中村健太郎氏「階数 2 の p 進ガロア表現の岩澤理論の研究」

中村健太郎氏は, 局所体の p 進 Galois 表現を中心に研究を行っており, その研究やそこで培った技術を岩澤理論に応用し大変深い結果を出されています. 特に加藤和也氏による一般岩澤理論に関する次の 2 つの仕事は非常に優れた業績です.

i) p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の任意の階数 2 の p 進表現の族に対し, 加藤和也氏の p-局所 ε-予想をほぼ解決したこと ([2]).

ii) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ に関する odd で絶対既約な 2 次元 mod p Galois 表現の普遍変形族に対して, 加藤和也氏のゼータ写像を一般化したこと ([3]).

いずれの仕事も 1 つの Galois 表現に対してではなく, Galois 表現の p 進変形族に対して, 基本的な対象を拡張するものです. そのために p 進 Langlands 対応やそれに伴う局所体の p 進 Galois 表現についての現代最高の技術が投入されており, これらに関する中村氏の理解の深さと腕力をもって初めて可能となる大変深い結果です. 以下ではこれら 2 つの仕事に関してもう少し詳しく説明します.

有理数体上定義された代数多様体や保型形式など, 一般にモチーフと呼ばれる広範な対象に対して L-関数が定義され, 解析接続や関数等式の存在が予想されています. 関数等式に現れると予想される導手やルートナンバー部分は ε-因子と呼ばれていますが, 関数等式の存在予想とは独立に, Langlands や Deligne によってその存在が証明されています. ここで 1 つのモチーフに対してだけでなく, すべてのモチーフに対して, ε-因子が組織的に存在することが重要です. 実際, ε-因子の定義には関手性が内包されており, Weil の逆定理や局所 Langlands 対応の特徴づけなど, ε-因子の組織的振る舞いが Langlands 予想の重要な根拠になっています.

ε-因子はモチーフに伴う p 進 Galois 表現から定義できますが, p 進 Galois 表現が p 進族に拡張できるとき, ε-因子もその p 進族上に伸ばすことができるかというのは自然な問いです. またそれが p 進 L-関数など, その族に付随するゼータ関数的対象の関数等式を記述するかという問題も生じます. この問題は素朴にみえますが, ゼータ関数や ε-因子は本質的に複素数体上で定式化されるもので, そのような対象を位相の異なる p 進世界で変形させるためには, 背景にある深い現象を捉える必要があります. 例えば p 進 L-関数はモチーフの円分 p 進族でアーベル拡大上 semi-stable になる p に対してのみ存在予想が定式化されており, 他の場合は存在自体が謎です. また存在が証明されている場合も, 複素 L-関数の特殊値の間のある種の p 進合同性 (e.g. Kummer 合同) を発見証明することでなされ, 存在自体が大定理です. このようにこの問題は定式化自体が非常に難しく, 古典 ε-因子の存在のように, 基本的対象の存在性が背景に豊穣な数学があることを示唆するものです.

この問題と関連して, 90 年代から 2000 年代にかけて, 加藤和也氏は非常に広範な p 進 Galois 表現の変形族に対し, 一般岩澤主予想を定式化しました. ここでは簡単のため, p 進環とは, 冪級数環 $\mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_n]]$ 上の有限代数, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大などの対象を意味することにします. R を p 進環, T を階数有限の自由 R-加群で, Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ が連続に作用し,

有限個の素数を除いて不分岐なものとします．また素数 ℓ に対して $G_{\mathbb{Q}}$ の作用を $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ に制限したものを T_ℓ と書きます．加藤氏はこのような T に対して「ゼータ関数的対象」とその関数等式を記述する ε-因子族の存在を予想 (定式化) しました．加藤氏はモチーフの p 進エタール実現的世界に, 大域基本直線 $\Delta_R(T)$, 各素数 ℓ ごとに局所基本直線 $\Delta_{R,\ell}(T_\ell)$ と呼ばれる R 上の直線束を定義しました．そしてそれらは実は canonical に自明化されることを予想しました．$\Delta_R(T)$ を自明化する canonical な写像をゼータ同型, $\Delta_{R,\ell}(T_\ell)$ を自明化する canonical な写像を ℓ-局所 ε-同型, またそれらに対応する canonical な基底をそれぞれゼータ元, および ℓ-局所 ε-元と言います．(古典的な場合と同じく, 大域 ε-元は ℓ-局所 ε-元たちの素数 ℓ をわたる積として与えられます.) この自明化は, R や T に関して関手性を持ち, とくに基底変換と両立することを要求し, また R が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大のときは古典的対象と一致することを要求することで特徴づけられるものです．$\Delta_R(T)$ のこのような canonical な自明化の存在が一般岩澤主予想, $\Delta_{R,\ell}(T_\ell)$ の自明化が局所 ε-予想, あるいは局所岩澤主予想と呼ばれています．このゼータ元はエタール実現的世界にいるため, その p 進族に付随する数論的不変量 (e.g. p-イデアル類群の族) をコントロールし, 一方で Perrin-Riou 写像などの比較写像を通じて p 進 Hodge 実現されることで, p 進 L-関数などの解析的不変量をコントロールします．実際, ゼータ元の存在は canonical な Euler 系の存在と密接に結びついており, 技術的には Euler 系の理論が重要な役割を果たします.

