日本数学会

1991年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

1991年4月

於
慶應義塾大学理工学部

目次

第VII会場　函数論

9.30～12.00

1	西本勝之	(日大工)	Nishimoto's fractional calculus: Its applications to differential equations, and some infinite sums	15
2	谷口彰男 權五常 曹洛殷	(日大文理) (慶星大) (釜山水産大)	Radii problems for sections of convex and starlike functions of order α	15
3	谷口彰男 山川陸夫 權五常 曹洛殷	(日大文理) (芝浦工大) (慶星大) (釜山水産大)	A certain subclass of p-valently analytic functions with negative coefficients	15
4	斎藤斉	(群馬工業高専)	On an estimate of the real part of certain analytic functions	10
5	山川陸夫	(芝浦工大)	ある正則函数族の星型条件	10
6	尾和重義	(近畿大理工)	Coefficients of inverse functions for some subclasses of analytic functions	15
7	尾和重義	(近畿大理工)	Notes on Ruscheweyh derivatives	15
8	尾和重義 関根忠行 山川陸夫 谷口彰男 斎藤斉 布川護	(近畿大理工) (日大薬学) (芝浦工大) (日大文理) (群馬工業高専) (群馬大教育)	Notes on quasi-Hadamard products	15
9	山下愼二	(都立大理)	Convexité et inégalités différentielles concernant la densité de Poincaré	10
10	山下愼二	(都立大理)	The Poincaré density, Lipschitz continuity, and superharmonicity	15
11	山下愼二	(都立大理)	La densité de Poincaré, la continuité de Lipschitz, et les domaines de Bloch	10

13.30～15.45

12	邊斗源 斎藤三郎	(群馬大工)* (群馬大工)	Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces	15
13	邊斗源 斎藤三郎	(群馬大工)* (群馬大工)	Analytic extensions of functions on the real line to entire functions	15
14	相川弘明	(群馬大工)*	Quasiadditivity of Riesz capacity	15
15	村澤忠司	(京都府大)	Some properties about products of harmonic spaces	15

13.30～15.45

16	水田義弘	(広島大総合科)	ソボレフ＝オーリッツ関数の球面平均	15
17	水田義弘	(広島大総合科)	調和関数の境界値	15
18	二宮信幸		ポテンシャル論における最小変分の方法	15
19	山口博史	(滋賀大教育)	平衡ベクトルポテンシャルの存在	15

16.00～17.00　特別講演

大竹博巳	(京大理)	極値擬等角写像と Poincaré 級数	

9.20〜12.00

20	大数 卓		Riemann の写像定理，その他	5
21	高橋 世知子	(奈良女大理)	Extended interpolation problem for finitely connected domains	15
22	吉田 英信	(千葉大理)	概周期有理型関数について	15
23	占部 博信	(京都教育大)	整関数の因子の意味での pseudo-primeness と有理型関数の factorization について	15
24	戸田 暢茂	(名工大)	On algebroid solutions of some algebraic differential equations in the complex plane	15
25	林 実樹広	(北大理(教養))	2次元解析構造をもつ Riemann 面のコロナ	15
26	志賀 啓成	(東工大理)	Riemann 面における H^1-BMO duality について	15
27	佐藤 宏樹	(静岡大理)	Purely hyperbolic two-generator groups に関する Jørgensen の不等式について	15
28	松崎 克彦	(東工大理)	Teichmüller 空間の境界上にない無限生成 “b-group”	15
29	谷川 晴美	(東工大理)	単位円板上の正則写像の境界挙動と剛性	15

13.30〜15.40

30	笹山 浩良	(笹山研)	On generalized power series in hypercomplex n-tuple spaces	10
31	城崎 学	(阪府大工)	The defect relation for moving targets in subgeneral position	15
32	相原 義弘 野口 潤次郎	(東芝総合研) (東工大理)	局所対称空間のコンパクト化への有理型写像の値分布	15
33	相原 義弘	(東芝総合研)	局所対称空間のコンパクト化への有理型写像の一意性定理	15
34	上田 哲生	(京大教養)	線型項が identity である局所変換	15
35	赤堀 隆夫 宮嶋 公夫	(新潟大理) (鹿児島大教養)	An analogue of Tian-Todorov-Bogomolov’s theorem on the deformation of CR-structures	15
36	志賀 弘典	(千葉大理)	On the transcendency of the values of the modular function at algebraic points	15
37	渡辺 公夫 石井 志保子	(筑波大数学) (東工大理)	A geometric characterization of a simple $K3$-singularity	15

15.50〜16.50　特別講演

小松 玄	(阪大理)	ベルグマン核の漸近解析について	

1

Nishimoto's fractional calculus: Its applications to differential equations, and some infinite sums

by

Katsuyuki Nishimoto College of Engng.
Nihon Univ.

Abstract

In this article, by using the author's fractional calculus, fractional calculus of elementary functions, and of products, applications to ordinary differential equations, and some infinite sums which are obtained as serendipities in his fractional calculus, are reported.

§1. Introduction

(I) Preface

Integrations and differentiations of arbitrary order are commonly called "Fractional Calculus". This name is due to L'Hosptal's question "What if n be 1/2?" to Leibnitz (Sep. 30, 1695) when the notation d^ny/dx^n ($n\in Z^+$) for n-th order derivative was adopted by Leibnitz.

The first presentation by this author on "Fractional Calculus" was given at the branch field of complex analysis at the meeting of the Mathematical Society of Japan, March, 1971. Then it past exactly 20 years since the first presentation of the author.

When the author's talk was closed, a professor in the audience made a comment about the author's talk that the problems for "Fractional Calculus" have been solved perfectly already, then there are no problems for research study in the branch field of fractional calculus.

However, after this commentary three international conferences on the subject "Fractional Calculus" were held.

The first international Conference on the subject was held June 15th and 16th, 1974 at the University of New Haven (U.S.A., Prof. B. Ross director, and the reports at this conference were published as Lecture Notes in Mathematics Vol. 457 (Edited by B. Ross) by Springer (1975).

The second conference on the subject was held from August 5th to 11th, 1984 at the University of Strathclyde (U.K. Prof. G.F. Roach director), and many fruits that developed from the conference were published as Research Notes in Mathematics Vol. 138 (Edited by G.F. Roach and A.C. McBrid) by Pitman (1985).

The third one was held from May 29th to June 1st, 1989 at the centre of Nihon University (Tokyo) as an event of the 100th anniversary of Nihon University (Prof. K. Nishimoto director)(39 experts in this field attended the conference from 16 countries around the world). The proceedings for this conference were published by the College of Engineering, Nihon University (Edited by K. Nishimoto) at the end of February, 1990.

(II) Fractional calculus of the functions of a single variable

In previous volumes and a paper ([1],[2], and [10]) we had defined the fractional differintegration of the function of one variable as follows.

References

[1] K. Nishimoto: Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Descartes Press (Japan).
[2] K. Nishimoto (Editor); Fractional Calculus and Its Applications, International (Tokyo) Conference Proc. (1990), Coll. of Engng., Nihon Univ.
[3] B. Ross (Editor); Fractional Calculus and Its Applications. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 457, Springer (1975).
[4] A.C. McBride and G.F. Roach (Editors); Fractional Calculus, Research Notes. Vol. 138, Pitman (1985).
[5] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev; Fractional Integrals and Derivatives, and Some of Their Applications, Nauka, USSR (1987).
[6] K.B. Oldham and J. Spanier; The Fractional Calculus, Academic Press (1974).
[7] H.M. Srivastava and S. Owa; Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications, Ellis Horwood (1989).
[8] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev; Integrals and Series, Vol. 1. Gordon and Breach (1986).
[9] S. Moriguchi, K. Udagawa and S. Hitotsumatsu; Mathematical Formulae, Vol. 2, Iwanami Co. (1957).
[10] K. Nishimoto; On the fractional calculus of products of functions z^{β}, z^{γ} and log az, J. Coll. Engng. Nihon Univ. B-32 (1991).
[11] K. Nishimoto; On the infinite sum $Q_{m,n}$ (A serendipity in fractional calculus), J. Coll. Engng. Nihon Univ. B-32 (1991).
[12] K. Nishimoto and S.-T. Tu; On infinite sum $R_{m,\beta}$ (A serendipity in fractional calculus), J. Coll. Engng. Nihon Univ. B-32 (1991).
[13] K. Nishimoto; On infinite sum $S_{1,\beta} = -R_{1,\beta}$ (A serendipity in fractional calculus). (to appear).

2

Radii Problems for Sections of Convex and Starlike Functions of Order α

谷口彰男, 權 五常　　日大文理, 慶星大学
曺 洛殷　　　　　　　釜山水産大学

S を単位円 $|z|<1$ で正則かつ univalent な関数族とし、この族の関数 $f(z)$ はさらに $f(0)=0$, $f'(0)=1$ という性質をもつものとする。与えられた α, r $(0\leqq\alpha<1,$ $0<r\leqq1)$ に対し、S 族の中の関数 $f(z)$, $g(z)$ が条件

$$\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha \qquad (|z|<r)$$

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}>\alpha \qquad (|z|<r)$$

を満足するとき $f(z)$, $g(z)$ はそれぞれ $|z|<T$ で位数 α の

で定義する。ただし、$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $\{n\}_{n=2}^{\infty}$ の任意の部分列とする。このとき Conjecture と Problems を考える。

CONJECTURE (Silverman) $f(z)\in K$ ならば $f(z)$ の任意の section $f_{n_k}(z)$ は $|z|<\frac{1}{4}$ で convex かつ $|z|<\frac{1}{2}$ で starlike である。

PROBLEM 1. $0\leq\alpha<1$, $f(z)\in K(\alpha)$ とし、$f_{n_k}(z)$ を $f(z)$ の任意の section とする。このとき $f_{n_k}\in K_{R_1}(\gamma_1)\cap S^{*}_{R_2}(\gamma_2)$ となる $\gamma_1, \gamma_2, R_1, R_2$ を決定せよ。

PROBLEM 2. $0\leq\alpha<1$, $f(z)\in S^{*}(\alpha)$ とし $f_{n_k}(z)$ を $f(z)$ の任意の section とする。このとき $f_{n_k}\in S^{*}_{R_3}(\gamma_3)$ となる γ_3 R_3 を決定せよ。

THEOREM $\frac{1}{2}\leq\alpha<1$, $\frac{1}{2}\leq\beta<1$ とし、$\gamma=\gamma(\alpha,\beta)$ を

3

A Certain Subclass of p-Valently Analytic Functions with Negative Coefficients

谷口彰男, 山川陸夫　　日大文理, 芝浦工大
權 五常, 曺 洛殷　　慶星大, 釜山水産大

p を自然数、$A_p(n)$ を単位円 U で p-valent かつ正則な関数族とし、その族の関数は常に

$$f(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k \qquad (a_k \geqq 0;\ n = 1, 2, 3, \cdots)$$

という形をしているとする。関数 $f(z) \in A_p(n)$ が位数 α $(0 \leqq \alpha < p)$ の p-valently starlike であるとは、常に

$$\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha \qquad (z \in U)$$

が成立するときと定義する。また、関数 $f(z) \in A_p(n)$ が族 $A_p(n, \alpha, \beta)$ に属するとは、ある α, β $(0 \leq \alpha < p,$

これら2の式を sharp にする関数は

$$f(z) = z^p - \frac{p-\alpha}{p+\beta n} z^{n+p}$$

である。

定理2　$f(z) \in A_p(n, \alpha, \beta)$, $0 \leqq \alpha < p$, $\beta \geqq 1$. $\Rightarrow$

$f(z)$ は p-valently starlike of order $(1-\frac{1}{\beta})p$ in U

である。

4

On an estimate of the real part of certain analytic functions

斎藤　斉　　群馬高専

Uを単位円板とする。　A(p)はU内で正則な関数

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

の族を表すとする。

1989年度の年会で、次の結果を報告した。

定理A　　f(z)∈A(p)とする。このとき、

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f^{(j)}(z)}{z^{p-j}}\right\} > \alpha \qquad \left(0 \leqq \alpha < \frac{p!}{(p-j)!}\right)$$

定　理　　$f(z) \in A(p)$ とする。このとき、

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f^{(j)}(z)}{z^{p-j}}\right\} > \alpha \qquad \left(0 \leqq \alpha < \frac{p!}{(p-j)!}\right)$$

ならば、

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f^{(j-1)}(z)}{z^{p-j+1}}\right\} > \frac{2\alpha - q}{p-j+1} + 2(q-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{p-j+k}$$

が成りたつ。ただし、$j = 1, 2, \cdots, p$，$q = \dfrac{p!}{(p-j)!}$。

5

ある正則関数族の星型条件

山川陸夫　　　　芝浦工大

$A(p)$ を単位円 D 内で正則な関数

$$f(z)=\sum_{n=p}^{\infty}a_n z^n \quad (a_p=1,\ p\in N)$$

の族とし、

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0 \quad (z\in D)$$

を満たす関数 $f\in A(p)$ の族を $S^*(p)$ とする。$S^*(1)$ は通常の星型関数族 S^* である。一方、$A(1)$ の他の部分族：凸型関数族を C とすれば、$f\in A(1)$ に対して

ここでは、$A(p)$族 に関して、布川氏が予想された次の定理を証明する。

<u>定理</u>　$f \in A(p)$ とする。

$$\left| 1+\frac{z f''(z)}{f'(z)} \right| < p+1 \quad (z \in D) \Rightarrow f \in S^*(p).$$

6

COEFFICIENTS OF INVERSE FUNCTIONS FOR SOME SUBCLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} d_n z^n$$

which are analytic in the unit disk $\mathcal{U}$. Let $0 \leqq \alpha < 1$,

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \{w: |w - 1/(2\alpha)| < 1/(2\alpha),\ 0 < \alpha < 1\}$$

and

$$\mathcal{Q}(0) = \{w: \mathrm{Re}(w) > 0\}.$$

A function $f(z) \varepsilon \mathcal{A}$ is said to be in the class $\mathcal{F}_\alpha$ if $f'(z) \varepsilon \mathcal{Q}(\alpha)$. Similarly, a function $f(z) \varepsilon \mathcal{A}$ is said to be in the class $\mathcal{S}_\alpha^*$ if $zf'(z)/f(z) \varepsilon \mathcal{Q}(\alpha)$. Note that

$$f(z) \varepsilon \mathcal{F}_\alpha \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\{1/f'(z)\} > \alpha \qquad (z \varepsilon \mathcal{U})$$

$$h_\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z} & (\alpha = 1/2) \\ z(1 + (1-2\alpha)z)^{2(1-\alpha)/(2\alpha-1)} & (\alpha \neq 1/2) \end{cases}$$

is in the class S_α^*.

