日本数学会

1991年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

1991年10月

於
北海道大学

目次

第VII会場 函数論

相

21	有川弘明	(群馬大工)	Infinite order Sobolev spaces, analytic continuation and polynomial expansions	10
22	坪井昭二	(鹿児島大教養)	Local existence of the semi-universal family of closed complex subspaces with locally stable parametrizations of a compact complex manifold	15
23	坪井昭二	(鹿児島大教養)	Global existence of the universal family of closed complex subspaces with locally stable parametrizations of a compact complex manifold	15
24	野口潤次郎	(東工大理)	Nevanlinna calculus and families of abelian varieties with level structures	15
25	野口潤次郎	(東工大理)	Meromorphic mappings into compact hyperbolic complex spaces and geometric diophantine problems	15

13.15〜15.25

26	大貝聖子 梶原壌二 菅原宣子 西原賢 本田竜広	(明治学園高校) (九大理) (福岡工大) (福岡工大) (九大理)	核型空間の擬凸領域の核関数について	15
27	竹腰見昭	(阪大教養)	解析空間上の Liouville 型定理	15
28	梅野高司 風間英明	(九州産大教養) (九大教養)	複素ファイバー空間におけるある Dolbeault 同型とその応用	15
29	大沢健夫	(名大理)	Cheeger-Goresky-MacPherson 予想	15
30	松本圭司 吉田正章	(九大理) (九大理)	5次元 Picard modular 群と P^1 上の8点の配置の空間	15
31	西村保一郎	(大阪医大)	Analytic automorphism of C^2 which preserve the coordinate axes	15
32	都丸正	(群馬大医療技術短大)	基本種数2以上の正規2次元特異点の最小性について	10
33	都丸正	(群馬大医療技術短大)	(弱) Brieskorn 型2次元超曲面特異点の最小性及び Yau 系列	10

函数論特別講演

渡辺公夫	(筑波大数学)	Purely elliptic singularities	(16.00〜17.00)

1

STARLIKENESS OF A CERTAIN INTEGRAL

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the unit disk $\mathcal{U}$.
A function $f(z) \varepsilon \mathcal{A}$ is said to be a member of the class $\mathcal{R}(\alpha)$ if it satisfies

$$\operatorname{Re}\{f'(z)\} > \alpha \qquad (z \varepsilon \mathcal{U})$$

for some α ($\alpha < 1$). We also denote by $\mathcal{S}^*(\beta)$ the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of functions which are univalent and starlike of order β in $\mathcal{U}$.

Further, for $f(z) \varepsilon \mathcal{A}$, we define the function $g(z)$ by a following integral

$$g(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

In the present talk, we consider the starlikeness of the above function $g(z)$ for $f(z)$ belonging to the class $\mathcal{R}(\alpha)$.

THEOREM. If $f(z) \in R(\alpha)$ with $\gamma \leqq \alpha < 1$, then $g(z) \in S^*(\beta)$, where $0 \leqq \beta \leqq 1/2$,

$$\gamma = \frac{8t\log2 - 4t(\log2)^2 - 3t}{8t\log2 - 4t(\log2)^2 - 4t + 2},$$

and $t = 2\beta^2 + \beta - 1$.

REMARK. If $\beta = 0$, then

$$\gamma = \frac{8\log2 - 4(\log2)^2 - 3}{8\log2 - 4(\log2)^2 - 6} = - 0.228\ldots,$$

and if $\beta = 1/2$, then $\gamma = 0$.

2

NOTES ON SAKAGUCHI FUNCTIONS OF ORDER α

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the unit disk $\mathcal{U}$. A function f(z) in $\mathcal{A}$ is said to be a member of the class $S_s(\alpha)$ if it satisfies

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)} \right\} > \alpha \qquad (z \in \mathcal{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1/2)$. We call f(z) in the class $S_s(\alpha)$ Sakaguchi function of order α.

THEOREM 1. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$f(z)*\left(\frac{1 + \alpha z}{1 - \beta z}\left(\frac{z}{1 - z^2}\right)\right) \neq 0 \quad (0<|z|<1)$$

for all α $(|\alpha| = 1)$ and β $(|\beta| = 1)$, then $f(z) \in S_s(0)$.

THEOREM 2. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\operatorname{Re} \frac{f(z) * \dfrac{z}{(1+z)(1-z)^2}}{f(z) * \dfrac{z}{1-z^2}} > \alpha - \frac{1}{2}$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1/2)$ and for all $z \in U$, then $f(z) \in S_s(\alpha)$.

THEOREM 3. If $f(z) \in S_s(\alpha)$ and $g(z) \in K$, then $f*g(z) \in S_s(\alpha)$.

3

A property of analytic functions of Koebe type

福井誠一　和歌山大学・教育
尾和重義　近畿大学・理工

A_n を単位円板 U 内で解析的な関数

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

の集合とする。また, $M_n(\alpha)$ は A_n の部分族で

$f(z)f'(z)/z \neq 0$ かつ

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right\} > 0,$$

$-\infty < \alpha < \infty$, $z \in U$ をみたす関数の集合とする。

$M_1(\alpha)$ は Mocanu が1969年に導入した関数族である。

ここでは、A_n の関数で

$$f_b(z) = \frac{z}{(1-z^n)^b}, \quad (0 \leqq b \leqq \frac{2}{n})$$

の形の関数を Koebe type の関数と呼び, これについての性質を調べた。特に $M_n(\alpha)$ に属するための条件について, またその応用について報告する。

4 On certain class of multivalent functions

斎藤 斉　　群馬工業高専

$A_p(n)$で、単位円板 $E=\{z : |z|<1\}$で正則な関数

$$f(z)=z^p+\sum_{k=n}^{\infty} a_{p+k} z^{p+k}$$

の族を表す。（p, nは自然数）

$f(z) \in A_p(n)$が族 $A_p(n, \alpha)$に属するとは、

$$\left|\frac{f(z)}{z^p}-1\right|<1-\alpha \quad (0 \leqq \alpha<1,\ z \in E)$$

となるときとする。また $\prec$ で subordinationを表す。

$f(z) \in A_p(n)$に対して、一般化された Libera integral operator J_c を

$$J_c(f(z))=\frac{c+p}{z^{c}} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \quad (c>-p)$$

で定義する。これらの関数族について得られた結果について報告する。

<u>定理1.</u>　$f(z) \in A_p(n)$とする。このとき

$$\left|\beta\left(\frac{f(z)}{z^p}-1\right)+(1-\beta)\left(\frac{f'(z)}{z^{p-1}}-p\right)\right|<(1-\alpha)\{(p+n)-\beta(p+n-1)\}$$

が成り立てば、$f(z) \in A_p(n, \alpha)$となる。

ただし、$0 \leqq \alpha<1,\ 0 \leqq \beta \leqq 1$で、$f(z) \not\equiv z^p$とする。

定理２　$f(z) \in A_p(n, \alpha)$ とする。このとき

$$\frac{J_c(f(z))}{z^p} \prec 1 + \frac{(1-\alpha)(c+p)}{n+c+p} z^n$$

が成り立つ。

定理３　$f(z) \in A_p(n, \alpha)$ とする。このとき

$$\mathrm{Re}\left\{ e^{i\beta} \frac{J_c(f(z))}{z^p} \right\} > 0$$

が成り立つ。ただし、

$$|\beta| \leq \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)(c+p)}{n+p+c} \right)$$ である。

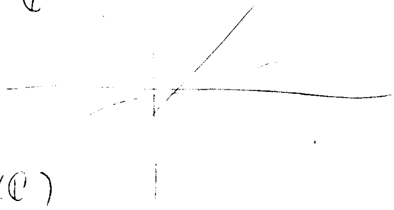
$(\mathbb{P}^1)^3$　$\prod(z_i - z_j) = 0$

z_1

$\frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}$

$\mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}^3$



$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

5　その上の有界正則関数環がbidisc上のものと同型になるリーマン面の例

林　実樹広　　　北大・理(教養)

$\Delta_r = \{(z,w): |z|<r, |w|<r\}$ を $\mathbb{C}^2$ 内の bidisc とする. ここでは, Δ_1 の submanifold としてのリーマン面Rで, R上のすべての有界正則関数は Δ_1 上の有界正則関数に一意的に拡張される例を構成できることを報告する. この例により, 以下の問題は否定的に解かれる:

(1)　点分離な2つの $H^\infty(R_1)$, $H^\infty(R_2)$ が同型ならば, R_1 と R_2 は等角同値か?

(2)　$H^\infty(R)$ が弱点分離ならば点分離か? 各点 $p\in R$ に $f'(p)\neq 0$ となる $f\in H^\infty(R)$ が存在するか?

(3)　$\tilde{R}$ をRの Royden's resolution として, 極大イデアル空間の(弱)位相で R は $\tilde{R}$ で dense か?

構成の粗筋: まず, 正数の増加列 r_n, $r_n \uparrow 1$ を任意に固定する. 円周 $\{|z|=r_n\}$ の有限部分集合 E_n を考え,

$$V=\{(z,w)\in\Delta_1 : z\in E_n \text{ or } w\in E_n\}$$

とおく．VはΔ_1の１次元 subvariety になる．正数ε_n, $\varepsilon_n \to 0$を任意に取り固定する．各$f \in H^\infty(V)$を$T_n = \{|z| = r_n\} \times \{|w| = r_n\}$上の２重コーシー積分で２変数正則関数に拡張したいが，$T_n \not\subset V$なので不可能．代りに，そのリーマン和

$$F_n(z,w) = \sum_{a_l, a_m \in E_n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{f(a_l, a_m)}{(a_l - z)(a_m - w)} (a_l - a_{l-1})(a_m - a_{m-1})$$

で近似する．E_nを$\{|z| = r_n\}$で dense に近い状態に取ると，近似の誤差が小さくなり，V上での最大値原理を使って

$$|F_n - f| < \varepsilon_n \quad \text{on} \quad V \cap \Delta_{r_{n-1}}$$

が示せる．更に，Schwartzの原理を使って，

$$|F_n| \leq \|f\|_\infty + 2\varepsilon_n \quad \text{on} \quad \Delta_{r_{n-1}} \qquad (*)$$

が示せる．F_nの部分列を考えると，fの有界正則な拡張$F \in H^\infty(\Delta_1)$を得る．拡張の一意性は(*)より従う．

Vをリーマン面に変形するために，$h_n(z,w) = \prod_{a \in E_n} (z-a)(w-a)$とおき，十分速く収束する$\delta_n \to 0$を考える．

$$R = \left\{ (z,w) \in \Delta_1 ; \begin{array}{l} f_1 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{f_2} + \frac{\delta_3}{f_2 f_3} + \cdots \quad \text{or} \\ f_1 f_2 = \delta_1 f_2 + \delta_2 + \frac{\delta_3}{f_3} + \cdots \quad \text{etc} \end{array} \right\}$$

とおくと，求める例が得られる．

6 $\Gamma_{h0} \cap {}^*\Gamma_{h0} \neq \{0\}$ が成り立つリーマン面について

神　直人　学習院大·理

R を開リーマン面とし R 上の2乗可積分な実調和微分のなすHilbert空間を $\Gamma_h(R)$ で表わす。Γ_h の部分空間で semi-exact, exact なもの全体を $\Gamma_{hse}(R)$, $\Gamma_{he}(R)$, ${}^*\Gamma_{he}(R)$ ($*$ は共役を表わす) の Γ_h における直交補空間を $\Gamma_{h0}(R)$ と記す。

ここでは $\Gamma_{h0}(R) \cap {}^*\Gamma_{h0}(R)$ なる空間を考える。

吾々は property (W) として

$$\Gamma_{h0} \cap {}^*\Gamma_{h0} = \Gamma_{hse} \cap {}^*\Gamma_{h0} \quad (\neq \{0\})$$

なる条件をみたす Riemann 面のクラスの周期再生微分による特徴付けを与えた。

Accola は R が border γ をもつとき $\forall \omega \in \Gamma_{h0}(R)$ は $R \cup \gamma$ 上調和に拡張

され、γ に沿って $\omega = 0$ となることを示した。よって「$\Gamma_{h0} \cap {}^*\Gamma_{h0} \neq \{0\} \Longrightarrow$ R は border はもたない」ことがわかる。

では $\Gamma_{h0} \cap {}^*\Gamma_{h0} \neq \{0\}$ なる条件は、どの程度 R の理想境界のことを表わしているのか？

そこで吾々は次の結果を得た。

<u>定理</u>

$$\Gamma_{h0}(R) \cap {}^*\Gamma_{h0}(R) \neq \{0\}$$

ならば

R は unique maximal extension をもつ。

17

曲面の変形の函数論的動き

米谷文男　　京都工織大 工芸

空間に滑らかな曲面 Sがある。 各点の近傍に, その第1基本形量を $ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$ として,

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\mu = \frac{F - i\sqrt{EG - F^2}}{G}, z = x + iy)$$

の解 $w = u + i v$ によって, 第1基本形量 は $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ の形で表され, S に等温座標, 解析構造 が入り, Sをリーマン面とみなすことができる。 局所近傍 B の各点 $p = p(u,v)$ が, u方向, v方向の単位接線ベクトルを $e^1 = e^1(u,v)$, $e^2 = e^2(u,v)$, 単位法線ベクトルを $e^3 = e^3(u,v)$として, 時間 t 後 変位して点

$$p_t = p_t(u,v) = p(u,v) + \Sigma c^i(t;u,v)e^i(u,v)$$

(ただし,$c^i(t;u,v)$ は C^2–級とする) に移り, 面 S_t を形作っているとして, それを 計量に関する等温座標の解析構造 w_t によってリーマン面と考える。$f_t(p) = p_t$ は S からS_t への擬等角写像を与えている。 この f_t のベルトラミ微分をν_tとする。

さて, 函数論的諸量はある種の境界挙動を持つ有理型微分ϕ^t, ψ^tを用いた内積 $A(t) = \mathrm{Re}\,(\phi^t \circ f_t - \phi^0 , \overline{\psi^0})_S$ でよく表される。

A(t) の 原点に於ける第1, 第2微分係数は

$$(1) \quad \frac{d}{dt} A(t) |_{t=0} = \mathrm{Re}\; i \iint_S \phi^0 \Lambda \psi^0 \frac{\partial \nu_t}{\partial t}$$

$$(2) \quad \frac{d^2}{dt^2} A(t) |_{t=0} = \mathrm{Re}\; i\{2\iint_{\cancel{\mathbb{R}}_S} \phi_t^{0,0} \Lambda \psi^0 \frac{\partial \nu_t}{\partial t} + \iint_{\underset{S}{\cancel{\mathbb{R}}}} \phi^0 \Lambda \psi^0 \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial t^2}\}$$

(ここで, $\phi_t^{0,0} = \frac{1}{2}\{ \lim_{t\to 0} \frac{\phi^t \circ f_t - \phi^0}{t} + i^*(\lim_{t\to 0} \frac{\phi^t \circ f_t - \phi^0}{t})\})$

