日　本　数　学　会

1990年度秋季総合分科会

函数論分科会

講演アブストラクト

1990年9月

於

埼　玉　大　学

目次

9月26日(水) 第V会場

9. 30〜12. 00

1	尾和重義	(近畿大理工)	On (α, β)-convex functions of order γ ……15
2	尾和重義	(近畿大理工)	On p-fold symmetric (α, β)-convex functions of order γ ……15
3	H. M. Srivastava 尾和重義	(Univ. Victoria) (近畿大理工)	An application of a certain fractional derivative operator ……15
4	関根忠行 M. Obradović 尾和重義	(日大薬学) (Univ. Belgrade) (近畿大理工)	負の係数をもつある正則な関数族について……10
5	福井誠一 M. Obradović 尾和重義 坂口杲一	(和歌山大教育) (Univ. Belgrade) (近畿大理工) (奈良産大)	Two criteria for starlikeness ……15
6	渡辺ヒサ子	(お茶の水女大理)	楕円型偏微分作用素に対する Neumann 問題 ……15
7	二宮信幸		ポテンシャル論における最小変分……15

13. 30〜14. 30

8	相川弘明	(群馬大工)*	Nagel-Stein approach regions and minimal fine limit theorem ……15
9	相川弘明 林 仲夫 音田 功 斉藤三郎	(群馬大工) (群馬大工) (群馬大工) (群馬大工)	Analytical extensions of the member of the Bergman and Szegö spaces on some tube domains ……15
10	戸田暢茂	(名工大)	On the generalized Cartan conjecture ……15

函数論特別講演

W. Hansen	(Univ. Bielefeld)	Boundary behaviour of solutions of the Dirichlet problem ……(15. 00〜16. 00)

9月27日(木) 第V会場

9. 30〜12. 00

11	吉田京明	(日大理工)	Automorphisms with fixed points and Weierstrass points of compact Riemann surfaces ……15
12	井上克己	(金沢大医療短大)	離散 Moebius 群の isometric spheres ……15
13	須川敏幸	(京大理)	第2種 Fuchs 群に対する Bers 予想について……15
14	谷川晴美	(東工大理)	Rigitity of holomorphic mappings into Teichmüller spaces ……15
15	谷川晴美	(東工大理)	Orbits and their accumulation points of cyclic subgroups of modular groups……15
16	柴 雅和	(広島大理)	リーマン面の埋め込みと面積定理……15
17	宮嶋公夫	(鹿児島大教養)	コンパクト強擬凸実超曲面に沿った複素多様体の変形について……15
18	大沢健夫	(京大数理研)	複素解析空間の L^2 コホモロジー群について……15

函数論特別講演

西野利雄	(九大工)	乗法公式を持つ解析写像の代数的除外曲線……(13. 30〜14. 30)

1

ON (α,β)-CONVEX FUNCTIONS OF ORDER γ

SHIGEYOSHI OWA   KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}_n$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\})$$

which are analytic in the unit disk $\mathbb{U}$. A function $f(z) \in \mathcal{A}_n$ is said to be (α,β)-convex of order γ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha \frac{zf'(z)}{f(z)} + \beta\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right\} > \gamma$$

for some $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\gamma < \alpha+\beta$, and all $z \in \mathbb{U}$, where $\alpha+\beta>0$. Denoting by $\mathcal{A}_n(\alpha,\beta,\gamma)$ the subclass of $\mathcal{A}_n$ consisting of all (α,β)-convex functions of order γ, we have

THEOREM I. If $f(z) \in \mathcal{A}_n(\alpha,\beta,\gamma)$ with $\gamma \geqq \{\alpha-(n-1)\beta\}/2$, then $f(z) \in S_n^*(\delta)$, where

$$\delta = \frac{2\gamma - n\beta + \sqrt{(2\gamma-n\beta)^2 + 8n\beta(\alpha+\beta)}}{4(\alpha+\beta)},$$

and $S_n^*(\delta)$ means the subclass of $\mathcal{A}_n$ consisting of all starlike functions of order δ.

THEOREM 2. If $f(z) \in \mathcal{A}_n(\alpha, \beta, \gamma)$, then

$$\mathrm{Re} \sqrt{\frac{zf'(z)}{f(z)}} > \delta \qquad (z \in U),$$

where

$$3(\alpha+\beta)\delta^3 - 7(\alpha+\beta)\delta^2 + \{5(\alpha+\beta)+n\beta-\gamma\}\delta - (\alpha+\beta-\gamma) = 0$$

for $0 \leqq \delta \leqq 1/2$, and

$$3(\alpha+\beta)\delta^3 - 4(\alpha+\beta)\delta^2 + (\alpha+\beta+n\beta-\gamma)\delta - n\beta = 0$$

for $1/2 \leqq \delta < 1$.

2

ON P-FOLD SYMMETRIC (α,β)-CONVEX FUNCTIONS OF ORDER γ

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{F}(p)$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1} \qquad (p \in \mathbb{N})$$

which are p-fold symmetric in the unit disk $\mathcal{U}$. A function $f(z) \in \mathcal{F}(p)$ is said to be p-fold symmetric (α,β)-convex of order γ if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha \frac{zf'(z)}{f(z)} + \beta\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right\} > \gamma$$

for some $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\gamma < \alpha+\beta$, and all $z \in \mathcal{U}$, where $\alpha+\beta>0$. We denote by $\mathcal{F}(p,\alpha,\beta,\gamma)$ the subclass of $\mathcal{F}(p)$ consisting of all p-fold symmetric (α,β)-convex functions of order γ in $\mathcal{U}$.

Denoting by $\mathcal{S}^*(p,\delta)$ the subclass of $\mathcal{F}(p)$ consisting of all p-fold symmetric starlike functions of order δ, we have

THEOREM. If $f(z) \in \mathcal{F}(p,\alpha,\beta,\gamma)$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*(p,\delta)$, where

$$\delta=\delta(p,\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} \dfrac{\gamma(2\alpha-(p-2)\beta-2\gamma)}{2(\alpha+\beta)(\alpha-(p-1)\beta-\gamma)} & (\alpha-(p-1)\beta-2\gamma>0) \\ \dfrac{1}{2} & (\alpha-(p-1)\beta-2\gamma=0) \\ \left\{ \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^{p\beta/(\alpha+\beta)}} \right)^{2(\alpha+\beta-\gamma)/p\beta} dt \right\}^{-1} & (\alpha-(p-1)\beta-2\gamma<0). \end{cases}$$

3

AN APPLICATION OF A CERTAIN FRACTIONAL DERIVATIVE OPERATOR

H. M. SRIVASTAVA — UNIV. OF VICTORIA
SHIGEYOSHI OWA — KINKI UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the unit disk $\mathcal{U}$. Using the incomplete beta function

$$\phi(a,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} z^{n+1} \qquad (z \in \mathcal{U}),$$

where $c \neq 0,-1,-2,\ldots,$ and $(\lambda)_n$ is the Pochhammer symbol defined by

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1) & (n \neq 0), \end{cases}$$

we introduce the linear operator $L(a,c)$ by

$$L(a,c)f(z) = \phi(a,c;z)*f(z)$$

for $f(z) \in \mathcal{A}$, where the symbol "$*$" means the convolution.

Also, with a fractional differential operator $J_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta}$, we define the following fractional derivative operator $N_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta}$ by

$$N_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} f(z) = \frac{\Gamma(2-\beta)\Gamma(3-\alpha+\eta)}{\Gamma(3-\beta+\eta)} z^{\beta} J_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} f(z)$$

for $f(z) \in \mathcal{A}$.

In the present talk, we show some properties on the fractional derivative operator $N_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta}$.

THEOREM 1. If $0 \leqq \alpha < 1$, $\beta - \eta < 3$, and $0 \leqq \beta < 1$, then

$$L(3-\alpha+\eta, 3-\beta+\eta) N_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} \mathcal{K}(1/2) \subset \mathcal{S}^{*}(1/2).$$

THEOREM 2. If $0 \leqq \alpha < 1$, $\beta - \eta < 3$, and $0 \leqq \beta < 2$, then

$$L(3-\alpha+\eta, 3-\beta+\eta) N_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta} \mathcal{K}(\beta/2) = \mathcal{R}(\beta/2).$$

4 負の係数をもつある正則な関数族について

関根忠行 日大薬学部
M.Obradović Univ. of Belgrade
尾和重義 近畿大学

Uを単位円板とする． M_n，$n \in N$をUで正則な負の係数をもつ関数

$$f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,\quad a_k \geqq 0$$

の族で，条件

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right\}<\frac{2n+3}{2n+2},\quad z \in U$$

をみたすものとする． 次の結果を報告する．

定理1．$f(z) \in M_n$，$n \in N$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}a_k \leqq 1,\ f(z)\text{ はUで星型関数．}$$

系1． $f(z) \in M_n$，$n \in N$

$$\Rightarrow a_k \leqq \frac{1}{\binom{n+k-1}{k-1}},\quad k \geqq 2.$$

定理2．$f(z) \in M_n$，$n \in N$
$\Rightarrow$

(i) $|z|-\frac{1}{n+1}|z|^2 \leqq |f(z)| \leqq |z|+\frac{1}{n+1}|z|^2$,

(ii) $1-\frac{2}{n+1}|z| \leqq |f'(z)| \leqq 1+\frac{2}{n+1}|z|$.