With the help of functions $k_\alpha(z)$ and $h_\alpha(z)$, two results for coefficients of inverse functions of $f(z)$ belonging to the classes F_α and S_α^* are shown.

7

NOTES ON RUSCHEWEYH DERIVATIVES

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)

Let $\mathbb{A}_p$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\})$$

which are analytic in the unit disk $\mathbb{U}$. Using the convolutions, we define the Ruscheweyh derivative $D^{\alpha+p-1}$ by

$$D^{\alpha+p-1}f(z) = \frac{z^p}{(1 - z)^{\alpha+p}} * f(z) \qquad (\alpha > -p)$$

for $f(z) \in \mathbb{A}_p$. A function $f(z) \in \mathbb{A}_p$ is said to be in the class $\mathbb{R}(\alpha+p-1)$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{D^{\alpha+p}f(z)}{D^{\alpha+p-1}f(z)} \right\} > \frac{\alpha + p - 1}{\alpha + p} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(\alpha > -p)$.

THEOREM 1. If $f(z) \in \mathbb{R}(\alpha+p)$, $\alpha \geqq 1-p$, $p \in \mathbb{N}$, then

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{D^{\alpha+p}f(z)}{D^{\alpha+p-1}f(z)} \right\} > \beta(\alpha,p) \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

where

$$\beta(\alpha,p) = \frac{2(\alpha + p) - 3 + (4(\alpha+p)^2 - 4(\alpha+p) + 9)^{1/2}}{4(\alpha + p)} .$$

REMARK. Theorem 1 is the improvement of the result by A. K. Soni (Internat. J. Math. Math. Sci. 5(1982), 289 - 299).

THEOREM 2. If $f(z) \varepsilon R(\alpha+p)$, then

$$\operatorname{Re}\left(\frac{D^{\alpha+p}f(z)}{D^{\alpha+p-1}f(z)}\right)^{1/2} > \sqrt{\frac{\alpha+p-1}{\alpha+p}} \qquad (z \varepsilon U).$$

8

NOTES ON QUASI-HADAMARD PRODUCTS

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)
TADAYUKI SEKINE (NIHON UNIVERSITY)
RIKUO YAMAKAWA (SHIBAURA INSTITUTE OF TECHNOLOGY)
TERUO YAGUCHI (NIHON UNIVERSITY)
HITOSHI SAITOH (GUNMA COLLEGE OF TECHNOLOGY)
MAMORU NUNOKAWA (GUNMA UNIVERSITY)

Let $A_0(p)$ denote the class of analytic functions of the form

$$f(z) = a_p z^p - \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n} \qquad (a_p > 0;\ a_{p+n} \geqq 0;\ p \in \mathbb{N})$$

in the unit disk $\mathbb{U}$. A function $f(z) \in A_0(p)$ is said to be in the class $S_0(k,p,\alpha)$ if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p+n}{p} \right)^k (p+n-\alpha) a_{p+n} \leqq (p-\alpha) a_p$$

for some α $(0 \leqq \alpha < p)$, where $k \geqq 0$.

In the present talk, two results for quasi-Hadamard products of functions belonging to the class $S_0(k,p,\alpha)$ are shown. Our results are the generalizations of the theorems by V. Kumar (J. Math. Anal. Appl. 126(1987), 70 - 77), and the improvements of the corresponding theorems due to T. Sekine (Univalent Functions, Fractional Calculus and Their Applications, 1989).

THEOREM I. Let $f_j(z) \in S_0(k_j,p,\alpha_j)$ for each $j = 1,2,\ldots,m$. Then the quasi-Hadamard product $f_1 * f_2 * \cdots * f_m(z)$ belongs to the class $S_0(k,p,\alpha)$, where

$$k = \sum_{j=1}^{m} k_j + m - 1 \qquad \text{and} \qquad \alpha = \max_{1 \leqq j \leqq m} (\alpha_j).$$

THEOREM 2. Let $f_j(z) \varepsilon S_0(k,p,\alpha)$ for all $j = 1,2,\ldots,m$, and $0 \leqq \alpha < r_0$, where r_0 is a root of the equation

$$(p + 1)^{k(m-1)}(p - mr) - p^{(k-1)(m-1)}(p - r)^m = 0 \qquad (0 < r < p/m).$$

Then the quasi-Hadamard product $f_1 * f_2 * \cdots * f_m(z)$ belongs to the class $S_0(k+m-1,p,m\alpha)$.

9

Convexité et inégalités différentielles concernant la densité de Poincaré

Shinji Yamashita (山下愼二)　　(東京都立大学理学部)

Soit A un domaine du plan complexe $\mathbb{C} = \{|z| < \infty\}$ tel que $\mathbb{C} \setminus A$ contienne au moins deux points. Soit δ_A la densité de Poincaré de la métrique de Poincaré $\delta_A(z)|dz|$, $z \in A$, de sorte que $1/\delta_A(z) = 1 - |z|^2$ si A est le disque unité ouvert. Pour une fonction complexe g définie dans A et pour $z = x + iy \in A$ nous écrivons $g_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right)$, de sorte que $g_{zz} = (g_z)_z$. Nous démontrerons le :

Théorème. — <u>Soit</u> $\delta(z) = \delta_A(z)$, $z \in A$. <u>Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes.</u>

(I) A <u>est convexe.</u>

(II) $|\delta_z(z)| \leq \delta(z)^2$ <u>pour chaque</u> $z \in A$.

(III) $|\delta(z)\delta_{zz}(z) - 2\delta_z(z)^2| + |\delta_z(z)|^2 \leq \delta(z)^4$ <u>pour chaque</u> $z \in A$.

10

The Poincaré density, Lipschitz continuity, and superharmonicity

Shinji Yamashita (山下愼二) (東京都立大学理学部)

Let A be a domain in the plane $\mathbb{C} = \{|z| < +\infty\}$ such that $\mathbb{C} \setminus A$ contains two points. Let $\mathrm{Proj}(D,A)$ be the family of holomorphic universal covering projections from $D = \{|z| < 1\}$ onto A. It is easy to observe that

$$\sup_{z\in D} \left(1 - |z|^2\right)^2 \left|\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2\right|$$

is the same for all $f \in \mathrm{Proj}(D,A)$, which we denote by $\Delta(A)$. We call A of finite type if $\Delta(A) < +\infty$. Adding to many necessary and sufficient conditions for A to be of finite type we propose two criteria in terms of the Poincaré density δ_A (well) defined by $\delta_A(z)\left(1 - |w|^2\right)|f'(w)| = 1$, $z = f(w)$, $f \in \mathrm{Proj}(D,A)$, $w \in D$.

Theorem. A domain A is of finite type if and only if the following (i) holds and if and only if the following (ii) holds:

(i) $1/\delta_A$ is Lipschitz continuous in A.

(ii) There exists a constant γ, $0 < \gamma \leq 1$, such that $1/\delta_A{}^{\gamma}$ is superharmonic in A.

A detailed study yields the following: A domain A is convex (and hence simply connected) if and only if the following (iii) holds, and if and only if the following (iv) holds:

(iii) $1/\delta_A$ _is Lipschitz continuous:_

$$|1/\delta_A(z) - 1/\delta_A(w)| \leq 2|z - w| \quad \text{in} \quad A.$$

(iv) $1/\delta_A$ _is superharmonic in_ A.

11

La densité de Poincaré, la continuité de Lipschitz, et les domaines de Bloch

Shinji Yamashita (山下慎二)　　　(東京都立大学理学部)

Nous étudions la réciproque $1/\delta_A$ de la densité de Poincaré δ_A de la métrique de Poincaré $\delta_A(z)|dz|$ d'un domaine hyperbolique A du plan complexe. Si f est une projection universelle et holomorphe de $D = \{|z| < 1\}$ sur A, ou $f \in \mathrm{Proj}(D,A)$ en notation, alors δ_A est définie par $1/\delta_A(z) = (1 - |w|^2)|f'(w)|$, $z = f(w)$, $w \in D$. Pour $z_k \in A$ $(k = 1, 2)$ nous définissons $d_A(z_1,z_2)$ comme l'infimum des distances usuelles de Poincaré de w_1 et w_2 dans D, où $z_k = f(w_k)$, $k = 1, 2$.

Théorème 1. — *La réciproque* $1/\delta_A$ *de* δ_A *est Lipschitz-continue par rapport à* d_A :

$$\text{(I)} \quad |1/\delta_A(z_1) - 1/\delta_A(z_2)| \leq K\, d_A(z_1,z_2) \quad \underline{\text{dans}} \quad A$$

si et seulement si $1/\delta_A{}^2$ *est Lipschitz-continue au sens ordinaire:*

$$\text{(II)} \quad |1/\delta_A(z_1)^2 - 1/\delta_A(z_2)^2| \leq 2K\, |z_1 - z_2| \quad \underline{\text{dans}} \quad A.$$

Une condition suffisante pour que A satisfait (I) et par conséquent, (II), va se démontrer. Une fonction g holomorphe dans D s'appelle de Bloch si $\|g\| = \sup_{w\in D}\left(1 - |w|^2\right)|g'(w)|$ est finie. Si φ est une transformation de Möbius de D sur D, alors $\|g\| = \|g\circ\varphi\|$. Donc, nous pouvons définir que A soit de Bloch si une f $\in$ Proj(D,A) est de Bloch. Si A est de Bloch, alors $\|f\|$ est constante pour toute $f \in$ Proj(D,A), la constante qui s'écrit par $\|A\|$. En effet, $\|A\| = \left(\inf_{z\in A} \delta_A(z)\right)^{-1}$. Nous avons le

Théorème 2. — Si A est de Bloch, alors (I) et (II) sont vraies pour $K = (c_W + 2)\|A\|$, où

$$c_W = \frac{1}{64}\left(13\sqrt{3} + 55\sqrt{11}\right) = 3.2020472\ldots .$$

Encore, si A est simplement connexe et de Bloch, alors nous pouvons adopter $K = 4\|A\|$, tandis que si A est convexe et de Bloch, alors nous pouvons adopter $K = 2\|A\|$.

Nous allons observer dans le théorème 2 que les puissances 1 et 2 de $1/\delta_A$ dans (I) et (II) sont exactes: Il y a un domaine de Bloch A tel que $1/\delta_A{}^{\alpha}$ n'est pas Lipschitz-continue par rapport à d_A dans A pour chaque α, $0 < \alpha < 1$ et encore $1/\delta_A{}^{\alpha}$ n'est pas Lipschitz-continue par rapport à la distance euclidienne dans A pour chaque α, $0 < \alpha < 2$.

12

Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces

DU-WON BYUN AND SABUROU SAITOH
Faculty of Engineering, Gunma University

Let E be an arbitrary set, and let H_K be a Hilbert (possibly finite dimensional) space composed of complex-valued functions f on E admitting a reproducing kernel $K(p,q)$.

Meanwhile, for any subset X of E we consider a Hilbert space $H(X)$ comprising of functions F on X. In the relationship of two Hilbert spaces H_K and $H(X)$, we assume that

(a) for the restriction $f|_X$ of the members f of H_K to the set X, $f|_X$ belong to the Hilbert space $H(X)$,

and

(b) the linear operator $Tf = f|_X$ is continuous from H_K into $H(X)$.

Then, we shall consider the fundamental approximation problem

$$\inf_{f \in H_K} \|Tf - F\|_{H(X)},$$

for any $F \in H(X)$.

For the sake of the nice properties of T and its adjoint T^* in our situation, we will be able to give "algorithms" to decide whether the best approximations f^* of F in the sense of

$$\inf_{f \in H_K} \|Tf - F\|_{H(X)} = \|Tf^* - F\|_{H(X)}$$

exist. Furthermore, when there exist the best approximations f^*, we will be able to give "algorithms" to get constructively the best approximations f^*. Indeed, we shall give intrinsic representations of the best approximations f^* in terms of the given function F. This point of view will be important in this paper.

Typeset by 日本語-$\mathcal{AMS}$-TEX

The contents in this paper were outlined, in part, in the Preliminary Reports [1]. The authors wish to thank deeply Professor Tsuyoshi Ando for his very valuable comments in the Preliminary Reports [1].

References

[1] T. Ando and S. Saitoh, Restrictions of reproducing kernel Hilbert spaces to subsets (Preliminary Reports), Suri Kaiseki Kenkyu Jo, Koukyu Roku 1990 (to appear).

[2] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68(1950), 337-404.

[3] D. W. Byun and S. Saitoh, Analytic extensions of functions on the real line to entire functions (submitted).

[4] S. Saitoh, Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions, Proc. Amer. Math. Soc. 89(1983), 74-78.

[5] S. Saitoh, Theory of reproducing kernels and its applications, Pitman Res. Notes in Math. Series 189, Longman Scientific & Technical, England 1988.

13

Analytic extensions of functions on the real line to entire functions

DU-WON BYUN AND SABUROU SAITOH
Faculty of Engineering, Gunma University

Following the general method for best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces [1], we shall discuss best approximation of functions on the real line by entire functions. We shall need a concrete form of the reproducing kernel in the general method. So, as a typical reproducing kernel space for entire functions we shall take up the Fischer space $\mathcal{F}_a$ normed by

$$\|f\|_{\mathcal{F}_a}^2 = \frac{a^2}{\pi} \iint_{\mathbf{C}} |f(z)|^2 e^{-a^2|z|^2} dxdy$$

for fixed $a > 0$ and whose reproducing kernel is given by

$$K_a(z, \overline{u}) = e^{a^2\overline{u}z}$$

(cf. [2]). On the other hand, as a function space approximated by the Fischer space $\mathcal{F}_a$ we shall first determine an $L_2((-\infty,\infty), W(x)dx)$ space with a natural weight $W(x)$

$$\|F\|_{L_2(W)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 W(x) dx,$$

in connection with the Fischer space $\mathcal{F}_a$ and the general method. Under these situations, we shall examine the best approximation problem in the sense that for $F \in L_2(W)$

$$\inf_{f \in \mathcal{F}_a} \|Tf - F\|_{L_2(W)}$$

for the restriction $Tf(z) = f(x)$ of $\mathcal{F}_a$ to the real line. However, in this case $\{Tf; f \in \mathcal{F}_a\}$ will be complete in $L_2(W)$ and so,

$$\inf_{f \in \mathcal{F}_a} \|Tf - F\|_{L_2(W)} = 0.$$

Therefore, the condition for the existence of the best approximation f^* in the sense

$$||Tf^* - F||_{L_2(W)} = 0 \quad \text{for} \quad f^* \in \mathcal{F}_a$$

will become the condition that F can be extended analytically to the member $f^* \in \mathcal{F}_a$ except for a null Lebesque measure set on the real line. Furthermore, we will give a constructive sequence $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($f_n \in \mathcal{F}_a$) such that

$$\lim_{n\to\infty} ||Tf_n - F||_{L_2(W)} = 0$$

for any function $F \in L_2(W)$.

