(z,\overline{u};\Omega)$ is the reproducing kernel of $H_q(\Omega)$ and $K_{\frac{1}{2}}(z,\overline{u};\Omega)$ is also that of the Szegö space. Hence we write the Szegö space on Ω by $H_{\frac{1}{2}}(\Omega)$. Moreover, for $0 < q < \frac{1}{2}$, $K_q(z,\overline{u};\Omega)$ uniquely determines the reproducing kernel Hilbert space $H_q(\Omega)$ admitting the reproducing kernel $K_q(z,\overline{u};\Omega)$. For these analytic function spaces, refer to [1, p.203] and [2, §7].

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

THEOREM. *For any fixed $q > 0$ and for any $g \in H_q(\Omega)$, the function $g' - qg\frac{\varphi''}{\varphi'}$ belongs to $H_{q+1}(\Omega)$ and the following identity is valid:*

$$\|g\|_{q,\Omega} = \|g' - qg\frac{\varphi''}{\varphi'}\|_{q+1,\Omega}.$$

EXAMPLES: Let Ω_1 be a half plane, $\Omega_2 = \{|z| < 1\}$, $\Omega_3 = \{|\Im z| < \frac{\pi}{2}\}$ and $\Omega_4 = \{|\arg z| < \alpha < \pi\}$, and let $\varphi_1(z) = az + b$ $(a,\ b \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$, $\varphi_2(z) = i(1+z)/(1-z)$, $\varphi_3(z) = ie^z$ and $\varphi_4(z) = iz^{\frac{\pi}{2\alpha}}$. Then, for any $q > 0$, we obtain the following identities:

$\|f\|_{q,\Omega_1} = \|f'\|_{q+1,\Omega_1}$ for all $f \in H_q(\Omega_1)$;
$\|f\|_{q,\Omega_2} = \|f'(z) - 2qf(z)(1-z)^{-1}\|_{q+1,\Omega_2}$ for all $f \in H_q(\Omega_2)$;
$\|f\|_{q,\Omega_3} = \|f' - qf\|_{q+1,\Omega_3}$ for all $f \in H_q(\Omega_3)$;
$\|f\|_{q,\Omega_4} = \|f'(z) - q(\frac{\pi}{2\alpha} - 1)z^{-1}f(z)\|_{q+1,\Omega_4}$ for all $f \in H_q(\Omega_4)$.

REFERENCES

1. V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part I,* Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 187–214.
2. J. Burbea, *Total positivity of certain reproducing kernels,* Pacific J. Math. **67** (1976), 101–130.
3. P. L. Duren, "Theory of H^p spaces," Academic Press, New York and London, 1970.
4. S. Saitoh, *Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions,* Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 74–78.
5. ———, "Theory of reproducing kernels and its applications," Pitman Res. Notes in Math. Series 189, Longman Scientific & Technical, England, 1988.

to appear in *Complex Variables*

Approximation by the Solutions of the Heat Equation

辺　斗源　　群馬大学工学部
斎藤 三郎　　群馬大学工学部

Throughout this lecture, a is a nonnegative constant. Put $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ and let, for $1 - 2at > 0$, the function $W_{a,t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, be defined by

$$W_{a,t}(x) = \frac{-ax^2}{1-2at}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Then we shall consider the heat equation :

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) \quad \text{on} \quad \mathbb{R} \times \{t > 0\} \tag{1}$$

satisfying the initial condition

$$u(x,0) = F(x) \quad \text{on} \quad \mathbb{R}, \tag{2}$$

where F belongs to the weighted L^2- space $L^2[\mathbb{R}, \exp(-ax^2)dx]$. More precisely, let $u_F(x,t), 0 < t < \frac{1}{2a}$, be the solution of the Cauchy problem for (1.1) and (1.2) (if $a = 0, t$ is considered on $(0, \infty)$).

For $h \in L^2[\mathbb{R}, \exp\{W_{a,t}(x)\}dx]$ and for any fixed $t, 0 < t < \frac{1}{2a}$, we want to minimize the following expression :

$$\int_{\mathbb{R}} |u_F(x,t) - h(x)|^2 \exp\{W_{a,t}(x)\}dx,$$

where F runs over $L^2[\mathbb{R}, \exp(-ax^2)dx]$. In fact, the class of the solutions u_F is dense in $L^2[\mathbb{R}, \exp\{W_{a,t}(x)\}dx]$. Hence, we shall determine the condition for h to exist the extremal solution u_F such that

$$\int_{\mathbb{R}} |u_F(x,t) - h(x)|^2 \exp\{W_{a,t}(x)\}dx = 0. \tag{3}$$

Moreover, our minimizing problem will be connected with the analytic extension problem of h to the complex plane $\mathbb{C}$.

Our results are as follows:

THEOREM 1. *For $h \in L^2[\mathbb{R}, \exp\{W_{a,t}(x)\}dx]$, there exists a member $F \in L^2[\mathbb{R}, \exp(-ax^2)dx]$ satisfying* (3) *if and only if*

$$\iint_{\mathbb{C}} \left| \int_{\mathbb{R}} h(\xi)\exp\left\{-\frac{(1+4at)\xi^2}{8t(1-2at)} + \frac{z\xi}{4t(1-2at)}\right\} d\xi \right|^2 \cdot \exp\left\{\frac{-3x^2+y^2}{12t(1-2at)}\right\} dxdy < \infty. \quad (4)$$

THEOREM 2. *For a member $h(x)$ in $L^2[\mathbb{R}, \exp\{W_{a,t}(x)\}dx]$ satisfying* (4), *the analytic extension $h(z)$ is expressible in the form*

$$h(z) = \frac{1}{16\sqrt{3}\{\pi t(1-2at)\}^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{(1-8at)z^2}{16t(1-2at)}\right\}$$
$$\cdot \iint_{\mathbb{C}} \left[\int_{\mathbb{R}} h(\xi)\exp\left\{-\frac{(1+4at)\xi^2}{8t(1-2at)} + \frac{Z\xi}{4t(1-2at)}\right\} d\xi\right]$$
$$\cdot \exp\left\{\frac{(19-16at)X^2}{16t(1-2at)} + \frac{(-65+48at)Y^2}{48t(1-2at)} + \frac{\overline{Z}z + iXY}{8t(1-2at)}\right\} dXdY,$$

$$Z = X + iY.$$

REFERENCES

1. T. Ando and S. Saitoh, *Restriction of reproducing kernel Hilbert spaces to subsets* , *Preliminary reports*, Suri Kaiseki Kenkyu Jo, Koukyu Roku **743** (1991), 164-187 (in Japanese).
2. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337-404.
3. P. L. Duren, "Theory of H^p spaces," Academic Press, New York and London, 1970.
4. N. Hayashi and S. Saitoh, *Analyticity and smoothing effect for the Schrödinger equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique **52** (1990), 163-173.
5. S. Saitoh , *Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1987), 74-78.
6. ———, *The Weirstrass transform and an isometry in the heat equation*, Applicable Analysis **16** (1988), 1-6.
7. ———, "Theory of reproducing kernels and its applications," Pitman Res. Notes in Math. Series, 189, Longman Scientific & Technical, England, 1988.

On the frequency of zeros of solutions of $w''+Aw=0$, where A is entire and transcendental

TODA Nobushige

Nagoya Institute of Technology

We consider the differential equation

$$(1) \qquad w''+Aw=0,$$

where A is a transcendental entire function of order finite. For a meromorphic function f in the complex plane, let $\rho(f)$ be its order, $\mu(f)$ its lower order and $\lambda(f)$ the order of $N(r,1/f)$.

It is known that

(i) Any non-zero solution w of (1) is an entire function such that $\rho(w)=\mu(w)=+\infty$.

(ii) Let w_1, w_2 be two linearly independent solutions of (1) and put $E=w_1w_2$, $F=w_1/w_2$. Then, (a) $\mu(A)\leqq 1/2 \rightarrow \lambda(E)=+\infty$; (b) $\rho(F)=+\infty$.

(iii) Let w_1, w_2, w_3 be pairwise independent solutions of (1). Then $\lambda(w_1w_2w_3)=+\infty$.

Our results are as follows.

<u>Theorem 1</u>. Let $w_1,\ldots,w_q (q>2)$ be pairwise linearly independent solutions of (1). Then,

$$(q-2)T(r,F)<N(r,1/w_1w_2\cdots w_q)+S(r,F)$$

Theorem 2. Suppose that the set

$$\{z : |A(z)| > K\} \qquad (K > |A(0)|)$$

has at least N components. Then,

$$\rho(E) = +\infty \qquad \text{or} \qquad N/\mu(A) + 1/\rho(E) \leqq 2$$

BMO 関数の拡張可能性について

後藤 泰宏 (京大 理)

以下では簡単のため 2 次元 Euclid 空間のみを扱うが一般次元の場合も同様の議論が成立する. 領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上の局所可積分な関数 f は

$$\|f\|_{*,D} = \sup_Q m(Q)^{-1} \int_Q |f - f_Q| dm < \infty$$

なるとき $BMO(D)$ 関数という. ここで dm は 2 次元 Lebesgue 測度, $f_Q = m(Q)^{-1} \int_Q f dm$, また sup は D 上の, 軸に平行な辺を持つすべての閉正方形の全体について取るものとする.

D 上の軸に平行な辺を持つ閉正方形 Q で $d(Q, \partial D) \geq 32l(Q)$ なるものを許容正方形と呼びその全体を $\mathcal{A}(D)$ とあらわすことにする. また D を $32l(Q) \leq d(Q, \partial D) \leq 66l(Q)$ なる dyadic な閉正方形 Q の族に Whitney 分解しその全体を $\mathcal{D}(D)$ と表わす. そのとき $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ なる $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}(D)$ に対しては $1/2 \leq l(Q_2)/l(Q_1) \leq 2$. また $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{A}(D)$. $Q_0, Q_1, , \cdots, Q_n \in \mathcal{A}(D)$ は

$$Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset, \quad 1/2 \leq l(Q_{i+1})/l(Q_i) \leq 2, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

なるとき 許容鎖と呼ぶ. 同様に $Q_0, Q_1, , \cdots, Q_n \in \mathcal{D}(D)$ は

$$Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

なるとき Whitney 鎖と呼ぶ. Whitney 鎖は許容鎖である. $Q, Q' \in \mathcal{A}(D)$ に対し

$$\delta_D(Q, Q') = \inf\{n \geq 1 | Q = Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q' \text{ は許容鎖 }\}$$

また $Q, Q' \in \mathcal{D}(D)$ に対し

$$W_D(Q, Q') = \inf\{n \geq 1 | Q = Q_0, Q_1, \cdots, Q_n = Q' \text{ は Whitney鎖 }\}$$

と定める. そのとき $\delta_D(Q, Q') \approx W_D(Q, Q')$, $Q, Q' \in \mathcal{D}(D)$. さらに軸に平行な辺を持つ閉正方形 Q, Q' に対し

$$\psi(Q, Q') = \log\left(1 + \frac{l(Q) + l(Q') + d(Q, Q')}{l(Q)}\right)\left(1 + \frac{l(Q) + l(Q') + d(Q, Q')}{l(Q')}\right)$$

とおくと $\psi(Q, Q') \approx \delta_{\mathbf{R}^2}(Q, Q')$, $Q, Q' \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$. 領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ は

$$W_D(Q, Q') \leq M\psi(Q, Q'), \quad Q, Q' \in \mathcal{D}(D)$$

なる定数 $M>0$ の存在するとき一様領域という.

