日本数学会

昭和31年度年会

講演アブストラクト

函　数　論

(5月19日・20日)

田中忠二君（早大理工）　**On the class H_p of functions analytic in the unit-circle.**

$f(z)$ が $|z|<1$ に於て正則で，且つ平均値 $m_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta$ $(p>0,\ 0\leqq r<1)$ が有界なる時，$f(z)$ は class H_p に属すると云う．本講演に於てはこの class H_p に関する次の三定理を証明する：

定理 1. $f(z)$ が H_p に属するとすれば，殆んどいたる処の θ に対して，次の性質を具備する単純閉 Jordan 曲線 C_θ が存在する．

(i) $z=e^{i\theta}$ 以外は単位円内に存在し且つ $z=e^{i\theta}$ に於て単位円と共通接線を有する．

(ii) $\lim\limits_{\left(\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in D_\theta}\right.} f(z)=f(e^{i\theta})$ が存在する．ここに D_θ は C_θ に依り囲まれた領域とする．

定理 2. $f(z)$ が H_p に属するとすれば，次式が成立する：

$$\overline{\lim_{\left(\substack{z\to e^{i\theta}\\ |z|<1}\right.}}|f(z)|=\overline{\lim_{\varphi\to\theta}}|f(e^{i\varphi})|.$$

定理 3. $f(z)$ が H_p に属するとすれば，若し

$$\lim_{\varphi\to\theta+0}f(e^{i\varphi})=\alpha,\qquad \lim_{\varphi\to\theta-0}f(e^{i\varphi})=\beta$$

が存在するとすれば，必然的に $\alpha=\beta$ で，z が円内より $e^{i\theta}$ に近づく時 $f(z)$ は一様に α に近づく．

細井　淙君（教育大理）　**On the proper discontinuity of a linear group which is combined with two elliptic groups.**

$$G_1:\ z'=K_1^{n_1}z,\quad K_1=e^{\frac{2\pi}{l}i},\ n_1=0,1,2,\cdots,l-1;$$

$$G_2:\ \frac{z'-\xi_1}{z'-\xi_2}=K_2^{n_2}\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2},\ K_2=e^{\frac{2\pi}{m}i},\ n_2=0,1,2,\cdots,m-1;\ \xi_1,\ \xi_2 \text{ は } G_2 \text{ の不動点},$$

$\{G_1,\ G_2\}=G$ とする．次の定理を証明するのが目的である．

定理．$\xi_1/\xi_2=M$ $(M\neq 1)$ を実数と仮定する．

$$M>1 \text{ で，} l\leqq\frac{\pi}{\alpha},\ m\leqq\frac{\pi}{2\beta-\frac{\pi}{2}}\left(\beta>\frac{\pi}{4}\right)\cdots(\text{A})$$

又は

$$0<M<1 \text{ で，} l\leqq\frac{\pi}{\alpha},\ m\leqq\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}-2\beta}\left(\beta<\frac{\pi}{4}\right)\cdots(\text{B})$$

ならば G は純不連続である．但，$\beta=\tan^{-1}\sqrt{M}$，α は原点から G_2 の最大な isometric circle に引いた接線と共通弦との交角とする．

［証明の概略］．G_2 を G_1 の各元で変換した l 個の群の結合群を Γ とすると，(A) 又は (B) から Γ が純不連続となることを幾何学的に証明出来る．G のすべての元は ΓG_1 の形だから上記の定理が証明出来る．この定理は微分方程式のモノドロミー群の結合に応用出来るものである．

居駒和雄君（山形大文理）　**領域定理について**

$|z|<R$ で Grötzsch–角谷の意味で pseudo-analytic で拡大率が有界 $(\leqq K)$ 且 $\lim\limits_{z\to 0}|f(z)-f(0)|/|z|^{\frac{1}{K}}$ が存在する様な函数を pseudo-analytic $\{K\}$ であるという．1952 年祐乗坊，辻各氏は Ahlfors の領域定理を一般化して「$w=f(z)$ は $|z|<R$ で meromorphic で，F を $w=f(z)$ によつて w-sphere 上に作られる Riemann 面とする．$D_1, D_2, \cdots, D_q$ $(q\geqq 3)$ を w-sphere 上の q ケの互に素な単連結閉領域とし，D_i $(i=1,2,\cdots,q)$ 上にある F の凡べての単連結な島の重複度は少くとも m_i

(m_i は正整数又は ∞) 以上とする．然る時，もし $\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)>2$ ならば，k を $D_1, D_2, \cdots, D_q$ にのみ依存する一定数として $R<k(1+|f(0)|^2)/|f'(0)|$ が成立つ.」を証明した．そこで今この定理の meromorphic を pseudo-meromorphic $\{K\}$ でおきかえ，その他は上定理と同条件の下で祐乗坊氏の推論に倣つて進む時は，結論として，C を $D_1, D_2, \cdots, D_q$ にのみ依存する一定数として $R<\left\{C(1+|f(0)|^2)\Big/\lim_{z\to 0}\left\{\frac{|f(z)-f(0)|}{|z|^{\frac{1}{K}}}\right\}^K\right.$ がえられることを一つの補題(Cauchy の積分公式の pseudo-regular な函数の場合への一つの analogy) を設けて証明する．

佐藤栄義君（鳥取大学芸）　**単位円内正則函数の単葉なるための或る十分条件について**

1. $w(z)=z+\cdots$ が $|z|<1$ で正則なるとき $|w''(z)|<1$ なるとき $w(z)$ は $|z|<1$ で単葉．（数学研究録第二巻 6, 7 号教育大学.）この結果に関連して次の結果も成立する．

定理 1. $w(z)=z+\cdots$ が $|z|<1$ で正則，(i) $|w''|<1$, (ii) $|w''|<\frac{2}{3}$, (iii) $\int_0^{2\pi}|w''(e^{i\theta})|d\theta<1$ なるとき，$w(z)$ は $|z|<1$ でそれぞれ凸型単葉，一方向に凸型，星型単葉である．

2. $p(z)$ が $|z|<1$ で正則，$\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|d\theta<\infty$ なるとき，$w''+pw=0$ の解は $|z|<1$ で有限個の零点をもつ．(Amer. J. Math. 1950, No. 3, 689–697.) この結果に関連して，次の結果が成立する．

定理 2. $p(z)$ が $|z|<1$ で正則で $w''+pw=0$ の解を $w(z)=z+a_2z^2+\cdots$ とすれば (i) $\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|d\theta<2c_1$, c_1 は方程式 $xe^x=1$ の根，(ii) $\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|d\theta<2c_2$, c_2 は方程式 $xe^x=\frac{1}{2}$ の根，(iii) $|p(z)|<c_3$, c_3 は $xe^x=\frac{1}{2}$ の根，(iv) $|p(z)|<c_4$, c_4 は $xe^x=\frac{2}{3}$ の根，の各に応じて $w(z)$ は夫々 $|z|<1$ において (i) 単葉，(ii) 星型単葉，(iii) 凸型単葉，(iv) 一方向に凸型である．

梯　鉄次郎君（近畿大理工）　**正則函数の展開係数について**

単位円内に於て正則単葉な函数

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$$

に於て，適当な角 α が存在して

$$\Phi(r,\ \theta)\equiv\frac{f(re^{i(\alpha+\theta)})-f(re^{i(\alpha-\theta)})}{re^{i(\alpha+\theta)}-re^{i(\alpha-\theta)}},\quad r\to 1,$$

がすべての θ について同一象限内に有る時，$|a_n|\leqq n$ なる事を示す．

古関健一君（金沢大理）　**単葉函数の係数について**

円内正則単葉函数の係数を論ずるには截線写像を考えれば充分である．

$$h(z)=e^{-t_0}(z+c_1z^2+c_2z^3+c_3z^4+\cdots) \tag{1}$$

を截線写像とする．この時 $h(z,t)=e^{-(t_0-t)}(z+c_1(t)z^2+\cdots)$ は

$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial h(z,t)}{\partial z}z\frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} \tag{2}$$

なる微分方程式を満足する．$h(z,t_0)=z$, $h(z,0)=h(z)$.