で与えられる。

さて, S上の第2基本形量を$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$とすれば,

$$(3)\quad \frac{\partial v_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial^2}{\partial u\partial t}\Big(\frac{c^1}{\sqrt{\lambda}}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial v\partial t}\Big(\frac{c^2}{\sqrt{\lambda}}\Big) + i\Big[\frac{\partial^2}{\partial u\partial t}\Big(\frac{c^2}{\sqrt{\lambda}}\Big) + \frac{\partial^2}{\partial v\partial t}\Big(\frac{c^1}{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big] - \frac{L-N+2iM}{\lambda}\frac{\partial c^3}{\partial t}\Big\}\frac{\overline{dw}}{dw}.$$

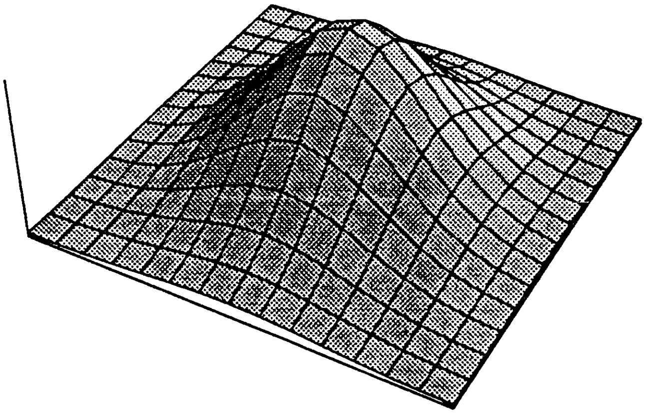
さらに, 法線方向の変位のみあるとすれば,

$$(4)\quad \frac{\partial^2 v_t}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\lambda^2}\Big\{\lambda\Big(\frac{\partial^2 c^3}{\partial u\partial t} + i\frac{\partial^2 c^3}{\partial v\partial t}\Big)^2 - \lambda(L-N+2iM)\frac{\partial^2 c^3}{\partial t^2} - (L+N)(L-N+2iM)\Big(\frac{\partial c^3}{\partial t}\Big)^2\Big\}\frac{\overline{dw}}{dw}.$$

従って, 平面あるいは球面状である部分から法線方向への変形は函数論的諸量の第1変分を0とし, (2) の第1項も0となり,

$$\mathrm{Re}\iint_G \frac{1}{2\lambda}\Big(\frac{\partial^2 c^3}{\partial u\partial t} + i\frac{\partial^2 c^3}{\partial v\partial t}\Big)^2 \phi^0 \Lambda\, \psi^0 \frac{\overline{dw}}{dw}$$

の符号が函数論的諸量の動きを示す。



8　擬等角変分と境界変分

谷口雅彦　　京大理

Hadamard 等の古典的な境界変分は、擬等角写像による変分として表現できることが知られている。従って、擬等角変分下での変分公式は、古典的な変分公式をすべて含んでいるはずである。

たとえば、Green 函数の第二変分公式

$$\ddot{g}(p,q) = \frac{-1}{2\pi}\mathrm{Re}\iint_{R_0}\left\{\frac{d^2\mu}{dt^2}(0)\,\phi_{0,p}\wedge{}^*\phi_{0,q} + \frac{d\Phi_p}{dt}(0)\wedge{}^*\frac{d\Phi_q}{dt}(0)\right\}$$

$$\left(\begin{array}{l}\phi_{t,p} = -{}^*dg_t(\cdot,p) + i\,dg_t(\cdot,p), \\ \Phi_p(t) = \phi_{t,p}\circ f_t - \phi_{0,p} \quad \text{等}\end{array}\right)$$

は、リーマン面の境界を他の面の中でなめら

かに動かす変分下での第二変分公式

$$\ddot{g}(p,q) = -\frac{1}{\pi}\iint_R d\dot{g}(\cdot,p)\wedge {}^*d\dot{g}(\cdot,q)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial R}(\ddot{c}-\kappa\dot{c}^2)\frac{\partial g}{\partial n}(\cdot,p)\frac{\partial g}{\partial n}(\cdot,q)\,ds$$

を導く。

特に、変分がtに関し線型（$\ddot{c}=0$）のときがHadamard変分で、上式は、Garabedian-Schifferの公式となる。

なお、上式の$\ddot{c}-\kappa\dot{c}^2$は変形の「曲率」を表しており、陰函数を用いて変形（し、適当なよみかえを）すれば、山口博氏による第二変分公式となる。

9

On the moduli set of continuations of an open Riemann surface of genus one

増本　誠　　　　　　　　広島大学理学部

Rを種数 1 の開または閉 Riemann 面とし，$\chi = \{a, b\}$ をその標準 homology 基底 (mod ∂R) とする．$\Phi(R, \chi) = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3_+$を，

$$\alpha = \lambda(R, a),\ \beta = \lambda(R, b),\ \gamma = \lambda(R, a+b)$$

で定める．ここで，$\lambda(R, c)$ は，mod ∂Rで c に homologous な R上の Jordan 閉曲線全体の極値的長さを表わす．

(R, χ) の接続の moduli の全体の集合を $M(R, \chi)$ とする．$M(R, \chi)$ は，上半平面 $\mathbb{H}$ 内の閉円板または 1 点である (Shiba [1])．$M(R, \chi)$ は，$\Phi(R, \chi)$ により次のようにして決定される：

定理 1.

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}\tau \geq 1/\alpha\}, \\ U_2 &= \{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(-1/\tau) \geq 1/\beta\}, \\ U_3 &= \{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(-1/(\tau+1)) \geq 1/\gamma\} \end{aligned}$$

とおく．$\partial U_1 \cap \partial U_2 \cap \partial U_3 \neq \phi$のとき，$M(R, \chi)$ は 1 点からなり，$\partial U_1 \cap \partial U_2 \cap \partial U_3$に等しい．$\partial U_1 \cap \partial U_2 \cap \partial U_3 = \phi$のとき，$M(R, \chi)$ は円弧閉三角形 $U_1 \cap U_2 \cap U_3$に内接する閉円板である．

種数 1 の開または閉 Riemann 面 Rと，その標準 homology 基底 (mod ∂R)χの組 (R, χ) の全体を $\mathcal{R}$ で表わす．Φは，$\mathcal{R}$ から $\mathbb{R}^3_+$への写像とみなされる．

定理 2.

$$\Phi(\mathcal{R}) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3_+ \mid \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 4 \leq 0\}.$$

$\mathbf{H}$ の Poincaré 計量 $|dz|/\mathrm{Im}\, z$ による $M(R,\chi)$ の直径を Rの双曲的スパンといい，$\sigma_H(R)$ で表わす (Shiba [2])．双曲的スパンは，χのとり方によらず Rだけで決まる量である．

定理 3. $\Phi(R,\chi)=(\alpha,\beta,\gamma)$ とすると，

$$\sigma_H(R)=\log\frac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{4}.$$

定理 4. jを，(R,χ) から marked torus (R',χ') の中への等角的埋め込みとする．このとき，次の 3 条件を満たす $\{(R_t,\chi_t)\}_{0\le t\le 1}\subset\mathcal{R}$ と等角的埋め込み $j_t:(R_t,\chi_t)\to(R',\chi'), 0\le t\le 1,$ が存在する：

(i) $j_0=j,\ j_1=\mathrm{id}_{R'}$ (従って，$R_0=R, R_1=R'$)；

(ii) $0\le t_1<t_2\le 1$ ならば，$j_{t_1}(R_{t_1})\subset j_{t_2}(R_{t_2})$；

(iii) $M(R_t,\chi_t)$ は，連続的に (1 点)$M(R',\chi')$ に縮む．

この定理を用いて，Shiba が有限 Riemann 面の場合に得ていたいくつかの定理を，一般の場合に拡張することができる．例えば，

定理 5 (Shiba の面積定理). $M(R,\chi)=\{|\tau-\tau_0|\le\rho\}$ とする．Modulus がちょうど$\tau\in M(R,\chi)$ に等しいような (R,χ) の接続の全体において，各埋め込みの像の補集合の面積のとりうる範囲は，閉区間 $[0,(\rho^2-|\tau-\tau_0|^2)/2\rho]$ に一致する．

References

[1] M. Shiba, The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one, Trans. Amer. Math. Soc. **301**(1987), 299-311.

[2] M. Shiba, The euclidean and hyperbolic spans of open Riemann surfaces of genus one and the related area theorems, preprint.

10 Non-convexity of the Bers embeddings of Teichmüller spaces for Fuchsian groups of the second kind

松崎克彦　　東工大理

Teichmüller空間のBers埋め込みの形状について，それが

。凸領域であるか？　。(ある点から見て)星型領域であるか？

などの問題がある（Crash courseのAbiko氏の未解決問題集）。これは誰もがそんなはずはないと思っているのだが、そう仮定してもなかなか矛盾が出てこない。しかし、universal Teichmüller spaceについてKrushkalは最近次を示した。

[$T := \{ S_f \mid f : \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$ conformal，$\hat{\mathbb{C}}$のqc-autoへ拡張可能$\}$ $(\subset B_2(1))$ はその中のどの点から見ても星型ではない。

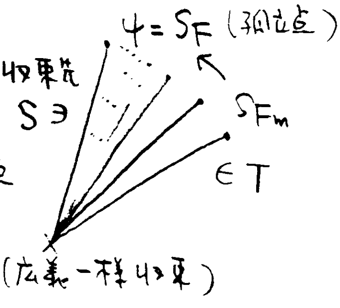
証明は次の2つを示せば $S := \{ S_f \mid f : \Delta \to \hat{\mathbb{C}}$ conformal$\} \supset T$ が f の広義一様収束で閉じていることより従う：

① S は孤立点 ψ をもつ（Thurston, Astala）.

② $\psi = S_F$ としたとき，F に Δ 上広義一様収束する conformal map F_m s.t. $S_{F_m} \in T$ が存在する。

①はむずかいが②は容易である。

このように $B_2(1)$ の位相と広義一様収束の位相のずれを利用して矛盾を出す。



この結果を任意の第2種Fuchs群のTeichmüller空間 $T(\Gamma)$ $= T \cap B_2(\Gamma)$, $B_2(\Gamma) = \{\varphi \mid$ 正則2次微分 for Γ, $\|\varphi\| = \sup |\varphi(z)| \lambda^{-2}(z) < \infty\}$ に拡張することを考える。次を得た。

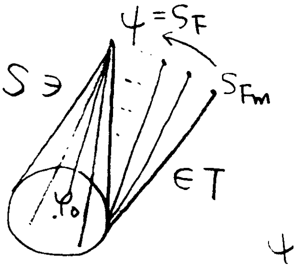
$\boxed{\text{定理}}$ Γを第2種Fuchs群とすると, $T(\Gamma)$は凸ではない。詳しく言えば, $T(\Gamma)$内のdenseは集合に属する点から見て, 星型でない。

証明の方針はKrushkal'に従うが"$\boxed{1}$ $S(\Gamma)$は孤立点をもつ"は極めて困難なので代用として

$\boxed{1}'$ $^{\exists}\psi \in S(\Gamma) - \overline{T}$ (Sugawa) を用いる。

$\boxed{2}$ $\psi = S_F$, Fに広義一様収束するconformal map F_m s.t $S_{F_m} \in T(\Gamma)$ が存在する。

$\boxed{2}$は群の作用があると②のように容易ではなく, $F(\Delta)$に"収束"する"Γ-compatible"なquasi-diskの列をとり, 領域の収束はRiemann mappingの広義一様収束というCarathéodory収束定理を本質的に使って示す。



$\varphi_0 \in T(\Gamma)$を中心としてある半径内の点すべてから見て$T(\Gamma)$が星型だとすると, 前半と同じ理由でφ_0を中心とする球とψを結んでできるconeがすべてSの点となる。Zhuravlevの定理よりこのときこのconeの内点はすべてTの点でなければならず, $\psi \in \overline{T}$となって矛盾が出る。

11

Projective structureの変形空間の連結成分と monodromy表現のKernelの対応

松崎克彦　　　東工大理

Riemann面Sの$(\mathrm{M\ddot{o}b}, \hat{\mathbb{C}})$-structureのことをprojective structureというが、ここではSのuniversal cover $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$の被覆変換群をΓとしたとき、Γ-compatibleな（非分岐、限界なし）covering map $f:\mathbb{D}\to\Omega\subset\hat{\mathbb{C}}$とmonodromy表現$\chi:\Gamma\to\mathrm{M\ddot{o}b}$ $(f\circ\gamma=\chi(\gamma)\circ f \text{ for } \forall\gamma\in\Gamma)$のpair (χ, f)をFuchs群Γのdeformationあるいはprojective structureと呼ぶことにする。Möbius変換での共役は同一のものとみなす。fのSchwarz微分$S_f(z)=\left(\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$をとることによりprojective connectionが与えられ、structureと1対1に対応する。以下、Γは有限生成第1種Fuchs群（ellipticを含んでもよい）とし、S_fがhyperolic L^∞-norm有限のもののみを考えることにする。すなわちin $B_2(\Gamma)$：有界正則2次微分

$$\mathcal{S}(\Gamma):=\{\varphi=S_f\in B_2(\Gamma)\mid f:\mathbb{D}\to\Omega\subset\hat{\mathbb{C}} \text{ は}(\Gamma\text{-compatible})\text{ covering}\}.$$

$\varphi=S_f\in\mathcal{S}(\Gamma)$のとき monodromy表現$\chi(=\chi_f=\chi_\varphi)$の像$\chi(\Gamma)$は$\Omega=f(\mathbb{D})$を不変成分としてもつ（有限生成non-elementary）function groupである。$\mathcal{S}_*(\Gamma)$の$B_2(\Gamma)$での連

(→)　$\overline{T_0(h)}\subset\mathcal{S}_*(\Gamma)$が$\mathcal{S}_*(\Gamma)$のひとつの連結成分になっている。

(※→)　従って定理-bのためには$\Gamma\cap\mathrm{deck}(\mathbb{D}\xrightarrow{f_1}\Omega_1)=\Gamma\cap\mathrm{deck}(\mathbb{D}\xrightarrow{f_2}\Omega_2)$ならば$\mathrm{deck}(f_1)=\mathrm{deck}(f_2)$を示さねばならない。

結成分と $\chi : \Gamma \to \mathrm{M\ddot{o}b}$ の kernel の対応を考察する。ただしここで

$\mathcal{S}_*(\Gamma) = \{ \varphi \in \mathcal{S}(\Gamma) \mid \chi_\varphi(\Gamma)$ が幾何学的有限 $\}$

定理 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}_*(\Gamma)$ が同じ連結成分上にある $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\chi_{\varphi_1} = \mathrm{Ker}\,\chi_{\varphi_2}$

