野口様

1982
September

日　本　数　学　会

昭和57年度秋期総合分科会

講演アブストラクト

函　　数　　論

時……９月28日・29日

所……三　重　大　学

28日	９：00～12：00	普通講演	１～12
	13：30～15：00	普通講演	13～18
	15：30～16：30	特別講演	
29日	９：30～12：00	普通講演	19～29
	13：30～14：30	特別講演	

1．上田英靖（大同工大）　**Spread Relation に関する一結果**

u_1, u_2を全有限平面で劣調和な函数とする。$u=u_1-u_2$に対して，

$$N(r,u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}u(re^{i\theta})d\theta,$$

$$T(r,u)=N(r,u^+)+N(r,u_2),$$

$$\sigma_b(r,u)=meas(\{\theta\in[-\pi,+\pi);u(re^{i\theta})>b\})$$

とおく。Baernstein(Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 193(1974))は次の結果を証明した。

δ, λは次の条件を満たす2つの数とする：

$$\lambda>0,\ 0<\delta\leqq 1,\ \frac{4}{\lambda}\sin^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1/2}\leqq 2\pi.$$

$u=u_1-u_2$が非定数で

$$N(r,u_2)\leqq(1-\delta)T(r,u)+O(1)\ (r\to\infty),$$

およびある実定数bに対して

(A) $\sigma_b(r,u)<\frac{4}{\lambda}\sin^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1/2}\ (r\geqq r_0)$

を満たしているとする。このとき$\lim_{r\to\infty} r^{-\lambda}T(r,u)$が存在し，正か$+\infty$となる。

ここでは，上の仮定における(A)を

(B) $\{r>1;\sigma_b(r,u)\geqq\frac{4}{\lambda}\sin^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1/2}\}$の*logarithmic measure* $<+\infty$

なる仮定にゆるめても同じ結論が得られることを報告する。

2．山田　陽（東工大理）　**Ahlfors 函数の像領域について**

Ωは平面領域，Dは単位円板とする。S. Ya. Havinson (1964) とS. D. Fisher (1969)は*Ahlfors* 函数の像領域のD内の補集合$D\setminus f(\Omega)$は*analytic capacity 0* であることを示した．一方、Ωは有界正則函数族に対して*Rudin* の意味で極大であると制限したとき，逆にD内の任意の*analytic capacity 0* の閉集合を像領域の補集合に持つ*Ahlfors* 函数は存在するかどうかはまだ知られていない．最近，部分的解答としてMinda[1]はKをD内のかなり一般的な離散的集合として$D\setminus f(\Omega)=K$となる平面極大領域の例を作った．ここではKをD内のかなり一般的な*logarithmic capacity 0* の閉集合として上と同様な平面極大領域の例が作れることを示す。

[1] D. Minda, The image of the Ahlfors function, Proc. Amer. Math. Soc., 83(1981), 751—756.

3．斎藤三郎（群馬大工）　**The Weierstrass transform and an isometry in the heat equation**

Hilbert　空間における積分変換の一般論について簡単に述べた後，具体的なWeierstrass 変換についての結果を報告する．

$$k(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp[-\frac{x^2}{4t}]$$

$(t\in(0,\infty),\quad x\in R=(-\infty,\infty))$とおき，$F\in L_2(R)$の積分変換$u(x,t)=\int_R F(y)k(x-y,t)dy$を考える．像は再生核$k(x-x',t+t')$をもつHilbert空間をなし，$L_2(R)$とisometryに対応することが解るが，$t$を任意に固定したとき，次がいえる．

定理． $u(x,t)$は$|z|<\infty$上に解析接続され，normが

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\iint_C|u(z,t)|^2\exp\left[-\frac{y^2}{2t}\right]\ dxdy\right\}^{1/2}$$

で，再生核$k(z-\bar{v},2t)$をもつHilbert空間をなし，$L_2(R)$と isometry である；すなわち

$$\int_R F(x)^2dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\iint_C|u(z,t)|^2\exp\left[-\frac{y^2}{2t}\right]\ dxdy.$$

さらに新しい型の逆変換の公式$u(x,t)\to F(x)$も一般論とこの定理から得られる。

4．及川廣太郎（東大教養）　**角微係数の存在するための条件について**

$S=\{z;|\mathrm{Im}z|<\pi/2\}$の正則単葉関数$f$が$+\infty$で角微係数を持つための必要十分条件は，*extremal-length* を用いて与えることができる(Rodin-Warschawski–Jenkins–Oikawa).

しかし，よりエレメンタリな量による条件は未だ与えられていない．$f(S)$に制限をつけたときにはいくつかの場合に，得られている．たとえば，$f(S)\supset S$のときには，FerrandやRodin-Warschawskiによるものがある．我々は，彼等より，もっと簡単な形のものを与えたい：**定理．** $\delta^{\pm}(u)$を点$u\pm i\pi/2$（複合同順）から$\partial f(S)$までの距離としたとき，$f(S)\supset S$であるようなfが$+\infty$で角微係数をもつための必要十分条件は，

$$\int^{\infty}(\delta^{+}(u)+\delta^{-}(u))du<\infty.$$

5．古沢治司（金沢女子短大）　**Fuchs群のある変形によって増加するLimit SetのHausdorff次元について**

$$T=\begin{pmatrix} a_t & b_t \\ b_t & a_t \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$a_t^2-b_t^2=1$，a_t，b_tは実数であって，$b_t\downarrow 1$ $(t\to 0)$とする．$G_t=\langle T, ETE^{-1}\rangle$とおく．$\Lambda(G_t)$を$G_t$の*Limit Set*，$d(\Lambda(G_t))$をその*Hausdorff*次元とする．このとき，

定理． 任意の$\varepsilon>0$に対して，十分小なるtがあって，$d(\Lambda(G_t))>1-\varepsilon$とできる．

これの応用として，Gは単位円Dに作用する*Fuchs*群で型$(g;n;m)$をもつとする．このとき，$g\geqq 1$かつ$m\geqq 1$ならば，適当な擬等角写像W：$D\xrightarrow{onto}D$があって，$d\Lambda(WGW^{-1})$)を十分1に近くとることができる．

6．佐藤宏樹（静岡大理）　**Schottky groupsの極限とRiemann surfacesの極限の関係について**

G_oを固定されたmarked Schottky group，Σ_oをG_oの固定されたbasic system of Jordan curvesとする．τをΣ_oに関するaugmented Schottky spaceの点で，nodesもちのcompact Riemann surface Sを表わすものとする．

このとき点τに収束するSchottky space内の任意の点列$\{\tau_n\}$に対し，τ_nが表すRiemann surfaces $S(\tau_n)$の列はSに収束するかという問題を考える．$S(\tau_n)$がどのようなRiemann surfaceに行くかということを調べることにより，上の問題の答えは一般に“*no*”であることを述べる．更にSchottky spaceに導入した座標(cf. Nagoya Math. J. 75(1979), J. Math. Soc. Japan 35(1983))の3次元空間での幾何学的意味も時間があれば述べたい．

7．栗林暲和（中大理工）・**栗林　泉**（筑波大数学）

On hyperelliptic Riemann surfaces of genus 3

この講演の目的は，“広義の*Hurwitz-Nielsen*問題”に寄与するために種数3のhyperelliptic Riemann surfacesの自己同型群の部分群を研究することである．ここで，“広義の*Hurwitz-Nielsen*問題”とはRiemann-Hurwitzの関係式があらかじめ与えられたとき，Riemann面Rと有限群GとをGがRの自己同型群の部分群で，the covering $R\to R/G$が与えられたRiemann-Hurwitzの関係式を満たすように発見できるかという問題である．内容はつぎの通りである．

§1．Subgroups of automorphism groups and their representations.

