に属するリーマン面の境界はそれぞれ特殊の形をもつように思われる．しかし，その一般的性質を明確にすることは当分望めないであろう．そこで，ここではリーマン面を被覆面で表現して，リーマン面の境界の状態を，被覆性の方から考察してみたい．

リーマン面の被覆性については，Gross の性質，Iversen の性質が重要性をもつと考えられる．そこで，Iversen の性質を若干変形した形で述べ，その性質を被覆リーマン面がもつための十分条件を求める問題を考える．

また，リーマン面上の部分領域についても同様の考察をして，この方からも，リーマン面の境界の状態をしらべる．

そして，従来得られている多くの結果との関連について述べる．

さらに，Stoïlow の意味で正規近似可能な被覆リーマン面の若干の性質にも言及したい．

MEMO

東京
K.K. 小葉印刷所

1958
MAY

日本数学会

昭和33年度年会

講演アブストラクト

函数論

時……　5月29日・30日

所……　東京大学理学部

29日	午前8時半～正午	普通講演	1 ～ 13
	午後1時～4時	普通講演	14 ～ 27
30日	午前9時～正午	特別講演	

5 月 29 日

1. 小川庄太郎(奈良学芸大) **Close-to-convex function およびこれに関連する函数について**

Close-to-convex function の定義式 $\Re(f'(z)/\varphi'(z))>0$ ($\varphi(z)$: convex) を $\Re(zf'(z)/\varphi(z))>0$ ($\varphi(z)$: star-like) に書き改めても推察できるように，close-to-convex function は元来は star-like function の拡張であり，したがって星型函数の性質を含む諸性質の存在することを述べ，またこの函数の各種の拡張について考察する．また，上述の拡張の考え方を convex function に適用して，例えば $\Re(1+zf''(z)/\varphi'(z))>0$ ($\varphi(z)$: convex) 等を満足する函数族等も考えられること，およびこれらの函数族の性質について述べる．

2. 梅沢敏夫 (群馬大学芸) **On close-to-convex p-valent functions.**

定理 1. 単位円内における正則函数

$$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+\cdots.$$

が close-to-convex p 葉函数であるために必要十分な条件は，$z=re^{i\theta}$, $r<1$ に対してつぎの二式が成立することである：

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\Re\left[1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]d\theta>-\pi,\quad \theta_1<\theta_2,$$

$$\int_0^{2\pi}\Re\left[1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]d\theta=2\pi p.$$

定理 2. 定理1における函数 $f(z)$ の n 次の部分和は

$$|z|<1-(2p+2)n^{-1}\log n,\qquad n>n_0(p)$$

において，close-to-convex p 葉である．ここに $n_0(p)$ は p だけに依存する定数．

3. 小沢　満 (東工大) **On a coefficient inequality for schlicht functions.**

単位円外正規化単葉函数

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$$

に対する Garabedian-Schiffer の結果

$$|b_3|\leqq\frac{1}{2}+e^{-6}$$

の別証明を与える．

4. 坂口杲一 (奈良学芸大) **一方向に starlike な函数について**

$|z|<1$ において正則で，原点から出る一射線の方向に starlike な k 重対称函数 $f_k(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn+1}z^{kn+1}$ の性質についてのべ，それを利用して，(i) 原点に関して starlike, (ii) 一方向に convex, (iii) typically-real, 一般に (iv) diametral line の方向に starlike な函数 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\,(a_1=1)$ の若干の性質を導く．例えば，

(1) $$\frac{2r(1-r^2)}{(1+r^2)^2}\leqq|f(z)-f(-z)|\leqq\frac{2r(1+r^2)}{(1-r^2)^2},\qquad |z|=r,$$

(2) $$\frac{2(1-6r^2+r^4)}{(1+r^2)^3}\leqq|f'(z)+f'(-z)|\leqq\frac{2(1+6r^2+r^4)}{(1-r^2)^3},$$

(3) $f(z)$ の奇数番目の項からなる級数 $z+a_3z^3+\cdots+a_{2n+1}z^{2n+1}$ は $n\,(0\leqq n\leqq\infty)$ のいかんにかかわらず，$|z|<1/3$ において単葉かつ starlike で，$|z|<1/3\sqrt{3}$ において convex である，

など (いずれも sharp).