まず(⇒)はJørgensenの(不等式の応用の)定理から容易に出る。

逆については次の結果が道のりの $\frac{3}{4}$ である:

定理-b $S_{f_1}, S_{f_2} \in \mathcal{S}(\Gamma)$ のとき、$\mathrm{Ker}\,\chi_{f_1} = \mathrm{Ker}\,\chi_{f_2}$ ならば $\Omega_1 = f_1(\mathbb{U})$ と $\Omega_2 = f_2(\mathbb{U})$ は等角同値である

これは一見自明であるが、実はぜんぜんそうではない。一般に $\tilde{S} = \Omega/G$ $(G = \chi_f(\Gamma))$ は $S = \mathbb{U}/\Gamma$ によって cover される Riemann 面であり、次の図式がなりたつ(Kra-Maskit)。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "/\Gamma"] & \Omega \arrow[d, "/G"] \\
S \arrow[r] & \tilde{S}
\end{tikzcd}$$

G の Fuchsian model は Γ を index finite に含む Fuchs 群 $\tilde{\Gamma}$ であり、

$\mathrm{Ker}\,\chi_f = \overset{\tilde{\Gamma}}{\overset{\triangledown}{\Gamma}} \cap \mathrm{deck}(\mathbb{U} \xrightarrow{f} \Omega)$ となっている。(※←ヘ)

補題1 G: 有限生成 non-elementary function group (不変成分 Ω), $\pi : R \to \Omega$ finite cover, $\exists \hat{G} \subset \mathrm{Aut}(R)$ にて $\chi_\pi : \hat{G} \to G$ が isomorphism とする。このとき $e \in \mathrm{Aut}(R)$ が $\hat{G}$ の各元と可換ならば $\pi \circ e = \pi$ となる。(Maskit Id. th の有限 cover 版)

残りの $\frac{1}{4}$ は Abikoff の reguler b-group は Teichmüller 空間の境界にあるという定理を function group に拡張した次の補題を示すことである: (紙がつきた)

補題2 G' を幾何学的有限 function group とすると $\exists$ Koebe group (G, Ω) without APT があって、G' は Ω 上 conformal とした G の QC-deformation space $T_0(G)$ の境界にある。 (←ヘ)

12

On the representation of potentials by a Green function and the proportionality axiom on a P-harmonic space

森中　央　　大阪工大一般教育科

$(X, \mathcal{U})$ は可算基をもつ P-harmonic space とする. $k(x,y)$ は $X \times X$ 上 lower semi-continuous, continuous outside the diagonal で, $k_y : x \mapsto k(x,y)$ は $S(k_y)=\{y\}, \forall y \in X$ をみたす X 上の potential とする.

$P_1 := \{ k\mu = \int k_y \, d\mu(y) \in P \cap C(X) ; \mu \in M^+(X) \}$ が i) adapted ii) inf-stable iii) X の点を分離するなら, X 上の任意の potential が一意的に

$$p(x) = k\mu(x), \ x \in X \quad (\mu \in M^+(X))$$

と表現されることを示す. また, もし, もう一つの harmonic space $(X, \mathcal{U}^*)$ で, $k^*_x : y \mapsto k(x,y)$ が $\mathcal{U}^*$ に関する X 上の potential で $S(k^*_x) = \{x\}$, $\forall x \in X$ をみたすものが存在すれば

P_1 が上記の条件 i), ii), iii) をみたすことを示す.

さらに, $(X, \mathcal{U})$ が Proportionality axiom をみたすための A. Boukricha の条件 (Math. Ann., 1979), U. Schirmeier の条件 (Inventiones math., 1979) および共役空間が存在するための T. Ikegami の条件 (Osaka J. Math., 1991) は, P_1 が i), ii), iii) をみたすことと同値な条件であることを示す.

13

準双曲距離による内部NTA領域の特徴付け

下村勝孝
茨城大学理学部数学教室

$D \subsetneqq \mathbf{R}^n$ $(n \geqq 2)$ を領域とし, $x \in D$ に対して x と D の補集合 D^c との間の距離を $\delta_D(x)$ で表す. D 上の準双曲距離 (quasi-hyperbolic metric) k_D を

$$k_D(x,y) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{ds}{\delta_D(z)}$$

で定義する (Gehring-Osgood [2]). ここで inf は x と y を結ぶ D 内の rectifiable arcs γ 全てについて取り, また ds は γ の Euclid 弧長要素である.

また, D 上に別の距離 j_D を

$$j_D(x,y) = \log\Big(1 + \frac{|x-y|}{\min\{\delta_D(x), \delta_D(y)\}}\Big).$$

で定義する.

$M > 0$, $N \in \mathbf{N}$ とする. D 内の長さ N の M-Harnack chain とは; D 内の閉球の有限列 $\{B_j\}_{j=1}^N$ で $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ $\ j = 1, \ldots, N-1$, かつ $r(B_j) = Md(B_j, D^c)$ $\ j = 1, \ldots, N$, を満たすものをいう. ここで $r(B_j)$ は B_j の半径, $d(B_j, D^c)$ は B_j と D^c との間の距離である. $x \in D$ に対して, x が B_1 の中心で $y \in B_N$ なる D 内の長さ N の M-Harnack chain $\{B_j\}_{j=1}^N$ が存在する様な $y \in D$ 全体を $H_{MN}(x)$ で表す.

$M > 0$, $N \in \mathbf{N}$, $0 < \nu < 1$ とする. D 内の (M, N, ν)-sequence とは D 内の 有限あるいは無限) 点列 $z = \{z_j\}$ で $z_{j+1} \in H_{MN}(z_j)$ $\ j = 1, 2, \ldots$ かつ $\sup_j \nu^{-j} \delta_D(z_j) < +\infty$ を満たすものをいう. D 内の (M, N, ν)-seqence z に対し, $H(z) = \bigcup_j H_{MN}(z_j)$ とおく.

定 義. $M > 0$, $N \in \mathbf{N}$, $0 < \nu < 1$ とする. 有界領域 $D \in \mathbf{R}^n$ が (M, N, ν)-内部NTA 領域であるとは, r_0, h_0, M_0, > 0 と $N_0 \in \mathbf{N}$ が存在して次を満たす事をいう: $x \in D$ かつ $\delta_D(x) \leqq r_0$ ならば, $\delta_D(z_1) \geqq r_0$, $\delta_D(z_j) \leqq h_0 \nu^j$ $\ j = 1, 2, \ldots$ を満たす (M, N, ν)-sequence $z = \{z_j\}$ であって $H_{M_0 N_0}(x) \cap H(z) \neq \emptyset$ なるものが存在する.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

M, N, ν が存在して D が (M,N,ν)-内部NTA 領域となっている時, 単に D は内部NTA 領域であるという.

注 意. 上の定義は元の定義 [5] の一般化で, [5] の結果は全てそのまま成立する.

本講演では次の結果を報告する.

定 理. 有界領域 D が内部NTA 領域であるための必要十分条件は, $x_0 \in D$ 及び正定数 c, C が存在して,

$$k_D(x_0,x) \leqq c j_D(x_0,x) + C \tag{1}$$

が任意の $x \in D$ について成立する事である.

D が有界ならば条件 (1) は, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して

$$k_D(x_0,x) \leqq c_1 \log \frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)} + c_2 \tag{2}$$

が任意の $x \in D$ について成立する事と同値である. [1]では条件 (2) を quasi-hyperbolic boundary condition と, [7]では条件 (2) を満たす領域を Hölder 領域と呼んでいる.

References

[1] F. W. Gehring and O. Martio, Lipschitz classes and quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., **10** (1985), 203–219.

[2] F. W. Gehring and B. G. Osgood, Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric, J. Analyse Math., **36** (1979), 50–74.

[3] F. W. Gehring and B. P. Palka, Quasiconformally homogeneous domains, J. Analyse Math., **30** (1976), 172–199.

[4] D. A. Herron and M. Vuorinen, Positive harmonic functions in uniform and admissible domains, Analysis, **8** (1988), 187–206.

[5] K. Shimomura, The growth of the positive solutions of $Lu = 0$ near the boundary of an inner NTA domain, Nagoya Math. J., **110** (1988), 129–135.

[6] K. Shimomura, A characterization of the inner NTA domain by the quasi-hyperbolic metric. 投稿中..

[7] W. Smith and D. A. Stegenga, Hölder domains and Poincaré domains, Trans. Amer. Math. Soc., **319** (1990), 67–100.

14

ポテンシャル論における最小変分の方法

二宮信幸

局所コンパクトなハウスドルフ空間 Ω において，$K(P, Q)$ を二点 P と Q について下半連続，$P=Q$ では ∞ であってもよいが $P \neq Q$ では必ず有限，かつ P と Q がそれぞれ互に素なコンパクト集合の中にあるときには上に有界，であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に対してポテンシャル及び相互エネルギー積分

$$K(P, \mu) = \int K(P, Q)\, d\mu(Q),$$

$$K(\mu, P) = \int K(Q, P)\, d\mu(Q),$$

$$K(\mu, \nu) = \int d\mu(P) \int K(P, Q)\, d\nu(Q)$$

を考える．Ω のコンパクト集合 F の上の全質量 1 の正の測度の全体を $\mathfrak{M}_1(F)$ で表わし，それに属する μ_1 と μ_2，及び正数 t_1 と t_2 に対して，二つの相互エネルギー積分

$$K(\mu_1,\ t_1\mu_1 + t_2\mu_2)$$

と

$$K(\mu_2,\ t_1\mu_1 + t_2\mu_2)$$

を考える．春，慶応で行った講演では

$$K(\mu_1+\mu_2,\ \mu_1 + t\mu_2)$$

と

$$K(\mu_1+\mu_2,\ t\mu_1 + \mu_2)$$

を考え，その大きい方の値を $M(\mu_1,\mu_2)$ とし，それについて最小変分を行った．然し得られる結果は複雑なものであったので，今回は上の形のものを考える．結果は次のように簡潔明瞭なものが得られる．

$\mathfrak{M}_1(F)$ の測度の中でエネルギー積分 $K(\mu,\mu)$ を最小にするものを μ，その値を W_F とするとき，

$$\inf\max\begin{pmatrix} K(\mu_1,\ t_1\mu_1+t_2\mu_2) \\ K(\mu_2,\ t_1\mu_1+t_2\mu_2) \end{pmatrix} = (t_1+t_2)W_F$$

である．従って左辺の $\inf\max$ は $\mu_1=\mu_2=\mu$ によって与えられる．

15　Clarksonの不等式とextremal lengthについて

大津賀　信　　学習院大学理学部

1. Clarksonの不等式の証明は色々あるが，K. O. Friedrichs, Comm. Pure Appl. Math. 23(1970), 603－607にある方法を，$1<p<2$の場合のみならず$p\geq 2$の場合にも適用し，2つの場合を同じように取り扱うことのできることを示す。

2. 曲線族ΓがR^d内に与えられたときにextremal lengthを定義しよう。すべての$\gamma\in\Gamma$に対し$\int_\gamma \rho\, ds \geq 1$をみたすBorel可測関数$\rho\geq 0$に関する$\inf\int\rho^p dm$を$M_p(\Gamma;m)$としるそう。ここに$m$は$R^d$内の1つの測度であって重さ$w$のついたルベーグ測度はその1例である。逆数$\lambda_p(\Gamma;m)=1/M_p(\Gamma;m)$は$\Gamma$のextremal lengthとよばれる。まず，$p>1$で$M_p(\Gamma;m)<\infty$のとき，p-almost extremalなρ，すなわち
$M_p(\{\gamma\in\Gamma;\int_\gamma\rho\, ds<1\})=0$かつ$M_p(\Gamma;m)=\int\rho^p dm$
をみたすρが存在し，このようなρ，ρ'があればm-a.e.に$\rho=\rho'$である。第2に，$p>1$で$\Gamma_n\uparrow\Gamma$ならば，

$M_p(\Gamma_n; m) \nearrow M_p(\Gamma; m)$である。これらの結果はClarksonの不等式を用い，吹田，Ziemer等により証明されている。

我々は$p=1$の場合に上の2つの結果が成り立つかという問題を考える。Clarksonの不等式を用いることはできない。第1の問題の答は否定的でそれについては次の機会に報告しよう。第2の問題については分らない。

特別講演

調和関数の可積分性，非可積分性

鈴木紀明　　名古屋大教養

D を $R^n (n \geq 2)$ の領域とし，$H^+(D)$ で D 上の正値調和関数全体を，$p > 0$ に対して $L^p(D)$ で D 上の Lebesgue 測度に関する p-次可積分関数全体を表す．また，$\delta_D(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ とする．調和関数の境界挙動に関連して次の問題を考える：

(A)
$$H^+(D) \subset L^p(D)$$

となる $p > 0$ を求めよ（可積分性）．

(B)
$$\int_D h(x) \delta_D(x)^{-m} dx = \infty; \quad \forall h \in H^+(D)$$

となる $m > 0$ を決めよ（非可積分性）．

本講演では問題 (A) 及び問題 (B) について得た結果 ([3], [9], [10], [11]) を中心に，これらと関連する事実をまとめてみた．

§1. 優調和関数の可積分性

$U^+(D)$ で D 上の正値優調和関数全体を表す．D.H.Armitage [1], [2] は D が有界 $C^{1,1}$-領域の時，$0 < p < n/(n-1)$ ならば

(1)
$$U^+(D) \subset L^p(D)$$

となることを，$\forall x_0 \in D$ に対して，定数 $C = C(D, p, x_0) > 0$ が存在して

(2)
$$\int_D u(x)^p dx \leq C u(x_0)^p, \quad \forall u \in U^+(D)$$

が成り立つことから導いた．以後の研究も Armitage の方法に従って (2) をより一般の領域で調べるという方向で行われたわけであるが，実は (1) と (2) は同値であり，さらに $U^+(D)$ を $H^+(D)$ に置き換えた場合も同値になることを注意しておく ([12])．

次に k-Lipschitz 領域の場合を述べる．$\theta \in (0, 2)$ に対して，$\alpha_n(\theta)$ で角度 $\pi\theta$ の円錐上の barrier の最大位数を表す．$\alpha_2(\theta) = 1/\theta$, $\alpha_4(\theta) = 2/\theta - 1$

であり，一般に $n \geq 3$ では，$\lim_{\theta\to 0}\alpha_n(\theta)=\infty$，$\alpha_n(1)=1$，$\lim_{\theta\to 2}\alpha_n(\theta)=0$ である．さて $k>0$ に対して $\theta=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(1/k)\in(0,1)$，$\alpha=\alpha_n(\theta)$ と置いて，次の量を考える：

$$
(3) \qquad p_n(k)=\begin{cases}\frac{\tilde{n}}{n+\alpha-2}, & \tilde{n}\geq n+\alpha-2\\ \frac{1}{n+\alpha-1-\tilde{n}}, & \tilde{n}<n+\alpha-2\end{cases}
$$

