浅芝秀人氏「有限次元代数の表現論とその応用」

浅芝秀人氏は体上の有限次元代数の表現論を中心として研究を行ってきた．同氏の研究業績は多岐に渡るが，ここでは三つの項目に絞って説明する．一つ目は有限次元代数の導来同値に関する研究で，同氏は 90 年代に世界に先駆けて有限表現型自己入射代数の導来同値による分類を与えた．二つ目は 2010 年代以降の研究成果で，導来同値分類で中心的役割を果たす被覆理論を昇華させた, 2-圏論を用いた被覆理論と導来同値の研究である．三つ目はさらに近年のもので，位相的データ解析におけるパーシステントホモロジーへの表現論の応用である．

(1) 有限表現型自己入射代数の導来同値分類

導来圏はホモロジー代数学における基本的な対象である．二つの環の導来圏の同値性は傾複体と呼ばれる特別な複体の存在によって特徴付けられる（森田型定理）．その最も基本的な例は，quiver（箙）の鏡映によって与えられる．一般に，有限次元代数のクラスが与えられたとき，導来同値による同値類を理解することは重要な問題である．一例として，二つの箙 Q, Q' に対し，それらの道代数が導来同値である必要十分条件は，端点において鏡映を繰り返すことで Q から Q' が得られることである．有限次元代数が有限表現型であるとは，直既約加群の同型類の個数が有限個であることを意味する．道代数が有限表現型であるような箙は，ADE 型の Dynkin 箙に他ならない（Gabriel の定理）．他によく調べられている有限次元代数のクラスとして，自己入射代数（Frobenius 代数）が挙げられる．自己入射代数の導来同値を理解することは，有限群のモジュラー表現論における Broue 予想との関連からも重要であり，Brauer 樹木代数と呼ばれる極めて特別な有限表現型の自己入射代数に対しては，Rickard によって 89 年に導来同値類の分類が与えられた．浅芝氏は 99 年の論文で，代数閉体上の有限表現型自己入射代数の導来同値類を完全に分類した．この結果は 80 年代の Riedtmann らによる有限表現型の自己入射代数 A の分類理論を応用したものであり, A の安定圏の Auslander-Reiten 箙と呼ばれる組み合わせ論的不変量と，A は標準的であるか否か，という二つの情報によって，A の導来同値類を完全に決定する．応用として，二つの有限表現型自己入射代数の安定圏（近年では特異圏とも呼ばれる）が同値ならば導来同値であることが従い，特に安定同値類と導来同値類が一致する．以上の精密な分類結果は，国内外の専門家を驚嘆させるものであった．浅芝氏の結果を追随する形で，多くの研究者によって様々な有限次元代数のクラスの導来同値類が調べられた．より一般の自己入射代数は浅芝氏自身や Skowronski, Holm を中心とするグループにより研究され，gentle 代数および Brauer グラフ代数と呼ばれる曲面の幾何学と深く関係する代数は，それぞれごく最近 Amiot-Plamondon-Schroll と Opper-Zvonareva によって導来同値類が完全に分類された．このような一連の潮流を生み出す契機となった浅芝氏の研究成果は，高く評価される．

(2) 2-圏論による被覆理論と導来同値

位相空間の被覆の類似として代数や加法圏の被覆が定義されるが，Gabriel の被覆理論

は，被覆の関係にある二つの有限次元代数の表現の圏の間に関手を与える．(1) で述べた分類では，浅芝氏自身による被覆理論の導来圏への拡張が重要な役割を果たす．浅芝氏は2011 年の論文で，従来の被覆理論における群作用の自由性および圏の骨格性の仮定を落とすことにより，適用範囲を遥かに広範にした．これを契機として同氏の研究は，被覆理論への 2-圏論の体系的な応用へと移行していく．

可換環 k 上の線形圏 $\mathcal{C}$ に対する群 G の作用は単対象圏からの関手と見なせるが，浅芝氏はこれを擬関手に拡張した擬 G-圏 $\mathcal{C}$ に対し，軌道圏への標準被覆関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ が 2-普遍性を持つことを示した．さらに擬 G-圏のなす 2-圏から G-次数付 k-圏のなす 2-圏への 2-関手 $-/G : G\text{-Cat} \to G\text{-GrGat}$ を構成し，その 2-擬逆が G とのスマッシュ積をとる 2-関手 $G\text{-GrGat} \to G\text{-Cat}$ であることを示した（Cohen-Montgomery 双対の一般化）．更なる一般化として浅芝氏は，群 G を小圏 I に一般化し，擬 G-圏の軌道圏を colax 関手 $X : I \to \mathcal{C}$ に対する Grothendieck 構成 $\int_I X$ で置き換えた設定へと，上記の結果を拡張した．また colax 関手に対する導来同値を適切に定義された傾部分圏の存在で特徴付ける（森田型定理）ことで，I 上の colax 関手の導来同値が Grothendieck 構成の導来同値を誘導することを示した．以上の結果は，導来同値の貼り合わせにより新たな導来同値を生み出す強力な構成法を提供するものである．

(3) パーシステントホモロジーへの応用

パーシステントホモロジー（以下 PH）は位相的データ解析の主たる研究手法の一つであり，与えられたデータから位相空間のフィルトレーションを構成し，そのホモロジー群を取ることによって定義される．構成から自然に PH は A 型箙の表現の構造を持つが，その直既約分解における各直既約加群の重複度を Auslander-Reiten 箙上にプロットすることにより，与えられたデータの形を捉えたパーシステンス図が定義される．このような箙の表現論との関連が提示された 2010 年以降，世界的規模で PH への応用が研究されている．一つの重要問題として, 2 パラメータ以上の場合への拡張が挙げられる．通常の PH は一つのパラメータでフィルトレーションを構成するが，二つ以上のパラメータで構成する場合の PH は，複数の A 型箙の道代数のテンソル積代数の表現の構造を持つ．この代数は一般には wild 表現型であるため，直既約分解の重複度を用いてパーシステンス図を定めるのは実用的でなく，より適切な方法を見出すことが重要な課題となっている．2010 年代の後半から，浅芝氏は元学生の吉脇理雄氏，中島健氏らと共に，有限次元代数の表現論の研究者としては国内で初めて PH への応用研究を開始した．当該分野の代表的研究者である平岡裕章氏のグループと共同で有限表現型 2 パラメーター PH を調べ，Auslander-Reiten 理論を用いたパーシステンス図の計算手法を与えた．さらに Auslander-Smalø の近似理論を応用したインターバル近似の概念を導入して，2 パラメーター PH の研究に応用した．現在，インターバル近似は上で述べたパーシステンス図の適切な定義の有力候補として着目されており，また Lie 理論で重要な準遺伝代数との関連をはじめ，純粋に表現論的観点からも大変興味深いものである．

浅芝氏は，以上三つの研究以外にも，被覆理論の Gorenstein 類似や，初期の有限次元代

数の local type に関する一連の研究，Ringel-Hall 代数による Lie 代数の実現，Brauer 樹木代数上の傾複体から生じる扇など様々な研究を行い，当該分野の指導者として幾つもの重要な成果を挙げてきた．さらに浅芝氏は，多数の国内外の若手研究者と共同研究を行うことにより，研究分野の発展に尽力され，また長年に渡り海外の研究者と活発に研究交流を行うことにより，国内の研究グループに大きな恩恵をもたらしてきた．静岡大学退職後も，京都大学高等研究院および大阪公立大学数学研究所に所属して，精力的に研究を行っている．以上のように浅芝氏の業績は代数学賞に誠に相応しいものである．