5. 坂口杲一 (奈良学芸大) **ある種の単葉写像について**

$f(z)$ を $|z|<1$ で正則とする．十分1に近いすべての $\rho(<1)$ に対して，z が $|z|=\rho$ 上を正の方向に回転するとき，この円周上のすべての点 ζ に対して，$f(z)$ の $f(-\zeta)$ に関する角速度が $z=\zeta$ において正であるような函数 $f(z)$ を，対称点に関して starlike であるということにする．これは，凸型函数および星型奇函数を若干拡張したものに当る．

$f(z)=z+\cdots$ が対称点に関して starlike な単葉写像をなすための完全条件は

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)}>0,\qquad |z|<1.$$

なお，$f(z)$ が単葉であるための十分条件だけならば，上記の不等式で，$f(z)$ の代りに $f(z)$, $zf'(z)$, $z(zf'(z))'$, $\cdots$ のどれを用いてもよい．

6. 安倍　斉(愛媛大工) **A note on symmetrization.**

まず，つぎの補助定理を証明する：$f(z)=a_0+a_pz^p+\cdots$ は $|z|<1$ で正則とする．更に D_f は $f(z)$ による像領域とし D_f に関する a_0 における inner radius を r_0 とすれば，$|a_p|\leqq r_0$. ここで等号は $f(z)=g(z^p)$ の場合に限る．ただし $g(z)$ は $|z|<1$ で $g(0)=a_0$ なる単葉函数とする．

この結果と circular symmetrization (または Steiner symmetrization) と inner radius との関係から Hayman (Symmetrization in the theory of functions,

Tech. Rep. No. 11, 1950) によって得られた結果を拡張する．その一つを述べると：

定理. $w=f(z)=a_0+a_pz^p+\cdots$ の像領域の内部に含まれる円 $|w|=r$ の半径 r の上限を R とすれば，

$$|a_p|\leqq4(|a_0|+R).$$

等号は $f(z)=|a_0|+4(|a_0|+R)z^p/(1-z^p)^2$ によって採られる．

7. 田中忠二(早大理工) **On the mean-convergence of the function of bounded characteristic in the unit circle.**

$f(z)$ が $|z|<1$ において class H_p に属するとする．すなわち

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^pd\theta<+\infty\quad(p>0)$$

とする．このとき，つぎのことが知られている：

$$\lim_{r,\,R\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\theta})-f(re^{i\theta})|^pd\theta=0.$$

いま，$f(z)$ が bounded characteristic のときはいかなる形の平均収束が可能であるかを研究する．

8. 小松勇作 (東工大) **正の実部をもつ円内正則函数について**

W. Rogosinski (Math. Zeitschr. **35** (1932), 93—121) は，単位円において正の実部をもつ正則函数 $\Phi(z)$, $\Phi(0)=1$, による同心円周 $|z|=r<1$ の像の長さに関する歪曲不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi'(re^{i\theta})|\,rd\theta\leqq\frac{4\pi r}{1-r^2}$$

を導いている．ここではこの結果を補足してその簡単な別証を与え，さらにその拡張について述べてみたい．これは方法的には，Rogosinski の論文に記されている G. Szegö の証明を modify したものだが，極値函数を決定するのに有効である．また，円環の場合への一般化もすなおになされるが，それについては次回にあらためて報告したい．

9. 能代　清 (名大理) **Boundary behaviour of meromorphic functions in the unit circle.**

Kurt E. Meier は 1952, 1955 に Comment. Math. Helv. において Lusin-Privaloff-Plessner の定理の重要な拡張を得ている．他方に，F. Bagemihl は Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955) において Curvilinear cluster sets of arbitrary functions について興味ある定理を得ている．Bagemihl と Meier の両定理は形が単に類似しているばかりでなく，Meier の定理は，集積値集合のよく知られた結果と Bagemihl の定理を応用すれば，Plessner の定理のもとの証明方法を用いても証明できる．この方法によれば，Bagemihl-Seidel の Nagoya Math. Journ. **9** (1955) の意味が一層明らかになる．