ここで $\tilde{n}=n(n+\alpha_n(\theta)+\alpha_n(2-\theta)-2)/(n+2\alpha_n(\theta)-2)$．この時，次の定理が成り立つ．

定理 1 ([3])．D を有界 k-Lipschitz 領域とする．$0<p<p_n(k)$ ならば $U^+(D)\subset L^p(D)$ である．

$\lim_{k\to 0}p_n(k)=n/(n-1)$ に注意すれば，Armitage の主張は有界 C^1-領域でも成り立つことがわかる．また定理 1 の応用として次が成り立つ (cf. [8])．

系．D を有界 Lipschitz 領域，P を D 上の非負値 Hölder 連続関数とする．もし $U^+(D)\subset L^p(D)$，$p>1$ かつ $P\in L^q(D)$，$1/p+1/q=1$ ならば，$\Delta-P$ に関する D の Martin 境界は Euclid 境界 ∂D と一致（同相）する．

M.Masumoto [5] は $n=2$ のとき，等角写像を評価することによってより精密な結果を得た：$\theta\in(0,1)$ に対して $q(\theta)=\min\{2\theta,\theta/(1-\theta)\}$ と置く．有界領域 D が内部θ-扇形条件をみたせば，$0<\forall p<q(\theta)$ に対して $U^+(D)\subset L^p(D)$ である．これは定理 1 を改良しているだけでなく，D の条件としては内側に円錐（扇形）がとれることが本質的であることを示している．

領域 D は次を満たすとき Hölder 領域と呼ばれる：

$a\in D$ を固定する．定数 c，$C>0$ が存在して

$$
k_D(a,x)\leq c\log\frac{\delta_D(a)}{\delta_D(x)}+C,\quad x\in D,
$$

但し k_D は D 上の quasi-hyperbolic metric である．最近，W.Smith and D.A.Stegenga [7] は Hölder 領域には (A) をみたす $p>0$ が存在することを示し，更にもし $n=2$ で D が有限連結の時は逆も成り立つことを示した．逆が常に言えるのではと彼らは予想しているが難しそうである．ところで，(A) を満たす $p>0$ があれば，定数 $m>0$ があって

$$
(4) \qquad h(x)=O(\delta_D(x)^{-m}),\quad \forall h\in H^+(D)
$$

が成り立つことが容易に導かれる．K.Shimomura [6] は内部 NTA 領域は (4) の性質を持っていることを証明すると共に，内部 NTA 領域と Hölder 領域は

同じであるという興味ある事実を指摘した．これからも Hölder 領域での (4) の成立が分かるわけであるが，何れにせよ (A) と (4) の同値性を含めて，(A) を満たす $p>0$ が存在する領域を決定することは今後の大きな課題である．

§2．劣調和関数の非可積分性

$S^+(D)$ で D 上の非負値劣調和関数全体を表す．非可積分性に関しては次の二つの定理が我々の議論の出発点である．

定理 2 ([9])．D を有界 $C^{1,1}$-領域とする．$s\in S^+(D)$ がある $0<p\leq 1$ に対して

$$\int_D \frac{s(x)^p}{\delta_D(x)^{n-np+p}}dx<\infty \tag{5}$$

を満たせば，s は恒等的に 0 である．

定理 3 ([10])．D を任意の真部分領域とする．D 上の劣調和関数 s がある $0<p\leq 1$ に対して

$$\int_D \frac{|s(x)|^p}{\delta_D(x)^{n-np+2p}}\ dx<\infty \tag{6}$$

を満たせば，s は恒等的に 0 である．

上述の定理に現れる指数 $n-np+p$ 及び $n-np+2p$ はベストである．これらから D が有界 $C^{1,1}$-領域ならば $m=1$ として (B) が成り立ち，$m=2$ とすれば任意の領域について (B) が成り立つことが分かる．Lipschitz 領域については次が成り立つ．

定理 4 (cf. [11])．D を有界 k-Lipschitz 領域とする．$0<p\leq 1$, $m_k=2-\alpha_n(2-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(1/k))$ とすれば，

$$\int_D \frac{h(x)^p}{\delta_D(x)^{n-np+m_kp}}\ dx=\infty,\qquad \forall h\in H^+(D) \tag{7}$$

である．

$n\geq 3$ の時 $1<m_k<2$, $\lim_{k\to 0}m_k=1$, $\lim_{k\to\infty}m_k=2$ であることと，$n=2$ ならば $2-2p+m_kp=2-p/(2-\theta),\theta=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(1/k)$ であることに注意する．(7) が $S^+(D)$ についても成り立つかどうかは残念ながら今のところ分からない．しかしながら $n=2$ の場合は M.Masumoto [4] がやはり等

角写像の評価をすることによって有界領域 D が外部 θ-扇形条件を満たせば，$0 < p \leq 1$, $\beta(p,\theta) = 2 - p/(2-\theta)$, $s \in S^+(D)$, $s \not\equiv 0$ の時

$$\int_D \frac{s(x)^p}{\delta_D(x)^{\beta(p,\theta)}}\, dx = \infty$$

であることを示した．これは一般の n についても (7) が $S^+(D)$ で成り立つであろうことを示唆すると共に，非可積分性に於いては領域の外部に円錐（扇形）がとれることが本質的であることを示して興味深い．

References

[1] D. H. Armitage, On the global integrability of superharmonic functions in balls, J. London Math. Soc., (2), 4 (1971), 365-373.

[2] D. H. Armitage, Further result on the global integrability of superharmonic functions, J. London Math. Soc., (2), 6 (1972), 109-121.

[3] F.-Y. Maeda ans N.Suzuki, The integrability of superharmonic functions on Lipschitz domains, Bull. London Math. Soc., 21 (1989), 270-278.

[4] M. Masumoto, A distortion theorem for conformal mappings with an application to subharmonic functions, Hiroshima Math. J., 20 (1990), 341-350.

[5] M. Masumoto, Integrability of superharmonic functions on plane domains, to appear in J. London Math. Soc.

[6] K. Shimomura, A characterization of the innner NTA domain by the quasi-hyperbolic metric, preprint.

[7] W. Smith and D. A. Stegenga, Sobolev imbedding and integrability of harmonic functions on Hölder domains, to appear in Proceeding of ICPT 90 at Nagoya.

[8] N. Suzuki, Martin boundary for $\Delta - P$, Hiroshima Math. J., 14 (1984), 67-74.

[9] N. Suzuki, Nonintegrability of harmonic function in a domain, Japanese J. Math., 16 (1990), 269-278.

[10] N. Suzuki, Nonintegrability of superharmonic functions, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[11] N. Suzuki, An estimate of harmonic measure with an application to subharmonic functions, to appear in Proceeding of ICPT 90 at Nagoya.

[12] N. Suzuki, Note on the integrability of superharmonic functions, preprint.

16

Some equalities derived from the fractional differintegrated functions $g(z, \alpha) = (e^z \cdot z)_\alpha$ and $h(z, \alpha) = (\log z \cdot z)_\alpha$

by

Katsuyuki Nishimoto

Coll. of Engng.
Nihon Univ.

Abstract

Many papers and volumes about the fractional calculus have been reported by the author already.

In this paper some equalities derived from the fractional differintegrated functions $g(z, \alpha) = (e^z \cdot z)_\alpha$ and $h(z, \alpha) = (\log z \cdot z)_\alpha$ are reported.

17

A generalization of Legendre's equation by fractional calculus method

by

Katsuyuki Nishimoto

Coll. of Engng.
Nihon Univ.

Abstract

Fractional calculus method to obtain a particular solution to ordinary (nonhomogeneous and homogeneous), and partial differential equation of Fuchs type is developed by the author recently.

Some generalizations of Nishimoto's differential equations have been reported by the author and his colleagues (S. Owa & et.al.) already. In previous papers, generalizations of Gauss' equation and of some other differential equations were reported by means of fractional calculus (Nishimoto's fractional calculus method). In this paper a generalization of Legendre's equation is reported.

§1. Generalization theorems

Theorem 1. If $f \in \mathfrak{F}$ and $f_{-\alpha-1} \neq 0$, then the nonhomogeneous differintegral* equation of Fuchs type (see Note for *)

$L[\varphi(z), m, n, \alpha]$

$$\equiv \varphi_m \cdot (z^n-1) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{m-k} \cdot \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+2-k)\Gamma(k+1)} (z^n)_k - \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+3-k)\Gamma(k)} (z^{n-1})_{k-1} \cdot 2\alpha \right\} = f \qquad (z^n \neq 1) \qquad (1)$$

has a particular solution of the form

$$\varphi = ((f_{-\alpha-1} \cdot (z^n-1)^{-1-(2\alpha/n)})_{-1} \cdot (z^n-1)^{2\alpha/n})_{\alpha-m+2}, \qquad (2)$$

where $m \in Z$, $(n-1) \in Z^+ \cup \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 = \varphi = \varphi(z)$, $f = f(z)$ is known, and α is a given constant.

Note.

For $m \geqq n$ (1) is a differential equation,
for $n > m > 0$ (1) is a differintegral equation,
for $m \leqq 0$ (1) is an integral equation.

18

On the conjecture of Gackstatter and Laine for some differential equations

石崎　克也

東京工高専

本講演では、$\mathbf{C}$ 上で代数的常微分方程式

$$(1) \qquad \Omega(z, w, w', \ldots, w^{(k)}) = \sum a_\nu(z) w^{i_0} w'^{i_1} \cdots w^{(k)i_k} = 0$$

が許容解 (admissible solution) を持つかどうか、特に解 $w(z)$ が $N(r, w) = S(r, w)$ なる性質を持つ場合について、Gackstatter-Laine[GL][T1] の予想周辺の話をすることにする。より一般的なものに戸田先生の予想がある [T2]：

$$(2) \qquad \sum_{j=0}^{n} Q_j(z, w)(w')^j = 0, \quad \deg_w[Q_j(z, w)] = q_j$$

は $q_n + n > q_j + j \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1)$ のとき許容解（代数型なものまで許して）を持たない。

Nevanlinna の函数達は通常のものとする。$f(z)$ を有理型函数とし $m(r, f)$, $N(r, f)$ と $T(r, f)$ はそれぞれ近接函数、個数函数、特性函数である。

実数値函数 $\varphi(r), 0 \leq r < \infty$, が $S(r, f)$ であるとは、$E \subset \mathbf{R}^+$ を測度有限な除外区間として $\varphi(r) = o(T(r, f))$ as $r \to \infty, r \notin E$. が成り立つことである。

有理型函数 $a(z)$ が f に対して *small* であるとは、$T(r, a) = S(r, f)$ が成立することである。

$\mathcal{M}$ を有理型函数の有限個の集合とする。超越的有理型函数 $w(z)$ が $\mathcal{M}$, に対して許容 (admissible) であるとは $T(r, a) = S(r, w)$ が $\mathcal{M}$ の任意の要素 $a(z)$ に対して成立することである。

$c \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ に対して z_0 が $\mathcal{M}$ について $w(z)$ の admissible c-point であるとは $w(z_0) = c$ でかつ任意の $a(z) \in \mathcal{M}$, に対して z_0 が $a(z)$ の零でも極でもないことである。

本講演では、特に断らない限り $\mathcal{M}$ は微分方程式の係数の集合であるとしておく。

$w(z)$ が方程式 (1) の許容解 (admissible solution) であるとは、$w(z)$ が (1) の解でかつ $\mathcal{M}$ に対して admissible であることである。

ここでは、次の方程式に関して得られた結果を報告する。

$$P(z, w') = Q(z, w), \tag{3}$$

$$w'' = w'^2 + M(z, w)w' + N(z, w), \tag{4}$$

P, Q, M, Nはそれぞれ有理型函数を係数とする多項式。

定理:$\deg_{w'}[P(z, w')] > \deg_w[Q(z, w)]$ ならば (3) は、$\deg_w[M(z, w)] \leqq 1$, $\deg_w[N(z, w)] \leqq 2$ ならば (4) は、許容解を持たない。

証明は、Steinmetz[S] の中にあるアイデアによる。実際、(4) について述べると以下の通り。

まず、Test-power test によって、$N(r, w) = S(r, w)$ を示す。

次に以下の条件を満たす定数 τ を考える。

(i) $m(r, \tau; w) + N_1(r, \tau; w) = S(r, w)$,

(ii) $M(z, \tau) \not\equiv 0$, $N(z, \tau) \not\equiv 0$, (whenever $N(z, w) \not\equiv 0$, $M(z, w) \not\equiv 0$).

更にτ_j $(j = 1, 2, 3)$ を (i),(ii) を満たす異なる定数として

$$F(z; \tau_j) = [w'' - w'^2 - M(z, \tau_j)w' - N(z, \tau_j)]/(w - \tau_j) \quad (j = 1, 2, 3),$$

と置く。

$h(z) = \sum_{j=1}^{3} A_j F(z; \tau_j)$ が $T(r, h) = S(r, w)$ を満たすように A_jを決められることを示し、以下 $h(z) \equiv 0$, $h(z) \not\equiv 0$ のそれぞれの場合について評価する。

REFERENCES

[GL]. F.Gackstatter and I.Laine, *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen*, Ann, Polon. Math. **38** (1980), 259-287.

[S]. N.Steinmetz, *Meromorphic Solutions of Second-Order Algebraic Differential Equations*, Complex Variables **13** (1989), 75-83.

[T1]. N.Toda, *On the conjecture of Gackstatter and Laine concerning the differential equation* $(w')^n = \sum_{j=0}^{m} a_j(z)w^j$, Kodai Math. J. **6** (1983), 238-249.

[T2]. N.Toda, *On algrbroid solutions of some algebraic differential equations in the complex plane*, Proc. Japan Acad., **65**, Ser. A (1989), 94-96.

19

Some notes on the growth of entire and subharmonic functions along asymptotic paths

TODA Nobushige Nagoya Institute of Technology

Let $f(z)$ be a transcendental entire function of order ρ and finite lower order μ. We consider how quickly $\log|f(z)|$ tends to infinity along an asymptotic path. The following results are known.

I. There exists a polygonal path Γ tending to ∞ such that

$$\log|f(z)|/\log|z| \to \infty \quad \text{as } z\to\infty \quad \text{on } \Gamma$$

([4]).

II. If the set

$$\{z:|f(z)|>K\}$$

contains at least two components for some positive constant K, there exists a path Γ tending to ∞ such that for $z\varepsilon\Gamma$

$$\log|f(z)|>|z|^{\{\rho/(2\rho-1)\}-\varepsilon(z)} \quad (0\leqq\varepsilon(z)\to 0 \text{ as } z\to\infty)$$

([3]).

As an improvement of II, we give the following.