定理 (Jones [3]). 領域 $D\subset \mathbf{R}^2$ について $BMO(D)$ 関数が常にある $BMO(\mathrm{R}^2)$ 関数に拡張できるための必要十分条件は D が一様領域となることである.

ここではこの定理を次の形に一般化する. 領域 $D_2\subset \mathbf{R}^2$ 及びその部分領域 D_1 について

$$\delta_{D_1}(Q,Q')\le M\delta_{D_2}(Q,Q'),\quad Q,Q'\in \mathcal{A}(D_1)$$

なる定数 $M>0$ が存在するとき D_1 は D_2 に関する相対一様領域と呼ぶことにする. このとき

$$W_{D_1}(Q,Q')\le M\delta_{D_2}(Q,Q'),\quad Q,Q'\in \mathcal{D}(D_1)$$

なる定数 $M>0$ が存在するが逆にこのような定数 $M>0$ が存在すれば D_1 は D_2 に関する相対一様領域となる. ここで $W_{D_1}(Q,Q')$, $Q,Q'\in\mathcal{D}(D_1)$ は quasi-hyperbolic 距離

$$k_{D_1}(z,z')=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}\frac{|d\zeta|}{d(\zeta,\partial D_1)}$$

に, また $\delta_{D_2}(Q,Q')$, $Q,Q'\in\mathcal{D}(D_1)$ は

$$j_{D_1,D_2}(z,z')=\begin{cases} k_{D_2}(z,z')+\log\dfrac{d(z,\partial D_2)}{d(z,\partial D_1)}\dfrac{d(z',\partial D_2)}{d(z',\partial D_1)}, & |z-z'|\ge d(z,\partial D_2)/2,\\ \log\left(1+\dfrac{|z-z'|}{d(z,\partial D_1)}\right)\left(1+\dfrac{|z-z'|}{d(z',\partial D_1)}\right), & |z-z'|<d(z,\partial D_2)/2,\end{cases}$$

に対応しており D_1 が D_2 に関する相対一様領域となるための必要十分条件は

$$k_{D_1}(z,z')\le Kj_{D_1,D_2}(z,z')+L,\quad z,z'\in D_1$$

なる定数 $K,L>0$ の存在することである.

定理 ([2]). 領域 $D_2\subset\mathbf{R}^2$ 及びその部分領域 D_1 について $BMO(D_1)$ 関数が常にある $BMO(D_2)$ 関数に拡張できるための必要十分条件は D_1 が D_2 に関する相対一様領域となることである.

参考文献

[1] F. W. Gehring, Uniform domains and the Ubiquitous Quasidisk, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 89 (1987), 88-103.

[2] Y. Gotoh, BMO extension theorem for relative uniform domains, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[3] P. Jones, Extension theorems for BMO, Indiana Univ. Math. J., 29 (1980), 41-66.

BMO multiplier について

後藤 泰宏 (京大 理)

Stegenga [3] によれば単位円周 T 上の可測関数 ϕ について ϕ が BMO multiplier となるための必要十分条件は $\phi \in L^\infty(T)$ かつ

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\phi - \phi_I| d\theta \le \frac{M}{\log(4\pi/|I|)}$$

なる定数 $M > 0$ の存在することである. $\mathbf{R}^n$ 上の BMO multiplier の特徴付け (Nakai-Yabuta [2]) も知られている. さらに n 次元球 B^n 上の BMO multiplier の特徴付け等も知られているようである. ここでは一般領域上の BMO multiplier の特徴付けを与える. 以下では簡単のため 2 次元 Euclid 空間のみを扱うが一般次元の場合も同様の議論が成立する. 以下 D は $\mathbf{C}$ の真部分領域とする. D 上の可測関数 ϕ について, 任意の $BMO(D)$ 関数 f に対し $\phi f \in BMO(D)$ となるとき ϕ は BMO multiplier であるという. $Q_0 \in \mathcal{D}(D)$ を一つ固定する. BMO multiplier を考察するにあたっては $f \in BMO(D)$ に対し定数を 0 とみなさない norm

$$\|f\|_{**,D} = \|f\|_{*,D} + |f|_{Q_0}$$

を採用するほうが都合がよい. そのとき $f \mapsto \phi f$ は $BMO(D)$ 上の有界な作用素となる. その作用素 norm を $\|\phi\|$ とする.

定理 1. ϕ が BMO multiplier であるための必要十分条件は $\|\phi\|_\infty \le M$ かつ

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q |\phi - \phi_Q| dm \le \frac{M}{\delta_D(Q, Q_0)}, \quad Q \in \mathcal{A}(D)$$

なる定数 $M \ge 0$ の存在することである. またこのとき $\|\phi\| \le A_1 M$ が成立する. 逆に BMO multiplier ϕ に対しては $M \le A_2\|\phi\|$ なる $M \ge 0$ を取ることができる. ここで $A_1, A_2 > 0$ は絶対定数である.

$\mathcal{D}(D)$ 上の関数 F はある定数 $C > 0$ に対し $F \ge C^{-1}$ かつ

$$C^{-1} \le F(Q)/F(Q') \le C, \quad Q \cap Q' \ne \emptyset,\ Q, Q' \in \mathcal{D}(D).$$

を満たすとき admissible と言うことにする. admissible な F に対し $\mathcal{A}(D)$ 上の関数 $\hat{F}$ を

$$\hat{F}(Q) = F(\tilde{Q}) + \log\left(2 + \frac{\tilde{l}(Q)}{l(Q)}\right)$$

により定める. ここで $\tilde{Q}$ は $\tilde{Q} \cap Q \ne \emptyset$ なる $\mathcal{D}(D)$ の正方形の一つとする.

定理 2. 領域 D に関する admissible な関数 F に対し以下の条件は同値である.

(1) ある定数 $M>0$ が存在し $W_D(Q,Q_0)\le MF(Q)$, $Q\in\mathcal{D}(D)$.

(2) $L^\infty(D)$ 関数 ϕ についてある定数 $M>0$ が存在し

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q|\phi-\phi_Q|dm\le\frac{M}{\hat{F}(Q)},\quad Q\in\mathcal{A}(D)$$

であれば ϕ は BMO multiplier.

系 1. 領域 D について以下の条件は同値である;

(1) ある定数 $M>0$ が存在し $W_D(Q,Q_0)\le M\psi(Q,Q_0)$, $Q\in\mathcal{D}(D)$.)

(2) ある定数 $M>0$ に対し

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q|\phi-\phi_Q|dm\le\frac{M}{\psi(Q,Q_0)},\quad Q\in\mathcal{A}(D)$$

であるような $\phi\in L^\infty(D)$ は常に BMO multiplier.

領域 D はある定数 $M>0$ に対し

$$\delta_D(Q,Q_0)\le M\log\left(2+\frac{1}{l(Q)}\right),\quad Q\in\mathcal{A}(D)$$

なるとき Hölder 領域という. Hölder 領域は有界である. また有界な一様領域は常に Hölder 領域である.

系 2. 領域 D が Hölder 領域であるための必要十分条件はある定数 $M>0$ に対し

$$\frac{1}{m(Q)}\int_Q|\phi-\phi_Q|dm\le\frac{M}{\log\left(2+\frac{1}{l(Q)}\right)},\quad Q\in\mathcal{A}(D)$$

となる $\phi\in L^\infty(D)$ が常に BMO multiplier となることである.

参考文献

[1] L. Brown and A. L. Shields, Multipliers and cyclic vectors in the Bloch space, Michigan Math. J. 38 (1991), 141-146.

[2] E. Nakai and K. Yabuta, Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 207-218.

[3] D. A. Stegenga, Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation, Amer. J. Math., 98 (1976), 573-589.

[4] K. Zhu, Multipliers for BMO in the Bergman Metric with application to Toeplitz Opetators, J. Funct. Anal., 87 (1989), 31-50.

A note on the Grishin's lemma

村 澤 忠 司　　　　京都府立大学

関数wは開集合$\Omega \subset R^n$ $(n \geqq 2)$ 上で定義されたδ－劣調和関数を示す．つまり，$w = u - v$．ただしu，vはΩ上の劣調和関数である．このとき、wはΩ上で極集合を除いて（q.e.）定義される．$\mu[w]$はΩ上のδ－劣調和関数wに関連する Riesz chargeを示す．M^+はX上の非負測度の族を示す．特に、μ、$\nu \in M^+$に対し、もし$\mu - \nu \in M^+$ならば $\mu \geqq \nu$と定義してM^+に大小の順序を入れる。

このとき、Ω内の点 x を中心とし半径rの球の表面上で正規化された表面測度 $d\sigma_{(x,r)}$ による関数wの積分に関する集合

$$E = \{ x \in \Omega \mid \liminf_{r \to 0} \int w \, d\sigma_{(x,r)} = 0 \}$$

を考え、$\mu[w]$のE上への制限の評価に関連する性質について、次の結果を報告する．

定理． wは開集合$\Omega \subset R^n$ $(n \geqq 2)$上で定義された q. e.に非負のδ－劣調和関数とする。このとき、wに関連するRiesz charge $\mu[w]$の集合E上への制限 $\mu[w] \mid E$ は非正である．

重調和関数の劣平均値定理とその応用

水田　義弘　　　　広島大学総合科学部

領域 G 上の C^∞ 級の関数 u が m 調和であるとは，G 上で

$$\Delta^m u = 0$$

が成立するときをいう．関数 u の j 階のグラディエント

$$|\nabla_j u(x)| = \left(\sum_{|\mu|=j} |D^\mu u(x)|^2 \right)^{1/2}$$

と，原点を中心とし半径 r の球 $B(0,r)$ 上での平均値

$$A(u,r) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} u(y)dy$$

を考える．

定理． 関数 u が球 $B(0,r)$ の内部で m 調和であるならば，

$$|\nabla_j u(0)| \le M_j r^{-j} A(|u|,r)$$

が成立する．ここで，定数 M_j は，j，m，次元 n だけに依存する．

調和関数の場合 $(m=1)$ には，Stein 氏の本 [1] の Appendix C.3 に書いてあり，よく知られた結果であろう．この定理を利用すると，ディリクレ型積分が有限である重調和関数の境界値の存在について論じることができる．

定理の証明のために，

$$A_1 = A, \qquad A_{j+1}(u,r) = \frac{1}{r^{n+2j}} \int_0^r A_j(u,t) t^{2j-1+n} dt$$