The contents are as follows:

§2 . Determination of the natural $L_2(W)$ space.
§3 . Existence of best approximation.
§4 . Representations of $\mathcal{F}_a$ functions in terms of the restriction to the real line.
§5 . Approximation of $F \in L_2(W)$ by $\mathcal{F}_a$ functions.

References

[1] D. W. Byun and S. Saitoh, Best approximation in reproducing kernel Hilbert spaces (preprint).
[2] Saitoh, S., Some inequalities for entire functions, Proc. Amer. Math. Soc. 80(1980), 254-258.
[3] Saitoh, S., Theory of reproducing kernels and its applications, Pitman Res. Notes in Math. Series 189, Longman Scientific & Technical, England 1988.

14

Quasiadditivity of Riesz capacity

相川 弘明　　　　群馬大学 工学部

Let $0 < \alpha < n$ and $k_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$ the Riesz kernel on $\mathbb{R}^n$. Define the Riesz capacity by

$$R_{\alpha,p}(E) = \begin{cases} \inf\{\|f\|_p^p : k_\alpha * f(x) \geq 1 \text{ on } E, f \geq 0\} & \text{if } 1 < p < \infty, \\ \inf\{\|\mu\| : k_\alpha * \mu(x) \geq 1 \text{ on } E, \mu \geq 0\} & \text{if } p = 1. \end{cases}$$

It is obvious that $R_{\alpha,p}$ is countably subadditive, i.e.

$$R_{\alpha,p}(E) \leq \sum_k R_{\alpha,p}(E_k)$$

with $E = \bigcup_k E_k$. The main purpose of this talk is to investigate for what decompositions the inequality

$$R_{\alpha,p}(E) \geq N \sum_k R_{\alpha,p}(E_k)$$

holds with some positive constant N. We refer to this inequality as "quasiadditivity". Quasiadditivity for decompositions into spherical shells has been considered by Landkof [**2**, Lemma 5.5 in p.304] and Adams [**1**, Theorem 7.5].

We shall show that the Whitney decomposition (cf. [**3**, p.16]) associated with a certain closed set has quasiadditivity.

DEFINITION. *Let F be a closed set having no interior points. Put $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, F)$ and let m_β be the measure defined by*

$$m_\beta(E) = \int_E \delta(x)^{-\beta} dx.$$

We associate the least number $d = d(F)$ for which

$$m_\beta(C(x, r)) \leq N_\beta r^{n-\beta}$$

holds for all $x \in F$ and $r > 0$ with a positive constant N_β, whenever $0 < \beta < n - d$.

The constant $d(F)$ is related to the dimension of F. In fact, if L is an m-dimensional affine subspace in $\mathbb{R}^n$, then $d(L) = m$. We can easily see that if F is an m-dimensional compact Lipschitz manifold, then $d(F) = m$. By definition if $F_1 \subset F_2$, then $d(F_1) \leq d(F_2)$.

Our main result is

THEOREM 1. *Let $1 \leq p < \infty$. Let $\{Q_k\}$ be the Whitney decomposition of $\mathbb{R}^n \setminus F$. Suppose $\alpha p + d(F) < n$. Then*

$$R_{\alpha,p}(E) \geq N \sum_k R_{\alpha,p}(E_k)$$

holds with $E_k = E \cap Q_k$ for some positive constant N.

Since $d(\{0\}) = 0$, we see that Theorem 1 is a generalization of the aforementioned results of Landkof and Adams. Our proof is completely different; it relies on the following comparison between the Riesz capacity $R_{\alpha,p}$ and the measure $m_{\alpha p}$.

THEOREM 2. *Let $1 \leq p < \infty$. Suppose $\alpha p + d(F) < n$. If E is measurable, then*

$$m_{\alpha p}(E) \leq N R_{\alpha,p}(E)$$

for some positive constant N.

REFERENCES

1. D. R. Adams, *Sets and functions of finite L^p-capacity*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 611–627.
2. N. S. Landkof, "Foundations of modern potential theory," Springer, 1972.
3. E. M. Stein, "Singular integrals and differentiability properties of functions," Princeton University Press, 1970.

15

Some properties about products of harmonic spaces

村 澤 忠 司　　　　京都府立大学

R^n におけるラプラス方程式$\Delta u=0$ の調和空間（R^n，$\mathcal{H}^*_\Delta$）と R^{n+1} における熱方程式 $\Omega u=0$ の調和空間（R^{n+1}，$\mathcal{H}^*_\Omega$）との間には密な関係がある．R^n 上のBrownian semi-group $(P_t)_{t>0}$ の (P_t)-excessive functionsの集合はR^n 上の正の（ラプラス方程式$\Delta u=0$ に関する）hyperharmonic functions の集合に一致することがよく知られている．いま，semi-group (P_t)とR上の uniform motion の semi-group $(T_t)_{t>0}$ との product $(Q_t)_{t>0}$ を構成する．この時，R^{n+1} 上の熱方程式 $\Omega u=0$ による調和空間（R^{n+1}，$\mathcal{H}^*_\Omega$）の正の hyperharmonic functionsの集合は，(Q_t)－excessive functions の集合と一致する．したがって，（R，$\mathcal{H}^*_0$）を semi-group $(T_t)_{t>0}$ に associateする調和空間とすると，（R^{n+1}，$\mathcal{H}^*_\Omega$）は２つの調和空間（R^n，$\mathcal{H}^*_\Delta$）と（R，$\mathcal{H}^*_0$）の product として理解できる．

このことを，ある条件のもとで一般化して，２つの調和空間（X，$\mathcal{H}^*$）と（R，$\mathcal{H}^*_0$）の product による調和空間を構成し，これらの調和空間の間の関係について考察する．また，このような product の構成はいつも可能とは限らない．その product の存在についての必要十分条件について言及する．

（X，$\mathcal{H}^*$）は a locally compact space X with countable base上の a harmonic space (C,C) with $1\in\mathcal{H}^*$ を示す．$(P_t)_{t>0}$

はX上の a sub-markov semi-group associated to $(X, \mathcal{H}^*)$ とする. $\Pi^+ = (T_t^+)_{t>0}$ は $R_+^* = (0, \infty)$ 上の uniform motion に関する a translation semi-groupであり, a harmonic space $(R_+^*, \mathcal{H}_0^*)$ に associate している. $\mathbb{Q} = (Q_t)_{t>0}$ は, 2つの semi-group $(P_t)_{t>0}$ と Π^+ との product によって構成される a semi-group を表す.

補題. a harmonic space $(X, \mathcal{H}^*)$ に associateする a sub-markov semi-group $(P_t)_{t>0}$ が strong Feller であるならば, a semi-group $\mathbb{Q}$ の strong Feller kernels W_λ からなる a sub-markov resolvent $\mathbb{W} = (W_\lambda)_{\lambda>0}$ が存在して, また, a proper potential kernel W をもつ.

定理. 2つの harmonic spaces $(X, \mathcal{H}^*)$ と $(R_+^*, \mathcal{H}_0^*)$ の product space $(X \times R_+^*, \widehat{\mathcal{H}}^*)$ が $\mathbb{Q}$ に associate する $\mathcal{P}$−harmonic space であるための必要十分条件は harmonic space $(X, \mathcal{H}^*)$ に associate する semi-group $(P_t)_{t>0}$ が strong Feller を成すことである.

16　ソボレフ＝オーリッツ関数の球面平均

水田　義弘

広島大学
総合科学部

1．ソボレフ＝オーリッツ関数

R^n 上の関数 u で，条件

$$\int_{R^n} \Psi_p(|\text{grad } u(x)|)dx < \infty \tag{1.1}$$

を満足するものに対して，球面平均

$$S_q(u,r) = \left(\frac{1}{|S(0,r)|} \int_{S(0,r)} |u(x)|^q dS(x) \right)^{1/q}$$

の（原点での）極限値の存在を調べよう．ここで，

(1.2)　$\Psi_p(r) = r^p\psi(r)$；$p > 1$ かつ ψ は，区間 $[0,\infty)$ 上正値非減少で

$$\psi(r^2) \leq M\psi(r) \qquad (\forall r > 0)$$

を満足している．

(1.1) を，もう少し一般化して，

$$\int_{R^n} \Psi_p(|\text{grad } u(x)|)\omega(|x|)dx < \infty \tag{1.3}$$

なる関数 u について調べてみる．関数 ω は，区間 $(0,\infty)$ 上の正値単調関数で，いわゆる (Δ_2) 条件を満足する：

$$M^{-1}\omega(r) \leq \omega(2r) \leq M\omega(r) \qquad (\forall r > 0). \tag{1.4}$$

定理 1.1． 関数 u が，条件 (1.1) を満足し，

$$\int_0^1 [t^{n-p}\psi(t^{-1})]^{-1/(p-1)}\frac{dt}{t} < \infty$$

ならば，u は連続関数である．

この定理より，関数 u が条件 (1.3) を満足するとき，u は原点以外で連続である．

2. 球面平均

簡単のため，$\eta(r) = \psi(r^{-1})\omega(r)$ とおいて，関数

$$\kappa(r) = \left(\int_r^1 [t^{n-p}\eta(t)]^{-1/(p-1)}\frac{dt}{t}\right)^{(p-1)/p} + [\omega(r)]^{-1/p}\left(\int_0^r [t^{n-p}\psi(t^{-1})]^{-1/(p-1)}\frac{dt}{t}\right)^{(p-1)/p}$$

を考える．

定理 2.1． 関数 u は，条件 (1.3) を満足するものとする．$\lim_{r\to 0} \kappa(r) = \infty$ ならば，

$$1 < p \le q \qquad \text{かつ} \qquad \frac{n-p}{p(n-1)} < \frac{1}{q}$$

なる q に対して，

$$\lim_{r\to 0} [\kappa(r)]^{-1} S_q(u, r) = 0.$$

定理 2.2． 定理 2.1 の u と κ の仮定のもとで，

$$1 < p \le q \qquad \text{かつ} \qquad \frac{n-p-1}{p(n-1)} < \frac{1}{q} \le \frac{n-p}{p(n-1)}$$

なる q に対して，

$$\liminf_{r\to 0} [\kappa(r)]^{-1} S_q(u, r) = 0.$$

定理 2.3． κ が有界ならば，u は，原点で連続である．

3. 境界値

単位球 B 上で定義された関数 u で，条件

$$\int_B \Psi_p(|\mathrm{grad}\ u(x)|)\omega(\rho(x))dx < \infty \tag{3.1}$$

を満足するものに対して，境界点 $\xi \in \partial B$ での球面平均

$$S_q(u, \xi, r) = \left(\frac{1}{|B \cap S(\xi, r)|}\int_{B\cap S(\xi,r)} |u(x)|^q dS(x)\right)^{1/q}$$

について調べよう．目的は，

$$\lim_{r\to 0} [h(r)]^{-1} S_q(u, \xi, r) = 0$$

または

$$\liminf_{r\to 0} [h(r)]^{-1} S_q(u, \xi, r) = 0$$

となる h と，ξ の集合の大きさを測ることである．

17 調和関数の境界値

水田　義弘

広島大学
総合科学部

1．調和関数

有界なリプシッツ領域 G 上の調和関数 u で，条件

$$\int_G \Psi_p(|\mathrm{grad}\ u(x)|)\omega(\rho(x))dx < \infty \tag{1.1}$$

を満足するものに対して，G の境界点での極限値の存在について調べよう．ここで，

(1.2)　$\Psi_p(r) = r^p\psi(r)$；$p > 1$ かつ ψ は，区間 $[0, \infty)$ 上正値非減少で

$$\psi(r^2) \le M\psi(r) \qquad (\forall r > 0)$$

を満足している．

(1.3)　関数 ω は，区間 $(0, \infty)$ 上の正値単調関数で，いわゆる (Δ_2) 条件を満足する：

$$M^{-1}\omega(r) \le \omega(2r) \le M\omega(r) \qquad (\forall r > 0).$$

2．境界での極限値

簡単のため，$\eta(r) = \psi(r^{-1})\omega(r)$ とおいて，関数

$$\kappa(r) = \left(\int_r^1 [t^{n-p}\eta(t)]^{-1/(p-1)}\frac{dt}{t}\right)^{(p-1)/p}$$

を考える．

定理 2.1． 関数 u は，条件 (1.1) を満足するものとする．$\lim_{r\to 0} \kappa(r) = \infty$ ならば，

$$\lim_{x\to\partial G} [\kappa(\rho(x))]^{-1}u(x) = 0\,;$$

κ が有界ならば，関数 u は，∂G の各点で有限な極限値をもつ．

3．T_φ-境界値

区間 $(0,\infty)$ 上の正値非減少関数 φ に対して，

$$T_\varphi(\xi,a)=\{x\in G; \varphi(|x-\xi|)<a\rho(x)\}$$

を考える．また，

$$\tau(r)=[\kappa(r)]^{-p}, \qquad h(r)=\tau(\varphi(r))$$

とおく．

定理 3.1． G 上の調和関数 u は，条件 (1.1) を満足するものとする．$\lim_{r\to 0}\tau(r)=0$ ならば，関数 u は，任意の $\xi\in\partial G-(E_1\cup E_2)$ で，有限な T_φ-極限値をもつ；ここで，

$$C_{1,\Psi_p,\omega}(E_1)=0, \qquad H_h(E_2)=0.$$

$\omega(r)=r^\beta$ ならば，除外集合 E_1，E_2 の大きさについて，もう少し，具体的な言い方もできる．重みつきの T_φ-極限値について，論じることもできる．

定理 3.2． 定理 3.1 の u と τ の仮定のもとで，任意の $\xi\in\partial G-E$ に対して，

$$\lim_{x\to\xi,x\in T_\varphi(\xi,a)}[\lambda(r)]^{-1}u(x)=0\,;$$

ここで，$H_{h_\lambda}(E)=0$．

実際のところ，定理 3.2 では，λ と h_λ について，何も述べられていないが，その精神は理解されるものと信じる．

4．高階の微分

条件 (1.1) を満足するならば，

$$\int_G \Psi_p(|\mathrm{grad}^m\ u(x)|)[\rho(x)^{(m-1)p}\omega(\rho(x))]dx<\infty$$

