若槻聡氏「ジーゲル保型形式の明示的次元公式の研究」

今回の受賞対象となった若槻聡氏のもっとも重要な業績は, n 次ジーゲルモジュラー群のレベル N の主合同部分群 $\Gamma(N)$ についてのジーゲル保型形式に関する次の定理である.

Theorem（若槻聡） $N \geq 3$ でかつ $k \geq n+2$ ならば, 主合同部分群 $\Gamma(N)$ に関するウェイト k の正則ジーゲルカスプ形式の次元公式は, いくつかのベルヌーイ数の積の具体的な線形結合で明示的に表される.

ここで $N \geq 3$ という条件は群に捩れがないための条件, $k \geq n+2$ はセルバーグ跡公式ないしはコホモロジーの消滅条件から来ている.

2 次ジーゲル保型形式の次元公式は 1960 年代に井草準一氏が, $N = 1, 2, 4$ などのときに与えたことに始まり, その後 1970 年代に山崎正氏が代数幾何的な方法で $n = 2$ かつ $N \geq 3$ の場合に次元を求めた. これにやや遅れて, 森田康夫氏ないしは U. Christian が, セルバーグ・ゴドマンの跡公式により同じ次元を求めた. この跡公式は $\Gamma(N)$ の共役類に渉る積分で与えられ, 実際の計算は極めて複雑で, しかも大部分の積分がゼロになることを示すのも証明の重要なポイントであった. ここで, 次元公式の一部は概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値で記述された. 新谷卓郎氏は一般次元の $\Gamma(N)$ $(N \geq 3)$ のジーゲル保型形式の次元公式の一部（ある種の巾単元からの寄与）は対称行列全体のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊値でかけるという結果を証明した. 上記の新谷氏の公式には 2 つの未解決問題があった. ひとつはゼータ関数の特殊値の値自身は, $n = 2$ 以外では全くわからなかったという点である. 1990 年代始めに, 伊吹山知義氏と齋藤裕氏は, 問題になる概均質ベクトル空間のゼータ関数そのものが, 実はよく知られた関数で記述されることを示し, この系として, 問題の特殊値がベルヌーイ数の積で表されることを同時に示した. 新谷氏の公式のもう一つの問題点は, 彼の与えた巾単元以外の寄与がどうなるのか不明だった点にある. 実は 1970 年代から, $\Gamma(N)$ $(N \geq 3)$ に関する限りは, 新谷氏の公式にあらわれない元の寄与は全部消えていると信じている人が多かったが, 伊吹山・齋藤両氏の結果により, これらが消えていると仮定しても次元は正整数になるということがはっきりしたので, 一般次元での具体的な次元公式が予想として発表された.

そして, 今般, やっとその予想が若槻聡氏により, 他の寄与すべてが消滅することを示すことにより証明された. これは新谷氏の結果の 2 つ目の問題点を完全に解いた結果で, さらに若槻氏は, 一般次元でジーゲルモジュラー群と通約的, かつ捩れのない任意の離散群のスカラー値保型形式の次元公式が, ある種の概均質ベクトル空間のゼータ関数の特殊

値の和で書けることも証明した．ここでは個々の特殊値の値は与えられていないが, 非常に明確な一般公式と言える．

最近, Arthur 等により跡公式の一般論が大きく発展しているが, 若槻氏の証明はそれだけによるものではなく, ゴドマンの跡公式に発している．そこでは, たとえば巾単元には実際にどのような種類があるのかという分類をきちんと用いて, invariant weighted orbital integral と non-invariant orbital integral の比較, compact support でない test function での積分の収束, またその消滅など, 一歩一歩, 寄与の消滅が証明されている．以上は最近の跡公式の発展と古典的な跡公式を非常に上手に組み合わせた上で議論を進めている．何かが消滅するというのは, 結果的な公式では目に見えないが, そのような結果の重要性はコホモロジーの消滅定理などを見るまでもなく明らかである．ちなみにこの分野では上で記載した以外にも多くの歴代の日本人研究者がおり, 最近でこそ Chenevier, Lanne, Taïbi などが非常に深い研究を行っているが, 旧来は一般論以外の結果は外国にはあまり存在せず, その意味で, 今回の最終結論が日本の長い研究を完結させた集大成という面がある．ちなみに以下にも解説がある．

「若槻聡, 一般次数のジーゲル保型形式の次元公式,「数学」72 巻 3 号 (2022), 280–300.」

若槻氏の他の業績には次のような研究がある．まず, 次数 2 の正則でない保型形式の次元公式を求めている．これは離散系列の中で正則離散系列以外の large discrete series に対応する実解析的保型形式の具体的な次元公式で, このような結果は他に実ランク 1 の群についての荒川恒男氏の結果くらいしか存在しなかった．これらは捩れのある群を扱っているので, 結論は多数の寄与の和という複雑な形をしている．またベクトル値ジーゲル保型形式（ウェイトがスカラー値でない場合）についての次元公式も具体的に与えており, 次元公式の基本文献のひとつとなっている．そのほかに, 概均質ベクトル空間の b 関数の研究, 一般の跡公式に関する Hoffmann との共同研究などがあり, 最近は保型形式の解析数論的な方面にも新境地を開きつつある．

以上, 長年の懸案などを最終解決した若槻氏の優れた業績は代数学賞を受賞するにふさわしいものである．