と，順次，定めて，次の補題を用意する．

補題． 関数 u が球 $B(0,r_0)$ の内部で m 調和であるならば，

$$u(0) = \sum_{j=1}^m c_j A_j(u,r), \qquad 0 < r < r_0$$

ここで，定数 c_j は，j，m，次元 n だけに依存する．

この補題から，

(1) $$|u(0)| \leq MA(|u|, r), \qquad 0 < r < r_0$$

となることが示せる．もちろん，定数 M は r に依存しない．また，$D_i = \partial/\partial x_i$ とすると，ガウスの湧出量定理により，

$$A(D_i u, t) = \frac{1}{|B(0,t)|} \int_{\partial B(0,t)} u(y) \, \frac{y_i}{|y|} \, dS(y)$$

であるから，(1) を得たように，補題から

$$|D_i u(0)| \leq M r^{-n-1} \int_{B(0,r)} |u(y)| dy$$

一般に，u が $B(z,r)$ 上で m 調和ならば，

$$|D_i u(z)| \leq M r^{-n-1} \int_{B(z,r)} |u(y)| dy$$

従って，

$$\int_{B(0,r)} |D_i u(z)| dz \leq M r^{-1} \int_{B(0,2r)} |u(y)| dy$$

この事実を繰り返し使うと，

$$\int_{B(0,r)} |D^\mu u(z)| dz \leq (M r^{-1})^{|\mu|} \int_{B(0,2^{|\mu|}r)} |u(y)| dy$$

関数 u の偏微分は全て m 調和であるから，(1) を利用すると定理の結果が得られる．

参考文献

[1] E. M. Stein, Singular Integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

ポテンシャルの細極限値について

水田　義弘　　広島大学総合科学部

R^n 上の測度 μ の α ポテンシャルまたは対数ポテンシャル

$$R_\alpha\mu(x) = \int_{R^n} R_\alpha(x-y)d\mu(y), \qquad R_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha-n} & (\alpha < n) \\ \log^+ \dfrac{1}{|x|} & (\alpha = n) \end{cases}$$

を考える．原点に収束する点列 $\{x_j\}$ が正則であるとは,

$$R_\alpha(x_{j+1}) \le \kappa R_\alpha(x_j)$$

となる正の定数 κ が存在するときをいう．$\Psi_p(r) = r^p$, $p \ge 1$，のように，区間 $[0,\infty)$ 上で正値単調増加である凸関数 Ψ，さらに，区間 $[0,\infty)$ 上で正値単調増加関数 φ を考える．Ψ, φ は次の (Δ_2) 条件を満足するものとする：

$$\psi(2r) \le M\psi(r), \qquad r > 0$$

このとき

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi(\varphi(|x_j|)\ R_\alpha\mu(x_j)) < \infty$$

となる原点に収束する正則点列 $\{x_j\}$ が存在するとき，ポテンシャル $R_\alpha\mu$ の原点での細極限値の存在を調べよう．

定理 1． 以上の条件のもとで，次の集合 E が存在する：

(1.1)
$$\lim_{x\to 0, x\in R^n - E} \varphi(|x|)R_\alpha\mu(x) = 0$$

(1.2)
$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi(R_\alpha(2^{-j})C_\alpha(E_j)) < \infty$$

ここで，$C_\alpha = C_{R_\alpha}$ は α 容量を表わし，$E_j = \{x \in E; 2^{-j} \le |x| < 2^{-j+1}\}$ である．

以前，$\{\varphi(|x_j|)R_\alpha\mu(x_j)\}$ が有界である正則点列 $\{x_j\}$ が存在するときに，ポテンシャル $R_\alpha\mu$ の半細極限値の存在を調べたことがある．

$\Psi(r)=r$ のとき，定理1における E の条件 (1.2) は E が原点で尖細であることを意味している．定理1から次の結果を得る．

定理 2. 上の条件に加えて，

$$\Psi(r)\Psi(r^{-1}) > M' > 0\,, \qquad r>0$$

が成立するとき，次の単位球面 $\partial B(0,1)$ 上の集合 $\tilde{E}$ が存在する：

$$\lim_{r\to 0} \varphi(r)R_\alpha\mu(r\xi)=0\,, \qquad \forall\xi\in\partial B(0,1)-\tilde{E} \tag{2.1}$$

$$C_{\Psi\circ R_\alpha}(\tilde{E})=0 \tag{2.2}$$

最近，Gardiner 氏 ([1]) は，$\Psi=\Psi_p$，$\alpha=2$，$\varphi(r)=[R_2(r)]^{-\delta}$，$0<\delta<1$，の場合を論じ，除外集合 $\tilde{E}$ のハウスドルフ次元が高々 $p(n-2)$ であることを示した．(2.2) によると，$C_{n-p(n-2)}(\tilde{E})=0$．

上半空間 $H=\{x=(x_1,\dots,x_n);x_n>0\}$ 上のグリーン型ポテンシャル

$$G_\alpha\mu(x)=\int_H G_\alpha(x,y)d\mu(y)$$

については，境界点において細極限値の存在を論じることになる；ここで

$$G_\alpha(x,y)=\begin{cases} |x-y|^{\alpha-n}-|\overline{x}-y|^{\alpha-n} & (\alpha<n) \\ \log\dfrac{|\overline{x}-y|}{|x-y|} & (\alpha=n)\end{cases}$$

参考文献

[1] S.J.Gardiner, Fine limits of superharmonic functions, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **108** (1990), 381-394.

ポテンシャル論における最小変分の方法

二宮信幸

局所コンパクトなハウスドルフ空間 Ω において，$K(P,Q)$ を二点 P と Q について下半連続，$P=Q$ では ∞ であってもよいが $P \neq Q$ では必ず有限，かつ P と Q がそれぞれ互に素なコンパクト集合の中にあるときには上に有界，であるような関数とする。Ω の測度 μ と ν に対してポテンシャルおよび相互エネルギー積分

$$K(P,\mu) = \int K(P,Q)\,d\mu(Q),$$
$$K(\mu,P) = \int K(Q,P)\,d\mu(Q),$$
$$K(\mu,\nu) = \int d\mu(P)\int K(P,Q)\,d\nu(Q)$$

を考える。Ω のコンパクト集合 F の上の全質量 1 の正の測度の全体を $\mathfrak{M}_1(F)$ で表わし，それに属する μ_1 と μ_2，正の定数 t_1 と t_2 に対して

$$\max\begin{pmatrix} K(\mu_1,\ t_1\mu_1+t_2\mu_2) \\ K(\mu_2,\ t_1\mu_1+t_2\mu_2) \end{pmatrix}$$

を考える．昨秋北海道大学において，その下限（最小値）

が $(t_1+t_2)W_F$ に等しいことを述べた。W_F は $\mathfrak{M}_1(F)$ の測度 μ に対してエネルギー積分 $K(\mu,\mu)$ の下限（最小値）である，本講演においては

$$I(\mu_1,\mu_2)=K(\mu_1,t_1\mu_1+t_2\mu_2)+K(\mu_2,t_1\mu_1+t_2\mu_2)$$

なる量に対して，その下限を考える。ただし μ_1，μ_2 は

$$K(\mu_1,t_1\mu_1+t_2\mu_2)\gtrsim K(\mu_2,t_1\mu_1+t_2\mu_2)$$

であるような $\mathfrak{M}_1(F)$ の測度の組である．(μ_1,μ_2) がそうであるからといって，(μ_2,μ_1) もそうであるとは限らない．簡単な場合として，

$$I(\mu_1,\mu_2)=K(\mu_1,\mu_1+\mu_2)+K(\mu_2,\mu_1+\mu_2)$$

の

$$K(\mu_1,\mu_1+\mu_2)\gtrsim K(\mu_2,\mu_1+\mu_2)$$

なる条件の下での最小を考えると，それは明らかに $4W_F$ である。

平衡ベクトルポテンシャルについて

山口博史　（滋賀大学　教育学部）

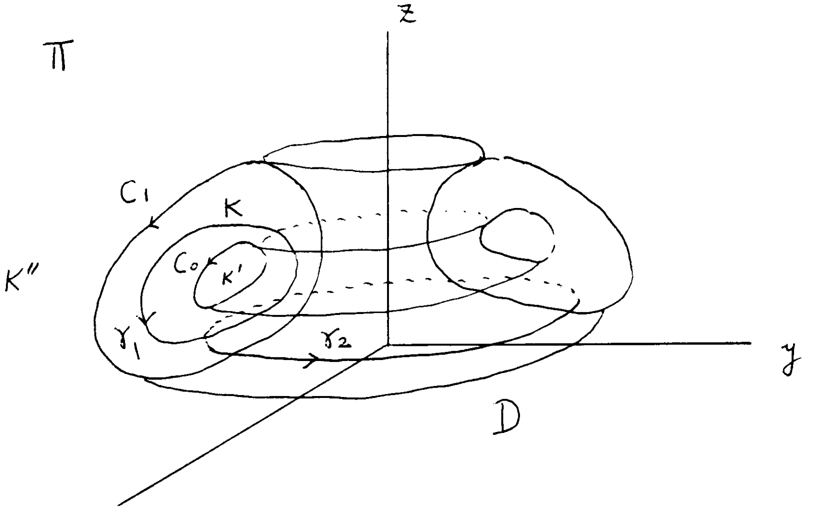
Dを$\mathbf{R}^3$の面Σで囲まれた領域とする。Σ上の面電流 JdS_x は$\mathbf{R}^3$上のベクトルポテンシャル $A(x)$、$\mathbf{R}^3-\Sigma$ 上の磁場 $B(x)$を生じる。また、閉曲線γを通過する全電流 $J[\gamma]$ が定まる。特に、$B(x)\equiv 0$ in $\mathbf{R}^3-D$ の時、JdS_x をΣに関する平衡面電流、$A(x)$を平衡ベクトルポテンシャルと言った。

定理　Dの１次元ホモロジー基底を$\{\gamma_i\}(1\leqq i\leqq q)$とする。

(1)各 iについて、$J_i[\gamma_j]=\delta_{ij}(1\leqq j\leqq q)$となる平衡面電流 $J_i dS_x$ が唯一つ在る。

(2)任意の平衡面電流は$\{J_i dS_x\}(1\leqq i\leqq q)$の一次結合で表せる。

$J_i dS_x$ より生じるベクトルポテンシャル 及び 磁場を$A_i(x)$、$B_i(x)$と書く。下図の如く、(x,z)-平面の２重連結領域 K の回転体 D 及び 閉曲線 $\gamma_i(i=1,2)$ に対して $J_i dS_x$, $A_i(x)$, $B_i(x)$ の表示を求めよう。



<u>記号</u> (イ) 半平面 $\Pi = \{(r,z) \mid r > 0\}$.

(ロ) $\Delta^{\sim} = \partial^2/\partial r^2 + \partial^2/\partial z^2 - (1/r)\partial/\partial r$.