結果はいずれもｓｈａｒｐである．

5

Two criteria for starlikeness

福井誠一　和歌山大学教育
Milutin Obradović　ベオグラード大学
尾和重義　近畿大学理工
坂口杲一　奈良産業大学

Let A denote the class of functions analytic in the unit disc $U=\{z: |z|<1\}$ and normalized with $f(0)=f'(0)-1=0$. By O_n, $n \in N_0=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$, we denote the class of functions $f \in A$ such that

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right\} < \frac{n+2}{n+1}, \quad z \in U,$$

where $D^0 f(z)=f(z), D^1 f(z)=Df(z)=zf'(z), \cdots\cdot, D^n f(z) =D(D^{n-1}f(z))$, $n \in N=\{1,2,\cdots\cdots\}$. The class O_n is proved that $O_{n+1} \subset O_n$ for all $n \in N_0$ and that O_n, $n \in N$, is subclass of starlike functions, S^* in U.

THEOREM 1. Let $f \in A$, $\alpha \geqq 0$ and $\beta < \dfrac{3n+8}{2(n+2)}\alpha$, $n \in N_0$. If

$$\mathrm{Re}\left\{\alpha\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+1}f(z)} + \beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right\} < B(\alpha,\beta,n),$$

$z \in U$, where $B(\alpha,\beta,n)=\dfrac{n+3}{n+2}\alpha + \dfrac{3n+6}{3n+8}\beta$,

then f is starlike in U and $f \in O_n$.

COROLLALY 1. If $f \in A$, $\alpha \geqq 0$, $\beta < 2\alpha$ and

$$\mathrm{Re}\{\alpha(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)})+\beta\frac{f(z)}{zf'(z)}\} < \frac{3}{4}(2\alpha+\beta),$$

then $f \in S^*$ in U. In Particular,

$$\mathrm{Re}\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{f(z)}{zf'(z)}\} < \frac{3}{4} \Longrightarrow f \in S^*$$

and $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} \prec \dfrac{1-z}{1-(z/2)}$.

THEOREM 2. Let $f \in A$, $\alpha \geqq 0$, $\alpha+\beta \geqq 0$ and $n \in N_0$. If

$$\left|\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+1}f(z)}-1\right|^{\alpha}\left|\frac{D^{n+1}f(z)}{D^{n}f(z)}-1\right|^{\beta} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\beta}\frac{1}{(n+2)^{\alpha+\beta}},$$

then $f \in S^*$ and $f \in O_n$.

COROLLALY 2. If $f \in A$, $\alpha \geqq 0$, $\alpha+\beta \geqq 0$ and

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|^{\alpha}\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|^{\beta} < \frac{1}{2^{\alpha}\,3^{\beta}},$$

then $f \in S^*$.
In particular, for $\beta = 1-\alpha$, $\alpha \geqq 0$, we have

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|^{\alpha}\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|^{1-\alpha} < \frac{1}{2^{\alpha}\,3^{1-\alpha}}$$

$$\Longrightarrow f \in S^* \text{ and } \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1-z}{1-(z/2)}.$$

6　楕円型偏微分作用素に対する Neumann 問題

渡辺 ヒサ子　　　お茶の水女子大学

R^d $(d \geqq 3)$ における次の形の偏微分作用素を考える。

$$L = \sum_{j,k} D_j (a_{jk} D_k)$$

ここで、a_{jk} は $a_{jk} = a_{kj}$ を満たす $C^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ 級の関数で，さらに，L は一様楕円型であるとする。 R^d の有界な $C^{1,\alpha}$ 領域 D で、L に対する Neumann 問題の解の境界挙動を調べる。

$0 < \beta < d-1$ とする。 boundary data を与える関数族は、$L^p(\partial D)$ にかわって、β-次元 Hausdorff測度 Λ_β に関連した関数空間 $\mathcal{L}(\gamma_\beta, C(\partial D))$ を考える。 すなわち、

$$\gamma_\beta(f) := \inf \{\sum_j b_j r_j^\beta \,;\, b_j \in R^+,\ \sum_j b_j \chi_{A(P_j, r_j)} \geqq |f|\}$$

により、可算劣加法的汎関数 γ_β を定義し、$\gamma_\beta(f - f_n) \to 0$ となる列 $\{f_n\} \subset C(\partial D)$ があるような、境界上の Borel 可測関数

f の全体からなる関数族が $\mathcal{L}(\gamma_\beta, C(\partial D))$ である。 $A(P,r)$ は、P を中心とし半径 r の球と境界との共通部分をあらわす。

また、境界点 P の approach region は、non-tangential 領域とは限らず、次のような tangentiai 領域を与える：

$$\Gamma_{\tau,\eta}(P) = \{ X \in D;\ \langle X-P, N_P \rangle > \eta |X-P|^{\tau} \}.$$

ここで、$\tau \geqq 1$, $0 < \eta < 1$ である。

次の定理が得られる。

定理. $1 \leqq \tau < \min\{\alpha+1, 1+(d-1-\beta)/(d-1)^2\}$ とする。$\int f d\sigma = 0$ となるどんな f に対しても、次の性質を持つ D 上の関数 u と ∂D の部分集合 E がある：

(a) $Lu = 0$ in D,

(b) $\Lambda_\beta(E) = 0$,

(c) $\displaystyle\lim_{X\to P,\, X \in \Gamma_{\tau,\eta}(P)} \langle \nabla u(X), A(P)N_P \rangle = f(P) \quad (\forall P \in \partial D \setminus E)$.

ここで $A(P)$ は、L を定義する関数 $a_{jk}(P)$ を要素とする行列で、N_P は、P における外法線方向の単位ベクトルである。

7

ポテンシャル論における最小変分

二宮信幸

$K(P,Q)$は，局所コンパクトなHausdorff空間で条件

"PとQについて下半連続で，$P \neq Q$に対しては有限であり，かつPとQとがそれぞれ互に素なコンパクト集合の上にあるときには上に有界である."

をみたす関数とする．正の測度μとνに対して，K-ポテンシャル

$$K(P,\mu)=\int K(P,Q)\,d\mu(Q),$$

及びK-相互エネルギー

$$K(\mu,\nu)=\int d\mu(P)\int K(P,Q)\,d\nu(Q)$$

を考える．コンパクト集合Fの上の全質量1の正の測度の全体を$\mathfrak{M}_1(F)$で表わし，μとνは$\mathfrak{M}_1(F)$の測度，かつaとbは和が1であるような負でない実数として，

$$I(\mu) = K(\mu, \mu),$$

$$J(\mu, \nu) = a^2 K(\mu, \mu) + 2ab\, K(\mu, \nu) + b^2 K(\nu, \nu)$$

とする．我々は

$$I = \inf I(\mu)$$

と

$$J = \inf J(\mu, \nu)$$

とが等しいことを示し，それによって $J(\mu, \nu)$ に対して最小変分の方法を試みる．

8

Nagel–Stein approach regions and minimal fine limit theorem

相川弘明　　群馬大学 工学部

It is well known, as Fatou-Naïm-Doob theorem (see [**3**]), that a nonnegative superharmonic function u on a Green domain D has minimal fine boundary limits at almost all Martin boundary points X, i.e. there is a minimally thin set E_X such that $u(P)$ has limit as P approaches X outside E_X. This beautiful theorem, however does not seem to tell the whole truth. The following simple example serve as an illustration. Hereafter we let D be the upper half space $\{(X,y) : X = (x_1,\ldots,x_{m-1}), y > 0\}$.

(i) The set of the form $\{(X,y) : 0 < y < \varphi(|X|)\}$ can be minimally thin at 0 if φ decreases sufficiently fast at 0. This implies that we cannot get any information for highly tangential boundary behavior from the minimal fine boundary limit theorem.

(ii) There is a result, similar to the classical Fatou theorem, but where approach regions are not necessarily in nontangential cones, or more precisely, can include a sequence of points of prescribed tangency ([**4**]).

The main purpose of this talk is to show that **there must exist a theorem 'stronger' than minimal fine limit theorem.** In view of the Riesz–Martin decomposition, we treat the boundary behavior of Green potentials and that of harmonic functions, separately.