10. 久保忠雄 (京都府立医大) **円環内正則函数について**

前回の講演において発表した円環内正則函数の値域に関する基本定理(32年度秋季例会，講演アブストラクト参照)の応用として，次の定理について述べる．

定理. 函数 $w=f(z)$ は円環 $Q<|z|<1$ において正則で，この円環を帯状領域 $0<\mathrm{Im}\,w<1$ の部分領域に写像し (必らずしも単葉とは限らぬ)，かつ外円周 $|z|=1$ をこの帯状領域の周 $\mathrm{Im}\,w=0$, $\mathrm{Im}\,w=1$ に写すものとする．このとき，像領域の補集合(帯状領域に関する)の各成分 C_i $(i=1, 2,\cdots)$ について不等式

$$\operatorname*{Osc}_{w\in C_i}(\mathrm{Re}\,w)\leqq\frac{1}{\pi}\lg\frac{1}{k'(Q)}$$

が成立する．ここで $k'(Q)$ は基本周期 2π, $2i\lg(1/Q)$ をもつ sn 函数の補母数である．この結果は精確である．

以前に対称化法を用いて $w=f(z)$ が単葉の場合につきこの定理を証明したが，今回は別の方法でこれを上のように拡張することができた．

11. 柳原二郎(東大理) **有界型函数における Lindelöf の問題**

有界函数における周知の Lindelöf の定理によれば(単位円内で)，或る境界点 $\zeta=e^{i\theta}$ について，

(i) ζ に終る一つの Jordan arc L に沿って $f(z)$ が極限値をもてば，ζ に終る任意の Stolz path に沿って $f(z)$ は同一の極限値をもつ；

(ii) ζ を端点とする境界弧上で $f(z)$ が二つの極限値 a, b をもてば，必らず $a=b$ であって，$f(z)$ は一様に $\lim_{z\to\zeta}f(z)=a$.

ここでは有界型の函数については (i) の形の定理が成り立たないこと，および (ii) の形の定理が(或る程度の制限の下に) 成り立つことを示す．

12. 柳原二郎 (東大理) **有界函数の linear cluster set の nearly-convexity.**

単位円内有界函数の境界上の一点に終る円内 Jordan arcs L_1, L_2, L_3 の上における $f(z)$ の linear cluster sets の大きさの間の関係について，つぎの不等式を証明する：

$$2\lg r_2 \leqq \frac{\theta_3-\theta_2}{\theta_3-\theta_1}\lg r_1+\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_3-\theta_1}\lg r_3.$$

ただし，ζ における接線と L_1, L_2, L_3 がなす角を θ_1, θ_2, θ_3 とし，その上におけ る $f(z)$ の linear cluster sets E_1, E_2, E_3 を囲む非ユークリッド半径を r_1, r_2, r_3 とする．この不等式から，周知の Lindelöf の定理も得られる．ただし，$\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_3$ とする．

13. 柳原二郎（東大理） **或る変分問題について**

平面上〔0, 1〕の区間に等長 $l(3l<1)$ の線分を 3 本おいて，得られる図形の capacity を maximize するにはこれらの線分をどのようにおけばよいか，という問題について論ずる．

14. 田村二郎（東大教養） **球面の有限葉被覆面が極大となるための条件**

球面 S の p 葉被覆面 F において，任意の閉曲線が単葉型多重連結領域を限らないとしておく．F によって p 重に被覆されていないような S 上の点集合を E とするとき，cap. $E=0$ ならば F が極大であることを辻教授が証明した．ここで，条件 cap. $E=0$ を $E\epsilon N_{\mathfrak{D}}$ におきかえることができる．証明には extremal length を用いる．特に E が S の実軸上の linear set である場合には $E\epsilon N_{\mathfrak{D}}$ は必要条件にもなり，E の大きさによって F を分類することができる．

15. 倉持善治郎（北大理） **境界上の平衡問題に就いて**

拙著 mass distribution II をより精密な形でかつ広く拡張したものであって，F を境界上の閉集合するとき F の上には質量分布があって平衡問題が解ける．ただし証明法はユークリッド空間とは異なって continuity principle を避けねばならないのである．結果は，ほぼ同様なものが得られる．あわせて，その他の性質にもふれる．

