日　本　数　学　会

1989 年度秋季総合分科会

函　数　論　分　科　会

講　演　ア　ブ　ス　ト　ラ　ク　ト

1989年 9 月

於　上　智　大　学

函数論分科会
9月29日（金）
第III会場
9：00－12：00

目　　次

１３：３０－１５：３０

15. 米谷文男（京都工芸繊維大・工芸）	Second variational formula under C^2- movement	15
16. 相川弘明（群馬大・工）	接境界値を持たないグリーンポテンシャル	10
17. 相川弘明（群馬大・工） 林 仲夫（群馬大・工） 斎藤三郎（群馬大・工）	The Bergman space on a sector and the heat equation	15
18. 二宮信幸	Riesz-Frostmanのポテンシャルについて	15
19. 増本　誠（広島大・理）	平面領域上の劣調和関数の非可積分性	15
20. 村上　温（広島工大） 山崎稀嗣（島根大・理）	無限ネットワーク上の放物型グリーン関数	15
21. 前田文之（広島大・理）	共役構造を持つ調和空間上のGreenの公式	15

函数論特別講演　16:00-17:00

竹腰見昭（阪大・教養）　調和写像のエネルギー評価とLiouville型定理

函数論分科会
9月30日（土）
第III会場
9：30−12：00

22.	A.Browder (Brown大) 山口博史 (志賀大・教育)	開リーマン面の調和moduleの動きとその応用	15
23.	山口博史 (志賀大・教育)	R^3の領域の調和moduleの動きについて	15
24.	大竹博巳 (京大・理)	部分的に等角な擬等角写像と普遍的タイヒミュラー空間	15
25.	志賀啓成 (東工大・理)	Moduli空間のlength spectrumについて	15
26.	松崎克彦 (京大・理)	有限生成torsion-free Klein群の２つの型の自由積分解について	15
27.	松崎克彦 (京大・理)	Ahlfors予想の再帰性の問題への変形について	15
28.	泉　脩蔵 (近畿大・理工)	Moišezon部分空間に沿う形式射の収束性は伝播する	15
29.	G.Schumacher (Ruhr-Bochum大) 竹腰見昭 (阪大・教養)	Hyperbolicity and branched coverings	15
30.	芳賀晶子 (千葉大・理) 志賀弘典 (千葉大・理)	ζ(3) の保型形式を用いた積分表示	15

函数論特別講演

13:30-14:30

Alan F. Beardon (Univ. of Cambridge)　　Circle Packing and Complex Analysis

15:00-16:00

斎藤恭司 (京大・数理研)　　Teichmüller空間上のmodular函数の構成

On the generalized hyper-holomorphic functions in the quaternionic extensions of real normed linear spaces.

笹山浩良　　笹山研究所

Hiroyoshi SASAYAMA　　The Sasayama Institute

1987年春の分科会で A.E.Taylor氏の real normed linear space E(R)= 𝔹 にassociateされた complex normed linear couple space E(C)の quaternionic な拡張 E(三) 及び R.Fueter氏の 正則性の E(三)への拡張を報告した。(cf. Referativnii Zurnal Mat.1987,No.11Б 224,225) ここに 三は W.R.Hamilton氏の quaternion algebra とする。

今回は M.Naser氏(1971)により最初与えられ、後に濃野氏 (1982)によって補充された quaternion variable の hyper-holomorphic functions の概念が E(三) における函数に拡張できる事をのべる。:

三の quaternion units を $1\equiv i_1, i\equiv i_2, j\equiv i_3, k\equiv i_4$ とすると i を C の元素と identify する事により E(三)の元素は $\mathfrak{X}\equiv\sum_{r=1}^{4} i_r x_r = z_1 + z_2 j$ と表はし得る。ここに $x_r \in \mathbb{B}(r=1,2,3,4)$, $z_1\equiv x_1+ix_2$, $z_2\equiv x_3+ix_4 \in E(C)$ cf. loc.cit.)。 今 $f(\mathfrak{X})=f_1(z_1,z_2)+f_2(z_1,z_2)j$ を

$E(\Xi)$の open subset G より real normed linear space $\mathbb{B}'$ のΞ-extension $E'(\Xi)$ への函数とし f_1, f_2 は G で連続的に Frechet-微分可能とする。この時、任意の $\xi \in \mathbb{B}$ に対して operator

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_{[1]\mathfrak{X}}(\ ;\xi) \equiv \partial_{z_1} - j\,\partial_{z_2}, & \mathfrak{D}^*_{[1]\mathfrak{X}}(\ ;\xi) \equiv \partial_{\bar{z}_1} + j\,\partial_{z_2}, \\ \mathfrak{D}_{[2]\mathfrak{X}}(\ ;\xi) \equiv \partial_{\bar{z}_1} - j\,\partial_{z_2}, & \mathfrak{D}^*_{[2]\mathfrak{X}}(\ ;\xi) \equiv \partial_{z_1} + j\partial_{z_2}, \\ \mathfrak{D}_{[3]\mathfrak{X}}(\ ;\xi) \equiv \partial_{z_1} - j\,\partial_{\bar{z}_2}, & \mathfrak{D}^*_{[3]\mathfrak{X}}(\ ;\xi) \equiv \partial_{\bar{z}_1} + j\partial_{\bar{z}_2} \end{cases}$$

を定義する。ここに $\partial_z \equiv \partial_z(\ ;\xi), \partial_{\bar{z}} \equiv \partial_{\bar{z}}(\ ;\xi)$ は増分 ξ の Fréchet 偏微分算 $\partial_{x_1}(\ ;\xi), \partial_{x_2}(\ ;\xi)$ により通常の complex differential operator と同様に定義された $E'(C)$ における operator である。もし G において $\mathfrak{D}^*_{[a]\mathfrak{X}}(\ ;)f(\mathfrak{X})=0\ (1 \leqq a \leqq 3)$ ならば $f(\mathfrak{X})$ は G で才 a 種 hyper-holomorphic であると定義するならば、f_1, f_2 が G で 2 回連続的に Fréchet 微分可能の場合次の定理を得る。

(定理) f が才 a 種 hyper-holomorphic ならば f の Laplacian は 0 i.e. $\Delta f \equiv \sum_{r=1}^{4} \partial^2_{x_r} f(\mathfrak{X};\xi;\xi)=0.$

(定理) もし $\Delta f=0$ in G ならば $\mathfrak{D}_{[a]\mathfrak{X}} f$ は G で才 a 種 hyper-holomorphic である。

2

独立虚数単位 j を使用した de Moiver の公式と三角関数の加法定理の証明

横山重夫　北本高

$\boxed{\text{定義 1-1}}$ 独立虚数単位 j は $j^4=1$ の同値関係を認めない虚数単位である。（例 $j \neq j^5 \neq j^9 \neq j^{13} \cdots$）

$\boxed{\text{定義 1-2}}$ 偏角が m 直角 $(=\frac{\pi}{2}m)$ の単位円の円周上の点 P は

$$P=j^m$$

であらわす

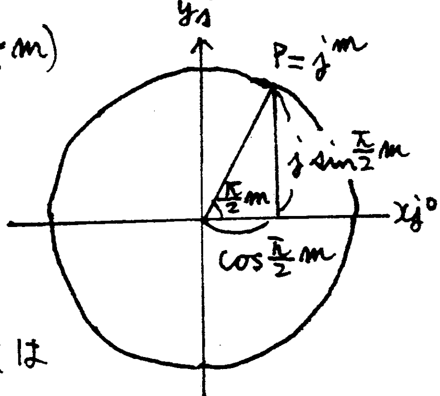


図 1-1

$\boxed{\text{定理 1-3}}$ $P=j^m$ の極形式は

$$P=j^m=\cos\frac{\pi}{2}m+j\sin\frac{\pi}{2}m$$

である

（証明）図 1-1 より明らかである．

$\boxed{\text{公理 1-4}}$ j については．次の指数法則がなりたつ

(1) $(j^m)^n=j^{mn}$

(2) $j^m\times j^n=j^{m+n}$

$\boxed{\text{定理 1-5}}$ de Moiver の公式

$$(\cos\theta+j\sin\theta)^n=\cos n\theta+j\sin n\theta$$

はなりたつ。

(証明) 定理1-3より

$$(j^m)^n = \left(\cos\frac{\pi}{2}m + j\sin\frac{\pi}{2}m\right)^n \cdots\cdots ①$$

$$j^{mn} = \cos\left(\frac{\pi}{2}mn\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}mn\right) \cdots ②$$

①と②は公理1-4より等しい。$\theta = \frac{\pi}{2}m$に書き変える.

$$\therefore\ (\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$$

$\boxed{\text{定理1-6}}$ 三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

はなりたつ.

(証明) 定理1-3より

$$j^{m+n} = \cos\frac{\pi}{2}(m+n) + j\sin\frac{\pi}{2}(m+n) \cdots\cdot ①$$

$$j^m \times j^n = \left(\cos\frac{\pi}{2}m + j\sin\frac{\pi}{2}m\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}n + j\sin\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{2}m\cos\frac{\pi}{2}n - \sin\frac{\pi}{2}m\sin\frac{\pi}{2}n$$

$$+ j\left(\sin\frac{\pi}{2}m\cos\frac{\pi}{2}n + \cos\frac{\pi}{2}m\, j\sin\frac{\pi}{2}n\right) \cdots ②$$

①と②は公理1-4より等しい。①と②の実数部分と虚数部分を比較し、$\frac{\pi}{2}m = \alpha$, $\frac{\pi}{2}n = \beta$に書き変えると 次式を得る。

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

3

Eulerの公式の証明と $w=e^{j\theta}$ のグラフが単位円であることの証明

横山重夫　北本高

定理2-1　aとbが任意の数であるとき

$$a^b = e^{b\log a}$$

である。

(証明) $w=a^b$とおき、両辺に自然対数をとる。

$$\log_e w = \log_e a^b$$

$$\log_e w = b\log_e a$$

$$w = e^{b\log_e a}$$

$$\therefore\quad a^b = e^{b\log a}$$

定理2-2　Eulerの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

はなりたつ。

(証明) 独立虚数単位jを底とする指数関数を

$$w = j^t \text{ .... ①}$$

とする。定理2-1より

$$w = e^{t\log j} \text{ .... ②}$$

である。この関数をtで微分する。

$$w' = \log j \cdot e^{t \log j}$$
$$= \log j \cdot w \text{ ------ ③}$$

定理 1−4 より

$$w = j^t = \cos\frac{\pi}{2}t + j\sin\frac{\pi}{2}t \text{ ---- ④}$$

④をtで微分する。

$$w' = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}t + j\cos\frac{\pi}{2}t$$
$$= \frac{\pi}{2}j\left(j\sin\frac{\pi}{2}t + \cos\frac{\pi}{2}t\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}j \cdot w \text{ ----- ⑤}$$
$$\therefore \log j = \frac{\pi}{2}j \text{ ---- ⑥}$$

②に⑥を代入し、②と④を$\theta = \frac{\pi}{2}t$で書き変える。

$$w = e^{t\log j} = e^{\frac{\pi}{2}tj} = e^{j\theta}$$
$$w = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$\therefore e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$\boxed{\text{定理2−3}}$ $w = e^{j\theta}$ のグラフは単位円である。

（証明）複素平面上の単位円の円周上の点をPとする

$$P = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$\therefore P = e^{j\theta}$$

これより$w = e^{j\theta}$のグラフは複素平面上の単位円である。

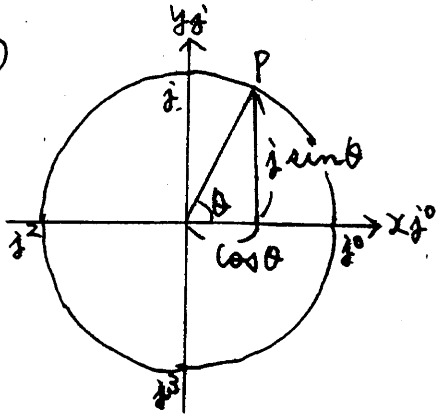


図2−1

複素平面座標と複素空間座標

4

横山重夫　北本高

$\boxed{\text{定義3-1}}$ 複素平面の座標表示は4通りある。

(1) 2項形式　$P=a+bj$

(2) 極形式　$P=r(\cos\theta+j\sin\theta)$

(3) 指数形式　$P=rj^{m}$

(4) Euler形式　$P=re^{j\theta}$

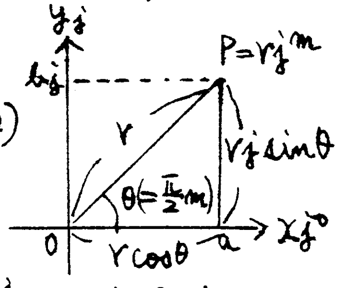


図3-1

$\boxed{\text{定義3-2}}$ 原点からの距離がr，偏角が$\frac{\pi}{2}t$，立体角が$\frac{\pi}{2}s$である複素空間内の点Pの座標は

$$P=rj^{sj+t}$$

であると定義する。

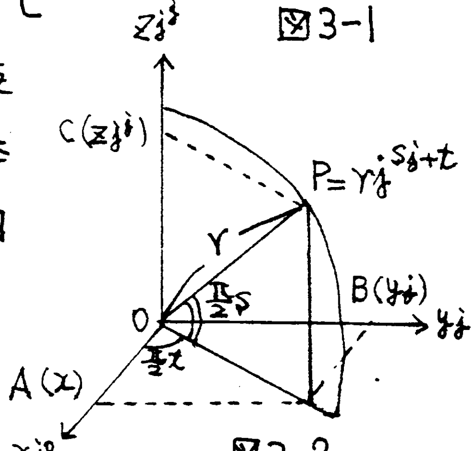


図3-2

$\boxed{\text{定理3-3}}$ 原点からの距離がx，y，zであるとき，x・y・z軸上の点は$A(x)$，$B(yj)$，$C(zj^{j})$である。