As to Green potentials v, their boundary values are expected to be 0, and hence it is important to characterize the set $A_c = \{P : v(P) > c\}$. We show that A_c is represented as the union of a set E "thin at ∂D with respect to capacity" and a set F "thin at ∂D with respect to measure". The first thin set has already appeared in [**5**].

THEOREM 1. *Let v be a Green potential. Then there exist a set E thin at ∂D with respect to capacity and a set F thin at ∂D with respect to measure such that $v(P)$ converges to 0 as P approaches ∂D outside $E \cup F$.*

Then we show that the intersection of the Nagel–Stein approach region and a set thin at ∂D with respect to capacity (resp. measure) is ordinary thin for $m \geq 3$ and 'nearly thin'([**2**]) for $m = 2$ (resp. 'eventually empty' for $m \geq 2$) at almost all boundary points. This result is sharp, since the minimal thinness can be characterized by a Wiener type criterion; and if a set E is restricted in a nontangential cone at $X \in \partial D$, then

$$E \text{ is minimally thin} \iff E \text{ is ordinary thin } (m \geq 3),$$
$$E \text{ is minimally thin} \iff E \text{ is nearly thin } (m = 2).$$

The boundary behavior of positive harmonic functions is more subtle. We feel that a set thin at ∂D with respect to measure must be a suitable exceptional set. But we have gotten only a weaker result, though it is strong enough to yield an alternative proof of Nagel–Stein's work. Things are very complicated, since the boundary values of a harmonic function are different at different boundary points.

THEOREM 2. *Suppose a subdomain Ω of D has 0 as the only accumulation point on ∂D. Let h be a positive harmonic function on D. Then there is a set F thin at ∂D with respect to measure such that*

$$\lim_{r \to 0} \operatorname{osc}(h; (\Omega + X) \cap C(x, r) \setminus F) = 0$$

for almost all $X \in \partial D$.

Let $G = \cup_j G_j$ be the union of 'grids' G_j in [**1**, §2]. Then $G \cap C(0, R)$ is thin at ∂D with respect to measure for any $R > 0$. We constructed a harmonic function h such that $|h| \leq 1$ and $\operatorname{osc}(h; G \cap C(X, r)) = 2$ for all $r > 0$ and all $X \in \partial D$ ([**1**, Theorem 1]). This shows that the size of the exceptional set in Theorem 2 is best possible.

REFERENCES

1. H. Aikawa, *Harmonic functions and Green potentials having no tangential limits*, J. London Math. Soc. (to appear).
2. W. K. Hayman, "Subharmonic functions, Vol. 2," Academic Press, 1989.
3. L. Naïm, *Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **7** (1957), 183–281.
4. A. Nagel and E. M. Stein, *On certain maximal functions and approach regions*, Adv. in Math. **54** (1984), 83–106.
5. P. J. Rippon, *On the boundary behaviour of Green potentials*, Proc. London Math. Soc (3) **38** (1979), 461-480.

9

Analytical extensions of the members of the Bergman and Szegö spaces on some tube domains

相川弘明　群馬大学 工学部
林　仲夫　群馬大学 工学部
音田　功　群馬大学 工学部
斎藤三郎　群馬大学 工学部

We [3] obtained the isometrical identity

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dxdy$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2r)^{2j}}{(2j+1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^j f(x)}{\partial x^j}\right|^2 dx$$

for analytic functions $f(z)$ on $\{|Imz|<r\}$ with finite norms

$$\{\int_{-r}^{r}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dxdy\}^{\frac{1}{2}}<\infty$$

and gave applications to the analyticity and smoothing effect for some nonlinear partial differential equation. For its importance, we will give a higher dimensional version of the identity. Since the result of the case of the product

$$\{|Imz_1|<r_1\}\times\{|Imz_2|<r_2\}\times\cdots\times\{|Imz_n|<r_n\}$$

is similar to that of the case of $n=1$, we shall discuss the case of the ball

$$\{(Imz_1)^2+(Imz_2)^2+\cdots+(Imz_n)^2<1\},$$

which is a typical one. We shall discuss the Bergman and the Szegö spaces in Sections 2 and 3 and, as a result, we shall derive a fundamental inequality between the Bergman and the Szegö norms in Section 4.

Typeset by 日本語-$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

REFERENCES

1. M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN, "Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55," United States Department of Commerce, 1972.
2. N. ARONSZAJN, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337-404.
3. N. HAYASHI and S. SAITOH, *Analyticity and smoothing effect for the Schrödinger equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique **52** (1990), 163-173.
4. I. S. GRADSHTEYN and I. M. RYZHIK, "Tables of Integrals Series, and Products," Academic Press New York, 1980.
5. S. SAITOH, *The Bergman norm and the Szegö norm*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 261-279.
6. S. SAITOH, *An inequality on the hyperball*, (Japanese), 数学 **32** (1980).
7. S. SAITOH, *Hilbert spaces induced by Hilbert space valued functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 74-78.
8. S. SAITOH, *Fourier - Laplace transforms and the Bergman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 985-992.
9. S. SAITOH, "Theory of Reproducing Kernels and its Applications," Pitman Research Notes in Math. Series 189, Longman Scientific and Technical, 1988.
10. E. M. STEIN and G. WEISS, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces," Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 1975.

10

On the generalized Cartan conjecture

TODA Nobushige (Nagoya Institute of Technology)

Let $f=(f_1,\dots,f_{n+1})$ be transcendental system in the complex plane; namely, $f_1,\dots,f_{n+1}$ are entire functions without common zeros and $\lim_{r\to\infty} T(r,f)/\log r=\infty$, where $T(r,f)$ is the characteristic function of f ([1]). We put

$S(f)=\{a\text{: meromorphic in } |z|<\infty,\ T(r,a)=S(r,f)\}$,

$S_o(f)=\{a\text{: meromorphic in } |z|<\infty,\ T(r,a)=o(T(r,f))\ (r\to\infty)\}$,

Γ=a subfield of $S_o(f)$ containing C,

$\lambda=\dim\{(a_1,\dots,a_{n+1}): a_1f_1+\dots+a_{n+1}f_{n+1}=0,\ a_j\in\Gamma\}$

and

$X=\{\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}f_j\text{: }\not\equiv 0\text{, general position, } a_{ij}\in\Gamma\}$.

<u>Generalized Cartan Conjecture</u>. For any $F_1,\dots,F_q$ of X, the defect relation

$$\sum_{i=1}^{q} \delta(F_i)\leq n+\lambda+1$$

holds.

It is known that this conjecture is true when $\lambda=0$ ([2],[3]). The purpose of this talk is to give some results concerning this conjecture.

Theorem 1. The generalized Cartan conjecture is true when (i) $q=n+\lambda+2$ ([4]) or (ii) $\lambda=1$([5]).

Theorem 2. For any $F_1,\ldots,F_q$ of X,

$$\sum_{i=1}^{q}\delta(F_i)\leqq n+1+\lambda(n-\lambda(f)),$$

where $\lambda(f)=\dim\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}):\ \alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_{n+1}f_{n+1}=0,\ \alpha_{ij}\varepsilon S(f)\}$([5]).

Corollary. The generalized Cartan conjecture is true when $\lambda(f)=n-1$.

References

[1] H.Cartan:Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica, 7(1933), 5-31.

[2] M.Ru and W.Stoll:Courbes holomorphes évitant des hyperplans mobils, C.R.Acad. Sci. Paris, 310(1990), 45-48.

[3] M.Shirosaki:Another proof of the defect relation of moving targets (preprint).

[4] N.Toda:On the defect relation for moving liear combinaitions of degenerate systems, NIT Sem.Rep. on Math., No.53 (1990).

[5] N.Toda:On the generalized Cartan conjecture (preprint).

特 別 講 演

Boundary behaviour of solutions of the Dirichlet problem

Wolfhard HANSEN Universität Bielefeld

FRG

Let $U \subset \mathbf{R}^n$ be a nonempty relatively compact open set. Given a continuous real valued function f on the boundary U^* of U, the classical Dirichlet problem asks for a continuous extension of f to a function h on the closure $\overline{U}$ of U which is harmonic on U (i.e., which satisfies $\Delta h = 0$ on U). The Perron-Wiener-Brelot method using upper and lower solutions always leads to a generalized solution $H_U f$ which is harmonic on U. The classical Dirichlet problem admits a solution if and only if $\lim_{x \to z} H_U f(x) = f(x)$ for every $z \in U^*$ and then the solution is given by $H_U f$. Whence the interest in the boundary behaviour of the generalized solution.