(2) より

$$c_n'(t)=nc_n(t)+2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)c_\mu(t)\kappa(t)^{n-\mu}\ (n\geqq 1). \tag{3}$$

$\kappa(t)=e^{i\theta(t)}$ とし，$\theta(t)$ の振幅 UB$|\theta(t_1)-\theta(t_2)|\leqq\frac{\pi}{4}$ なる時 $|c_3(t)|\leqq 4$ なることを証明する．

$\Re c_3(t)\leqq 4$ なることる証明すれば充分である．$\Re c_3(t)$ は $0\leqq t\leqq t_0$ の何処かで最大値をとるから，その点を $0<\tau_1<t_0$ とすれば，(3) より

$$\Re\frac{dc_3}{dt}=0,\quad t=\tau_1$$ が成立する．故に

$$\Re c_3(t)=-\frac{2}{3}\Re\{\kappa(t)^3+2c_1(t)\kappa(t)^2+3c_2(t)\kappa(t)\} \tag{4}$$

となる．又 $t=0$ で最大値をとるとすれば $\Re\frac{dc_3}{dt}\leqq 0$, $t=0$ が成立するから

$$\Re c_3(t)\leqq-\frac{2}{3}\Re\{\kappa(t)^3+2c_1(t)\kappa(t)^2+3c_2(t)\kappa(t)\}$$
$$\leqq\frac{2}{3}|\kappa(t)^2+2c_1(t)\kappa(t)+3c_2(t)\}. \tag{5}$$

(4), (5) より

$$\frac{2}{3}|\kappa(t)^2+2c_1(t)\kappa(t)+3c_2(t)|\leqq 4$$

を証明すればよい．(同様なことは $|c_2(t)|\leqq 3$ を証明するときにも考えられこの方が便利である.)

$|\kappa(t)^2+2c_1(t)\kappa(t)+3c_2(t)|$ は連続函数故，$t=\tau_1$ に於いて最大値をとる．$\kappa(\tau_1)=-1$ として一般性を失わぬ．(この時の変換で $\kappa(t)$ の振幅は不変である.) 一方

$$c_1(t)=-2e^t\int_t^{t_0}e^{-\tau}\kappa(\tau)d\tau,$$

$$\Re c_1(t)=-2e^t\int_t^{t_0}e^{-\tau}\cos\theta(\tau)d\tau\geqq 0 \tag{6}$$

$$\Re c_2(t)=\Re c_1^2(t)-2e^{2t}\int_t^{t_0}e^{-2\tau}\cos\theta(\tau)d\tau,$$

$$\int_t^{t_0}e^{-2\tau}\cos\theta(\tau)d\tau\geqq 0 \tag{7}$$

であるから

$$\Re c_1^2(t)-\Re c_2(t)\geqq 0. \tag{8}$$

(6), (7) を用いて (4) を導く．

小川庄太郎君（奈良学芸大）　**星型函数の一般化について**

単葉星型函数の条件 ($W=f(z)$ とする)

$$\Re\left(z\frac{W'}{W}\right)>0$$

を拡張一般化して，$W=f(z)$ が，$w=p(z)$ ($z=p^{-1}(w)\equiv q(w)$ とおく) に関して星型であることを定義し，その条件として

$$\Re\left(z\frac{W'}{W}\cdot W\frac{q'(W)}{q(W)}\right)>0$$

$$\left(\text{或は } \Re z\left(W'\cdot\frac{q'(W)}{q(W)}\right)>0\right)$$

を導き，この定義の特殊な場合として，例えば，

(1) $\Re\left(z\frac{W'}{W}\right)>0$……starlike,

(2) $\Re\left(e^{i\alpha}z\frac{W'}{W}\right)>0$……spirallike,

等が得られること．その他，種々の場合についての結果を導いた．

坂口杲一君（奈良学芸大）　**単位円周上で正則な Laurent 級数について**

Laurent 級数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

を $|z|=1$ 上で正則とすれば，これの係数を用いて作られる Taylor 級数

$$g(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\bar{a}_{-n})z^n,$$

$$h(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\bar{a}_{-n})z^n$$

は $|z|\leqq 1$ で正則であつて，もとの函数 $f(z)$ との間に

$$\Re g(z)=\Re f(z),\quad \Im f(z)=\Im h(z)\quad \text{for } |z|=1$$

なる関係がある．この関係を用いて，

(1) $f(z)$ が $|z|=1$ 上で単葉である ($f(z)$ による $|z|=1$ の像曲線が単純閉曲線である) ための十分条件を求める．

(2) $f(z)$ が $|z|=1$ 上で，一方向に order p であるときの係数評価 (sharp) 並びに，$|z|=1$ と $|z|=\rho(<1)$ の両者の上で一方向に order p であるときの係数評価 (sharp かどうかは不明) を求める．

斎之内義一君（大阪府大工）　**単葉函数の逆函数について**

G を単連結領域，$z=0\in G$ 且原点から G の境界までの最短距離を P, 原点を中心として半径 R の円周と G との交りを S_R, 原点に log. pole を持つた Green 函数を $g(z,0;G)$ とする．次の方程式が成立する．

$$\int_{S_{R_1}}g(z,0;G)\,d\theta-\int_{S_{R_2}}g(z,0;G)\,d\theta\leqq 2\pi\log\frac{R_2}{R_1}$$
$$-C(P,R_1,R_2)\qquad (R_2\geqq R_1\geqq P).$$

ここに

$$C(P,R_1,R_2)=\frac{4}{R_2}\left\{R_2\sin^{-1}\frac{R_2-P}{R_2+P}-R_1\sin^{-1}\frac{R_1-P}{R_1+P}\right.$$
$$\left.+2P\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{R_2}{P}}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{R_1}{P}}\right)-2P(\sqrt{R_2}-\sqrt{R_1})\right\}.$$

この式から G を単位円に写像する函数 $w=f(z)$, $f(0)=0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S_R}\log|f(z)|d\theta\leqq\log(R|f'(0)|)-\frac{2}{R\pi}\left\{R\sin^{-1}\frac{R-P}{R+P}\right.$$
$$\left.+2P\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{R}{P}}-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{P}(\sqrt{R}-\sqrt{p})\right\}.$$