§2．Inclusion lattice.

§3．Teichmüller spaces and decktransformation groups.

8．神谷茂保（岡山理大理）　**U(1,n;F)のconvergence型あるいはdivergence型の部分群について**

Gを$U(1,n;F)$のdiscrete subgroupとし，Gの元を$f_0, f_1, \cdots\cdots$とかくことにする．このとき，$\sum_{f_k\in G}(1-\|f_k(a)\|)<\infty$となるか，$\sum_{f_k\in G}(1-\|f_k(a)\|)=\infty$となるかは，$a\in H^n(F)$のとり方によらない．前者をみたす$G$をconvergence型，後者をみ

たすのを divergence 型とよぶ.

Fuchs群の部分群のときと同様な結果が, $U(1, n; F)$の部分群においても成立することを報告したい。

9. 柴 雅和（広島大理） **開Riemann面に対するRiemann-Hurwitz型公式と，その等角写像，接続問題への応用**

(I) Rを有限種数gの開Riemann面, fをその上の1価有理型函数でdfが半完全標準微分 (i, e., $Re(df)$はdistinguished, あるいはRefは$(Q)L_1$-主函数)となるもの, μをfの位数とする. このとき次のRiemann-Hurwitz型公式がなりたつ：$g=1-\mu+\frac{V}{2}+\frac{W}{2}$. ここで$V$は$R\xrightarrow{f}\hat{C}$の内分岐数の総和であり, Wは境界分岐数の総和.

(II) 上のような対(R, f)に対して，種数gのcompactな面$\tilde{R}$($\partial\tilde{R}=\phi$ or $\neq\phi$)と$\tilde{R}$上の有理型函数$\tilde{f}$, 正則単射$i: R\to\tilde{R}$があって, (1)R上$f=\tilde{f}\cdot i$, (2)$\tilde{f}$は$\tilde{R}\setminus i(R)$で正則, (3)$\tilde{R}\setminus i(R)$は測度零, (4)$\tilde{f}(\tilde{R}\setminus i(R))$は,局所単葉な平行截線集合, (5)$Re\tilde{f}$は$\partial\tilde{R}$の各成分上定数 ——$f$は$R$の平行截線被覆写像.

(III) $\tilde{R}$はRの大域的1価函数fによる接続. 上述のような2つのf_1, f_2の間には相互に特別の代数型函数としての関係がある (f_1, f_2自身は代数函数).

(IV) 上の結果(II)はMizumotoの予想を肯定する.

10. 柴田敬一（阪大教養） **・柴 雅和**（広島大理） **有限種数Riemann面の流体力学的接続**

先の発表でのべたように，有限種数開Riemann面Rと，その上の特別の性質をもつ1価有理型函数f（このような函数を，その流体力学的性質に因んでS-函数とよぶ)が与えられたとき，同じ種数のcompactな面$\tilde{R}$と, fの$\tilde{R}$への正則な拡張$\tilde{f}$がつくられる. $\tilde{R}$は閉じた面か，いわゆる有限な面(compact bordered)である. また$\tilde{f}$は$\tilde{R}$上のS-函数である.

$\partial\tilde{R}=\phi$ならば問題はないので$\partial\tilde{R}\neq\phi$とする. このとき$(\tilde{R}, \tilde{f})$に対して同じ種数の閉じた面$R^*$と$\tilde{f}$の$R^*$への正則な拡張の存在を示す. $(\tilde{R}, \tilde{f})$から(R^*, f^*)を構成する方法は一意的ではない.

証明は，複素速度ポテンシャル$\tilde{f}$に対応する"流れ"の境界付近での挙動の考察により，初等的である.

とくに，R上の任意のS-函数が本質的には代数函数であることがわかる. これはS-函数を対象とする代数函数論が可能であったことの1つの裏付けを与える.

11. 志賀啓成（京大理） **Teichmüller spaceにおけるboundary approach について**

$S_o(=U\setminus G_o)$を(g, n)型のRiemann面$(2g-2+n>0)$, $T(S_o)$中心のTeichmüller空間とする. $T(S_o)$はFuchs群G_oのTeichmüller空間$T(G_o)$と同一視される. また, $T(S_o)$はS_oの正則二次微分の空間の開単位球と, $T(G_o)$はBers' embeddingによって，その有界領域とそれぞれ同一視される. ここでは，両者の境界対応を主として，Teichmüller disk上の挙動を中心に考察する.

定理. ϕをS_o上の正則二次微分, $D[\phi]$をϕに関するTeichmüller diskとする. $D[\phi]$は自然に$\mathbf{C}$上の単位円板Dと対応づけられるが，このとき, (a) $a.e.$の$e^{i\theta}\in\partial D$に対し，non-tangential limitが存在し，しかもそれは$\partial T(G_o)$上のtotally degenerate groupである. (b)ϕがJenkins-Strebel微分のときは, $z=1$で接するhorocycleの内部から$z=1$に近づくとき，極限値が存在し，それは$\partial T(G_o)$上のregular b-groupである.

更に，関連した結果も，二，三述べる.