Using general potential theory this problem can be treated simultaneously for a large class of linear differential operators of second order (e.g. $L = \sum_{i=1}^r X_i^2 + Y$ where $X_1, \ldots, X_r, Y$ are smooth vector fields such that the generated Lie algebra has full rank at each point). Our standard examples will be the classical case ($L = \Delta$) and the heat equation ($L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$).

It is well known that $H_U f$ is obtained by balayage on $\complement U$: Fix a P-set X containing $\overline{U}$ (e.g. $X = \mathbf{R}^n$ if $n \geq 3$, $X \subset \mathbf{R}^n$ relativeley compact open if $n \leq 2$). For every $x \in X$ let $\varepsilon_x^{\complement U}$ denote the unique measure on X such that $\int s \, d\varepsilon_x^{\complement U} = \widehat{R}_s^{\complement U}(x)$ for every superharmonic function $s \geq 0$ on X where $R_s^{\complement U} = \inf\{t : t \geq 0$ superharmonic on $X\}$, $\widehat{R}_s^{\complement U}(x) = \liminf_{y \to x} R_s^{\complement U}(y)$. Then $\varepsilon_x^{\complement U}(f) = H_U f(x)$ for every $x \in U$, i.e., $\varepsilon_x^{\complement U}$ is the harmonic measure corresponding to x.

1. Accumulation points of harmonic measures. For every $z \in U^*$ let $\Lambda(z)$ denote the set of all measures μ such that $(\varepsilon_{x_n}^{\complement U})$ converges to μ for some sequence (x_n) in U converging to z. Then always $\varepsilon_z^{\complement U} \in \Lambda(z)$ (J. Köhn and M. Sieveking 1967). It is a striking fact that either $\Lambda(z) \subset \{\varepsilon_z, \varepsilon_z^{\complement U}\}$ or $\Lambda(z) = \{\alpha\varepsilon_z + (1-\alpha)\varepsilon_z^{\complement U} : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ (O. Frostman 1939, N. Boboc and A. Cornea 1967, J. Lukeš and J. Malý 1981, W. Hansen 1983). A point $z \in U^*$ is called *regular* if $\lim_{x \to z} H_U f(x) = f(z)$ for every $f \in C(U^*)$. Clearly, the set U^*_{reg} of all regular points is characterized by $U^*_{\text{reg}} = \{z \in U^* : \Lambda(z) = \{\varepsilon_z\}\} = \{z \in U^* : \varepsilon_z = \varepsilon_z^{\complement U}\}$, and U is regular (i.e., the classical Dirichlet problem is solvable for every $f \in C(U^*)$) iff $U^* = U^*_{\text{reg}}$. Let U^*_{irr} denote the set $U^* \setminus U^*_{\text{reg}}$ of all *irregular* points and U^*_{sem} the set $\{z \in U^*_{\text{irr}} : \Lambda(z) = \{\varepsilon_z^{\complement U}\}\}$ of all *semiregular* points. Then $H_U f$

has a continuous extension to $\overline{U}$ for every $f \in C(U^*)$ iff $U^*_{\text{sem}} = U^*_{\text{irr}}$ (U is called a *semiregular* set). If U is semiregular then U^*_{irr} is open in U^* and negligible (i.e., $\varepsilon_x^{\complement U}(U^*_{\text{irr}}) = 0$ for every $x \in U$) (H. Bauer 1962). The converse holds as well (I. Netuka 1973, J. Lukeš 1975). In fact, $U^* \setminus U^*_{\text{sem}}$ is the closure of the union of supports of all harmonic measures $\varepsilon_x^{\complement U}$, $x \in U$ (J. Bliedtner and W. Hansen 1976, J. Lukeš and J. Malý 1981).

2. Fine boundary behaviour. Fix $z \in U^*$, take a continuous potential p on X and let $g = p|_{U^*}$. Then clearly

$$\text{f-}\lim_{x \to z} H_U g(x) = \varepsilon_z^{\complement U}(g) \qquad (\star)$$

since $\widehat{R}_p^{\complement U}$ is finely continuous and $H_U g = \widehat{R}_p^{\complement U}$ on U. An approximation argument immediately shows that $(\star)$ holds for every $g \in C(U^*)$. In fact, if z is polar, $(\star)$ is even true for every resolutive function g which is $\varepsilon_z^{\complement U}$-integrable (M. Brelot 1944/45, E. Smyrnelis 1968,1973, H. Bauer 1985,1987, W. Hansen 1986, I. Netuka 1990).

3. Regularizing sets of irregular points (joint work with I. Netuka, J. Reine Angew. Math. 409, 205–218(1990)). Given $f \in C(U^*)$, does there exist a solution of the classical Dirichlet problem for f? Trivially, the answer is positive iff

$$\lim_{x \to z} H_U f(x) = f(z) \qquad (\star\star)$$

for every $z \in U^*_{\mathrm{irr}}$. But do we really have to know $(\star\star)$ for all irregular points? Let us say that a subset $A \subset U^*_{\mathrm{irr}}$ is *regularizing* provided that every $f \in C(U^*)$ satisfying $(\star\star)$ for all $z \in A$ actually satisfies $(\star\star)$ for every $z \in U^*_{\mathrm{irr}}$. (Recall that $(\star\star)$ holds iff $\varepsilon_z^{\complement U}(f) = f(z)$.)

It is well known that there are always countable regularizing sets (M.V. Keldych 1938,1941, M. Brelot 1961, G. Choquet 1968). Recall that if (z_n) is a sequence in U^* converging to z such that $\varepsilon_{z_n}^{\complement U} \to \mu$ then $\mu = \alpha\varepsilon_z + (1-\alpha)\varepsilon_z^{\complement U}$ for some $0 \le \alpha \le 1$. Thus *quasi-isolated* points, i.e., points $z \in U^*_{\mathrm{irr}}$ which are isolated or satisfy $\lim_{x \to z, x \in U^* \setminus \{z\}} \varepsilon_x^{\complement U} = \varepsilon_z$, play a special role (partial results by N.S. Landkof 1947). Following G. Choquet, a set $A \subset U^*_{\mathrm{irr}}$ is said to be a *piquetage faible* if A is dense in U^*_{irr} and if there is no point $z \in U^*_{\mathrm{irr}}$ such that $\lim_{x \to z, x \in A} \varepsilon_z^{\complement U} = \varepsilon_z$. As shown by G. Choquet there always exists a countable piquetage faible and every piquetage faible is regularizing. Choquet's question whether every regularizing set is a piquetage faible has a negative answer.

Our counterexample (for classical potential theory in $\mathbf{R}^3$) led to the introduction of a topology λ on U^*_{irr} which is finer than the initial one and such that every piquetage faible is λ-dense in U^*_{irr} (but not conversely). The λ-isolated points are the quasi-isolated points. If U^*_{irr}

is negligible (which is true for every U in the classical case) then the following can be shown: A subset of U^*_{irr} is regularizing if and only if it is λ-dense in U^*_{irr}. For the heat equation an example is constructed with a λ-closed proper subset of U^*_{irr} which is nevertheless regularizing.

11 Automorphisms with fixed points and Weierstrass points of compact Riemann surfaces

吉田克明　日大・理工

閉Riemann面 M (genus $g \geq 2$) とその自己同型 T を考える。Tの固定点とWeierstrass点との関係について、これまでに様々な結果が得られているが、多くの場合Tの位数Nは素数という条件がついている。この条件をはずして調べられる結果を報告したい。

(記号) $g' = \text{genus of } M/\langle T\rangle$, $F(T) = \{T\text{の固定点}\}$, $t = \# F(T)$

$W_g = \{M\text{の } g\text{-Weierstrass点}\}$, $\nu_m = T$の固定点P_mの回転定数 (i.e., $T^{-1}: z \longrightarrow \varepsilon^{\nu_m} z$ at P_m, $\varepsilon = \exp\frac{2\pi i}{N}$). key lemmaはEichlerの trace formula である。

定理1. Tが non W pt を固定点に持つとすると、次の可能性しかない。
(a) $t=1$, $g=6g'+1$, $N=6$
(b) $t=2$, $g=Ng'$　$(\nu_1,\nu_2)=(1, N-1)$
(c) $t=3$, $g=Ng'+\frac{N-1}{2}$　$(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=(1,1,\frac{N-1}{2})$
(d) $t=4$, $g=Ng'+N-1$　$(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)=(1,\nu,N-\nu,N-1)$

定理2. $t=4$, $F(T)=\{P_i\}$ $(i=1,\cdots,4)$; $(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)=(1,\nu,N-\nu,N-1)$
このとき、$P_i \in W_q$ for $q \geq 2$
ただし、$N = \text{odd}$, $q \equiv \frac{N+1}{2} \pmod N$ の場合を除く。

定理3. $t=3$, $F(T)=\{P_1,P_2,P_3\}$; $(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=(1,1,\frac{N-1}{2})$