も成り立つ．従って，調和関数 u の高階の微分についても同様な定理が得られている．例えば，簡単な場合，つまり，ディリクレ積分が有限な調和関数 u：

$$\int_G |\mathrm{grad}\ u(x)|^n dx<\infty$$

について，

(4.1) $$|\mathrm{grad}^m\ u(x)|=o(\rho(x)^{-m}) \qquad (x\to\partial G)\,.$$

(4.2) $$|\mathrm{grad}^m\ u(x)|=o(|x-\xi|^{-\alpha m\varepsilon}) \quad (x\to\xi, x\in T_\alpha(\xi,a)\,;\forall\xi\in\partial G-E_{\varepsilon,\alpha,m})\,.$$

ただし，(4.2) 式では，$H_{\alpha mn(1-\varepsilon)}(E_{\varepsilon,\alpha,m})=0$．

18

ポテンシャル論における最小変分の方法

二宮信幸

K(P, Q) を，局所コムパクトなハウスドルフ Ω 空間において二点 P と Q について下半連続，$P=Q$ では ∞ であってもよいが $P \neq Q$ では有限，かつ P と Q がそれぞれ互に素なコムパクト集合の中にあるときには上に有界，であるような関数とする．Ω の測度 μ と ν に対してポテンシャルおよび相互エネルギー積分

$$K(P, \mu) = \int K(P, Q)\, d\mu(Q),$$

$$K(\mu, P) = \int K(Q, P)\, d\mu(Q),$$

$$K(\mu, \nu) = \int d\mu(P) \int K(P, Q)\, d\nu(Q)$$

を考える．Ω のコムパクト集合 F の上の全質量 1 の正の測度の全体を $\mathfrak{M}_1(F)$ とし，それに属する μ_1 と μ_2，正数 t に対して二つの相互エネルギー積分

$$K(\mu_1 + \mu_2, \mu_1 + t\mu_2), \quad K(\mu_1 + \mu_2, t\mu_1 + \mu_2)$$

を考え，その大きい方を $M(\mu_1, \mu_2)$ とする．明らかに $M(\mu_1, \mu_2) = M(\mu_2, \mu_1)$ である．この二つの差は

$$(t-1)\ K(\mu_1+\mu_2,\ \mu_2-\mu_1)$$

である． $t>1$ とし

$$\inf M(\mu_1, \mu_2),\quad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(F)$$

を考える． inf は min で置換えられる． $t=1$ ならば，それは

$$\min\ K(\mu, \mu),\quad \mu \in \mathcal{M}_1(F)$$

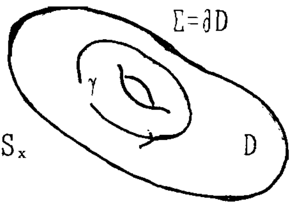
を考えることと同じである． $M(\mu_1, \mu_2)$ を最小にする μ_1 ， μ_2 の性質を論ずる．

19 平衡ベクトルポテンシャルの存在

滋賀大(教育) 山口博史

$J(x)dV_x = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))dV_x$ (但し dV_x はR^3の体積要素)が電流密度とは、$f_i \in C_0^\infty(R^3)$ & $\mathrm{div}\, J = \partial f_1/\partial x + \partial f_2/\partial y + \partial f_3/\partial z = 0$ の時を言う。

今、図の様に、実解析的境界 Σ を持つ solid torus D ($\subset R^3$) 及び 閉曲線 $\gamma \subset \Sigma$ が与えられているとする。$\boldsymbol{i}(x)dS_x = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))dS_x$ (dS_x はΣの面素)が Σ上の面電流とは、$g_i \in C^\infty(\Sigma)$ &



(i) $\exists J_n(x)dV_x \to \boldsymbol{i}(x)dS_x$ in R^3 (distribution sense);

(ii) $\int_\gamma *\boldsymbol{i} = 1$ where $*\boldsymbol{i} = g_1dx + g_2dy + g_3dz$

の時を言う。次のベクトル値積分を考える：

$$A(\boldsymbol{i}, x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\boldsymbol{i}(y)}{\| x - y \|} dS_y \quad \text{for } x \in R^3 - \Sigma \ ;$$

$$B(\boldsymbol{i}, x) = \mathrm{rot}\ A(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \boldsymbol{i}(y) \times \frac{x - y}{\| x - y \|^3} dS_y \quad \text{for } x \in R^3 - \Sigma.$$

ベクトル場 $B(\boldsymbol{i}, x)$は面電流$\boldsymbol{i}(x)dS_x$により生じる磁場と言われる。

定理 *境界 Σ 上の面電流 $\boldsymbol{i}(x)dS_x$ で、それより生じる磁場 $B(\boldsymbol{i}, x)$ が 領域 D の外部で恒等的に 0 となるものが唯一つ存在する。*

この面電流 $\boldsymbol{i}(x)dS_x$ をΣ上の平衡面電流と云い、$A(\boldsymbol{i}, x)$ をΣに関する平衡ベクトルポテンシャルと呼ぶ。

特別講演

極値擬等角写像 と Poincaré 級数

大竹 博巳　　京大・理

Δを単位円板、$\text{Möb}(\Delta)$をΔを固定するMöbius変換全体とする。以下ΓはΔに不連続に作用する楕円的変換を含まないようなFuchs群（初等的であっても良い）を表しているものとする。また断りのなり限り単に擬等角写像といえば、ΔからΔの上への擬等角同相写像を意味しているものとする。

擬等角写像fが $\Gamma_f := f\Gamma f^{-1} < \text{Möb}(\Delta)$ を満す時、fはΓ-compatibleであるという。ふたつのΓ-compatibleなf, gに対して、$g^{-1}\circ f|_{\partial\Delta} \in \text{Möb}(\Delta)|_{\partial\Delta}$ が成立する時、$f \underset{\Gamma}{\sim} g$ と書くこととする。この同値関係による同値類全体の集合がTeichmüller空間 $T(\Gamma)$ である。

Γ-compatibleな擬等角写像fが

$$\|\mu_f\|_\infty = \inf\{\|\mu_g\|_\infty : g \underset{\Gamma}{\sim} f\}$$

を満す時、fはΓに関して極値的であるという、ただしμ_fはfのBeltrami係数である。正規族の議論により各同値類の中に極値的な元が少くともひとつ存在すること

がわかる。Teichmüllerの定理で主張されることと同様のことが一般のΓに対しても成立する、即ち極値写像は一意的でしかも標準的な形をしていると考えられていたようであるが、これは共に誤りであることがStrebel [10] によって示された。一般的な極値擬等角写像の特徴付けは下の定理により与えられる。

$$A(\Gamma) = \{ \phi : \phi \text{ は } \Delta \text{ で正則であり、}$$
$$\gamma^*\phi := (\phi \circ \gamma)(\gamma')^2 = \phi \quad (\forall \gamma \in \Gamma),$$
$$\text{かつ} \quad \|\phi\|_\Gamma := \iint_{\Gamma \backslash \Delta} |\phi(z)|\,dxdy < \infty \}$$

とおく。

定理 (Hamilton, Reich, Strebel. cf Strebel [12])

fがΓに関して極値的であるための必要十分条件は

$$\|\mu_f\|_\infty = \sup\{ |\iint_{\Gamma \backslash \Delta} \mu_f \phi \,dxdy| \; ; \; \phi \in A(\Gamma), \|\phi\|_\Gamma < 1 \}$$

が成立することである。

ところでここでは次の問題について考察する。以下Gは Γの部分群を表すものとする。

問題 Γに関して極値的な擬等角写像が Gに関しても極値的になるのはどのような場合か？

この問題について種々の研究が行なわれたが、Strebel

は[11]において、Γに関して極値的ではあるが、Gに関してはもはや極値的でなくなるような例を構成し、次の予想を与えた。

予想（Strebel [11]） Γを有限生成第1種とすると、Γに関して極値的な擬等角写像は、等角でなければ、$\{1\}$に関して極値的でない。

Strebel の例において本質的役割を果たしている部分を考慮した上で、筆者はΓに関して極値的な写像がGに関しても極値的になるための十分条件を[5]で与えたが、最近 McMullen は以上の結果を大きく拡張した。これを説明するためにいくつかの準備を行う。

（相対）Poincaré 級数による作用素 $\Theta_{G\backslash\Gamma} : A(G) \to A(\Gamma)$ を

$$\Theta_{G\backslash\Gamma}\phi = \sum_{\gamma \in G\backslash\Gamma} \gamma^*\phi$$

によって定義する。$G = \{1\}$ の時は $\Theta_{\{1\}\backslash\Gamma}$ を単に Θ_Γ と書くことにする。さらに $\psi \in A(\Gamma), \psi \neq 0$, に対して

$$N_{G\backslash\Gamma}(\psi) = \sup\left\{ \|\psi\|_\Gamma / \|\phi\|_G \ ; \ \phi \in A(G),\ \Theta_{G\backslash\Gamma}\phi = \psi \right\}$$

とおく。次の事実が知られている。

命題（cf Kra [2]） (i) $\Theta_{G\backslash\Gamma}$ は上への写像で

$$1/3 \le N_{G\backslash\Gamma} \le \|\Theta_{G\backslash\Gamma}\| \le 1 ,$$

(ii) $N_{G\backslash\Gamma}$ は $PA(\Gamma)$ で連続。

次のことは Hamilton-Reich-Strebel の定理から直ちに解かる。

命題 (i) $N_{G\backslash\Gamma}(\psi) \equiv 1$ ならば Γ に関して極値的な擬等角写像は G に関しても極値的である。

(ii) $\|\Theta_{G\backslash\Gamma}\| < 1$ の時、Γ に関して極値的な擬等角写像は、等角でないならば、G に関しては極値的でない。

McMullen の結果は以下のものである。

定理 (McMullen [3] , cf [8])

(i) Γ/G が amenable ならば $N_{G\backslash\Gamma}(\psi) \equiv 1$。

(ii) Γ/G が nonamenable ならば $N_{G\backslash\Gamma}(\psi) < 1$, 特に Γ が有限生成第1種 ならば $\|\Theta_{G\backslash\Gamma}\| < 1$。

ところで定理の主張にある amenable , nonamenable であるが、ここではこれが組合せ幾何的条件であることを述べるだけにする。詳しくは [3], [8] を参照して頂きたい。

さて上の問題について、Γ が有限生成第1種でない場合が残っている。これは難問であると思われるが、特に $G = \{1\}$ の場合には次のようなことが成立する。

定理（[7]）$\|\Theta_\Gamma\| = 1$ なる必要十分条件は次の(a)(b)のどちらかが成立することである。

(a) 任意の $\rho > 0$ に対して半径 ρ の双曲的円板 D で

$$\gamma D \cap D = \phi \quad ({}^\forall \gamma \in \Gamma - \{1\})$$

を満すものが存在する。

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して Γ 内の双曲的元でその multiplier が e^ε 以下のものが存在する。

この定理から $\|\Theta_\Gamma\| = 1$ か < 1 かを決定するのは双曲幾何的条件であることが解る。ところで興味深いのは上の定理の条件が、$T(\Gamma)$ の外半径が 6 に等しいための必要十分条件になっていることである（Nakanishi, Yamamoto [4]）。

参考文献

[1] 今吉洋一・谷口雅彦：タイヒミュラー空間論，日本評論社，1989．

[2] I. Kra : Automorphic Forms and Kleinian Groups, W. A. Benjamin, 1972.

[3] C. McMullen : Invent. math, 97(1989), 95-127.

[4] T. Nakanishi and H. Yamamoto : Comment. Math. Helv. 64(1989), 288-299.

[5] H. Ohtake : J. Math. Kyoto Univ., 22 (1982) 191-200.

[6] H. Ohtake ; to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[7] H. Ohtake ; to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[8] 大竹博巳 ; 1-37 in "Topics in Complex Analysis" 1990年11月

[9] L. A. Parson and M. Sheingorn ; 422-441 in Lecture Notes Math. Vol. 899, Springer, 1981.

[10] K. Strebel : Comment. Math. Helv., 36 (1962) 306-323.

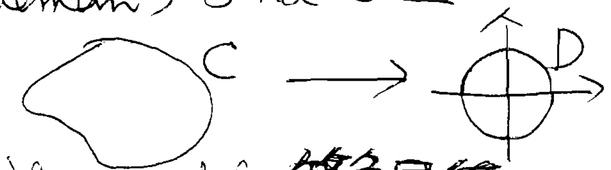
[11] K. Strebel : J. d'Analyse Math., 30 (1976) 464-480.

[12] K. Strebel ; Comment. Math. Helv. 53 (1978) 301-321.

20 Riemann の写像定理, その他

大数卓

Riemann の写像定理



simply connected 等角同値

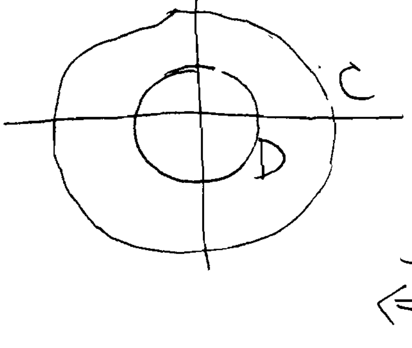
$\int_{C_t} f_t(z)dz=0 \Leftrightarrow$ 解析関数

よって、あらっぽくいうと、

$\int_{C_t} f_t(z)\overset{dz}{}=0 \Leftrightarrow \{C_t$ の解析関数$\}$

$\int_{C_{t'}} f_{t'}(z)dz=0 \Leftrightarrow \{C_{t'}$ の解析関数$\}$

$C_t \cap C_{t'}$ では、$\{C_t$ の解析関数$\}$
$\hat{=} \{C_{t'}$ の解析関数$\}$



$\int_D f(z)dz=0$
$\Leftrightarrow \int_D Pdx+Qdy=0$

$\int_C f(z)dz=0$
$\Leftrightarrow \int_C Pdx+Qdy=0$

$$\int_C f^p(z)dz=0 \iff \int_C P^p dx+Q^p dy=0$$

このことは、

$\{C_t$の解析関数環$\} \cong \{C_{t'}$の解析関数環$\}$

$\iff \exists f$: holomorphic isomorphism

$f : C_t \to C_{t'}$　such that

$\mathrm{Aut}(D_t) = f\,\mathrm{Aut}(D_{t'})f^{-1}$

これは、Riemannの写像定理に他ならない！

i.e.,　$\mathrm{Aut}(D) = f\,\mathrm{Aut}(D_{t'})f^{-1}$

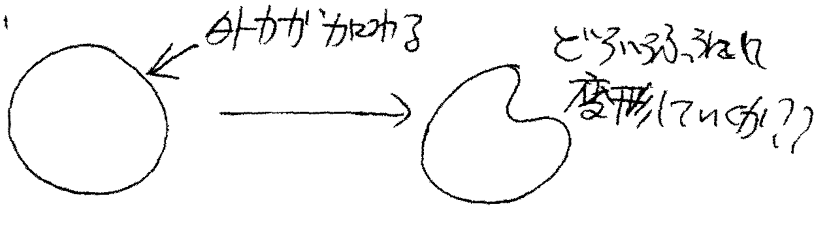
$f : D_{t'} \longrightarrow D$　等角写像

$\equiv$ holomorphic iso.