(ハ) $v(r,z) \in C(\Pi) \cap C^2(K)$ s.t. $v = 1$ on C_0 and $= 0$ on C_1; $\Delta^{\sim} v = 0$ on K; $v \equiv 1$ on K' and $\equiv 0$ on K''.

(ニ) $c = \int_{C_1} (1/r)(\partial v/\partial n)ds$ (<0).

(ホ) $u(r,z) \in C^1(\Pi) \cap C^2(\Pi - K)$ s.t. $\Delta^{\sim} u = 1, 0$ on $K, \Pi - K$; & $u = 0$ on $\partial K \cup \{\infty\}$.

(ヘ) 点 $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbf{R}^3$ にベクトル $\mathbf{a} = (a,b,c)$ が与えられた時、(a,b) の dr-, $d\theta$- 成分を $a^{\sim}$, $b^{\sim}$とする。$\mathbf{a} = [a^{\sim}, b^{\sim}, c]$ と書く。

表示

$J_1 = (|\mathrm{Grad}\ v|/cr)[0,1,0]$ on Σ

$A_1 = (v/cr)[0,1,0]$ in $\mathbf{R}^3$

$B_1 = (1/r)[-\partial v/\partial z, 0, \partial v/\partial r]$, $\equiv 0$ in D, in $\mathbf{R}^3 - D \cup \Sigma$.

$J_2 = (1/r)[\alpha, 0, \beta]$ on Σ.

$A_2 = (2\pi/r)[\partial u/\partial z, 0, -\partial u/\partial r]$ in $\mathbf{R}^3$.

$B_2 = (1/r)[0,1,0]$ in D, $\equiv 0$ in $\mathbf{R}^3 - D \cup \Sigma$.

但し、(α, β) は点 x での∂Kの単位接線ベクトル。

特別講演

複素力学系の幾何学的極限とくり込み理論

宍倉 光広　　東工大・理・数学

Riemann球面 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上で、有理関数によって定義される複素力学系を考える。有理関数の列 f_n が f に $\overline{\mathbb{C}}$ 上一様に収束するとき f を $\{f_n\}$ の algebraic limit と呼ぶ。このとき、f_n の iteration の列 $\{f_n^{k_n}\}$ もある領域で収束することがあるが、このような非定数極限全部を集めたものを $\{f_n\}$ の geometric limit（幾何学的極限）と呼ぶ。（後で詳しく定義）この呼び方は、Klein群の理論での algebraic/geometric limit をまねたものである。

後で見るように、f が parabolic periodic point (multiplier (固有値) が 1の巾根となる周期点) をもつとき、ある条件をみたす関数列 $\{f_n\}$ に対し、非自明な geometric limit が存在する。geometric limit は、f_n の Julia 集合の極限を調べたり、一つの関数 f からの分岐を調べたりするのに使われる。特に、f が parabolic per. pt. をもつ時には、f を少し変えた時の

dynamics, Julia集合の変化が著しく、パラメーター空間でも、分岐点のまわりに分岐点の列が集積し…等、かなり複雑になっている。

本講演では、幾何学的極限の典型的な例の構成法を紹介し、それからひきおこされるrenormalization（くり込み）理論について触れ、最後に応用として、Mandelbrot集合の境界のHausdorff次元が2であることの証明について述べる。

幾何学的極限の研究はまだ始まったばかりであり、定式化等も固定していない点もあり、また多くの基本的問題がopenであることを注意しておこう。

例1. 複素力学系ではないが教訓的な例を見てみよう。（McMullen）

$f_n : \mathbb{C}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}\times\mathbb{R}$, $f_n(z,t) = \left(\frac{in}{2\pi} + \left(z - \frac{in}{2\pi}\right)e^{\frac{2\pi i}{n}}, t+\frac{1}{n}\right)$

$\langle f_n \rangle$ を f_n で生成される半群とする。

$\Rightarrow$ algebraic limit $\langle f_n \rangle = \langle f_\infty \rangle$, $f_\infty(z,t) = (z+1, t)$

geometric limit $\langle f_n \rangle = \left\{ g^k \circ f_\infty^{\ell} \;\middle|\; \begin{array}{l} \ell \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ k=0 \Rightarrow \ell \geq 0 \end{array} \right\}$

$g(z,t) = (z, t+1)$

さらに 商空間 $X=(\mathbb{C}\times\mathbb{R})/f_\infty=(\mathbb{C}/\mathbb{Z})\times\mathbb{R}$
をおいて、induced map $\bar{g}: X\to X$ が定義される。

例2. θ を無理数, $\frac{p_n}{q_n}$ を θ に収束する有理数の列とするとき、$f_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

$$f_n(z)=z\cdot\exp\left(-\frac{1}{nq_n}+2\pi i\frac{p_n}{q_n}\right)$$

とおくと、$\mathrm{alg.}\lim\langle f_n\rangle=\langle f_\infty\rangle$, $f_\infty(z)=e^{2\pi i\theta}z$

$\mathrm{geom.}\lim\langle f_n\rangle=\{z\mapsto az \mid a\in\mathbb{C}, 0<|a|\le 1\}$。

<u>定義</u> f_n, f を有理関数 (次数 $d\ge 2$) とし、

$f_n\to f$ $(n\to\infty)$ algebraically (i.e. uniformly on $\hat{\mathbb{C}}$)

とする。関数の集合 Γ が $\{f_n\}$ の <u>geometric limit</u> であるとは、次の (a) (b) をみたすものをいう。

(a) Γ の各元は $\hat{\mathbb{C}}$ の領域から $\hat{\mathbb{C}}$ への非定数な解析的写像(有理型関数)であり、ある $k_n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n^{k_n}$ の極限として書ける。

(b) もし $k_n\in\mathbb{N}$ で $f_n^{k_n}$ がある領域 U で非定数な関数 g に収束したら、g は Γ のある元の U への制限になっている。

geometric limit の基本的性質

- $\overline{\langle f \rangle} \subset \Gamma = \text{geom.}\lim \langle f_n \rangle$, ここに $\overline{\langle f \rangle}$ は $\langle f \rangle$ に f の iteration の列の極限をつけ加えたもの。
- $g, h \in \Gamma$ $\quad \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Im}\,h \neq \phi$ (Dom(・)は定義域)
 $\Rightarrow \exists k \in \Gamma$ $\quad h^{-1}(\mathrm{Dom}(g)) \subset \mathrm{Dom}(k)$ & $g \circ h = k$ on $h^{-1}(\mathrm{Dom}(g))$.
- $g, h \in \Gamma \Rightarrow g(h(z)) = h(g(z))$ (両辺が定義される点で)。
- $g \in \Gamma - \langle f \rangle \Rightarrow \mathrm{Dom}(g)$ は f の parabolic basin, Siegel disk, Herman ring あるいはその f による逆像に含まれる。(下記の注参照)

注. 有理関数 f に対し、Julia 集合 J_f を次で定義する。:
$$J(f) = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} \;\middle|\; \begin{array}{l} z \text{ のどんな近傍でも } \{f^n\} \text{ は} \\ \text{正規族でない。} \end{array} \right\}$$
$$= \overline{\{\text{repelling periodic points}\}}$$

定理 (Sullivan) $\overline{\mathbb{C}} - J(f)$ の各連結成分は f で何回かうつすと (集合として) 周期的になる。
周期的な連結成分は次のどれか:

- attractive basin: 軌道が attractive periodic pt. に収束; (multiplier の絶対値 < 1)
- parabolic basin: 軌道が parabolic periodic pt.

に収束;

- Siegel disk: $z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$ on $\{|z|<1\}$ $(\theta \in \mathbb{R}-\mathbb{Q})$ に共役;
- Herman ring: $z \mapsto e^{2\pi i\theta} z$ on $\{1<|z|<R\}$ $(\theta \in \mathbb{R}-\mathbb{Q},\ 1<R<\infty)$ に共役。

<u>定理</u>(?)(Epstein) algebraic に収束する関数列 $\{f_n\}$ に対し、適当に部分列をとれば geometric limit が存在する。

<u>問題</u> 有理関数 f に対し、それに algebraic に収束する列 $\{f_n\}$ から得られる geometric limit をすべて求め(構成的に)、それらを分類せよ。

ここでは、ある種の関数列 f_n に対し、$\{f_n^{k_n}\}$ $(k_n \nearrow \infty)$ の極限(これも便宜上 geometric limit と呼ぶ)を構成する方法を紹介する。

- f_0, f_n $(n \in \mathbb{N})$ を $d(\geq 2)$ 次の有理関数とし、$f_0(0)=0$, $f_0'(0)=1$, $f_0''(0) \neq 0$

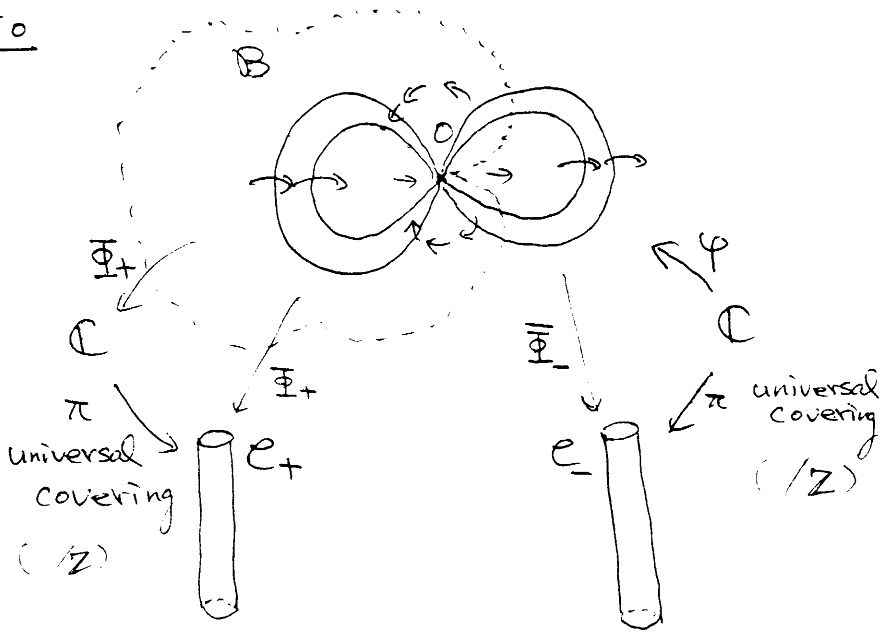
(0 は f_0 の non-degenerate な parabolic fixed pt.)