16. 倉持善治郎（北大理） **On harmonic functions representable by Poisson's integral.**

R を positive boundary のリーマン面とし $\{R_n\}$ をその exhaustion とする．$R-R_0$ に $N(z, p)$ なる Neumann 函数の極限と考えられる函数を定義して，Martin の topology を導入した．$N(z, p)=U(z, p)+V(z, p)$ と分解され，前者は Poisson 積分表示可能，後者は generalized Green 函数となる．これらは高々 p について二級の函数である．さらに generalized Green 函数の性質を求め，一般の $\overline{R}\,(\overline{R}=R+B)$ での優調和函数の積分表示，Poisson 積分表示との関係を求める．

17. 黒田　正（名大理） **Sario の一定理に関する注意**

Sario によるつぎの定理：

“リーマン面 R の近似列 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，$R_{n+1}-\overline{R}_n$ の連結成分の moduli を μ_{ni} $(i=1,\cdots, k_n;\ k_n$ は $R_{n+1}-R_n$ の連結成分の個数) とするとき，

$$(1)\qquad \prod_{n=1}^{\infty}\ \operatorname*{Min}_{1\leq i\leq k_n}\ \mu_{ni}=\infty$$

ならば，R は O_{AD} に属する”は，z 平面の二葉の被覆面であって，O_{AB} に属する，P. J. Myrberg の与えたリーマン面の例には適用できない．その理由と考えられる一注意を述べる．すなわち，条件 (1) から，R は，実は O_{AD} の真部分族でしかも Myrberg の与えたリーマン面を含まない族に属することが示されるのである．

18. 水本久夫（東工大） **有界な解析函数を許容する end について**

ここでは唯一つの ideal boundary element をもつ O_G に属する Riemann 面 R のみを取扱う．R のいかなる end Ω をとっても，Ω 上に定数でない有界な解析函数が存在しないような Riemann 面 R が存在する．そして end Ω の harmonic dimension が無限大ならば，Ω 上に定数でない有界な解析函数は存在しない．しかるに，harmonic dimension が有限でも，定数でない有界な解析函数を許容しない end Ω が存在する．ここでは end Ω の harmonic dimension が有限な場合に，さらにいかなる条件を加えれば，Ω 上に定数でない有界な解析函数が存在するかという問題を取扱い，その解答として Ω の normalized minimal positive harmonic function が満足すべき一つの必要十分条件を導いた．

19. 遠木幸成（阪大理） **Dirichlet principle について**

$u(\mathrm{P})$ を Riemann 面 F 上の閉領域 G で定義された実函数でかつ第一階偏導函数が連続とし，点 P の近傍における局所媒変数を $z(\mathrm{P})=x+iy$ とおくとき，

$$D^*(u, G)=\iint_G \frac{e^{2u}|\operatorname{grad} u|^2}{(1+e^{2u})^2}dxdy$$

を G における $u(\mathrm{P})$ の Dirichlet 球面積分とよぶ．これまで知られている Dirichlet principle において Dirichet 積分の代りに上の Dirichlet 球面積分を用いた定理が成り立つことを述べる．この Dirichlet 球面積分を用いた場合には，極をもつ場合たとえば Green 函数の場合等にも，そのまま定理が成り立つことがわかる．

20. 赤座　暢（金沢大理） **超越的対称リーマン面上の第一種 normal integral の型問題**

L. Myrberg は零境界の特殊超越的超楕円型リーマン面上の実第一種 normal integral を，境界の近傍における状態により，二種の型に分類した (1950)．この問題を超越的対称リーマン面 F へ拡張する．F 上の積分は保型函数によって，z 平面の実軸上で純不連続な群からつくられた -2 次元 Θ 級数の積分に移行する (P. J. Myrberg 1945)．簡単のため群 G の基本領域 B の境界が，実軸に直交する，互いにはなれて，対になって ∞ に両側から収束する円群 $\{C_\nu\}$, $\nu=\pm1, \pm2, \cdots$ からなるとする．この ∞ のみを群の特異点とする Fuchsoid 群 G から Θ 級数の積分をつくれば，

$$\int^z \Theta(z)dz=\sum_G\int^z \mathrm{H}[\mathrm{S}(z)]d\mathrm{S}(z),\quad \left(\mathrm{H}(z)=\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right).$$