このようにして、Gaußの定理のMoving Boundary版を考えることは、色々示唆にとむ情報を与えてくれる。

実は、本来の問題意識としては、実世界の自由境界問題、Free boundary Problem, Moving Boundary Problemなどをやりたいのだが、今のところIdea、直観的事実だけである。

たとえば



Extended interpolation problem for finitely connected domains

高橋　世知子　　　　奈良女子大学　理学部

互いに交らない$m+1$個の解析的単純閉曲線で囲まれた領域を R とする。R 内の相異なるk個の点$z_1, ..., z_k$と各z_iで与えられたn_i個の複素数の組$\{c_{i0}, ..., c_{in_i-1}\}$に対して

(EI) $f(z)=c_{i0}+c_{i1}(z-z_i)+, \cdots, +c_{in_i-1}(z-z_i)^{n_i-1}+O((z-z_i)^{n_i})$

を満たす R で正則かつ$|f|\leq 1$となる函数fが存在する為の必要十分条件を求める。

$n_i=1$の場合は1979年に*Abrahamse*によって結果が得られているが([1])、その手法を拡張した場合に適用する。

m次元*Torus* T^m上の点 $\alpha=(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ $(|\alpha_i|=1)$に対して、R上の多価解析函数であって、$|f|$が一価、境界γ_jに沿っての周期がα_j $(\partial R=\gamma_0\cup\gamma_1\cup, ...\cup\gamma_m)$, $|f|^2$が調和な優函数を持つような函数全体の集合を$H^2(R,\alpha)$とする。Rに互いに交わらない m 個の *cuts* を入れて残りの部分R'が単連結になるようにする。R'に於ける一価な分枝全体として$H^2(R,\alpha)$を$L^2(\partial R,\omega_{z_0})$ (ω_{z_0}は固定された点$z_0\in R$に対する∂R上の調和測度)の部分空間とみなすと$(z,w)\in R\times R$に対して次の関係を満たす$(z,\bar{w})$について正則な函数$k_\alpha(z,w)$が得られる。

$$k_\alpha(z,w_0)\in H^2(R,\alpha),\ f(z)=\int_{\partial R} f(\zeta)\overline{k_\alpha(\zeta,w)}\,d\omega_{z_0} \quad (^\forall w\in R)$$

核函数$k_\alpha(z, w)$の点$(z_i, \bar{z}_j)$における展開、

$$k_\alpha(z, w)=\sum_{s, t=0}^{\infty} a_{st}(z-z_i)^s(\overline{w-z_j})^t,$$

の係数$a_{st}(0 \leqq s \leqq n_i-1, 0 \leqq t \leqq n_j-1)$及び$c_{is}(0 \leqq s \leqq n_i-1)$を用いて次のように行列を定義する。

$$K_{ij}^{\alpha}=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{st} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \quad K_\alpha=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & K_{ij}^{\alpha} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \quad C_i=\begin{pmatrix} c_{i0} & & \\ c_{i1} & \ddots & \\ \vdots & & \\ c_{in_i-1} & \ldots & c_{i0} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_k \end{pmatrix}$$

$$A_\alpha = K_\alpha - C \cdot K_\alpha \cdot C^*$$

定理　(1)　(EI)をみたす R で正則かつ$|f| \leqq 1$であるような函数fが存在する爲の必要十分条件は、任意の $\alpha \in T^m$に対して*Hermite*行列A_α が半正定値であることである。

(2)　解が一意的である為の必要十分条件は、ある $\alpha \in T^m$ に対して$\det A_\alpha = 0$ である。この時、解は次数 $r < \sum_{i=1}^{k} n_i + m - 1$ の*Blaschke product*である。

文　献

[1]　*M.B.Abrahamse,The Pick interpolation theorem for finitely connected domains.Mich Math.J.*26(1979) 195–203

[2] *S.Takahashi,Extension of the theorems of Carathéodory -Toeplitz-Schur and Pick,Pacific J.Math.* 138(1989)391–399.

22

概周期有理型関数について

吉田英信（千葉大理）

Yosida は［3］の中で、

「Favard は『第１種の有理型関数族と
概周期有理型族は一致する』ことを証明した」

と述べている。これは Favard が［2］で

「非定数の有理型関数が概周期であるための
必要十分条件は それが normalであることである」

を証明なしで与えていることによるらしい。 Favard が normal な有理型関数と言うのは、Yosida による第１種の有理型関数のことであろ。

楕円関数を含むような概周期有理型関数は Bessonoff［1］によって定義され、証明なしで下の定理１、系１に言及している。

ここでは、Bessonoff の定義に条件の追加が必要なことにふれ、そのもとに、

定理１　２つの概周期有理型関数の和、積はまた概周期有理型関数である。

が証明出来たことを報告する。これより

系１　楕円関数の和、積、商は概周期有理型関数である。

定理１を利用して、Yosida の言及（＝ Favard の結果）が誤りであることを示す

定理２　第１種の有理型関数であって概周期でないものがあり、逆に、概周期有理型関数であって第１種でないものがある

が得られる。

また、Favard に似た結果を得るために normal の定義を修正すれば、

定理３　非定数の有理型関数が概周期であるための必要十分条件はそれが normal であることである

が得られることを報告する。

References

[1] M.F.P.Bessonoff, Sur les fonctions presque periodiques d une variable complexe, definies dans tout le plan, C.R.Acad.Sci.Paris 182(1926),1011～1013.

[2] M.J.Favard, Sur les fonctions meromorphes normales du groupe des translations, C.R.Acad.Sci.Paris 185(1927),1434～1436.

[3] K.Yosida, On a class of meromorphic functions, Proc.Phys-Math.Soc.Japan 16(1934),227-235.

23

整関数の因子の意味での pseudo-primeness と有理型関数の factorization について

占部博信　京都教育大

以前、整関数の因子の意味での primeness を定義し、これに関するいくつかの結果と、有理型関数の分解への応用について報告したが、本講演では、もう少し一般に、次のような結果が得られることを報告したい。

<u>定理1</u>．$G(z)$ は位数が有限な非整数であり、因子の意味で pseudo-prime な整関数とし、$H(z)$ は G より位数が小さく、少くとも一つ simple zero か互いに素な位数の二つの zeros をもつ整関数として、$F(z) = H(z)/G(z)$ とする。このとき、G と H が共通零点を持たないとすれば、F は left-prime である。

これから種々の prime な (non-entire) merorphic functions の存在がわかる。

また、高々有限個の極をもつ有限位数の有理型関数の分解に関して、小沢先生の left-primeness の判定法がそのまま成立することに注意すると、F. Gross の問題へ肯定的な解答として、「P、Q が非定数多項式とすれば、

$\cos(\sqrt{Q(z)})/P(z)$ や $\sqrt{Q(z)}\cdot\sin(\sqrt{Q(z)})/P(z)$ は left-prime である」が示せること及び Y. Noda 氏の論法に注意すれば、次のような結果が示せることも報告したい。

定理２. $f(z)$ を位数が有限かつ非整数で（少くとも一つ零点をもち）高々有限個の極をもつ有理型関数とすると、高々可算個の $a \in \mathbb{C}$ を除いて $f(z)/(z-a)$ は prime である。

24

On algebroid solutions of some algebraic differential equations in the complex plane

TODA Nobushige

Nagoya Institute
of Technology

Let a_{jk} (j=0,1....,n; k=0,1,...,q_j) be entire functions without common zeros such that $a_{0q_0}\neq 0$, $a_{nq_n}\neq 0$ and at least one of a_{jk} is not constant.

Put

$$Q_j(w)=\sum_{k=0}^{q_j} a_{jk}w^k,\quad q_j=\deg Q_j$$

and we consider the differential equation

$$\sum_{j=0}^{n} Q_j(w)(w')^j=0. \tag{1}$$

We suppose that the D.E.(1) is irreducible over the field of meromorphic functions in $|z|<\infty$ and that it admits at least one nonconstant finite valued algebroid solution in $|z|<\infty$.

We say that the solution w is admissible if

$$T(r,a_{jk}/a_{nq_n})=S(r,w)$$

for all a_{jk}.

Theorem. Suppose that

(i) a_{nq_n} is polynomial and the other coefficients of (1) is of order finite;

(ii) $q_n+n>q_j+j$ (j=0,1,...,n-1).

Then, any algebroid solution of the D.E.(1) is not admissible.

25

2次元解析構造をもつ Riemann面のコロナ

林　実樹広　　　北大・理(数学)

コロナをもつRiemann面の例としてColeにより作られたものが知られている．このコロナがどんな構造をもつのか興味ある点であるが何も知られていないようである．ここでは，コロナの構造が分る，すなわち，極大イデアル空間の2次元解析構造に由来するコロナをもつ例を構成する．これは同時に，Riemann面の極大イデアル空間に2次元解析構造をもちうることを示すものである．

例は，Bishopによる1次元analytic variety Vでコロナをもつものを変形する．Vの作り方は，

$$E_n = \{a \in \mathbb{C} : 1 < |a| < 2,\ 2^n a \text{ は Gaussian integer}\}$$

$$V_n = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 ;\ |z|<4, |w|<4,\ \prod_{a,a' \in E_n} (z-a)(w-a') = 0\}$$

として，V_nの1点と，それと同一のV_{n+1}の点を同一視することで，1つの連結なanalytic varietyを作ったものをVとする．

この例を次のように変形する：

$\{t_n\}$ を十分速く 0 に収束する正数の列として，

$$W_n = \{(z,w) : |z|<4, |w|<4, \prod_{a,a' \in E_n} (z-a)(w-a') = t_n\}$$

とおく．W_n の境界と W_{n+1} の境界を Cole の例に習って細い帯で W とすると求める Riemann 面が得られる．この際，W_n の形式的な極限集合が

$$W_\infty = \bigcup_n \bigcup_{a \in E_n} \{(z,a) : |z|<4\} \cup \{(a,w) : |w|<4\}$$

となり，$\varinjlim_n H^\infty(W_n) = H^\infty(W_\infty)$ となることが示せる．あとは，Bishop の例にある論法を使うと W がコロナをもつことが分る．更に，Behrens の論法を多少修正することで，このコロナが2次元解析構造の一部として埋めれることが示せる．

26

Riemann 面における H^1-*BMO duality* について

志賀　啓成　　　　　　　　　　　　東工大理

Fefferman-Stein のH^1-BMO duality theorem によれば、$H^1(R^n)$ の双対空間はBMO(R^n)に等しい。これは、n=1 の場合単位円板内の（通常の）H^1 空間のdual space がBMOA (正則なBMO全体) と一致していることを示している。また、これは同時にH^1の real part の空間の dual space がBMOH (調和関数のBMO) となっていることを示している。Hardy 空間 H^1 は勿論、Riemann面上でも定義されているわけであるから、同様の問題をRiemann面上で考えることができる。Riemann 面 R がcompact bordered の時、$H^1(R)^* = BMOA(R)$ であることは知られている（Gotoh, Shiga）。本講演では、これをRiemann面 R が SO_{HB} end（すなわち、相対境界が有限個の解析曲線で、理想境界のharmonic measureが0）であるときを考える。

ところが、（compact bordered Riemann surface の場合とは異なり、）Heins[4]の例から、SO_{HB} end においてさえ、一般に $H^1(R)^* = BMOA(R)$ とは限らないことがわかる。そこで単位円板の場合と同様、次のような空間を考える。

定義　Riemann面 R 上の（実数値）調和関数 u が $h^1(R)$ に属するとは $u\circ\pi$ が単位円上のH^1関数 f のreal part となっていることと定める。ここにπはRの普遍被覆面としての単位円板からRへのcanonical projection。また、そのノルム$\|u\|_{(1),R}$ は f のH^1ノルムで与える。ただし、$f(0) = u(0)$ と取っておく。このとき：

定理　*R が SO_{HB} end であるとき、$h^1(R)$ の dual space は BMOH (R) になる。更に、$h^1(R)^*$ と BMOH (R) の同一視は連続である。すなわち、ある定数 $K > 0$ が存在して、任意の $\ell \in h^1(R)^*$ に対して、それを導くBMOH (R)の元 g_ℓ が一意的に定まり、不等式、*

$$K^{-1}\|\ell\| \le \|g_\ell\|_* \le K\|\ell\|$$

が成立する。

証明は以下のLemmasを用いてなされる。

Lemma 1. *$h^1(R)$に属する関数は、その境界値で、（境界曲線が解析的と仮定しているから）単位円内の h^1関数（の直積）と同一視できるが、この対応及びその逆写像は連続になる。*

Lemma 2. R が *SO_{HB} end であるとき、相対境界 ∂R の近傍で BMOH である quasi-bounded harmonic function は* R *全体でBMOHである。*

これらのLemmasの証明の副産物として：

Corollary. *SO_{HB} end では有界調和関数全体はh^1内で dense である。*

が得られる。

Lemma 1 の証明には、Burkholder-Gundy-Silverstein の定理（Maximal function によるh^1関数の特徴付け）とHyperbolic geometry のある種の議論を用いる。また、Lemma 2 の証明はGreen 関数のweight 付きの積分によるBMOHの特徴付けを使う。

最後に、この定理から得られる一つの考察について述べる。一般にFuchs群Γから、それに付随した条件付き確率 E_Γが定義される（cf. Fisher[2]）。この作用素は、幾つかの性質を持っているが、上記定理より：

命題 *Fuchs群Γが SO_{HB} endを表現するとき、それに付随した条件付き確率E_Γは単位円周上のBMOからΓ不変なBMO関数の上への連続な作用素になっている。*

参考文献

[1] Fefferman, C. and Stein, E. M., H^p spaces of several variables, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

[2] Fisher, S. D., Function theory of planar domains, John Wiley & Sons, 1983.

[3] Gotoh, Y., Riemann面上のBMO関数について、京都大学修士論文、1985.

[4] Heins, M., Hardy classes on Riemann surfaces, LNM 98, Springer , 1969.