ℓ-局所 ε-予想は $\ell \neq p$ のときは安田正大氏によって解決されました．このときは $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ の位相と表現空間の p 進位相が異なるため比較的容易です．$\ell = p$ のときは, クリスタル表現の可換変形に関しては中村氏以前にも結果がありました．この場合は Perrin-Riou 理論の明示的相互法則の存在と大体同等で, 十分複雑で難しい場合ですが, 標準的な局所岩澤理論によって取り扱えるレベルです．中村氏は [1] においてクリスタル表現を含む trianguline 表現の変形に対して証明を与え, 驚くべきことに [2] においては, 任意の p 進環上の任意の階数 2 の加群の場合をほぼ解決しました．「ほぼ」とついているのは, ε-同型が満たすべき条件のチェックが, いくつかの特殊化について抜けていたのですが, その後, Joaquin Rodrigues Jacinto 氏によって埋められました．クリスタリン表現の円分変形, さらには trianguline の場合は, ε-因子がガウス和を用いて簡明に書けることから, 本当に重要なのは non-trianguline の場合と言えます．この場合も扱っている [2] の中村氏の結果は真に革新的と言えます．中村氏の仕事の特徴は, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進表現を直接扱うのではなく, (φ, Γ)-加群という線形代数的対象を通して研究していることです．p 進表現の圏はエタール (φ, Γ)-加群の圏と圏同値ですが, (φ, Γ)-加群の方がより計算しやすく, 変形理論との相性もよいです．また trianguline 表現とは Galois 表現の圏では既約であっても, (φ, Γ)-加群の圏では, (エタールとは限らない) 階数 1 の (φ, Γ)-加群の逐次拡大として書けるものです．中村氏は [1] において p-局所 ε-予想を (エタールとは限らない)(φ, Γ)-加群に拡張することで, 階数 1 の場合に帰着する手法を取っています．また p 進 Langlands 対応は局所 Langlands 対応を (φ, Γ)-理論を経由して実現するものですが, これにより対応を torsion 係数や変形族に対して拡張できるようになります．そして p 進 Langlands 対応で移した $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の

保型表現の世界では, p 進 Kirillov モデルにより ε-因子を直接記述できることが証明の鍵になっています.

一般岩澤主予想に関しては, まずはゼータ関数の特殊値と関係する形で Euler 系を構成することが重要です. それにより主予想の半分の不等式がいえます. ただ Euler 系は発見すること自体が非常に難しく, 楕円型保型形式に対して加藤和也氏がそのような Euler 系を構成したのがこの分野の金字塔です. そしてそれを普遍変形族に拡張したのが中村氏の業績 [3] です. これによりある保型形式で主予想が証明できれば, それと mod p で合同な保型形式に対しても主予想がいえます. p で semi-stable であるような保型形式に対しては, Skinner-Urban らによって主予想が多くの場合に示されていますが, 証明では p 進 L-関数の存在が鍵になっています. p が semi-stable でないときは p 進 L-関数の存在自体が謎で, この場合の主予想を組織的に研究する方法はありませんでした. しかしながら, p で non-semi-stable な保型形式は, semi-stable な保型形式と mod p で合同になるので, ゼータ元が p で割れないときは, 中村氏と Skinner-Urban らの結果から non-semi-stable な場合の主予想が証明できるという驚くべきことがおこります. 中村氏の普遍変形族に対する Euler 系の構成方法ですが, Emerton の modular 曲線の completed cohomology を使います. これは modular 曲線の étale cohomology をすべてのレベルを動かして極限を取ってできるものです. 自然な Galois 作用を持ちますが, すべてのレベルを走らせたことにより, レベル構造を通じて $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ などが作用し, Langlands 対応を実現する母体にもなります. この cohomology に普遍変形族が現れるというのが構成の出発点です. 次に加藤の Euler 系を completed cohomology 上に伸ばすのですが, 様々な付加的選択物のある加藤 Euler 系を canonical なものするために大きな分母が必要です. そしてそれを普遍変形族部分に制限すれば適切な大きさにとどまることを示すのに様々な技術的な工夫をされています. また completed cohomology から普遍変形族部分を切り取り, 切り取られた Euler 系が特殊化に関して適切な性質を満たすことを示すところにも, p 進 Langlands 対応の深い理解と技術を必要とします.

このように中村氏の業績は様々な巨大理論の深い理解と高度な技術に基づくもので, 内容的にも根源的で今後の発展に多大な影響力をもつものであり, 代数学賞に大変相応しいものです.

文献

[1] K. Nakamura, A generalization of Kato's local ε-conjecture for (φ, Γ)-modules over the Robba ring, Algebra Number Theory **11** (2017), no. 2, 319–404.

[2] K. Nakamura, Local ε-isomorphisms for rank two p-adic representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ and a functional equation of Kato's Euler system, Camb. J. Math. **5** (2017), no. 3, 281–368.

[3] K. Nakamura, Zeta morphisms for rank two universal deformations, Invent. Math. **234** (2023), no. 1, 171–290.