12. 谷口雅彦（京大理） **整周期をもつ二乗可積分な調和微分について**

一般のリーマン面R上で整周期をもつ二乗可積分な実調和微分σに対し，自然にRから単位円S^1へ

の写像が定義できるが，かかる写像fは函数としてはDirichlet積分有限でRのRoydenコンパクト化まで連続に拡張できる．このとき，調和境界Δのfによる像の補集合$U=S^1-f(\Delta)$上で$a.e.\ t$に対し，$f^{-1}(t)$の各成分は単純閉曲線となり，またUの各成分上で$f^{-1}(t)$のσに関する長さはtに依らず一定であることがわかる．特に$f(\Delta)$の測度が零のときは正則二次微分$(-{}^*\sigma+i\sigma)^2$はR上閉じたtrajectoriesをもつことがわかる．

なお，かかる微分σの例としては周期再生微分やHD-調和測度があり，またGreen函数への適用も容易である．

13．林実樹広（北大理）　**弱不変部分空間定理しか成立しないParreau-Widom型Riemann面の例**

2つの数列$0<\delta_n<1, p_n\geqq 1$を固定した上で，長さ$c_n-b_n=\delta_n c_n^{p_n}$の区間$[b_n, c_n]$を考え，$c_n\downarrow 0$とすることにより，互いに交じわらず原点に収束するようにする．もし，$\{p_n\}$が

$$(*)\quad \sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_{n=k_0}^{k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)<\infty \quad \text{for all large } k_0$$

を満していれば，c_nを十分速く0に近づけると

$$R=C^*\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}[b_n, c_n]\quad(C^*=C\cup\{\infty\})$$

はParreau-Widow(PW)型になる．更に，$\{\delta_n\}$が

$$(**)\quad \sum_{1}^{\infty}\delta_n c_n^{p_n-1}<\infty$$

を満していれば，R上では弱不変部分空間定理しか成立しない．ここでいう不変部分空間定理とは単位円上のHardy族に関するBeurlingの不変部分空間定理の一般化である．これを少し弱めた形ではすべてのPW型のRiemann面上で成立することがわかっているが，完全な形での一般化が成立しない例を与える．なお，$p_n=1, \delta_n=\dfrac{1}{n^2}$として$(*)$，$(**)$は満たされる．

14．中井三留（名工大）　**被覆面上のコロナ定理**

$\inf_R\sum_{j=1}^n|f_j|>0$となる任意有限個の$f_1,\cdots,f_m\in AB(R)$に対して常に$\sum_{j=1}^n f_j g_j\equiv 1$となる$g_1,\cdots,g_m\in AB(R)$が求まるとき，リーマン面$R$上**コロナ定理**が成り立つと言う．リーマン面$\tilde{R}$をリーマン面$R$の非有界有限葉の被覆面とするとき，次の結果を得たので報告する：

定理．$\tilde{R}$上コロナ定理が成り立つ為の必要十分条件はR上コロナ定理が成り立つことである．

$AB(\tilde{R})$の極大イデヤル空間は$AB(R)$の極大イデヤル空間を底空間とする自然な“被覆空間”となるが，この被覆の状態をのべる**被覆定理**の系として上の結果をみちびく．

15．中内伸光（阪大理）**自由境界をもつ一般次元Plateau問題について**

GをR^nのcompact abelian group，EをR^nのcompact subsetとし，$H_{m-1}(E:G)$のsubgroupΓを一つ固定する．R^nのcompact subset Xに対して$X\cap E$をXのE上の自由境界$FB(X)$として，inclusionから導かれた$i_*:H_{m-1}(FB(X):G)\to H_{m-1}(X:G)$，$j_*:H_{m-1}(FB(X):G)\to H_{m-1}(E:G)$をとる．このとき$j_*(Ker\ i_*)\supset\Gamma$なら$X$をSurface with free boundary $\supset\Gamma$と呼び，そのようなXの全体を$\mathfrak{S}_{free}(\Gamma)$と書く．また$X$の($m$次元)体積を$Vol^m(X)=\mathscr{H}^m(\overline{X\setminus FB(X)})$（但し$\mathscr{H}^m$：$m$次元Hausdorff measure）で定める．このとき次が成り立つ．

定理：$\mathfrak{S}_{free}(\Gamma)$には最小体積をattainするものが存在する．またそれは，内部で$\mathscr{H}^m\ a.e.$ real analyticであるようにとれる．

これはReifenberg(Acta Math., 104(1960), Ann. of Math.,80(1964))の自由境界値問題への拡張であり，解の正則性は，彼の問題の解の正則性に帰着させることができる．

16．水田義弘（広島大総合科）**調和関数の境界値の存在について**

n次元単位球$\Omega=\{|x|<1\}$の境界点ξに対し，

$$T_\gamma(\xi, a)=\{x\in\Omega\,|\,|x-\xi|^\gamma<a(1-|x|)\}$$

とおく．Ω内の調和関数uが，条件

$$\int_{\Omega}|\mathrm{grad}\, u(x)|^{p}(1-|x|^{2})^{\alpha}dx<\infty$$

を満足しているものとする．ただし，$p>1$, $\alpha<p-1$.

定理. (1) $n-p+\alpha>0$ のとき，各$\gamma>1$ に対し，次の$E_\gamma\subset\partial\Omega$が存在する：(1.1) $H_{\gamma(n-p+\alpha)}(E_\gamma)=0$; (1.2) $^{\forall}\xi\in\partial\Omega-E_\gamma$, $^{\forall}a>1$ に対し，

$$(*)\ \lim_{x\to\xi,\, x\in T_\gamma(\xi,a)} u(x)$$

が存在しかつ有限である．

(2) $n-p+\alpha=0$のとき，次の$E\subset\partial\Omega$が存在する:

(2.1) $B_{n/p,p}(E)=0$;

(2.2) 極限値$(*)$は，$^{\forall}\xi\in\partial\Omega-E$, $^{\forall}\gamma\geqq1$, $^{\forall}a>1$ に対し，存在しかつ有限である．

(3) $n-p+\alpha<0$のとき，$\lim_{x\to\xi,\, x\in\Omega}u(x)$ は $^{\forall}\xi\in\partial\Omega$ で存在しかつ有限である．

17. 大津賀信（学習院大理） **Precise関数のポテンシャル表示について**

$p>1$とする．R^n内のp−precise関数fが，ある除外集合以外の点で，$U^{\circ}_{n-1}(x)=\int|x-y|^{1-n}g(y)\,dy$ ＋定数，$g\in L^p$ ，という形に書けるための必要十分条件を与える．以前には，∞点に延びる$p-a.e.$曲線に沿って$f\to0$という条件下で論じたが，今回はこの条件はいらないことを示す．つぎに，U°_{n-1}の代りにU°_{α}，$0<\alpha<n$，の形に書けるかどうかを調べる．また，いわゆるcanonicalな表示 $\int\mathrm{grad}|x-y|^{2-n}\cdot\mathrm{grad}\, f\,dy$の核$\mathrm{grad}|x-y|^{2-n}$を$\mathrm{grad}|x-y|^{-\alpha}$で置き換えうるかどうかを論ずる．