Theorem. Suppose that for some positive constant K the set

$$\{z:|f(z)|>K\}$$

contains at least $N(\geqq 2)$ components $D_1,\ldots,D_N$. Then there exists a path Γ_j tending to ∞ in D_j such that on Γ_j

$\log|f(z)|>|z|^{\{\rho/(2\rho+1-N)\}-\varepsilon(z)}$ $(0\leqq\varepsilon(z)\to 0$ as $z\to\infty)$

$(j=1,\ldots,N)$.

Using Theorem 8.17 in [2], we can give a subharmonic analogue of our Theorem, which is an improvement of a result in [1].

References

[1] A.E.Eremenko:Growth of entire functions and subharmonic functions on asymptotic curves. Siberian Math.J., 21(1981), 673-683.

[2] W.K.Hayman:Subharmonic functions, Vol.2. Academic Press, London 1989.

[3] J.Rossi and A.Weitsman:The growth of entire and harmonic functions along asymptotic paths. Comm.Math.Herv., 60(1985), 1-16.

[4] M.N.M.Talpur:A subharmonic analogue of Iversen's theorem. Proc.L.M.S.,(3)31(1975), 129-148.

Representations of the Norms in Bergman - Selberg Spaces on Strips and Half Planes

20

SABUROU SAITOH, Gunma University

For a simply - connected regular region D, let $K_D(z,\overline{u})$ be the Bergman kernel on D. For any $q > 0$, we set $K_q(z,\overline{u}) = \Gamma(2q)\pi^q K_D(z,\overline{u})^q$. Let $H_{K_q}(D)$ be the Hilbert space admitting the reproducing kernel $K_q(z,\overline{u})$. Then, for $q > \frac{1}{2}$, $K_q(z,\overline{u})$ is the reproducing kernel for the Bergman - Selberg Hilbert space $H_{K_q}(D)$ on D composed of all analytic functions $f(z)$ on D with finite norms

$$\|f\|^2_{H_{K_q}(D)} = \frac{1}{\Gamma(2q-1)\pi^q}\iint_D |f(z)|^2 K_D(z,\overline{z})^{1-q}dxdy.$$

For $q = \frac{1}{2}$, $K_{\frac{1}{2}}(z,\overline{u})$ is the Szegö reproducing kernel on D.

In this paper, we shall establish

THEOREM 1.1 Let D_r be the strip $\{z; |Imz| < r\}$. Then, for $f \in H_{K_q}(D_r)$ we have the identity

$$(A)\quad \|f\|^2_{H_{K_q}(D_r)} = \frac{1}{\Gamma(q)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2r}{\pi}\right)^{2n+2q-1} \cdot \left(\sum_{j_1>j_2>\cdots>j_n\geq 0} \Pi_{k=1}^{n}\frac{1}{(q+j_k)^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_x^n f(x)|^2 dx.$$

Here, the summation $\sum_{j_1>j_2>\cdots>j_n\geq 0}$ in (A) is understood as one for $n = 0$.

Conversely, any C^∞ function $f(x)$ on the real line with convergent summation in (A) can be extended analytically onto the strip D_r, and the analytic extension $f(z)$ belongs to $H_{K_q}(D_r)$ and satisfies the identity (A).

THEOREM 1.2 Let D be the right half plane $R^+ = \{z; Rez > 0\}$. Then, we have the identity

(B)

$$\|f\|^2_{H_{K_q}(R^+)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(n+2q+1)}\int_0^{\infty}|\partial_x^n(xf'(x))|^2 x^{2n+2q-1}dx.$$

Typeset by 日本語-$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Conversely, any C^∞ function $f(x)$ on the positive real line $(0, \infty)$ with convergent summation in (B) can be extended analytically onto the right half plane R^+. The analytic extension $f(z)$ satisfying $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ belongs to $H_{K_q}(R^+)$ and the identity (B) is valid.

REFERENCES

1. M. Abramowitz and I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions," National Bureau of Standards Applied Mathematical Series 55.
2. H. Aikawa, N. Hayashi and S. Saitoh, *The Bergman space on a sector and the heat equation*, Complex Variables **15** (1990), 27-36.
3. H. Aikawa, N. Hayashi and S. Saitoh, *Isometrical identities for the Bergman and the Szegö spaces on a sector*, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 195-201.
4. H. Aikawa, *Infinite order Sobolev spaces analytic continuation and polynomial expansions*, preprint.
5. J. Burbea, *Total positivity of certain reproducing kernels*, Pacific J. Math. **67** (1976), 101-130.
6. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, "Tables of Integral Transforms vol.1," McGraw-Hill Book Company Inc., 1954.
7. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products," Academic Press, 1980.
8. N. Hayashi and S. Saitoh, *Analyticity and smoothing effect for the Schrödinger equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique **52** (1990), 163-173.
9. N. Hayashi and S. Saitoh, *Analyticity and global existence of small solutions to some nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. **129** (1990), 27-41.
10. N. Hayashi, *Global existence of small analytic solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Duke Math. J. **60** (1990), 717-727.
11. N. Hayashi, *Solutions of the (generalized) Korteweg-de Vries equation in the Bergman and the Szegö spaces on a sector*, Duke Math. J. **62** (1991), 575-591.
12. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev, Integrals and Series, Vol.1. Translated from the Russian by N. M. Queen, Gordon and Breach Sci. Publishers.
13. S. Saitoh, *Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 74-78.
14. S. Saitoh, "Theory of Reproducing Kernels and its Applications," Pitman Res. Notes in Math. Series 189, Longman Scientific & Technical, England, 1988.
15. I. N. Sneddon, "The Use of Integral Transforms," McGraw-Hill Book Company, 1972.
16. E. C. Titchmarsh, "An Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2nd ed.," Oxford University Press, 1948.

21

Infinite order Sobolev spaces, analytic continuation and polynomial expansions

相川弘明　　群馬大学 工学部

In [**1**] we have shown the following theorem.

Theorem A. *Let* $\Delta(\alpha) = \{z : |\arg z| < \alpha\}$. *Suppose* $0 < \alpha < \pi/2$. *If* F *is a square integrable function on* $\Delta(\alpha)$, *then*

$$(1)\quad \iint_{\Delta(\alpha)} |F(x+iy)|^2 dxdy = \sin(2\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\sin\alpha)^{2j}}{(2j+1)!} \int_0^\infty x^{2j+1} |\partial^j f(x)|^2 dx,$$

where f *stands for the trace of* F *on the positive real axis. Conversely, if* f *is a smooth function on the positive real axis for which the right hand side of (1) is finite, then* f *has an analytic continuation* F *and (1) holds.*

It may be natural to consider what happens if the coefficients $(2\sin\alpha)^{2j}/(2j+1)!$ in the right hand side of (1) are replaced by arbitrary nonnegative numbers c_j.

Define the infinite order Sobolev space $W(c_j; \mathbb{R}^+)$ on $\mathbb{R}^+$ by

$$W(c_j; \mathbb{R}^+) = \{f : \sum_{j=0}^{\infty} c_j \int_0^\infty x^{2j+1} |\partial^j f(x)|^2 dx < \infty\},$$

and the weighted Bergman space on $\Delta(\alpha) = \{z : |\arg z| < \alpha\}$ by

$$B(w; \Delta(\alpha)) = \{F : F \text{ is analytic on } \Delta(\alpha), \iint_{\Delta(\alpha)} |F(re^{i\theta})|^2 w r dr d\theta < \infty\},$$

where $w > 0$ is an even function of the argument θ.

If $c_{j_0} = c_{j_0+1} = \cdots = 0$ for some $j_0 \geq 1$, then $W(c_j; \mathbb{R}^+)$ reduces to a usual finite order Sobolev space. If $\{c_j\}$ includes a subsequence of 'large' positive numbers $c_{j(k)}$, then only the constant function 0 belongs to $W(c_j; \mathbb{R}^+)$.

Theorem 1. *$W(c_j;\mathbb{R}^+) \neq \{0\}$ if and only if*

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j (j!)^2 < \infty. \tag{2}$$

If $\{c_j\}$ includes a subsequence of 'suitable' positive numbers $c_{j(k)}$, then $W(c_j;\mathbb{R}^+)$ may posses analyticity, i.e., every element in $W(c_j;\mathbb{R}^+)$ has an analytic continuation to an open set in $\mathbb{C}$. It is not so difficult to see that if there is such an open set, then it is a sector $\Delta(\alpha)$.

The angle 2α of the sector in Theorem A is restricted by $\alpha < \pi/2$. We show that the restriction $\alpha < \pi/2$ is sharp by the following two main theorems.

Theorem 2. *Suppose c_j satisfies (2). Then there exists $f \in W(c_j;\mathbb{R}^+)$ such that f fails to have an analytic continuation $F \in B(w;\Delta(\pi/2))$ with $w \equiv 1$.*

In other words, the infinite order Sobolev space $W(c_j;\mathbb{R}^+)$ always has a function that fails to have an analytic continuation to a 'concave' sector $\Delta(\alpha), \alpha > \pi/2$, unless $W(c_j;\mathbb{R}^+)$ reduces to $\{0\}$. The next theorem shows that $\alpha = \pi/2$ is critical.

Theorem 3. *Suppose w is an even positive integrable function on $(-\pi/2,\pi/2)$ and suppose $\lim_{\theta\to\pm\pi/2} w(\theta) = 0$. Then there exist c_j satisfying (2) with the property that every $f \in W(c_j;\mathbb{R}^+)$ has an analytic continuation $F \in B(w;\Delta(\pi/2))$.*

REFERENCES

1. H. Aikawa, N. Hayashi and S. Saitoh, *Isometrical identities for the Bergman and the Szegö spaces on a sector*, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 195–201.

22

Local existence of the semi-universal family of closed complex subspaces with locally stable parametrizations of a compact complex manifold.

坪井 昭二　鹿児島大学教養部

定義-1. 複素多様体間の正則写像 $f: X \to Y$ が局所安定であるとは，任意の $y \in f(X)$ と任意の有限部分集合 $S \subset f^{-1}(y)$ に対し，写像の multi-germ $f: (X, S) \to (Y, y)$ の任意の unfolding $F: (X \times \mathbb{C}^r, S \times 0) \to (Y \times \mathbb{C}^r, y \times 0)$ がすべて "trivial" (i.e. $F \underset{\text{同値}}{\sim} f \times id_{\mathbb{C}^r}$) であることをいう。

定義-2. 複素多様体 Y の閉複素部分空間 Z が "with locally stable parametrizations" であるとは，(i) Z は被約，(ii) 正規化モデル X は非特異，(iii) $n: X \to Z$，正規化写像，$\iota: Z \hookrightarrow Y$，包含写像としたとき，その合成写像 $f = \iota \circ n: X \to Y$ は局所安定な正則写像であることを云う。

Y：コンパクト複素多様体とその "closed complex subspace with locally stable parametrization" Z が与えられたとする。定義-2におけるように，Z の正規化モデル X から Y への局所安定な正則写像 $f = \iota \circ n: X \to Y$ を作る。Y は固定し，f, Z に対して，複素空間の芽のカテゴリーの双対カテゴリー (Germs Complex)$^{\circ}$ から集合のカテゴリー (Sets) への，次の2つの

変形ファンクター D, L を考える:

$D : (M, 0) \rightarrow$ {$f : X \rightarrow Y$ の, $(M, 0)$ 上の変形族 (Y : fixed) の同型類の全体}

$L : (M, 0) \rightarrow$ {Z の Y の中における $(M, 0)$ 上の"局所自明"な変位族の同型類の全体}

<u>定理1</u>. $f : X \rightarrow Y$ の $(M, 0)$ 上の変形族 $(\mathfrak{X}, F, \pi, M, 0; \varphi)$ (Y: fixed) に対し, $\mathfrak{Z} := F(\mathfrak{X})$ $(\subset Y \times M)$, $\varpi = Pr_M|\mathfrak{Z} : \mathfrak{Z} \rightarrow M$ とおくと, $(Y \times M, \mathfrak{Z}, \varpi, M, 0)$ は, Z の Y の中における M 上の"局所自明"な変位族であって, 対応 $(\mathfrak{X}, F, \pi, M, 0, \varphi) \rightarrow (Y \times M, \mathfrak{Z}, \varpi, M, 0)$ は上の2つのファンクター D, L の自然同値を与える。

この定理は次の2つの定理から導かれる。

<u>定理2</u>. 局所安定な正則写像 $f : X \rightarrow Y$ の微少変形は, 局所安定な正則写像である。

<u>定理3</u>. 一般に, 被約複素空間の, 複素空間 M 上の局所自明な複素族 $\pi : \mathfrak{Z} \rightarrow M$ が与えられたとき, 次の性質を持つ, 局所自明な複素族 $\varpi : \mathfrak{X} \rightarrow M$ と, M 上の全射正則写像 $\nu : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Z}$ が存在する: (i) ${}^\forall t \in M$ に対し, $\nu_t : X_t \rightarrow Z_t$ は正規化写像, (ii) 正則写像 $\varpi : \mathfrak{X} \rightarrow M$ は, M 上局所自明。

以上はいずれも, パラメーター空間が被約な複素空間の場合は, 以前に報告した結果である。

23

Global existence of the universal family of closed complex subspaces with locally stable parametrizations of a compact complex manifold

坪井 昭二　鹿児島大学教養部

Y：コンパクト複素多様体を1つ固定して考える。$E(Y)$をYの中の"closed complex subspaces with locally stable parametrizations"全体の集合とし，$\tilde{\mathfrak{X}}(Y):=\{(t,y) \mid t\in E(Y), y\in Z_t\}$とおく。ここで$Z_t$は$t\in E(Y)$に対応する$Y$の中の"closed complex subspace with a locally stable parametrization"を表す。

<u>定理</u>. $\tilde{\mathfrak{X}}(Y)$, $E(Y)$は，次が成立するような複素空間の構造を持つ：

(i) $\tilde{\pi}:\tilde{\mathfrak{X}}(Y)\to E(Y)$　($\tilde{\pi}:=\mathrm{Pr}_{E(Y)}:\tilde{\mathfrak{X}}(Y)\to E(Y)$)は，$E(Y)$上の局所自明な複素族。

(ii) Yの中の"closed complex subspaces with locally stable parametrizations"の局所自明な複素族$\pi:\mathfrak{X}\to M$が任意に与えられたとき，$^{\exists 1} f: M\to E(Y)$, 正則写像 s.t. $f^{*}\tilde{\mathfrak{X}}(Y)=\mathfrak{X}$。

(iii) $D(Y)$をYのDouady spaceとしたとき，自然な写像$\varphi: E(Y)\to D(Y)$は正則なimmersionであり，$\tilde{\pi}:\tilde{\mathfrak{X}}(Y)\to D(Y)$を$Y$の中のclosed complex subspacesの普遍族

とすると, $\varphi^*\widetilde{\mathcal{X}}(Y) = \widetilde{\mathcal{X}}(Y)$

(iv) $E(Y)$ のある連結成分に属する任意の２点 t, t' に対して, (Z_t, Y), (Z'_t, Y) は C^∞-同型, すなわち, $\exists\psi : Y \to Y$ C^∞-同型写像 s.t. $\psi(Z_t) = Z'_t$。

