

阿部紀行氏「代数群の表現論の研究」

連結代数群と言ってしまうと定義により連結代数多様体かつ群ですので無数にあります。ただ、そこで代数群の表現論ということまで考えるとそれが難しい部分は連結簡約群と呼ばれる離散的データ (ルート・データ) で定まる代数群と体から定まる算術的なデータで統制されることが古くから知られています。また連結簡約代数群の表現論の記述にはルート・データから定義される代数であるいわゆる岩堀ヘッケ環がさまざまな形で自然に出現し、ルート・データを固定して体を取り替えて得られる代数群たちの表現論の構造の間に類似や関係をもたらしています。従って代数群の表現論を発展させるといった場合、岩堀ヘッケ環を用いた代数群の表現論の記述を応用を見据えつつ既存の場合を超える状況において進めてゆくことは基本的な戦略となります。

阿部紀行氏はこのような代数群の表現論の発展において顕著な貢献をしています。ここではその中で特に大きなものふたつについて簡単に説明します。

p 進代数群は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大上の簡約代数群で、 $\mathbb{Q}_p$ の位相から誘導される位相を持つ位相群です。この群の認容表現と呼ばれるクラスの表現はいわゆる保型表現を含み、特に局所 Langlands 対応の片側に位置するため数論的な興味から深く研究されてきました。その後、2000 年代に正標数版の Langlands 対応が模索されるなかでその対応の片側として p 進代数群の法 p 認容表現 (標数 p の有限体の閉包上の認容表現) が注目されました。このような中で阿部氏は分裂型 p 進簡約代数群の法 p 既約認容表現を超尖点表現を除いて分類しました。さらにこの手法を発展させ、Henniart, Herzig, Vignéras との共同研究において一般の p 進簡約代数群に対して法 p 既約認容表現を超尖点表現を除いて分類することに成功しました。これは p 進代数群の法 p 表現の理論におけるひとつの到達点と言えます。この分類は通常表現 (つまり複素数体上の表現) の場合と同様に適切に定義された岩堀ヘッケ環の表現論の言葉に置き換えられますが、阿部氏はそれに対するより詳細な研究を継続していて、標準的な岩堀ヘッケ環の理論のこの場合における対応物のかなりの程度は同氏の結果となっています。

複素数体上の簡約リー代数の最高ウェイト表現の指標は Kazhdan-Lusztig 基底と呼ばれる岩堀ヘッケ環の元により記述されます (特に岩堀ヘッケ環は出現しますがその出現のしかたは上とは異なります)。このことは 1981 年に幾何学を用いて証明されましたが現在でも「Kazhdan-Lusztig 予想」として簡約リー代数の表現論のひとつのハイライトとして語られ続けています。Kazhdan-Lusztig 予想の純代数的証明はその解決後も問題として残り、最終的に Soergel 双加群の理論を用いて Elias-Williamson により 2014 年に一

般化された形で解決されました。ここで彼らの結果の特別な場合から任意標数の代数群の(定義体上の)既約表現の指標が記述できる可能性があることが幾何学的佐武対応および Juteau-Mautner-Williamson による parity sheaf の理論から分かります。正標数の代数群の既約表現の指標は長い間いわゆる Lusztig 予想により概ね制御されていると信じられていましたが、2010 年代に反例が見出されるなどいままって十分とは言えません。そのこともあり、この可能性には大きな関心が寄せられました。ただし、この可能性を実現するにはまず Soergel 双加群の理論において標数の制限を取り去る必要がありました。この状況において阿部氏は任意標数の Soergel 双加群を適切に定義し、さらにそれを簡約代数群の表現論へと応用しました。この阿部氏のバージョンの Soergel 双加群は Abe-Soergel 双加群などとも呼ばれ、任意標数の簡約群の指標公式などへ向けての基本的道具として多くの研究に取り入れられ始めています。

以上に見ましたように阿部紀行氏の代数群の表現論に関する研究には表現論分野において今後さらなる発展が見込まれる重要なトピックの基礎的な部分に対する本質的な貢献が複数含まれています。したがってこれらを含む阿部氏の研究業績は極めて重要なものであり、特に代数学賞を受賞するのにふさわしいものです。