日　本　数　学　会

1990年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９０年３月～４月

於

岡　山　理　科　大　学

目次

第IV会場 函　数　論

ON A CERTAIN DIFFERENTIAL INEQUALITY

MAMORU NUNOKAWA GUNMA UNIVERSITY
SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY
HITOSHI SAITOH GUNMA COLLEGE OF TECHNOLOGY

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $p(z)$ which are analytic in the unit disk $\mathcal{U}$ with $p(0)=1$. A function $p(z)$ belonging to $\mathcal{A}$ is said to be a member of the class $\mathcal{P}$ if it satisfies

$$\mathrm{Re}(p(z)) > 0 \qquad (z \varepsilon \mathcal{U}).$$

THEOREM. If $p(z) \varepsilon \mathcal{A}$ satisfies

$$|p(z) + \alpha z p'(z)| < \begin{cases} (1-\alpha)\log(4/e) & (\alpha<\alpha_1) \\ (\alpha-1)\log 4e & (\alpha>\alpha_2), \end{cases}$$

where

$$\alpha_1 = \frac{2(\log 2 - 1)}{2\log 2 - 1} \fallingdotseq -1.588\ldots$$

and

$$\alpha_2 = \frac{2(\log 2 + 1)}{2\log 2 + 1} \fallingdotseq 1.419\ldots ,$$

then $p(z) \varepsilon \mathcal{P}$

COROLLARY 1. If a function $f(z)$ is analytic in $\mathbb{U}$ with $f(0)=f'(0)-1=0$ and satisfies

$$\left|(1-\alpha)\frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z)\right| < \begin{cases} (1-\alpha)\log(4/e) & (\alpha<\alpha_1) \\ (\alpha-1)\log 4e & (\alpha>\alpha_2), \end{cases}$$

then

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > 0 \qquad (z\in\mathbb{U}).$$

COROLLARY 2. If $p(z)\in\mathcal{A}$ satisfies

$$|p(z) + 2zp'(z)| < \log 4e ,$$

then $p(z)\in\mathcal{P}$.

ON CERTAIN ANALYTIC FUNCTIONS AND SUBORDINATIONS

SHIGEYOSHI OWA — KINKI UNIVERSITY
M. OBRADOVIĆ — UNIV. BELGRADE
MAMORU NUNOKAWA — GUNMA UNIVERSITY

Let $\mathcal{A}$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the unit disk $\mathcal{U}$. Defining the function $F(z)$ by

$$F(z) = (1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z)$$

for $\lambda>0$ and $f(z)\in\mathcal{A}$, and denoting the subordination by $\prec$, wh have

THEOREM. Let $f(z)\in\mathcal{A}$ and $\lambda>0$. If

$$\frac{F(z)}{z} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} = h(z) \qquad (\alpha<1),$$

then $f(z)/z \prec q(z)$, where

$$q(z) = 1 + \frac{2(1-\alpha)}{\lambda z^{1/\lambda}} \int_0^z \frac{t^{1/\lambda}}{1-t}\, dt$$

and this is the best dominant.

COROLLARY 1. Let $f(z) \in A$ and $\alpha < 1$. If

$$f'(z) \prec \frac{1 + (1-2\alpha)z}{1 - z},$$

then

$$\frac{f(z)}{z} \prec 1 + 2(1-\alpha)\frac{z + \ln(1-z)}{z}$$

and this is the best dominant.

COROLLARY 2. Let $f(z) \in A$ and $\alpha < 1$. If

$$f'(z) + \frac{1}{2} zf''(z) \prec \frac{1 + (1-2\alpha)z}{1 - z},$$

then

$$f'(z) \prec 2\alpha - 1 - 4(1-\alpha)\frac{z + \ln(1-z)}{z^2}$$

and this is the best dominant.

THE ORDER OF STARLIKENESS FOR p-FOLD SYMMETRIC α-STARLIKE FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA KINKI UNIVERSITY
MING-PO CHEN ACADEMIA SINICA

Let $\mathcal{A}(p)$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1} \qquad (p \in \mathbb{N})$$

which are p-fold symmetric in the unit disk $\mathcal{U}$. A function $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ is said to be p-fold symmetric starlike of order β if it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta$$

for some β $(0 \leqq \beta < 1)$ and for all $z \in \mathcal{U}$. We denote by $\mathcal{S}^*(p,\beta)$ the subclass of $\mathcal{A}(p)$ consisting of all such functions.

Further, a function $f(z) \in \mathcal{A}(p)$ is said to be p-fold symmetric α-starlike it it satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{ (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right\} > 0$$

for some real α and for all $z \in \mathcal{U}$.

Denoting by $\mathcal{M}(p,\alpha)$ the subclass of $\mathcal{A}(p)$

consisting of functions which are p-fold symmetric α-starlike in the unit disk $\mathbb{U}$, we have

THEOREM. If $f(z)$ is in the class $\mathcal{M}(p,\alpha)$ with $\alpha \geqq 0$, then $f(z) \in \mathcal{S}^*(p, \beta(p,\alpha))$, where

$$\beta(p,\alpha) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq \alpha < 1/p) \\ \dfrac{\Gamma(1/2 + 1/p\alpha)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(1 + 1/p\alpha)} & (\alpha \geqq 1/p). \end{cases}$$

The result is sharp.

ON INEQUALITIES FOR CERTAIN ANALYTIC FUNCTIONS

斎藤　斉　　　　群馬高専

$A(n)$を単位円板Uで正則な関数

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

の族とする。　また$\lambda \in \mathbb{C}$，$f(z) \in A(n)$に対し関数

$$F_\lambda(z) = (1-\lambda) f(z) + \lambda z f'(z)$$

を定義する。　ここではこの$F_\lambda(z)$について得られた結果を報告する。　証明は Miller and Mocanu の Lemma (J. Math. Anal. Appl., 65, 1978) による。

<u>定　理</u>　　$\lambda \in \mathbb{C}$，$f(z) \in A(n)$とする。

(1)　$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F_\lambda(z)}{z}\right\} > \alpha \quad (0 \leqq \alpha < 1,\ \mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0)$$

ならば　$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > \frac{2\alpha + n\mathrm{Re}(\lambda)}{2 + n\mathrm{Re}(\lambda)} .$$

(2)　$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F_\lambda(z)}{z}\right\} < \alpha \quad (\alpha > 1,\ \mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0)$$

ならば

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} < \frac{2\alpha + n\mathrm{Re}(\lambda)}{2 + n\mathrm{Re}(\lambda)} \quad .$$

(3) $\mathrm{Re}\left\{F_{\lambda}'(z)\right\} > \alpha \quad (0 \leqq \alpha < 1,\ \mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0)$

ならば $\mathrm{Re}\left\{f'(z)\right\} > \dfrac{2\alpha + n\mathrm{Re}(\lambda)}{2 + n\mathrm{Re}(\lambda)} \quad .$

(4) $\mathrm{Re}\left\{F_{\lambda}'(z)\right\} < \alpha \quad (\alpha > 1,\ \mathrm{Re}(\lambda) \geqq 0)$

ならば $\mathrm{Re}\left\{f'(z)\right\} < \dfrac{2\alpha + n\mathrm{Re}(\lambda)}{2 + n\mathrm{Re}(\lambda)} \quad .$

負の係数をもつある正則関数族における包含関係について

谷口彰男　日本大学文理学部
山川陸夫　芝浦工業大学

$j \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $U = \{z : |z| < 1\}$ とし、U で正則かつ負の係数をもつ関数族

$$T_j = \{f : f(z) = z - \sum_{k=j+1}^{\infty} |a_k| z^k \text{ は } U \text{ で正則}\}$$

を考える。このとき、演算子 D^n を次のように定める。

$$D^0 f(z) = f(z), \quad D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z), \quad D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z)).$$

さらに、$\alpha\ (0 \leqq \alpha < 1)$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $D^n f(z)$ などを用いて T_j のある部分族

$$T_j(n, m, \alpha) = \{f \in T_j : \mathrm{Re} \frac{D^{n+m} f(z)}{D^n f(z)} > \alpha, \ z \in U\}$$

を導入する。こうした条件の下で、われわれは、集合族 $\{T_j(n, m, \alpha) : n, m \in \mathbb{N}_0\}$ においてある包含関係列を得たので、これを報告する。

αより大の実部をもつ正則関数族のある性質について

谷口彰男　日本大学文理学部

H.M. SRIVASTAVA　UNIV. OF VICTORIA

$\alpha\in[0,1)$, $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$, $U=\{z:|z|<1\}$ とする。このとき、U で正則かつ $f(z)=1+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots$ $(z\in U)$ という形をもち、しかも $\mathrm{Re}\,f(z)>\alpha$ $(z\in U)$ となる関数族を $P^n(\alpha)$ で記す。さらに、$b\in[0,1]$ に対し、$P^n(\alpha)$ の部分族

$$P^n_b(\alpha)=\{f\in P^n(\alpha):\ a_n=2b(1-\alpha)\}$$

を導入する。ここでわれわれは、次の結果を得たので報告する。

定理　$f\in P^n_b(\alpha)$ ならば、$r=|z|<1$, $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$|f'(z)|\leqq(\mathrm{Re}\,f(z)-\alpha)\frac{2r^{n-1}\{nb+[n+1+(n-1)b^2]r+nbr^2\}}{[1+br+(b+r)r^n][1+br-(b+r)r^n]},$$

$$|f(z)-A_n|\leqq D_n$$

ただし
$$A_n=\frac{(1+br)^2+(1-2\alpha)(b+r)^2r^{2n}}{[1+br+(b+r)r^n][1+br-(b+r)r^n]},$$

$$D_n=\frac{2(1-\alpha)(b+r)(1+br)r^n}{[1+br+(b+r)r^n][1+br-(b+r)r^n]}.$$

これらの結果は sharp である。

Isometrical identities for the Bergman and the Szegö spaces on a sector
—An application of "UBASIC"—

相川弘明　　群馬大学 工学部
林 仲夫　　群馬大学 工学部
斎藤三郎　　群馬大学 工学部

Let $\Delta(\alpha) = \{z; |\arg z| < \alpha\}$. We consider the Bergman space

$$B_{\Delta(\alpha)} = \{F; F \text{ is analytic on } \Delta(\alpha),\ \|F\|_{B_{\Delta(\alpha)}} < \infty\},$$

where

$$\|F\|_{B_{\Delta(\alpha)}} = \{\iint_{\Delta(\alpha)} |F(x+iy)|^2 dxdy\}^{1/2}.$$

In the case of $\alpha = \pi/4$ we showed that $\|F\|^2_{B_{\Delta(\alpha)}}$ is represented as a series of weighted square integrals of the derivatives of the trace of F on the positive real axis ([**2**]). The proof included two different ingredients: an integral transform and a heat equation on the positive real axis. Both of them required rather deep and lengthy arguments which worked only in the case of $\alpha = \pi/4$.