（証明）$A(x)$，$B(yj)$は明らかである。z軸の偏角は0，立体角は直角であるから，$t=0$，$s=1$である。

$$\therefore\ C(zj^{1\times j+0})=C(zj^{j})$$

$\boxed{\text{注意 3-4}}$ 立体角は点Pと複素平面が作る角であり、点PとZ軸が作る角ではない。

$\boxed{\text{定理3-5}}$ 原点からの距離r　偏角$\theta(=\frac{\pi}{2}t)$，立体角$\varphi(=\frac{\pi}{2}s)$の点Pのオイラー形式の座標表次は次である。

$$P = re^{j(\varphi j+\theta)}$$

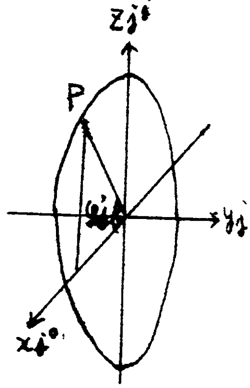
（証明）
$$P = rj^{sj+t} = rj^{sj} \times j^{t}$$
$$= r(\cos\frac{\pi}{2}s + j\sin\frac{\pi}{2}s)^{j}(\cos\frac{\pi}{2}t + j\sin\frac{\pi}{2}t)$$
$$= re^{j(j\frac{\pi}{2}s)}e^{j(\frac{\pi}{2}t)}$$
$$\therefore P = re^{j(\varphi j+\theta)}$$

$\boxed{\text{定理3-6}}$ 三角関数の純虚数角は立体角である。純虚数角φjと実数角φには次の関係がある。

$$\cos\varphi j = \cos\varphi \text{ ..... ①}$$
$$j\sin\varphi j = j^{j}\sin\varphi \text{ --- ②}$$

（証明）X－Z平面では$\theta=0$である。

$$P = e^{j(j\varphi+0)} = (\cos\varphi j + j\sin\varphi j)$$



上式は図3－3になるから，φjは立体角である。①と②は図3-3より明らかである。

図3－3

$\boxed{\text{定理3-7}}$ 原点からの距離r，偏角θ，立体角φの点Pの極形式は次式である。

$$P = rj^{j}\sin\varphi e^{j\theta} + rj\cos\varphi\sin\theta + r\cos\varphi\sin\theta$$

5 Schrödingerの波動関数のグラフは波動ではなく円である

横山重夫　北本高

1 光の粒子性 Newton・Einstein・Compton

（根拠）①光の直進性，鏡面の反射 ②光電効果（光を金属表面にあてると電子がとび出す） ③Compton効果（電子によるX線の散乱現象）

2 光の波動性 Huygens・Fresnel・Maxwel

（根拠）①光の回析・干渉 ②複屈析 ③光の電磁理論

3 光の波動性の問題点 波は媒質の存在しない所では伝わらない（エーテル理論）

4 de Broglie の物質波

DavisonとGermanはNi板に電子線を当てると電子線が散乱することを発見した。その散乱状況がX線の散乱状況と類似していることから，de Broglieは電子はX線と同じように波動であると結論した。

5 現代物理学における光と電子の考え

光と電子は粒子性と波動性の両性質を同時にもつものと考えている。

6 Schrödingerの波動関数

Schrödingerの波動方程式の解が波動関数である。この関数は電子の波動性を表現したものであるけれども、そのグラフがどのようなグラフであるか、まだ物理学者には判っていない。関数の表現式は物理学者によって異っているので、3人の表現式を示めす

$\psi(x,t) = A \exp 2\pi i\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$　鈴木皇

$\psi(r,t) = A \exp i(Kr - \omega t)$　阿部竜蔵

$\psi(q,t) = \phi(q) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} W t\right)$　朝永振一郎

上記の式を2乗すると確率論の関数に類似するので、物理学者は確率論的な解釈を行っている。

$\boxed{\text{定理4-1}}$ Schrödingerの波動関数は円である。

(証明) 波動関数の変数をθに書き変えると

$$\psi = A e^{i\theta}$$

となる。定理2-3より、上式のグラフは円である。

$\boxed{\text{定理4-2}}$ 水素の基底状態の電子の関数 $\psi = A e^{-\frac{r}{a}}$ のグラフは円である。

(証明)　$\psi = A e^{-\frac{r}{a}} = A e^{i\left(\frac{r}{a}i\right)}$

定理3-6より、上の式のグラフは円である。

(参考文献) 鈴木皇著 "電子" 岩波書店 (1986)

ON CERTAIN FRACTIONAL OPERATORS AND CERTAIN SUBCLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)
MEGUMI SAIGO (FUKUOKA UNIVERSITY)

Let A denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the unit disk U. Using the fractional calculus, two fractional operators $\Omega^{\beta}f$ and $J_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta}f$ for f(z) in the class A are introduced. Let L(a,c) be the linear operator defined by the convolution of an incomplete beta function $\phi(a,c,;z)$ and $f(z) \in A$, that is,

$$L(a,c)f(z) = \phi(a,c;z)*f(z).$$

Denoting by $S^*(\alpha)$ and $K(\alpha)$ the subclasses of A consisting of functions which, respectively, are starlike of order α, and convex of order α, we show

THEOREM I. Let $\alpha > 0$, $0 \leqq \beta < 1$, η be real. Then

$$L(2+\alpha+\eta, 2-\beta+\eta)J_{0,z}^{\alpha,\beta,\eta}K(1/2) \subset S^*(1/2).$$

7

A CRITERION FOR STARLIKENESS

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)
MILUTIN OBRADOVIĆ (UNIVERSITY OF BELGRADE)

Let A denote the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the unit disk U.
A function $f(z) \in A$ is said to be in the class $S^*[a,b]$ if it satisfies

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1 + az}{1 + bz} \qquad (z \in U)$$

for $-1 \leqq b < a \leqq 1$, where the symbol $\prec$ means the subordination.

In the present talk, we derive the following theorem.

THEOREM. If $f(z) \in A$ with $f(z)f'(z) \neq 0$ $(0 < |z| < 1)$, and if

$$\left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < k(a,b) \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right|$$

for some a, b $(-1 \leqq b < a \leqq 1)$ and for all $z \in U$, then $f(z) \in S^*[a,b]$, where $k(a,b)$ is defined in our talk.

8

ON NUNOKAWA'S CONJECTURE FOR MULTIVALENT FUNCTIONS

SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)

Let $A(p)$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \qquad (n \in N = \{1, 2, \ldots\})$$

which are analytic in the unit disk U.

Recently, M. Nunokawa has given the following conjecture for multivalent functions.

NUNOKAWA'S CONJECTURE. If $f(z) \in A(p)$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} < p + \frac{1}{2} \qquad (z \in U),$$

then $f(z)$ is p-valently starlike in U.

In the present talk, we prove

THEOREM. If $f(z) \in A(p)$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} < p + \frac{1}{2} \qquad (z \in U),$$

then

$$0 < \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < \frac{2p(p+1)}{2p+1} \qquad (z \in U).$$

The result is sharp.

9

A PROPERTY OF CERTAIN ANALYTIC FUNCTIONS INVOLVING RUSCHEWEYH DERIVATIVES

MING-PO CHEN (ACADEMIA SINICA)
SHIGEYOSHI OWA (KINKI UNIVERSITY)

Let $A(p)$ denote the class of functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \qquad (p \in N = \{1,2,...\})$$

which are analytic in the unit disk U. Using the convolution, we define the Ruscheweyh derivative $D^{n+p-1}f$ by

$$D^{n+p-1}f(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{n+p}} * f(z),$$

where $f(z) \in A(p)$ and n is any integer greater than $-p$.

In the present talk, we show

THEOREM. If $f(z) \in A(p)$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{D^{n+p}f(z)}{D^{n+p-1}f(z)} \right\} > \alpha \qquad (z \in U)$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$, then

$$\mathrm{Re}\left(\frac{D^{n+p-1}f(z)}{z^p} \right)^{\beta} > \gamma \qquad (z \in U),$$

where $0 < \beta \leqq 1/2(n+p)(1-\alpha)$ and
$\gamma = 1/(2\beta(n+p)(1-\alpha)+1)$.

/o Some notes on algebroid solutions of binomial differential equations in $|z|<\infty$

戸田暢茂 （名古屋工業大学）

Let a_j $(j=0,1,\ldots,p;\ a_p\neq 0)$ be entire functions and b_k $(k=0,1,\ldots,q;\ b_q\neq 0)$ be polynomials. We put

$$P(z,w)=\sum_{j=0}^{p} a_j w^j,\quad Q(z,w)=\sum_{k=0}^{q} b_k w^k.$$

We suppose that the differential equation

$$Q(z,w)(w')^n=P(z,w)\quad (n\in N)$$

is irreducible over meromorphic functions in $|z|<\infty$ and that this equation has an admissible algebroid solution $w=w(z)$ in $|z|<\infty$.

<u>Theorem 1</u>. For $a\in\overline{C}$, if $\delta(a,w)>0$, then the value a is a Picard exceptional value of w.

<u>Theorem 2</u>. If $\sum_j M(r,a_j)=S(r,w)$ $(j=0,1,\ldots,p)$, then

(I) ∞ is a Picard exceptional value of w if and only if $p=q+n$.

(II) A finite value a is a Picard exceptional value of w if and only if $P(z,w)=(w-a)^n P_1(z,w)$, $P_1(z,a)\not\equiv 0,\infty$.

11

On the Deficiency Sums of Meromorphic Functions and their Derivatives

石崎　克也　　　　　　東京高専

f(z) を超越的有理型函数、$a_1, a_2, \ldots, a_q$ を異なる複素数とする。Hayman [2] の 不等式

(1) $$\sum_{j=1}^{q} \Theta(a_j, f^{(k)}) \leqq 1 + \frac{1}{k+1} \qquad k \in \mathbb{N}$$

は " sharp " であるかという問題に対し、Mues [4] は肯定的な証明を与え更に、(1) で Θ を δ に置き換えるとき

(2) $$\sum_{j=1}^{q} \delta(a_j, f^{(k)}) \leqq 1 \qquad k \in \mathbb{N}$$

ではないかという予想を述べている。 Mues は同じ論文の中で、部分的な解決として次の定理を与えている。

THEOREM A. 同じ仮定のもとに

(3) $$\sum_{j=1}^{q} \delta(a_j, f^{(k)}) \leqq \frac{k^2+5k+4}{k^2+4k+2} < 1 + \frac{1}{k+1} \qquad k \in \mathbb{N},$$

また、$N_1(r, f) = o(N(r, f))$ ならば $k \geqq 2$ に対し (2) は成立。

ここでは若干の進展として次の定理を述べる。

THEOREM 1. 同じ仮定のもとに

(4) $$\sum_{j=1}^{q} \delta(a_j, f^{(k)}) \leqq \frac{2k+2}{2k+1} < \frac{k^2+5k+4}{k^2+4k+2} \qquad k \in \mathbb{N},$$

また、$N_{(k)}(r, f) = o(N(r, f))$ ならば $k \geqq 2$ に対し (2) は成立。

更に、$N_1(r, f) + m(r, f) = S(r, f)$ ならば

(5) $$\sum_{j=1}^{q} \delta(a_j, f^{(k)}) \leqq \frac{2}{1+k.} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

最近 Wang and Dai [5] は $\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f) = 2$ なる位数有限な函数 f(z) に対し、次の不等式を与えている。

(6) $$\delta(0, f^{(k)}) \geqq \frac{2}{k+1}$$

(5) と (6) を併せて、以下の命題を得る。

PROPOSITION 2. $f(z)$ は $\sum_{a\neq\infty}\delta(a, f) = 2$ なる位数有限な超越的有理型函数とすると $k \geqq 1$ に対し $f^{(k)}(z)$ は zero 以外には不足値を持たない。

ここでは、Proposition 2 を含む次の定理を述べる。

THEOREM 3. $f(z)$ は超越的有理型函数で $N_1(r, f) + m(r, f) = S(r, f)$ を満たすとする。このとき $n \geqq 0$ に対し次の不等式が成立する。

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{q}(k+1)\sum_{j=1}^{q_k}\delta(a_{k,j}, f^{(k)}) + \delta(0, f) + \delta(\infty, f) \leqq 2,$$

ここで、$a_{k,j} \neq (0, \infty)$ は複素数で $a_{k,j} \neq a_{k,i}$ $(j \neq i)$.