18. 渡辺ヒサ子（お茶の水女大理） **連続関数核の閉集合への掃散について**

Xは可算基を持つ局所compact Hausdorff空間，GはX上の連続関数核で，どんな空でない開集合もnon-negligibleとする．各点xに対し，$A(x)=\{y;\ ^{\exists}a>0, G\varepsilon_x=aG\varepsilon_y\}$とおく．$G$が優越原理を満足するとき，核$G$について，どんな$\mu\in M_K^+$も任意の閉集合への掃散が可能であるための必要かつ十分条件は，$\check{G}\lambda$が連続などんな$\lambda\in M_K^+$と任意の$x\in X$と任意の$\varepsilon>0$に対し，

$0\leqq\varliminf_{n\to\infty}(\check{G}\sigma_n-\check{G}\tau_n)\leqq\check{G}\lambda\ n.e.\ on X$, $\varliminf_{n\to\infty}(\check{G}\sigma_n(x)-\check{G}\tau_n(x))<\varepsilon$ かつ, $\check{G}\lambda\leqq\varliminf_{n\to\infty}(\check{G}\sigma_n-\check{G}\tau_n)\ n.e.\ on$ $X\setminus(\bigcup_{x\in F}A(x))$を満足する$\sigma_n\in M_K^+$，$\tau_n\in M_K^+(F)$ ($\check{G}\sigma_n$, $\check{G}\tau_n$は局所有界) と，compact 集合Fが存在することである．

また，condenser型の定理が成り立つための必要かつ十分条件も考える．

特 別 講 演

村井隆文（名大理） **The deficiency of entire functions with Fejér gaps**

§1．序

巾級数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$に対して，$S(f)=\{n\geqq1;\ c_n\neq0\}$と定める．今世紀初頭，Hadamard, Fejér, Pólya らは$S(f)$の挙動が$f(z)$の値分布に深く結びついていることを発見し，$S(f)$の情報から$f(z)$の値分布を導く研究を確立した．これを間隙級数論と言う．なお，一般的には，函数の挙動とそのFourier 変換の台との関連の研究(Paley, Wiener)としてとらえられている．本講演では間隙整函数を取り扱う．

整函数$f(z)$が$\sum_{n\in S(f)}1/n<\infty$を満たすとき，$f(z)$はFejér 間隙を持つと言う．Fejér間隙を持つ整函数の研究はMüntz の近似定理，ある種の完備問題と密接な関係にあり，重要な課題である．次の結果は古典的である (Fejér [3], Biernacki[1]):Fejér間隙を持つ整函数は Picard除外値を持たない．この結果を発展させる試みが現在もなされている．本講演の目的は，Nevanlinna理論の立場から，次

の定理を報告することである．

定理． *Fejér*間隙を持つ整函数は*Nevanlinna*除外値を持たない．

この定理はKövariの結果([6], 間隙への附加条件), Fuchsの結果([4], 増大度の制限)を改良する．ところで，Fejér間隙をFabry間隙($\lim_{k\to\infty} k/n_k=0$; $S(f)=(n_k)_{k=1}^{\infty}$)には置き換えられないことがわかる．従って本定理は間隙とNevanlinna除外値に関する精密な情報を与える．

手法の応用として，次の命題を得る：Fejér 間隙を持つ整函数は任意の扇形領域でPicard除外値を持たない．これはBiernacki [3]の結果の改良である．同手法を用いれば，Hayman [5]に添って，扇形領域での除外指数を調べることが出来る．

§2．間隙と除外指数

間隙論はある種の完備問題と結びついている．上記定理を除外指数と完備問題との関連として考察して見よう．正の整数列Sに対して，$D(S)=\inf\{D>0;\ [1^{\cup}(e^{int})_{n\in S}$の張る空間$]\neq L^2(-D,D)\}$と定める．

この量については多くの結果が得られている(Levinson [7])．簡単な例として，$D(pZ^+)=\pi/p$, D(Fejér間隙列)$=0$. さて，整函数$f(z)$に対して，劣位数を$\rho(f)$, $D(f)=D(S(f))$, $\Delta(f)=\sum_{a\in C}\delta(a,f)$とすると次の不等式を得る．(Murai [8])：$\Delta(f)\leqq C_o\rho(f)D(f)$, ここに$C_o$は絶対定数である．Fejér 間隙は$D(\cdot)=0$となる為の良い十分条件である．従って，上記定理は$\rho(\cdot)=\infty$, $D(\cdot)=0$の場合の除外指数に1つの情報を与えている．なお，$f(z)=e^{z^p}$とすると，$\Delta(f)=1$, $\rho(f)=p$, $D(f)=\pi/p$であるから，$C_o=1/\pi$が最良であると予想される．

§3．証明の概略

3．1．Borel型不等式

以下，証明の方針と手法を概説する．$\delta(0,f)=0$を示せばよい．$f(0)=1$と仮定してもよい．さて$\sigma_r=\inf\{D>0;$任意のt_oに対して，$\|f(re^{i\cdot})\|_{L^\infty(t_o-D,t_o+D)}\geqq 1\}$ $(r>0)$と定める．これは上記$D(f)$と対応する量である．この量を使って，特性函数$T(r,f)$と近接函数$m(r,1/f)$を比較して見よう．定義より，$E=\{t\in[0,2\pi);|f(re^{it})|<1\}$は長さ$2\sigma_r$以下の区間の和集合であり，各区間の端点では$|f(re^{i\cdot})|=1$を満たす．そこで$E=\bigcup I$($I$:区間)と表わせば

(1) $$2\pi m(r,1/f)=-\int_E \log|f(re^{it})|dt =-\Sigma\int_I(t-\gamma_I)\frac{\partial}{\partial t}\log|f(re^{it})|dt,$$

ここにγ_IはIの中点である．Poisson-Jensenの公式より，

(2) $$\frac{\partial}{\partial t}\log|f(re^{it})| =(ire^{it}/2\pi)\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{is})|\ \frac{2Re^{is}}{(Re^{is}-re^{it})^2}\ ds$$

$+(|z|<R$内の0点に関する量$)$

$=l(re^{it},R)+l^*(re^{it},R)\quad(R>r).$

Poissonの公式を使って，

(3) $$L(r,R)=\Sigma\int_I(t-\gamma_I)\,l(re^{it},R)dt \leqq\Sigma\sigma_r\int_I|l(re^{it},R)|dt \leqq C_1\sigma_r rR\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(Re^{is})||/|Re^{is}-re^{it}|^2\,ds\,dt \leqq\{C_2\sigma_r rR/(R^2-r^2)\}\,T(R,f).$$

十分大きな正の数Aを取り，$R_r=r+Ar\sigma_r$, $F_A=\{r>0;\ T(R_r,f)\leqq 2T(r,f)\}$とすれば，$L(r,R)\leqq(C_3/A)\,T(r,f)\,(r\in F_A)$. 結局，

(4) $$2\pi m(r,1/f)\leqq L(r,f)+L^*(r,f) \leqq(C_3/A)\,T(r,f)+L^*(r,f)\quad(r\in F_A),$$