Here we present a general result for $0 < \alpha < \pi/2$ by a completely different proof with minimum prerequisite knowledge. We shall show

THEOREM 1. *Let $0 < \alpha < \pi/2$. If $F \in B_{\Delta(\alpha)}$, then*

$$(1)\quad \iint_{\Delta(\alpha)} |F|^2 dxdy = \sin(2\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\sin\alpha)^{2j}}{(2j+1)!} \int_0^\infty x^{2j+1} |\partial^j f(x)|^2 dx,$$

where f stands for the trace of F on the positive real axis. Conversely, if f is a smooth function on the positive real axis for which the right hand side of (1) is finite, then f has an analytic continuation $F \in B_{\Delta(\alpha)}$ and (1) holds.

Consider a counterpart of Theorem 1 for the Szegö space $S_{\Delta(\alpha)}$ which is normed by the square root of $\int_{\partial\Delta(\alpha)} |F(z)|^2 |dz|$ with $F(z)$ being the nontangential boundary values of F on $\partial\Delta(\alpha)$. We shall prove

Typeset by 日本語-$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

THEOREM 2. *Let $0 < \alpha < \pi/2$. If $F \in S_{\Delta(\alpha)}$, then*

$$(2) \qquad \int_{\partial\Delta(\alpha)} |F(z)|^2 |dz| = 2\cos\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\sin\alpha)^{2j}}{(2j)!} \int_0^{\infty} x^{2j} |\partial^j f(x)|^2 dx,$$

where f stands for the trace of F on the positive real axis. Conversely, if f is a smooth function on the positive real axis for which the right hand side of (2) is finite, then f has an analytic continuation $F \in S_{\Delta(\alpha)}$ and (2) holds.

Note that there are results, correpsonding to Theorems 1 and 2, for the Bergman and the Szegö spaces over a strip $S(\alpha) = \{w; |\operatorname{Im} w| < \alpha\}$ (cf. [**3**]). One might think that Theorems 1 and 2 can be deduced from those results by means of the conformal mapping $z = e^w$ in a straightforward fashion. However, it is not the case. Under the mapping, the derivatives of f are transformed into complicated forms (see [**2; Section 5**]), from which one can hardly imagine the right hand sides of (1) and (2).

We shall overcome this difficulty by making use of Mellin transform and certain expansions* of $\sinh(2\alpha z)/z$ and $\cosh(2\alpha z)$. These expansions implicitly appear in fromulas for Gauss' hypergeometric series (cf. [**1**]). We shall, however, provide an elementary proof for the selfcontainedness.

We would like to thank Professor K. Oikawa for giving a hint which led us to formulas for Gauss' hypergeometric series.

REFERENCES

1. M. Abramowitz and I. A. Stegun, "Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables," Dover, 1968.
2. H. Aikawa, N. Hayashi and S. Saitoh, *The Bergman space on a sector and the heat equation*, Complex Variables (to appear).
3. N. Hayashi and S. Saitoh, *Analyticity and smoothing effect for the Schrödinger equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique (to appear).

---

*We have used "UBASIC" for an experiment of the expansions. We would like to thank Prof. Kida.

Deficient and Ramified Small Functions for Admissible Meromorphic Solutions of Some Differential Equations II

藤田　健司（千葉大学研究生）

石崎　克也（東京高専）

本講演で登場する函数は、$\mathbb{C}$ 上有理型な函数として、Nevanlinnaの函数達は通常のものとする。ここでは、f(z) に対してsmallな函数 a(z) が次の関係式を満たすときに、それぞれ不足函数(Deficient function),分岐函数(Ramified function)ということにする：

$$\delta(a, f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, f)} > 0, \quad \theta(a, f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{N_1(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, f)} > 0$$

代数的微分方程式

$$(1) \qquad \Omega(z, w, w', \dots, w^{(m)}) = \sum_{K\in I} a_K(z) w^{k_0} w'^{k_1} \cdots {w^{(m)}}^{k_m} = 0$$

の許容解(admissible Solution) w(z) とは (1) の解でかつ全ての $a_K(z)$ が w(z) に対して small となることであるがこの w(z) に対する不足函数分岐函数について Mokhon'ko [4]の結果 Steinmetz からの情報によれば、

$$(1)' \qquad \Omega_1(z, w, w') = 0$$

の場合については：

$\eta(z)$ が許容解 w(z) の不足函数かまたは分岐函数であるならば $\eta(z)$ は (1) の small solution である。即ち $\Omega_1(z, \eta(z), \eta'(z)) = 0$.

ここでは、逆に $\eta(z)$ が (1)' の small solution であるときに $\eta(z)$ が w(z) の分岐函数もしくは~~分岐~~不足函数であるか？ という問題を (1) の特別の場合に考える。 [2]のなかで我々は、つぎの結果を得た。

定理 A 微分方程式

$$(2) \qquad w'^2 + \alpha(z)w' = a_4(z)w^4 + a_3(z)w^3 + \dots + a_0(z),$$

$$|a_4| + |a_3| + |a_2| \neq 0$$

が許容解 w(z) を持つとする。(2)が既約ならば、small solution $\eta(z)$ は w(z) の不足函数か分岐函数である。

[3]のなかで用いた補題を使うことで、(2)で w'(z) の次数が 3 の場合についても同様の結果を得たので報告する。

定理 1 微分方程式

(3) $$w'^3 + \alpha_2(z)w'^2 + \alpha_1(z)w' = a_6(z)w^6 + a_5(z)w^5 +, \ldots, + a_0(z),$$

$$|a_6| + |a_5| + |a_4| + |a_3| = 0$$

が許容解 w(z) を持つとする。(3) が既約ならば、small solution $\eta(z)$ は w(z) の不足函数か分岐函数である。

References

[1] K.Fujita and K.Ishizaki, admissible Solutions of Some Algebraic Differential Equations P(z, w) = Q(z, w), Res. Rep. TNCT No.21, (1989).

[2] K.Ishizaki, Deficient and Ramified Small Functions for Admissible meromorphic Solutions of Some differential equations, Complex Variables Theory Appl. 13 (1989)

[3] ――――――, On the Third Order Differential Equations with Admissible Solutions, Preprint.

[4] A.Z.Mokqhon'ko and V.D.Mokqhon'ko, Estimates for the Nevanlinna Characteristic of Some Classes of Meromorphic Functions and their Applications to Differential Equations, Sib. Math. J. 15, 921-934 (1974).

[5] N.Steinmetz, Ein Malmquistscher Satz für algebraic Differentialgeichungen erster Ordnung, Jour. Reine Angew. Math. 316, 44-53 (1980).

On binomial differential equations without admissible algebroid solutions in the complex plane

戸田暢茂　(名工大)

Let $a_0,\dots,a_p(\neq 0)$ and $b_0,\dots,b_q(\neq 0)$ be entire functions without common zero such that the system $f=(a_0,\dots,a_p,b_0,\dots,b_q)$ is not constant.

We put

$$P(z,w)=\sum_{j=0}^{p} a_j w^j, \quad Q(z,w)=\sum_{k=0}^{q} b_k w^k$$

and consider the binomial differential equation

$$(w')^n=P(z,w)/Q(z,w),$$

which is supposed to be irreducible over meromorphic functions and to admit at least one nonconstant algebroid solution $w=w(z)$ in the complex plane.

We say that w is admissible when

$$T(r,f)=S(r,w).$$

As a generalization of the fact that "if a_j and b_k are polynomials, w is algebraic when $p<q+n$",

we would like to know whether

"w is not admissible when $p<q+n$"

in the general case, too.

As a partial answer to this problem, we obtain

Theorem. Suppose that the orders of $a_0,\ldots,a_p$, $b_0,\ldots,b_{q-1}$ are finite and that b_q is polynomial. Then, w is not admissible when $p<q+n$.

H^1の極値問題の解の存在について

中路 貴彦　北大 教養

H^p ($1 \le p \le \infty$) を単位円周上の普通のHardy空間とする。$\varphi \in L^\infty$のときH^1上の有界線形汎関数 T_φ は $T_\varphi(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})d\theta/2\pi$ として定義する。$S_\varphi = \{ f \in H^1 : T_\varphi(f) = \| T_\varphi \|$ かつ $\| f \|_1 \le 1 \}$ とするとき、$\rho(\varphi)$ を $S_{\varphi - s} \ne \emptyset$ となる $s \in \mathbb{C}$ の全体とする。φが連続関数のとき、$\rho(\varphi) = \mathbb{C}$ であるが $\rho(\varphi) \ne \mathbb{C}$ となるφも存在することは知られている。しかし $\rho(\varphi)$ は系統的に研究された事はない。

$E = \{ f(0) : \| \varphi - f \|_\infty = \| \varphi + H^\infty \|$ かつ $f \in H^\infty \}$ とする。$\| \varphi + H^\infty \| = \inf \{ \| \varphi + g \|_\infty : g \in H^\infty \}$.

定理1 $\varphi \in L^\infty$ とする。

(1) $\rho(\varphi) \supset \mathbb{C} \setminus E(\varphi)$.

(2) $\rho(\varphi) \ne \mathbb{C}$ なら $\rho(\varphi) \subset \mathbb{C} \setminus E(\varphi)^\circ$.

(3) $E(\varphi)$ は一点か閉円板である。

(4) S_φ が少くとも二元を含むならば、$\rho(\varphi) = \mathbb{C}$.