特に，G の境界が $1-\varepsilon\leqq|z|\leqq 1$ ($\varepsilon>0$) の中にある時 (原点からの最短距離が $1-\varepsilon$ とする)，$f'(0)>0$ として

$$f'(0)\geqq\exp\left[\frac{2}{\pi}\left\{\sin^{-1}\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}+2(1-\varepsilon)\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{1-\varepsilon}(1-\sqrt{1-\varepsilon})\right\}\right]$$

を得る．この式を使つて，略々円形の領域の写像に関する Ostrowski 及び Landau の定理がそれぞれ sharp なものになる．

久保忠雄君（京都府医大）　**Löwner 型の微分方程式について**

Löwner の微分方程式

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=-f(z,t)p(f,t)$$

において，

$$p(f,t)=1+\alpha_1(t)f+\alpha_2(t)f^2+\cdots$$

は単位円 $|f|<1$ 内で f に関し正則で，$\mathrm{Re}\,p(f,t)>0$ でかつ実の parameter t ($0\leqq t<\infty$) の連続函数とする．このとき，原点 $z=0$ の近傍で，

$$f(z,t)=e^{-t}z+\beta_2(t)z^2+\cdots$$

なる形でかつ初期条件 $f(z,0)=z$ を満足するところの上の微分方程式の解の単位円 $|z|<1$ 内における正則性および単葉性につき述べる．方法としては，逐次近似法および単位円内で実部正なる正則函数に関する定理を用いる．

梅沢敏夫君（群馬大学芸）　**A class of univalent functions.**

$|z|<r$ において k 重対称正則な函数 $F(z)=z+a_2z^{k+1}+a_3z^{2k+1}+a_nz^{(n-1)k+1}+\cdots$ に対して，$|z|<r$ における k 重対称凸型函数 $\phi(z)$ が存在して，$\Re[F'(z)/\phi'(z)]>0$, $|z|<r$, なるとき，$|z|<r$ において $F(z)\in(C_k)$ とよぶことにする．函数族 (C_k) が k 重対称星型函数族およびその他の函数族を含むことは $k=1$ の場合 (Kaplan, Michigan Math. J. 1952) と同様に証明される．$F(z)\in(C_k)$ ならば $F(z)$ は単葉であつて，$|a_n|\leqq\frac{1}{(n-1)!}\frac{2}{k}$

$\cdot\left(\frac{2}{k}+1\right)\left(\frac{2}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{2}{k}+n-2\right)$ が Carathéodory の定理と $\phi(z)$ の係数定理を用いて証明される．(M. Reade, C. R. Acad. Sci. Paris 1954 の拡張である.) この結果を利用して次の定理を得る: $F(z)\in(C_k)$, $|z|<1$ ならば, $F(z)$ の $(n-1)k+1$ 次の部分和 $G(z)$ は $|z|<\left\{1-\left(2+\frac{2}{k}\right)\frac{\log n}{n}\right\}^{\frac{1}{k}}$ において $G(z)\in(C_k)$ である．

ただし $n\geqq\exp[k\alpha/2(k+1)]$, α は $\alpha^{\frac{2}{k}+2}=2^{\frac{2}{k}+1}(4+k\alpha)$ の最小正根である．

また $n>3$ ならば $|z|<\sqrt[k]{k/2(k+1)}$ で $G(z)\in(Ck)$. $k\leqq2$ ならば n の如何にかかわらず上記円内で $G(z)\in(C_k)$.

小松勇作君（東工大） **A coefficient problem for functions univalent in an annulus.**

$1<|z|<R$ において正則単葉な函数 $w=F(z)$ によつて，この同心円環が $|z|=1$ に由来する $|w|=1$ を内側の境界成分とする単位円外部の一つの部分領域へ写像されているとする．かような $F(z)$ の全体から成る函数族を $\mathfrak{F}_R$ で表わす．各 $F(z)\in\mathfrak{F}_R$ は，その境界性状に基いて，$R^{-1}<|z|<R$ で正則単葉な函数にまで接続される．その Laurent 展開を $F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n\ (R^{-1}<|z|<R)$ とする．単位円内単葉函数の係数問題に関しては，Bieberbach の予想をめぐり多くの研究がなされてきている．ここでは，それに対応する $\mathfrak{F}_R$ の係数問題について考えるが，負添字の項の存在によつて，事情は一層厄介になる．$|z|=1$ が $|w|=1$ に対応することから，$\sum|c_n|^2=1$ である．従つて特に，円内の場合（予想）と異なり，凡ての n に共通な極値函数は存在し得ない．円内の場合の Littlewood の結果に対応し，それを極限の形として含む結果並びに関連する若干の評価が導かれる．

小川庄太郎君（奈良学芸大） **p 葉函数の二つの部分族について**

$f(z)=z^p+a_{p+q}z^{p+q}+a_{p+q+1}z^{p+q+1}+\cdots(a_{p+q}\neq0)$ なる展開をもつ函数 $f(z)$ が

$$\Re\left(1+z\frac{f''}{f'}\right)>0,\ \text{または,}\ \Re\left(z\frac{f'}{f}\right)>0$$

を満足するとき，かかる二つの部分族について，歪曲定理，例えば，

$$\int_0^r\frac{pt^{p-1}dt}{(1+t^q)^{2p/q}}\leqq|f(z)|\leqq\int_0^r\frac{pt^{p-1}dt}{(1-t^q)^{2p/q}}\quad(|z|=r),$$

廻転定理，例えば，

$$\left|\arg\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right|\leqq\frac{2p}{q}\sin^{-1}r^q\qquad(|z|=r)$$

等の genau な評価を導いた．その他，

$\left|\frac{f'(z)}{r^{p-1}}\right|^{\frac{q}{2p}}(1+r^q)\quad(z=re^{i\theta})$ が super-harmonic であること等の若干の結果を導いた．

坂口杲一君（奈良学芸大） **多葉函数の或る種の classes について**

$f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_nz^n$ を $|z|<1$ で正則で，原点を通る一直線の方向，及び原点から出る半直線の方向に p 次星型なときは，それぞれ sharp な係数評価

$$f(z)\ll\frac{z^p(1+z)}{(1-z)^{2p+1}},\quad f(z)\ll\frac{z^p(1+z)^2}{(1-z)^{2p+2}}$$

が成立する．この既知の係数定理を用いて，変換

$$G(\zeta)=f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right)\left(\frac{\zeta}{(1+\bar{z}\zeta)\left(1+\frac{\zeta}{z}\right)}\right)^p\Big/f(z)=\zeta^p+\cdots$$

から，Bieberbach 流の単葉函数論と同様にして，若干の歪曲定理，回転定理，p 葉星型限界，p 葉凸型限界などを求める．これらの中には sharp なものも sharp でないものも含まれる．なお，上の変換によつて $G(\zeta)$ は $f(z)$ と全く同じ性質を保持する．（特に，$p=1$ の場合は，殆どの評価が sharp な型で得られる.)

