毛利出氏「**Artin-Schelter 正則代数の分類とその表現論への応用**」

毛利氏の研究分野は非可換代数幾何である．これは Michael Artin により提出された二つの問題, AS(=Artin-Schelter) 正則代数の分類問題と非可換射影曲面の分類問題を中心に発展した分野であり, 通常の代数幾何学の手法や発想を活かして（非可換）代数やその加群圏, 導来圏を研究する分野である．世界各国に相当数の研究者を有し, 毎年のように国際研究集会が開催される活発な分野でもある．

以下, 毛利氏の研究成果をいくつか紹介する．

(1) 可換環の中で最も基本的な正則局所環は, Auslander-Buchsbaum-Serre の定理により, 大域次元の有限性というホモロジー代数的性質により特徴付けられる．しかし非可換環に対しては大域次元の有限性は十分に強い条件ではなく, 何らかの付随条件を課すことが常である．中でも Calabi-Yau 代数とその dg 代数版は, 圏論的代数幾何学や団代数の圏化で盛んに研究されている重要な対象である．1987 年に Artin-Schelter により導入された AS 正則代数は Calabi-Yau 代数の前身と言え, 量子逆散乱法で導入された Sklyanin 代数や, Yang-Mills 方程式から得られる Yang-Mills 代数など多くの重要な例を持つ．1990 年に Artin-Tate-Van den Bergh は, 3 次元 AS 正則代数に対して代数多様体と自己同型・可逆層からなる 3 つ組を定め, それから元の AS 正則代数を復元することにより, 3 次元 AS 正則代数の分類を代数幾何の問題に帰着した．毛利氏の研究グループは先行研究を遥かに精密化して, 3 次元 AS 正則代数の同型類の関係式による分類を大きく前進させた．毛利氏は S. Paul Smith 氏, 上山健太氏と共同で, Calabi-Yau 性を持つ 3 次元 AS 正則代数の関係式を決定した．持たない場合の分類は, 板場綾子氏, 松野仁樹氏ら毛利氏の学生・ポスドクに引き継がれ, 最近の松野氏の論文で関係式が 2 次の場合の分類が完了した．

(2) 代数 A 上の両側加群の複体で, テンソル積関手が導来圏の同値を与えるものを（両側）傾複体と呼ぶ．これを代数多様体上の直線束のテンソル積関手の類似物とみなすことにより, 源泰幸氏は有限次元代数 A 上の傾複体に対して豊富性の概念を導入した．特に, 反標準束の非可換類似物である逆 Serre 関手を与える傾複体が豊富である有限次元代数を, Fano 代数と呼ぶ．毛利氏は源氏と共同で, AS 正則代数の 0 次部分が体であるという従来の仮定を落として, Fano 代数と AS 正則代数の間に対応を構成した（源-毛利対応）．特に重要な場合は, d 次元 Fano 代数 A と, a 不変量が -1 の $d+1$ 次元 Calabi-Yau 代数 B の一対一対応として理解される．傾複体の豊富性の一般論から, B に付随する非可換射影スキームと Fano 代数 A の導来圏同値が得られるが, これは Beilinson による射影空間と有限次元代数の導来圏同値の遥かな拡張である．A から B を構成する操作は, 同時期に Keller が dg 代数に対して与えた Calabi-Yau 完備化の特別な場合であり, 代数多様体から標準束の全空間をとる操作の非可換類似である．1 次元 Fano 代数と 2 次元 Calabi-Yau 代数は, それぞれ non-Dynkin 型の箙の道代数と前射影代数という表現論における古典的対象であり, 一般の d 次元 Fano 代数と $d+1$ 次元 Calabi-Yau 代数は高次元 Auslander-Reiten 理論で重要な役割を果たす．このように源-毛利対応は非可換代数幾何と表現論に新たな架け橋を築くことにより, 大きなインパクトを与えた．

(3) Cohen-Macaulay 加群は可換環論, 代数幾何学における基本概念であり, その表現論は Auslander-Reiten, 吉野雄二らにより確立された．Gorenstein 環上の Cohen-Macaulay 加群のなす Frobenius 圏は, Buchweitz, Orlov の導入した特異圏と呼ばれる導来圏の Verdier 商を増強するものとして重要性が広く認識されている．一般に特異圏の構造は極めて複雑だが, 特定の次数付き Gorenstein 環の次数付き特異圏に

対しては, 傾理論によって有限次元代数の導来圏としての明快な記述が与えられる. 例えば 2 次元単純特異点の次数付き特異圏は, 対応する Dynkin 箙の道代数の導来圏と同値であり（Geigle-Lenzing, 梶浦宏成-齋藤恭司-高橋篤史）, また Gorenstein 孤立商特異点の次数付き特異圏は, ある有限次元代数の導来圏と同値である（伊山修-高橋亮）. 毛利氏は上山氏との一連の共同研究で, AS 正則代数を一般化した AS Gorenstein 代数と呼ばれる Gorenstein 環の非可換類似を扱い, 2 つの重要なクラスに対して, その特異圏とある有限次元代数の導来圏の間の同値を与えた. 一つは AS 正則代数への有限群作用から定まる非可換商特異点であり, 伊山-高橋の手法の非可換版と Koszul 双対性を融合した. もう一つは特定の AS 正則代数の剰余環として得られる非可換 2 次超曲面特異点である. そこでは超曲面特異点に対する Eisenbud の行列因子化の手法, 特に Knörrer 周期性と呼ばれる 2 つの超曲面特異点の特異圏の間の同値を非可換へと拡張しており, これ自体が重要な成果である.

(4) 毛利氏の他の特筆すべき成果としては, Koszul 代数と Koszul 双対性に関するもの, 三角圏に対する Riemann-Roch 型定理, Smith 氏との量子射影空間束に関する共同研究, 特に交叉理論の確立が挙げられる. 量子射影空間束の例としては量子線織曲面が挙げられるが, これは冒頭で述べた非可換射影曲面の分類に現れる重要なクラスである. 最近ではこの成果を活かして, 植田一石氏, 大川新之介氏と共同で非可換 Hirzebruch 曲面のモジュライ空間を調べた.

毛利氏は日本における非可換代数幾何の第一人者として幾つもの重要な成果を挙げている. さらに氏は自身の研究を進める以外にも, 学生の育成や国際研究集会の定期的な主催により, 分野の普及・発展に貢献している. 以上のように, 毛利氏の業績は非可換代数幾何と関連分野の発展に大きく寄与するものであり, 代数学賞に大変相応しいものである.