$\{z_n\}$ を Blaschke 列 かつ $\{w_n\}$ を有界列とする。$f(z_n)$

$= w_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) となる $f \in H^\infty$ が存在するとき、$\|f\|_\infty$ を最小にする f が存在するが、一般にそんな f は一意ではない。K. Øyma (1977) は、$\{z_n\}$ が uniformly separated 列かつ $w_n \to 0$ のとき、$f(z_n) = w_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) かつ $\|f\|_\infty$ を最小にする f は一意を示した。

定理2 $\{z_n\}_{n=0}^\infty$、$z_0 = 0$、$|z_n| \le 1$ を Blaschke 列かつ $\{w_n\}_{n=0}^\infty$、$w_0 = s$ を有界列とする。b を $\{z_1, z_2, \cdots\}$ の Blaschke 積とする。$f(0) = 0$ かつ $f(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, \cdots$) となる $f \in H^\infty$ が存在するとする。もし $\rho(\bar{b} f) \ni -s\, b(0)^{-1}$ ならば $g(0) = s$ かつ $g(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, \cdots$) となる $g \in H^\infty$ かつ $\|g\|_\infty$ を最小にする g は一意である。

定理1はHankel作用素のノルムが到達される時を決定するのに応用されることができる。(2)と(3)の証明には、Adamyan-Arov-Krein (1968) の定理を使う。与えられたφから$E(\varphi)$の中心や半径を描く事ができる。詳しくは次の論文にある。

T. Nakazi : Existence of solutions of extremal problems in H^1, to appear in Proc. Edinborgh. Math.

Nevanlinna－Pick の補間定理と関数環

中路　貴彦　　北大　教養

講演の目的は、古典的な Nevanlinna－Pick の補間定理を、平面上の有界領域や多変数へ一般化することである。道具は抽象的 Hardy 空間の理論や作用素論を使う。

A をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環、τ を A 上の complex homomorphism、m をその表現測度とする。Hardy 空間 H^p は $1 \le p < \infty$ のとき $L^p = L^p(m)$ での A の閉包とし、$p = \infty$ のとき $L^\infty = L^\infty(m)$ での A の＊弱閉包として定義する。これは $\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^n$ の具体的 Hardy 空間のある種のものをとらえている。

$\mathcal{L}$ は L^∞ の全ての正の可逆な関数の全体とする。$E = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ を H^2 上の独立な有界線形汎関数の有限集合とする。$s \in E$ のとき、任意の $\varphi \in H^\infty$ と $h \in H^2$ に対して、$s(\varphi h) = s(\varphi)s(h)$ とし、$s(h) = h(s)$ と書く。$v \in \mathcal{L}$ に対して $(\ ,\ )_v$ は v^2dm に関しての普通の内積を示す。$v \in \mathcal{L}$ かつ $s \in E$ に

対して、$h(s)=(h, k_s^v)_v$ かつ $h\in H^2$ となる $k_s^v\in H^2$ が存在する。$k^v(s,t)=(k_s^v, k_t^v)_v$ とすると、$k^v(s,t)$ は $E\times E$ 上の kernel function である。v が定数のとき $k^v(s,t)=k(s,t)$ と書く。

$\boxed{\text{定理}}$ $E=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ かつ $w_1, w_2, \cdots, w_n\in\mathbb{C}$ とする。$M=\{f\in H^2$: 全ての $s\in E$ に対して $f(s)=0\}$ とし、$(L^2\ominus M)\cap L^\infty$ は $L^2\ominus M$ で稠密とする。$\|\varphi\|_\infty\leq 1$ かつ $\varphi(s_i)=w_i$ $(i=1,\cdots,n)$ となる $\varphi\in H^\infty$ が存在する必要十分条件は、行列 $\left[(1-w_i\bar{w}_j)v^2k^v(s_i,s_j)\right]_{i,j=1}^n$ は任意の $v\in\mathcal{L}$ について非負値である。」

$f\in(L^\infty)^{-1}$ の $(L^\infty)^{-1}/(H^\infty)^{-1}$ での coset を (f) とし、$\|(f)\|=\inf\{\|g\|_\infty\|g^{-1}\|_\infty : g\in(f)\}$ かつ $\gamma_0=\sup\{\|(f)\| : (f)\in(L^\infty)^{-1}/(H^\infty)^{-1}\}$ とする。

(1) $(v)=(u)$ のとき $[(1-w_i\bar{w}_j)v^2k^v(s_i,s_j)]$ と $[(1-w_i\bar{w}_j)v^2k^v(s_i,s_j)]$ の非負は同値である。

(2) $\gamma_0<\infty$ のとき、もし $[(1-w_i\bar{w}_j)k(s_i,s_j)]$ が非負値ならば、$\|\varphi\|_\infty\leq\gamma_0$ かつ $\varphi(s_i)=w_i$ $(i=1,\cdots,n)$ となる $\varphi\in H^\infty$ が存在する。A が disc 環のとき $\gamma_0=1$、A が半径 r の annulus 環のとき $\gamma_0=1/\sqrt{r}$.

Гельфер 関数

山下慎二　都立大理

円板 $D=\{|z|<1\}$ で正則な函数 f は $f(0)=1$, $f(z)+f(w)\neq 0$ $\forall z,w\in D$ のとき Гельфер 函数 (Ге-函数) とよばれる。Ге-函数の全体を G と書く。D で正則な函数 f で $f(0)=1$, $\mathrm{Re}\, f(z)>0$ $\forall z\in D$ であるものの全体を P と書けば、$P\subset G$ である。P について知られていることが G についてどの程度成立するだろうか。$\boxed{\text{定理1.}}$ $G\subset \bigcap_{0<p<1} H^p$. ここで、$H^p$ は D での Hardy 族である。また、各 $f\in G$ は外部函数で Hardy norm $\|f\|_p\leq C_p$ $(0<p<1)$ である。ここで C_p は f に無関係な定数である。$\boxed{\text{定理2.}}$ $f\in G \Rightarrow \log f\in BMOA$. さらに、$\log f$ の BMOA norm $\|\log f\|_*\leq \pi/\sqrt{2}=2.22\ldots$; 評価は最良。$\boxed{\text{定理3.}}$ $f'\in G\Rightarrow f\in BMOA$.

以下 N は D 内正則な f で $f(0)=f'(0)-1=0$ をみたすものの全体とする。$f\in N$ が D で Гельфер-convex とは f' が D で値 0 をとらず、次の函数

$1 + zf''(z)/f'(z)$ が G の元であるときをいう。また $f \in N$ が D で Гельфер-close-to-convex とは，D で Гельфер-convex な g があって，$f'/g' \in G$ のときをいう。$\boxed{\text{定理4.}}$ f が D で Гельфер-close-to-convex $\Rightarrow \log f' \in BMOA$.

参照論文

С. А. Гельфер: О классе регулярных функций, не принимающих ни одной пары значений w и $-w$. Мат. Сборник 19(61) (1946), 33–46.

S. Yamashita: Gelfer functions, integral means, bounded mean oscillation, and univalency. Trans. Amer. Math. Soc. to be published.

未解決問題. 上記山下の論文中には未解決問題が10提出されている。解決御教示をお願いします。

平面領域上の優調和関数の可積分性

増本　誠　　　　　　　　　広島大学理学部

$D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$を，有限個の Jordan 閉曲線で囲まれた (有界) 領域とする．$0 < \theta < 1$ とする．ある$\rho > 0$ が存在して，任意の $z \in \partial D$に対し，zを頂点とする中心角$\pi\theta$, 半径ρの扇形が Dの内部にとれるとき，Dは内部θ-扇形条件(interior θ-wedge condition) を満たすという．有界な k-Lipschitz 領域は，$k = \cot(\pi\theta/2)$ となる$\theta \in (0,1)$ に対して，内部θ-扇形条件を満足している．内部θ-扇形条件を満たす領域上の正値優調和関数の可積分性について，次の定理が成立する．

定理 1. Dを内部θ-扇形条件を満たす領域とし，各 $z \in D$から∂Dまでの距離を$\delta_D(z)$ と表す．また，

$$\gamma(p,\theta) = \frac{p}{\theta} - 1 - \min\{p, 1\}$$

とおく．$z_0 \in D$を固定し，$0 < p < \infty, \gamma > \gamma(p,\theta)$ とする．すると，ある $M > 0$ が存在して，D上の任意の正値優調和関数 u に対し，

$$\iint_D \delta_D(z)^\gamma u(z)^p \, dx \, dy \le M u(z_0)^p, \qquad z = x + iy,$$

が成立する．

定理 1 より直ちに次の定理を得る．

定理 2. Dを内部θ-扇形条件を満たす領域とし，

$$p(\theta) = \min\{2\theta, \frac{\theta}{1-\theta}\}$$

とする．このとき，$0 < p < p(\theta)$ を満たすあらゆる p に対し，D上の任意の正値優調和関数は，D上 2 次元 Lebesgue 測度に関して p 乗可積分となる．

$p \geq 1$ のとき，定理 1 の$\gamma(p,\theta)$ をより小さな値で置き換えることはできない．また，$\theta \geq 1/2$ のとき，定理 2 の $p(\theta)$ をより大きな値で置き換えることはできない．

これらの定理は，[2] の結果 (2 次元の場合) の精密化である．また，定理 2 は，2 次元の場合に，[1] の問題 3.32(S. J. Gardiner), 3.34(D. H. Armitage) に対する 1 つの解答を与えている．

次に，∂Dの各成分が quasicircle である場合を考える．一般に，Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の自己 K-擬等角写像による円周の像を K-quasicircle という．

定理 3. Dを有限個の K-quasicircles で囲まれた有界領域とすると，ある $p > 0$ が存在して，D上の任意の正値優調和関数は，D上 2 次元 Lebesgue 測度に関して p 乗可積分となる．このとき，p を，Kには依存するが Dにはよらないように選ぶことができる．

References

[1] D. A. Brannan and W. K. Hayman, Research problems in complex analysis, Bull. London Math. Soc., **21**(1989), 1-35.

[2] F-Y. Maeda and N. Suzuki, The integrability of superharmonic functions on Lipschitz domains, Bull. London Math. Soc., **21**(1989), 270-278.