このとき (i), $P_1, P_2 \in W_g$ for $g \geqq 2$, ただし, 次の場合を除く。

(1) $N \equiv 5 \pmod 6$ かつ $g \equiv \dfrac{N+1}{3} \pmod N$

又は $g \equiv \dfrac{2(N+1)}{3} \pmod N$

(2) $N \equiv 1 \pmod 6$ かつ $g \equiv \dfrac{N+2}{3} \pmod N$

又は $g \equiv \dfrac{2N+1}{3} \pmod N$

(ii) $P_3 \in W_g$ for all $g \geqq 2$

例 M: $y^N=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)^{N-1}(x-\alpha_4)^{N-1}$

$T:(x,y)\longrightarrow(x,\varepsilon y)$ $\quad P_i=(\alpha_i,0)$ $\quad (i=1,2,3,4)$

このとき, P_i の g-gap列, g-weight は次のようになる。

(I) N: odd (i) for $g \equiv i \pmod N$ $\left(1 \leqq i \leqq \frac{N-1}{2}\right)$

$[\![1,\cdots,(2g-1)(g-1)-N+2i-1]\!][\![(2g-1)(g-1)-N+4i-1,\cdots,(2g-1)(g-1)+2i-1]\!]$

g-weight $\quad (g-2i+2)(2i-1)$

(ii) for $g \equiv \frac{N+1}{2} \pmod N$

$[\![1,2,\cdots\cdots,(2g-1)(g-1)]\!]$, g-weight $\quad 0$

(iii) for $g \equiv \frac{N+1}{2}+i \pmod N$ $\left(1 \leqq i \leqq \frac{N-1}{2}\right)$

$[\![1,\cdots,(2g-1)(g-1)-N+2i]\!][\![(2g-1)(g-1)-N+4i+1,\cdots,(2g-1)(g-1)+2i]\!]$

g-weight $\quad (g-2i+1)\times 2i$

(II) N: even $\quad$ for $g \equiv i \pmod{\frac{N}{2}}$ $\left(1 \leqq i \leqq \frac{N}{2}\right)$

$[\![1,\cdots,(2g-1)(g-1)-N+2i-1]\!][\![(2g-1)(g-1)-N+4i-1,\cdots(2g-1)(g-1)+2i+1]\!]$

g-weight $\quad (g-2i+2)(2i-1)$

同様に, 定理3の例 $y^N=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)^{N-2}$ についても計算できる。

12 離散Moebius群の isometric spheres の半径

井上克己　　　　金沢大・医短

Γを $M(H^n)$の非初等的離散部分群、またH, D, GをそれぞれΓの horocyc limit points、Dirichlet points、Garnett points全体の集合とすると、$\partial H^n = H \cup D \cup G$であることが知られている。いま、$x \in H^n$, $t > 0$にたいし $A(x,z) = \Sigma_{\gamma \in S} |\gamma'(x)|^t$ （ここで S は Γ/Γ_∞ の代表元の完全系列）とおく。

命題A

(1) $\infty \in H$ ならば $A(x,t) = \infty$ for $\forall t > 0$, $\forall x \in H^n$

(2) $\infty \in G$ ならば $A(x,t) = \infty$ for $\exists x \in H^n$, $\forall t > 0$

(3) $\infty \in D$ で ∞ が xを base pointとする Patterson - Sullivan の測度の atom であるならば $A(x,t) < \infty$ for $\forall t \geq \sigma = \sigma(\Gamma)$

また $\{\gamma_k\} = \Gamma - \Gamma_\infty$, R_k を γ_k の isometric sphere の半径とすると次の結果を得る。

命題B

(1) $\infty \in H$ ならば $\limsup_{k\to\infty} R_k = \infty$

(2) $\infty \in G$ ならば $\exists \{R_{k_j}\} \subset \{R_k\}$ $\exists \lambda \in (0,\infty]$ にたいし

$\lim_{j\to\infty} R_{k_j} = \lambda$

(3) $\infty \in D$ で ∞ が ordinary point であれば

$\lim_{k\to\infty} R_k = 0$, cusped parabolic fixed point

で $\{\gamma_{k_j}\} \subset \{\gamma_k\}$ がどの要素もΓ_∞ で非同値

であれば $\lim_{j\to\infty} R_{k_j} = 0$

13

第2種 Fuchs群に対する Bers予想について

須川 敏幸　　京大・理

§ 準備

$\Delta = \{|z|<1\}$ ：単位円板 とし，複素 Banach 空間

$$B_2 = \{\varphi : \Delta \text{上の正則函数}, \ \|\varphi\| := \sup_{z\in\Delta} |\varphi(z)|(1-|z|^2)^2 < \infty\}$$

と定める。局所単葉有理型函数 f に対し，その Schwarz 微分

$$S_f = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

として，

$$S = \{ S_f \ ; \ f : \Delta \to \hat{\mathbb{C}} \ : \text{holomorphic \& univalent} \}$$

$$J = \{ S_f \in S \ ; \ f(\Delta) \text{ が Jordan 領域} \}$$

$$T = \{ S_f \in S \ ; \ f(\Delta) \text{ が quasidisk} \}$$

とおく。ここに quasidisk とは，円板 Δ の，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の擬等角写像による像のことを言う。T は普遍 Teichmüller 空間と呼ばれる。また，次のことが知られている： $T \subset J \subset S \subset B_2$，

$$S : \text{closed in } B_2 , \quad \mathrm{Int}\, S = T$$

次に Γ を Δ に作用する Fuchs群とするとき，B_2 の閉部分空間

$$B_2(\Gamma) = \{\varphi \in B_2 \ ; \ (\varphi\circ\gamma)\cdot(\gamma')^2 = \varphi \quad \text{for all } \gamma \in \Gamma\}$$

として，$S(\Gamma) = S \cap B_2(\Gamma)$，$J(\Gamma) = J \cap B_2(\Gamma)$，$T(\Gamma) = T \cap B_2(\Gamma)$ とおく。$T(\Gamma)$ は Γ の通常の Teichmüller 空間の Bers 埋め込みと一致することが知られている。

§ 結果

Bers は [1] において，

$$\overline{T} = S$$

であると予想した。しかし，この予想が正しくないことを Gehring [3] が示した。Gehring は実質的に

$$S \setminus \overline{J} \neq \phi$$

であることを示している。Flinn [2] はさらに J と $\overline{T}$ の間にも gap があること，つまり，

$$J \setminus \overline{T} \neq \phi$$

を示した。本講演では，これらの結果の次のような精密化が得られたので，それについて報告する。

定理 任意の第 2 種 Fuchs 群 Γ に対して，次が成り立つ．

$$S(\Gamma) \setminus \overline{J} \neq \phi$$
$$J(\Gamma) \setminus \overline{T} \neq \phi$$

一般に Fuchs 群 Γ に対して，主張

$$\overline{T(\Gamma)} = S(\Gamma)$$

を <u>Γ に対する Bers 予想</u> と呼ぶことにする。すると，次のことが分かる。

系 任意の第 2 種 Fuchs 群 Γ に対して，Bers 予想は成立しない。つまり，$\overline{T(\Gamma)} \subsetneqq S(\Gamma)$ である。

（注意） 第 1 種 Fuchs 群について Bers 予想が成立するかどうかは未解決の問題である。

References

1. L.Bers, *On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups I*, Ann. of Math. **91** (1970), 570–600.
2. B.B.Flinn, *Jordan domains and the universal Teichmüller space*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 603–610.
3. F.W.Gehring, *Spirals and the universal Teichmüller space*, Acta Math. **141** (1978), 99–113.
4. T.Sugawa, *On the Bers conjecture for Fuchsian groups of the second kind*, in preparation.

14　Rigidity of holomorphic mappings into Teichmüller spaces

谷川 晴美　　　東工大 理

Sを(p, n)型リーマン面で$3p-3+n>0$なるもの、$T(S)$をそのタイヒミュラー空間とする。$T(S)$は$\mathbb{C}^{3p-3+n}$の有界領域と双正則同値であることが知られている。以下、$T(S)$を$\mathbb{C}^{3p-3+n}$の有界領域として扱う。したがって、単位円板Δから$T(S)$の中への正則写像は$\partial\Delta$上ほとんどいたるところ radial limit をもつ。その radial limit はもちろん$\overline{T(S)}$に含まれているが、もし$\partial T(S)$に含まれるものが"多ければ"その正則写像を複素解析的パラメータで動かすことはできない。すなわち、

定理. $f: \Delta\times\Delta \to T(S)$を正則写像とし、$^{\exists}\zeta_0\in\Delta$に対して集合 $E_{\zeta_0}=\{e^{i\theta}\in\partial\Delta;\ f(\cdot,\zeta)$は$e^{i\theta}$において radial limit $f_*(e^{i\theta},\zeta_0)$をもち、$f_*(e^{i\theta},\zeta)\in\partial T(S)\}$が測度正であるとする。このとき、一変数正則写像$f: \Delta\to T(S)$が存在して任意の$\zeta\in\Delta$に対して$f(\cdot,\zeta)\equiv f(\cdot)$.