Theorem 1, 3 とも証明は主に Frank and Weissenborn [1] の Lemma による。

References

[1] G.Frank and G.Weissenborn, Rational deficient functions of meromorphic functions, Bull. London Math. Soc., 18, 1986, 29-33.

[2] W.K.Hayman, Meromorphic functions, Oxford 1964.

[3] K.Ishizaki, Some remarks on results of Mues to deficiency sums of derivatives, Arch. Math. (to appear).

[4] E.Mues, Über eine defekt und verzweigungsrelation für die ableitung Meromorpher Functionen, Mamuscripta Math. 5, (1971) 275-297.

[5] X.M.Wang and C.J.Dai, On meromorphic function with maximum defect, Bull. cal. Math. Soc., 80, (1988) 373-376.

12

A REMARK ON CERTAIN DIFFERENTIAL OPERATOR

斎藤　斉　　　群馬高専

Uを単位円板，AをUで正則な関数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

の族とする。$f(z) \in A$ に対して

$$D^0 f(z) = f(z),$$

$$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z),$$

$$D^k f(z) = D(D^{k-1} f(z)) \quad (k \in N)$$

とする。またHを次の条件を満たす関数の集合とする。

$$h(r, s, t) : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

(i) $h(r, s, t)$ はある領域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^3$ で連続,

(ii) $(0, 0, 0) \in \mathbb{D}$ かつ $|h(0, 0, 0)| < 1$,

(iii) 実数 θ, $m \geq 1$ に対し，$(e^{i\theta}, me^{i\theta}, me^{i\theta} + L) \in \mathbb{D}$

ならば $|h(e^{i\theta}, me^{i\theta}, me^{i\theta} + L)| > 1$ である。ここで，

$\mathrm{Re}(e^{-i\theta} L) \geq m(m-1)$ とする。

このとき，次の結果が得られた。

定　理　$h(r,s,t)\in H$ とし，$f(z)\in A$ が次の条件を満たすとする。

(i)　$(D^k f(z), D^{k+1}f(z), D^{k+2}f(z))\in \mathbb{D}\subset \mathbb{C}^3$，

(ii)　$|h(D^k f(z), D^{k+1}f(z), D^{k+2}f(z))|<1$

$(k\in N\cup\{0\}$，$z\in U)$。このとき，

$$|D^k f(z)|<1 \qquad (z\in U)$$

が成り立つ。

13 A variational method for analytic capacity

村井隆文　　名大 理

平面上の compact set E の解析的容量は $\gamma(E)=\sup|f'(\infty)|$ で定義される，ここに上限は E^c 上の supremum norm 1 以下の解析函数全体を取り，$f'(\infty)$ は f の ∞ 点での $1/z$-係数である．まず 2 線分の $\gamma(\cdot)$ については次の様に整理されることを報告する：点 $z\in P=\{x+iy,\ x>0,\ y>0\}$ に対して，

$$\Gamma(z)=[-1/2,1/2]\cup(z+[-1/2,1/2]),\ \gamma(z)=\gamma(\Gamma(z)),$$
$$\lambda(z)=\{w\in P;\ \mathrm{modulus}(\Gamma(z))=\mathrm{modulus}(\Gamma(w))\}$$

と書くと

$$\gamma(z)=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{Im}\,z}{2}\int_{\lambda(z)}\left\{\frac{\gamma(\zeta)}{\mathcal{L}(\zeta)}-1\right\}\frac{d(\mathrm{Im}\,\zeta)}{(\mathrm{Im}\,\zeta)^2},$$

ここに積分は z を出発点とし，$\mathcal{L}(z)$ は $\Gamma(z)$ に対する正規化された揚力係数である．（$\mathcal{L}(z)\leq\gamma(z)$ ($z\in P$), $\mathcal{L}(x)=\gamma(x)$ （x：実数）が成立する．）

この公式から $\gamma(z)$ の諸性質が導かれる．次に一般の集合について変分法を使って $\gamma(\cdot)$ を計算する手法を報告する．$\gamma(\cdot)$ 計算に関しては E が有限個のなめらかな弧の和

集合と仮定することが出来る．集合Eと点z_0に対し

変分 $$\partial\gamma_{z_0}(E)=\lim_{\substack{\gamma(\Gamma)\to 0\\ z_0\in\Gamma}}\frac{1}{\gamma(\Gamma)}\{\gamma(E\cup\Gamma)-\gamma(E)\}$$

を定義すると $\gamma(E)$ は $\partial\gamma_{\cdot}(\cdot)$ の積分で表現される．

点ζ_0に対して変分

$$\partial^2\gamma_{z_0,\zeta_0}(E)=\lim_{\substack{\gamma(\Gamma)\to 0\\ \zeta_0\in\Gamma}}\frac{1}{\gamma(\Gamma)}\{\partial\gamma_{z_0}(E\cup\Gamma)-\partial\gamma_{z_0}(E)\}$$

を定義すると$\partial\gamma_{z_0}(E)$は$\partial^2\gamma_{z_0,\cdot}(\cdot)$の積分で表現される．これらの変分による$\gamma(E)$の公式を報告しその応用を述べる．

14

リーマン面上の偏微分方程式 $\Delta u - qu = f$ に対する有限要素近似

原　平八郎　三井造船ソフトウエア技術研究所
水本　久夫　広島大学総合科学部
菊池　慎一　広島大学生物圏科学研究科

$\bar{\Omega}$ を compact bordered または closed なリーマン面とする。$\bar{\Omega}$ の局所変数、局所近傍の有限集合 $\Phi=\{z=\varphi_j(p);\ U_j\ (j=1,\cdots,m)\}$ を $\bar{\Omega}\subset\bigcup_{j=1}^{m}U_j$ となるように適当に選ぶ。さらに、$\bar{\Omega}$ の三角形分割 $K=\sum_{j=1}^{m}K_j$ (K_j は K の subcomplex) を、$|K_j|\subset U_j$ であって、$s_1^2\in K_j$ が他の $s_2^2\in K_k\ (k\neq j)$ と辺を共有するものを除いて、$\varphi_j(s_1^2)$ が普通の三角形となるように選ぶ。

Ω 上の偏微分方程式の境界値問題

$$L_z[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - qu = f \qquad (z = x + iy;\ q \geq 0),$$

$$u = \chi \quad \text{on } C_1, \quad {*du} = 0 \quad \text{along } C_2 \quad (\partial\Omega = C_1 + C_2)$$

の有限要素近似解 u_h を求め、その誤差評価を行う。

われわれの方法の特徴は、各 U_j の部分領域で普通の三角形分割と1次要素を採用し、その三角形分割は、曲線状の境界弧の場合でさえ、正確に$\overline{\Omega}$を埋め込み、また、u_hは、内部および角での特異点の近くで、正確に特異性を表示している。したがって、u の高精度の近似が得られる。

応用として、具体的なリーマン面上で具体的な境界値問題の近似解を求め、かなり良い計算結果が得られたことを報告する。

15

Second variational formula under C^2-movement

米谷文男　　京都工繊大·工芸

リーマン面R上ベルトラミ係数$\mu(z,t)$ が$0\in R^n$の近傍を動くパラメーターtに関してC^2に動く時，即ち，$\mu(z,t)$は可測で$\mu(z,0)\equiv 0$，とし，ベルトラミ係数$\mu_i(z,t)$，$\mu_{ij}(z,t)$が存在して次を満足するとする。

$$\lim_{h_i\to 0}\frac{1}{h_i}\|\mu(z,t+h(i))-\mu(z,t)-h_i\mu_i(z,t)\|=0,$$

$$\lim_{h_j\to 0}\frac{1}{h_j}\|\mu_i(z,t+h(j))-\mu_i(z,t)-h_j\mu_{ij}(z,t)\|=0,$$

ここで$h(i)=(0,\ldots,h_i,\ldots,0)$。計量$ds=|dz+\mu(z,t)d\bar{z}|$によって与えられる複素構造を持つリーマン面を$R^t$とし，Rから$R^t$への擬等角写像でベルトラミ係数$\mu(z,t)$を持つものを$f_t$とする。2乗可積分な複素微分からなる実ヒルベルト空間Λ内に実調和微分の一つの部分空間Γ_xによって$\Lambda_x=\Gamma_x+i^*\Gamma_x^{\perp}$と表わされる部分空間をとる。コンパクトな台を持つ複素数値C^2-関数の微分の族をΛ内で完備化した空間をΛ_{eo}とする。$\Gamma_x(R)$のf_t^{-1}で引き戻した空間の調和微分の空間への射影を$\Gamma_x(R^t)$として$\Lambda_x(R)$と$\Lambda_x(R^t)$を取る。

R^t上の有理型微分ϕ^t, ψ^tが$\phi^t\circ f_t-\phi^0$, $\psi^t\circ f_t-\psi^0$ $\in\Lambda_x(R)+\Lambda_{eo}(R)$で$\phi^0$, ψ^0の極は$\mu(z,t)$の台に含まれないようにとれたとする。以上の仮定の下に，次の条件を満足する$\Lambda_x(R^t)+\Lambda_{eo}(R^t)$に属する微分$\phi^t_i$, ϕ^t_{ij}がある。

$$\lim_{h_i\to 0}\frac{1}{h_i}\|\phi^{t+h(i)}\circ f_{t+h(i)}\circ f_t^{-1}-\phi^t-h_i\phi^t_i\|=0,$$

$$\lim_{h_j\to 0}\frac{1}{h_j}\|\phi_i^{t+h(i)}\circ f_{t+h(i)}\circ f_t^{-1}-\phi^t_i-h_j\phi^t_{ij}\|=0.$$

ψ^t_i, ψ^t_{ij}も同様なものとする。これより第２変分公式を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial t_j\partial t_i}\langle\phi^t\circ f_t-\phi^0,\ \overline{\psi^0}\rangle_R=\langle\phi^t_{ij},\ \overline{\psi^t}\rangle_{R^t}$$

$$=\mathrm{Re}\,i\,[\iint_R\{\underline{\phi}_j^{t,0}\underline{\psi}^t+\underline{\psi}_j^{t,0}\underline{\phi}^t\}\mu_i(z,t)\zeta_z{}^2dzd\bar{z}$$

$$+\iint_R\{\underline{\phi}_j^{t,1}\underline{\psi}^t+\underline{\psi}_j^{t,1}\underline{\phi}^t\}\mu_i(z,t)\overline{\mu(z,t)}|\zeta_z|^2dzd\bar{z}$$

$$+\iint_R\underline{\phi}^t\underline{\psi}^t\mu_{ij}(z,t)\zeta_z{}^2dzd\bar{z}].$$

ここで$\phi^t=\underline{\phi}^t dz$, $\psi^t=\underline{\psi}^t dz$, $\phi^t_j=\underline{\phi}_j^{t,0}d\zeta+\underline{\phi}_j^{t,1}d\bar{\zeta}$, $\psi^t_j=\underline{\psi}_j^{t,0}d\zeta+\underline{\psi}_j^{t,1}d\bar{\zeta}$, ($\zeta$は$R^t$上の局所変数($f_t: z\to\zeta$))

谷口氏は$t=0$におけるグリーン函数に対する公式を与えている。Λ_xを選択することにより，グリーン函数，周期再成微分，調和測度，極値垂直切線写像他に対する公式とみなせる。

16

接境界値を持たないグリーンポテンシャル

相川弘明　　　　群馬大学 工学部

1980 年 Barth [2] が提出した問題に関連して, 1989 年の春の学会では次の定理及びその高次元への一般化について述べた.

定理 A ([1]). Cを単位円板 D内の任意の曲線で∂Dに接するものとする. C_θでCのθ回転を表す. このときD上の有界調和関数hで

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} h(z)$$

がすべての $\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$, に対して振動するものが存在する.