Dirichlet 正則性と Green 関数の準有界性

鈴木紀明　　　　　広島大学理学部

Ü.Kuran は $R^n(n \geq 2)$ の有界開集合 Ω の境界点 x_o が Dirichlet 正則点となる必要十分条件は $G(\cdot, x_o)$ が Ω 上準有界 (quasi-bounded) であることを示した ([2]). 但し,

$$G(x,y) = \begin{cases} |x-y|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \bar{\Omega}\text{を含む円板の Green 関数}, & n = 2. \end{cases}$$

この事実を一般の調和空間で考察することが本講演の目的である. 以下, X は第二可算公理を満たす連結局所 compact 空間, $(X, \mathcal{H})$ は共役な調和構造 $\mathcal{H}^*$ を持つ調和空間とする, 即ち, $(X, \mathcal{H})$, $(X, \mathcal{H}^*)$ が Constantinescu-Cornea の $\mathfrak{P}$-調和空間 ([1]) であり, かつ次を満たす Green 関数 $G(x,y)$ が存在する:

1. $G(\cdot,\cdot)$ は $X \times X$ 上の非負下半連続関数で, 対角集合の外で (有限値) 連続.
2. $G_y = G(\cdot, y)$ は $\mathcal{H}$-potential で $X \setminus \{y\}$ 上 $\mathcal{H}$-調和, かつ $G_x^* = G(x, \cdot)$ は $\mathcal{H}^*$-potential で $X \setminus \{x\}$ 上 $\mathcal{H}^*$-調和.
3. 任意の連続 $\mathcal{H}$-potential p (又は, 連続 $\mathcal{H}^*$-potential p^*) は, 一意的に定まる X 上の非負測度 μ で $p(x) = \int G(x,y)d\mu(y)$ (又は, $p^*(y) = \int G(x,y)d\mu(x)$) と表される.

この時, X の任意の開集合は $\mathcal{H}$-, 及び $\mathcal{H}^*$-可解であって, $(X, \mathcal{H})$ も $(X, \mathcal{H}^*)$ も proportional axiom を満たしている. 又, $\mathcal{H}$-極集合と $\mathcal{H}^*$-極集合は一致することにも注意しておく.

次の定理が示される.

定理. $(X, \mathcal{H})$ を共役な調和構造 $\mathcal{H}^*$ を持つ調和空間とし, 1 は $\mathcal{H}^*$-優調和とする. X の開集合 D の境界点 x_o が D の $\mathcal{H}$-Dirichlet 正則点であるならば $G_{x_o}^*$ は D 上 $\mathcal{H}^*$-準有界となる. 更に, $\{x_o\}$ が $\mathcal{H}^*$-極集合であるか, 又は, $G_{x_o}^*$ が $\bar{D}$ 上連続ならば逆も成り立つ.

注意. $\{x_o\}$ が $\mathcal{H}^*$-極集合でない時;
(1) $G_{x_o}^*$ は X 上で有界になる.
(2) x_o が $X \setminus \{x_o\}$ の $\mathcal{H}$-正則点になることと $G_{x_o}^*$ が X 上で連続になることは同値である.

定理の証明は以下の補題を使ってなされる.

補題1. ΩをXの相対 compact な開集合とする. $\bar{\Omega}$上の下半連続関数hがΩでは$\mathcal{H}^*$-準有界, compact な$\mathcal{H}^*$-極集合$K \subset \partial\Omega$を除けば(有限値)連続であればΩ上で$h \equiv \bar{H}_h^{*\Omega}$である.

補題2. X内の任意の集合Aに対して, $\hat{R}_{G_y}^A(x) = \hat{R}_{G_x^*}^{*A}(y)$が成り立つ.

補題3. DをXの開集合, uをX上の非負$\mathcal{H}^*$-優調和関数とするとD上で$\bar{H}_u^{*D} \equiv \hat{R}_u^{*X \setminus D}$である.

補題4. Xの開集合Dに対して, $x \in \partial D$が$\mathcal{H}$-Dirichlet 正則点であることはX上で$\hat{R}_{G_x^*}^{*X \setminus D} \equiv G_x^*$と同値である.

応用として, 熱方程式の場合に各点は極集合であることに注意すれば, 次が分かる.

Dを$R^n \times R (n \geq 1)$内の開集合, $x_o = (\xi_o, t_o)$をその境界点とし, $y = (\eta, t) \in D$に対して

$$G_{x_o}^*(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi(t_o - t))^{\frac{n}{2}}} \exp(-\dfrac{|\xi_o - \eta|^2}{4(t_o - t)}), & t_o > t, \\ 0, & t_o \leq t, \end{cases}$$

とする. x_oが$(\Delta - \frac{\partial}{\partial t})$に関する$D$の Dirichlet 正則点となる必要十分条件は, $G_{x_o}^*$がD上で$(\Delta + \frac{\partial}{\partial t})$-準有界になることである.

References

[1] C.Constantinescu and A.Cornea, Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[2] Ü.Kuran, A new criterion of Dirichlet regularity via the quasi-boundedness of the fundamental superharmonic function, J. London Math. Soc. (2), 19 (1979), 301-311.

Ring domains constructed by conformal sewing

及川廣太郎

米谷文男氏から，つぎのことを尋ねられた。

$\varphi(x)$ を閉区間 $[0, 1]$ で定義された実関数で，連続，狭義単調増加で，$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=1$ をみたすものとする。複素平面の正方形

$$Q:\ 0<x<1,\ 0<y<1$$

の下辺 $\{x \mid 0<x<1\}$ と上辺 $\{x+i \mid 0<x<1\}$ とを，

$$x \text{ と } \varphi(x)+i \text{ を identify}$$

することによって接着（sew, glue, weld）し，そこに Q の複素平面の部分領域としての等角構造を保つような等角構造を入れてリーマン面とすることができるものと仮定する。このリーマン面 S は，複素平面の二重連結領域と等角同値であるが，その module（同心円環に等角写像したときの半径の比の対数）を m_φ とおく。いろいろの φ に対して m_φ のいろいろの値が得られるが，それはどのようなものであろうか？

これに関して次のことがわかったので報告する。

定理 m_φ の値域は $[0, 2\pi]$ であり，最大値 2π をとる φ は恒等写像に限る。

有限リーマン面の接続と変形

G.Schmieder　Univ. Hannover
柴　雅和　広島大学理学部

Rを種数 1 の開 Riemann 面, $\chi = \{a,b\}$ を任意に固定された, 理想境界を法とする標準 homology 基底とする. 普通の意味での印付き torus(R', χ') — すなわち標準 homology 基底$\chi' = \{a', b'\}$ をもった torusR' — と (R,χ) から (R',χ') への等角写像i'の組 (R',χ',i'), $i'(a) \sim a', i'(b) \sim b'$, を (R,χ) の実現とよぶ. ここに, 記号$\sim$は homology 同値をあらわす. 2 つの実現 (R',χ',i') と (R'',χ'',i'') が同値であることを, R'から R''への等角写像 fで $f \circ i' = i''$となるものが見つかることと定義する. 各々の同値類$[R',\chi',i']$ を (R,χ) の接続とよぶ. (R,χ) の接続の全体 $C(R,\chi)$ は Torelli 空間（今の場合 Teichmüller 空間でもある）のなかに射影され, したがって (R,χ) の接続の moduli の集合 $M(R,\chi)$ を考察することができる. それは, よく知られているように, 上半平面の中に実現される. R'上の曲線 a'および b'は, R'の自然な線素に関して測地線であるとしてよい. 次の結果は基本的である：

定理 I. [A] $M(R,\chi)$ は閉円板である:

$$|\tau - \tau^*| \leq \rho, \qquad \mathrm{Im}\,\tau^* > 0, \quad 0 \leq \rho < \mathrm{Im}\tau^*.$$

[B] $\partial M(R,\chi)$ はつぎにように径数表示される:

$$\tau_t = \tau^* + \rho e^{(t-\frac{1}{2})\pi i}, \qquad -1 < t \leq 1.$$

$\partial M(R,\chi)$ の各点τ_tには $C(R,\chi)$ のただ 1 つの元 $[R_t,\chi,i_t]$ が対応する. $R \setminus R_t$ は測地線 a'に対して傾き$\frac{\pi}{2}t$ をもつ平行な截線からなる面積零の集合である.

[C] $M(R,\chi)$ の内点には一般に 2 つ以上の $C(R,\chi)$ の元が対応しうる.

[D] $M(R,\chi)$ の半径ρ は, Rが族 O_{AD}に属するときかつそのときに限って零となる.

平面領域に対する古典的な諸結果との関連はつぎの通りである. [A], [B] は単葉関数・等角写像の係数に関する de Possel, Grötzsch, Schiffer などの結果および Koebe の一般一意化定理（等角写像論における基本定理）の種数 1 の場合への拡張であると同時に, Heins の定理の精密化でもある. また [D] はρが Schiffer の span の忠実な拡張概念を与えていることを示している. [B],[C] は Nevanlinna, Oikawa の接続の一意性の問題と関連している.

問題. Kurt Strebel は, 截線の代わりに, すべての補集合成分が円板であるような等角的埋め込みの存在を示している. この接続の modulus を円板 $M(R,\chi)$ の中で特定せよ.

さて, とくに Rがコンパクトな縁付き Riemann 面の内部であるとき,

定理 II. Span は（τ_0 に対応する）截線の長さの連続関数である.

これの応用として容易につぎの定理が得られる.

定理 III. $M(R,\chi)$ は補集合の面積が零であるような（したがって, とくに, いわゆる非本質的な）接続によって覆い尽くされる. とくに, $M(R,\chi)$ の内部は Oikawa の意味での接続の一意性を決してもたない.

上の結果を別の表現を用いてあらわせば：

定理 IV. 円板をぬいた torus は, いつでも, もとの torus と全く同じ modulus をもつように, しかも傷跡が局所的には解析的な弧からなるように, 修復されうる.

定理 V. 種数 1 の Torelli(Teichmüller) 空間においては, 適当な截線に沿った sewing だけで近傍が尽くされる；この近傍内の各点は局所的に解析的な弧からなる傷跡をもっている.

複素関数近似理論における一補題

G.Schmieder　　Univ. Hannover
柴　雅和　　広島大学理学部

複素関数近似理論において重要な役割を果たす補題のひとつに, 次に述べる Nersesjan の補題がある: (1971)

Fを$\mathbb{C}$内のコンパクト集合でその補集合が有限個の成分からなるものとし, GはFの開部分集合で$\partial G \subset \partial F$をみたすとする. このとき, 任意に与えられた$\varepsilon > 0$に対して, つぎのような有理関数$R(z)$が存在する.

