古澤昌秋氏「保型 L 函数の特殊値と周期に関する研究」

古澤昌秋氏は保型表現論において顕著な業績をあげています．古澤氏の保形表現論における業績は多岐にわたりますが，その中でも保型的 L 函数と周期に関する近年の業績はとくに優れたものです．

古澤氏は神戸大学の森本和輝氏との共同研究で 2 次の Siegel 保型形式に関する Böcherer 予想を精密な形で解決して多くの研究者の注目を集めました．Böcherer 予想とは以下のようなものです．

$$\Phi(Z) = \sum_T a(T, \Phi) \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ)), \qquad Z \in \mathfrak{H}_2$$

を重さ k の 2 次の Siegel カスプ形式で，Hecke 作用素の同時固有形式であるとします．ここで $\mathfrak{H}_2$ は 2 次の Siegel 上半平面で，T は 2 次の正定値半整数対称行列全体を走ります．Fourier 係数 $a(T, \Phi)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用による同値類のみで決まります．

E を判別式 $-D_E$ の虚 2 次体，h_E を E の類数，$H(D_E)$ を行列式が $D_E/4$ の正定値半整数対称行列全体とします．このとき，$H(D_E)$ の元は局所的にはすべて同型ですが，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用によって h_E 個の同値類に分かれます．一変数の保型形式の場合，正規化された Hecke 同時固有形式の Fourier 係数は局所的に定義される佐武パラメーターを用いて表すことができますが，2 次の Siegel 保型形式の Fouier 係数 $a(T, \Phi)$ は $H(D_E)$ に含まれる T の同値類によって異なる値を取ることがあるため，局所的な不変量だけで表すことはできません．そこで Böcherer は Fourier 係数 $a(T, \Phi)$ の T の同値類に関する和を取ることを考え，

$$B(\Phi; E) = \frac{1}{w(E)} \sum_{T : H(D_E)/\sim} a(T.\Phi)$$

と定義しました．ここで $w(E)$ は E の単数群の位数で，T は $H(D_E)$ に含まれる同値類の代表元を走ります．このとき，Böcherer は

$$|B(\Phi; E)|^2 = c_\Phi \cdot D_E^{k-1} \cdot L(1/2, \Pi(\Phi) \times \chi_E) \qquad (c_\phi \text{ は } \Phi \text{ のみに依存する定数})$$

という関係式が成り立つと予想しました．ここで χ_E は E に対応する Dirichlet 指標で，$L(s, \Pi(\Phi) \times \chi_E)$ は Φ のスピノル L 函数を χ_E でツイストしたものです．この Böcherer 予想は 1986 年頃プレプリントとして流布され，Φ の Fourier 係数と $L(s, \Pi(\Phi) \times \chi_E)$ の中心特殊値との関係を与えるものとして多くの研究者の関心を集めましたが，その解決は難しく，長きにわたって未解決のままでした．古澤氏は保型表現・保型的 L 函数の研究を進めるうちに Böcherer 予想に注目し，古澤氏の指導教員であった Shalika 教授とともに長年にわたってその証明に向かって研究を重ねてきました．

古澤氏は Shalika 教授が亡くなった後も Böcherer 予想の解決に向けて研究を続けてきましたが，近年になって新たな展開がありました．2 次のシンプレクティック群 Sp_2 は 5 次の直交群と同種なので 2 次の Siegel 保型形式は 5 次の直交群上の保型形式と考えることもできます．このように考えたとき，Böcherer 予想に現れる $B(\Phi; E)$ は 5 次の直交群上の保型形式の特殊 Bessel 型の周期と呼ばれるものととらえることができます．直交群上の保型形式の周期に関しては市野・池田予想，Gan-Gross-Prasad 予想などの予想がありましたが，2016 年頃 Liu はこれらの予想を参考にして Bessel 型の周期に関する精密な予想を定式化しました．古澤氏は森本氏との共同研究において，テータ対応，局所安定積分などの道具立てを駆使することにより Liu の予想を $\mathrm{SO}(2n+1) \times \mathrm{SO}(2)$ の特殊 Bessel 周期に対して証明しました．この結果は $n = 2$ の場合，Böcherer 予想を含みます．これにより古澤氏の長年の努力はついに実を結び，Böcherer 予想は

$$\frac{|B(\Phi; E)|^2}{\langle \Phi, \Phi \rangle} = 2^{2k-4} \cdot D_E^{k-1} \cdot \frac{L(1/2, \Pi(\Phi))\, L(1/2, \Pi(\Phi) \times \chi_E)}{L(1, \Pi(\Phi), \mathrm{Ad})}$$

という精密化された形で証明されました．ここで $\langle\Phi,\Phi\rangle$ は Φ の Petersson ノルム，$L(s,\Pi(\Phi))$ は Φ のスピノル L 函数，$L(s,\Pi(\Phi),\mathrm{Ad})$ は Φ の随伴 L 函数を表します．

このように古澤氏は Siegel 保型形式に関する大きな未解決問題であった Böcherer 予想を長年の努力により解決し，保型 L 函数の特殊値と周期の理論に大きな足跡を残しました．古澤氏の研究は非常に重要で興味深いものであり，代数学賞にふさわしいものです．