系1. 単位円板Δから$T(S)$の中への holomorphic proper mappings の族で(非自明な)複素解析的パラメータをもつものは存在しない。

系2. $T(S) \underset{\text{(biholo.)}}{\simeq} M_1 \times M_2$. $M_1 \subset \mathbb{C}^{k_1}$, $M_2 \subset \mathbb{C}^{k_2}$ $k_1, k_2 > 0$. なる領域M_1, M_2は存在しない。

$B_1(S) = \{S$ 上の Beltrami 微分$\}$, Sの部分集合Eに対し、$B_1(S-E) = \{\mu \in B_1(S), \mu|E \equiv 0\}$とおく。$T(S)$は$B_1(S)$の元の同値類の空間である。$E \subset S$, $m(E) > 0$ $\mu \in B_1(S-E)$のとき、μと同値な$\nu \in B_1(S)$で$\|\mu\|_\infty < \|\nu\|_\infty$なるものが存在する。したがって$B_1(S-E)$の元の列$\{\mu_i\}$が$\|\mu_i\|_\infty \to 1$をみたしていてもタイヒミュラー空間の点として扱ったときその同値類$\{[\mu_i]\}$が$\partial T(S)$にのみ集積するかどうかは一般には分からない。

系3. $E \subset S$, $m(E) > 0$, $\{\mu_\zeta ; \zeta \in \Delta\}$をパラメータ$\zeta$に複素解析的に依存する$B_1(S-E)$の元の族とする。このときほとんどすべての点$e^{i\theta} \in \partial\Delta$に対してある正数$k_\theta < 1$が存在して、各$\mu_{re^{i\theta}}$, $0 < r < 1$は$\|\mu'_{re^{i\theta}}\|_\infty < k_\theta$なる$\mu'_{re^{i\theta}} \in B_1(S)$に同値。

15 Orbits and their accumulation points of cyclic subgroups of modular groups

谷川 晴美　　東工大 理

タイヒミュラー空間 $T(S)$ に作用するモジュラー群 $Mod(S)$ の元は、上半平面 H に作用する一次変換と同様に分類される。位数有限でない元 $\chi \in Mod(S)$ が双曲型であることと 双曲的距離に関するある測地線を χ が不変に保つこととは同値であることが、Bers によって示されている。Bers はその論文の中で「各双曲型変換に対してその不変測地線は唯一つであることが Thurston 理論によって分かる」と(証明なしで)述べ、さらに、擬等角写像の議論を用いてこの事実を示すことが望ましいと述べている。

双曲型変換を誘導する S の擬等角自己同型写像のある性質を用いてこの事実を証明することができたので報告します。

定理 1. $\chi \in Mod(S)$ が双曲型であるとき その不変測地線は唯一つ。

系. $\chi \in \mathrm{Mod}(S)$ が双曲型で $\rho \in \mathrm{Mod}(S)$ と χ が可換であるとき, ρ は位数有限であるか またはある整数 m, n に対して $\chi^m = \rho^n$.

次に, 位数有限でない非双曲的変換 χ について考察する。S の分解 $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ が存在して, χ を導く S の擬等角自己同型 f がそれらの置換を行うとしてよい。

$\sigma \in T(S)$ に対し, $\{\chi^n(\tau)\}_{n=1}^{\infty}$ の集積点 $\tau \in \partial T(S)$ をとる。τ はある Klein 群 Γ に対応していて, $\pi_1(S)$ と Γ の間に自然な群同型 $\rho: \pi_1(S) \to \Gamma$ が存在することが知られている。この同型のもとで, $\pi_1(S_i)$ に対応する Γ の部分群が Γ の中での共役をのぞいて一意的に存在する。それを Γ_i とかくことにする ($i=1, \cdots, k$)。

定理2. 上の仮定のもとで, S の擬等角自己同型 g で $f \circ g$ と $g \circ f$ がホモトピックであるものが存在するとする。ある S_i が g により S_j にうつされるなら, クライン群 Γ_i と Γ_j は擬等角同値である。

系として, 二つの非双曲型変換が可換になるための必要条件 (Birmann - Lubotsky - McCarthy の結果) が得られる。

16　リーマン面の埋め込みと面積定理

柴　雅和　　　　　　広島大学理学部

種数1の開Riemann面Rとその標準homology基底(mod ∂M) $\chi = \{a, b\}$ を1つ固定する．印付きtorus(R', χ') — すなわち標準homology基底$\chi' = \{a', b'\}$ をもったtorusR' — と(R, χ)から(R', χ')への等角写像i'の組(R', χ', i'), $i'(a) \sim a', i'(b) \sim b'$(記号$\sim$はhomology同値を表す)の全体を考え，2つの組(R', χ', i')と(R'', χ'', i'')は，$f \circ i' = i''$をみたすR'からR''への等角写像fがあるとき同値であるという．同値類$[R', \chi', i']$を(R, χ)の接続とよび，その全体を$C(R, \chi)$とかく．(R, χ)の接続のmoduliの集合$M(R, \chi) = \{\tau \in \mathbb{C} | \tau$ は$[R', \chi', i'] \in C(R, \chi)$のmodulus $\tau[R', \chi', i']\}$は上半平面内の閉円板であって$\partial M(R, \chi)$の各点には$C(R, \chi)$のただ1つの元が対応する．$M(R, \chi)$のユークリッド半径をρで，非ユークリッド半径を$\rho^\sharp$で示す．

一般に$[R', \chi', i'] \in C(R, \chi)$に対して，$A[R'] = A[R', \chi', i']$により$R$の像$i'(R)$の($R'$の自然な距離による)面積を，また$\alpha[R'] = \alpha[R', \chi', i']$により像$i'(R)$の補集合の面積を表すことにし，$S[R'] = \alpha[R']/A[R']$とおく．また，任意の$\tau \in M(R, \chi)$に対して$C_\tau(R, \chi) := \{[R', \chi', i'] \in C(R, \chi) | \tau[R', \chi', i'] = \tau\}$とする．このとき

定理 I. [A] $C(R, \chi)$のなかで$\alpha[R']$を最大にするものが唯1つ存在し，それは$M(R, \chi)$の中心τ^*にあり，最大値は$\dfrac{\rho}{2}$.

[B] 任意の$\tau \in M(R, \chi)$に対して，$C_\tau(R, \chi)$の中で$\alpha[R']$を最大にするものがただ1つ存在する．この最大値α_τは円周$\{\tau | \ |\tau - \tau^*| = r\}$の上で一定値$\dfrac{\rho^2 - r^2}{2\rho}$である．

定理Iは平面領域に対しても然るべき —— 種数1を0に，χを基点ζ(簡単のため$\neq \infty$とする)に，$C(R, \chi)$をζでLaurent展開

$\dfrac{1}{z-\zeta}+\kappa(z-\zeta)+\cdots$ をもつ単葉関数 f によってひきおこされる R の接続の全体 $F(R,\zeta)$ に，また $M(R,\chi)$ を係数 κ の集合 $K(R,\zeta)$ に置き換えるなどの —— 変更さえ加えれば本質的にそのままの形で成り立つ．(すなわち定理 I は Koebe-Bieberbach の面積定理や係数問題と同じ流れに属する．) 実際，[A] の原型は Grunsky, Sario-Oikawa など数多の単葉関数論・リーマン面論の成書にあるように，$\alpha[R']$ の最大値を $\pi\rho$ に変えただけのものである．ところが（不思議なことに!?），[B] に対応する次の結果は知られていないのではないかと思われる．

定理 I†. [B†] 任意の $\kappa\in K(R,\chi)$ に対して，$F_\kappa(R,\zeta):=\{F(R,\zeta)$ の元で $z-\zeta$ の係数が κ に等しいもの $\}$ の中で $\alpha[R']$ を最大にするものが唯 1 つ存在する．この最大値 α_κ は同心円周 $\{\kappa|\,|\kappa-\kappa^*|=r\}$ の上で一定値 $\pi\dfrac{\rho^2-r^2}{\rho}$ である．

再び種数 1 の場合にもどってもう 1 つの面積定理を示す：

定理 II. [A] $C(R,\chi)$ のなかで面積比 $S[R']$ を最大にするものが唯 1 つ存在し，それは非ユークリッド円板 $M(R,\chi)$ の（非ユークリッド的）中心 $\tau^!$ 上にあり，$S[R']$ の最大値は $\tanh\dfrac{\rho^!}{2}$.