曾根徳順君（山梨大） **多葉函数に関する二三の定理**

次のような型の定理をのべる．

$F(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$ を $|z|<1$ で高々 $p-1$ 個の極を除いて正則，p 葉とする．$F(z)$ が $|z|<1$ で，固定された c, R にたいして $|\xi-c|\leqq R$ なるすべての ξ をとらないなら，$R\leqq|c|(4^p|c|-1)/(4^p|c|+1)$ が成立し，且つこの不等式は精密である．

$F(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$ を $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ で正則，$|z|\leqq\rho$ で連続，且つここで $|F(z)|\leqq M$ とする．

もし $F(z)$ が $|z|<1$ で p 葉なら，原点に最も近い $F(z)$ の零点 $n(\neq0)$ にたいして，

$$|n|>\{\rho^{2p+1}+B(\rho^2-\rho)\}/\{\rho^{2p+1}+B(\rho-1)\},$$
$$B=2^{2p-1}M-\rho^p-2^p(4^{p-1}M^2-M\rho^p)^{\frac{1}{2}}$$

が成立する．等．

辻　正次君（立教大理） **On the moduli of closed Riemann surfaces.**

F を closed Riemann surface of genus $p\geqq1$ とし若し他の Riemann 面 F' が F と1−対−1，等角に写像が可能ならば F' は F と同じ class に属するという．異なる class は manifold M をつくる．即ち M の点と class とは 1−対−1 に対応する．M の(実)次元数を μ とすれば M は μ 個の real parameter で表わされる．これを moduli という．

今 C を単位円，L_0 を半直線，L を直線とすれば，F の schlichtartig な covering surface を schlicht な

domain に写像することによつて，次の定理が証明出来る:

定理．$p=1$ ならば $\mu=2$, $M=C\times L_0$,

$p\geqq2$ ならば $\mu=6p-6$.

$\mathfrak{M}=C^p\times L_0{}^p\times L^{4p-6}$ とすれば，$\mathfrak{M}$ は或る singular manifold によつて可附番個の connected manifold $\mathfrak{M}_i$ に分かれる．各 $\mathfrak{M}_i$ は class と 1−対−1に対応するから，M にとることが出来る．

μ に関する部分は Picard, Traité II にも証明があるが，証明がすつきりしていない．

辻　正次君（立教大理） **Analogue of Blichfeldt's theorem for Fuchsian groups.**

G を Fuchsian group, D_0 と基本領域，$\sigma(D_0)<\infty$ とする．但 $d\sigma(z)=\frac{4rdrd\theta}{(1-r^2)}(z=re^{i\theta})$ は非ユークリッド面積要素，D_0 の中に k 個の点 $z_0{}^i\ (i=1,\cdots,k)$ が与えられ，その equivalent の全体を lattice points と云う．$T_a:z'=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\ (|a|<1)$ を translation という．E を $|z|<1$ 内の可測集合とし，$T_a(E)$ が含む lattice points の数を $\mu(E(a))$, $\lambda(r,E)=\int_{|a|<r}\mu(E(a))d\sigma(a)$,

$\Omega(r,E)=\int_0^r\lambda(r,E)dr$ とすれば，

$$\lim_{r\to1}\int_0^r\frac{\Omega(r,E)}{1-r}dr\Big/\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^2=\frac{2\pi k\sigma(E)}{\sigma(D_0)}.$$

これから，E を適当に translate すれば，少くとも $\frac{k\sigma(E)}{\sigma(D_0)}$ 個の lattice points を含む様に出来る．又，高々 $\frac{k\sigma(E)}{\sigma(D_0)}$ 個の lattice points を含む様にも出来る．これは Santaló (Journ. Math. Soc. Japan 7 (1952)) が証明しておるが，証明中著者には不明瞭な点があるように思われる．

辻　正次君（立教大理） **Remark on Fatou's theorem.**

C を $|z|<1$ の中にあつて，$z=1$ で $|z|=1$ に内接する Jordan curve とし，これを θ だけ回転した曲線を C_θ とすれば，Littlewood (Journ. London Math. Soc. 2 (1927)) は殆どすべての θ に対して，z が C_θ の二つの分枝のいづれかの一つから $e^{i\theta}$ へ近づく時，$\lim f(z)$ が存在しない様な $|z|<1$ で有界な正則函数 $f(z)$ が存在することを証明した．今 C を $|z|<1$ 内にあり $z=1$ で $|z|=1$ に内接する Jordan arc とし，その極方程式を $1-r=\chi(\theta)\,(0\leqq\theta\leqq\eta)$ とし，若し $\int_0^\eta\frac{\chi(\theta)}{\theta^2}d\theta<\infty$ ならば殆んどすべての θ に対して，z が C_θ の上から $e^{i\theta}$ に近づく時 $\lim f(z)$ が存在しない様な $|z|<1$ で有界正則函数 $f(z)$ が存在する．

辻　正次君（立教大理） **Littlewood's theorem on subharmonic functions in a unit circle.**

Littlewood (Proc. London Math. Soc. 28 (1929)) は次の定理を証明した．$u(z)$ を $|z|<1$ で subharmonic, $\int_0^{2\pi}|u(re^{i\theta})|d\theta=o(1)\ (0\leqq r<1)$ とすれば，殆んどすべての θ に対して，$\lim_{r\to1}u(re^{i\theta})$ が存在する．この時

$u(z)=v(z)-w(z)$, $v(z)$ は $|z|<1$ で harmonic, $\int_0^{2\pi}|v(re^{i\theta})|d\theta=o(1)$, $w(z)=\int_{|a|<1}\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|d\mu(a)$,

$v(z)$ については殆んどすべての $e^{i\theta}$ に対して z が $e^{i\theta}$ に Stolz domain 内から近づけば $\lim_{z\to e^{i\theta}}v(z)=v(e^{i\theta})$ が存在する．

$w(z)$ に関しては殆んどすべての $e^{i\theta}$ に対して $\lim_{r\to1}w(re^{i\theta})=0$. Littlewood の定理では radial approach は Stolz domain 内からの approach では置き替えることが出来ない．反例が容易に作られる．今 $\Omega(r)=\int_{|a|<r}d\mu(u)$ とすれば，$\int_0^1\Omega(r)dr<\infty$ なる条件を満足する．$\Omega(r)$ に少しく制限をつけて

$\Omega(r)=o\left(\frac{1}{(1-r)^\lambda}\right)\ (0<\lambda<1)$ とすれば，次の定理が得られる．

定理．$e^{i\theta}$ を通り，実軸と角 φ をなす直線を $l_\theta(\varphi)$ とすれば，殆んどすべての θ に対して，殆んどすべての方向の直線 $l_\theta(\varphi)$ の上から，z が $e^{i\theta}$ に近づく時

$$\lim w(z)=0.$$

及川広太郎君（東大理） **Notes on conformal mapping of a Riemann surface onto itself.**

種数 $g\geqq2$ の閉 Riemann 面の自分自身の上への等角写像全体の群を G とすると，$\mathrm{ord}.G\leqq84(g-1)$ である (Hurwitz, 1893).

種数 g, 境界成分の数が k なる境界をもつ Riemann 面で $N(g,k)=\mathrm{Max}(\mathrm{ord}.\ G)$ とおき，又種数 g の閉 Riemann 面から k 箇の点を除いた残りについて，同様に $N'(g,k)$ を定義すると，次の評価式が得られる:

$2g+k-1\geqq2$ ならば，

$$N'(g,k)\leqq N(g,k)\leqq12(g-1)+6k.$$

Heins(1946) は，$N'(0,k)=N(0,k)$ であることを示し，更にこの数をすべて決定した $(k\geqq3)$.