$z \in G \setminus (\partial G)_\varepsilon$に対して	$\mid R(z) \mid < \varepsilon,$
$z \in F \setminus G_\varepsilon$に対して	$\mid R(z) - 1 \mid < \varepsilon,$
Fの上で	$\mid R(z) \mid < c.$

ここに, cはある絶対定数（実は$c = 1$ととれる）であって, $(A)_\varepsilon$は集合Aのε-近傍を表すものとする.

一見して分かるようにこの補題には対称性がない. またその原証明は積分論における事実を援用してなされている. このふたつのことに関して, 以下の結果を得た.

定理:　G, Hは$\mathbb{C}$上の単連結な有界領域で, $\partial G \cup \partial H \subset \partial(\bar{G} \cup \bar{H})$をみたし, さらに$\mathbb{C} \setminus (\bar{G} \cup \bar{H})$は連結であるとする. このとき, 任意の$\varepsilon > 0$に対し, つぎをみたす有理関数$R(z)$が存在する.

$z \in G \setminus H_\varepsilon$に対して	$\mid R(z) \mid < \varepsilon,$
$z \in H \setminus G_\varepsilon$に対して	$\mid R(z) - 1 \mid < \varepsilon,$
$G \cup H$の上で	$\mid R(z) \mid < 1.$

この定理は, Nersesjan の補題とは全く別の関数論的な議論によって, とくに, $\partial G \cap \partial H$ が G, H の有限個の境界要素の台 (Abdruck, impression) により覆われることに注意することによって, 証明される. (この事実それ自身も興味あるものと思われる.)

上の定理を応用して A. Roth の融合補題 (Fusion Lemma) のひとつの表現が得られる：

上の G, H に対して, つぎのような正の定数$\alpha = \alpha(G, H)$ が存在する. $\mathbb{C}$ の任意のコンパクト集合 kと任意の有理関数 $r_1(z), r_2(z)$ に対して, 適当な有理関数 $r(z)$ をとれば

$$\text{すべての } z \in \bar{G} \cup k \text{ に対し} \quad | r(z) - r_1(z) | \leq \alpha s,$$
$$\text{すべての } z \in \bar{H} \cup k \text{ に対し} \quad | r(z) - r_2(z) | \leq \alpha s.$$

ただし, $s := \sup\{| r_1(z) - r_2(z) | \mid z \in k \cup (\bar{G} \cap \bar{H})\}$.

References

[1] D. Gaier, Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, 1980.

[2] M. Ohtsuka, Dirichlet problem, extremal length and prime ends, Van Nostrand, 1970.

[3] G. Schmieder, An extension of the Fusion Lemma, J. Approx. Theory (to appear).

[4] G. Schmieder und M. Shiba, Über ein Lemma der komplexen Approximationtheorie, manuscripta math. **65**(1989), 447-464.

REGULARITY OF A BOUNDARY HAVING A SCHWARZ FUNCTION

MAKOTO SAKAI

Tokyo Metropolitan University

In his book, Davis discussed various interesting aspects concerning a Schwarz function. It is a holomorphic function S defined in a neighborhood of a real analytic arc satisfying $S(\zeta) = \bar{\zeta}$ on the arc, where $\bar{\zeta}$ denotes the complex conjugate of ζ.

In this talk, we shall define a Schwarz function for a portion of the boundary of an arbitrary open set and show the regularity of the portion of the boundary. More precisely, let Ω be an open set of the unit disk B such that the boundary $\partial\Omega$ contains the origin 0 and let $\Gamma = (\partial\Omega)\cap B$. We call a function S defined on $\Omega\cup\Gamma$ the Schwarz function of $\Omega\cup\Gamma$ if

(i) S is holomorphic in Ω,

(ii) S is continuous on $\Omega\cup\Gamma$,

(iii) $S(\zeta) = \bar{\zeta}$ on Γ.

The main theorem gives the classification of a boundary having a Schwarz function. It asserts that there are four types of the boundary if 0 is not an isolated boundary point of Ω: 0 is a regular, nonisolated degenerate, double or cusp point of the boundary. Namely, one of the following must occur for a small disk B_δ with radius $\delta > 0$ and center 0:

(1) $\Omega\cap B_\delta$ is simply connected and $\Gamma\cap B_\delta$ is a regular real analytic simple arc passing through 0.

(2a) $\Gamma\cap B_\delta$ determines uniquely a regular real analytic simple arc passing through 0 and $\Gamma\cap B_\delta$ is an infinite proper subset of the arc or the whole arc. $\Omega\cap B_\delta$ is equal to $B_\delta\setminus\Gamma$.

(2b) $\Omega \cap B_\delta$ consists of two simply connected components Ω_1 and Ω_2. $(\partial\Omega_1) \cap B_\delta$ and $(\partial\Omega_2) \cap B_\delta$ are distinct regular real analytic simple arcs passing through 0. They are tangent to each other at 0.

(2c) $\Omega \cap B_\delta$ is simply connected and $\Gamma \cap B_\delta$ is a regular real analytic simple arc except a cusp at 0. The cusp is pointing into $\Omega \cap B_\delta$ and it is a special one in the sense that there is a holomorphic function T defined on a closed disk $\overline{B_\varepsilon}$ which has a zero of order two at 0, but which is univalent on the closure $\overline{H}$ of a half disk $H = \{ \tau \in B_\varepsilon;\ \mathrm{Im}\, \tau > 0 \}$ and satisfies $\Gamma \cap B_\delta \subset T((-\varepsilon, \varepsilon))$ and $T(\overline{H}) \subset \Omega \cup \Gamma$, where $(-\varepsilon, \varepsilon) = \{ \tau;\ -\varepsilon < \tau = \mathrm{Re}\, \tau < \varepsilon \}$.

Klein群の幾何学的有限性，擬等角安定性，およびBers写像の全射性

松崎克彦　　京大理

Klein群といえば，有限生成，第2種，非初等的なものをおもなとする。Klein群 G について，次の3つの性質を考える。

① 幾何学的有限

② 擬等角安定

③ Bers写像 $\beta^{*}: B_2(\Omega, G) \to PH^1(G, \Pi)$ が全射

function group に対して ①②③の同値性はNakadaにより示されている。

問題1（Kra）

$G \triangleright H$（finite index）のとき

Hが擬等角安定 $\Rightarrow$ Gは擬等角安定

問題1′

Gは component subgroup に non-cyclic な finite group を含んでいないとする。$G \rhd H$ (finite index)

このとき、$\mathrm{Hom}_{qc}(G) = \mathrm{Hom}(G) \cap \mathrm{Hom}_{qc}(H)$

補題1 (Marden, Sullivan)

Gが torsion-free のとき ① ⇒ ②

補題2 (Sakan)

② + [ぎ安定] ⇔ ③

問題2 (Bersの予想の弱い形)

① ⇒ [ぎ安定]

問題1, 2 が正しいことを示すことにより、次の結果を得る。

定理1 (Kra; Cohomology IV の problem)

① ⇒ ③

定理2

Gが torsion-free のとき ①②③は同値である。

特　別　講　演

リーマン面上の標準的有理型函数－極値截線写像－

京都工繊大・工芸　米谷文男

１）リーマン面を標準的な領域として実現したいと人は思う。単連結領域に対する Riemann の写像定理を出発点として，Cecioni，Hilbert は有限連結領域に対して，Köbe，Courant は単葉型領域を極値平行截線領域に等角写像する一般一意化定理を得た。それ以来平面領域上の極値截線写像は詳しく調べられてきた。更に有限型リーマン面に対しては Nehari，楠によって，種数有限の一般のリーマン面に対しては森，Marden-Rodin，水本，柴の研究を通して極値平行截線写像の存在が確立されてきた。楠の導入した実部が標準ポテンシャルである有理型函数が以上の極値垂直截線写像を与えており，これを標準的有理型函数と呼ぶ。標準的有理型函数の実部は Sario の L1-主函数であり，その微分が Ahlfors の distinguished な微分になっている。この事実は単なる垂直截線写像とは異なって極値垂直截線写像と呼ばれる所以を与えている。ここでは種数無限のリーマン面を主対象とし，標準的有理型函数が存在すれば，それが極値垂直截線写像を与える事を報告する。

２）Ｒを種数ｇ（$\leqq\infty$）のリーマン面とし，$\{R_n\}$ をＲの標準近似列とする。Ｒ上２乗可積分な微分の空間を考える。R_nの各境界成分上定数をとる実調和函数で Dirichlet ノルムの意味で近似される調和函数（調和測度）の微分の空間を$\Gamma_{hm}(R)$で表わす。各分離曲線に沿って，周期が０となる実調和微分の空間を$\Gamma_{hse}(R)$とすれば，その共役微分の空間$*\Gamma_{hse}(R)$が実調和微分の空間$\Gamma_h(R)$に於ける$\Gamma_{hm}(R)$の直交補空間となっている。台が compact な無限回微分可能な実関数の微分によって Dirichlet ノルムの意味で近似される空間を$\Gamma_{e0}(R)$とする。

Γ_hの部分空間Γ_xをとり，このΓ_hに於ける直交補空間の共役微分の空間を$*\Gamma_x{}^{\perp}$とする。$\Lambda_x=\Gamma_x+i*\Gamma_x{}^{\perp}$ ，$\Lambda_{eo}=\Gamma_{eo}+i\Gamma_{eo}$として，R上の有理型微分$\psi$がある compact 集合を除いた所で$\Lambda_x+\Lambda_{eo}$の元に一致するとき$\Lambda_x$－挙動を持つという。微分が$\Lambda_{hm}$－挙動を持つ有理型函数が標準的有理型函数である。これは理想境界近傍でほぼ調和測度であり，垂直截線写像となることが期待される。実際楠が示した如く調和測度は Kerékjártó-Stoïlow の各境界成分に対応する倉持境界上，倉持容量０を除いて定数である。これは Marden－Rodin によって次の様に言い替えられる事に注意しておこう。

補題１．調和測度は Kerékjártó-Stoïlow の compact 化の中で，Kerékjártó-Stoïlow の境界点に収束する求長可能な連続曲線の族から極値計量∞のある部分族を除いた曲線に沿って極限値を持つ。