[B] 任意の $\tau\in M(R,\chi)$ に対して，$C_\tau(R,\chi)$ の中に $S[R']$ を最大にするものがただ 1 つ存在する．この最大値 S_τ は非ユークリッド円板 $M(R,\chi)$ の（非ユークリッド的）同心円周 $\{\tau|\lambda(\tau,\tau^!)=r^!\}$ の上で一定で，その値は $\dfrac{\cosh\rho^!-\cosh r^!}{\sinh\rho^!}$. ここで，$\lambda(\cdot,\cdot)$ は上半平面の非ユークリッド距離を表す．

平面領域に対する定理 II の逐語的対置物は，A が $F(R,\zeta)$ 上で有限ではないことと $K(R,\zeta)$ が非ユークリッド的ではないこととの 2 つの理由によって，存在しないことは注意に値するであろう．また，たとえば R が有限リーマン面であるときには，α の $C_\tau(R,\chi)$（または $K_\kappa(R,\zeta)$）への制限の値域は有限閉区間 $[0,\alpha_\tau]$（または $[0,\alpha_\kappa]$）に等しいこと，すなわち，$M(R,\chi)$, $K(R,\zeta)$ の内点 τ, κ に対する $C_\tau(R,\chi)$ や $F_\kappa(R,\zeta)$ はきわめて豊富であることがわかる．

17　コンパクト強擬凸実超曲面に沿った複素多様体の変形について

宮嶋公夫　　　鹿児島大・教養部

M を $n(\geq 4)$ 次元複素多様体 X のコンパクト強擬凸実超曲面とする.

1. 実超曲面に沿った複素多様体の変形.

<u>定義</u>. M に沿った複素多様体の変形族とは, $\pi^{-1}(o)$ が X 内の M の近傍であるような複素多様体の変形族 $\pi : \mathcal{U} \to (T,o)$ のことを言う.

<u>定義</u>. 2つのM に沿った変形族 $\pi_i : \mathcal{U}_i \to (T,o)$ $(i=1,2)$ が同値な変形族であるとは, $\pi_i|_{\mathcal{U}_i'} : \mathcal{U}_i' \to (T,o)$ $(i=1,2)$ が同値な複素多様体の変形族となるような $M\times o$ の近傍 $\mathcal{U}_i' \subset \mathcal{U}_i$ $(i=1,2)$ がとれるときを言う.

<u>定理 1</u>. ([M1]) M に沿った複素多様体の変形には formally-versal convergent family $\pi_T : \mathcal{U} \to (S_T,o)$ が存在する.

2. CR-構造の族の realization.　　実5次元以上のコンパクト強擬凸CR-構造は複素多様体の実超曲面として実現されることが [O] により証明されているが, ここでは定理 1 で得られた M に沿った複素多様体の変形族を利用して実7 次元以上の強擬凸CR-構造の族の realization を考える.

${}^{\circ}T'' := T'X|_M \cap \mathbb{C}TM$, $F := \mathbb{C}TM/({}^{\circ}\overline{T''} + {}^{\circ}T'')$, $T' := {}^{\circ}\overline{T''} + F$ とおき, $k\,(\geq n+2)$ を固定する.

(S,o) を $(\mathbb{C}^r,0)$ 内の部分解析空間とする.

<u>定義</u>. (S,o) でパラメトライズされた M 上のCR-構造の変形族とは, 次のような $\omega(s) \in \mathcal{Q}_k^{0,1}\{s_1,s_2,\cdots,s_r\} \cap A_b^{0,1}(T')[[s_1,s_2,\cdots,s_r]]$ のことを言う.

(1)　$\omega(0)=0$,

(2)　$P(\omega(s)) := \overline{\partial}_b\omega(s) + R_2(\omega(s)) + R_3(\omega(s)) \in \mathcal{I}_{(S,o)} \otimes \mathcal{Q}_{k-1}^{0,2}\{s_1,s_2,\cdots,s_r\}$

ここで, $P(\omega) := \overline{\partial}_b\omega + R_2(\omega) + R_3(\omega) = 0$ は概 CR-構造 ω の積分可能条件.

$\mathcal{I}_{(S,o)}$ は (S,o) の定義イデアルを表す. また $\mathcal{Q}_k^{0,1}$ は $A_b^{0,1}(T')$ の Sobolev k-norm による完備化を表す.

<u>定理2</u>．([M2])　$\{\omega(s)\}_{s\in(S,o)}$ をM上の任意のCR-構造の変形族とする．
もし　$\omega(s)\in \mathcal{Q}_k^{0,1}\{s_1,s_2,\cdots,s_r\}\cap A_b^{0,1}(°T')[[s_1,s_2,\cdots,s_r]]$　なら，
正則写像　$\tau:(S,o)\to(S_T,o)$　と
CR-embedding (of Sobolev (k+1/2)-class) の族
$$\begin{array}{ccc} \left(M\times(S,o),\{\omega(s)\}_{s\in(S,o)}\right) & \to & \mathfrak{U}\times_{(T,o)}(S,o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S,o) & = & (S,o) \end{array}$$
が存在する．

3．CR-構造の倉西族と正規孤立特異点の versal family．　実5次元以上のコンパクト強擬凸CR-構造と正規孤立特異点が対応することは [O]+[R] により示されるが，ここでは定理1で得られたMに沿った複素多様体の変形族を利用して実7次元以上の強擬凸CR-構造の倉西族 ([A]) と正規孤立特異点の versal family ([G]) の関係について考える．　(V,o) を $(\mathbb{C}^N,0)$ 内の $n\,(\geq 4)$ 次元正規孤立特異点，$M=V\cap S_\varepsilon^{2N-1}$ とする．このとき，

(V,o) の flat 変形の versal family　$\pi_I:\mathcal{V}\to(S_I,o)$　([G])，

Mに沿った複素多様体の変形の formally-versal convergent family　$\pi_T:\mathfrak{U}\to(S_T,o)$

(定理1)，

M上の CR-構造の倉西族　$\{\omega(s)\}_{s\in(S_{CR},o)}$ ([A]) の存在が知られている．

<u>定理3</u>．([M1])　もし　depth$(V,o)\geq 3$ なら
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V} & \supset & \mathfrak{U} & \supset & \left(M\times S_{CR},\{\omega(s)\}_{s\in(S_{CR},o)}\right) \\ \pi_I\downarrow & & \pi_T\downarrow & & \downarrow \\ (S_I,o) & \cong & (S_T,o) & \cong & (S_{CR},o) \end{array}$$

References

[A] T.Akahori, The new estimate for the subbundles E_j and its application to the deformation of the boundaries of strongly pseudo convex domains, Inv. math. 63 (1981), 311-334.
[G] H.Grauert, Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen, Inv. math. 15 (1972), 171-198.
[M1] K.Miyajima, Deformations of a complex manifold near a strongly pseudo-convex real hypersurface and a realization of Kuranishi family of strongly pseudo-convex CR structures, to appear in Math. Z.
[M2] ――― , A remark on the versality of deformations of complex manifolds near a strongly pseudo-convex real hypersurface, preprint.
[O] T.Ohsawa, Global realization of strongly pseudoconvex CR manifolds, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984), 599-605.
[R] H.Rossi, Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudo-concave boundary, Proc. of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis 1964, Springer, 1965.

18

複素解析空間のL^2コホモロジー群について

大沢健夫　京大数理研

$\overline{X}$を被約なコンパクト複素解析空間、$\mathrm{Sing}\,\overline{X}$をその特異点集合とする。また$X=\overline{X}\setminus\mathrm{Sing}\,\overline{X}$とおく。$\overline{X}$のエルミート計量とは、$X$上のエルミート計量$ds^2$で次の条件をみたすものを言う。即ち、$\overline{X}$の任意の点$x$に対してスタイン近傍$U$、正則な埋め込み$\tau: U \to \mathbb{C}^N$ $(N \gg 0)$及び$\tau(U)$の近傍上の(C^∞)エルミート計量$d\sigma^2$で$ds^2|_{U\cap X} = \tau^* d\sigma^2|_{\tau(U\cap X)}$をみたすものが存在するとき$ds^2$を$\overline{X}$のエルミート計量と呼ぶ。$\overline{X}$のエルミート計量に関する$X$の$L^2$コホモロジー群を$H_{(2)}(X)$と書くことにする。

定理　$\overline{X}$が既約かつ$\mathrm{Sing}\,\overline{X}$が孤立集合であるとする。このとき標準的な同型$H_{(2)}(X) \cong IH(\overline{X})$が存在する。但し$IH(\overline{X})$は$\overline{X}$の(中間変質度(middle perversity)の)交叉コホモロジーを表す。