[5] Shiga, H., Hardy spaces and BMO on Riemann surfaces, to appear.

27

Purely hyperbolic two-generator groups に関する Jørgensen の不等式について

佐藤 宏樹　　静岡大学・理

Jørgensen の不等式 (T. Jørgensen, Amer. Math J. 1976)

$G=\langle A,B\rangle \subset PSL(2,\mathbb{C})$ を non-elementary discrete group とする。このとき、

$$|\mathrm{tr}^2 A-4|+|\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1}-2|\geq 1$$

また、1 は best possible である

$G=\langle A,B\rangle$ が non-elementary purely hyperbolic group の場合は Gilman (1986) による次の結果がある。

$$|\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1}-2|>1.$$

$G=\langle A,B\rangle$ が non-elementary purely hyperbolic group の場合、次の結果を得たので報告する

定理 1. $G=\langle A,B\rangle \subset PSL(2,\mathbb{R})$ を non-elementary purely hyperbolic group とする。このとき、

1) $|\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1}-2|>4$

2) $|\mathrm{tr}^2 A-4|+|\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1}-2|>4$

また、4 は best possible である。

より精密な結果は次の定理2である。一般に

hyperbolic な変換 A, B の multipliers をそれぞれ $1/t_1$, $1/t_2$ $(0<t_1<1,\ 0<t_2<1)$, fixed points を p_A, q_A ; p_B, q_B とし, ρ をこれら4点の非調和比 $\rho=(p_A, q_A, p_B, q_B)$ とする. このとき $\langle A,B\rangle \longleftrightarrow (t_1, t_2, \rho)\in(0<|z|<1)^2\times(\mathbb{C}-\{0,1\})$ の対応がある

定理2. $G=\langle A,B\rangle\subset PSL(2,\mathbb{R})$ を non-elementary purely hyperbolic group とし, (t_1, t_2, ρ) を $\langle A,B\rangle$ に対応する点とする.

(1) $t_1>0,\ t_2>0,\ \rho>0$ のとき, すなわち $\langle A,B\rangle$ が Type I のとき,

1) $\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1}-2>16$

2) $|\mathrm{tr}^2A-4|+|\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1}-2|>16$

16 は best possible である.

(2) $t_1>0,\ t_2>0,\ \rho<0$ のとき, すなわち $\langle A,B\rangle$ が Type IV のとき,

1) $\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1}-2<-4$

2) $|\mathrm{tr}^2A-4|+|\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1}-2|>4$

4 は best possible である.

証明は N. Purzitsky, Math Z. (1972) ; H. Sato, Tôhoku Math J. (1988) の結果を用いてなされる.

28

Teichmüller 空間の境界上にない無限生成 "b-group"

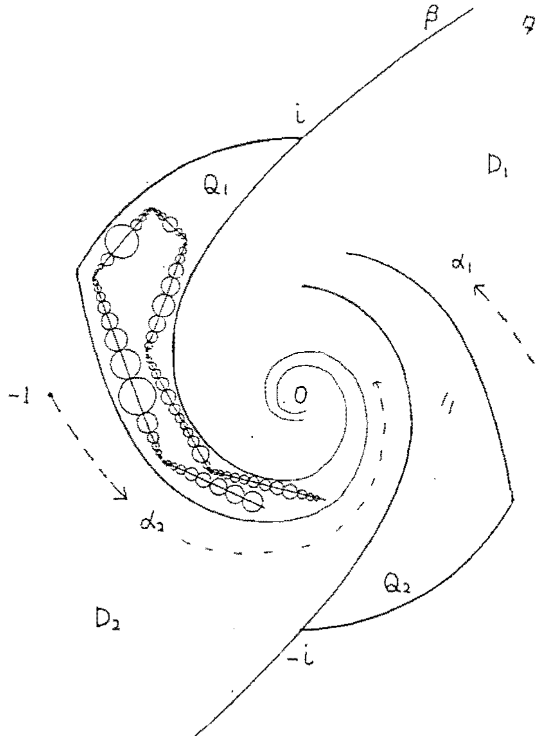
松崎克彦　　東工大・理

Suppose that D is a simply connected domain of hyperbolic type in the extended complex plain $\hat{\mathbb{C}}$. Then the Poincaré density ρ_D in D is given by $\rho_D(z)=(1-|g(z)|^2)^{-1}|g'(z)|$, where g is any conformal mapping of D onto the unit disk $\Delta=\{z:|z|<1\}$. For each function φ defined in D, we introduce the hyperbolic L^∞- norm $\|\varphi\|_D=\operatorname{ess\,sup}_{z\in D}|\varphi(z)|\rho_D(z)^{-2}$. Next for each function f which is locally univalent and meromorphic in D, we define the Schwarzian derivative of f by $S_f=(f''/f')'-\frac{1}{2}(f''/f')^2$. Let Γ be a Fuchsian group acting on Δ. We denote the Banach space of bounded holomorphic quadratic differentials for Γ by $B_2(\Delta,\Gamma)$, i.e., a holomorphic function φ on Δ belongs to $B_2(\Delta,\Gamma)$ if $(\varphi\circ\gamma)(\gamma')^2=\varphi$ for every $\gamma\in\Gamma$ and $\|\varphi\|_\Delta<\infty$. Let $S(1)=\{S_f:f \text{ is conformal in } \Delta\}$ and $T(1)=\{S_f\in S(1):f(\Delta) \text{ is a quasidisk}\}$. We also define $S(\Gamma)=S(1)\cap B_2(\Delta,\Gamma)$ and $T(\Gamma)=T(1)\cap B_2(\Delta,\Gamma)$. For any Γ, it is known that $T(\Gamma)\subset S(\Gamma)\subset B_2(\Delta,\Gamma)$, $T(\Gamma)$ is open and $S(\Gamma)$ is closed in $B_2(\Delta,\Gamma)$. $T(\Gamma)$ coincides with the Bers embedding of the Teichmüller space of Γ.

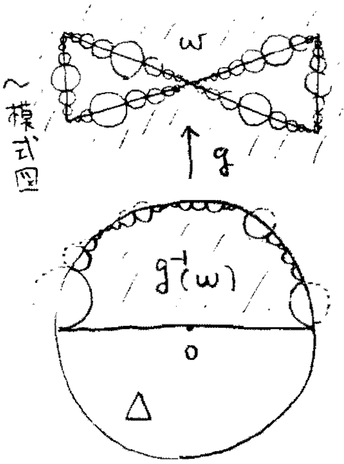
Sugawa [3] は $\Gamma=1$ に対する Gehring [2] の結果を拡張して、任意の第2種Fuchs群Γに対して、$S(\Gamma)-\overline{T(\Gamma)}\neq\phi$ であることを証明した。ここでは、第1種Fuchs群に対しても次の例を報告する：

> Δ に作用する無限生成Fuchs群Γで、$\Delta/\Gamma\cong\mathbb{C}-\{$可算個の点$\}$, $S(\Gamma)-\overline{T(\Gamma)}\neq\phi$ となるものが存在する。

構成法は [1] と同様にして、図の円周に関する偶数回の反転により生成される spiral 状の limit set をもつ "b-group" H をつくればよい。Ω ($\subset \Omega(H)$) を H の invariant component とし、$g : \Delta \to \Omega$ を Riemann mapping, $\Gamma = g^{-1}Hg$ ととる。$S_g \notin \overline{T(1)}$ は次のことからわかる：① Ω 上の conformal map f に対して $\|S_f\|_D \leq \|S_f\|_\Omega$, ② ${}^\exists\delta > 0$ s.t. $\|S_f\|_D \leq \delta \Rightarrow \lim\limits_{\alpha_1 \ni z \to 0} f(z) = \lim\limits_{\alpha_2 \ni z \to 0} f(z)$, ③ よって $f(\Omega)$ は Jordan domain でない。ここで $D = \hat{\mathbb{C}} - Q$, $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{0\}$。$w$ ($\subset \Omega$) を円板の外側とし、g を適当にとれば、$g^{-1}(w) \cup \overline{g^{-1}(w)}$ が Γ の Dirichlet 基本領域となることから、$\Delta/\Gamma \cong \mathbb{C} - \{P_n\}$ がわかる。



Figure



[1] Abikoff,W., Some remarks on Kleinian groups, Ann. of Math. Studies 66 (1971), 1-5.

[2] Gehring,F.W., Spirals and the universal Teichmüller space, Acta Math. 141 (1978), 99-113.

[3] Sugawa,T., On the Bers conjecture for Fuchsian groups of the second kind, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

29

単位円板上の正則写像の境界挙動と剛性

谷川 晴美　　　東工大 理

前回の講演でタイヒミュラー空間の中への正則写像の rigidity について述べましたが、その結果が改良できましたので報告します。（以下、$\Delta=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$）

定義. $M\subset\mathbb{C}^m$ を有界領域、$f:\Delta\to M$ を正則写像とする。$\hat{f}(\cdot,0)=f(\cdot)$ on Δ なる任意の正則写像 $\hat{f}:\Delta\times\Delta\to M$ が第二変数に依存しないとき（$\hat{f}(\cdot,0)=\hat{f}(\cdot,\zeta)$ $\forall\zeta\in\Delta$）f は rigid であるという。

定理 1. $M\subset\mathbb{C}^m$ は有界領域で Mと交わりをもたない *pluripolar sets の可算列 $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $\partial M\setminus\cup R_k$ のすべての点 p に対し、次のいづれかが成立するものとする。（ただし d_M は Mにおける小林距離）

(i) $h:\Delta\to M$ holomorphic, $h(0)=p\Rightarrow h\equiv p$ on Δ

(ii) $\forall\{p_i\}\subset M$ with $\lim_{i\to\infty}p_i=p$, $\forall\alpha>0$,

$$\lim_{i\to\infty}\mathrm{diam}_E\{g\in M;\ d_M(p_i,g)<\alpha\}=0$$

このとき Δ から M の中への任意の holomorphic proper map は rigid である。実際、non-rigid holomorphic map は $\partial\Delta$ 上ほとんどいたるところ M の中に radial limit をもつ。 （除外集合 R_k が local にしか定義されていなくてもよい というところがミソ）

(*ここで、$K \subset \mathbb{C}^m$ が pluripolar set とは、$^\forall p \in K$, $^\exists U \subset \mathbb{C}^m$ nbd of p, $^\exists s$: plurisubharmonic function on U, s.t. $K \cap U = \{z \in U;\ s(z) = -\infty\}$).

なお、M が $\mathbb{C}^m$ の領域の場合だけでなく、もう少し一般の複素多様体のときにも定理1は成立することにも講演中にふれる。

定理2. $M \subset \mathbb{C}^m$ を有界領域で complete hyperbolic とする。M と交わりをもたない pluripolar sets の可算列 $\{R_k\}$ が存在し、$\partial M \setminus \cup R_k$ にふくまれる analytic set の次元が l 以下とする。このとき、任意の holomophic proper map $f: \Delta \to M$ に対し、f は rank $l+1$ 以上の変形をもたない。すなわち、$^\forall \hat{f}: \Delta \times \Delta^r \to M$, holomophic map with $\hat{f}(\cdot, 0) = f(\cdot)$ on Δ, $^\forall z \in \Delta$, $^\forall \zeta \in \Delta^r$, $\hat{f}(z, \cdot): \Delta^r \to M$ の ζ における rank は l 以下。（ここで $\Delta^r = \overbrace{\Delta \times \cdots \times \Delta}^{r}$）

定理2で $\cup R_k = \phi$ の場合は今吉洋一氏の未発表の結果に含まれる。

30

On generalized power series in hypercomplex n-tuple spaces

笹山浩良　（笹山研究所）

ノルム空間$\mathbb{B}$に随伴する hypercomplex n-tuple space $E(\mathfrak{S})$における冖級数を四元複素函数論における冖級数に類似に

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{p_m} M_m^{(a)}(X) \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{p_m} \mathfrak{K}_{m,o}^{(a)} \mathbb{L}_m(X\mathfrak{K}_{m,1}^{(a)},\dots,X\mathfrak{K}_{m,m}^{(a)})$$

と定義する。ここに$\mathfrak{K}_{m,\ell}^{(a)}$ $(\ell = 1,\cdots,m)$は単位$\ni$をもつn次元非可換多元環$\mathfrak{S}$の多元定数，$X \in E(\mathfrak{S})$，とし$X_1,\dots,X_m \in E(\mathfrak{S})$に対して

$$\mathbb{L}_m(X_1,\dots,X_m) \equiv \sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n} \mathscr{L}_m(\underset{(1)}{x}{}_{j_1},\dots,\underset{(m)}{x}{}_{j_m})\cdot \cdot e_{j_1}\dots e_{j_m}$$

とする。但し$\mathscr{L}_m(x_1,\dots,x_m)$は$\mathbb{B}^m$よりノルム空間$\mathbb{B}'$への完全対称な有界な multilinear function で$(e_1,\dots,e_n)$は$e_1 = \ni$なる如き$\mathfrak{S}$の base とする。$\mathfrak{S}$及び$E(\mathfrak{S})$においては、積のノルムは必ずしもノルムの積に等しくない事から、通常の函数論における方法が適用困難であるが，取りあえず

次の結果を得たので報告する：

（定理）一点 $X_0 \in E(\mathfrak{S})$ で数列 $(\|X_0\|^m \|\mathfrak{K}^{(a)}_{m,0}\| \cdots \|\mathfrak{K}^{(a)}_{m,m}\|$ $;1 \leqq a \leqq p_m; m= 0,1,2,3,\ldots)$ が有界且つ $\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{p_m} = 1/\mu$ $(\mu \leqq 1)$ ならば $\|X\| < \mu\|X_0\|$ で級数 $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{p_m} M_m^{(a)}(X)$ は絶対収束し，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|X\| \leqq \mu\|X_0\| - \varepsilon$ で一様収束する。

（定理）$\limsup_{\substack{1 \leqq a \leqq p_m \\ m\to\infty}} \left(\sum_{a=1}^{p_m} \|\mathfrak{K}^{(a)}_{m,0}\| \cdots \|\mathfrak{K}^{(a)}_{m,m}\|\right)^{1/m} = \frac{1}{R}$,
$\frac{1}{\mu} \limsup_{1 \leqq a \leqq p_m, m\to\infty} \left(\|\mathfrak{K}^{(a)}_{m,0}\| \cdots \|\mathfrak{K}^{(a)}_{m,m}\|\right)^{1/m} = \frac{1}{r}$ の時，

級数 $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{p_m} M_m^{(a)}(X)$ は $\|X\| < R$ で従って $\|X\| < r$ で絶対収束し

任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|X\| \leqq R - \varepsilon$ で従って $\|X\| \leqq r - \varepsilon$ で一様収束する。

（定理）もし級数 $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{p_m} M_m^{(a)}(X)$ が $\|X\| < \rho$ で絶対収束ならば，この級数は $\|X\| < \rho$ で $(x_1, \ldots, x_n)$ について従って各 $x_k (1 \leqq k \leqq n)$ について何回でも Fréchet 微分可能であり、その逐次 Fréchet 微分は増分について完全対称であり、項別に Fréchet 微分して得られる。但し $\mathbb{B}$ が実又は複素ノルム空間に応じて $\mathbb{B}'$ は夫々実又は複素 Banach 空間であるものとする。

31

The defect relations for moving targets in subgeneral position

城崎　学　　大阪府立大・工

n, N 及び q を、$N \geq n$, $q \geq 2N-n$ なる正整数とする.