$b=\mathrm{S}_\nu(a)$, $\mathrm{S}_\nu(z)\epsilon G$ のとき，直交対称リーマン面 F 上の積分に対応する第一種 normal integral $\{\varphi_\nu(z)\}$, $\nu=1, 2, \cdots$ を得る．$\{\varphi_\nu(z)\}$ の性質，$\varphi_\nu(z)$ の型の分類，および分類の判定条件について述べる．

21. 大津賀　信（広島大理） **ガウス変分について**

Ω を局所コンパクト空間，$\Phi(\mathrm{P, Q})>-\infty$ を $\Omega\times\Omega$ 上の対称な $+\infty$ も許す広義の実数値連続函数とする．K を Ω 内のコンパクト集合とし，ささえが K に含まれる非負 Radon 測度全体を $\mathfrak{M}_K$ としるす．$\mu\epsilon\mathfrak{M}_K$ に対しポテンシャル $U^\mu(\mathrm{P})$ は $\int\Phi(\mathrm{P, Q})\,d\mu(\mathrm{Q})$ により定義される．K 上の有限実数値連続函数 $f(\mathrm{P})$ に対し，つぎのガウス変分の問題を扱かう．

最初に全質量が一定 $x\geqq 0$ な $\mu\epsilon\mathfrak{M}_K$ に対し

$$\int U^\mu(\mathrm{P})\,d\mu(\mathrm{P})-2\int f(\mathrm{P})\,d\mu(\mathrm{P})$$

を最小ならしめる問題を考え，その解 μ_x に対するポテンシャルの性質を調べる．つぎに x が変化したとき，上の最小値およびポテンシャル $U^{\mu_x}(\mathrm{P})$ がどう変るかを論ずる．

22. 辻　正次（立教大理） **On the capacity of a set in the space of regular functions and its applications.**

D を Jordan 領域とし，Ω を D で一様有界な正則函数 $g(z)$ の空間とする．$\overline{D_1}$ を D に含まれる閉 Jordan 領域とする．$\rho(g,\ h)=\mathrm{Max}_{z\epsilon \overline{D}_1}|g(z)-h(z)|$ で metric を導入する．$\mathfrak{M}$ を Ω の閉集合とし，その上に正の質量分布 $d\sigma(g)$ を考え，

$$\sup_{\zeta,\ z\epsilon\overline{D}_1}\int_{\mathfrak{M}}\log\left|\frac{1}{\zeta-g(z)}\right|d\sigma(g)=J(\sigma),\quad \int_{\mathfrak{M}}d\sigma(g)=1,$$

$$\inf_\sigma J(\sigma)=V(\mathfrak{M}),\qquad \Gamma(\mathfrak{M})=e^{-V(\mathfrak{M})}$$

によって $\mathfrak{M}$ の capacity $\Gamma(\mathfrak{M})$ を定義すれば，つぎの定理が得られる．

定理 1. E を capacity 0 の閉集合とし，$w(z)$ は E の近傍 D で一価有理型，E の各点は $w(z)$ の真性特異点とする．$\{g(z)\}$ は D で正則一様有界とすれば，$w(z)-g(z)$ は g の capacity 0 の集合を除外すれば，D で無限個の零点をもつ．

定理 2. $w(z)$ は $|z|<1$ で有理型で $\lim_{r\to1} T(w,\ r)=\infty$ とし，$\{g(z)\}$ は $|z|<R$ $(R>1)$ で正則一様有界とすれば，g の capacity 0 の集合を除外すれば，$w(z)-g(z)$ は $|z|<1$ で無限個の零点をもつ．