注) これはCheeger-Goreski-MacPherson予想の部分的解決に相当する。

この定理の証明には既に証明されている次の結果を用いる。

定理(Saper) $\overline{X}$を上の通りとすれば、X上の完備なエルミート計量ds_X^2で、Xのコンパクト部分集合の外でケーラー的なものであって、ds_X^2に関するXのL^2コホモロジー群と$IH(\overline{X})$が標準的に同型であるようなものが存在する。

注) この結果には別証がある(拙著 *A nonexistence theorem for L^2 harmonic forms on stratified Riemannian manifolds and its application to Hodge theory*, to appear)

証明の過程で次の結果が得られた。

命題 $\overline{X}$を上の通りとし、ds^2を$\overline{X}$のエルミート計量とせよ。外微分作用素dのC^∞コンパクト台微分形式の空間への制限をd_0とする。このときds^2に関するd_0の最小閉拡張と最大閉拡張は一致する。

この証明にはDonnelly-Xavier式のL^2評価式が用いられる。

特 別 講 演

乗法公式を持つ解析写像の代数的除外曲線

西 野 利 雄　　　九大工

解析写像 $(f)=(f_1, f_2): \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ の除外値集合 E が代数曲線であるとき，それを (f) の代数的除外曲線ということにする．一般に E は内点を持つことがあり，逆に孤立点のこともある．E が代数曲線のときはその既約成分の個数は2以下であることが知られているが，勿論その既約成分は任意ではない．E が超越的な解析曲線であることもあるがこの場合は既約成分の個数についても未だ知られていない．

多項式写像 $(R)=(R_1, R_2): \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ が原点を爆裂型の不動点とするとき，わずかな條件のもとに解析写像 $(f): \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ で，函数方程式

$$f_1(ax, by)=R_1(f_1(x,y), f_2(x,y))$$
$$f_2(ax, by)=R_2(f_1(x,y), f_2(x,y))$$

を満たすものが存在する．このような解析写像 (f) は (R) による乗法公式を持つといわれる．我々の目的は (R) を双有理的ではない多項式写像とし，(R) による乗法公式を持つ解析写像 (f) で，代数的除外曲線を持つもの，及びその曲線を全て具体的に決定することである．

C を $\mathbf{C}^2$ の代数曲線，$(R): \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ を多項式写像とするとき，C の (R) による過去及び未来がともに C に含まれるとき，C を (R) による絶対不変曲線ということにする．このとき次のことがいえる．

"（R）による乗法公式を持つ解析写像（f）の代数的除外曲線は（R）による絶対不変曲線で原点を通らないものと一致する."

このことから絶対不曲線を持つ多項式写像とその曲線を全て決定することが問題となる. 1変数の場合, 絶対不変な点を持つ多項式は, その点を原点とするとき, z^n しかない. このことから除外値を持つような乗法公式を持つ整函数は, 本質的には e^z しかないことがわかる.

絶対不変な代数曲線は, 1 つの既約な代数曲線がそれだけで絶対不変である場合と既約な代数曲線がいくつか集まって全体として絶対不変になる場合とがある. そして後者の場合は, 1 つの点Oを通るいくつかの既約な曲線で（R）によってその全体がOに写像されるようなものが基本であり, それにOを通り（R）によってそれ自身に写像されるような曲線が付け加わることがある. それを付随的曲線ということにする.

I. 既約な絶対不変曲線.

この場合, $P(X,Y)$ をその曲線の定義多項式とすると, これは原始的であり恒等式

$$P(R_1(X,Y),\ R_2(X,Y)) = k(P(X,Y))^d$$

を満たす, 但しdは正の整数, kは或る複素数で $d=1$ のときは1の巾根ではなく, $d>1$ のときは $k=1$ とすることが出来る. このことから $P(X,Y)$ の一般な定数面は互いに解析的に同値であることが分かる.

ところで2変数の原始的な多項式の定数面は有限個を除いて全て既約で特異点を持たず, その種数とその境界点の数は一定である. それでその種数がg, その境界点の数がnの多項式を (g,n)-$type$ ということにする. そうするとこの各 $type$ ごとに上記の恒等式を満たすような多項式 $P(X,Y)$ 及び多項式写像（R）は具体的に決定出来, それは全空間

の代数的自己同形によって次の４種類，７型のどれかに帰着するものであることが分かる．

1． $(0,1)$-type のとき．

$P(X,Y)=X$　　　$R_1(X,Y)=kX^d$

　　　　　　　　$R_2(X,Y)=$任意の多項式

2． $(0,2)$-type のとき．

$P(X,Y)=XY+1$　　　$R_1(X,Y)=X\prod(XY+1-e'_j)$

　　　　　　　　$R_2(X,Y)=Y\prod(XY+1-e''_j)$

$P(X,Y)=X^nY^m$　　　$R_1(X,Y)=AX$

　　　　　　　　$R_2(X,Y)=BY$

$P(X,Y)=X^nY+1$　　　$R_1(X,Y)=AX$

　　　　　　　　$R_2(X,Y)=(P(X,Y)^d-1)/(AX)^n$

但し，e'_j 及び e''_j はあわして１以外の１の d 乗根の全体である．

3． $(0,n)$-type（$n>1$）のとき．

$P(X,Y)=p(X)Y+q(X)$　　$R_1(X,Y)=X$

　　　　　　　　$R_2(X,Y)=(P(X,Y)^d-q(X))/p(X)$

但し，$p(X)$ と $q(X)$ は互いに素な多項式で $q(X)^d-q(X)$ は $p(X)$ で割れ，$p(X)$ は２個以上の根を持つ．

4． (g,n)-type（$g>1$）のとき．

$P(X,Y)=X^n-Y^m$　　　$R_1(X,Y)=AX$

　　　　　　　　$R_2(X,Y)=BY$

$P(X,Y)=X^n-Y^m$　　　$R_1(X,Y)=X(X^n-Y^m)^a$

$$R_2(X,Y)=Y(X^n-Y^m)^b$$

但し，a 及び b は $an=bm$ となる正の整数である．

以上によって既約な絶対不変曲線を持つ多項式写像とその曲線は全て尽くされている．

II．可約な絶対不変曲線．

この場合付随的な曲線を除いて考えるとき，先ず次のことが言える．

“可約な絶対不変曲線は点集合として単連結である”．

一般に連結で単連結な代数曲線の定義多項式 $P(X,Y)$ は原始的で特異な定数面は零面のみである．然も一般な定数面は全て互いに解析的に同値な面である．このような多項式は具体的に決定出来，それは全空間の代数的な自己同形で次の３種類のどれかに帰着する．

$$P(X,Y)=p(X)(q(X)Y+r(X))^n$$

$$P(X,Y)=X^k\Pi(a_jX+b_j(X^lY+p(X))^m)^{e_j}$$

$$P(X,Y)=Y\Pi(a_jX^n+b_jY^m)^{e_j}$$

この中で全ての既約成分が同一の点を通るのは３番目の曲線である．そしてこれを絶対不変にする多項式写像は実際に存在し次のものに限る．

$$R_1(X,Y)=X\Pi(a_jX^n+b_jY^m)^{h_j}$$

$$R_2(X,Y)=Y\Pi(a_jX^n+b_jY^m)^{k_j}$$

但し，h_j と k_j は $nh_j=mk_j$ を満たす正の整数である．

これで全ての絶対不変な代数曲線を持つ多項式写像とその曲線が決定出来た．

次にこれらの多項式写像の中で，絶対不変曲線の外に爆裂型の不動点

を持つものを求めると，その不動点を原点にして，全空間の代数的な自己同形で次の４種類のどれかに帰着する.

1） $R_1(X,Y)=(1+X)^d-1$
$R_2(X,Y)=bY+\cdots$

2） $R_1(X,Y)=aX$
$R_2(X,Y)=((1+X^nY)^d-1)/(aX)^n$

3） $R_1(X,Y)=(1+X)^d-1$
$R_2(X,Y)=(1+Y)^c-1$

4） $R_1(X,Y)=(1+X)^d(1+Y)^c-1$
$R_2(X,Y)=(1+X)^d(1+Y)^c-1$

これらの多項式写像による乗法公式を持つ解析接続は簡単に求まり，1）は $X+1=0$ ，2）は $XY+1=0$， 3）と4）は共に $X+1=0$ と と $Y+1=0$ がそれぞれの除外曲線である.

Bibliographie

L. Bieberbacha, *Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumetreue Abbildung des R^4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln*, S. B. Preuss. Akad. Wiss. (1933)

T. Nishino, *Le théorème de Borel et le théorème de Picard*, C. R. Acad. Sc. Paris 299 (1984) 667-668.

J. Noguchi, *Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties*, Nagoya Math. J. vol 83 (1981) 213-233.

E. Picard, *Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques*,. C.R. Acad. Sc. Paris 139 (1904), 5-9.