$f_n(0)=0$, $f_n'(0)=e^{2\pi i\alpha_n}$ $(\alpha_n\in\mathbb{C},\ \alpha_n\to 0)$
で $f_n\to f_0$ (alg.) とする。α_n については後で条件をつける。

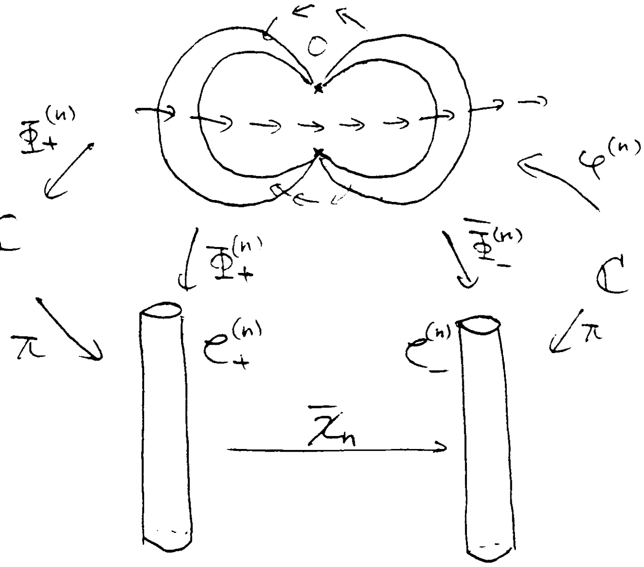
まず、f_0 について。 0を通るJordan曲線とそのf_0による像で囲まれた三日月形領域("基本領域", 図参照) が2つとれ、各三日月の境界をf_0で同一視してできるRiemann面は$\mathbb{C}/\mathbb{Z}$と等角になる。これらを$\mathcal{C}_+$と$\mathcal{C}_-$と書く。(方向に注意)
各三日月から$\mathcal{C}_\pm$への写像を$\Phi_\pm$と書く。
Φ_+は0のparabolic basin Bから$\mathcal{C}_+$への写像に拡張され、それを$\mathcal{C}_+$のuniversal covering $\mathbb{C}$へliftしたものをΦ_+と書く。
Φ_-^{-1}は$\mathcal{C}_-$のuniversal covering $\mathbb{C}$からの写像としてliftされる。これをφと書く。
次ページの図参照。

f_nについても、$\alpha_n\neq 0$, $|\arg\alpha_n|<\frac{\pi}{4}$で$f_n$が十分$f_0$に近ければ図のような"基本領域"が存在しやはりcylinders $\mathcal{C}_\pm^{(n)}$が構成できる。
(ただし、三日月の頂点は2つのfixed pts)

f_0


B
O
Φ_+
φ
$\mathbb{C}$
Φ_+
Φ_-
$\mathbb{C}$
π
universal covering
$(/\mathbb{Z})$
e_+
e_-
π
universal covering
$(/\mathbb{Z})$

f_n


O
$\Phi_+^{(n)}$
$\varphi^{(n)}$
$\mathbb{C}$
$\Phi_+^{(n)}$
$\Phi_-^{(n)}$
$\mathbb{C}$
π
$e_+^{(n)}$
$e_-^{(n)}$
π
$\bar{\chi}_n$

このとき $T(z)=z+1$ （$\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ の covering transf.）

とおくと $\quad \varphi \circ T = f_0 \circ \varphi$

$$\Phi_+ \circ f = T \circ \Phi_+ \quad \text{on } B.$$

$\varphi^{(n)}, \Phi_+^{(n)}$ についても同様。$\varphi^{(n)}, \Phi_+^{(n)}$ は適当な領域 $\mathrm{Dom}(\varphi^{(n)})$, $\mathrm{Dom}(\Phi_+^{(n)})$ で定義され、

$$\mathrm{Dom}(\varphi^{(n)}) \nearrow \mathbb{C} = \mathrm{Dom}(\varphi), \quad \varphi^{(n)} \to \varphi$$

$$\mathrm{Dom}(\Phi_+^{(n)}) \nearrow B = \mathrm{Dom}(\Phi_+), \ \Phi_+^{(n)} \to \Phi_+.$$

（ここで $\mathcal{C}_\pm^{(n)}$ を $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ と同一視するときに適切な normalization をとるとする。）

さらに、f_n に関しては 2つの fixed pts の間を通って一方の三日月から他方へ達する orbit があり、それが $\mathcal{C}_+^{(n)}$ から $\mathcal{C}_-^{(n)}$ への等角写像 $\bar{\chi}_n$ を induce し、その自然な $\mathbb{C}$ への lift χ_n がとれる。$\mathcal{C}_\pm^{(n)}$ の適切な normalization をとれば

$$\chi_n(z) = z - \frac{1}{\alpha_n}$$

と書けることがわかる。そして

$$\varphi^{(n)} \circ T^k \circ \chi_n \circ \Phi_+^{(n)}(z)$$

が定義されれば、$f_n^k(z)$ に等しい。

さて、$\frac{1}{\alpha_n} \bmod \mathbb{Z}$ が $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ で収束するとしよう。
このとき、$\exists k_n \in \mathbb{N}$, $k_n - \frac{1}{\alpha_n} \to {}^\exists \beta \in \mathbb{C}$.
すると、

$$f_n^{k_n}(z) = \varphi^{(n)} \circ T^{k_n} \circ \chi_n \cdot \Phi_+^{(n)}(z) \to \varphi(\Phi_+(z) + \beta) \quad (n \to \infty)$$

故に、$g(z) = \varphi(\Phi_+(z) + \beta)$ は geometric limit となる。 $g \circ f_0 = f_0 \circ g$ on B.

<u>Induced map</u> g が $\mathcal{C}_+ = B/f_0$ に induce する写像を $\bar{g}$ とする。$\bar{g}$ は $\Phi_+(g^{-1}(B))$ で定義され、次のように書ける。

$$\bar{g}(z) = \Phi_+ \circ \varphi(z+\beta)$$

$$z \in \Phi_+(g^{-1}(B)) = \varphi^{-1}(B) - \beta.$$

$\mathcal{C}_+$ を $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ の代りに $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ と同一視すれば、$\bar{g}$ は 0 と ∞ まで解析的に拡張でき、0 での multiplier は $e^{2\pi i\beta}$。

<u>Renormalization (くり込み)</u> 上で $\beta = 0$ となるよう調節すれば、0 が $\bar{g}$ の parabolic fixed pt. になる。このとき、$f_0 \longmapsto \bar{g}$ という対応

により ある種の関数の空間から それ自身への写像 (これを"renormalization"と呼ぶ) が定義される。この空間は 単葉関数のある集合と対応がつき、compact になる。

<u>問題</u>: この renormalization に fixed pt が存在し attracting になるか?

geometric limit の概念を用いて 次の定理の証明を解釈することができる。

$P_c(z) = z^2 + c \qquad z, c \in \mathbb{C}$ とおく。

$K_c = \{z \in \mathbb{C} \mid P_c^n(z) \not\to \infty \ (n \to \infty)\}$

$J_c = J(P_c) = \partial K_c$ (Julia set)

$M = \{c \in \mathbb{C} \mid 0 \in K_c\} = \{c \in \mathbb{C} \mid J_c$ が連結$\}$

<u>定理A</u> ∂M の Hausdorff 次元は 2.

<u>定理B</u> ∂M 内の generic (よって dense) な c に対し、J_c の Hausdorff 次元は 2.

証明には、前のような形で geometric limit

を2回構成し（$\beta=0$ のとき $\mathfrak{J}$ からまた geom. limit を作れる）、その性質から hyperbolic subset という Julia 集合の良い部分集合を作る。

このとき、くり込みが相空間の変換に与える影響が指数関数的なので、次元＝2を得ることができる。

参考文献等

P. Lavaurs, Systèmes dynamiques holomorphes : explosion de points périodiques paraboliques Thèse. Orsay 1989.

A. Douady-Hubbard, Étude dynamique des polynômes complexes II, Publ. Math. d'Orsay 85-04

M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, preprint SUNY Stony Brook, 1991.

A. Epstein, in preparation

C. McMullen, Milnor の60才 Conference での講演

On non-associative hypercomplex n-tuple spaces associated with normed spaces.

笹山浩良　　SASAYAMA INSTITUTE

1987年10月の分科会で報告した様に$\mathfrak{S}$を単位を有する非可換associativeなn次元多元数のつくるalgebraとした時、A.E.Taylor博士のcomplex couple space E(C)の拡張として hypercomplex n-tuple space $E(\mathfrak{S})$が得られ、この空間における函数の左、右 Fréchet微分を考察し、若干の拡張された C.R.方程式をのべた。(cf. Ref. Zurnal Mat.,1989 ,7Б232)

その後、1989年4月の分科会で $E(\mathfrak{S})$における函数 $f(X)$の左又は右 Fréchet可微分性を、$f(X)$の成分函数 $u_i(x_1,\ldots,x_n)$ $(i=1,\ldots,n)$の Fréchet可微分性と拡張された Cauchy-Riemann方程式によって特徴付けた。(cf.J.Sp.Math.,Vol,23,1988-1990, no.1-2,pp.19-40)

今回は$\mathfrak{S}$が単位をもつ non-associative,non-commutative algebraの場合を考える。associative case と同様にてノルム空間 $\mathfrak{B}$に associateされた n-tuple space $E(\mathfrak{S})$が導入できる事、その元素 Xは associative caseと同様、$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$ と表はせる事、及び$\mathfrak{S}$が associativeの時、$E(\mathfrak{S})$が左右$\mathfrak{S}$-moduleになったのに対し、$\mathfrak{S}$が non-associativeの時は、スカラー積の結合律が不成立な non-associative supra-module とでも云ふべきものになる事を述べる。

又、特に$\mathfrak{S}$が Lie algebra,Jordan algebra,Alternative algebraの時に応じて夫々、次の関係式がスカラー積に対して成立する：

(Supra Jacobi Identity): $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)X+(\mathfrak{A}_2 X)\mathfrak{A}_1+(X\mathfrak{A}_1)\mathfrak{A}_2=0$,

(Supra Jordan Identyty): $(\mathfrak{A}X)\mathfrak{A}^2=\mathfrak{A}(X\mathfrak{A}^2)$,

Supra-
(Left Alternative Law): $\mathfrak{X}^2 X = \mathfrak{X}(\mathfrak{X}X)$
Supra-
(Right Alternative Law): $X\mathfrak{X}^2 = (X\mathfrak{X})\mathfrak{X}$ ここに $\mathfrak{X} \in \mathfrak{S}$, $X \in E(\mathfrak{S})$,

(註) 前記拙著論文で導入した Lie Module という概念を用いれば $E(\mathfrak{S})$ は常に Lie Module になることが分る。

左, 右 Fréchet 微分可能性も associative case における如く同様に導入できて、その必要十分条件は次の定理で与えられる。

(定理) $\mathfrak{S}$ が non-associative の時、open subset $D \subset E(\mathfrak{S})$ よりノルム空間 $\mathfrak{B}'$ に associate された n-tuple space $E'(\mathfrak{S})$ への函数 $f(X) \equiv \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ が D で左 Fréchet 可微分なるための必要十分条件は $u_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ が凡て D で F-可微分で拡張された C.R.-equations

$$\partial_{x_j} u_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma^k_{ji} \, \partial_{x_1} u_i \quad (j,k=1,\ldots,n)$$