我々は $N'(1,k)$ を求めることが出来る．例えば

$$N'(1,k)=6k,$$

但，$k=m^2+3n^2$, $m,n=0,1,2,\cdots$, $k\geqq1$, その他．

楠　幸男君（京大理）　**On Riemann's period relation on open Riemann surface.**

開いた Riemann 面 R 上に R_0(単連結) をとり $R-R_0$ 上に次の三つの曲線族を考える: (1) $\{C\}$; $C\in\{C\}$ は有限箇の互に素な解析的 Jordan 閉曲線からなり，$C\sim\partial R_0$. (2) $\{\Gamma\}$; $\{C\}$ の元でその各成分が R を互に素な二つの部分に分ける C の全体. (3) $\{L\}_E$; $\partial R_n\equiv L_n\in\{\Gamma\}$ なる R の exhaustion E に関する曲線族で，$\{L\}_E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{L_n\}$. ここに $\{L_n\}$ は L_n を含む annulus (L_n の各成分を含む ring domain の和) に含まれる $\{\Gamma\}$ の全体を示す. R 上の extremal length を λ で表わすとき $\lambda\{C\}=0$ は $R\in O_G$ と同等となる. そこで $\lambda\{\Gamma\}=0$, 及びある E に対し $\lambda\{L\}_E=0$ なる Riemann 面の class を夫々 O', O'' とすれば $O''\subset O'\subset O_G$. 先ずこの class O', O'' の諸性質を研究する (Heins のある結果を含む). 次に $A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n, \cdots$ を R 上の canonical homology basis とし，その中の $A_1, B_1, \cdots, A_{kn}, B_{kn}$ は R_n の relative basis なる様にとる. $R\in O''$ のとき (有限箇の) 極の近傍を除き Dirichlet 積分有限な df_1, df_2 に対し，無限箇のその A, B 週期で示される Riemann の第一，第二 (bilinear) 関係を証明する. 又，以前筆者は du_1(或 dv_2) が有限箇のみ零でない週期をもつとき第二関係を $R\in O_{HD}$ で証明したが之は $R\in O_{HD}$ では成立しないこと及び du_1 と dv_2 が $R\in O_{HD}$ 上で有限箇のみ零でない A 週期をもつときにもある条件の許に成立することを注意する.

倉持善治郎君（阪大北校）　**On the capacity of subsets of the ideal boundary.**

R を positive boundary の Riemann 面とするとき，その境界の部分集合を，non-compact な領域 D について，$\{(R-R_n)\cap D\}$ ($n=0, 1, 2, \cdots$) なる列で定義する; ここで $\{R_n\}$ は R の exhaustion である. この D によつて定義された境界の容量に対して，それが平面領域であるときには，普通の容量になるような定義を与える. これについての既報の論文では，その途中の証明が頗る複雑であつたが，ここではその一つの簡単な証明を与えるのが目的である. この容量を定義する調和函数は，空間に於ける平衡 potential と同じような性質をもつことが知られる. この一つの応用として quasiconformal mapping において class O_{HD} が不変であることが直ちに知られる.

黒田　正君（名大理）　**On a property of analytic functions on some Riemann surfaces.**

リーマン面 F 上に，F 内に集積しない高々可算個の閉又は開解析曲線で囲れた領域Gを考える. かかる凡てのGに対してその相対境界上で実部 0 のG内の一価有界解析函数が定数 (必然的に純虚数) に限るとき，F は族 $O^0{}_{AB}$ に属するということにする. 今 Φ を族 $O^0{}_{AB}$ の複素平面上の被覆面であるとすれば，Φ は Iversen の性質を持つことを証明する.

又容易に $O_{HB}\subsetneqq O^0{}_{AB}$ が示されるから，この結果は森明氏による一つの定理を含むことがわかる.

洪　妊植君（東大理）　**方程式 $\Delta\Delta u+k^2\Delta u=0$ の解の singularity について**

調和函数では Lindeberg の定理，即ち logarithmic capacity 0 な集合 S を除いて調和で且つ有界な函数は実は S でも調和であることが成立つ. この性質は方程式 $\Delta u+k^2u=0$ の解にも拡張される.

これが方程式 $\Delta\Delta u+k^2\Delta u=0$ についてはどうなるかをしらべ，これについては上の場合と異り logarithmic capacity 0 な集合 S で singular で且つ有界な解が存在し得ることを示す.

二宮信幸君（阪市大理工）　**ポテンシャルの radial limit について**

J. Deny は測度のポテンシャル

$$U^{\mu}(x)=\int\frac{1}{|x-y|}d\mu(y) \qquad (R^3 \text{ に於て})$$
$$=\int\log\frac{1}{|x-y|}d\mu(y) \qquad (R^2 \text{ に於て})$$

は原点より出る殆んどすべての半直線に沿つて無限遠に於て $0(-\infty)$ なる極限値をもつことを示した. 即ちそうでない半直線の全体は単位球面 (円周) より高々外容量 0 の点集合を切り取る. これに対して，有限点に於る radial limit, 即ち原点を中心とする半径任意の球面 (円周) の各点に於る radial limit の存在を研究する. 我々はかかる radial limit が周上高々外容量 0 の点集合を除いて存在することを注意する.

田中忠二君（早大理工）　**On Borel's curves of the integral functions defined by Dirichlet series (II).**

先ず定義より始める: (i) $s=\sigma+it$ 平面に於て $\sigma=+\infty$ より $\sigma=-\infty$ にまたがる Jordan 曲線 C 上に中心を有し半径 R なる円群が作り出す curved strip を $D[R,C]$ と記す. (ii) s 平面に於て $\sigma=+\infty$ より $\sigma=-\infty$ にまたがり，且つ $D[r,L]$ に含まれる Jordan 曲線を $C(r,\theta,p)$ と書く; ここに，L は $\sigma\cos\theta+t\sin\theta=p$ ($|\theta|\leqq\pi/2$, $\theta\neq 0$) なる直線とする. 本講演に於て次の定理を証明する:

定理. $F(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\exp(-\lambda_n s)$ ($s=\sigma+it$, $0\leqq\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\to+\infty$) の一様収斂横座標が $-\infty$ で且，その order ρ が正且有限とする. 若し $D[R,C]$ ($C=C(r,\theta,p)$)

に於て $F(s)$ は全平面と同じ order を有するとする; 即ち，次式が成立するとする:

$$\rho=\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{1}{(-\sigma)}\cdot\log^+\log^+M(\sigma)$$
$$=\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}}\frac{1}{(-\sigma)}\cdot\log^+\log^+M(\sigma,D).$$

ここに $M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<+\infty}|F(\sigma+it)|$,

$$M(\sigma,D)=\max_{\Re(s)=\sigma,\ s\in D}|F(s)|.$$

若しも $R>\Delta\left\{1+\left(1+\frac{2r}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\left(\Delta=\frac{\pi}{4\rho|\sin\theta|}\right)$ ならば，$D[R,C]$ 内に少くとも一つの Borel curve C_β が存在する.