ここでは Green ポテンシャルについて同様のことを考えよう. 荒く言えば Green ポテンシャルは境界上で消えている. Littlewood [3] は vが D上の Green ポテンシャルであるとき,

$$\lim_{r\to 1} v(re^{i\theta}) = 0$$

が殆どすべてのθについて成立することを示した. これを上半空間 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ について言えば次のようになる.

定理 B. vが $\mathbb{R}^{n+1}_+$ の *Green* ポテンシャルならば殆どすべての $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\lim_{y\to 0} v(\xi, y) = 0.$$

Green 核には特異性があるので調和関数の時とは異なり, 一般には非接境界値の存在は分からない. しかし適当な除外集合の外では非接境界値が存在して 0 になることが期待される. この方向には Rippon [4; Theorem 3] がある. $V_\alpha(x) = \{(\xi,\eta); |x-\xi| < \alpha\eta\}$ を頂点が $(x,0)$ で開きが$\alpha > 0$ である非接錐とする. $\mathbb{R}^{n+1}_+$ の部分集合 A はその上で $(x,0)$ における Martin 核$\eta/|\xi - x|^{n+1}$ よりも大きい Green ポテンシャルが存在するとき $(x,0)$ で極小尖細であると言われる.

定理 C ([4; THEOREM 3]). vを $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ 上の *Green* ポテンシャルとすると, 集合 A で次の 2 つの性質を持つものが取れる. 殆どすべての$\xi \in \mathbb{R}^n$とすべての$\alpha > 0$ に対し

(a) $A \cap V_\alpha(\xi)$ はξで極小尖細である.

(b) $\displaystyle \lim_{y \to 0,\, (x,y) \in V_\alpha(\xi) \setminus A} v(x, y) = 0.$

これに反して Green ポテンシャルの接境界挙動ははるかに複雑である. 次の定理を報告する.

定理. γを $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$内の任意の曲線で $\mathbb{R}^n$に接するものとする. このとき以下の性質を持つ *Green* ポテンシャル vが存在する.

(a) 定理 C に於ける除外集合 A は空集合, よって vは殆どすべての境界点で非接境界値 0 を持つ.

(b) 境界に終わる任意の曲線γ'に対して

$$\liminf_{y \to 0,\, (x,y) \in \gamma'} v(x, y) = 0.$$

(c) γと同等な接し方を持つ任意の曲線γ'に対して

$$\limsup_{y \to 0,\, (x,y) \in \gamma'} v(x, y) = +\infty.$$

REFERENCES

1. H. Aikawa, *Harmonic functions having no tangential limits*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
2. D. A. Brannan and J. G. Clunie, "Aspects of contemporary complex analysis," Academic Press, 1980.
3. J. E. Littlewood, *On functions subharmonic in a circle (II)*, Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1928), 383-394.
4. P. J. Rippon, *On the boundary behaviour of Green potentials*, Proc. London Math. Soc (3) **38** (1979), 461-480.

17

THE BERGMAN SPACE ON A SECTOR AND THE HEAT EQUATION

Hiroaki Aikawa, Nakao Hayashi
and Saburou Saitoh

Department of Mathematic,
Faculty of Engineering
Gunma University

Let Δ denote the sector

$$\left\{ -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$$

on the complex $z = x + iy$ plane. Let B_Δ denote the Bergman space of Δ comprising analytic functions $f(z)$ on Δ with finite norms

$$\|f\|_{B_\Delta}^2 = \iint_\Delta |f(z)|^2 \, dxdy < \infty.$$

Then, by examining the integral transform

$$(1) \quad v(z,t) = \frac{1}{t} \int_0^t F(\xi) \frac{z e^{\frac{-z^2}{4(t-\xi)}}}{2\sqrt{\pi}\,(t-\xi)^{\frac{3}{2}}} \xi \, d\xi,$$

we establish the isometrical identity, for $f(z) \in B_\Delta$

$$(2) \quad \iint_\Delta |f(z)|^2 \, dxdy$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} x^{2n+1} \, |f^{(n)}(x)|^2 \, dx.$$

In order to deduce the identity, we shall examine the integral transform (1) from the both viewpoints of the general method for integral transforms using the theory of reproducing kernels and the property of solutions for the one dimensional heat equation on $\{x > 0\} \times (0,t)$.

Identity (2) also shows that any C^{∞} function $f(x)$ on the positive real line $(0,\infty)$ with a finite integral in the right hand side of (1.2) can be extended analytically onto the domain Δ and the extension $f(z)$ belongs to the Bergman space B_{Δ}.

18

Riesz - Frostman のポテンシャルについて

二宮信幸

R^m ($m \geqq 2$) において，ポテンシャルの核となる関数

$$K(P, Q) = r_{PQ}^{\alpha-m}$$

を α 次の核という，これによるポテンシャル

$$K(P, Q) = \int r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu(Q)$$

を α 次のポテンシャルという。$0<\alpha<m$ なるとき，Riesz - Frostman のポテンシャルと呼ばれる。よく知られているように，R^m ($m \geqq 3$) において $0<\alpha<2$ なるとき，台がコンパクト集合である任意の測度 σ に対して，エネルギー積分

$$I(\sigma) = \iint r_{PQ}^{\alpha-m} d\sigma(Q) d\sigma(P)$$

は，もしそれが有限確定であるならば，常に $\geqq 0$ であり，しかも等号は $\sigma \equiv 0$ の場合に限る。その証明は M. Riesz の合成と呼ばれる公式を使って行われ

る．その方法は $0<\alpha<2$ でなく $0<\alpha<m$ で有効である．然し m が余り大きいと，$I(\sigma)=0$ から $\sigma\equiv 0$ を導く所では有効でない．一意性の性質（ポテンシャルを与える正の測度の一意性）を証明する所で引っかゝるからである．本講演において，我々は M. Riesz の合成に頼らず，別の方法によって $2<\alpha<m$ に対しても $I(\sigma)\geqq 0$ であることの証明を試みる．このような α に対しては，台がコンパクト集合である正の測度のポテンシャルは R^m $(m\geqq 3)$ において正で，優調和で，無限遠で 0 である，ということが重要である．

19

平面領域上の劣調和関数の非可積分性

増本　誠　　　広島大理

複素平面$\mathbb{C}$の部分領域Dの族$\mathcal{E}_\theta$, $0 \leqq \theta \leqq 1$, を次のように定める. まず, $(\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus D$ のどの成分も連続体であるような有限連結領域Dの全体を$\mathcal{E}_0$とおく. 次に, $0<\theta<1$ のとき, 各$w \in \partial D$に対し, 中心角$\pi\theta$, 半径が(wによらず)一定の, wを頂点とする扇形が$\mathbb{C}\setminus D$内にとれるような有界領域$D\in\mathcal{E}_0$の全体を$\mathcal{E}_\theta$とする. 最後に, 各$w\in\partial D$に対し, 半径が一定の閉円板でwを含むものが$\mathbb{C}\setminus D$内に存在するような有界領域$D\in\mathcal{E}_0$の全体を$\mathcal{E}_1$とおく.

明らかに, $0\leqq\theta_1\leqq\theta_2\leqq1$ ならば, $\mathcal{E}_{\theta_2}\subset\mathcal{E}_{\theta_1}$である. 有界なLipschitz領域は, ある$\mathcal{E}_\theta$, $0<\theta<1$, に属す. また, 有界な$C^{1,1}$-領域は, $\mathcal{E}_1$に属す.

定理1. $D\in\mathcal{E}_\theta$, $0\leqq\theta\leqq1$, とし, $z\in D$から∂Dまでの距離を$\delta_D(z)$と表す. また, $\beta(p,\theta)=2-\dfrac{\min\{1,p\}}{2-\theta}$ とおく. このとき, sがD上の非負劣調和関数で $s\not\equiv 0$

ならば，任意の $p \in (0,\infty)$ に対し，

$$\iint_D \delta_D(z)^{-\beta(p,\theta)} s(z)^p \, dx\,dy = +\infty$$

が成立する．

この定理は，前回の分科会で報告された鈴木紀明氏の結果（２次元の場合）の拡張である．$0<p\leqq 1$ のとき，定理１の $\beta(p,\theta)$ を，これより小さな値に置き換えることはできない．

定理１の証明には，等角写像に関する次の結果を応用する．

定理２．f を，有限個の解析曲線で囲まれた有界領域 D_0 から領域 $D \in \mathcal{E}_\theta$，$0 \leqq \theta \leqq 1$，の上への等角写像とする．$\lambda_{D_0}(z)|dz|$ を D_0 上の Poincaré 計量とする．このとき，

$$\inf_{z\in D_0} |f'(z)|\,\lambda_{D_0}(z)^{1-\theta} > 0$$

が成立する．

20 # 無限ネットワーク上の放物型グリーン関数

村上温　広島工大
山崎稀嗣　島根大理

局所有限な無限ネットワーク $N = \{X, Y, K, r\}$ を非負整数の時間 T 軸に沿ってつないで出来るネットワークを $\dot{N} = \{\dot{X}, \dot{Y}, \dot{K}, \dot{r}\}$ とする．ただし，$\dot{X} = X \times T, \dot{Y} = (Y \times T) \cup Y_T, Y_T = \{y_{x,t+1}; x \in X, t \in T\}$,
$e(y_{x,t+1}) = \{(x,t),(x,t+1)\}, \dot{K}((x,t),(y,t)) = K(x,y)$,
$\dot{K}((x,t), y_{x,t+1}) = -1, \dot{K}((x,t+1), y_{x,t+1}) = 1; \dot{K}(\dot{x},\dot{y}) = 0$ otherwise,
$\dot{r}((y,t)) = r(y), \dot{r}(y_{x,t+1}) = 1$.

いま $\dot{X}$ 上の実数値関数 $\dot{u}$ に対して偏差分作用素 $d\dot{u}, \partial\dot{u}$ と離散型のラプラス作用素 $\Delta\dot{u}$ を次のように定義する：

$$(d\dot{u})(y,t) = -r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x,y)\dot{u}(x,t)$$

$$\partial\dot{u}(x,t) = \dot{u}(x,t) - \dot{u}(x,t-1), \quad \dot{u}(x,-1) = 0$$

$$\Delta\dot{u}(x,t) = \sum_{y \in Y} K(x,y)[(d\dot{u})(y,t)]$$

ここで，$\dot{x} = (x,t)$ とし，$\dot{N}$ 上の放物型作用素 $\dot{\Delta}\dot{u}$ を

$$\dot{\Delta}\dot{u}(\dot{x}) = \Delta\dot{u}(\dot{x}) - \partial\dot{u}(\dot{x})$$

で定義する．

与えられた点 $\dot{a} = (a,s), (s \geq 1)$ に対して条件：

$\dot{\Delta}\dot{v}(\dot{x}) = -\epsilon_{\dot{a}}(\dot{x}), \quad (\forall t \geq s)$

$\dot{v}(x,t) = 0, \quad 0 \leq \forall t \leq s-1$

を満たし，さらに $\dot{v}(x,t)$ が t を固定して x の関数として，N の無限遠点である意味でゼロになるとき，$\dot{v}$ を（$\dot{a}$ を極とする）$\dot{N}$ の放物型グリーン関数とよび記号 $\dot{G}(\dot{x},\dot{a})$ で表す．

本講演では，放物型グリーン関数の存在と一意性および熱伝導方程式に対するグリーン関数についてよく知られている公式と類似の公式：

$$\sum_{t=s}^{\infty} \dot{G}((x,t),(a,s)) = g_a(x)$$

が成り立つことを報告する．ただし，右辺の $g_a(x)$ は，N の a を極とする（調和）グリーン関数を表す．

放物型グリーン関数の存在を示すために，N での方程式：

$$\Delta u(x) = q(x)u(x), (q \geq 0)$$

に関連して定義される $(q-)$ グリーン関数$\tilde{g}_a(x)$ が関係：

$$\sum_{x \in X} q(x)\tilde{g}_a(x) \leq 1$$

を満たすことに着目する．以下では $q = 1$ とする．合成積に類似した演算：

$$\tilde{g}^{*0}(x,a) = \epsilon_a(x), \tilde{g}^{*1}(x,a) = \tilde{g}_a(x)$$
$$\tilde{g}^{*2}(x,a) = \sum_{z \in X} \tilde{g}_x(z)\tilde{g}_z(a)$$
$$\tilde{g}^{*(t+1)}(x,a) = \sum_{z \in X} \tilde{g}^{*t}(x,z)\tilde{g}_z(a)$$

を導入出来て，次の結果が得られる：

$$\dot{G}((x,t),(a,s)) = \begin{cases} \tilde{g}^{*(t+1-s)}(x,a), & \text{if } t \geq s; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