ここに$L^*(r,f)=\Sigma\int_I(t-\gamma_I)\,l^*(re^{it},R_r)dt$. 同様の方針で$L^*(r,f)$についても$T(r,f)/A$で評価が出来る．

この様に定理の証明は

(5) $$\mathcal{F}=\{\sigma(r)\in C(0,\infty);\ \lim_{r\to\infty} T(r+r\sigma(r),f)/T(r,f)\leqq 2\}$$ を調べることに関連している．

3．2．間隙函数とWiman-Valiron法 $=\max\{|c_n r$

半径r上の最大絶対値項の値を$\mu(r,f)$と書く．この量の評価に関する手法は総称的にWiman-Valiron法と呼ばれている．この方法を使う為に、間隙函数を$\Omega(r,f)=\int_0^r\omega(x,f)/x\,dx\ (r>0)$と定義する，ここに$\omega(x,f)=[\{n\leqq x;\ n\in S(f)\}$の個数$]$.

次に十分小さな正の数εを取り，概次数u_rを等式$\Omega(u_r, f)=\varepsilon\log\mu(r, f)$で定義する。最後に$\sigma_r^*=\Omega(u_r, f)/u_r$と定める．こうすればWiman-Valiron法を適用することが出来，間隙条件を使って次の不等式を得る：

(6) $\log\mu(r+r\sigma_r^*, f)\leqq 15\log\mu(r, f)$ $(l.f.)$,

ここに$(l.f.)$はこの不等式が$\int_G \frac{1}{1-r}dr<\infty$なる集合$G$を除いて成立することを意味する．前述$\sigma_r$と$\sigma_r^*$が計算上同じ役割を果たすことがわかり，従って定理の証明は$\sigma_r^*\in\mathscr{S}$を示すことに帰着する．これを示すには，(6)より，

(7) $0.9\log\mu(r, f)\leqq T(r, f)\leqq 1.1\log\mu(r, f)$ $(l.f.)$

を証明すればよい．第二の不等式は既に知られているので，第一の不等式を示すことが問題となる．

3.3．対数ポテンシャルの評価

$f(z)$の概次数u_r以下への制限を$P_r(z)$, 残っている部分を$Q_r(z)$と表わすと，

(8) (半径r上の$Q_r(z)$の最大絶対値)$=o(1)$ $(l.f.)$がわかり，示すべき式は，

(9) $T(r, P_r)\geqq 0.99\log\mu(r, P_r)$ $(l.f.)$

と変形される．ところで，多項式$P_r(z)$の項の数は$\omega(u_r, f)$であり，概次数の定義より，

$$\omega(u_r, f)\leqq C_4\Omega(u_r, f)=C_4\varepsilon\log\mu(r, f)$$
$$=C_4\varepsilon\log\mu(r, P_r)\quad(l.f.)$$

$(\omega\leqq C_4\Omega$と仮定してよい．$)$つまり三角多項式$R_r(t)=P_r(re^{it})$の項の数は$\log|$最大絶対値項$|$に比して十分小さいと考えてよい．結局，(8)を示す為には次の補題を示せば十分である．

補題．$R(t)=\sum a_n e^{int}$は項の数がω個であるとする．このとき，

(10) $(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\log^+|R(t)|\,dt\geqq\log^+\max_n|a_n|-C_5\omega$.

以下補題の証明の概略を述べる．証明にはωに関する帰納法を使う．$\omega=1$ならば明らか．$\omega-1$に対しては，(10)が成立すると仮定する．さて上記ω個の項の数を持つ$R(t)$に対して，$a_n=0$ $(n<0)$, $a_0\neq 0$と仮定してよい．$R(t)$の次数をN，最大絶対値項の次数をmとする．(10)式左辺の量を$h(R)$と書くと，示すべき式は$h(R)\geqq\log^+|a_m|-C_5\omega$．必要なら$R(-t)e^{iNt}$を扱えばよいから，$2m\geqq N$としてよい．このとき

$$h(R'/m)=h\left(R\cdot\frac{R'}{NR}\cdot\frac{N}{m}\right)\leqq h(R)+h\left(\frac{R'}{NR}\right)$$
$$+\log 2.$$

よって

(11) $h(R)\geqq h(R'/m)-h\left(\frac{R'}{NR}\right)-1.$

ところで，多項式R'/mの項の数は$\omega-1$であり，$|$最大絶対値項$|\geqq|a_m|$．従って帰納法の仮定から，$h(R'/m)\geqq\log^+|a_m|-C_5(\omega-1)$．これを(11)に代入して

(12) $h(R)\geqq\log^+|a_m|-C_5\omega+\{C_5-1-h(\frac{R'}{NR})\}.$

次に$h(\frac{R'}{NR})$を評価しよう．

$R(t)=\alpha\prod_{j=1}^{N}(e^{it}-r_je^{i\theta_j})$と表わすと$\left|\frac{R'(t)}{NR(t)}\right|=|(1/N)\sum_{j=1}^{N}1/\{1-r_je^{i(\theta_j-t)}\}|$ $(=|\mu(t)|$と書く$)$．よって$h(\frac{R'}{NR})=h(\mu)$．この量の評価については$|1-r_je^{i(\theta_j-t)}|$ $(1\leqq j\leqq N)$を小さくするtが問題となるので，$\mu^*(t)=(1/N)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sin(t-\theta_j)}$を考えて見ると$h(\mu)\leqq h(\mu^*)+C_6$.

ところが$\mu^*(t)=\frac{1}{\sin\cdot}*\{(1/N)\sum_{j=1}^{N}\delta_{\theta_j}\}(t)$ $(\delta_\theta$：θ上の$Dirac$測度)，つまり全質量1の測度のHilbert変換と考えてよいから，Zygmund [12]より$h(\mu^*)\leqq C_7$．故に，あらかじめ$C_5=C_6+C_7+1$としておけば(12)より(10)を得る．

参考文献

[1]：M. Biernacki; Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires, Bull. Int. Acad. Polon. Lett. Sér. A (III), (1927) 542—685.

[2]：M. Biernacki; Sur les fonctions entières à séries lacunaires, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 187 (1928) 477–479.

[3]：L. Fejér; Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen

Gleichung, Math. Annalen,(1908)413—423.

[4]: W. H. J. Fuchs; Nevanlinna theory and gap series, Symposia on theoretical physics and mathematics, V. 9, Plenum Press, New York, 1969.

[5]: W. K. Hayman; Angular value distribution of power series with gaps, Proc. London Math. Soc., (3) 24 (1972) 590—624.

[6]: T. Kövari; On the Borel exceptional volues of lacunary integral functions, J. Analyse Math., 9 (1961/62) 71—109.