大津賀　信君（名大理）　**測度の作る空間の完備性について**

H. Cartan は Newton ポテンシャルの理論を論ずるにあたり，エネルギー有限の正測度は完備距離空間をなすことを利用した. しかし彼はユークリッド空間の特性を用いて居り，そのままの方法ではたとえばリーマン面の場合を論ずることは出来ない. 一般の局所コムパクト的空間にて，一般核のポテンシャルに対し，果してエネルギー有限の正測度が完備距離空間をなすかどうかというのが問題になる.

今回は測度のささえ (仏語，support) が一定のコムパクト集合に含まれる場合，核が二つの原理，即ちエネルギー原理と連続性原理 (仮にこう名付けたが，之はポテンシャルが測定のささえ上連続なら全空間連続ということ) を充す正値対称連続函数なら上述の空間が完備となることを報告する.

岸　正倫君（名大理）　**On a theorem of Ugaheri.**

局所コムパクト空間Ωでポテンシァルを考える. 魚返氏による最大値の原理を次の様に拡張する: Ω の任意のコムパクト集合 K に対して，K に依存する定数 k が存在して，台が K に含まれる正の測度 μ のポテンシャル U^{μ} は Ω の各点 P で$U^{\mu}(p)\leqq k\cdot\sup_{q\in K}U^{\mu}(q)$ をみたす. この時，連続性原理——正の測度のポテンシャルが測度の台上で連続なら，Ω の各点で連続である——は一つの附加条件のもとで，上の最大値の原理と同値であることを証明する.

石川　修君（都立大理）　**On a theorem on the growth of entire functions of exponential type.**

Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 61 で Boas は exponential type の整函数の vanish する条件について色々研究しているが，この若干の定理の拡張及び類似の定理を証明し，合せてその応用についてのべる.

特に数列 $\{\lambda_n\}$($|\lambda_n|\uparrow$) がある角内にある場合について Boas の結果を拡張する.

また Duffin-Schaeffer と同様な不等式をも証明する.

有馬喜八郎君(埼玉大文理)　**整函数について (Carleman-Wolf の定理)**

カーレマンが 1926 年 Acta Math. に於て $f(z)$ が定数でない整函数であるとき

$$M(\theta)=\sup_{0\leqq r<\infty}\log|f(re^{i\theta})| \quad \text{とおけば}$$

$$\int_0^{2\pi}N(\theta)d\theta<\infty \quad \text{である;}$$

但し $N(\theta)=\mathrm{Max}(\log_2 M(\theta),0)$ を証明し，Wolf が更に 1939 年ロンドン数学誌で $f(x,y)$ が $y>0$ で subharmonic で $y=0$ 上で正でなくて，且つすべての $\varepsilon>0$ に対し $f(x,y)\leqq\varepsilon re^{\varphi(\theta)}$ (但し $\varphi(\theta)$ は負でなくルベック積分可能とする) ならば $f(x,y)\leqq 0$ が成立する. を証明した. カーレマンの方法で簡単に Wolf の結果より精確な結果が得られる一例をあげれば "$f(z)$ が整函数で $m(r)=\min_{|z|=r}|f(z)|$ が bounded. $|f(z)|\leqq\exp(\exp(\sqrt{r}\,\varphi(\theta)))$ ($|\varphi(\theta)|$ は同上)ならば $f(z)$ は定数である" が得られる.

遠木幸成君（阪大理）　**調和函数論における面積と長さの方法について**

一つの Riemann 面を F とし，$\{F_n\}$ をその exhaustion とする. F_n の一点を q とするとき次の性質をもつ調和函数 $E_n(p,q)$ を考える.

i) 一点 q を除いて F_n で調和である.

ii) q を原点とする local parameter において

$$E_n(p,q)=\log|z|+\omega(z),$$

ただし $\omega(z)$ は調和で $\omega(0)=0$ とする.

iii) p が F_n の境界に収斂するとき $E_n(p,q)$ はある一定数 k_n に収斂する.

いま F が null boundary の Riemann 面ならば，$\lim_{n\to\infty}k_n=\infty$ で F が positive boundary のときは $\lim_{n\to\infty}k_n<\infty$ であることは明らかである.

つぎに，$\varphi_n(p)=e^{E_n(p,q)}$ とおくとき，$\varphi_n(p)=r$ である F_n における等高線を γ_r とし，$\varphi_n(p)<r$ である F_n の部分を F_{nr} とする.

$$L_n(r)=\int_{\gamma_r}\frac{|\mathrm{grad}\,\varphi|}{1+|\varphi|^2}ds,$$

ただし，ds は線要素とする;

$$A_n(r)=\iint_{F_{nr}}\frac{|\mathrm{grad}\,\varphi|^2}{\{1+|\varphi|^2\}^2}d\sigma,$$

ただし，$d\sigma$ は面積要素とする

と定義すれば次の Schwarz の不等式が成り立つ:

$$\frac{L_n(r)}{r}dr\leqq 2\pi dA_n(r).$$

これを用いて次の定理が容易に証明される.

I. null boundary の Riemann 面 F において $E_n(p,q)$ の極限函数を $E(p,q)$ としその任意の等高線を γ とするとき

$$2\pi=\int_\gamma\frac{\partial E}{\partial n}ds.$$

II. positive boundary の Riemann 面 F において Green's function を $G(p,q)$ とし，その任意の等高線を γ とするとき

$$2\pi=\int_\gamma\frac{\partial G}{\partial n}ds.$$

柴田敬一君（大阪府大） **或る種の非等角写像について**

$|z|<1$ から $|Z|<1$ への differentiable quasiconformal mapping を $Z(z)$ とする. $\frac{\partial Z}{\partial\bar z}=q(z)$, $Z(0)=0$, $Z(e^{i\theta})=e^{i\theta}$ とすれば

$$\Theta-\theta=-\frac{2}{\pi}\lim_{z\to e^{i\theta}}\mathrm{Im}\iint_{|\zeta|<1}\frac{z\overline{q(\zeta)}}{1-z\zeta}d\xi d\eta+\text{const.}$$

$$(\zeta=\xi+i\eta)$$

が成立する. 特に $q(z)$ が $|z|<1$ において正則なる場合に上の式の応用について述べる.

尾崎繁雄君，貝塚　徹君，道脇義正君（教育大理） **多変数函数における Picard の定理について**

一変数の整函数に関する Picard の定理はそのままの形では多変数に拡張出来ない事を Fatou が証明した. しかし条件を変える事により F. Bureau は Picard の定理をそれに類似の定理に拡張している. ここでは有界変形率を多変数に導入して，類似の定理を得るのが目的である.

尾崎繁雄君，加藤定雄君（教育大理） **多変数における Abel の連続定理**

目的は1変数1函数における Abel の連続定理を多変数多函数の場合に拡張するにある.

定義 1. $W(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nZ^n$ のノルム級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\|A_n\|\|Z\|^n$ が $\|Z\|<R$ で収斂し, $\|Z\|>R$ で発散するとき R を $W(Z)$ のノルム収斂半径と呼ぶ.