また，$\dot{v}(\dot{x}) = \dot{G}(\dot{a},\dot{x})$ とおくと，$\dot{v}$は$\dot{\Delta}$の共役な放物型作用素 Δ^*に対するグリーン関数となる．但し，$\dot{x} = (x,t)$ として

$$\Delta^* \dot{u}(\dot{x}) = \Delta \dot{u}(\dot{x}) + \partial \dot{u}(x, t+1)$$

21

共役構造を持つ調和空間上の Green の公式

前 田 文 之　　　　広島大理

$(X,\mathcal{H})$ と $(X,\mathcal{H}^*)$ を互いに共役な P－調和空間で $G(x,y)$ をそれらを結びつける Green 関数とする．G に付随して，$\mathcal{H}$ に対する測度表現 $\sigma:\mathcal{R}\to\mathcal{M}$ と $\mathcal{H}^*$ に対する測度表現 $\sigma^*:\mathcal{R}^*\to\mathcal{M}$ が定まる．以下，定数関数 1 は $\mathcal{H}$ に対しても，$\mathcal{H}^*$ に対しても優調和であると仮定する．$f,g\in\mathcal{R}(X)$ の相互 gradient 測度と，$f\in\mathcal{R}(X)$ の gradient 測度は

$$\delta_{[f,g]}=\frac{1}{2}\{f\sigma(g)+g\sigma(f)-\sigma(fg)-fg\sigma(1)\},\ \delta_f=\delta_{[f,f]}$$

で定義される．$f,g\in\mathcal{R}^*$ に対し，σ^* によって $\delta^*_{[f,g]}$ を同様に定義すると，$f,g\in\mathcal{R}(X)\cap\mathcal{R}^*(X)$ ならば $\delta_{[f,g]}=\delta^*_{[f,g]}$ である．$\mathcal{H}$ に対して次の関数族を考える．

$$\mathcal{H}_E=\{u\in\mathcal{H}(X);\delta_u(X)+\textstyle\int u^2d\sigma(1)<\infty\},$$

$$\mathcal{P}_I=\{p;\text{continuous }\mathcal{H}\text{-potentials on }X,\textstyle\int pd\sigma(p)<\infty\},$$

$$\mathcal{Q}_I=\mathcal{P}_I-\mathcal{P}_I,\ \mathcal{Q}_{IF}=\{g\in\mathcal{Q}_I;|\sigma(g)|(X)<\infty\},$$

$$\mathcal{R}_{EB}=\{f\in\mathcal{H}_E+\mathcal{Q}_I;f:\text{bounded}\}.$$

また，$\mathcal{H}^*$ に対して考えた対応する関数族は，それぞれ * をつけて表わす．今，$1=h_1^*+G^*\sigma^*(1)$, $h_1^*\in\mathcal{H}^*(X)$ とし，X の exhaustion $\{X_n\}$ に対し，$R^*_{X_n}h_1^*=G^*\tau_n^*$ をみたす ∂X_n 上の正測度の列 $\{\tau_n^*\}$ を考える．ここで，開集合 U に対し R^*_Uf は $\mathcal{H}^*$ に関する f の U への reduced function を表わす．

補題．$f\in\mathcal{R}_{EB}$ ならば，$H^*f:=\lim_{n\to\infty}G^*(f\tau_n^*)$ が存在し，exhaustion のとり方に依存しない．

定理１．$f \in \mathcal{R}_{EB}$, $g \in \mathcal{Q}_{IF}$ ならば，

$$\begin{aligned} 2\delta_{[f,g]}(X) \;+\; \int fg\, d\sigma(1) \;+\; \int fg\, d\sigma^*(1) \\ = \int (f - H^* f)\, d\sigma(g) \;+\; \int g\, d\sigma(f) \end{aligned}$$

定理２．$f \in \mathcal{R}_{EB} \cap \mathcal{R}^*_{EB}$, $g \in \mathcal{Q}_{IF} + \mathcal{Q}^*_{IF}$ ならば，

$$\delta_{[f,g]}(X) + \int fg\, d\hat{\sigma}(1) = \int g\, d\hat{\sigma}(f).$$

ただし，$\hat{\sigma}(f) = \{\sigma(f) + \sigma^*(f)\}/2.$

函数論特別講演

調和写像のエネルギー評価とLiouville型定理

竹腰見昭　阪大教養

リーマン多様体間の可微分写像 $f:(M,g)\to(N,h)$ が与えられた時，その微分 df が f^*TN-値微分形式として調和である時 f は調和写像であると言う．(N,h) として $(\mathbb{R},dt^2)$ をとれば f が調和写像であるという事は f が (M,g) 上の調和函数となる事であり，(M,g)，(N,h) がケーラー多様体ならば正則写像 $f:M\to N$ は調和写像となる．調和写像の理論はその解析性との関連からコンパクト（或いはコンパクト化可能な）多様体，正則写像等の研究に用いられている．

本講演では非コンパクトケーラー多様体上定義された調和写像のエネルギー評価とそのLiouville型定理（あるベクトル束値調和形式の非存在定理）への応用について報告する．

§1. 調和写像のエネルギー評価

$A \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ を $m \geq 1$ 次元閉多様体 ($0 \in A$) とし

$\Phi(z) := \|z\|$ ($z \in \mathbb{C}^n$ のノルム) とおく. $f: (A, ds_A^2) \longrightarrow (N, ds_N^2)$ ($\omega_A = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\Phi^2$) をケーラー多様体 (N, ds_N^2) への正則写像とすると次が成立する. $r_2 > r_1$ に対して

$$\int_{A(r_2)} f^*\omega_N \wedge \omega_A^{m-1} / r_2^{2m-2} - \int_{A(r_1)} f^*\omega_N \wedge \omega_A^{m-1} / r_1^{2m-2}$$

$$= c_m \int_{A(r_2) \setminus A(r_1)} \left[(1 - |d\Phi|_A^2)\, e(f) + |\partial\Phi \llcorner \partial f|^2 \right] \frac{\omega_A^m}{\Phi^{2m-2}}$$

ここで $A(r) = B(r) \cap A$, $c_m > 0$, $|d\Phi|_A^2 \leq 1$ である.

この積分等式は $\log\|z\|$ の多重劣調和性を用いて示されるが これは調和写像のエネルギー評価の一つのモデルである.

(M, ds_M^2) を $m \geq 1$ 次元非コンパクトケーラー多様体とし次の条件を満たす exhaustion 関数 Φ の存在を仮定する.

(1.1) $\Phi \geq 0$, 任意の $r > 0$ に対して $M(r) = \{\Phi < r\} \Subset M$, $\{\Phi = \inf \Phi\}$ は有限個の点集合 かつ $\Phi = \Phi^2$ は C^∞ 級

(1.2) Φ は非退化な臨界点しかもたない.

(1.3) $\rho_1 := \inf_{x \in M} \sum_{i=2}^{m} \varepsilon_i(x) > 0$

(1.4) $\rho_2 := \sup_{x \in M \setminus \{\Phi = \inf \Phi\}} |\partial \Phi|_M^2(x) < +\infty$

ここで $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \cdots \geqq \varepsilon_m$ は $\partial\bar{\partial}\Phi$ の ds_M^2 に関する固有値である．但し $m=1$ の時は $\rho_1 = 0$ とする．上述の例 $(A, ds_A^2, \Phi) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, ds_e^2, \|z\|)$ では $\rho_1 = m-1$ $\rho_2 = \frac{1}{2}$ となる．

ケーラー多様体間の可微分写像 $f:(M, ds_M^2) \to (N, ds_N^2)$ に対して $M(r) = \{\Phi < r\}$ 上の f のエネルギーを

$$E(f,r) := \int_{M(r)} e(f)\, dv_M$$

$$e(f) := g_M^{\bar{j}i} h^N_{\alpha\bar{\beta}}(f) f_i^\alpha \overline{f_j^\beta} + g_M^{\bar{j}i} h^N_{\alpha\bar{\beta}}(f) f_{\bar{j}}^\alpha \overline{f_{\bar{i}}^\beta}$$

で定義する．更に $\partial M(r) := \{\Phi = r\}$ 上の積分

$$B(f,r) := c_0 \int_{\partial M(r)} [|\partial\Phi \lrcorner \partial f|^2 + |\bar{\partial}\Phi \lrcorner \bar{\partial} f|^2]\, \omega_r ,$$

$dv_M = d\Phi \wedge \omega_r$, $\omega_r = \dfrac{dS_r}{|d\Phi|_M}$, $c_0 = \dfrac{1}{\rho_2}$ を考える．

(1.2) より $B(f,r)$ は r に関して連続である事が判る．まず (M, ds_M^2, Φ) 上定義された調和写像のエネルギー評価として次の定理を得る．

定理1.5. (i) ケーラー多様体 (N, ds_N^2) への可微分写像 $f:(M, ds_M^2)\to(N, ds_N^2)$ が以下のいずれかの条件を満たす時 次の評価式が成立する

$$E(f,r_2)/r_2^{\mu} - E(f,r_1)/r_1^{\mu} \geq \int_{r_1}^{r_2}\frac{B(f,t)}{t^{\mu}}\,dt$$

$$E(f,r_2)/r_2^{\mu} \geq \exp\left(\int_{r_1}^{r_2}\frac{B(f,t)}{E(f,t)}\,dt\right)E(f,r_1)/r_1^{\mu}$$

$r_2 > r_1 > 0$, $\mu = p_1/p_2$

1) f は多重調和写像 i.e. $\nabla^{1,0}\bar{\partial} f = 0$

2) f は調和写像 i.e. $\mathrm{Trace}_{ds_M^2}\nabla^{1,0}\bar{\partial} f = 0$ かつ ds_N^2 の Riemann 曲率が Siu の意味で半負値

(ii) f を M 上の非負値 C^∞ 多重劣調和函数とすると $F(f,r) := \int_{M(r)}\mathrm{Trace}_{ds_M^2}\partial\bar{\partial} f^2\,dv_M$ に対して同様の評価式が成立する

この定理は次の積分不等式より導かれる

命題1.6. 定理1.5の状況の下

$$r\frac{\partial}{\partial r}E(f,r) - \mu E(f,r) \geq r B(f,r)$$

が正の任意の非臨界値 $r>0$ に対して成立する

この積分不等式は次のDonnellyとXavierによる積分公式より導かれる(cf.[2]).

$$2\int_{M(r)} \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j\neq i} \varepsilon_j\Big)(|f^\alpha_i|^2 + |f^\alpha_{\bar i}|^2)\, dv_M + (*)$$

$$= 2r \int_{\partial M(r)} \left[|\partial\Phi|^2 e(f) - |\partial\Phi \lrcorner \partial f|^2 - |\bar\partial\Phi \lrcorner \bar\partial f|^2 \right] \omega_r$$

$$(*) = (\partial\Phi \lrcorner \partial f, D^*_{1,0} \partial f)_{M(r)} + (D^*_{0,1} \bar\partial f, \bar\partial\Phi \lrcorner \bar\partial f)_{M(r)}$$

$$+ (\partial f, \bar\partial\Phi \lrcorner D_{0,1} \partial f)_{M(r)} + (\partial\Phi \lrcorner D_{1,0} \bar\partial f, \bar\partial f)_{M(r)}$$

$$= 2\int_{\inf \Phi}^{r} t \Big[2 \left(\| D_{1,0} \bar\partial f \|^2_{M(t)} - \| D^*_{1,0} \bar\partial f \|^2_{M(t)} \right)$$

$$+ \int_{M(t)} \sum R^N_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}(f) (f^\alpha_i \overline{f^\beta_j} - f^\alpha_j \overline{f^\beta_i}) \overline{(f^\delta_i f^\gamma_j - f^\delta_j f^\gamma_i)}\, dv_M \Big] dt$$

注1.7. この式を用いてBochnerの拡張定理"境界で接コーシー=リーマン方程式を満たす調和函数は内部で正則な函数に接続できる"の調和写像への一般化を示す事もできる(cf.[4]).

注1.8. DonnellyとXavierの積分公式の他の応用としてHörmander, Kohnが示した$\bar\partial$-Neumann問題に関するアプリオリ評価もこの公式を用いて示す事ができる事も注意しておく.

§2 Liouville型定理への応用

定理2.1. (M, ds^2_M, Ψ)を§1と同じ非コンパクトケーラー多様体とする. 正値非減少連続函数$g(r)$で

$$(**) \qquad \int_{\delta}^{\infty} \frac{dt}{t\,g(t)} = \infty$$

かつ

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(M(r))}{r^{\mu+2} g(r)} < +\infty$$

を満たすものが存在すると仮定する. この時次が成立する.

α) (M, ds^2_M)上には非定数有界調和函数は存在しない.

β) 正則写像 $f: M \longrightarrow \mathbb{P}^{\ell}(\mathbb{C})$はほとんど全ての超平面と交差する.

γ) M上には非定数負値C^2級多重劣調和函数は存在しない.