この定理は, H. Flenner & S. Kosarew "On locally trivial deformations (Publ. RIMS, 1987) の中の次の定理を, Y の Douady space $D(Y)$ と, Y の中の closed complex subspaces の普遍族 $\widetilde{\mathcal{X}}(Y) \to D(Y)$ に適用することにより, 前講演の定理1から その存在が導かれる Y の中の, 任意の closed complex subspace with locally stable parametrization" の局所自明な変位 の semi-universal family が, 実は universal family であることを示すことにより得られる。((iv) は別)

<u>定理</u>.(H. Flenner & S. Kosarew)

$(\mathcal{X}, 0) \to (\mathcal{S}, 0)$ を複素空間の芽 $(X, 0)$ の変形とすると, 次の条件をみたす $(\mathcal{S}, 0)$ の閉複素部分空間 $(\mathcal{S}', 0)$ が存在する:
(i) $(\mathcal{X}, 0)$ の $(\mathcal{S}', 0)$ への制限 $(\mathcal{X}_{|\mathcal{S}'}, 0) \to (\mathcal{S}', 0)$ は局所自明な変形, (ii) 任意の正則写像の芽 $\alpha : (T, 0) \to (\mathcal{S}, 0)$ に対し, induced family $(\alpha^*\mathcal{X}, 0) \to (T, 0)$ が局所自明であるための必要十分条件は, α が $(\mathcal{S}', 0)$ を通して factorize されること。

24

Nevanlinna Calculus and Families of Abelian Varieties with Level Structures

野口潤次郎　　　　東京工業大学理学部

コンパクト複素多様体 Rとその解析的部分集合 Dを固定する．R上の種数 $g \geq 2$ のコンパクト Rieman 面の族で D上でのみ退化を許すものの全体のモジュライ空間は有限集合になる（Parshin-Arakelov の定理）．ファイバーをコンパクト Rieman 面の代わりに主偏極 Abel 多様体とすると対応するモジュライ空間は, あるコンパクト複素解析空間の Zariski 開集合の構造を持ち ([2], [4]), 特に, R が Kähler ならばそれは有界対称領域の商の構造を持つことが示されている ([4]). このように退化する場所を決めることはこの種の定理に於いて本質的条件になっている．ここではこの退化条件を仮定せず, 代わりに Abel 多様体のレベル構造を導入することにより, 対応するモジュライの有限型性を得ることを考える ([5]).

以下, R を射影代数的であるとする．$A \to R$ を R上定義された非定 g-次元主偏極 Abel 多様体の族 (退化してもよく, その点が R 全体でないこと以外制限しない) とする．$A \to R$ の $2g$個の有理切断 $x_1, \dots, x_{2g}$ がレベル n-構造であるとは, 一般の点 $t \in R$ に対し $x_1(t), \dots, x_{2g}(t)$ が A_tの n-torsion points を全て生成することとする．レベル n-構造を持つ $A \to R$ のモジュライ空間を $\mathbf{A}(g,n,R)$ で表す．$\mathbf{A}(g,n,R)$ の元 $A \to R$ で退化ファイバーを持つもののモジュライを $\mathbf{A}_{\mathrm{deg}}(g,n,R)$ とかく．Ωは R 上の任意の Hodge 計量形式を動くものとし

$$\gamma(R) = \inf\left\{ \int_R c_1(K_R) \bigwedge \Omega^{n-1} \right\} \geqq -\infty$$

とおく．また $k(g)$ で, 重さ kの Siegel モジュラー劣型式が共通零点を持たないような kの最小値とする．

命題． もし$\gamma(R) \leq 0$ ならば, $\mathbf{A}(g,n,R) = \mathbf{A}_{\mathrm{deg}}(g,n,R)$.

主定理 1. $g \geq 5$ とする（技術的仮定）．

i) $n > gk(g)/2$ ならば, $\mathbf{A}(g,n,R)$ は有限型で準射影的である．

ii) $n > (1 + \max\{\gamma(R), 0\})gk(g)/2$ ならば $\mathbf{A}_{\mathrm{deg}}(g,n,R) = \emptyset$.

注．Nadel [3] は $\dim R = 1$ かつ $\gamma(R) \leq 0$ の場合に ii) を示している．

$\mathbf{A}(g,n,R)$ の元 $A \to R$ でその主偏極因子$\Theta_t (t \in R)$ が一般の t に対し非特異であるものの全体を $\mathbf{A}'(g,n,R)$ とかき，$\mathbf{A}'_{\mathrm{deg}}(g,n,R) = \mathbf{A}'(g,n,R) \cap \mathbf{A}_{\mathrm{deg}}(g,n,R)$ とおく．

定理 2. $g \geq 5$ とする．

i) $n > 3g(g+3)/(g+1)$ ならば，$\mathbf{A}'(g,n,R)$ は有限型で準射影的である．

ii) $n > (1+\max\{\gamma(R),0\})3g(g+3)/(g+1)$ ならば $\mathbf{A}'_{\mathrm{deg}}(g,n,R) = \emptyset$.

上述の定理の証明では，[3], [1] で使われた Nevanlinna Calculus を R 上で用いることによりなされる．

参考文献

[1] Y. Aihara and J. Noguchi, Value distribution of meromorphic mappings into compactified locally symmetric spaces, to appear in Kodai Math. J. (1991).

[2] G. Faltings, Arakelov's theorem for Abelian varieties, Invent. Math. **73** (1983), 337-347.

[3] A. M. Nadel, The nonexistence of certain level structures on abelian varieties over complex function fields, Ann. Math. **129** (1989), 161-178.

[4] J. Noguchi, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces, Invent. Math. **93** (1988), 15-34.

[5] J. Noguchi, Moduli space of Abelain varieties with level structure over function fields, International J. Math. **2** (1991), 183-194.

$$\nu(T) = \int_R T \wedge \Omega^{r-1}$$

$A \to R$

$\rightsquigarrow f_A : R \to \overline{\Gamma(n)\backslash \mathbb{H}_g}$

$\boxed{\operatorname{rank} f_A = \dim R}$

$K_n \to \overline{\Gamma(n)\backslash \mathbb{H}_g}$, canonical

$$\nu(f_A^* c_1(K_n)) + \nu(f_A^* c_1(D)) \leqq \nu(f_A^* \omega_{/\pi})$$

$$\leqq \frac{g(g+1)}{\cancel{g(g+1)}\, 2} \{\nu(f_A^* c_1(D)) + \nu(c_1(K_R))\}$$

last [illegible] term ≠;

$$\to k(g)\{\nu(f_A^* c_1(K_n)) + \nu(f_A^* c_1(D))\} - n(g+1)\nu(f_A^* c_1(D))) \geq 0$$

25

Meromorphic Mappings into Compact Hyperbolic Complex Spaces and Geometric Diophantine Problems

野口潤次郎　　東京工業大学理学部

S. Lang は 1974 年幾何学的ディオファンタス問題についていくつかの予想を述べた. ここでは, その内で中心的な複素解析的にも興~~見~~深い 味 2つの予想についてほぼ完全な解答が得られたので報告する.

$\bar{X}$とYをコンパクト既約複素解析空間とし, Xを$\bar{X}$内の Zariski 開集合とする. 有理型写像 $f: X \to Y$が支配的であるとは, 像 $f(X)$ が非空開集合を含むものとし, そのようなfの全体を $\mathrm{Mer}_{\mathrm{dom}}(X,Y)$ とかくことにする.

定理 A. Yが双曲的ならば, $\mathrm{Mer}_{\mathrm{dom}}(X,Y)$ は有限集合である.

S. Lang(1974) はこの定理を代数的な場合に de Franchis の定理の高次元版として予想した, その後小林 (1976) が上述の形で予想を与えていた. 小林-落合 (1975) は少し異なる条件、即ち Y が一般型であるという条件のもとで, この予想の成立することを示した. その後この予想は, 多くの成果を生む動機を与えてきた. 定理 A の特別な場合は, 浦田, Kalka-Shiffman-Wong, 野口, Horst 等により示されていた.

Cur. hyp. Kähler $c_1 \leqq 0$, $X \neq c$ $c_1 \leqq 0$ non-sing. ~~proj~~ Kähler

次に, 双曲的複素空間に対する関数体上の Mordell 予想 (Faltings の定理) のアナロジーを考える. $\bar{\pi}: \overline{\mathcal{W}} \to \bar{R}$ をコンパクトな連結ファイバーを持つファイバー空間とし, $R \subset \bar{R}$を非特異 Zariski 開集合で, $\mathcal{W} = \bar{\pi}^{-1}(R)$, $\pi = \bar{\pi}|\mathcal{W}$, $\mathcal{W}_t = \pi^{-1}(t)$ $(t \in R)$ とする.

定理 B. 各 $\mathcal{W}_t$は双曲的で, $(\mathcal{W}, \pi, R)$ は $(\overline{\mathcal{W}}, \bar{\pi}, \bar{R})$ に$\partial R = \bar{R} - R$に沿って双曲的に埋め込まれていると仮定する. この時 $(\mathcal{W}, \pi, R)$ は高々

有限個の自明なファイバー部分空間を含み, (W, π, R) の任意の有理型切断はそれら自明なファイバー部分空間の定切断に帰する.

定理 B は野口により 1985 年に得られていた結果を完結するもので, その結果と定理 A より出る. しかし, 定理 B は正則写像のモジュライについて 定理 A 以上の情報をあたえる. 例えば, 次が成立する.

系. X, Yをコンパクトとし, $x \in X$を非特異点, $Z \subset \mathrm{Hol}(X, Y)$ を 1 つの既約成分とすると, 取値写像 $\phi_x: f \in Z \to f(x) \in Y$ は中への正則同型である.

更に, Severi の定理の一般化, Yが非コンパクト完備双曲的複素空間の場合等興味ある問題があり, これ等についても議論したい.

to appear in I. J. M. Vol. 3 No. 2, 1992 (April)

26 核型空間の擬凸領域の核関数について

大貝　聖子　明治学園高校
梶原　壌二　九州大学理学部
菅原　宣子　福岡工業大学
西原　賢　福岡工業大学
本田　竜広　九州大学理学部

ICM90Kyotoにて，梶原-本田が紹介した，児玉秋雄の定理に於いて正則自己同型の境界に於ける滑らかさが要をなすが，その証明にて本質的な役割を果たすのは，領域の核関数の境界の近傍での**Fefferman**流の漸近的挙動である．

我々は，この事を視野に入れつつ無限次元空間での，領域の核関数を論じ様と思う．例えば

Ｃを複素平面，$\mathbf{X}=\prod_{i=1}^{\infty}$ Ｃ をその可算個の直積の空間

とすると，その擬凸領域Ｄの核関数を計算する．

27

解析空間上のLiouville型定理

竹腰見昭　阪大教養

この講演では次の定理を報告する

定理　Xを純 $m \geqq 1$ 次元の既約かつ被約な解析空間とする. 次を仮定する

(i) ω はX上の d-閉な次数 $(m-1, m-1)$ の正カレントでその係数はLipschitz連続とする. また係数は少なくともX上のある非特異な一点で退化していないとする

(ii) τ はX上の C^2-級の非有界な汲み尽くし函数 (i.e. $X_c := \{\tau < c\} \Subset X$, $c \in \mathbb{R}$) であって

$$\lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\int_{X_r} dd_c\tau\wedge\omega}{g(r)} < +\infty$$

を満たすとする. 但し $g(r)$ は正値非減少函数で

$$\int_s^{+\infty} \frac{dt}{g(t)} = +\infty$$

を満たすものとする.

i) この時Xから n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ への非定

ii) X 上の neg subharmonic fct w.r.t. ω は定数に限る

数有理型写像 $f: X \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ に対して f の像は $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ 内のほとんど全ての超平面と交差する（Casorati–Weierstraßの定理）. 更に ω の係数が X 上到る所非退化ならば X 上の C^2 級の ω に関して劣調和な函数 τ i.e. $dd_c \tau \wedge \omega \geq 0$ で

$$\lim_{r \to +\infty} \sup \frac{m(\tau, r)^2 \int_{M_r} dd_c \tau \wedge \omega}{g(r)} < +\infty$$

を満たすものは定数に限る

系として次の定理を得る

定理　$A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ を純 $m \geq 1$ 次元の既約かつ被約な解析集合とする. 函数

$$n(A, r) := \int_{A \cap \{\|z\| < r\}} \overset{m}{\wedge} dd_c \log(1 + \|z\|^2)$$

が

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{dt}{t\, n(A, t)} = +\infty$$

を満たすならば A 上有理型写像に関して Casorati–Weierstraßの定理が成立しかつ C^2 級の負値多重劣調和函数は定数に限る

28

複素ファイバー空間におけるある Dolbeault 同型とその応用

梅野高司　九州産大・養
風間英明　九大・養

Mを、底空間を複素多様体（パラコンパクト）Nで、ファイバーをスタイン多様体とする局所自明なファイバー空間とする。また$E \to M$を正則なベクトル・バンドル、$\mathcal{F}$をM上C^∞、ファイバーで正則な関数の芽の層、$\mathcal{F}^{r,p}(E)$をEに値をもつ$\mathcal{F}$係数の(r,p)-形式の芽の層、$\Omega^r(E)$をEに値をもつ正則r-形式の芽の層とする。

補題　$H^q(M, \mathcal{F}^{r,p}(E)) = 0, \quad q \geq 1.$

定理 1

$$H^p(M, \Omega^r(E)) \cong \{\varphi \in H^0(M, \mathcal{F}^{r,p}(E)) \mid \bar{\partial}\varphi = 0\}/\bar{\partial} H^0(M, \mathcal{F}^{r,p-1}(E))$$

$(\ p \geq 1\ )$. 特に　$H^p(M, \Omega^r(E)) = 0,\ p \geq \dim_{\mathbf{C}} N + 1.$

この応用として複素リー群Gの　$\bar{\partial}$-コホモロジーが得られる。G^0をGの極大トロイダル部分群とすると、G/G^0はスタイン群であり、$G \to G/G^0$はファイバーをG^0とするファイバー束である。また、Gは複素トーラス$\mathbf{T}^q$上の、ファイバーをスタイン群とするファイバー束とみることができる。従って、G上に層$\mathcal{F}$が定義され、定理 1 が応用できる。

定理2　複素リー群Gに対し、次の条件は同値である。

1. G^0 が *finite type* である。
2.

$$H^p(G,\Omega^r) \cong$$

$$\begin{cases} \bigoplus_{s+t=r} H^0(G/G^0,\Omega^s) \bigotimes \mathbf{C}\{dz^J \wedge d\bar{z}^K \mid |J|=t,\ |K|=p\}, \\ \quad \mathit{for}\ 1 \leq p \leq q \\ 0, \quad \mathit{for}\ p \geq q+1 \end{cases}$$

ここでdz, $d\bar{z}$はG^0上の *global 1-form* である。

3. $H^p(G,\Omega^r)$ は *Hausdorff*位相をもつ（$p, r \geq 0$）。
4. $\bar{\partial} H^0(G,\mathcal{F}^{r,p-1})$ は $H^0(G,\mathcal{F}^{r,p})$ の閉部分空間。

29 Cheeger-Goresky-MacPherson 予想

大沢健夫　名大理

Let X be a compact complex space of dimension n. We assume X is reduced and irreducible. As is well known X admits a stratification $X_n = X \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_0 \supset X_{-1} = \phi$ such that each stratum $X_i - X_{i-1}$ is either empty or an i-dimensional complex manifold and that $X_i - X_{i-1}$ admits a neighbourhood U_i with a (topological) retraction $U_i \longrightarrow X_i - X_{i-1}$ which is a fiber bundle (whose fibers are not necessarily topological manifolds). Let $C_i(X)$ be the set of i-chains generated by the real analytic simplexes and let $IC_i(X) = \{\xi \in C_i(X);\ \dim|\xi \cap X_k| \le i+2k-2n$ and $\dim|\partial\xi \cap X_k| \le i+2k-2n-1$ for all $k\}$ and define $IH_i(X) := H_i(IC.(X))$. Then $IH_i(X)$ does not change if one replaces the stratification by a finer one, so that it is a topological invariant (Goresky-MacPherson). As a candidate for the analytic representative of IH(X), the L^2 cohomology group of X was proposed in [CGM]. In a series of papers [O-1,2,3] the author has verified their conjecture affirmatively in case X admits only isolated singularities.