正則写像 $f : \mathbb{C} \to P^n(\mathbb{C})$ 及び $g_j : \mathbb{C} \to P^n(\mathbb{C})$ $(0 \leq j \leq q)$ を与える. $\tilde{f} = (f_0, \cdots, f_n)$, $\tilde{g}_j = (g_{j0}, \cdots, g_{jn})$ をそれぞれ f, g_j の reduced representations とする. 簡単の為、$g_{j0} \not\equiv 0$ $(0 \leq j \leq n)$ と仮定して、$\mathbb{C}$ に全ての g_{jk}/g_{j0} を添加した体を $\mathcal{R}$ とする. このとき、f が $\mathcal{R}$ 上非退化ならば

$$h_j := g_{j0} f_0 + \cdots + g_{jn} f_n \not\equiv 0$$

なので、f の g_j に対する counting function

$$N_{f, g_j}(r) := N_{h_j, 0}(r)$$

と、defect

$$\delta(f, g_j) := \varliminf_{r \to \infty} \left(1 - \frac{N_{f, g_j}(r)}{T_f(r) + T_g(r)}\right)$$

が定義できて、$0 \leq \delta(f, g_j) \leq 1$ である. これらの状況下で

定理　次を仮定する:

(i) $$T_{g_j}(r) = o(T_f(r)) \quad (0 \le j \le q);$$

(ii) $^{\forall}A \subset \{0, 1, \cdots, q\}$ $^{\exists}j_0, \cdots, j_n \in A$
$\# A = N+1$,

s.t. $\det(g_{j_k \ell})_{0 \le k, \ell \le n} \not\equiv 0$.

このとき.

$$\sum_{j=0}^{q} \delta(f, g_j) \le 2N - n + 1.$$

$g_0, \cdots, g_q$ が (ii) を満たすとき、それらは.
N-subgeneral position にあるという.

32

局所対称空間のコンパクト化への有理型写像の値分布

相原義弘　東芝総研
野口潤次郎　東工大 理

$\mathcal{D}$を$\mathbb{C}^m$内の有界対称領域, γを$\mathcal{D}$の正規化されたBergman計量の正則断面曲率の上限とする. $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$をneatな数論的部分群, Γによる$\mathcal{D}$の商空間をVとする. $\bar{V}$でVの非特異トロイダル・コンパクト化で$D=\bar{V}-V$が高々正規交叉のみを許す超曲面であるものを表わす. $\mathrm{Mer}^*(\mathbb{C}^n,\bar{V})$を$\mathbb{C}^n$から$\bar{V}$への極大階数の有理型写像で$f(\mathbb{C}^n)\not\subset D$をみたすもの全体からなる集合とする。この時, $f\in\mathrm{Mer}^*(\mathbb{C}^n,\bar{V})$に対し次の第2主要定理型不等式をうる.

定理1. $1\leq n<m$, $f\in\mathrm{Mer}^*(\mathbb{C}^n,\bar{V})$とする時,

$$\gamma\{T_f(r,K(\bar{V}))+T_f(r,[D])\}\leq\bar{N}_f(r,D)+S_f(r)$$

が成立する。但し, 任意の$\varepsilon>0$に対して,

$$S_f(r)=n(1+\varepsilon)^2\log^+T_f(r,[D])+\varepsilon n(2n-1)\log r\,\|_{E(\varepsilon)}$$

である.

定理2. $1\leq m\leq n$, $f\in\mathrm{Mer}^*(\mathbb{C}^n,\bar{V})$とする時,

$$T_f(r,K(\bar{V}))+T_f(r,[D])\leq\bar{N}_f(r,D)+S_f(r)$$

が成立. $S_f(r)$は定理1と同様である。

定理1, 定理2より次の結果をうる.

$$\Theta_f(D) = 1 - \limsup_{r \to +\infty} \frac{\overline{N}_f(r, D)}{T_f(r, [D])}$$

とし, $\theta_0 = \theta_0(\mathcal{D}, \Gamma)$ で次の条件(*)をみたす有理数μの下限を表わす.

(*) $|\nu(K(\overline{V}) + \mu[D])|$ はある$\nu \in \mathbb{Z}^+$ ($\mu\nu \in \mathbb{Z}$) に対し, V内に base point をもたない.

定理3. (除外関係式) $f \in \mathrm{Mer}^*_r(\mathbb{C}^n, \overline{V})$ とする.

(i) $n < m$ の時 $\Theta_f(D) \leq 1 - \gamma(1 - \theta_0)$

(ii) $n \geq m$ の時, $\Theta_f(D) \leq \theta_0$

系1. (cf. Nadel [1]) $1 \leq n < m$, $\theta_0 < 1 - \frac{1}{\gamma}$ とすると $\mathrm{Mer}^*_r(\mathbb{C}^n, \overline{V}) = \phi$.

系2. (分岐定理) $1 \leq n < m$, $f \in \mathrm{Mer}^*_r(\mathbb{C}^n, \overline{V})$ がD上少くともλ位に分岐すれば $\lambda \leq \frac{1}{\gamma(1 - \theta_0)}$

更に, 定理1, 2は定義域が$\mathbb{C}^n$の有限葉分岐被覆空間又は$\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} ; 0 < |z| < 1\}$の時にも成立し, その1つの応用として正則写像 $f : \Delta^* \to V$ の拡張定理の別証が得られる.

文献. [1] A. M. Nadel, Ann. Math. 129 (1989), 151-178.

[2] J. Noguchi, Moduli space of abelian varieties over function fields, to appear in International J. Math.

33

局所対称空間のコンパクト化への有理型写像の一意性定理

相原義弘　　東芝総研

$\mathcal{D}$を$\mathbb{C}^m$内の有界対称領域, γを$\mathcal{D}$のBergman計量の正則断面曲率の上限, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$をneatな数論的部分群, $V = \Gamma \backslash \mathcal{D}$とする。$\overline{V}$を$V$の非特異トロイダルコンパクト化で$D = \overline{V} - V$は高々正規交叉であるものとする. $X \to \mathbb{C}^n$は有限葉分岐被覆空間, Rをその分岐因子, kを整数とする. $\mathrm{Mer}_k(X, \overline{V})$で$X$から$\overline{V}$への極大階数の有理型写像で$f(X) \not\subset D$をみたすもの全体のなす集合を表わす. $\iota : \overline{V} \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$を非定数正則写像, $[H] \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$を超平面束とする。この時, 次の一意性定理が成立する.

定理1. $1 \leq n < m$とし, $f, g \in \mathrm{Mer}_k(X, \overline{V})$は次の(i)~(iv)をみたすとする.

(i) $f^{-1}(D) = g^{-1}(D) = E$　(ii) $f = g$ on E

(iii) $L = K(\overline{V}) \otimes [D] \otimes \frac{2}{\gamma} \iota^*[H]^{-1}$はbigである$\nu \in \mathbb{Z}^+$ ($\frac{2\nu}{\gamma} \in \mathbb{Z}^+$)に対し, $|\nu L \otimes [D]^{-1}|$はV内にbase pointをもたない. (iv) $\liminf_{r \to +\infty} \dfrac{2N(r, R)}{T_f(r, L) + T_g(r, L)} < \gamma$

この時, $\iota \circ f = \iota \circ g$ on Xが成立する.

定理2. $1 \leq m \leq n$ とする. $f, g \in \mathrm{M}^{*}_{\mathrm{er}}(X, \overline{V})$ は上記(i), (ii) と次の (iii)′, (iv)′ をみたすとする.

(iii)′ $L = K(\overline{V}) \otimes [D] \otimes 2\iota^{*}[H]^{-1}$ は big.

(iv)′ $$\liminf_{r \to +\infty} \frac{2N(r, R)}{T_f(r, L) + T_g(r, L)} < 1$$

この時, $\iota \circ f = \iota \circ g$ on X.

(cf. S. Drouilhet, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981))

特に $m = 1$ の場合を考える.

定理3. $f, g : X \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ を非定数有理型写像, $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ の相異なる $2k+3$ 点 $a_1, \cdots, a_{2k+3}$ に対して $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(a_i)$ とする. この時, $f = g$ on X.

次に $\overline{S}$ を genus $g_0 \geq 1$ のコンパクトリーマン面,

$l_0 = \min\{l \in \mathbb{Z}^{+}$; 非定数正則写像 $\varphi : \overline{S} \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ で $\deg \varphi = l$ となるものが存在$\}$

として, $d = 2\{(2g_0+1)(k-1) + l_0\} + 1$ とおく.

定理4. $f, g : X \to \overline{S}$ を非定数有理型写像で $\overline{S}$ の相異なる d 個の点 $a_1, \cdots a_d$ に対して $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(a_i)$ とする. この時, $f = g$ on X が成立する。

これらは古典的な一意性定理の拡張となっている.

34

線型項が identity である局所的変換

上田哲生　　　京大・教養

$O=(0,0)\in C^2$ の周りで定義された解析的変換 $T:(x,y)\to(x_1,y_1)$ で $T(O)=O$ なるもの（の germ）の全体を $\mathcal{T}$ で表す。このうちで，線型項が identity なるもの：

$$T\quad\begin{cases} x_1 = x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots, \\ y_1 = y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + \cdots, \end{cases}$$

の全体を $\mathcal{T}_0$ で表す． $T,\ T' \in \mathcal{T}$ が 2-同値 $(T \underset{2}{=} T')$ であるとは，x,y に関する 2次までの項が一致することを言う． $T,\ T' \in \mathcal{T}$ が 2-共役 $(T \underset{2}{\sim} T')$ とは可逆な変換 $S\in\mathcal{T}$ で，$STS^{-1} \underset{2}{=} T'$ なるものがあることを言う． $T,\ T'\in\mathcal{T}_0$ が 2-共役のとき，S として線型変換をとることができる．

定理 1． (a)　$T\in\mathcal{T}_0$ は 次の標準型のどれかと 2-共役である．

$$N_1(\lambda_1,\lambda_2)\quad\begin{cases} x_1 = x + \lambda_1 x^2 + (\lambda_2+1)xy \qquad + \cdots \\ y_1 = y + \qquad + (\lambda_1+1)xy + \lambda_2 y^2 + \cdots \end{cases}$$

$$N_{2,1}(\lambda)\quad\begin{cases} x_1 = x + \lambda x^2 + \quad xy \qquad + \cdots \\ y_1 = y + \qquad + (\lambda+1)xy + y^2 + \cdots \end{cases}$$

$$N_{2,0}(\lambda)\quad\begin{cases} x_1 = x + \lambda x^2 \qquad\qquad + \cdots \\ y_1 = y + \qquad + (\lambda+1)xy + \cdots \end{cases}$$

$$N_{3,2}\quad\begin{cases} x_1 = x \qquad + xy \qquad + \cdots \\ y_1 = y + x^2 + \qquad + y^2 + \cdots \end{cases}$$

$$N_{3,1} \quad \begin{cases} x_1 = x + x^2 & + \cdots \\ y_1 = y + x^2 + xy & + \cdots \end{cases}$$

$$N_{3,0} \quad \begin{cases} x_1 = x & + \cdots \\ y_1 = y + x^2 & + \cdots \end{cases}$$

$$N_4 \quad \begin{cases} x_1 = x + x^2 & + \cdots \\ y_1 = y \quad + xy & + \cdots \end{cases}$$

N_0 = identity.

(b)　$N_1(\lambda_1, \lambda_2)$ と $N_1(\lambda_1', \lambda_2')$ とが 2-共役であるための必要充分条件は $\lambda_3 = -(1+\lambda_1+\lambda_2)$，$\lambda_3' = -(1+\lambda_1'+\lambda_2')$ としたとき，λ_1'，λ_2'，λ_3' が λ_1，λ_2，λ_3 の permutation であることである．このほかには，上の標準形のあいだに 2-共役なものはない．

定理 2．　T の 2次の項を任意に与えたとき，これを C^2 の解析的自己同型写像として実現することができる．C^2 の多項式による自己同型写像として実現できるための必要充分条件は，T が $N_1(-1/3, -1/3)$，$N_{2,0}(-1/3)$，$N_{3,0}$，N_0 のどれかと 2-共役なることである．

定理 3．　$N_1(\lambda_1, \lambda_2)$ において，λ_1，λ_2，λ_3 のうちで，実部が正のものがあれば，原点 O に一様収束する点が存在する．

$N_{2,1}(\lambda)$，$N_{2,0}(\lambda)$ において，λ の実部が正ならば O に一様収束する点が存在する．

35

An analogue of Tian-Todorov-Bogomolov' theorem on the deformation of CR-structures

赤堀隆夫　　新潟大学理学部
宮嶋公夫　　鹿児島大学教養

Bogomolov・Tian・Todorov によって canonical line bundle が trivial となる compact Kähler 多様体の複素構造の変形の versal family の parameter space は、smooth であることが証明された。その証明は、次の2つの step より構成されている。

1-st. step　deformation equation を、canonical line bundle が trivial であるより differential forms 上の equation に還元する。

2-nd step　compact Kähler 多様体上の Hodge 構造を使って smoothness を、証明。

ところで この結果を、$(V, o) \hookrightarrow (\mathbb{C}^N, o)$ として

(1)　孤立特異点、(V, o)

(2) open manifold $V-0$

(3) $M = V \cap S_\varepsilon^{2N-1}(0)$ 上の CR-structure の変形理論に拡張してみるのは、自然なこころみであると思われる。(1), (2), (3) は、強い関連を、もっているがここでは、(3) の case について論じてみる。(3) の場合の Hodge 構造は、compact Kähler のときより複雑でその複雑さ故、変形の方向によって smoothness が出てくる。得られた結果は、

定理. $(M, {}^{\circ}T'')$ を、compact normal s.p.c. manifold で $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n-1 \geqq 7$. そしてその canonical line bundle は、trivial とする。すると $I^{(n-2,1)}$ 方向の deformation は、$I^{(n-2,2)\perp}$ 方向には、obstruct されない。

36

On the transcendency of the values of modular function at algebraic points

志賀弘典　　千葉大・理

次の主定理が得られ，その応用として各種の（Siegel modular function を含む）保型函数の代数点での値が代数的になるための必要十分条件が与えられる．

定理　Aを主偏極を与えられたg次元アーベル多様体でその周期行列$\Omega(A)$はg次Siegel上半空間$\mathfrak{S}_g$の代数点であるとする．このとき，Aが$\overline{\mathbb{Q}}$上定義されることと$\Omega(A)$がCM-point 即ちある$Sp(g,\mathbb{Q})$の元Mの孤立不動点となることとは同値である．

応用例　種数2の曲線族 $y^2=x(x-\xi_0)\cdots(x-\xi_3)$ （$\vec{\xi}\in\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$）に対する modular mapping $J:\mathfrak{S}_2\to\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ は $[\xi_0,\cdots,\xi_3]=[\vartheta^2_{0000}\vartheta^2_{0100},\vartheta^2_{1000}\vartheta^2_{1100},\vartheta^2_{1100}\vartheta^2_{1010},\vartheta^2_{1010}\vartheta^2_{1000}]$ で与えられる．

Ωが$\mathfrak{S}_2$の代数点のとき，

$$J(\Omega)\in\mathbb{P}^3(\overline{\mathbb{Q}})\Leftrightarrow \Omega\text{が}\mathfrak{S}_2\text{の CM-point}$$

Problem

- arithmetic な modular function は.
  代数点でいつ代数値をとるか?
  その値はどのような性質をもつか?