定理 3. $w(z)$ は $|z|<1$ で U-class の正則函数とし，$\{g(z)\}$ は $|z|<R$ $(R>1)$ で正則で一様有界で，$|z|<1$ で $|g(z)|<1$ とする．(i) $w(z)$ が $|z|=1$ で正則で $|z|<1$ で n 個の零点をもつものとすれば，すべての $g(z)$ に対して，$w(z)-g(z)$ は $|z|<1$ で n 個の零点をもつ．(ii) もし $w(z)$ が $|z|=1$ の上の点 z_0 を特異点にもてば，$w(z)-g(z)$ は g の capacity 0 の集合を除外すれば，z_0 の任意の近傍 $U(z_0)$ で無限個の零点をもつ．

23. 居駒和雄（山形大文理） **Schwarz-Pfluger の定理について**

$w=f(z)$ は $|z|<1$ を $|w|<1$ に写す Ahlfors-Pfluger の意味の擬等角写像とし，その maximal dilatation を K とする．もし $w=f(z)$ が $f(0)=0$, $\lim_{z\to0}|f(z)|/|z|^{1/K}=c$ (存在) を満足するならば，$c\leqq1$ であって，$c=1$ となるのは $f(z)=e^{i\alpha}z|z|^{1/K-1}$ (α: real) の場合に限る．A. Pfluger は C. R. **231** (1950) で双曲的計量でつくった長さと面積との関係を与え，それから上の結果が導かれるとだけ述べている．ここでは普通の計量で得られる関係からの一つの証明をのべる．なお上記のように c が存在する場合でも $|f(z)|\leqq|z|^{1/K}$ は一般には成立しないことが注目される．

24. 岩橋亮輔（名大理） **可算基を持たない多様体構成について**

可算基をもたない連結な多様体の例は，実解析的 2 次元のときは Prüfer によって，複素解析的 n 次元 $(n\geqq 2)$ のときは E. Calabi-M. Rosenlicht (1953) によって構成されている．これらの例が以下の簡単な原理に基いていることに注意する：$E_t\,(t\epsilon T)$ を位相空間，U_t をそれに含まれる開集合 $(\neq\phi)$ とし，同相写像 φ_{ts}: $U_s\approx U_t$ $(s,\ t\epsilon T)$ が与えられているとする．このとき直和空間 $\sum_{t\epsilon T}E_t$ の (φ_{ts}) で対応する点を同一視して得られる位相空間を E とする．すべての E_t が Hausdorff 空間であっても E は必らずしも Hausdorff 空間にならな

いが，そうなるための必要十分条件は：$\forall s, t$ $\forall p_s \in \partial U_s$, $p_t \in \partial U_t$ $\exists$ 近傍 $N_s(p_s)$, $N_t(p_t) \mid \varphi_{ts}(N_s \cap U_s) \cap N_t = \phi$. T を非可算として，すべての E_t が可微分(実解析的，複素解析的)連結多様体，φ_{ts} が対応する構造の同型写像でこの条件がみたされているとき，E は可算基をもたない(対応する構造の)連結多様体になる．

25. 西野利雄 (奈良女大理) **Analytic variety の正則凸状性について**

浅見君の結果に続いて，analytic variety V は，もしそれが，つぎのような性質をもつ positive definite Levi 函数 φ の存在をゆるすならば，正則凸状になり，したがって Stein variety になることを示す．その性質とは，任意の実数 α に対して $\varphi \leqq \alpha$ をみたす V の点集合が，compact になることである．証明の要点は，岡先生が Mémoire VI で示された積分方程式をつかっての正則凸状域の接合である．

26. 西野利雄 (奈良女大理) **Stein variety の covering space について**

先に得た結果をつかって，Stein variety の covering space は Stein veriety になることを示す．証明は，岡先生が Mémoire IX において，内分岐しない擬凸状域についてなされたのと同様な方法で covering space の上に先にあげたような性質をもつ positive definite Levi 函数の存在を示すことである．ただこのときは分岐面が入ってくるが，そこでは別に函数をつくってはり合わすことをする．

27. 尾崎繁雄 (教大理)・**加藤定雄** (教大理) **複素ベクトルの最小値問題について**

多変数函数で W. T. Martin の扱っている最小値問題の函数ベクトルの場合への類似を試み，あわせて或る Hilbert 空間における完全系として核函数の数列をとりうることを示す．