Recently it turned out that the method of [O-2] and [O-3] can be used without any significant changes to prove the following.

Theorem There is a canonical isomorphism between IH(X) and the L^2 cohomology group of X.

By a sheaf theoretic characterization of IH(X) and a theorem of Mostowski assuring the existence of a Lipschitz stratification of X, the proof of Theorem is reduced to showing local L^2 vanishing theorems which can be shown by a similar method as in the isolated singularity case.

Unfortunately it is not clear at the moment whether our result gives a natural Hodge structure of IH(X) in case X is a Kähler space. We can reduce it to a geometric problem concerning the equisingularity.

References

CGM Ann.Math.Stud. 102, Princeton Univ. Press 1982, 303-340.
O-1 Publ.RIMS 23 (1987),265-274. Supplement: to appear.
O-2 Math.Z. 206 (1991), 219-224.
O-3 Advanced stud.in pure math. 22,1991, Recent developments in differential geometry, ?-?+16.

30

5次元 Picard modular 群と $\mathbb{P}^1$上の 8点の配置の空間

松本 圭司　　九大 理 数学

吉田 正章　　九大 理 数学

6×6 行列 $A = (a_{jk})$ を以下のように定める。

$a_{jj}=-2$, $a_{jk}=\overline{a}_{kj} = -1+i$ $(j<k)$, where $i = \sqrt{-1}$.

A で定まる $V = \mathbb{C}^6$上の Hermitian form $(u,v) = u^*A\ v$ の符号は (5-,1+) である。

$$V^+ = \{v\in V \mid (v,v)>0\},\quad V^- = \{v\in V \mid (v,v)<0\},$$

$$D = V^+/\mathbb{C}^*$$

とおく。D の自己同型群 Aut(D) は $\{g\in GL(V) \mid (gu,gv)=(u,v)\}/\{\text{center}\}$ である。$\alpha\in V^-$ に対し α に関する鏡映 R_α を

$$v \mapsto v - 2\{(\alpha,v)/(\alpha,\alpha)\}\alpha$$

で定める。R_α は A による Hermitian form を保ち R_α の mirror $\alpha^\perp := \{v\in V \mid (\alpha,v)=0\}$ を点ごとに fix する。Picard modular group Γ とその principal congruence subgroup $\Gamma(1-i)$ を以下のように定める。

$$\Gamma = \{g\in GL(6,\mathbb{Z}[i]) \mid g^*\ A\ g = A\},$$

$$\Gamma(1\mp i) = \{g\in\Gamma \mid g \equiv I_6 \mod(1-i)\}.$$

次の定理が成立する。

定理 (1) $\Gamma(1-i)$ は、$e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,c_6=(0,\cdots,0,1)$, $e_j-e_k(1\le j<k\le 6)$ に関する鏡映たちで生成される。

(2) $\Gamma(1-i)$ は、Aut(D) の lattice であり 35 cusps をもつ。

(3) $\Gamma/\Gamma(1-i)$ は、8次対称群 S_8 と同型であり 35 cusps に transitive に作用する。

(4) D_{reg} を $\Gamma(1-i)$ が free に作用する D の subset とすると、D_{reg} は $D-\cup\{\alpha^{\perp}\cap D|\alpha\in\mathbb{Z}[i]^6,\ (\alpha,\alpha)=-2\}$ で与えられる。

(5) $D_{reg}/\Gamma(1-i)$ は $\mathbb{P}^1$上の異なる8点の配置の空間 X_8 と同型ある。X_8 は次のような商空間として与えられる。

$$GL(2,\mathbb{C})\backslash\{\begin{pmatrix}x1,\cdots,x8\\ y1,\cdots,y8\end{pmatrix} \mid \begin{vmatrix}xj & xk\\ yj & yk\end{vmatrix}\neq 0\ \ 1\le j<k\le 8\}/(\mathbb{C}^*)^8.$$

(6) X_8 から D_{reg} への(多価)逆写像は、次の積分で与えられる。

$$\int_{cj}\Pi_{k=1}^{8}\{(xk)t-yk\}^{-1/4}dt \qquad 1\le j\le 6,$$

ここで cj たちは、適当に選ばれた線型独立な cycles.

Analytic automorphisms of $\mathbf{C}^2$ which preserve the coordinate axes

31

西村保一郎

大阪医科大学

(1) Dを $\mathbf{C}^n$の領域とする。D上の非負多重劣調和関数でルベーグ可積分なものは定数 0 しかないとき，Dを C 型領域 Dと呼ぶ。$n=1$ のときは，C 型領域は $\mathbf{C}$ だけである。C 型領域という性質はヤコビアンが定数の双正則写像で保たれる。以下 $n=2$ とする。[2] ではヤコビアンが定数の単射正則写像についての定理を示した。今度そのときの方法を，ヤコビアンが定数とは限らない単射正則写像に対して用いて，次の定理とその応用を得たので報告したい。

(2) rを正数として，$A(r)=\{(x,y)\in\mathbf{C}^2; |y|\leqq 1, |x||y|^r\leqq 1\}$,

$A'(r)=\{(x,y)\in\mathbf{C}^2; 0<|x||y|^r<1, |y|<1\}$,

$E=\{|x|\leqq 1, |y|=1\}\cup\{x=0, |y|\leqq 1\}\cup\{y=0\}$ と置く。

定理． $0<r\leqq 1$ とする。Dを $\mathbf{C}^2$の C 型領域 Dとする。$S:D\to\mathbf{C}^2$ は単射正則写像で $S(D)\cap E=\phi$を満たすものとする。もし $(x,y)\in S^{-1}(A'(r))$ で常に $|JS(x,y)|\geqq L$ となる正数 L があれば，実は $S(D)\cap A(r)=\phi$が成り立つ。

(3) (7),(8) では，上の定理の応用を述べる。そのための準備を書く。

区間 $I\subset[0,\infty]$ に対して$\Lambda=\mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+$の部分集合を
$\Lambda_I=\{(a,b)\in\Lambda; b=ar, r\in I\}$ と定める。常に $(0,0)\in\Lambda_I$である。
$\mathbf{C}^2$上の正則関数全体のつくる環 $\mathcal{O}(\mathbf{C}^2)$ の部分環 $\mathcal{O}_I$を

$\mathcal{O}_I=\{h(x,y)=\sum h_{ab}x^a y^b\in\mathcal{O}(\mathbf{C}^2); h_{ab}=0\ \ for\ \forall(a,b)\notin\Lambda_I\}$.
と定める。$\mathcal{O}_I$は定数関数の全体 $\mathbf{C}$ を含む。

(4) $\mathbf{C}^2$の正則自己同型全体のつくる群を $Aut(\mathbf{C}^2)$，座標軸を保つ正則自己同型全体のつくる部分群を AXとする:

$AX=\{T(x,y)=(xe^{u(x,y)}, ye^{v(x,y)})\in Aut(\mathbf{C}^2); u,v\in\mathcal{O}(\mathbf{C}^2)\}$.

区間 $I\subset[0,\infty]$ に対して，次のように置く。

$AX_I=\{T(x,y)=(xe^{u(x,y)}, ye^{v(x,y)})\in AX; u,v\in\mathcal{O}_I\}$.

(5) **命題．** AX_Iは群になる。

(6) $r\in\mathbf{Q}_+\cup\{\infty\}$，$I=[r,r]=\{r\}$ のとき，AX_Iの代わりに AX_rとも書く。$\mathbf{C}^*=\mathbf{C}\setminus\{0\}$ と置く。1 変数の整関数の全体を $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ と書く。

補題. (a) $AX_0 = \{(cx, ye^{\chi(x)}); \chi \in \mathcal{O}(\mathbf{C}), c \in \mathbf{C}^*\}$.

(b) $k, l \in \mathbf{N}$, $r = l/k$のとき

$AX_r = \{(xe^{l\chi(x^k y^l)}, cye^{-k\chi(x^k y^l)}); \chi \in \mathcal{O}(\mathbf{C}), c \in \mathbf{C}^*\}$.

(c) $AX_\infty = \{(xe^{\chi(y)}, cy); \chi \in \mathcal{O}(\mathbf{C}), c \in \mathbf{C}^*\}$.

(7) 定理. 区間 $I \subset [0, \infty]$ は $1 \in I$を満たすとする。
$T \in AX$が $JT \in \mathcal{O}_I$を満たせば，$T \in AX_I$となる。

注意. 条件 $1 \in I$は必要である。

(8) 系. $\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を正則関数，$T \in AX$とする。
もし $JT(x, y) = e^{\alpha(xy)}$ならば$\alpha$は定数で，$T$はつぎの形の写像になる。
$T(x, y) = (xe^{\chi(xy)}, cye^{-\chi(xy)})$. ここに$\chi$は１変数の整関数である。

(9) E. Andérsen [1] は $\mathbf{C}^n$ の正則自己同型に関して，著しい結果を示した。我々はこの方法を用いて，次の定理を証明する。$\mathbf{C}^2$上の有理型２－形式$\omega = dx \wedge dy/xy$を考える。AXの部分群 APを $AP = \{T \in AX; T^*\omega = \omega\}$と定める。

定理. $\bigcup_{r \in \underset{+}{\mathrm{Q}} \cup \{\infty\}} AX_r$ で生成される群は APで稠密である。

注意. $AP = AX$が成り立つかどうかは，未解決問題である。

参考文献

[1] E. Andersén, Volume-preserving automorphisms of $\mathbf{C}^n$, Complex Variables, **14** (1990), 223–235.

[2] Y. Nishimura, Applications holomorphes injectives à jacobien constant de deux variables, J. Math. Kyoto Univ., **26** (1986), 697–709.

32

基本種数２以上の正規２次元特異点の最小性について

都丸 正　　群馬大学医療技術短期大学部

以下、(X, x) を２次元正規特異点、$\pi : (\tilde{X}, A) \longrightarrow (X, x)$ を特異点解消とする。(X, x) の基本的な不変量として、幾何種数 $P_g(X, x)$, 算術種数 $P_a(X, x)$, 基本種数 $P_f(X, x)$ がある。これらの間には (i) $p_f \leqq p_a \leqq p_g$, (ii) $p_f = 0 \Leftrightarrow p_a = 0 \Leftrightarrow p_g = 0$, (iii) $p_f = 1 \Leftrightarrow p_a = 1$ のような関係がある。(iii) の条件を満たすとき、(X, x) を楕円型特異点という。楕円型特異点については P. Wagreich [6], H. Laufer [2], S.S.T.-Yau [8], M. Tomari [4] 等により深く研究されている。[2] で Laufer は $p_a(E) = p_f$ なる条件をみたす最小の正サイクル E が一意に存在することを示し、$Z = E$ を満たす (X, x) を最小楕円型特異点と呼び、次のような同値条件を得た。

定理 (Laufer, [2]) π を最小解消とするとき、次は同値：(i) (X, x) は最小楕円型, (ii) A の任意の既約成分 A_i に対し $A_iZ = -A_iK_{\tilde{X}}$, (iii) (X, x) は楕円型特異点で A の任意の１次元連結部分解析集合は有理特異点の例外集合である, (iv) $p_g(X, x) = 1$ で (X, x) は Gorenstein 。

以下において、$p_f \geqq 2$ であるような特異点についても、Laufer の結果に類似するようなことはいえないかを考える。

定義 1. $p_f(X, x) \geqq 1$ のとき、正サイクル E で $p_a(E) = p_f$ をみたすもののうち最小なものを、最小サイクルという。

命題 2. $p_f(X, x) \geqq 1$ なる全ての、２次元正規特異点およびその任意の特異点解消について、一意に存在する。

$\sigma : (\bar{X}, \bar{A}) \longrightarrow (\tilde{X}, A)$ を点 $p \in A$ を中心とする二次変換とする。このとき、例外集合上のサイクルとして重要である基本サイクル Z、標準サイクル K は A 上のものの引き戻しと、$\bar{A}$ のものではどのような関係があるかについては、基本サイクルについては Wagreich 、標準サイクルについては代数幾何学のどの教科書でも見ることが出来るが、最小サイクルについてはつぎのような命題が得られる。

命題 3. $\sigma^* E - L$ は $\bar{A}$ 上の最小サイクルである。

命題 4. (X, x) が numerical Gorenstein 特異点で $p_f \geqq 1$ をみたすもので、最小楕円型でないとする。このとき、最小特異点解消または最小良特異点解消において、$-K \geq Z + E$ となる。

次の定理は、$p_f = 2$ については吉永－大柳[9]、Yau [8]、一般の場合 $p_f \geqq 2$ については渡辺（公）[7]、日高－渡辺（敬）[1] により得られた。

定理. $p_f \geqq 2$ なる Gorenstein 特異点について、$p_g \geqq p_f + 1$ 。

これらの結果から、$p_f \geqq 2$ の特異点 (X, x) について次のような最小性の条件を考える。

定義 **5.**

I A 上 $Z = E$。

II A の既約成分からつくられる1次元解析集合$\bar{A}$を、blowing-down してできる特異点の基本種数はつねに $p_f(X, x)$ より小さい。

III (X, x) は numerically Gorenstein で、$-K = Z + E$。

IV (X, x) は Gorenstein で、$p_g = p_f + 1$ 。

これらの4条件の間の関係について知りたい。I → II については簡単に示せる。ただし、この逆については反例がありだめ。さらに、

定理 **6.** (X, x) が Gorenstein で$-K = Z + E$ を満たすなら、$p_g = p_f + 1$ となる。

よって、Gorenstein 特異点については、III → IV がいえる。しかしながら、I と III 、および II と IV については Gorenstein 特異点に限っても互いに独立である。そのような条件間のギャプを与える具体例については講演で述べる。

REFERENCES

[1]. F. Hidaka and K-i. Watanabe, Normal Gorenstein surface surfaces with ample canonical divisor, Tokyo J. Math., 4 (1989),319-330.