37

A GEOMETRIC CHARACTERIZATION OF A SIMPLE K3-SINGURARITY

渡 辺 公 夫　　筑波大学数学系
石 井 志 保 子　　東京工業大学理学部

A simple K3-singularity is defined in terms of the Hodge structure as a three dimensional analogue of a simple elliptic singularity. It is well known that a simple elliptic singularity is chracterized by the geometric structure of the minimal resolution. The aim of this talk is to prove that a simple K3-singularity is also characterized by the geometric structure of a Q-factorial terminal modification which is a three dimensional analogue of the minimal resolution.

Let $f\colon \tilde{X} \to X$ be a good resolution of a normal isolated singularity (X, x). We denote $f^{-1}(x)_{red}$ by E and decompose it into irreducible components E_i $(i = 1,2,\dots,s)$. If (X, x) is a Gorenstein singularity, then we have a presentation of canonical divisors;

$$K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum_{i\in I} m_iE_i - \sum_{j\in J} m_jE_j \, ,$$

where $m_i \geq 0$ for any $i \in I$ and $m_j > 0$ for any $j \in J$.

Definition 1. Under the previous situation, the divisor $\sum_{j\in J} m_jE_j$ is called the essential divisor and denoted by E_J.

Proposition 2. *A Gorenstein isolated singularity* (X, x) *is purely elliptic if and only if the essential divisor* E_J *is a non-zero reduced divisor (i.e.* $J \neq \phi$ *and* $m_j = 1$ *for every* $j \in J$*) for any good resolution* f.

For a Gorenstein purely elliptic singularity (X, x), we define the type of a singularity according to the Hodge structure of E_J. Since E_J is a complete variety with normal crossings,

$$H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \simeq Gr_F^0 H^{n-1}(E_J) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} H_{n-1}^{0,i}(E_J).$$

where $n = \dim (X, x)$ and $H_m^{p,q}(*)$ means the (p, q)-component of $Gr_{p+q}^W H^m(*)$. Since (X, x) is a purely elliptic singularity, $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) = H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E) = \mathbb{C}$. Therefore $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ must coincide with one of $H_{n-1}^{0,i}(E_J)$.

Definition 3. For an integer i ($0 \le i \le n-1$), a purely elliptic singularity (X, x) is of type $(0, i)$, if $H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J})$ consists of the $(0, i)$-Hodge component.

Definition 4. A normal isolated singularity (X, x) of dimension three is called a simple K3-singularity, if (X, x) is a Gorenstein purely elliptic singularity of type $(0,2)$.

Definition 5. A projective birational morphism $g: Y \to X$ is called a partial resolution of the singularity on X, if g is an isomorphism on the outside of the singular locus of X and Y is normal. A partial resolution $g: Y \to X$ is called a $\mathbb{Q}$-factorial terminal modification, if Y has only $\mathbb{Q}$-factorial terminal singularities and the canonical divisor K_Y is g-semi-ample.

Theorem. *Let (X, x) be a three dimensional normal isolated singularity. Then, (X, x) is a simple K3-singularity if and only if $D = g^{-1}(X)_{red}$ is a normal K3-surface for a $\mathbb{Q}$-factorial terminal modification $g : Y \to X$ of the tingularity.*

特別講演

ベルグマン核の漸近解析について

小松　玄　　　　阪大・理

1．序．ベルグマン核の不変式論は，なめらかな境界を持つ強擬凸領域に対して深く研究されている．しかしながら，二次元の場合に限っても，高次の漸近挙動を調べることには本質的な困難がつきまとう．それでは，考える領域のクラスを制限することによってより詳しい情報を得て，一般の場合に対する理解を深めることはできないであろうか？

この方向で，Boichu と Coeuré［1］は，（強擬凸な）二次元完全ラインハルト領域の族に対して，高次の漸近挙動を完全に記述できることを示した．中沢［2］は，この漸近展開公式を具体化することに成功し，かつ展開の係数を一般論の枠に入らない部分まで書き下した．これらの解析を定式化し直してみると，実際にはラインハルト領域というよりむしろ柱状領域における解析を行なっていることがわかる．本講演においては，そのことを踏まえて，（強擬凸な二次元）柱状領域における解析についての報告をしたい．

高次元の場合には，高次の漸近挙動を調べることは一般により困難になり，ほとんど研究が成されていない．恐らく唯一の結果として，平地［3］による実エリプソイドの族に対する第二変分公式が挙げられる，（強擬凸な）ラインハルト領域および柱状領域に対しては，高次元の場合にも漸近展開公式を書くことができるが，その幾何学的な意味はまだよくわからない．

2．**一般論**．なめらかな境界を持つ有界な擬凸領域 $\Omega \subset\subset \mathrm{C}^n$ が与えられたとき，そのベルグマン核 $K(z,w)$ を対角線集合 $z = w$ に制限したもの $K(z)$ を考える．この函数は z が境界点に近づくと正の無限大に発散するが，さらに強擬凸性を仮定すると特異性の形が限定される．即ち，領域の定義函数を指定して $\Omega = \{ r > 0 \}$ と書くと，境界まで込めてなめらかな函数 ϕ，ψ が存在して，境界の近くで

$$K(z) = \frac{\phi(z)}{r(z)^{n+1}} + \psi(z) \log r(z)$$

という形の表示式が成り立つ（Fefferman［4］）．よって

$$\phi = \sum_{j=0}^{n} \phi_j \, r^j + O(r^{n+1}), \qquad \psi = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, r^j + O(r^{\infty})$$

とテイラー展開されるが，ここで展開の係数 ϕ_j, ψ_j を境界の局所不変量であらわそうというのが Fefferman ［5］の目録（プログラム）である．これは熱核の不変式論の類似であり，時間変数に対応するのが定義函数 r である．展開の係数は r の取り方に依存するが，不変な意味を持つ r はたいていは境界まで込めてなめらかにはならず，このことが解析を困難にしている．（同時に，解析のてがかりをも与えている．）

不変な r の近似を上手に取ることにより，Fefferman は $j \leq n - 20$ に対して ϕ_j がワイル不変量によってあらわされることを示した．次元を $n = 2$ の場合に制限すればより詳しいことがわかる —— Robin Graham ［6］は ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ψ_0, ψ_1 の形を決定した．しかしながら，j が大きいときの ψ_j を調べることには本質的な困難が伴う．これが知られている一般論の概略である．

３．完全ラインハルト領域の場合．特に $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^2$ が（完全）ラインハルト領域であれば，K(z) は底領域（即ち，対数的な実表現領域の符号をかえたもの）

$$B = \{ (-\log|z_1|, -\log|z_2|) \in \mathbb{R}^2; \ z \in \Omega \}$$

の上の函数である．そこで $B = \{(x, y); \ y > f(x)\}$ と書き，Ωの定義函数として $r := y - f(x)$ を採用すれば，$z_1 z_2 \neq 0$ をみたす境界点の近くでは，

$$K(z) \sim \sum_{j=0}^{2} \frac{\phi_j}{r^{3-j}} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \log r \qquad \mathrm{mod} \ \ C^{\infty}$$

という形の展開が成り立つ．Boichu と Coeuré ［1］は，函数 f のテイラー展開の係数を用いて ϕ_j と ψ_j が具体的にあらわされることを示したが，表示を実行するには到らなかった．彼らの用いた関係式は大変に複雑であり，局所的ですらなかったからである．中沢［2］はこれを改良し，ϕ_j と ψ_j を f のテイラー展開の係数の函数として具体的に記述した．彼のアイディアのうちで決定的に重要なことは，一変数のホドグラフ変換を用いたことである：

$$v := f'(x) < 0 , \quad p(v) := f''(x) > 0 .$$

変数変換 $(x,y) \to (v,r)$ の後に．次の展開公式を得る：

$$(2\pi)^2 |z_1 z_2|^2 K(z) \sim \frac{p}{4} \left(\sum_{j=0}^{2} \tilde{\phi}_j r^{j-3} + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\psi}_j r^j \log r \right) \quad \mathrm{mod} \quad C^\infty .$$

但しここで $\tilde{\phi}_j$ と $\tilde{\psi}_j$ は p のテイラー展開の係数の函数であって，具体的には

$$\tilde{\phi}_0 = 2, \quad \tilde{\phi}_1 = \frac{p''}{2}, \quad \tilde{\phi}_2 = \frac{(p^2 p^{(3)})'}{3!}, \quad \tilde{\psi}_0 = \frac{(p^2 p^{(4)})''}{4!},$$

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{(p^3 p^{(5)})^{(3)}}{5!} + \frac{(p^2 p'' p^{(4)})''}{2 \times 4!}, \ \cdots$$

これより特に，ラインハルト球が $\tilde{\psi}_0 = 0$ という大域的な条件によって特徴付けられることがわかる．

４．柱状領域の場合． ラインハルト領域における正則函数はローラン展開されるが，L^2 正則函数全体の空間においてはこれはフーリエ級数展開になっており，そのことからベルグマン核に対する級数表示を得る．離散的な級数を連続的な積分で置き換えれば，柱状領域 $\Omega = B + i\mathbf{R}^n$ におけるベルグマン核に対するラプラス積分表示を得る：

$$K(z,w) = L_B(z+\overline{w}) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Lambda e^{-(z+\overline{w})\cdot\lambda} \frac{d\lambda}{D(\lambda)}, \qquad D(\lambda) := \int_B e^{-2\xi\cdot\lambda} d\xi ;$$

但しここで $\Lambda := \{\lambda \in \mathbf{R}^n ;\ D(\lambda) < +\infty\}$ とおいた．この表示式を用いると，［１］と［２］の手法は全て柱状領域の場合に翻訳されて，次の結果を得る．

定理． 強擬凸な柱状領域 $\Omega = B + i\mathbf{R}^2$ において，次の漸近展開公式が成り立つ：

$$(2\pi)^2 K(z) \sim \frac{p}{4} \left(\sum_{j=0}^{2} \tilde{\phi}_j r^{j-3} + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\psi}_j r^j \log r \right) \quad \mathrm{mod} \quad C^\infty .$$

ここで右辺は完全ラインハルト領域の場合の中沢［２］の表示式と同じ形をしている．

大域的に球面的な二次元（強擬凸）柱状領域は（底領域のアファイン変換を除いて）四通りある（Dadok-Yang［７］）．これらは常微分方程式 $p^{(4)} = 0$ に対応している．

常微分方程式 $\widetilde{\psi}_0 = 0$ に対する境界条件次第では， Ω は球面的にはならない．底領域が有界なときには，$\widetilde{\psi}_0 = 0$ とはならない．

ラプラス積分表示を用いると，底領域が二次曲線によって囲まれている場合の柱状領域のベルグマン核が計算される．∂B が円と双曲線の場合には，第一種および第二種の変形ベッセル函数を含んだ積分があらわれる．（∂B が放物線の場合には Ω は球と双正則である．）このことは，超幾何函数がベルグマン核と一般にどのようにかかわっているかを示唆していると思われる．

5．ラインハルト領域と柱状領域の関係． 同じ底領域 $B \subset R^n$ を持つラインハルト領域と柱状領域をそれぞれ Ω_R 及び Ω_T と書き，それらのベルグマン核を $K_R(z)$ 及び $K_T(w)$ と書こう．指数函数 $w_j = \exp[-z_j]$ による写像 $\Omega_T \rightarrow \Omega_R$ は局所的に双正則であるから，局所的な変換則を形式的に適用すれば，次の関係式にいたる：

$$K_T(z) = L_B(z+\bar{z}) \sim |w_1 \cdots w_n|^2 K_R(w).$$

B が強凸な場合には，前節の定理よりこれは特異性の関係をあらわしている（$n \geq 2$ の場合にも正しい）．次に，Steve Bell による固有正則写像に関する変換則を形式的に適用すれば，次の関係式の成立が予想される：

$$\sum_{\alpha \in Z^n} L_B(z+\bar{z}+2\pi i\alpha) = |w_1 \cdots w_n|^2 K_R(w).$$

これはポワソンの和公式にほかならない．

References

[1] D. Boichu et G. Coeuré, *Sur le noyau de Bergman des domaines de Reinhardt*, Invent. Math. **72** (1983), 131–152.

[2] N. Nakazawa, *Asymptotic expansion of the Bergman kernel for strictly pseudoconvex complete Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^2$, Proc. Japan Acad. **66 A** (1990), 39–41.

[3] K. Hirachi. *The second variation of the Bergman kernel of ellipsoids*, preprint.

[4] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[5] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[6] C. Robin Graham, *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel*, in "Complex Analysis II" ed. by C. A. Berenstein, Lect. Notes in Math. 1276, Springer, 1987, pp. 108–135.

[7] J. Dadok and P. Yang, *Automorphisms of tube domains and spherical hypersurfaces*, Amer. J. Math. **107** (1985), 999–1013.