及び

$$\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{S}^k_{j\ell h} \, \partial_{x_1} u_j = 0 \quad (k,\ell,h=1,\ldots,n)$$

を満足する事である。ここに

$$\mathfrak{S}^k_{j\ell h} \equiv \sum_{i=1}^{n} (\gamma^k_{ij} \gamma^i_{\ell h} - \gamma^i_{hj} \gamma^k_{\ell i})$$

(右 F-可微分性の時も同様)

On generalized homogeneous polynomials in non-commutative hypercomplex n-tuple spaces

笹山浩良　　SASAYAMA INSTITUTE

昨年4月の分科会でノルム空間$\mathbb{B}$に associate され且つ単位をもつ n次元非可換結合的多元環$\mathfrak{S}$をスカラー環にもつ hypercomplex n-tuple space $E(\mathfrak{S})$における級数$\sum_{m=o}\sum_{a=1}^{p_m} M_m^{(a)}(X)$を導入し、その絶対収束性に関する3定理を報告した。以下、前報告と同一記号を用いる。$\mathbb{P}_m(X)=\sum_{a=1}^{p_m} M_m^{(a)}(X)$を$E(\mathfrak{S})$における m 次の斉次多項式とよぶ。その項数 p_m は一般に必ずしも一意ではない。p_m が最小の時$\mathbb{P}_m(X)$の階数(rank)とよび$\mathbb{P}_m(X)$は圧縮不能 (incompressible)、而らざる時圧縮可能(zusammendrückbar)であるとよぶ事にする。p_mは常に rank に等しくなる様にできる。次の定理を報告する:

(定理)(拡張された西垣氏の定理)$\mathbb{P}_m(X)$が圧縮不能の時、その階数p_mは不等式 $p_m \leqq n^{H_{m-1}} \times n$ を満足する。従って $\limsup \sqrt[m]{p_m}=1$.

(定理)$\mathfrak{X}=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{x}_i e_i \in \mathfrak{S}$ に対して $\mathfrak{x}_i=\sum_{j,k=1}^{n} \phi^{(i)}_{jk} e_j \mathfrak{X} e_k$ が成立する$\mathfrak{S}$の時、開集合 $D\subset E(\mathfrak{S})$ より Banach空間$\mathbb{B}'$に associate された $E'(\mathfrak{S})$への函数$f(X)$が$(x_1,\ldots,x_n)$について m 次迄連続的に Fréchet 微分可能ならば

$$d^m f(X;dX;\ldots;dX)=\left[\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(\ ;dx_i)\right]^m f(X)$$

は $E(\mathfrak{S})$における dX についての m 次の斉次多項式である。

前回報告（1991年4月）の正誤表

1ページ目	誤	正
上から8行目	$(\ell = 1, \ldots, m)$	$(\ell = 0, 1, \ldots, m)$
上から10行目	に対して	に対して $\mathbb{L}_0 \equiv 1$,
上から12行目	$\ldots e_{j_m}$ とする	$\ldots e_{j_m}$ $(m=1,2,\ldots)$ とする
上から13行目	ノルム空間 $\mathbb{B}'$	Banach空間 $\mathbb{B}'$

2ページ目，上から2-3行目

誤	数列 $(\|X_0\|^m \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,0}\| \ldots \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,m}\| ; 1 \leqq a \leqq p_m$
正	数列 $(\mathfrak{K}_{(m)} \|X_0\|^m \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,0}\| \ldots \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,m}\| ; a=1, \ldots, p_m$

2ページ目上から6行目

誤	一様收束する
正	一様收束する。ここに $\mathfrak{K}_{(0)} \equiv 1$, $\mathfrak{K}_{(m)} = m(\mathfrak{Q}_m)\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left\|\gamma^{\ell}_{j_1\cdots j_m}\right\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j,k=1}^{n}\left\|\gamma^{i}_{jk}\right\|^2\right)^{\frac{m+1}{2}}$, $\gamma^{\ell}_{j_1\cdots j_m} = \sum_{h=1}^{n} \gamma^{h}_{j_1\cdots j_{m-1}} \gamma^{\ell}_{h j_m}$ $(\ell, j_1, \ldots, j_m = 1, \ldots, n; m=1,2,\ldots)$, $m(\mathfrak{Q}_m)$ は $\mathfrak{Q}_m$ の module, γ^{i}_{jk} は $(e_1, \ldots, e_n)$ における乗法定数とする。

2ページ目	誤	正
上から7行目	$\limsup_{\substack{1\leqq a\leqq p_m \\ m\to\infty}} \left(\sum_{a=1}^{p_m} \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,0}\| \cdots\right.$	$\limsup_{m\to\infty}\left(\mathfrak{K}_{(m)} \sum_{a=1}^{p_m} \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,0}\| \cdots\right.$
上から8行目	$\frac{1}{\mu}\limsup_{\substack{m\to\infty \\ 1\leqq a\leqq p_m}} \left(\|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,0}\| \cdots\right.$	$\limsup_{\substack{1\leqq a\leqq p_m, \\ m\to\infty}} \left(\mathfrak{K}_{(m)} \|\mathfrak{X}^{(a)}_{m,0}\| \cdots\right.$
下から5行目	$(1 = k = n)$	$(1 \leqq k \leqq n)$

Trace inequalities characterizing X, Y and $Z=(YX)^{-1}$ of $PSL(2,\mathbb{R})$

奥村善英　　金沢大工

X, Y, $Z=(YX)^{-1} \in PSL(2,\mathbb{R})$ の action を次の trace の値達により「ある意味」で完全に決定できることを今回は報告する。

YX

(1)　$|tr(X)|$, $|tr(Y)|$, $|tr(Z)|$.
(2)　$tr(Z)tr(Y)tr(X)$.
(3)　$tr([Y^{-1},X^{-1}]) = tr(Y^{-1}X^{-1}YX)$.

ここで「ある意味」と述べたのは、trace の値は $tr(X) = tr(X^{-1}) = tr(UXU^{-1})$, $U \in PSL(2,\mathbb{C})$ となることから、trace 達のみで X, Y, Z を記述しようとしても、一次変換による共役の自由度と X, Y, Z の１つの action の向きを指定する自由度が残るからである。しかし、この自由度から $\langle X, Y\rangle$ が離散群のときには表現する Riemann 面での議論に幾何的な解釈が出来、有効となる。例えば、building blocks と呼ばれる基本的な Riemann 面達の moduli の決定、そして Teichmüller 空間の大域的実解析的座標の構成、また離散群から $PSL(2,\mathbb{R})$ の中への同型写像が存在するときにその同型写像の特徴付け等に応用される。

ところで、(2), (3) の値は、X, Y の行列表現の取り方によらず一定値で

$$
\begin{aligned}
&tr([Y^{-1},X^{-1}]) = tr([X^{-1},Y]) = tr([Y,X]) = tr([X,Y^{-1}]) \\
&= tr([X^{-1},Y^{-1}]) = tr([Y^{-1},X]) = tr([X,Y]) = tr([Y,X^{-1}]) \\
&= tr([X^{-1},Z^{-1}]) = tr([Z^{-1},Y^{-1}]) = \text{etc.}
\end{aligned}
$$

となることから、

$$
\begin{aligned}
&(X, Y, Z) \to (UXU^{-1}, UYU^{-1}, UZU^{-1}),\ U \in PSL(2,\mathbb{C}), \\
&(X, Y, Z) \to (Y, Z, X), \\
&(X, Y, Z) \to (Z^{-1}, Y^{-1}, X^{-1}),
\end{aligned}
$$

の交換をしても値は不変となることが分かり、本質的な量と予想される。実際、(2) の値の符号は、X, Y, Z の action の「相対的」方向—双曲型なら axis の方向を、非双曲型なら回転が正か負か（放物型のときは定義を要するが）—を表していることが分かる。また (3)の値は次のような解釈を持つ。

> <u>定理1</u>。X と Y が双曲型のとき、X と Y の axis 達 $ax(X)$, $ax(Y)$ が intersecting, parallel and disjoint $\Rightarrow$ $tr([Y^{-1},X^{-1}])$ $<$, $=$ and $>$ 2.

以下、X, Y, Z がすべて双曲型のときの特徴付けを説明する。

<u>定理２</u>。ax(X), ax(Y), ax(Z) の配置は次のどれかとなる。
(A) すべてが disjoint になるときで、
(A)-1 p(X),q(X),p(Y),q(Y),<u>p(Z),q(Z)</u> がこの順に ∂H 上に（反）時計周りに並ぶ場合、
(A)-2 p(X),q(X),p(Y),<u>q(Z),p(Z)</u>,q(Y) がこの順に ∂H 上に（反）時計周りに並ぶ場合、
(A)-3 p(X),<u>q(Z),p(Z)</u>,q(X),p(Y),q(Y) がこの順に ∂H 上に（反）時計周りに並ぶ場合、
(A)-4 p(X),q(X),<u>p(Z)</u>,q(Y),p(Y),<u>q(Z)</u> がこの順に ∂H 上に（反）時計周りに並ぶ場合。
(B) ２個づつが上半平面 H 内で交わるときで、p(X),q(Y),p(Z),q(X), p(Y),q(Z) がこの順に ∂H 上に（反）時計周りに並ぶ場合。
(C) ３個が ∂H 上の１点で~~交わ~~る場合。このとき、接点は p(X) = p(Y) = p(Z), q(X) = q(Y) = q(Z) 以外のすべてが起こる。
さらに各場合は次の trace 条件と必要十分となる。 接す

(A)-1 ⇔ $|\mathrm{tr}(X)| > 2,\ |\mathrm{tr}(Y)| > 2,\ |\mathrm{tr}(Z)| > 2$
$\mathrm{tr}(Z)\mathrm{tr}(Y)\mathrm{tr}(X) < 0,$
$\mathrm{tr}([Y^{-1},X^{-1}]) > 18.$

(A)-2,3,4 ⇔ $|\mathrm{tr}(X)| > 2,\ |\mathrm{tr}(Y)| > 2,$
$2 < |\mathrm{tr}(Z)| < |\mathrm{tr}(Y)\mathrm{tr}(X)|,$
YX $\mathrm{tr}(\cancel{Z})\mathrm{tr}(Y)\mathrm{tr}(X) > 0,$
$2 < \mathrm{tr}([Y^{-1},X^{-1}]) < \max\{\mathrm{tr}^2(X),\ \mathrm{tr}^2(Y),\ \mathrm{tr}^2(Z)\} - 2.$

(B) ⇔ $|\mathrm{tr}(X)| > 2,\ |\mathrm{tr}(Y)| > 2,$
$2 < |\mathrm{tr}(Z)| < |\mathrm{tr}(Y)\mathrm{tr}(X)| - 2,$
$\mathrm{tr}(Z)\mathrm{tr}(Y)\mathrm{tr}(X) > 0,$
$\mathrm{tr}([Y^{-1},X^{-1}]) < 2.$