定義 2. Z 空間内の超球 D の表面上の1点 Z^0 について，z_1 平面における z_1^0 を頂点とし開きが $2\varphi_0(0<\varphi_0<\pi/2)$ なる Stolz の角領域と z_2 以下の平面における $z_2^0,\cdots,z_k^0$ の近傍との topological product の D 内の部分を ΔZ^0 で表わす.

定理. $W(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nZ^n$ のノルム収斂半径を R とする. もし収斂超球面上の1点で Z^0 上の冪級数が収斂すれば，その和を S_{Z^0} として ΔZ^0 の中から $Z\to Z^0$ のとき一様に $W(Z)\to S_{Z^0}$ である.

尾野　功君（教育大理） **General Schwarz's lemma in several complex variables.**

k 複素次元空間 $z=(z_1,\cdots,z_k)'$ の超球 $|z|<R$ で正則かつ有界: $|w(z)|\leqq M$ な函数ベクトル $w(z)=(w_1(z),\cdots,w_k(z))'$ が $w(z)=A_nz^n+(z$ の $n+1$ 次以上のベクトル) なる展開をもつならば, $|w(z)|\leqq M|z|^n/R^n$ が成立つ. ここに $|z|=\sqrt{z^*z}$, $|w(z)|=\sqrt{w^*(z)w(z)}$ で n は自然数とする. また，上の不等式の等号が恒等的に成立するのは $n=1$ のときに限る. さらに，この超球内の1次独立な k 個の点 $a,\cdots,a^k$ で等号が成立てば, $A_nA_n^*=(M/R^n)^2E_k$ (E_k は k 次の単位行列)となり，とくに $n=1$ に対しては $w(z)=MUz$ (U は k 次の unitary 行列)で, $n\geqq2$ に対しては, $A_{n+m}(a^i)^{n+m}=(0)(i=1,\cdots,k;\ m=1,2,\cdots)$ が成立つ.

また n 次の正方行列 $\begin{pmatrix}z_{11}&\cdots&z_{1n}\\ \vdots&&\\ z_{n1}&\cdots&z_{nn}\end{pmatrix}\equiv z$ よりなる空間で

$w(z)=A_1\begin{pmatrix}z&&0\\&\ddots&\\0&&z\end{pmatrix}+\cdots$, $\|w(z)\|<1$ とすると, $\|A_1\|\leqq\sqrt{n}$ が成立し，かつ最良である.

尾崎繁雄君（教育大理）**柏木定雄君**（和歌山大学芸）**坪井照男君**（埼玉大文理） **完全正規直交系について**

多変数函数論の一元的取扱いに対する代数的考察をする. 特に完全正規直交系にあたる元の性質および，それによる展開定理，その他の性質を述べる.

竹内芳男君（山形大教育） **Hermitian modular group を引き起す有界でない領域について**

E. Cartan が決定した既約有界対称な領域のうちの1つ: $E-\bar ZZ'>0$, $Z=Z^{(p,q)}$ は $p\times q$ 型行列，をみたす点 Z の領域，は1次写像

$T=i(E+Z)(E-Z)^{-1}$ (E: 単位行列)で，ある有界でない領域 $\mathrm{Im}T>0$ の上に同相に写像される.

さて $E-\bar ZZ'>0$ なる領域は遷移的自己同型写像:

$$G=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix},\quad G'H\bar G=H,\quad H=\begin{pmatrix}-E&0\\0&E\end{pmatrix}$$

をもつ. 本講演では，この群が領域 $\mathrm{Im}T>0$ の上では,

$$M'J\overline{M}=J$$

なる，いわゆる, Hermitian modular group になることを示す.

竹内芳男君（山形大教育） **或る体の上の巾級数についての2つの定理**

一般の体の元を係数とする多変数の巾級数について, 2つの定理: その1つは circular group に関するもの，他の1つは H. Cartan の一意性定理，の拡張を試みる.

それには係数体に附値を与え，かつこれについて完備である（または完備拡大体をとる）と仮定して，前者に対しては，指数函数を定義し，後者に対しては，ある位相を導入しすることが必要である.

結論的にいえば，係数体の標数および附値がアルキメデス的か否かも条件として加わるが，標数が0で，附値がアルキメデス的ならば，体が数体の場合と殆んど平行して議論を進めることができる.

これについての詳しいことは，近く山形大学紀要（自然科学）3巻4号31年3月に発表される予定である.

大津賀　信君（名大理） **矩形に関する extremal distance について**

幅が一定正値 a に等しいか又はより小，高さが π の矩形を R，左辺上の閉集合を F，右辺上の閉集合を F' とする. 又 F,F' の対数容量は夫々正値 k,k' より大とする. 問題は, F と F' の間の R に関する extremal distance は a,k,k' のみに依存する上界を持つかということである. 一般の場合は未解決で次の二つの場合には分る. 即ち

（1） 集合 F が左辺と一致する場合.

（2） R の冪が一定 a の場合.

大津賀　信君（名大理） **Riemann 面の型問題について**

Riemann 面のグラフは, Riemann 面を可附番個の部分にわけ，各々を slit の入つた同じ高さの矩形にうつして，順次つないで得られる. 従つてグラフ全体は有限な矩形又は無限な半帯状領域となる. 我々は調和測度を利用することにより，別の方法で右端が一般に揃わないギザギザなグラフを定義する. 之を用いて Riemann 面が parabolic か hyperbolic かという型問題を研究しようというのが目的である.

今回は次の一結果を報告する. 即ち R を genus $g\geqq2$ なる Riemann 面, R をわけない互に素な二つの analytic loops を c_1,c_2 とし c_1,c_2 に沿つて R を切つて得られる面を反対側の岸に沿い限りなくつないでゆくことにより得られる Riemann 面は hyperbolic である. 従つて c_1,c_2 二個に限らず同じ様な有限又は無限個(その時 $g=\infty$) の loop cuts に沿つてつないで得られる Riemann 面も同様である,

大津賀　信君（名大理） **Abstract な Riemann 面に対する集積値集合について**

Ann. Inst. Fourier 第5巻にては, Riemann 面の被覆面の集合が他の abstract な Riemann 面に写像される場合の集積値集合を論じたが，今回 abstract な Riemann 面の集合が他の abstract な Riemann 面に写像される場合に拡張することに成功した. ただし，定義域の方の Riemann 面の集合の境界要素は一般に定義されるが，値域の方の Riemann 面の境界要素としては Kerékjártó-Stoïlow の意味の境界成分をとる. 変換は局所的には，ある小さい除外集合の外で, Pfluger-Ahlfors の意味で擬等角である. 結果の内容は，集積値集合並びに漸近値に関する Iversen の定理の拡張である.

特　別　講　演

小澤　満君（東工大） **On Teichmüller problem.**

擬等角写像論に於ける所謂 Teichmüller の問題についての綜合報告を行う.