5 月 30 日

特 別 講 演

洪 姙植 (東大理) **固有値及び固有函数の漸近性質**

今世紀の初め頃から始まった微分方程式の固有値問題の組織的研究は，近時新しい方法の導入によって著しい発展を遂げつつある．その概要を時間的な順序を追つて紹介しようとするのが，この報告の目的である．

振動の現象に関する微分方程式 $\Delta u + \lambda u = 0$ $(\lambda > 0)$ およびそれと類似な微分方程式の固有値の漸近分布は，古典量子論において空洞輻射のエネルギー分布に関連してその重要さが再認識され，Weyl によって，ついで Courant によって初めて組織的に研究されるに到った．Weyl および Courant の方法では，2 次元においては長方形，3 次元においては直方体に対する固有値の分布が基本になっている．これを用いて Weyl は積分方程式の見地から，Courant は変分法の見地から，それぞれ有界な任意の領域に対する固有値の漸近分布を得た．すなわち，方程式 $\Delta u + \lambda u = 0$ の種々な斉次境界条件での固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \cdots$ とすると，2 次元および 3 次元ではそれぞれ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_m}{n} = \frac{4\pi}{A}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n{}^{3/2}}{n} = \frac{6\pi^2}{V}$$

となる．ここに A, V はそれぞれ基礎領域の面積，体積を表わす．特に，固有値の漸近分布は与えられた領域の大きさのみに関係し，形状には関係しない．弾性板に関する問題では，長方形または直方体に対する固有値が膜の場合のように explicitly に計算できない．そこで，Courant は円板の固有値が計算できることに着目し，これを基礎にして任意の有界領域につき clamped な条件 $u = \partial u/\partial n = 0$ での固有値の漸近分布を得た．すなわち，板の振動の方程式 $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$ に対してこの境界条件 $u = \partial u/\partial n = 0$ の下での固有値を $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$ とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n^2} = \left(\frac{4\pi}{A}\right)^2$$

となる．ここに A は基礎領域の面積を表わす．しかしながら，Courant の方法はそのままでは clamped な場合にのみ適用されるように見える．

他方，固有函数についても関心が向けられていた．それに関する最初の結果として，Carleman によってつぎのことが得られた：$\Delta u + \lambda u = 0$ に対して境界条件 $u = 0$ の下で固有値を $\lambda_1 < \lambda_2 \leqq \cdots$ とし，対応する正規直交の固有函数系を $\varphi_1(\mathrm{P})$, $\varphi_2(\mathrm{P})$, $\cdots$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(\mathrm{P})^2 = \frac{1}{A}$$

となる．ここに A は基礎領域の面積を表わす．特に，この左辺の極限は領域の形状にも個々の点にも無関係である．そして，この方法によって固有値の漸近分布に対する Weyl, Courant の法則の一つの新しい証明が得られたのである．この Carlemanの 方法は Weyl, Courant のとは全然異なっている．ここでは，固有値および固有函数の漸近分布の問題が Green 函数の性状の研究に帰着され，更に Tauberian theorem を用いて最終の結論に達するのである．

Pleizel が Carlemen の 2 次元での結果を同じ idea により更に 3 次元へ拡張し，その他数々の結果を出している．それらのうちで特筆すべきは，clamped な弾性板に対する Courant の法則が他の型の境界条件に対してもそのまま成り立つことを証明したことである．最近はこの Carleman の idea を位相解析的方法と結びつけて更に発展させ，極めて一般的に任意次元で任意な階数の楕円型微分方程式に対する固有値および固有函数の漸近分布が広範囲に研究されている．特にそれについては Gårding, Browder, Ehrling などの研究を挙げることができよう．

文　献

[1] T. Carleman, Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Skand. Matem. Kongress (1934).

[2] R. Courant u. D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I. Berlin, 1937.

[3] R. Courant, Über die Schwingungen eingespannter Platten. Math. Zeits. **15** (1922), 195—200.

[4] Å. Pleizel, Propriétés asymptotique des fonctions et valeurs propres de certain problèmes de vibration. Arkiv för Math. Astr. och Fysik **27** A, No. 13 (1940), 1—100.

[5] ——, Asymptotic relation for the eigen functions of certain boundary problems of polar type. Amer. Journ. Math. **70** (1948), 892—907.