(C) ⇔ $|\mathrm{tr}(X)| > 2,\ |\mathrm{tr}(Y)| > 2,$
$2 < |\mathrm{tr}(Z)| \leq |\mathrm{tr}(Y)\mathrm{tr}(X)| - 2,$
YX $\mathrm{tr}(\cancel{Z})\mathrm{tr}(Y)\mathrm{tr}(X) > 0,$
$\mathrm{tr}([Y^{-1},X^{-1}]) = 2.$

タイヒミュラー空間の基点のとりかえによる変形の不連続性について

松崎克彦　　東工大理

Γ を cocompact な Fuchs 群とし、Γ^{μ} でその qc-変形の Fuchs 群をあらわす（正規化条件は適当に与えてある）。Γ, Γ^{μ} のタイヒミュラー空間 $T(\Gamma)$, $T(\Gamma^{\mu})$ を普遍タイヒミュラー空間 $T(1)$ の中でみたとき、パラメーター μ に関して $T(\Gamma^{\mu})$ は不連続にうごくことをみる。すなわち、

定理

$\mu \in M(\Gamma)$（モジュライ空間）の点に対して

Γ^{μ} を Γ の（正規化した）qc-変形の Fuchs 群とする。

$M'(\Gamma) = \{ \mu \in M(\Gamma) : \langle \Gamma, \Gamma^{\mu} \rangle$ が discrete でない$\}$

とおけば

$\#(M(\Gamma) - M'(\Gamma)) < \infty$ であり

$$\inf \left\{ \|\psi - \varphi\|_{\infty} \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \in B_2(\Gamma) \text{ s.t. } \|\varphi\| = 1 \\ \psi^{\mu} \in B_2(\Gamma^{\mu}) \text{ s.t. } \mu \in M'(\Gamma) \end{array} \right\}$$

は正 (>0) である。

定理の動機，意味，拡張については講演のとき
にのべる予定である。

Holomorphic families of geodesic discs in infinite dimensional Teichmüller spaces

谷川 晴美　　名大・理

Rを有限型でないリーマン面，$T(R)$をその Teichmüller 空間，$B_1(R)$をR上のベルトラミ微分の空間とする。$B_1(R)$の各元μに対し，ベルトラミ方程式$\bar{\partial} f = \mu \partial f$をみたす$R$上の擬等角写像が存在することは良く知られているが，具体的に構成することは一般にはできない。さらに，$\mu_1, \mu_2 \in B_1(R)$が与えられたとき，それが$T(R)$の同じ点を定めるかどうかということを判断する方法はない。この事実が Teichmüller 空間におけるある種の問題を非自明でないものにしている。

ここでは，文献[M]および[T]の結果をもちいて，ある条件をみたす Beltrami 微分μ_1, μ_2がいつ同値になるかを考察し，次の事実を得る。

Th. $\exists [\mu] \in T(R)$, $\exists f : \Delta \times \Delta \to T(R)$ holo,

s.t. $\forall \zeta \in \Delta$, $f(\cdot, \zeta) : \Delta \to T(R)$ は isometry,

$$f(0, \zeta) = [0], \quad f(\Delta, \zeta) \ni [\mu],$$

fは2番目の変数ζに非自明に依存する。

Lemma. $U \subset R$ を Jordan 領域で ∂U は解析的であるとする。$B_1(R) \ni \nu, \mu$, $\mathrm{supp}(\nu) \subset \overline{U}$, $\mathrm{supp}(\mu) \subset R \setminus U$ のとき. $[\mu+\nu] = [\mu]$ であることと. $[\nu] = [0]$ であることとは同値.

Lemma ([M], [T]). R, U を上のとおりとする。$\nu \in B_1(R)$, $[\nu] = [0]$, $\mathrm{supp}(\nu) \subset \overline{U}$ のとき. $f^{\nu} : R \to R$ (ν を Beltrami 係数とする q.c. map) は $f^{\nu}|R \setminus U = id.$ をみたす。

References.

[M] F. Maitani, preprint

[T] M. Taniguchi, Complex Variables 14 (1990), pp. 161-167.

[Z] L. Zhong, Complex Variables 16 (1991) pp. 261-272.

複素クリフォード解析におけるコーシーの積分公式について

佐野公朗　　八戸工業大学
一般教育部

$\mathcal{A}$を普遍複素クリフォード多元環とする．$e_0=1, e_1, \cdots, e_p$は$e_ie_j+e_je_i=-2\delta_{ij}$ $(1\leq i, j\leq p)$を満たす$\mathcal{A}$の基底の生成元とする．Ωは$\mathbb{C}^{p+1}$の領域，fはΩ上で整型，$D=\sum_{j=0}^{p} e_j\,\partial/\partial z_j$ とする．$fD=0$ $(Df=0)$を満たす時fは右(左)正則という．$\langle z\rangle=(\sum_{j=0}^{p} z_j^2)^{1/2}$，$\Lambda_z=\{w \mid \langle w-z\rangle=0\}$ とおく．この時コーシー核は$1/(z\langle z\rangle^{p-1})$となり，$p$が奇数の時は$\mathbb{C}^{p+1}\setminus\Lambda_0$で１価になり，$p$が偶数の時はある複素多様体$V^{p+1}$を考えれば$V^{p+1}\setminus\Lambda_0$で１価になる．この$V^{p+1}$は直観的には$\mathbb{C}^{p+1}$を２枚貼り合わせたものである。

さてコーシーの積分公式を導くために$\mathbb{C}^{p+1}\setminus\Lambda_z$または$V^{p+1}\setminus\Lambda_z$の$p$次元サイクル$M$に関する$z$の指数$\mathrm{Ind}(M,z)$を次のように定める．

$$\mathrm{Ind}(M,z)=\frac{1}{|S^p|}\int_M d\sigma_w \frac{1}{(w-z)\langle w-z\rangle^{p-1}}$$

ここで$d\sigma_w=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j e_j\,dw_0\wedge\cdots\wedge\widehat{dw_j}\wedge\cdots\wedge dw_p$とする．この時次が成り立つ．

<u>定理1</u>　$\mathrm{Ind}(M,z)\in\frac{e_1+i}{2}\mathbb{Z}+\frac{e_1-i}{2}\mathbb{Z}$　$(p=1)$

$$\mathrm{Ind}(M,z)\in\mathbb{Z}\quad(p\geqq 2)$$

これを用いて次のコーシーの積分公式を得る。

<u>定理2</u>　$f:\Omega\to\mathcal{A}$は右正則とし$z\in\Omega$, Mを$\Omega\setminus\Lambda_z$のp次元サイクルでΩのp次元鎖Nの境界とする。さらに$\langle w-z\rangle^{p-1}$がwに関してN上で1価なら次が成り立つ。

$$f(z)\mathrm{Ind}(M,z)=\frac{1}{|S^p|}\int_M f(w)d\sigma_w\frac{1}{(w-z)\langle w-z\rangle^{p-1}}$$

今度は$dz^{\langle p\rangle}=d\sigma_z(e_1\cdots e_p)$とおく。$L$を$\mathbb{C}^{p+1}\setminus\Lambda_0$または$V^{p+1}\setminus\Lambda_0$の$(p-1)$次元サイクルで$p$次元鎖$M$の境界になっているとする。$L$の対数を

$$\log L=\int_M\frac{1}{z\langle z\rangle^{p-1}}dz^{\langle p\rangle}$$

と定める。この時Lは可算無限個の対数を持ち、それらは互いに$p=1$なら$m\pi(e_1+i)+n\pi(e_1-i)$ $(m,n\in\mathbb{Z})$の差があり、$p\geqq 2$なら$m|S^p|e_1\cdots e_p$の差がある。話を簡単にするために$M\subset\mathbb{R}^{p+1}$とすると$\log L$の値で$e_1\cdots e_p$の係数にMの立体角が現れる。またその他の部分は実対数の場合と同じくある種の加法公式が成り立つ。

On the hyperbolicity of projective plane with lacunary curves

足立幸信　　姫路学院女短大

Xを任意のcomplex mfd, Mをrelative compact domain of X, d_MをMの小林擬距離とする。$\overline{M} \ni p, q$に対し $d_M(p,q) = \lim_{p' \to p,\, q' \to q} d_M(p', q')$, $p', q' \in M$とすると $0 \leq d_M(p,q) \leq \infty$である。$S_M(X) = \{p \in \overline{M} \,;\, \exists q \in \overline{M} \setminus \{p\} \text{ s.t. } d_M(p,q) = 0\}$とおく。一般論として、$S_M(X)$がorder 1の擬凹集合であること、$S_M(X)$が$\phi$でなく、$X$のdim 1のanalytic subsetに含まれるなら、$S_M(X)$はdim 1のanalytic subsetであり、その既約成分の種数は1以下であることは以前報告した。

Aが$\mathbb{P}^2$のcurve, $X = \mathbb{P}^2$, $M = \mathbb{P}^2 \setminus A$とする。このとき$S_M(X)$はどのようなものであるかを調べる。

[定義]　Cを既約なXのcurveとするとき、Cがnonhyperbolic curve w.r.t. Aとは、$C \not\subset A$のケースでは$C \setminus A$のnormalizationが$\mathbb{C}$ or $\mathbb{C}^*$にiso, $C \subset A$のケースでは$C \setminus A'$のnormalization

Zaidenberg の結果との関連？

が smooth elliptic curve, $\mathbb{P}$, $\mathbb{C}$ or $\mathbb{C}^*$ に iso

（ここに A' は A の C 以外の components）のときをいう。

明らかなことであるが、C が nonhyperbolic curve w.r.t. A で $C \not\subset A$ なら $C \subset S_M(X)$ である。

［定理］ A を $\mathbb{P}^2$ の curve とし、$X = \mathbb{P}^2$, $M = \mathbb{P}^2 \setminus A$ とおく。もし $S_M(X)$ が curve in X なら $S_M(X)$ の各 component は nonhyperbolic curve w.r.t. A よりなる。

以前出した結果を使うと、

［系］ A を $\mathbb{P}^2$ の4本以上の既約成分からなる curve, $X = \mathbb{P}^2$, $M = \mathbb{P}^2 \setminus A$ とおく。

(1) X に nonhyperbolic curve w.r.t. A が高々有限個しか存在しないなら、$S_M(X)$ は nonhyperbolic curve w.r.t. A から成る curve であるか、ϕ である。

(2) X に nonhyperbolic curve w.r.t. A が無限個存在するなら $S_M(X) = X$ である。

An extension of the big Picard theorem

足立幸信　　姫路学院女子短大

Fujimoto (1972), Green (1975) により $\mathbb{P}^n$ への正則又は有理型で、しかも general position にある $n+2$ 本の hyperplane を除外集合とするような写像についての Picard の大定理の拡張が得られている。ここでは $\mathbb{P}^2$ への正則又は有理型で、しかも4本以上の curve を除外集合とするような写像について Picard の大定理の拡張を考える。

[補題]　A を $\mathbb{P}^2$ の4本以上の既約成分からなる curve, $X=\mathbb{P}^2$, $M=\mathbb{P}^2\setminus A$ とし, $S_M(X)$ は curve であると仮定する。このとき $f:\Delta^*\xrightarrow{hol}\mathbb{P}^2\setminus A$ に対し、次の 1) or 2) が成立する。

1) f は $\Delta\longrightarrow\mathbb{P}^2$ に hol. に extend される。

2) $f(\Delta^*)\subset C$ (C は nonhypb. curve w.r.t. A)

[定理] Nを任意のcomplex mfd, Bをanalytic subset of N, A, X, Mは上に同じで, $S_M(X)$はcurveとする。このとき
$f: N \setminus B \xrightarrow{\text{mero}} \mathbb{P}^2 \setminus A$に対し次の1) or 2)が成立する。

1) fは$N \longrightarrow \mathbb{P}^2$にmero.にextendされる.