しかしながら，小さな例外点であっても無視できなくて，例えば平面領域上の境界点で，どんな単葉な等角写像によっても集積値集合が一点としか成らない弱境界と呼ばれる点であっても，有限葉の有理型函数に対してはその点への極限値を持ち得ない事がある。これに関連して次が示せる。

定理１．Kerékjártó-Stoïlow の境界点がすべて弱である絶対不連結な境界を持つリーマン面上の有限葉の有理型函数は Kerékjártó-Stoïlow 境界点に極限値を持つ。

これは Järvi により条件付きで示されていたものである。又，彼が正しくない前提に基づいて主張していた次の結果も正当化される。

系　定数でない単葉な有界正則函数は持たないが，定数でない Dirichlet 積分有限な正則函数を持つ平面領域上の，その Dirichlet 積分有限な正則函数は有限葉でない。

垂直截線領域が必ずしも極値垂直截線領域とは限らないように，

Kerékjártó-Stoïlowの各境界成分上調和測度０を除いて定数である Dirichlet 積分有限な調和函数でも調和測度とは限らない。これは境界成分の個数が可算個であっても，そのような平面領域があり，更に調和測度０を倉持容量０に置き代えても種数∞の面で例がある。唯最後の場合種数有限ならば調和測度である事が示せる。

３）ここで種数有限のリーマン面に対する柴の結果を手短にまとめておく。

定理　任意の有限種数ｇのリーマン面Ｒ上には総位数ｎ（＞ｇ）の極を持つ標準的有理型函数が存在し，それは全複素平面上 Lebesgue測度０の集合上にある虚軸に平行な截線を持ち，分岐点は有限個，そして単葉な境界近傍が取れない境界成分も有限個（併せて２(ｇ＋ｎ－１)以下）のｎ葉の被覆面に等角写像し，この標準的有理型函数が有理型函数に拡張される面Ｒの compact な面への埋め込みがある。

種数有限の場合極値垂直截線写像はまずＲ$_n$で与えられ，偏角の原理と近似により有限被覆性が示され，境界成分が垂直截線として与えられる事を示す為に次の補題が用いられてきた。

補題２．標準的有理型函数ｆ＝ｕ＋ｉｖの極の近傍で０となっている Dirichlet 函数ｈに対して，分岐点以外でｗ＝ｕ＋ｉｖを局所変数に選んで，

$$\iint \frac{\partial h}{\partial v}\, du\, dv = 0 .$$

この補題は Köbe が平面領域の極値垂直截線領域の定義に用いたもので標準的有理型函数の定義に近い。ここでは標準的有理型函数の有限被覆性更には局所的偏角の原理を与える為に用いる。種数∞の場合標準的有理型函数は必ずしも存在しないが，存在する場合は補題２によって次が示される。

定理２．ｎ個の極を持つ標準的有理型函数は全複素平面上殆ど至る処ｎ葉に被覆し，境界近傍で有界である。

AccolaはAhlfors等のリーマン・ロッホ，アーベルの定理の境界が小さい開

リーマン面への拡張の成因はHeinsの定理－BL型の写像が容量0を除いてn葉に被覆する－にあると指摘している。境界が大きくてもよい楠の場合にも同じような事情にある。定理2は次のように局所化される。

定理3．リーマン面Rの end Vの近傍で正則な函数fが，V上

$df=\omega+\omega_0+i(\sigma+\sigma_0)$, $\omega\in\Gamma_{hm}$, $\sigma\in\Gamma_{hse}$, $\omega_0, \sigma_0\in\Gamma_{e0}$

を満たしていれば，殆どすべての複素数wに対して，V上でとる重複度を込めたw点の個数が次で与えられる。

$$\#\{f^{-1}(w)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V}\frac{df}{f-w}.$$

そして補題1と定理6から次を得る。

定理4．標準的有理型函数のKerékjártó-Stoïlowの各境界点の集積値集合は虚軸に平行な線分（点も含む）である。

これで種数∞の場合にもほぼ期待どおりの結果となった。標準的有理型函数の存在について注意すれば，全複素平面上有限葉の被覆面として表現し得ないリーマン面上には標準的有理型函数は存在せず，有限葉の被覆面として表現されるリーマン面にも標準的有理型函数は存在するとは限らない。有理型函数fはもしdfがΛ_{hse}－挙動を持てばfは極値水平截線写像を与え，$d(\log f)$がΛ_{hm}－挙動を持てばfは極値円弧截線写像を与え，$d(\log f)$がΛ_{hse}－挙動を持てばfは極値放射截線写像を与える。境界挙動は局所的に論じる事ができる事に注意すれば，これらが混在する場合にも，重なり合わない end 上でそれぞれの境界挙動を示す極値截線写像を論じる事ができる。

4）極値截線写像は極近傍の回りの展開係数について，次のPossel型の極値性を持つ。少し境界挙動を一般化して扱う。内部には集積しない点列$\{a_k\}$の回りに局所円板$\{V_k=(z_k:|z_k|<1)\}$を互いに離れているように取り$V=\cup V_k$とする。$V_k'=\{z_k:|z_k|<r<1\}$として

$V'=\cup V_k'$と置く。各V_k'上 $d\sum_{n=1}^{n(k)}(b_{-n,k}z_k^{-n})$に，$R-V$上0に一致し，$R-V'$上 Dirichlet ノルムが有限である$C^1$閉微分$\eta$があるとする。この時，$\eta$との差が$\Lambda_x+\Lambda_{e0}$に属する$\Lambda_x$－挙動の有理型微分$\psi_{\eta,x}$が存在する。各$V_k$上$\psi=df=d\ \sum b_{-n,k}z_k^{-n}+d\ \sum b_{m,k}(\psi)z_k^m$と表わされ，$(\psi,\psi)_{R-V}\leq \mathrm{Im}\int_{\partial V}f\overline{\psi}$ を満足する有理型微分を考える。このうち $\mathrm{Re}(\psi-\eta)\in\Gamma_x+\Gamma_{e0}$である有理型微分の族を$Q_x$，$\mathrm{Re}(\psi-\eta)$が$V$上Dirichlet ノルム有限，$R-V$上$\Gamma_x^{\perp}+*\Gamma_{e0}$ の元に一致する微分の族を$Q_x^{\perp}$とすれば，$\psi_{\eta,x}$は次の極値性を持つ。

定理5．$\mathrm{Re}\sum_k\sum_n b_{-n,k}b_{n,k}(\psi_{\eta,x})=\max\{\mathrm{Re}\sum_k\sum_n b_{-n,k}b_{n,k}(\psi);\psi\in Q_x\}$

$$=\min\{\mathrm{Re}\sum_k\sum_n b_{-n,k}b_{n,k}(\psi);\psi\in Q_x^{\perp}\}.$$

5）種数有限の場合標準的有理型函数の存在は開リーマン面上のリーマン・ロッホ型の定理による。一般の開リーマン面上無限因子も許したリーマン・ロッホ型，アーベル型の定理を示しておこう。Jordan曲線γに対し，虚部が$*\Gamma_x^{\perp}$の周期再生微分である正則微分$\psi_{\gamma,x}$はΛ_x－挙動を持つ第1種基本微分と成っている。又，極の近傍を除いて$\Lambda_x+\Lambda_{e0}$の元に一致する第1種，第2種の基本微分も存在する。V'内に台を持つ有限又は無限の因子$\delta=\delta_q/\delta_p=q_1q_2../p_1p_2..$をとり，次の有理型函数，有理型微分の実数体上のベクトル空間を考える。

$M(1/\delta_p;\Lambda_x)=\{F$：$F$は$1/\delta_p$の倍元である因子を持つ多価有理型函数で$dF$は$R-V$上$\Lambda_x+\Lambda_{e0}$の元に一致する$\}$，

$S(\delta;\Lambda_x)=\{f\in M(1/\delta_p;\Lambda_x)$：$F$は$\delta$の倍元である因子を持つ一価有理型函数$\}$，

$D(1/\delta_q;\Lambda_x)=\{\psi$：$\psi$は$1/\delta_q$の倍元である因子を持ち$\Lambda_x$－挙動の有理型微分$\}$，

$D(1/\delta;\Lambda_x)=\{\psi\in D(1/\delta_q;\Lambda_x)$：$\psi$は$1/\delta$の倍元である因子を持つ$\}$。

(注) $\deg\ \delta_q\neq0$の時は$M(1/\delta_p;\Lambda_x)$の定数の差を持つ2元は同一視されている。

定理6. $\dim \dfrac{M(1/\delta_p;\Lambda_x)}{S(\delta;\Lambda_x)} = \dim \dfrac{D(1/\delta_q;\Lambda_x)}{D(1/\delta;\Lambda_x)}$，特に$\delta_p$が有限因子ならば，

$$\dim S(\delta;\Lambda_x) = 2\{\deg \delta_p + 1 - \min(\deg \delta_q, 1)\} - \dim \frac{D(1/\delta_q;\Lambda_x)}{D(1/\delta;\Lambda_x)}.$$

次にδの各V_k'への制限の degree は0として，それを$q_{k.1}..q_{k.\ell}/p_{k.1}..p_{k.\ell}$とする。各$V_k'$上$d\Sigma\log(z_k - z_k(p_{k.i}))/(z_k - z_k(q_{k.i}))$に一致し，$R-V$上0になる$C^1$閉微分で$R-V$上 Dirichlet ノルム有限な微分があるとする。

定理7. 次の2条件は同値である。

1）因子がδで，その対数関数の微分が$R-V$上$\Lambda_x+\Lambda_{eo}$の元に一致する有理型函数が存在する。

2）V内に次を満たす鎖Cがある。$\partial C = \Sigma p_{k.i} - q_{k.i}$で，Vに交わらない各Jordan曲線$\gamma$に対して，$\mathrm{Re}\int_C \psi_{\gamma.x}$は整数で$\mathrm{Im}\int_C \psi_{\gamma.*x\perp} = 0$である。

References

[1] R.D.M. Accola:Bull. Amer. Math. Soc., 73, 1967, 13-26.
[2] P. Järvi:Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. 12, 1987, 177-184.
[3] Y. Kusunoki:Memo. Univ. Kyoto 32, 1959, 235-258.
[4] Y. kusunoki:Jour. Math. Kyoto Univ. 5, 1966, 197-207.
[5] Y. Kusunoki:Proc. Japan Acad. 46, 1970, 277-282.
[6] F. Maitani:Proc. Japan Acad. 51, 1975, 237-242.
[7] F. Maitani & Y. Kusunoki:in preparation.
[8] F. Maitani & H. Isida:in preparation.
[9] A. Marden & B. Rodin:Acta Math. 115, 1966, 237-269.
[10] H. Mizumoto:Japanese Jour. Math. 37, 1968, 1-58.
[11] M. Mori:Jour. Math. Kyoto Univ. 3, 1964, 169-192.
[12] M. Mori:Jour. Math. Kyoto Univ. 4, 1964, 77-97.
[13] Z. Nehari:Trans. Amer. Math. Soc. 68, 1950, 258-277.
[14] M. Sakai:Math. Jour. 5, 1975, 499-516.
[15] L. Sario & K. Oikawa:Capacity functions.
[16] M. Shiba:Hiroshima Math. Jour. 14, 1984, 371-399.
[17] M. Shiba:数学 36, 1984, 208-226.
[18] M. Watanabe:Pacific Jour. Math. 31, 1969, 537-545.