§1で述べた例 $(A, ds^2_A, \Psi) \hookrightarrow (\mathbb{C}^m, ds^2_e, \|z\|)$について考えると, この場合 $n(A, r) = \mathrm{Vol}(A(r))/r^{2m}$は非減少連続函数で $\mu = 2m-2$であるから定理2.1より直ちに次を得る.

系 2.2. $(A, ds_A^2) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, ds_{\mathbb{C}}^2)$ が

$$(***) \qquad \int_1^\infty \frac{dt}{t\,n(A,t)} = \infty$$

を満たす時 定理 2.1 の主張 α), β), γ) (C^2級という regularity はこの場合不要) が成立する

この他極をもつ非コンパクトケーラー多様体上の Liouville 型定理も §1 の結果を用いて示す事ができるがここでは省略する (cf. [6] [7]).

定理 2.1 は命題 1.6 と原理的には Cheng と Yau によるアイデアを用いて, α), β), γ) 共に全く同じ方法で示される (cf. [1]).

注 2.3. 体積の増大度に関する条件 (**) は一般的に最良である事が知られているが, 系 2.2 の状況で (***) が最良かどうかは判っていない.

注 2.4. 定理 2.1 の系 2, 2 は結果的に $\log\|z\|$ の多重劣調和性という重要な性質を用いずに示された事になるが, この性質を用いた場合でも今迄は高々 $\liminf_{r\to\infty} n(A,r)/\log r < +\infty$ 位の増大度をもつ (A, ds_A^2) に関してしか Liouville 型定理は知られていなかった (cf. [3] [5]).

参考文献

[1] Cheng, S.Y, Yau, S.T, Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applictations, Comm. Pure. Appl. Math. 28 (1975), 333-354

[2] Donnelly, H, Xavier, F., On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 106 (1984), 169-185

[3] Sibony, N, Wong, P.M. Some remarks on the Casorati Weierstraβ theorem, Ann. Polonici. Math. 39 (1981) 165-174

[4] Siu, Y.T., Complex analyticity of harmonic maps, vanishing and Lefschetz theorems, J. of. Diff. Geometry, 17 (1982), 55-138

[5] Stoll, W. Value distribution on parabolic spaces, Lect. Notes in Math. 600 (1977), Springer.

[6] Takegoshi, K. 調和写像のエネルギー評価とLiouville型定理への応用, 数理研講究録 626. 極小写像の位相と幾何 (1987)

[7] Takegoshi, K. Energy estimates and Liouville theorems for harmonic maps, preprint.

22

開リーマン面の調和 module の動きとその応用

Andrew BROWDER　Brown 大学
山口博史　滋賀大(教育)

$\mathcal{D}: t \to D(t)$, $t \in B = \{|t|<\rho\}$ をコンパクト bordered リーマン面 $D(t)$ の滑らかな変動とする。但し, $D(t)$ は $\mathbb{C}$ 上不分岐被覆リーマン面として実現されているとする。$D(t)$ は単位円板と同相ではないと仮定する。$\gamma(t)$ は $D(t)$ 内の閉曲線で t と共に連続に動くとする。このとき, $D(t)$ 上の closed 1-form ω に関して, $\int_{\gamma(t)} \omega = (\omega, \overset{*}{\sigma}(t,\cdot))_{D(t)}$ を満す $D(t)$ 上の調和微分 $*\sigma(t,\cdot)$ があり, reproducing 1-form と呼ばれている。$\lambda(t) = 1/\|\sigma(t,\cdot)\|^2_{D(t)}$ を $(D(t), \gamma(t))$ に関する調和 module と呼ぶ。一方, 領域 $\mathcal{D} = \bigcup_{t \in B} (t, D(t))$ の $B \times \mathbb{C}$ 上の定義関数を $\psi(t,z)$ とするとき,

$$k_2(t,z) = \frac{\frac{\partial^2\psi}{\partial t \partial \bar t}\left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|^2 - 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial \bar z}\frac{\partial^2\psi}{\partial \bar t \partial z}\right\} + \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial \bar z}}{\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|^3},$$

$(t,z) \in \partial\mathcal{D}$, は $\psi(t,z)$ の取り方に依らない　$k_2(t,z)$ を $\partial\mathcal{D}$ の (t,z) に於ける Levi-curvature と呼ぶ。次の変分公式が成立する。

$$\frac{\partial^2 \|\sigma(t,\cdot)\|^2_{D(t)}}{\partial t \partial \bar t} = 2\int_{\partial D(t)} k_2(t,z) \|\sigma\|^2(t,z)\, ds_z + 8 \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \bar t}(t,\cdot) \right\|^2_{D(t)}.$$

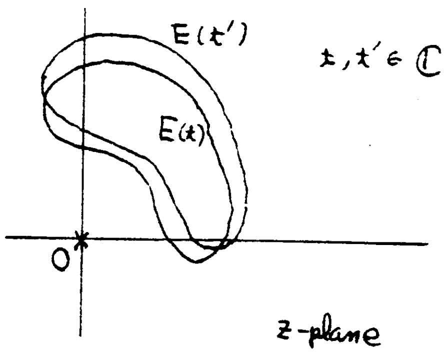
従って，もし $\mathfrak{D}$ が $B\times\mathbb{C}$ 上の不分岐擬凸状域ならば，$\lambda(t)$ は
B上の non-negative 優調和関数になる。

応用がいくつかあるが，次はピカールの定理に関係したものである：
Parameter 空間が $\mathbb{C}$ 全体であるような滑らかな変動
$\mathcal{E} : t \to E(t)$, $t\in\mathbb{C}$ を考える．但し

(1) $E(t)$ は滑らかな Jordan 曲線で囲まれた閉領域であり，$E(t) \ni 0$（原点）とする；

(2) $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ の部分集合 $\mathcal{E} = \bigcup_{t\in\mathbb{C}} (t, E(t))$ は擬凸状集合である，i.e.，$\mathfrak{D} = \mathbb{C}^2 - \mathcal{E}$ は擬凸状域である．

このとき，変動 $\mathcal{E}$ は trivial な変動 $\mathbb{C}\times E(0) : t \to E(0)$, $t\in\mathbb{C}$ に，bi-holomorphic に同値である。



23

$\mathbb{R}^3$の領域の調和moduleの動きについて。

山口博史（滋賀大，教育）

(I) $\mathcal{D}: t \to D(t)$, $t \in (-\rho, \rho) = I$ を球殻と同相な $\mathbb{R}^3$の領域 $D(t)$の滑らかな変動とする。$S(t) \subset D(t)$を球殻とhomologな閉曲面とする。このとき，$D(t)$上のすべてのclosed 2-form ωに対して，$\int_{S(t)} \omega = (\omega, *\sigma(t,\cdot))_{D(t)}$ を満す $D(t)$上の調和2-form $\sigma(t,\cdot)$ が存在する。

$\lambda(t) = 1/\|\sigma(t,\cdot)\|^2_{D(t)}$ を $(D(t), S(t))$に関する調和moduleと呼ぶ。ところで，$\mathcal{D} = \bigcup_{t \in I} (t, D(t)) \subset I \times \mathbb{R}^3$ の定義関数を $\psi(t,x)$ とするとき，

$$k_2(t,x) = \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\|\mathrm{Grad}_{(x)}\psi\|^2 - 2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_i} + \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|^2 \Delta_{(x)}\psi}{\|\mathrm{Grad}_{(x)}\psi\|^3}, \quad (t,x) \in \partial\mathcal{D}$$

はψの取り方に依らない実数である。これを$\partial\mathcal{D}$の(t,x)に於けるLevi-curvatureと呼ぶ。次が成立する:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\|\sigma(t,\cdot)\|^2_{D(t)} = 2\int_{\partial D(t)} k_2(t,x)\|\sigma\|^2(t,x)\,dS_x + 8\left\|\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t,\cdot)\right\|^2_{D(t)}.$$

従って，もし $k_2(t,x) \geqq 0$ on $\partial\mathcal{D}$ ならば，$\lambda(t) \geqq 0$ は区間$(-\rho,\rho)$上のconcave函数である。

(II) $\mathcal{D}: t \to D(t)$, $t \in I = (-\rho,\rho)$ をトーナツと同相な，$\mathbb{R}^3$の領域 $D(t)$の，滑らかな変動とする。$\gamma(t)$は$D(t)$内の閉曲線で，tと共に連続に動くとする。このとき，$D(t)$上の全てのclosed 1-form ωに対して $\int_{\gamma(t)} \omega = (\omega, *\Omega(t,\cdot))_{D(t)}$ を満す $D(t)$上の調和2-form $\Omega(t,\cdot)$ が存在する。$\mu(t) = \|\Omega(t,\cdot)\|^2_{D(t)}$ を $(D(t), \gamma(t))$に関する調和moduleと呼ぶ。

一方，$\mathcal{D} = \bigcup_{t \in I}(t, D(t))\ (\subset I \times \mathbb{R}^3)$の定義関数を$\psi(t,x)$とする。$\forall (t,x) \in \partial\mathcal{D}$をとってきて，torus $\partial D(t)$の点xに於ける接ベクトル e_x と法ベクトル n_x を通る平面 Π（(ξ,η)-平面）を考える。このとき，

$\mathfrak{D}_1 \equiv \mathfrak{D} \cap (I \times \Pi) : t \to D_1(t)$, $t \in I$ は Π 上の領域 $D_1(t)$ $\equiv D(t) \cap \Pi$ の変動を定める。$\Psi|_{I \times \Pi} = \Phi(t, (\xi, \eta))$ と置き、

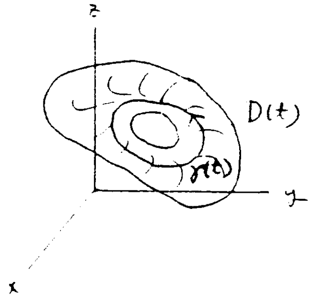
$$k_2(t, x, e_x) = \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \|\mathrm{Grad}_{(\xi)} \Phi\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \xi_i} + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|^2 \Delta_{(\xi)} \Phi}{\|\mathrm{Grad}_{(\xi)} \Phi\|^3}$$

を考える。$k_2(t, x, e_x)$ を $\partial \mathfrak{D}$ の点 (t, x) における e_x-方向への *sectional Levi-curvature* と呼ぶ。次が成立する：

次の条件を満す $\Omega(t, \cdot)$ のベクトルポテンシャル $\alpha(t, \cdot)$，及び，各点 $x \in \partial D(t)$ の接ベクトル e_x が存在する：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \|\Omega(t, \cdot)\|^2_{D(t)} = \int_{\partial D(t)} k_2(t, x, e_x) \|\mathrm{Grad}_{(x)} \alpha\|^2 (t, x)\, dS_x + \left\| \frac{\partial \Omega}{\partial t}(t, \cdot) \right\|^2_{D(t)}.$$

従って，もし，各点 $(t, x) \in \partial \mathfrak{D}$ で，全ての方向に関して *sectional Levi-curvature* が *non-negative* ならば，$\mu(t)$ は I 上の *convex* 函数である。



24

部分的に等角な擬等角写像と普遍的タイヒミュラー空間

大竹 博巳　　京大・理

昨年のシンポジウムで報告した結果について、普遍的タイヒミュラー空間の場合において改良できたので今回報告します。

<u>記号</u>　Δ : 単位円板

∇ : Δ 内の可測集合で測度正

$M(\Delta)$: Δ 上のベルトラミ係数の集合

$M(\nabla) = \{ \mu \in M(\Delta) \,;\, \mu|_{(\Delta - \nabla)} = 0 \}$

T : 普遍的タイヒミュラー空間

Φ : 自然な射影 $M(\Delta) \to T$

$\mathcal{A}$: Δ 上の可積分な正則函数のなすバナッハ空間

$\chi(Y)$: Y の特性函数

$\sigma(Y)$: $Y \subset \Delta$ の双曲的面積

$D(\zeta\,;\rho)$: 中心 $\zeta \in \Delta$, 半径 ρ の双曲的円板

この時、以下のことが成立する。

定理. 1 もし $\mathrm{int}\,\Phi(M(\nabla)) \neq \phi$ ならば

(1) $$\inf\{\|X(\nabla)\phi\|_1 \,;\, \phi \in A,\ \|\phi\|_1 = 1\} > 0$$

定理. 2 次の3条件は互いに同値

(a) ; (1) が成り立つ

(b) ; $\exists \rho > 0$ s.t. $\inf\{\sigma(\nabla \cap D(\zeta;\rho))\,;\, \zeta \in \Delta\} > 0$

(c) ; $\exists \{\zeta_n\}_1^\infty \subset \Delta$, $\exists \rho > 0$ s.t.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D(\zeta_n;\rho) \supset \Delta$$