2) $f(N \setminus B) \subset C$ (Cはnonhypb. curve w.r.t. A)

等質有界領域の Bergman 計量の 第 2 Einstein 性

東川和夫　富山大理
盛本　茂　富山県高志養護学校

有界領域 D の Bergman 計量 g の Levi-Civita 接続から決まる曲率テンソルを $R(X,Y)$ とする. 写像 $S(X,Y)$ を

$$g(S(X,Y)Z,W)=g(R(X,W)Z,Y)$$

で定義する. $k=1,2$ に対して、第 k Ricci テンソル$\rho^{[k]}$ を、次数 $2k$ の対称共変テンソル場で

$$\rho^{[k]}(X,X,\ldots,X)=\mathrm{Trace}S(X,X)^k,\qquad X\in\mathfrak{X}(D)$$

をみたすものとして定義する. また、D 上の C^∞ 関数 f_k が存在して、

$$\rho^{[k]}(X,X)=f_k(p)g(X,X)^k,\qquad X\in T_pD,\quad p\in D$$

を満たすとき g は第 k Einstein 性をもつという. 第1 Ricci テンソルは、通常の Ricci テンソルなので、第1 Einstein 性は、通常の Einstein 性である.

さて、以後 D を等質、すなわち、$\mathrm{Aut}(D)$ が D に推移的に働くとする. このとき、g は常に第1 Einstein 性をもつ. 次の問題が自然に考えられる.

問題　第2 Einstein 性をもつ D を決定せよ.

1982 年、Carpenter-Gray-Willmore は次を示した.

定理1 ([CGW])　対称有界領域 D が、第2 Einstein 性をもつ必要十分条件は、D が次の（1）-（4）のいずれかと正則同値のときである:

（1）n 次元球体、すなわち、型 $\boxed{1 \mid n\text{-}1}$ の Siegel 領域.

（2）IV 型 6 次元 Cartan 古典領域、すなわち、型 $\boxed{\begin{matrix}1 & 4\\ & 1\end{matrix}}$ の Siegel 領域.

（3）V 型 16 次元 Cartan 例外領域、すなわち、型 $\begin{array}{|cc|c|}\hline 1 & 6 & 4 \\ & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$ の Siegel 領域.

（4）VI 型 27 次元 Cartan 例外領域、すなわち、型 $\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 8 & 8 \\ & 1 & 8 \\ & & 1 \\ \hline \end{array}$ の Siegel 領域.

1989 年、Geatti は次を示した.

定理2 ([G])　等質有界領域 D が、第2 Einstein 性をもてば、D は上記（1）-（4）または、次の（5）と正則同値である:
（5）型 $\begin{array}{|cc|c|}\hline 1 & 8 & 8 \\ & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$ の 26 次元 Siegel 領域.

Geatti は、定理2を証明するのに Pyatetskii-Shapiro が等質 Siegel 領域を分類する為に考案した normal j-algebra という内積を持つ Lie 環を用いた. Siegel 領域の型とは、対応する normal j-algebra の adjoint 表現によるルートの重複度を並べたものである. 数を合計すると、D の次元になり、行の数は階数をあらわしている. 我々は、Geatti の仕事を踏襲する事によって次を得た.

定理3 ([AM])　領域（5）は、第2 Einstein 性をもたない. したがって、定理1は、D が等質有界領域という仮定の下で成立する.

参考文献

[AM] K.Azukawa and S.Morimoto, Second Ricci curvature of homogeneous bounded domains, *to appear in* Tôhoku Math. J., 44(1992).

[CGW] P.Carpenter, A.Gray and T.T.Willmore, The curvature of Einstein symmetric spaces, Quart. J. Math. Oxford, 33(1982), 45-64.

[G] Laura Geatti, On the curvature of homogeneous Kähler metrics of bounded domains, Ann. Math. Pura Appl., 154(1989), 341-357.

L^2コホモロジー群のホッジ構造について

大沢健夫　　名大　理

Xをコンパクトな(被約)複素解析空間とすると次が成立する。

定理1. $X' := X \setminus \mathrm{Sing}\,X$ 上の完備なエルミート計量で

$$H_{(2)}(X') \cong IH(X)$$

なるものが存在する。但し $H_{(2)}(X')$ はL^2コホモロジー群 $IH(X)$ は(中間変転)交叉コホモロジー群を表す。Xがケーラー空間ならば、さらにこの計量としてケーラー計量をとることができる。

この定理の証明に用いられるL^2評価式とルンゲ風の近似理論を併せ用いることによって、Cheeger-Goresky-MacPherson予想のHodge構造に関する部分が解決できる。即ち

定理2、コンパクトなケーラー空間Xに対し、

$$H^r_{(2)}(X) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}_{(2),d}(X)$$

かつ

$$\overline{H^{p,q}_{(2),d}(X)} = H^{q,p}_{(2),d}(X)$$

但し、$H^{p,q}_{(2),d}(X) := \{[u] \in H^r_{(2)}(X)\ ;\ u \text{ は}(p,q)\text{形式}\}$.

定理1の証明に必要なL^2評価式を得るためには次が有用である。

命題. 可微分多様体 M, N と $M\times N$ の計量 ds^2 で射影 $\pi: M\times N \to N$ が Riemannian submersion であるようなものが与えられたとする。$M\times N$ 上のコンパクト台の微分形式 u に対し $u=\sum_{i,j} u_{i,j}$ を M, N 成分への標準的な分解とすると、

$$(\Delta u, u) = \sum (\Delta u_{i,j}, u_{i,j})$$

が成立する。但し Δ はラプラス作用素を表す。

実際これによって面倒な同等特異性の問題を回避することができる。

コンパクトケーラー空間の交叉コホモロジーには斎藤盛彦氏によって既に全く異なる方法でホッジ構造が定義されているが、それが定理1によって定義されるホッジ構造と一致するかどうかは自明ではない。Sing X が孤立集合の場合は Zucker 氏によって両者の一致が示されているが一般には未解決である。また $H^{p,q}_{(2),d}(X)$ と X の $\bar{\partial}$-L^2 コホモロジー群との関係も良く判っていないと思われる。

Hardy-Orlicz 族に関する Jiang hong の予想について

真次康夫　　信州大理

$B = \{ z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1 \}$,

$H(B)$: B 上の正則関数の全体

とする。$[0, \infty)$ 上の modulus function φ (即ち非減少, 非定数, 非負であり, $\Phi(t) \equiv \varphi(e^t)$ が $(-\infty, \infty)$ 上の凸関数となる関数) に対し, Hardy-Orlicz 族 $H(\varphi)$ を次のように定義する:

$$H(\varphi) = \{ f \in H(B) : \sup_{0<r<1} \int_S \varphi(|f(r\zeta)|)\, d\sigma(\zeta) < \infty \},$$

ここで, $S = \partial B = \{ z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1 \}$,

σ : S 上の Euclidean measure, $\sigma(S) = 1$.

更に, $H^+(B) = \{ f \in H(B) : \exists \lim_{r \to 1} f(r\zeta) = f^*(\zeta)$ a.e. $[\sigma]$ on $S \}$

$$H(\varphi)^+ = \{ f \in H^+(B) \cap H(\varphi) : \sup_{0<r<1} \int_S \varphi(|f(r\zeta)|)\, d\sigma(\zeta) = \int_S \varphi(|f^*|)\, d\sigma \}$$

と定義する。

$n=1$ の場合, Z. Jianzhong ("A note on Hardy-Orlicz spaces", Canad. Math. Bull. 33 (1990), 29-33) は次の予想をしている:
2つの modulus functions φ, ψ に対して

$$H(\varphi)^+ = H(\psi)^+ \iff H(\varphi) = H(\psi).$$

本講演では, この予想が $n=1$ の場合だけでなく, $n \geq 2$ の場合にも正しいことを示す。

$$H^p(B) = \{ f \in H(B) : \sup_{0<r<1} \int_S |f_r|^p \, d\sigma < \infty \}$$

Nevanlinna 族

$$N(B) = \{ f \in H(B) : \sup_{0<r<1} \int_S \log^+ |f_r| \, d\sigma < \infty \}$$

$$0 < p < q \Rightarrow H^q(B) \subset H^p(B) \subset N(B)$$

Hasumi-Kataoka, Arch. Math. 51 (1988) $n=1$.

複素射影空間上の不分岐被拡領域のスペクトルについて

梶原　壌二　九大理
李　　琳　　濟南電視大
渡辺　英晴　九大理

複素射影空間 $P_n(C)$ 上の不分岐被拡領域 Ω 上の正則関数全体のなす環を $H(\Omega)$ 、そのスペクトルを $S(H(\Omega))$ とする。この講演では、$S(H(\Omega))$ の Stein 性と、それが Ω の正則包の Remmert reduction に等しい事を示す。

References

[1] R. FUJITA, Domains sans point critique interieur sur l'espace projectif complexe,J. Math. Soc. Japan, 15(1963),443-475.

[2] R. FUJITA, Domains sans point critique interieur sur l'espace produit,J. Math. Kyoto Univ., 4-3 (1965),493-514.

[3] C. O. KISELMAN, On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals, Acta Math., 117 (1967), 75-84.

[4] R. REMMERT,Reduction of complex spaces,Sem. on analytic func. I, Princeton (1957),190-205.

[5] H. ROSSI, On Envelops of Holomorphy,Comm. on Pure and Appl. Math., 16 (1963), 9-17.

Special surface singularities -
a survey on the geometry and combinatorics of their deformations

Oswald Riemenschneider (Hamburg)

Starting with the well-known situation for rational double points and their connection to complex simple Lie groups, I want to give a survey on recent results for deformations of special surface singularities.

The topics discussed will include among others:

- cyclic quotient surface singularities, toric varieties and Catalan numbers;
- quotient surface singularities and monodromy;
- formats of rational surface singularities;
- quotient surface singularities and McKay quivers.