閉 R 面 W から同相な R 面 W' 上への onto, 位相的な写像の homotopy 類 H 中に次の如き写像 f が存在する. $H\ni g$ に対する dilatation $D(p,g)$, $p\in W$, の $\max_W$ の $\inf_H$ が f によつて実現される. この f に対しては有限個の点を除いて $D(p,f)$ は const. である. 更に W 上の適当な quadratic differential $d\zeta^2$ に対して W 上の各点における $d\zeta^2>0$ なる方向が写像 f によつて無限小円が無限小楕円に写像される時の長軸方向を示す. すなわち,

$$\frac{\partial f}{\partial\bar z}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}=k\frac{d\zeta^2}{|d\zeta^2|}.\quad (k:\ \text{const.}\ z\ \text{は局所座標.})$$

以上が Teichmüller の予想である.

此の予想に到達する思考過程を詳細にのべた Teichmüller の論文の紹介を主としてのべる.（此の予想は Teichmüller 自身によつて後に証明されたが近年 Ahlfors が巧妙な証明を与えた事は周知の事実である.）

予想に導く他の一つの方法を与える. その方法は極小曲面論的な方法であるが，此の方法をもつてしては，未だ完全な存在証明は与えられなかつた. これに反して Ahlfors の方法が非常に巧妙に結果に導く理由を述べる. 従つて現状では，極小曲面論的方法は発見的手段として都合がよいことだけが示されるにすぎない.

Teichmüller space について，ここではその主要な結果だけのべ，詳細には立入らないことにする. 更に, Teichmüller の他の予想についてのべる. Teichmüller によつて導入された homotopy class 間の距離以外の

計量を homotopy class 間に入れる．これによつて他の予想よりも強い予想をのべることができる．此の予想は閉又は開有限 R 面の自身上への等角写像の個数の有限性及び評価を与えた Hurwitz 及び Oikawa の結果の拡張に関するものである．此の予想は torus の場合には正しいことも注意する．各 homotopy 類中には genus >1 の場合には自身への等角写像は 1 種しかないという Teichmüller の結果についてものべる．

倉持善治郎君（阪大北校） **Evans-Selberg's theorem on abstract Riemann surfaces.**

ユークリッド空間では，容量零なる F_σ 集合に正の質量を適当に分布すればその質量による potential が F_σ のすべての点で正の無限大となるようにできるということを，G. C. Evans が 1936 年に示した．翌 1937 年 H. Selberg もまた独立に且つ全く異なる方法でこの事実を証明した．この定理は函数論では極めてその応用が広い（例えば Prof. M. Tsuji, G. Hallström）．Prof. K. Noshiro は平面の場合に上の定理の簡単な証明を与えた．しかし，函数論で考えられる最も広い領域である Riemann 面上では，ある種の条件を境界上に仮定すればこの定理が成立することが知られていたが，無条件に成立するかどうかということは未知であつた．ここでは実際それが成立することを示そうと思う．R を全く任意な Riemann 面とするが，便宜上 boundary が positive なときと null なときを別に考えることにする．それは両者での取扱いの方法が甚しく異つているからである．

R^* を null-boundary をもつ Riemann 面，$\{R_n\}(n=0,1,2,\cdots)$ を compact な relative boundary $\{\partial R_n\}$ をもつその exhaustion とする．$(R-R_n)$ は $\{G_{i_1,\, i_2,\, \cdots,\, i_n}\}(i_1=1,2,\cdots,j_1;\ i_2=1,2,\cdots,j_2;\ \cdots,\ i_n=1,2,\cdots,j_n)$ なる non-compact domains に分かれている．これについて $G_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \supset G_{i_1, i_2, \cdots, i_{n+1}}$ なる単調減少性があつて且つ $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{i_1, i_2, \cdots, i_n}=0$ であるとき $\{G_{i_1, i_2, \cdots i_n}\}$ は Stoïlow の意味で ideal boundary point p を決定したという；かような p の全体を $\underline{B}$ で表わすことにする．Evans-Selberg の定理の形式的な拡張は，R^* の内点 q で負の対数特異点をもち $\underline{B}$ の全ての点で正の無限大となる極限値をもつ R^* で調和な函数 $U(z)$ を求めるという問題である．

この目的のためには，上の Stoïlow による境界点の分類では不十分である．即ち R^*-R_0 で有界な調和函数 $V(z)$ は $\underline{B}$ の各点では必ずしも極限値をもたない；$\underline{B}$ の一点といつても，それは topological な意味での一点であつて metrical な意味では多くの点がそこにあるような状態を呈するのである．

だから R. Martin によつて導入された topology を使うことにする．それは次のようなものである．R^*-R_0 を R とおいて，R の内点 p を極とする Green function を $G(z, p)$ で表わし，R の内部にも ∂R_0 にも集積点をもたない点列 $\{p_i\}$ に対して $\{G(z, p_i)\}$ が R の内部で広義の一様収斂するとき $\{p_i\}$ を fundamental な列であるという．二つの fundamental な列が対等であるというのは，その点列に対する Green function の列が等しい極限函数をもつときであるとする．対等な fundamental な列の全体に一つの ideal boundary point を対応させて，その点の全体を B で表わす．$R+B$ を $\bar{R}$ とおいて $\bar{R}$ の全ての点で $G(z,p)$ を定義して，このように定義された $G(z,p)$ が $\bar{R}$ で，平面上の対数 potential がもつ本質的な特性，即ち半連続性，対称性，優調和性をもつことを示すのが我々の目的である．こうすれば，Evans-Selberg の定理の拡張が得られるわけである．我我の結果は，1)「F を B の closed な部分集合とするとき，F で無限大となり R^* の一点で負の対数特異点をもつ函数が存在する；しかし F 以外の点で upper limit が有限になるような函数は必ずしも存在しない.」2)「F を Stoïlow の意味での閉集合とすれば，1) の後半の条件を満足させることができる.」3)「特に $F=\underline{B}$ とおけば，最初の問題の解答である.」

R^* を positive boundary の Riemann 面とするとき R^*-R_0 で調和で $R-R_0$ の一点 p で正の対数特異点をもち R^*-R_0 上で Dirichlet 積分が極小となるような函数を $N(z,p)$ で表わし，R^* が null boundary をもつときと同様に ideal boundary point を定義する．しかしこのときには，non-minimal point が決定的な変化を与える．ここで minimal point とは，$N(z,p)$ をその点 p に対応する函数とするとき，それ自身以外にそれより小で且つ（ある意味で）R^*+B で優調和な函数がないことである．次のことが得られる．

閉集合で容量零なるものを F とし，F が minimal point 許りより成つているときには，R^*-R_0 で調和で，F で無限大となり且つ $\int_C \frac{\partial U(z)}{\partial n} ds \leqq 2\pi$ なる函数 $U(z)$ が存在する；ここに C は $U(z)$ の niveau curve である．

ここで non-minimal point を含まないという条件は大切であつて，この空間では non-minimal point の集合は空集合ではないが，potential については恰も空集合と同じよう役目をするのである．

以上で Evans-Selberg の問題は完全に解決されたといつてよい．函数論に於ける応用はここでは省略する．

日本数学会

昭和 31 年度秋季例会

講演アブストラクト

函　数　論

時……　10 月 19 日・20 日

所……　京都大学数学教室

19 日	午前 9 時 〜 正午	普通講演	**1 〜 13**
19 日	午後 1 時 30 分 〜	特別講演	
20 日	午前 9 時 〜 正午	普通講演	**14 〜 26**
20 日	午後 1 時 〜	特別講演	