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty} X(D(\zeta_n;2\rho)) < \infty$$

$$\inf\{\sigma(\nabla \cap D(\zeta_n;\rho))\,;\, n \geqq 1\} > 0$$

定理. 3 定理. 2 の各条件は擬等角不変

25

Moduli空間の length spectram について

志賀 啓成　　東工大理

Rを双曲型で位相的に有限タイプのRiemann面とする。よく知られているように、R上のnon-trivial な閉曲線のhypebolic metric に関する測地線の長さの集合（length spectram on R）は実数R上 discrete になっている。本講演ではこれと同様のことを解析的に有限型のRiemann 面の moduli space で論じる。

S を(g,n)型の Riemann 面とする（ただし 3g-3+n>0）。S の Teichmüller space T(g,n) は (3g-3+n)次元の複素多様体であり、かつ Teichmüller-Kobayashi metric d によって complete metric space になっている。またS の moduli space M(g,n) は Teichmüller modular group Mod(g,n) を用いて T(g,n)/Mod(g,n) と表現される。また Mod(g,n) の各元は d-isometry であるから、moduli space M(g,n) における metric d についての "length spectram" の離散性は Mod(g,n) の元の translation length の離散性に帰着される。すなわち、次の定理を示す。

定理 A. Mod(g,n) の各元 χ に対して

$$a(\chi)=\inf\{d(\chi(p),p);\ p\in T(g,n)\}$$

とおく。このとき集合 $\cup\{a(\chi);\ \chi\in Mod(g,n)\}$ は実数上 discrete である。

Teichmüller modular 変換の分類を考えたとき、$a(\chi)>0$ となるのは、いわゆる pseudo-hyperbolic or hyperbolic な χ に対してのみである。hyperbolic な変換に対しては更に強い主張が言える。

定理 B. 実数上の有限区間 I に対して、$a(\chi)$ が I に含まれるような hyperbolic な $\chi \in \mathrm{Mod}(g,n)$ は有限個である。

一方、pseudo-hyperbolic な変換に対してはこのようなことは成立しない。すなわち、

例 あるａ＞０がとれて、$a(\chi)=$ ａ を満たす pseudo-hyperbolic な変換が無限個存在するようにできる。

また、定理Ａの応用としてRiemann 面のある種の holomorphic families の（base surface を動かしたときの）有限性を論じる。

26

有限生成 torsion-free Klein群の2つの型の自由積分解について

松崎克彦　京大理

Klein群といえば、有限生成, torsion-free, 第2種のものをさすものとする。Klein群 G の非自明な自由積分解 $G = G_1 * G_2$ が geometric, reducible というのをそれぞれ次のように定義する。

[geometric] $\Longleftrightarrow$ (Kleinの) Combination Theorem の適用によって得られる分解。すなわち、G の不連結領域の連結成分に単連結でないものが存在するときになされる分解。

[reducible] $\Longleftrightarrow$ G のすべての component subgroup が G_1 または G_2 の共役の部分群となっている分解。

定理　すべての Klein群は上の2つの分解の有限回の適用により、Bonahon の条件 (*) をみたす部分群 (elementary を含む) の自由積に分解することができる。

(*) をみたす Klein群 G については、$H^3 \cup \Omega(G)/G$ を考えることにより、よい結果を知ることができる (Abikoナド)。上の定理の

適用により、それが一般のKlein群に反映される例を以下にあげる。ここで $r(G)$ と書けば、G の最小の生成元の数を表わすものとする。

<u>応用1</u>　Bersの面積定理"$\Omega(G)/G$ の双曲的面積の和 $\leq 4\pi(r(G)-1)$"の別証明、および等号 $\Rightarrow$ G は幾何学的有限。

<u>応用2</u>　G が elementary でない場合、$\Omega(G)/G$ の成分の個数 $=2(r(G)-1)$ となる必要十分条件。

<u>応用3</u>　G が elementary でない場合、G の任意の component subgroup H について $r(H)\leq 2(r(G)-1)$（すべての $r\geq 3$ で sharp）

<u>応用4</u>　$\Omega(G)/G$ の双曲的面積の和 $\geq 4\pi(r(G)-2)$ ならば、G の limit set $\Lambda(G)$ の Lebesgue measure $=0$。特に $r(G)=2$ の場合は $m(\Lambda(G))=0$

<u>応用5</u>　G が elementary でない場合、G の parabolic fixed point の共役類の数 $\leq 3(r(G)-1)$（すべての $r\geq 2$ で sharp）。この結果は Sullivan－Kra によって得られた $5(r(G)-1)$ の改良になっている。

27 Ahlfors予想の再帰性の問題への変形について

松崎克彦　　京大理

予想　Γ'を$\text{Möb}(\mathbb{H}^3)$の有限生成第1種離散部分群とする。このとき、Γ'の$\{id\}$と異なる正規部分群Γはconservative (recurrent) である。

ここで$\text{Möb}(\mathbb{H}^3)$の離散部分群Γがconservativeであるとは、$\hat{\mathbb{C}}$の任意の測度正の可測集合Eに対して$\#\{g \in \Gamma ; m(E \cap gE) > 0\} = \infty$のことである。

Ahlfors予想が上の予想に帰着されることを述べる。注意として、次の命題よりΓ'自身はconservativeであることがわかっている。

命題　Möbの有限生成離散部分群はconservativeである。

Gを有限生成第2種のKlein群とする。$m(\Lambda(G))=0$を

示すためには有限生成 torsion-free な web group のみを考えればよいことが知られている。

補題　すべての有限生成 torsion-free web group は、不連続領域の成分がみな disk であるそれの部分群である。

G として補題のような web group をとり、$\Lambda(G)$ の convex hull の境界となる半球面に関する偶数回の反転で生成される離散群を Γ とする。$m(\Lambda(G))=0$ をいうためには、この Γ が conservative であることを示せばよい。

G は $\mathcal{M}=\mathbb{H}^3/\Gamma$ に不連続等距離に作用していると考えられるので、$\mathcal{M}$ は hyperbolic manifold $\mathcal{M}/G=\mathcal{M}'$ の normal cover となる。従ってある $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H}^3)$ の離散群 Γ' があって、$\mathcal{M}'=\mathbb{H}^3/\Gamma'$, $\Gamma\triangleleft\Gamma'$, $\Gamma'/\Gamma\cong G$ となる。弱干の考察により Γ' は有限生成であることがわかるので、結局、Ahlfors 予想ははじめにあげた予想に帰着される。

cf.

Velling-Matsuzaki ; Sphere packings which generate recurrent discrete groups of hyperbolic motions in $\mathbb{H}^{n+1}$ for $n\geq 2$. (preprint)

28

Moǐšezon 部分空間に沿う形式射の収束性は伝播する

泉　脩藏　　　　　　　近畿大　理工

(X, O_X) を複素解析空間、S を ideal sheaf $I \subset O_X$ で定義された部分空間とする。$\hat{O}_{X,S} := \varprojlim O_X/I^k|_{|S|}$ と置くとき、C-環付空間 $\hat{X}|_S := (X, \hat{O}_{X,S})$ は X の <u>S に沿っての完備化</u>といわれる。J を $\hat{O}_{X,S}$ の coherent ideal 層とし、$A := \mathrm{spt}.\ \hat{O}_{X,S}/J \subset |X|$ と置く。すると $(A, \hat{O}_{X,S}/J)$ は再び C-環付空間となる。そのような空間に局所的に同型な C-環付空間は<u>形式複素空間</u>と言われる。形式複素空間全体は、C-環付空間としての射に関して category をなす。$S \subset X$ とするとき自然な射 $\iota_S : \hat{X}|_S \longrightarrow X = \hat{X}|_X$ が定義される。さらに $\Phi : X \longrightarrow Y$ を複素解析空間の射とし、$\Phi(|S|) \subset |T|$ とすると $\iota_T \cdot \Phi^\wedge = \Phi \cdot \iota_S$ を満たす射 $\Phi^\wedge : \hat{X}|_S \longrightarrow \hat{Y}|_T$ が一意的に定義される。$\Phi^\wedge$ を Φ の<u>完備化</u>と言う。複素解析空間の完備化の間の形式複素空間としての射は、複素空間の射の完備化となっているとき<u>収束する</u>と言われる。点 $\xi \in S$ に対して射 $\Theta : \hat{X}|_S \longrightarrow \hat{Y}|_T$ と射 $\hat{X}|_{(\xi)} \longrightarrow \hat{X}|_S$ の合成が収束すれば、射 Θ は<u>点 ξ で収束する</u>と言われる。以下で <u>Moǐšezon(部分)空間</u>というときには、compact かつ被約かつ既約な複素解析空間で、その次元と同じ数の代数的に独立な有理型関数を持つものをさす。

<u>定理 1. $S \subset X$ を Moǐšezon 部分空間とし、X は S に沿って既約であると仮定する。もし $f \in \Gamma(S, \hat{O}_{X,S})$ が一点 $\xi \in S$ で収束すれば、f は S 全体で収束する。すなわち $f \in \Gamma(S, O_{X,S})$。</u>

これは [I],(9.5) の拡張であるが、Gabrielov の定理 [G] (cf. [I],[T]) と、正直線束の理論と、Grauert [Gr] の複素管状近傍に関する定理から導かれる。

<u>系 2 (応用). S を Moǐšezon 空間とし $D \subset S$ を Cartier 因子とす</u>

る。もし $A, B\subset|S|-|D|$ が内点を持つ compact 集合であれば、適当な $M>0$ と、高々 dD に極を持つ任意の S 上の有理型関数に対して、$\|f\|_B\leq M^d\|f\|_A$ (一様ノルムの評価)。

これは Bernstein、Walsh、Sadullaev [S] 等の、affine space (or variety) 上での多項式の増大度に関する定理の一変種である。

定理 3 (定理 1 の拡張). 次のように仮定する。
(1) $S\subset X$ は Moĭšezon 部分空間であり、X に沿って既約である。
(2) $T\subset Y$ は compact な部分空間。
(3) $\Theta:\hat{X}|_S\longrightarrow\hat{Y}|_T$ は形式複素空間の射である。
(4) 有限個の有限な射と有限個の modification の合成として得られる射 $\Pi:Y\longrightarrow Z$ があり、$\Pi(|T|)$ は一点になっている。
このときもし Θ が $\xi\in S$ で収束すれば、S 全体でも収束する。

系 4. 定理 3 で (4) を次の (5) で置きかえてもよい。
(5) $Y\setminus T$ は smooth。

定理 3、系 4 の証明には、Tougeron [T], Levenberg-Molzon, Wiegerinck 等の形式巾級数の収束方向に関する定理と、Artin[A] の解析的方程式に関する定理が用いられる。

References

[A] Artin, M.: Invent. Math. 5, 277-291 (1968)
[B] Bingener, J.: Manuscripta Math. 24, 253-293 (1978)
[G] Gabrièlov, A. M.: Izv. Akad. Nauk. SSSR. 37, 1056-1088 (1973)
[Gr] Grauert, H.: Math. Ann. 146, 331-368 (1962)
[I] Izumi, S.: *The rank condition and convergence of formal functions*. Duke Math. J. (to appear)
[S] Sadullaev, A.: Math. USSR Izv. 20, 493-502 (1983)
[T] Tougeron, J-Cl.: *Sur les racines d'un polynome a coefficients series formelles*. preprint (1988)

29 Hyperbolicity and branched coverings

Georg Schumacher Ruhr-Bochum大学
竹腰見昭 阪大教養

Sを小林の意味で双曲的な複素多様体としSの自己同型群の固有不連続な部分群Gに対してその商空間 $X = S/G$ がいつ再び小林の意味で双曲的になるかという問題を考える. Gが固定点をもつ場合にはXは必ずしも双曲的になるとは限らない. (S, ω_S, ρ_S)で有界対称領域, そのBergmann計量, ω_Sから決まるある有理数を表わす($S = \mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ のとき $\rho_S = \frac{n+1}{2}$, $S = D \times \cdots \times D$ n多重円板のとき $\rho_S = n$). GをSの$\mathrm{Aut}(S)$の固有不連続な部分群とし次を仮定する.

(*) $X := S/G$ はコンパクト複素多様体.

この時 $p : S \to X$ は一般に分岐被覆空間となる. $A \subset S$ を p の分岐因子, $B := p(A) \subset X$ とし $B = \bigcup_{i=1}^{\ell} B_i$ を B の既約分解とする. $\nu_i \geq 2$ を p の B_i 上の分岐指数とし $\alpha_i := 1 - \frac{1}{\nu_i}$ とおく.