Monomial proper map について

濱田英隆　九州共立大学・工学部

B_n を $\mathbb{C}^n$ の単位球とする。B_n から B_m への固有正則写像全体の集合を $O(n,m)$ で表す。$O(n,m)$ の元で境界まで正則に拡張できるもの全体の集合を $P(n,m)$ で表す。$f, g \in O(n,m)$ のとき、f と g が "spherically equivalent" であるとは、B_n の自己同型 φ と B_m の自己同型 ψ が存在して、$f = \psi g \varphi$ となることである。この同値関係による同値類全体の集合を、それぞれ、$O^*(n,m)$, $P^*(n,m)$ で表す。このとき、次の結果が知られている。

1) $\# O^*(1,1) = \infty$

2) $\# O^*(n,n) = 1 \quad (n \geqq 2)$

3) $\# P^*(n,m) = 1 \quad (n \leqq m \leqq 2n-2)$

4) $\# P^*(2,3) = 4$

5) $\# O(n,m) = 0 \quad (m < n)$

6) $\# P^*(n,m) = \infty \quad (m \geqq 2n)$

7) $\# P^*(n,2n-1) \geqq 2 \quad (n \geqq 3)$

4) では、4つの代表元は、各成分が単項式であるものが選べる。また、7) は、$(z_1, z_2, \cdots, z_n, 0, \cdots, 0)$ と $(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_1 z_n, z_2 z_n, \cdots, z_n^2)$ が同値でないことより分かる。そこで、$m = 2n-1$ のとき、特に、各成分が単項式である場合を考察して、次の結果を得た。

定理. $n \geqq 3$ とする。$f \in P(n, 2n-1)$ で、$f(0) = 0$ であり、更に、各成分が単項式であるとする。このとき、f は、次の(i)または(ii)と "spherically equivalent" である。

(i) $(z_1, z_2, \cdots, z_n, 0, \cdots, 0)$

(ii) $(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_1 z_n, z_2 z_n, \cdots, z_n^2)$

放物型・種数有限な定数面を持つ2変数解析函数について.

西野　利雄　　　　九大工

Rは複素平面上に被覆している種数が1以上の代数的なリーマン面であるとし，その分岐点は全て位数1で，無遠点上にはただ一つの境界点をもつとする．複素平面上にRの分岐点の座標を全て含む円を描き，その上にあるR上の単純閉曲線をΓとし，R上の単純閉曲線でΓとホモトープなもの，又はそれらの極限であるようなものの全体をFとする．このとき次の事が言える．

Fに含まれる閉曲線で長さが極小なものは一意的に定まる．

Mを2次元のスタイン多様体，πをMから複素平面上の単位円Dへの解析写像とし，πによるDの任意の点の逆像 S_z が全て放物型で種数有限な，既約で特異点のない解析曲線であるとする．更にMには横断線が存在するとする．こととき次のことが言える．

M上の有理型函数で，全ての S_z のコンパクト化の全体に有理型に解析接続出来るものが存在する．

Vを2次元のスタイン多様体，fをV上の正則函数とするとき，或る1変数の開リーマン面R，VからRへの解析写像π，R上の正則函数Fがあって，$f=F\cdot\pi$となるが，山口博史氏は次のことを証明している．

fの定数面の既約成分で，放物型・種数有限なものが値の集合で対数容量正だけあるならば，fの全ての定数面の既約成分が放物型・種数有限となり，Rの任意の点pにたいするπの逆像S_pはR上の第1類の集合を除いて既約となるようにできる．更にR上の高々対数容量零の点集合eを除いて，S_pの中には一定種数gの既約成分がただ一つ含まれる．

このことから，R－e上に種数gのリーマン面のモジュライの空間M_gへの解析写像Φが求まる．ところで，先に示したことは次のことを意味している．

ΦはM_gのコンパクト化への写像として，R全体へ解析接続することができる．

解析曲線の解析接続について．(*Thullen* の定理の或る拡張)

西野　利雄　　　　九大工

C と C' をそれぞれ x 平面と y 平面の単位円板とし，Γをそれらの直積領域とする．更にＥをΓ内の閉集合でＥの x 平面への射影は C の完全内部にあり，Γ内の多重劣調和函数で，Ｅでは－∞になり，恒等的には－∞ではないものが存在するとする．そして，ＳをΓ－Ｅにおける解析曲線とする．このとき次のことが言える．

もしΓ内の解析直線 $y=0$ の或る近傍にＳの点が存在しないならば，ＳのΓ内における閉包はΓにおける解析曲線である．

擬凹状集合の導集合はまた擬凹状集合であることから上記のことを証明するためには，Γ内におけるＳの閉包が擬凹状集合になることを示せばよい．しかしこのことは鈴木昌和氏によって既に証明されている．

複素リー群の∂-コホモロジー群について

風間英明　九州大・養
梅野高司　九州産大・養

Gを連結な複素リー群，G^0をその maximal toroidal 部分群とする。G/G^0 は Stein 群であり，G は G/G^0 上の G^0-主束となる。G^0 は $\mathbb{C}^n/\Gamma$ と同型である。ここに，
$\Gamma = \mathbb{Z}\{e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_q\}$ $(1 \leq q \leq n)$ で，
$e_1, \cdots, e_n, v_1, \cdots, v_q \in \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}$ 上 1次独立である。このとき次の定理を得る。

<u>定理</u>　Gを連結複素リー群，G^0をその maximal toroidal 部分群とする。

(1) $\dim H^1(G, \mathcal{O}) = 0 \iff G = G/G^0$

即ち，G は Stein 群。

(2) $0 < \dim H^1(G, \mathcal{O}) < +\infty$

$\iff G = G^0$ かつ G^0 は toroidal group of finite type. 即ち

$H^p(G^0, \mathcal{O}) \cong \mathbb{C}\{dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq q\}$,

ここに，$z_1, \cdots, z_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準座標 $(1 \leq p \leq q)$。

(3) $\dim H^1(G, \mathcal{O}) = \infty$ かつ $H^1(G, \mathcal{O})$ は Hausdorff topology をもつ

$\Longleftrightarrow$ $0 < \dim G^0 < \dim G$，かつ G^0 は toroidal group of finite type.

このとき，$H^p(G, \mathcal{O}) \cong H^0(G/G^0, \mathcal{O}) \otimes H^p(G^0, \mathcal{O})$，$0 \leq p \leq n$.

(4) $H^1(G, \mathcal{O})$ が non-Hausdorff topology をもつ.

$\Longleftrightarrow$ $\dim G^0 > 0$ かつ G^0 は toroidal group of non-Hausdorff type，即ち，$H^p(G^0, \mathcal{O})$ は non-Hausdorff topology をもつ $(1 \leq p \leq q)$。

Deformations of complex analytic subspaces with locally stable parametrizations

坪井昭二　鹿児島大学
教養部

<u>定義1</u>：複素多様体の間の正則写像 $f: X \to Y$ が局所安定であるとは，任意の点 $y \in f(X)$ と任意の有限部分集合 $S \subset f^{-1}(y)$ に対し，写像の multi-germ $f: (X, S) \to (Y, y)$ の任意の unfolding $F: (X \times \mathbb{C}^r, S \times 0) \to (Y \times \mathbb{C}^r, y \times 0)$ がすべて "trivial" (i.e. $F \underset{\text{同値}}{\simeq} f \times id_{\mathbb{C}^r}$) であることを云う。

<u>定義2</u>：複素多様体 Y の複素解析的部分空間 Z が "with locally stable parametrizations" であるとは，$n: X \to Z$ を Z の正規化，$\iota: Z \subset Y$ を包含写像としたとき：(i) X が非特異で，かつ (ii) 合成写像 $f := \iota \circ n: X \to Y$ が局所安定な正則写像であることを云う。

このような複素解析的部分空間 Z の例として，<u>例1</u>：複素多様体 Y の中の単純正規交叉な解析的部分集合 Z，<u>例2</u>：$(\dim Z, \dim Y) \in$ nice range (J. N. Mather の意味で) として，複素多様体 Y の中の「通常特異点」を持った解析的部分空間 Z (ここで「通常特異点」とは "generic" な線形射影の像に現われる特異点を云う) を挙げることができる。この (Y, Z) の

組に対し、その対数的変形族 $\mathcal{F}=(\mathcal{Y},\mathcal{Z},\pi,M,o)$ (resp. Yの中でのZの局所自明な変位族 $\mathcal{F}=(Y\times M,\mathcal{Z},\pi,M,o)$)を考える。

<u>定理</u>: 定義2の(Y,Z)について、その対数的変形(resp. Yの中でのZの局所自明な変位)と局所安定な正則写像 $f:=\iota\circ n: X\longrightarrow Y$ の、X, Yの複素構造をともに変形させたときの変形(resp. Yの複素構造は固定して、Xの複素構造のみ変形させたときの変形)はカテゴリーとして同型である。