[6] ——, On the eigenvalues and eigenfunctions of elastic plates. Communications on Pure and Applied Math., Vol. III, No. 1 (1950), 1—10.

[7] H. Weyl, Über die asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte. Gött. Nach. (1911), 110—117.

[8] ——, Ramifications, Old and New of the eigenvalue problem. Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 115—139.

[9] L. Gårding, On the asymptotic distributions of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators. Math. Scand. **1** (1953), 237—255.

[10] G. Ehrling, On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators. Math. Scand. **2** (1954), 267—285.

[11] F. E. Browder, The Asymptotic distribution of eigenfunctions and eigenvalues for semi-elliptic differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. **43** (1957), 270—273.

[12] Proceedings of the Symposium. Spectral theory and differential problems. Oklahoma, 1953.

[13] Tolfte Skandinaviska Mathematikerkongressen I, Lund (1953).

二宮信幸 (阪市大理工) **対称核ポテンシャルの理論**

ポテンシャル論は空間内で与えられた質量分布 μ に対し積分で定義される函数

$$U^\mu(\mathrm{P}) = \int \overline{\mathrm{PQ}}^{-1} d\mu(\mathrm{Q})$$

の研究であり，この函数はいうまでもなく物理学に源を発するものである．数学においては，函数論への応用のためにポテンシャル論が重要視されてきた．最近のポテンシャル論の一つの傾向は核を一般化することである．これについては戦後いくらかの人によって研究されているが，講演者は最近核が対称である場合に，ポテンシャル論の基本的問題である平衡，掃散の問題等について統一的に研究した．函数 $K(x, y)$ は二点 x, y について正の連続函数で，$x \neq y$ では有限かつ対称とする．空間内で与えられた質量分布 μ に対し積分で定義される函数

$$U^\mu(x) = \int K(x, y)\, d\mu(y)$$

を μ のポテンシャルと呼び，また重積分

$$I(\mu) = \iint K(x, y)\, d\mu(y)\, d\mu(x)$$

を μ のエネルギーと呼ぶ．エネルギーが常に $\geqq 0$ であること，すなわち核 K が正型であることが，従来のポテンシャル論で大変興味があり，また重要な役割を演ずるものであるから，われわれの研究は一般の対称な核の場合におけるエネルギーの研究から出発する．そのために，二つの互に共通点のないボレル集合 E_1, E_2 の上でそれぞれ正の質量分布 μ, ν が与えられたとき，それらに対して

$$G(\mu, \nu) = \frac{I(\mu) \times I(\nu)}{[\int U^\mu d\nu]^2}$$

とおく．ν を固定するとき，これは Gauss 変動式を書き直したものにすぎないが，この $G(\mu, \nu)$ は対称核ポテンシャルの研究において極めて有効な手段となることを強調したい．この値が E_1 と F_2 の上でそれぞれ与えられた二つの正の質量分布の組のうちで最小になるような μ と ν は極めて特徴的な性質をもつ．この $G(\mu, \nu)$ から出発して，核 K が正型であるということはポテンシャルがある種の最大値の原理をみたすことと同等であり，したがって最大値の第一または第二原理をみたす核はすべて正型であることがわかる．また平衡の問題が解けるためには，核 K が最大値の第一原理をみたすことが必要かつ十分であり，掃散の問題が解けるためには，核 K が最大値の第二原理をみたすことが必要かつ十分であることを知る．更に二つの最大値の原理の関係およびポテンシャルを与える質量分布の一意性についても論ずることができる．[cf. N. Ninomiya, Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique. 大阪市立大学理工学部紀要，第八巻第二号.]

MEMO

東京
K.K. 小薬印刷所

1958
OCTOBER

日本数学会

昭和33年度秋季例会

講演アブストラクト

函数論

時…… 10 月 25 日・26 日

所…… 京都大学理学部

---

25 日	午前 9 時 ～ 正 午	普通講演	**1 ～ 12**
26 日	午前 9 時 ～ 正 午	普通講演	**13 ～ 23**
	午後 1 時 ～ 2 時	普通講演	**24 ～ 28**
	午後 2 時 ～ 3 時	特別講演	