定理 $p:(S,\omega_S,\rho_S)\longrightarrow X=S/G$ に対して

ある正の有理数 μ で $\mu>\rho_S-1$ かつ

$$K_X-\mu\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i B_i\in \mathrm{Pic}(X)\otimes\mathbb{Q}$$

が X 上半正となるものが存在すると仮定する。この時次が成立。

(1) X は B を法として小林の意味で双曲的

(2) X は一般型

(3) $\dim_{\mathbb{C}} X=2$ の時、X は極小曲面。

上述の条件を満たす例は今の所自明なものしか知られていない。(1)は X 上に B 上退化するエルミート計量を構成しそれが円板からの正則写像に対してdistance decreasing propertyを満たす事から従う。(2)は $X\setminus B$ 上の L^2-消滅定理、また(3)はその帰結であるコホモロジーの消滅定理、$H^i(X,\mathcal{O}_X(mK_X))=0$ ($i\geq 1$, $m\geq 2$) より従う。

30

$\zeta(3)$の保型形式を用いた積分表示

芳賀 晶子　千葉大・理
志賀 弘典　千葉大・理

1978年に、Apéryは、次の事実を発見した。

漸化式 $(n+1)^3 u_{n+1} = (34n^3+51n^2+27n+1)u_n - n^3 u_{n-1}$
を満たし $a_0=1$, $a_1=5$ で始まる数列を $\{a_n\}$ とし、同じ漸化式を満たして $b_0=0$, $b_1=6$ で始まる数列を $\{b_n\}$ とする。その時 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \zeta(3) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3}$ が成り立つ。

我々は本講演で、この結果に基づいて $\zeta(3)$の保型形式を用いた積分表示を与える。

ここで 次の記号を用いることにする。

$$\Gamma_1(6) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; a \equiv 1,\ c \equiv 0 \pmod{6} \right\}$$

$$H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$$

$$S = S(\tau) = \left\{ \frac{\vartheta_2(0,3\tau)}{\vartheta_2(0,\tau)} \right\}^4 = q - 4q^2 + 10q^3 - 20q^4 + \cdots \quad (q = e^{2\pi i\tau})$$

：$H/\Gamma_1(6)$ のコンパクト化（実は$\mathbb{P}^1$）を一意化する函数.

$$\omega(\tau) = 1 - 3q - 3q^2 - 3q^3 - 3q^4 - 3q^6 - 6q^7 - \cdots$$

：$\Gamma_1(6)$に対しての重み1の保型形式で $\omega(\frac{1}{2})=0$ となるもの.

命題
$$A_1 = \int_0^{i\infty} \tau^2 (s-1)^2 \omega^4 \, d\tau$$
$$B_1 = \int_0^{i\infty} \tau (s-1)^2 \omega^4 \, d\tau$$
$$A_2 = \int_0^{i\infty} \tau^2 (9s^2-6s+5)(s-1) \omega^4 \, d\tau$$
$$B_2 = \int_0^{i\infty} \tau (9s^2-6s+5)(s-1) \omega^4 \, d\tau$$

とすると
$$\zeta(3) \cdot B_2 = 6\,(A_1 B_2 - A_2 B_1 - B_1)$$

(注意: ここで A_i, B_i $(i=1,2)$ は重み4の保型形式のMellin変換の 3, 2 での値になっている.)

Beukers - Peters (Crelle. 351 ('84)) によると $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の母関数 $A(t)=\sum a_n t^n$, $B(t)=\sum b_n t^n$ はそれぞれ $Ly=0$, $Ly=6$ の解となっている. ここで
$$L=(t^4-34t^3+t^2)\frac{d^3}{dt^3}+(6t^3-153t^2+3t)\frac{d^2}{dt^2}+(7t^2-112t+1)\frac{d}{dt}+(t-5)$$
さらに. Peters によると. この D: $Ly=0$ は $\omega(\tau)$ (sの関数とみて)を解とする
$$D_6:\ s(s-1)(9s-1)y''+(27s^2-20s+1)y'+(9s-3)y=0$$
の symmetric tensor であることが分かっている.

我々は. これらの結果を手がかりに. 上の命題に到達する.

函数論特別講演

Circle Packing and Complex Analysis

A.F.Beardon Univ. of Cambridge

A finite collection of circles in the plane is a "circle packing" if each circle is either tangent or exterior to every other circle, and if each bounded component of the set exterior to all circles is bounded by arcs of exactly three circles. As conformal mappings map infinitesimal circles to infinitesimal circles, we can consider the change from one circle packing to another combinatorically equivalent packing as a discrete approximation to a conformal map. It is not necessary to insist that the circles are small.

In this talk, we shall discuss the way in which basic theorems in complex analysis can be proved for circle packings. We shall consider, for example, The Schwarz Lemma, Liouville's Theorem, the Riemann Mapping Theorem, and the Perron method for solving the Dirichlet Problem. For example, the Dirichlet problem is as follows. Given an abstract circle packing, put abstract radii (that is, positive numbers) on each of the outer circles : the problem is to decide whther or not there exists a packing with these boundary values (that is, with the outer circles having these radii).

An important feature of geometric complex analysis is the difference between the Euclidean and hyperbolic geometries, and this arises in our analysis in the different types of circle packings which can exist in the Euclidean and hyperbolic planes. An important ingredient here is Andreev's Theorem : given a circle packing, there is a combinatorically equivalent packing with all circles lying inside the unit disc, and the outer circles tangent to the unit circle.

Teichmüller空間上のmodular函数の構成の試み
(discrete群にassociateしたHopf代数とその或る極限元)

数理解析研究所 斎藤 恭司

Teichmüller 空間(T_g)とは、以下に述べる様に、リーマン面のmoduliの空間の記述の中では、或る意味で、最も超越的(代数的でないという意味)な空間と言える。そのT_gの上に、何らかの意味ある(と思われる)超越的な函数を構成してみようと、或る非常に具体的なプロセスを説明するのが、この講演の目的である。残念ながら、未だ函数の構成までは到っておらず、ここでは、その中間報告を行う。

Teichmüller空間 上の函数の例としては、既に、Selbergのゼータ函数をその様なものとして解釈できるし、リーマン面のmoduliの長い研究の歴史は、陰に陽に、或るいみで、その様なものを対像として来たとも言えるが、例えば Poicáre 級数みたいなものにより、Teichmüller空間上のmodular函数を直接的に構成する様な研究は(筆者の知る限りは)なされていない様である。他方、近年進展し

ている。数理物理の共形場の理論は、改めてその様なものの研究をうながしている様にみうけられる。又これと多少視点は異るが、S. Wolpertは Teichmüller空間の境界にPoisson核を導入する事により、その内部の函数を積分表示する事を試みている。

さて、ここでリーマン面(X)とは複素1次元多様体の事であり、以下コンパクトと仮定する。すると複素構造を忘れた、実2次元多様体$|X|$は、そのgenus $g := \mathrm{rank}(H^1(X))/2$ のみで決ってしまう。そのgを固定して、$|X|$に入りうるすべての複素構造の全体の集合に代数多様体の構造を入れたものが、いわゆるモデュライ空間$\mathcal{M}_g$である。この他にも、モデュライ空間として、例えば

① $|X|$に入る複素構造Xと、Xのホモロジー群$H_1(X)$の基底(symplectic)とのpairの全体を考えた Torelli空間

② $|X|$に入る複素構造Xと、Xの基本群$(\simeq \Gamma_g := \langle a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \rangle)$の生成系$(a_i, b_i)_{i=1}^{g}$とのpair全体を考えた Teichmüller空間T_g

等々が考えられる。(他にもいろいろある。) 定義より、これ等空間の間には被覆関係が、次の様にある。

$$T_g \longrightarrow \text{Torelli} \xrightarrow[Sp(g,\mathbb{Z})]{} \mathcal{M}_g$$

ここに、$T_g \to \mathcal{M}_g$ なる$\overbrace{\text{被覆}}^{\text{ガロア}}$の、被覆変換群

$$M_g \simeq \mathrm{Out}^+(\Gamma_g) := \mathrm{Aut}^+(\Gamma_g)/\Gamma_g \leftarrow \text{内部自己同型}$$

orientation preserving

$$\simeq \mathrm{Diffeo}^+(|X_g|)/\mathrm{Diffeo}_0^+(|X_g|) \leftarrow \text{連結成分}$$

となり、Teichmüller modular 群とも mapping class group とも呼ばれている。そこで、我々の目標（未達成）を繰り返すと、T_g 上に M_g-不変な函数（又は form？）を構成する事である。（T_gは $\mathbb{C}^{3g-3}$の中の可縮な有界領域として実現できる事（Bers embedding）もよく知られている。）

さて、Teichmüller空間は、40年代初めに Teichmüller により導入されて以来 Weil, Bers, Ahlforse, Earle, Eels, Thurston, Wolpert, Tromba 他多くの人達により研究されて、再構成されてきた。ここでは、$\overbrace{\text{幾分}}^{\text{同空間を}}$それより旧い Fricke 等に始まる Fuchs群の moduli の視点よりあつかってみる。すなわち $g \geq 2$ なる任意の Riemann面 X は、複素上半平面$\mathbb{H}$の商空間として $X \simeq \rho(\Gamma_g)\backslash\mathbb{H}$ と書ける。ここで $\rho : \Gamma_g \to PSL(2,\mathbb{R})$ は faithfull な discrete 群としての表現である。そこで、面Xの moduli を考える事は、表現 ρの moduli を考える事に翻訳される。この視点からすると Teichmüller 空間 T_g は次の様になる。

$$T_g \simeq \Gamma_g \backslash R_0(\Gamma_g, PSL(2,\mathbb{R}))/PGL(2,\mathbb{R}).$$

ここで、記号を順次説明すると、

$R_0(\Gamma, G) := \{ \rho : \Gamma \to G \mid$ discrete 群 Γ の Lie 群 G への忠実表現で像が discrete かつ cocompact $\}$

であり、この $R_0(\Gamma, G)$ には $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ と $\mathrm{Aut}(G)$ がそれぞれ左右から、表現写像の合成として作用しており、特に、$\mathrm{Aut}(PSL(2,\mathbb{R})) = PGL(2,\mathbb{R})$, $\Gamma_g \subset \mathrm{Aut}(\Gamma_g)$（内部自己同型として）となっている。又、上の構成から T_g に $M_g = \mathrm{Out}^+(\Gamma_g)$ が作用しているのも明か。要するに、T_g は、$2g$ 個の行列 $\in SL(2,\mathbb{R})$ の組 $(A_i, B_i)_{i=1}^{g}$ であって関係 $\prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i] = 1$ を満すもの全体の集合の $GL(2,\mathbb{R})$ の adjoint 作用による商空間とみなしてよい。$GL(2,\mathbb{R})$ の作用を Gauge 変換と呼び、ひとまずそれを忘れる事とすると、$2g$ 個の関係 $\prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i] = 1$ を満す matrix 変数の函数であって、$\mathrm{Out}^+(\Gamma_g)$ に関し不変なものを構成する事が課題となる。（なお上記のごとく構成した T_g が、実解析多様体の構造を持つ事は明らかだが、更に（古典的な Teichmüller 空間と同一視せずに）T_g に可積分な複素構造が直接的に構成できる事については、Hitchin による興味深い仕事が有り、又筆者も直接構成を与えている。しかしこの辺については、未解明な事が多い様に思える。）

さて，Γ_gに対し無限生成のHopf代数 C_{Γ_g} を次の様に対応させる。まず，Γ_gにCaylayグラフと呼ばれる構造が（$\alpha,\beta\in\Gamma_g$が結ばれている$\Leftrightarrow\alpha^{-1}\beta\in\{a_1^{\pm1},\cdots,a_g^{\pm1},b_1^{\pm1},\cdots,b_g^{\pm1}\}$）により入る。（更に適ぎ，グラフに"向き付け"や，"色付け"を行っておく。）Γ_gの有限部分グラフのグラフとしての同型類の全体を Conf_{Γ_g} とおく。Conf_{Γ_g} は *disjoint union* を積とする事により，半群構造を持ち，その積により Conf_{Γ_g} により生成される *algebra* を *configuration algebra*

$$C_{\Gamma_g} := \mathbb{Z}[\![\mathrm{Conf}_{\Gamma_g}]\!]$$

と呼ぶ事にする。更に，自然に C_{Γ_g} にHopf代数の構造が入り（略），それに関する *grouplike element* は

$$S\in\mathrm{Conf}_{\Gamma_g}\longmapsto A_S:=\sum_{T\subset S}T\quad\in C_{\Gamma_g}$$

なる，半群順同型写像の像により生成される。ここで，S_nを適ぎ Conf_{Γ_g} の中の"増大列"とした時に

$$\varinjlim_n\,(A_{S_n})^{1/\#S_n}$$

なる元が興味の中心となる。この元をどの様に無限級数として実現するか，等々未完の問題は多々あるが，それ等は，講演の中でふれる。