[7]: N. Levinson; Gap and density theorems, Amer. Math. Soc. colloq. pub., 1940.

[8]: T. Murai; The deficiency of gap series, (刊行予定).

[9]: T. Murai; 本講演と同題の刊行予定論文.

[10]: T. Murai; 間隙級数の値分布, 数学(1983年1月刊行予定).

[11]: G. Pōlya; Lücken und Singularitäten von Porenzreihen, Math. Z., 29 (1929) 549—640.

[12]: A. Zygmund; Trigonometric series I, Cambridge, 1959.

9月29日

19. 真次康夫（信州大理） **一様Blaschke条件と有界関数の零点集合**

$B_n=B$ を C^n の単位開球($n\geqq 2$), $N(B)$ を B 上のNevanlinna族, $H^p(B)$ を B 上のHardy族とする($0<p\leqq\infty$). $N(B)$ に属する関数の零点集合の特徴づけはHenkin, Skodaによって解決している. $H^p(B)$ については未解決である. Varopoulos[1]は B 内の零点集合が $\bigcup_{0<p<\infty} H^p(B)$ に属する関数の零点集合になる為の十分条件として, 一様Blaschke条件をあげている. この講演ではこれの逆を問題にする. 得られた結果は次の通り:

定理. $n\geqq 2$ ならば, 次のような2条件を満たす B_n 内の零点集合 X が存在する:

(a) X は或る $f\in H^\infty(B_n)$ の零点集合である.

(b) X は一様Blaschke 条件を満たさない.

〔1〕 Varopoulos, N. Th.: Zeros of H^p functions in several complex variables, Pacific J. Math., 88 (1980), 189—246.

20. 真次康夫（信州大理） **Nevanlinna族とHardy族に関するdeterming setsについて**

$H(B)$ を C^n の単位開球 $B=B_n$ 上の正則関数の全体, $X\subset H(B)$, $E\subset B$ とする. $f\in X$, E 上で $f=0$ ならば, B 上で $f\equiv 0$ となるとき, E を X に関するdeterming set と言う. Nevanlinna族 $N(B)$ とHardy族 $H^p(B)$ に関するdeterming sets を問題にする. $N(B)$ の零点集合の特徴づけを与えるHenkin–Skodaの定理により次が得られる:

定理1. $n\geqq 1$ とする. B 内の零点集合 E が $N(B)$ に関する*determing set*になる為の必要十分条件は, E が*Blaschke*条件を満たさないことである.

$H^p(B)$ に関しては事情はもっと複雑である。色々なdeterming sets, non-determing setsが存在する. 例えば,

定理2. $n\geqq 2$ とする. 任意の p, $0<p<\infty$, に対し, 次のような2条件を満たす $H^p(B)$ の零点集合 E が存在する:

(a) E は $\bigcup_{q>p} H^q(B)$ の零点集合ではない.

(b) E は $H^\infty(B)$ に関するdeterming set ではない.

21. 三宮照久（九大理） **ある正則領域のspectrumによる特徴づけ**

次の結果を報告します.

定理. $p: R \to \boldsymbol{C}^n$は不分岐リーマン領域. ΩはRの相対コンパクトな部分領域で, $(\bar{\Omega})^\circ = \Omega$を満たし, Ωの葉は各々, $A(\bar{\Omega}), H^\infty(\Omega)$の関数の*Taylor elements*で分離されるとする. このとき,

(i) $\bar{\Omega}^G = S_{A(\bar{\Omega})} \Rightarrow \Omega = E(A(\bar{\Omega}))$

(ii) $\bar{\Omega}^G = S_{H^\infty(\bar{\Omega})} \Rightarrow \Omega = E(H^\infty(\Omega))$

ここで, $S_{A(\bar{\Omega})}, S_{H^\infty(\Omega)}$は各々$A(\bar{\Omega}), H^\infty(\Omega)$のspectrum. 又, $E(A(\bar{\Omega}))$, $E(H^\infty(\Omega))$は各々Ωの関数族$A(\bar{\Omega})$, $H^\infty(\Omega)$に関する正則包. 又, $^{-G}$は Gelfand 位相による閉包.

(i)から前回(春の学会)での"$A(\bar{\Omega})$が$\bar{\Omega}$の点を分離する."という条件はより本質的な条件におきかえられる.

(ii)から, 多変数の Corona 問題は, 一般にΩが正則領域というだけでは解けない事がわかる.

22. 高瀬正仁(九大理) **解析的形成体の形状について(II)**

Σは空間$\boldsymbol{C}^n(x)$内の解析的形成体とする. 解析的形成体とは, 極大接続された固有面のことである. $\boldsymbol{C}^n(x)$の点Pの近傍でΣが1個の正則函数の零点集合として表わされるとき, ΣはPにおいて代数的であると言うことにして, Σがそこで代数的ではないような点が本質的特異点である. Σの本質的特異点は次の3種の基本型から組み立てられる. Σの本質的特異点Pに対して:1) Type(a). Pが*Type(a)*とは, ΣがPの近傍で可算無限個の局所既約成分に分解して, かつそれらがPに集積していくこと. 2) Type(b). Pが*Type(b)*とは, Σの内点であって, かつΣのPでの可算無限個の局所既約成分が同時にPを通過すること. 3) Type(c). Pが*Type(c)*とは, Pに集積していくようなΣのPでの局所既約成分が存在すること. このような状勢の下で, Σの*Type(a), (b)*の特異点集合の補領域の擬凸性を示す.

23. 高瀬正仁(九大理) **解析的形成体の形状について(III)**

空間$\boldsymbol{C}^n(x)$内の解析的形成体Σについて, その*Type(c)*の本質的特異点の全体をE_cで表わす. このとき, E_cは孤立点をもちえないこと, すなわち, *Type(c)*の本質的特異点は, そのような特異点の全体において孤立しえないことを示す. 証明の根拠は, 内分岐する正則域の(A)-擬凸性である.

この結果は, 前講演の結果と合わせて, 「一般に固有面の本質的特異点は孤立しない」という, Thullenの定理(Thullenによる証明は不十分と思われるが)の成立する背景を明らかにしている.

24. 安達謙三(長崎大教育) **擬凸領域の解析的部分集合からの有界正則関数の接続について**

Henkinは強擬凸領域D内の一般の位置にある部分多様体上の有界正則関数はD上の有界正則関数に拡張されることを示した. この講演ではBeatrous, Jr. が作った積分核とStoutが作った超曲面上の積分公式を用いると擬凸領域D内の超曲面Δで$\partial\Delta$がDの強擬凸境界点に含まれていればΔ上の有界正則関数はD上の有界正則関数へ拡張されることを報告する.