したがって、正則写像の変形の倉西族の存在に関する宮嶋-難波-Flennerの結果と、コホモロジーの間の対応を見ることにより次の系を得る。

<u>系</u>: 定義2の(Y,Z)の対数的変形(resp. Yの中でのZの局所自明な変位)について、その倉西族 $\mathcal{F}=(\mathcal{Y},\mathcal{Z},\pi,M,o)$ (resp. 効果的にparametrizeされた極大族 $\mathcal{F}=(Y\times M,\mathcal{Z},\pi,M,o)$)は存在する。しかも $H^2(Y,\Theta_Y(-\log Z))=0$ (resp. $H^1(Z,N_{Z/Y})=0$) ならば、パラメーター空間Mは非特異で $\dim_{\mathbb{C}} M=\dim_{\mathbb{C}} H^1(Y,\Theta_Y(-\log Z))$ (resp. $\dim_{\mathbb{C}} M=\dim_{\mathbb{C}} H^0(Z,N_{Z/Y})$) である。ここで $\Theta_Y(-\log Z)$ はY上のZに沿った対数的正則ベクトル場の層 (resp. $N_{Z/Y}:=\mathrm{Coker}\{\Theta_Y(-\log Z)\to\Theta_Y\}$) を表す。

Distribution formula of terminal singularities of a minimal resolution for simple K3 singularities

筑波大学 数学系 渡辺公夫

Let (V, p) be a germ of a terminal singularity of dimension 3, and let $\mu : W \longrightarrow V$ be a good resolution such that $W - \mu^{-1}(p) \xrightarrow[\mu]{\simeq} V - \{p\}$. We write $K_W = \mu^* K_V + E$ and $E = \sum_j a_j E_j$, where E_j are exceptional divisors of μ. It is then possible to define

$$\Delta(V, p) := -(E \cdot c_2(W)) .$$

Let (X, x) be a simple K3 singularity and let $\pi : Y \longrightarrow X$ be a minimal resolution. Then the exceptional set of Y consists of a single normal K3 surface with finitely many terminal singularities $\{ y_i \}$ along D. Let $\rho : M \longrightarrow Y$ be its good resolution. Then we have

$$-\rho^* K_Y \cdot c_2(M) = 24 - \sum_i \Delta(Y, y_i).$$

Suppose moreover that the singularity (X, x) is defined by a quasihomogeneous polynomial of type (p, q, r, s). In this case the singularities y_i are cyclic terminal singularities by a result of Tomari. Let r_i be the torsion order of the singularity y_i. Then the above formula turns into

$$\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_4} = 24 - \sum(r_i - \frac{1}{r_i}) ,$$

where σ_i is the i-th fundamental symmetric polynomial in p, q, r and s.

For example, consider the singularity $x^2+y^3+z^7+w^{42} = 0$. The minimal resolution of this singularity is unique and has three terminal singularities, which are of order 2, 3 and 7. Then

$$\frac{42\times 545}{1764} = 24 - \{(2- \frac{1}{2})+ (3- \frac{1}{3})+ (7- \frac{1}{7})\}.$$

Appell F_4 型微分方程式系に対する Riemann の問題

加藤満生　　琉球大学教育学部

Appell F_4 型微分方程式系

$$\begin{cases} x(1-x)z_{xx}-y^2z_{yy}-2xyz_{xy}+(c-(a+b+1)x)z_x \\ \qquad -(a+b+1)yz_y-abz=0 \\ y(1-y)z_{yy}-x^2z_{xx}-2xyz_{xy}+(c'-(a+b+1)y)z_y \\ \qquad -(a+b+1)xz_x-abz=0 \end{cases}$$

はP^2 内の $L_x=\{x=0\}$, $L_y=\{y=0\}$, L_∞ 及び $C=\{(x-y)^2-2(x+y)+1=0\}$ 上で特異点を持つ.

解の空間 $\mathcal{F}_4$ は4次元で、各特異点集合上で4つの exponent を持ち、逆に $\mathcal{F}_4$ はその exponent によって特徴付けられる. これを一変数のRiemann のP関数スタイルに表現すると次のようになる.

$$\mathcal{F}_4 = P\left\{\begin{array}{cccc} L_x & L_y & C & L_\infty \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1-c & 1-c' & 0 & b \\ 1-c & 1-c' & c+c'-a-b-1/2 & b \end{array}\right\}$$

特別講演

$\mathbb{C}^3$のコンパクト化の構造について

古島幹雄　琉球大・教育

<u>序文</u>. X を n 次元連結コンパクト複素多様体とし, Y を X における解析的閉部分集合とする. 2つ組 (X, Y) が $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化であるとは, $X-Y$ が $\mathbb{C}^n$ に双正則同型である時をいう. Hartogs の定理により, Y は X 上の divisor でなくてはならない. このとき, F. Hirzebruch により, 次の問題が提起された.

<u>問題</u>. 第2 Betti 数 $b_2(X)=1$ なる $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化を決定せよ.

まず, $n=1$ の時は周知のように, $(X, Y) \cong (\mathbb{P}^1, \infty)$ であり, $n=2$ のときは

Remmert - Van de Ven により，$(X, Y) \cong (\mathbb{P}^2, \text{a line } \mathbb{P}^1)$ であることが知られている．しかし，$n \geqq 3$ に於ては，未解決である．そこで，我々は，本講演に於て，とくに，$n=3$ の場合のみを考察する．最近，Peternell, Schneider, Kosarew 等により，$b_2(X)=1$ なる $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化の射影代数性が示されたので，これを容認することにすれば，$n=3$ の時は，X は 3次元射影代数多様体と仮定してよい。

<u>注意</u>．(1) $n \geqq 4$ に於ては，X の射影代数性は未解決である．

(2) $b_2(X)=2$ なる射影代数的でない，$\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化が存在する．

§1. 基本的事実

(X, Y) を $b_2(X)=1$ なる $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化で，とくに，X は射影代数的と仮定する．そのとき，次を得る．

命題(1.1)．(1) Y は X 上の既約な ample divisor である．

(2) $H^i(X;\mathbb{Z}) \cong H^i(Y;\mathbb{Z})$，とくに

(ア) $H^1(X;\mathbb{Z}) \cong H^1(Y;\mathbb{Z}) = 0$，

(イ) $H^2(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\cdot c_1(\mathcal{O}_X(Y))$

$\quad\ \ \ \ \mathrel{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}}}$

$H^2(Y;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\cdot c_1(\mathcal{O}_Y(Y))$

(3) $-K_X = r\cdot Y$ $(r>0,\ r\in\mathbb{Z})$，但し K_X は X の canonical divisor とする．特に，X は第1種 Fano 3-fold である．

命題(1.1)−(3) に於ける整数 $r>0$ を X の "index" という．

今，index $r \geqq 3$ に於きましては，小林−落合の定理から直ちに，

定理(1.2)(小林-落合).

(1) $r \geqq 4 \Rightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2)$

(2) $r = 3 \Rightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2)$, 但し $\mathbb{Q}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ は非特異2次超曲面, $\mathbb{Q}_0^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ は 2次錐.

こうして, 残るは, $r \leqq 2$ の場合の (X, Y) の構造である.

§2. Index $r = 2$ の場合の構造

このとき, Y は(既約な) degenerate del Pezzo 曲面である. そこで, Y が normal な場合と non-normal な場合とに分けて考える.

定理(2.1). Index $r = 2$ で Y を normal と仮定する. そのとき, $(X, Y) \cong (V_5, H_5^0)$, 但し $V_5 := \mathrm{Grass}(2.5) \cap \mathbb{P}^6$, H_5^0 は A_4-型の特異点を唯1つもつ V_5 の超平面切断.

定理(2.2) (Peternell-Schneider). Index $Y=2$ で Y を non-normal と仮定する. そのとき, $(X, Y) \cong (V_5, H_5^\infty)$, 但し, H_5^∞ は $\mathrm{Sing}\, H_5^\infty = \ell$ が V_5 内の normal bundle $N_{\ell|V_5} \cong \mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(1)$ をもつ line であるような V_5 の non-normal 超平面切断.

注意 (1) (Peternell-Schneider, 古島-中山) Index $Y=2$ の場合は, normal, non-normal いづれの場合も, (X, Y) は同型をのぞき一意的に存在して, 上述のものに限る。

(2) V_5 から $\mathbb{Q}^3$ の上への双有理写像 $\pi : V_5 \dashrightarrow \mathbb{Q}^3$ で, 制限 $\pi : V_5 - H_5^\infty \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^3 - \mathbb{Q}_0^2 \ (\cong \mathbb{C}^3)$ が双正則同型となるものが存在する.

(3) $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化としての Fano 3-fold V_5 の詳細な構造も分っている (古島-中山)

§3. Index $r=1$ の場合の構造

このとき, Y は $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$ なる Gorenstein 曲面である. 前と同じく, Y が normal な場合と non-normal な場合に分けて考える.

<u>定理</u>(3.1). Index $r=1$ で Y を normal と仮定する. そのとき, そのようなコンパクト化 (X, Y) は存在しない.

<u>定理</u>(3.2) (Peternell - Schneider). Index $r=1$ で Y を non-normal と仮定する. そのとき, もし, そのようなコンパクト化が存在すれば, $(X, Y) \cong (V_{22}, H_{22}^{\infty})$, 但し, $V_{22} \hookrightarrow \mathbb{P}^{13}$ は index 1, genus $g=12$ の第1種 Fano 3-fold で H_{22}^{∞} はその超平面切断.

<u>定理</u>(3.3) Index $r=1$, genus $g=12$ の Fano 3-fold の中に $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化になっているものが存在する.

<u>注意</u>　実際，向井－梅村によって構成された，index 1，$g=12$ の Fano 3-fold V_{22}' は $\mathbb{C}^3$ を含み，$V_{22}' - \mathbb{C}^3 =: H_{22}^{\infty}$ は non-normal で，$\mathrm{Sing}\, H_{22}^{\infty} =: l$ は V_{22}' 内の line でその normal bundle は $N_{l|V_{22}'} \simeq \mathcal{O}_l(-2) \oplus \mathcal{O}_l(1)$ となっている

更に，V_{22}' から V_5 の上への双有理写像 $\pi: V_{22}' \dashrightarrow V_5$ で，制限 $\pi: V_{22}' - H_{22}^{\infty} \xrightarrow{\sim} V_5 - H_5^{\infty} (\cong \mathbb{C}^3)$ が双正則同型となるものが存在する．

<u>予想</u>．Index $r=1$ の場合は同型を除き $(V_{22}', H_{22}^{\infty})$ に限る．

この予想が証明されれば，Hirzebruch によって提起された問題の $n=3$ の場合は完全に解決する．