[2]. H. Laufer, On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. 99, No6 (1977), 1257-1295.

[3]. M. Reid, Elliptic Gorenstein singualrities of surfaces, Preprint, 1978.

[4]. M. Tomari, A p_g-Formula and Elliptic Singularities, Publ. Res. Inst. Math. Scien., Kyoto Univ. 21 81985), 297-354.

[5]. T. Tomaru, On minimalities for normal surface singularities with fundamental genus $p_f \geqq 24$, *Preprint.*

[6]. P. Wagreich, Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math. 92, (1970), 51-72.

[7]. Ki. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities *I*, Math. Ann., 250, (1980), 65-94.

[8]. S.S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., (2), 257, 1980, 269-329.

[9]. E. Yoshinaga and S. Ohyanagi, A crieterion for 2-dimensional normal singularities to weakly elliptic, Sci. Rep. Yokohama National Univ., Sec 2, 26 (1979), 5-7.

33

(弱)Brieskorn 型２次元超曲面特異点の最小性、及び Yau 系列

都丸 正　群馬大学医療技術短期大学部

擬斉次多項式 $f \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$とは、$w_0, \dots, w_n$ をある有理数とするとき、$f = \sum_{w_0 i_0 + \cdots + w_n i_n = 1} c_{i_0 \dots i_n} z_0^{i_0} \dots z_n i_n$ と表わせるようなものをいう。このとき、任意の i について $w_i = \frac{1}{a_i}$ （ a_iは２以上の自然数）がいえるなら、fを重み $(a_0, \dots, a_n)$ をもつ弱 Brieskorn 型ということにする。例えば、Brieskorn 型の多項式（ $x_0^{a_0} + \cdots + x_n^{a_n}$ ）は弱 Brieskorn 型である。

定理 **1.** $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$を重み (a_0, a_1, a_2) をもつ弱 Brieskorn 型の多項式とし、$(X, x) = \{f = 0\} \subseteq \mathbb{C}^3$ は原点に孤立特異点をもつとする。

(i) $a_2 \geqq l.c.m.(a_0, a_1)$ であるとき、

$$p_f(X, x) = \frac{1}{2}\{(a_0 - 1)(a_1 - 1) - (a_0, a_1) + 1\}$$ となる。

(ii) $l.c.m.(a_0, a_1) \leqq a_2 < 2l.c.m.(a_0, a_1)$ が成り立つならば、最小性の条件 I をみたす（ i.e., $Z = E$ ）。

(ii) については、楕円型特異点のときには、Laufer および Reid による超曲面最小楕円型特異点の分類から知られている。(i) の証明については、泊－渡辺（敬）[2]による星型例外集合を持つ特異点についての研究の過程で、泊により得られた基本種数についての公式を使う。

S.S.T.-Yau [4]は楕円型特異点 (X, x) について楕円列なるものを定義した。$p_f \geqq 2$ なる特異点についても、これの類似を Yau の定義を形式的に拡張しておき Yau 系列と名づける。

定義 **2.** $p_f(X, x) \geqq 2$ とする。(X, x) の特異点解消は最小良解消をかんがえておく。$ZE < 0$ なら $\{Z\}$ を **Yau** 系列とする。$ZE = 0$ なら、その例外集合 A の既約成分からなる A の部分集合 B_1で、$suppE \subseteq B_1$ で、B_1の任意の既約成分 A_iについて $ZA_i = 0$ をみたすものを考える。このとき、$Z_{B_1}E < 0$ なら **Yau** 系列は $\{Z, Z_{B_1}\}$ とする。$Z_{B_1}E = 0$ ならば、B_1の既約成分からなる B_1の部分集合 B_2で、$suppE \subseteq B_2$で、B_2 の任意の既約成分 A_iについて $Z_1 A_i = 0$ をみたすものを考える。このとき、$Z_{B_2}E < 0$ なら **Yau** 系列は $\{Z, B_1, Z_{B_2}\}$ とする。$Z_{B_2}E = 0$ な

らば、このような操作を繰り返す。この操作は有限回（ m 回）で終了する。このとき、$\{Z, Z_{B_1}, \ldots, Z_{B_m}\}$ を Yau 系列という。

Brieskorn 型の多項式で定義されるある種の特異点の **Yau** 系列を調べると、標準サイクルと基本サイクルの関係、及び、幾何種数 p_g と系列との関係において、楕円系列の時 **Yau** が得た結果に類似なことがいえることを述べる。

REFERENCES

[1]. M. Reid, Elliptic Gorenstein singualrities of surfaces, Preprint, 1978.

[2]. M. Tomari and K-i. Watanabe, Filtered Rings, Filtered Blowing-Ups and Normal Two-Dimensional Singularities with "Star-Shaped" Resolution. Publ. Res. Inst. Math. Soc., Kyoto Univ., 25, (1989), 681-740.

[3]. T. Tomaru, Cyclic quotients of 2-dimensional quasi-homogeneous hyper-surface singularities. Preprint.

[4]. S.S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., (2), 257, 1980, 269-329.

特別講演

PURELY ELLIPTIC SINGULARITIES

渡辺公夫　筑波大学 数学系

In the theory of two-dimensional singularities, simple elliptic singularities and cusp singularities are regarded as the next most reasonable class of singularities after rational singularities. What are natural generalizations in three-dimensional case of those singularities.

Let (X,x) be a germ of a normal isolated singualrity of dimension n. Suppose that X is a Stein space. Let $\pi : (M,E) \longrightarrow (X,x)$ be a resolution of the singularity. Then for $1 \leq i \leq n-1$, $\dim (R^i\pi_*\mathcal{O}_M)_x$ is finite since π is an isomorphism outside of x and hence $R^i\pi_*\mathcal{O}_M$ has support on x. They are independent of the resolution. In fact

$$\dim (R^i\pi_*\mathcal{O}_M)_x = \dim H^{i+1}_{\{x\}}(X,\mathcal{O}_X) \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

and

$$\dim (R^{n-1}\pi_*\mathcal{O}_M)_x = \dim \Gamma(X-\{x\},\mathcal{O}(K))/L^2(X-\{x\}),$$

where $L^2(X-\{x\})$ is the subspace of $\Gamma(X-\{x\},\mathcal{O}(K))$ consisting of n-forms on $X - \{x\}$ which are square integrable near x.

We denote them by

$$h^i(X,x) := \dim (R^i\pi_*\mathcal{O}_M)_x \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

and

$$p_g(X,x) := \dim (R^{n-1}\pi_*\mathcal{O}_M)_x.$$

The invariant $p_g(X,x)$ is called the geometric genus of (X,x).

Definiton 1 ([W1]). For each positive integer m, the m-genus of a normal isolated singularity (X,x) in an n-dimensional analytic space is defined to be

$$\delta_m(X,x) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X-\{x\},\mathcal{O}(mK))/L^{2/m}(X-\{x\}),$$

where K is the canonical line bundle on $X - \{x\}$, and $L^{2/m}(X-\{x\})$ is the set of all holomorphic m-ple n-forms on $X - \{x\}$ which are $L^{2/m}$-integrable at x.

The m-genus δ_m is finite and does not depend on the choice of a Stein neighborhood X.

Definition 2 ([W1]). A singularity (X,x) is said to be purely elliptic if $\delta_m(X,x) = 1$ for every positive integer m.

When X is a two-dimensional analytic space, purely elliptic singularities are quasi-Gorenstein singualrities, i.e., there exists a nowhere-vanishing holomorphic 2-form on $X - \{x\}$ (see Ishii [I2]). In higher dimensions, however, purely elliptic singularities are not always quasi-Gorenstein.

In the following, we assume that (X,x) is quasi-Gorenstein. Let $\pi : (M,E) \longrightarrow (X,x)$ be a good resolution. Then

$$K_M = \pi^* K_X + \sum_{i\in I} m_i E_i - \sum_{j\in J} m_j E_j ,$$
$$\text{with } m_i \geq 0,\ m_j > 0,\ I \cap J = 0 ,$$

where $E = \cup E_i$ is the decomposition of the exceptional set E into irreducible components. Ishii [I1] defined the essential part of the exceptional set E as $E_J = \sum_{j\in J} m_j E_j$, and showed that if (X,x) is purely elliptic, then $m_j = 1$ for all $j \in J$.

Theorem 3 ([W2]). Let $\pi : (M,E) \longrightarrow (X,x)$ be a good resolution of a normal isolated quasi-Gorenstein singularity (X,x) of dimension $n \geq 2$. Denote $\pi^{-1}(x)_{red}$ by E and decompose E into irreducible components E_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Then the following three conditions are equivalent:

(i) $\delta_m(X,x) \leq 1$ for any $m \in \mathbb{N}$.

(ii) (X,x) is a Du Bois singularity.

(iii) $K_M = \pi^* K_X + \sum m_i E_i$ with $m_i \geq -1$ for all i.

Definitin 4 (Ishii [I1]). A quasi-Gorenstein purely elliptic singularity (X,x) is of $(0,i)$-type if $H^{n-1}(E_J,\mathcal{O})$ consists of the $(0,i)$-Hodge component $H^{0,i}(E_J)$, where

$$\mathbb{C} \simeq H^{n-1}(E_J,\mathcal{O}) = Gr_F^0 H^{n-1}(E_J) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^{0,i}(E_J)$$

in the sense of Deligne's canonical mixed Hodge structure.

Let A be an integral divisor whose support is contained in the exceptional set E. Define the intersection number of $c_2(M)$ with $A = \sum a_i E_i$ to be

$$c_2(M) \cdot A = \sum a_i \{c_2(E_i) + c_1(E_i) c_1(N_{E_i})\},$$

where N_{E_i} is the normal bundle of E_i in M.

Theorem 5 ([W3]). Let (X,x) be a quasi-Gorenstein normal isolated singularity of dimension 3, then

$$2\{p_g(X,x) - \frac{-K_M \cdot c_2(M)}{24}\} = \dim_{\mathbb{C}} H^1(M,\mathcal{O}).$$

Consequently quasi-Gorenstein purely elliptic singularities of dimension 3 are classified into 6 classes.

[1] $h^1(X,x) = 2p$, $(0,0)$-type.

$p = 1 \longrightarrow$ Hilbert modular cusp singularities.

$p > 1 \longrightarrow$ Tsuchihashi cusp singularities ([T]).

[2] $h^1(X,x) = 2$, $(0,1)$-type.

[3] $h^1(X,x) = 2$, $(0,2)$-type.

Example 6. Consider the singularity x of the affine cone over an abelian surface. Then (X,x) is a purely elliptic singularity of $(0,2)$-type, which is a quasi-Gorenstein singularity, but not Gorenstein singularity.

[4] $h^1(X,x) = 0$, $(0,0)$-type

$x^p + y^q + z^r + w^s + xyzw = 0 \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1)$.

[5] $h^1(X,x) = 0$, $(0,1)$-type.

$x^3 + y^3 + z^3w^3 + z^7 + w^7 = 0$

[6] $h^1(X,x) = 0$, $(0,2)$-type

Definition 7. A three-dimensional singularity (X,x) is a simple K3 singularity if the following two equivalent (Watanabe-Ishii [WI]) conditions are satisfied:

(i) (X,x) is a Gorenstein purely elliptic singularity of $(0,2)$-type.

(ii) The exceptional divisor D is a normal K3 surface for any $\mathbb{Q}$-factorial terminal modification $\sigma : (Y,D) \longrightarrow (X,x)$.

Example 8. Let $f(x,y,z,w)$ be a quasi-homogeneous polynomal of type $(p,q,r,s;h)$ with $p + q + r + s = h$, and suppose $f(x,y,z,w) = 0$ defines an isolated singularity at the origin in $\mathbb{C}^4$. Then the origin is a simple K3 singularity.

Let (X,x) be a simple K3 singularity. Consider a composite of partial resolutions $(M,E) \xrightarrow{\rho} (Y,D) \xrightarrow{\sigma} (X,x)$, where σ is a $\mathbb{Q}$-factorial terminal modification and ρ is a good resolution.

Let E_0 be the proper transform of D.

Proposition 9. The *α-blow-up* gives a $\mathbf{Q}$-factorial terminal modification of simple K3 singularities defined by a quasi-homogeneous polynomial.

Theorem 10 ([W4]). Let σ_i be the i-th elementary symmetric polynomial in p, q, r and s. Then

$$(1) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_4} = -(\rho^* K_Y)^3,$$

$$(2) \quad \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_4} = -c_2(M) \cdot \rho^* K_Y.$$

Theorem 11 ([W4]). In the same notation as above,

$$\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_4} = 24 - \sum \{r(y_i) - \frac{1}{r(y_i)}\},$$

where the summation $\sum$ is taken over all terminal quotient singular points of indices $r(y_i)$ on Y.

Example 12. Consider the singularity $x^2+y^3+z^7+w^{42} = 0$. The minimal resolution of this singularity is unique and has three terminal singularities, which are of indices 2, 3 and 7. Then

$$\frac{42 \times 545}{1764} = 24 - \{(2-\frac{1}{2}) + (3-\frac{1}{3}) + (7-\frac{1}{7})\}.$$

References

[I1] S. Ishii, On isolated Gorenstein singularities, Math. Ann. 270 (1985), 541-554.

[I2] S. Ishii, Two-dimensional singularities with bounded plurigenera δ_m are $\mathbf{Q}$-Gorenstein singularities, Contemporary Math. 90 (1989), 135-145.

[T] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. 35

(1983), 607-639.

[W1] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities, I, Math. Ann. 250 (1980), 65-94.

[W2] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities, II, in Complx Analytic Singularities (T. Suwa and P. Wagrech, eds.), Advanced Studies in Pure Math. 8, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986, 671-685.

[W3] K. Watanabe, Riemann-Roch Theorem for normal isolated singularities, preprint, 1989.

[W4] K. Watanabe, Distribution formula for termional singularities on the minimal resolution of a quasi-homogeneous simple K3 singularity, Tohoku Math. J. 43 (1991), 275-288.

[WI] K. Watanabe and S. Ishii, On simple K3 singularities (in Japanese), in Proc. of Conf. on Algebraic Geometry at Tokyo Metropolitan Univ., 1988 (N. Sasakura, ed.), 20-31.