25. 山口博史(滋賀大教育) **擬凸状領域の動きについて**

Δをz平面上の円板, $\boldsymbol{C}^n$をn複素変数$w=(w_1, \cdots, w_n)$で張られる空間とする. $\mathscr{D}$を直積$\Delta \times \boldsymbol{C}^n$上の不分岐な被覆領域で次の2条件を満たすと仮定する.

1° $\mathscr{D}$は$n+1$次元の擬凸状域である;

2° $\mathscr{D}$には線分$\Delta \times \{w=0\}$を含む単葉部分が在る.

各$z \in \Delta$に対して, $\mathscr{D}$のz上のファイバーを$\mathscr{D}(z)$と置くと, 1°, 2°から$\mathscr{D}(z)$は$\boldsymbol{C}^n$上の原点Oを含む

不分岐擬凸状域となる．領域$\mathscr{D}$を変動：$z\to\mathscr{D}(z)$と看做す．扨て，　ポテンシャル論より実　$2n$ 次元の領域として，各$\mathscr{D}(z)$には原点Oに関するグリーン函数$g(z,w)$及びそのロバン定数$\lambda(z)$が一意的に定まる．このとき，次のことが言える：ロバン定数$\lambda(z)$はΔ上の優調和函数である．更に，$n\geqq 2$の時，$\lambda(z)<0$且つ$\log[-\lambda(z)]$は劣調和である．

系． Dを$\boldsymbol{C}^n(n\geqq 2)$上の実解析的境界をもつ不分岐擬凸状域とする．各点$w\in D$に関する$D$のロバン定数を$\lambda_w$と書くと，$\log(-\lambda_w)$に依って$D$に距離が入る．

26．小林英恒（日大理工）　**ポアンカレ留数写像の一応用**

$F(x_0,x_1,x_2)$を既約斉次多項式，Cを$F=0$で定義された曲線とする．$x_0=0$上にCの特異点は無いとする．

$\Omega^2[C]$を$\boldsymbol{P}^2$上有理型2-型式で，Cにそって高々1位の極をもつものの層，Ω^2を正則2-形式の層とする．$\tilde{\Omega}=\Omega^2[C]/\Omega^2$とすると，

$$0\to H^2(\boldsymbol{P}^2,\Omega^2[C])\xrightarrow{\widetilde{P.R.}}H^0(\boldsymbol{P}^2,\tilde{\Omega})\to 0$$

が得られる．他方 $H^0(\boldsymbol{P}^2,\tilde{\Omega})\subset H^0(R,m^1)$とみられる．ここに，$R$は$C$に対応するリーマン面，$m^1$は$R$上の有理型1-形式の層．$F(1,x,y)=f(x,y)$とおくと，$H^0(\boldsymbol{P}^2,\Omega^2[C])$の元は，次数$deg f-3$以下の多項式$h(x,y)$によって

$$\frac{h}{f}dx\wedge dy$$

とかけるが，Cの特異点を$N_1,\cdots,N_S$とし，これがすべて結節点となるとき，

$$H^0(\boldsymbol{P}^2,\Omega^2[C])_{(-N)}=\{\frac{h}{f}dx\wedge dy\,|\,h(N_i)=0\ {}^\forall i\}$$

とすると，$H^0(\boldsymbol{P}^2,\Omega^2[C])_{(-N)}$は，$R$上のアーベル微分全体と一致する。

27．竹腰見昭（京大数理研）　**An upper semi-continuity theorem on a family of weakly 1-complete manifolds**

複素多様体の可微分族$\mathscr{X}\xrightarrow{\pi}M$の$\mathscr{X}$上に実数値$C^\infty$級函数$\Phi$で$\pi|\{\Phi\leqq c\}$は固有で，各$X_t\cap\{\Phi>c_*\}$$(X_t=\pi^{-1}(t),\ t\in M)$上多重劣調和であるものが存在する時，$\mathscr{X}\xrightarrow{\pi}M$を弱一完備多様体の可微分族と呼ぶ。

定理． $\mathscr{X}\xrightarrow{\pi}M$を弱一完備多様体の可微分族，$\mathscr{E}$，$\mathscr{F}\to\mathscr{X}$を$M$上の正則直線束の可微分族とする．各々の$X_t$上への制限を$E_t$, F_tと記す．仮定．Kは$\mathscr{X}$上の閉集合，$\boldsymbol{a}$は$\mathscr{E}$上の計量で$\pi|K$は固有，$\boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{a}|X_t$は$X_t\backslash K_t(K_t=K\cap X_t)$上正とする．**結論．** Ψの非退化値$c>c_*$と$t_0\in M$に対して，正整数m_*とt_0の近傍Vが存在して，1) $\dim_{\boldsymbol{C}}H^p(X_{t,c},\Omega^q(E_t^{\otimes m}\otimes F_t))<+\infty$　2) $\dim_{\boldsymbol{C}}H^p(X_{t,c},\Omega^q(E_t^{\otimes m}\otimes F_t))\leqq\dim_{\boldsymbol{C}}H^p(X_{t_0,c},\Omega^q(E_{t_0}^{\otimes m}\otimes F_{t_0})$ $(t\in V,\ m\geqq m_*,\ X_{t,c}=X_t\cap\{\Phi<c\})$が成立する．

28．大沢健夫（京大数理研）　**Klas Diederich** (Univ. Wuppertal)　**二次元複素多様体に於けるレヴィ問題**

Xを複素多様体，DをXの領域で相対コンパクトでありかつ滑らかな擬凸境界∂Dをもつものとせよ．　H. Grauertによれば次の定理が成り立つ．

定理「∂Dがいたる所強擬凸ならばDは正則凸である。」ここで境界の強擬凸性はGrauertの反例が示す通り crucial な条件である．しかし彼の例だけからは$\dim X=2$の場合，Dの境界が“いたる所”強擬凸という条件がどれだけcrucialかということは分からない．

即ちR. Narasimhanの問題：“或る点$x\in\partial D$で∂Dが強擬凸であるということだけからDの正則凸性が従うか？”は2次元の領域に対しては未解決である．

我々はこの問題に対し完全ではないが一つの肯定的な解答を与える．即ち，

定理. X, Dを最初の通りとせよ. $\dim X=2$ のとき,もしさらに∂D が[1] *real analytic*かつ [2]連結かつ[3]或る点で強擬凸ならばDは [4]正則凸である.

注意：DがStein 多様体の構造を持っていても∂Dが3)をみたすとは限らない. また3)かつ4)ならば2)である.

29. 大柳茂樹（筑波大数学）**弱楕円型ゴレンスタイン特異点の例外集合について**

(V, p)を2次元正規特異点とし, $M\supset A$を, 其の最小特異点除去, 及び其の例外集合とする. 一般に, Aの連結な解析的部分集合A'は, 幾何種数に関して,

$$p_g(V,p)\geqq p_g(V',p')$$

なる特異点(V', p')にblow-downされる.

元の特異点(V, p)と, 上の様に得られる(V', p')達に対して, 次を考える.

$$s(V,p):=p_g(V,p)-\sup p_g(V',p')$$

一般には, $s(V, p)\geqq 0$で, ゴレンスタイン特異点に対しては, $s(V, p)>0$が, 成立する.

今回の講演では, ゴレンスタイン特異点で, 特に弱楕円型のものに対しては, $s(V, p)=1$となる事を報告し, これが, $p_a=1$というトポロジカルな情報によって, 支配されている事について言及する.

特 別 講 演

30. 大沢健夫（京大数理研） **複素多様体のコホモロジー**

Xをn次元複素多様体、$E\to X$を正則ベクトル束, $\mathcal{O}(E)$をEの正則断面の芽の層とする.
$H^i(X,\mathcal{O}(E))$(i次コホモロジー群)についてわかっていることは多いとは言えないが, それらを統一的な見地から見なおしてみた.

1. $X_1\subset X_2$をXの開集合とする.

定義. 対(X_1, X_2)が次数(p, q)に於いて, Eに関して擬ルンゲ対であるとは, X_1上の完備エルミート計量ds_0^2, $E|_{X_1}$のファイバー計量h_0, X_2上の完備エルミート計量の列$\{ds_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, $E|_{X_2}$上のファイバー計量の列$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$で次の三つの条件をみたすものが存在することとする.

(1) $\{ds_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$及びそれらの導関数はX_1のcompact set 上ds_0^2, h_0及びそれらの導関数に一様に収束する.

(2) kによらないcompact set $K\subset X_1$及び定数C_0が存在して, ds_k^2, h_kに関して不等式

$$\|f\|^2\leqq C_0\{\|\bar\partial^*f\|^2+\|\bar\partial f\|^2+\int_K\langle f,f\rangle dv\},$$
$$f\in D_{\bar\partial^*}^{p,q+1}\cap D_{\bar\partial}^{p,q+1}$$

が成立する. 但し, $\|\ \|$はL^2-*norm*, $D_{\bar\partial}^{p,q+1}=\bar\partial$の*domain*$\cap\{(p,q+1)$-*forms*$\}$, 等々.

(3) E値(p, q)-*form* fについて

$$\|f\|_{h_{k+1},ds_{k+1}^2}\gtrsim\|f\|_{h_k,ds_k^2},$$

かつ, kによらない定数C_1があって,

$$\|f|_{X_1}\|_{h_0,ds_0^2}\leqq C_1\|f\|_{h_k,ds_k^2},$$

またE値$(p,q+1)$-*form* gについても

$$\|g|_{X_1}\|_{h_0,ds_0^2}\leqq C_1\|g\|_{h_k,ds_k^2}.$$

定理1. (X_1, X_2)を次数(p, q)におけるEに関する擬ルンゲ対とする. このとき$\|f\|_{h_0,ds_0^2}<\infty$ $\bar\partial f=0$をみたす(p,q)*form* fに対し, 或るk_0に対し$\|\tilde f\|_{h_{k_0},ds_{k_0}^2}<\infty$, $\bar\partial\tilde f=0$をみたす(p,q)-*form*で$\|\tilde f|_{X_1}-f\|<1$なるものが存在する.

定理2. $X\supset D$, $X=\bigcup_{k\geqq 1}X_k$, $X_k\subset\subset X_{k+1}$, $D=\bigcup_{k\geqq 1}D_k$, $D_k\subset\subset D_{k+1}$, $X_1=D_1$, $X_2=D$, (X_k, X_{k+2})及び(D_k, D_{k+1})は次数(p,q), $(p,q+1)$でEに関して擬ルンゲ対であるとする. このとき, 自然な制

限写像

$\rho: H^{q+1}(X, \Omega^p(E)) \to H^{q+1}(D, \Omega^p(E))$は同型写像であり，$\dim H^{q+1}(X, \Omega^p(E)) < \infty$. ただし，$\Omega^p(E)$は$E$値正則$p$形式の芽の層.

これらの定理は初等関数解析により証明される. これによってどんなことがチェックできるかと言えば，

定理3．Xをn次元強q-擬凸(又は強q-擬凹)多様体とし，$E \to X$を正則ベクトル束とする．このとき，

$$\dim H^k(X, E) < \infty, \quad k \geqq q$$

(又は$\dim H^k(X, E) < \infty$, $k \leqq n-q-2$).

これはAndreotti-Grauert及びHörmanderによる結果をAndreotti-Vesentini, (Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds, Inst. Hautes Etudes Sci., Publ. Math., 25(1965), 81-130)の観点から別証明をつけたことになっている．しかし方法上の制約のためXに特異点を許す場合が扱えないことになっている．

2．Xが全増加なC^∞擬凸関数φをもつとき，Xは(或は(X, φ)は)弱1完備多様体であると言う．ただし，全増加とは任意の$c \in R$に対して$\{x \in X \mid \varphi(x) < c\} \subset\subset X$を言う．　弱1完備多様体に関して得られている結果はすべて定理2の条件をチェックすることにより証明される．また，新しい結果としてはたとえば，

定理4．(X, φ)をn次元弱1完備多様体，(B, a)をX上のエルミート直線束とする．aの曲率形式があるX_cのcompact set Kの補集合の各点で$n-q+1$個以上の正固有値をもつとする．このとき，X上の任意の正則ベクトル束Eに対し，整数m_0があって，$m > m_0$なる限り

$$\dim H^p(X_c, E \otimes B^m) < \infty, \quad p \geqq q.$$

これはGriffithsの消滅定理を一般化したものであるが考え方は定理3と同じである．

3．弱1完備多様体(X, φ)がφに関してさらに強q-擬凸になっている場合を考える．このとき定理3より

$$\dim\ H^s(X, \Omega^t) < \infty, \quad s+t \geqq n+q$$

であるが，Xにケーラー計量が存在するときはもっと詳しいことが言える．即ち，

定理5．上の条件の下で

$$\begin{cases} \dim H^r(X, C) = \sum_{s+t=r} \dim H^s(X, \Omega^t) \\ \dim H^s(X, \Omega^t) = \dim H^t(X, \Omega^s) \end{cases}$$

但し，$r, s+t \geqq n+q$.

応用：Xを強擬凸多様体とすると，Xのcompact set Kに対し，

$$H^k(X, \Omega^p) \to H^k(X \backslash K, \Omega^p)$$

は$k+p \leqq n-2$なら全射である(Bochnerの拡張定理の一般化).

定理5の証明は，精神は1，2節と同様であるが何せ詳しいことなので技術的な点が少々厄介である．