藤野修氏「小平消滅定理の一般化と双有理幾何への応用」

藤野修氏は双有理幾何学、中でも主に極小モデル理論を中心に研究しているが、解析的手法を用いたり、トーリック幾何学の研究も行うなど、幅広く研究を行ってきた。

20 世紀前半までの曲面双有理分類論の基礎になっていた極小モデル理論（の原型）では (-1) 曲線と呼ばれる例外曲線を見つけるのに場合分けによる複雑な議論を用いていて高次元化は困難であった。それが 1980 年代に、森重文による端射線の発見を契機に、X. Benveniste、川又雄二郎、J. Kollár、宮岡洋一、M. Reid、V. V. Shokurov 等の人々の貢献により、極小モデル理論の (幾つかの基本定理からなる) 枠組みは一般次元で整備された。極小モデル理論は森、川又、宮岡等による 3 次元の場合の確立、Kollár 等によるその後の log 極小モデル理論を含めて Shokurov の哲学に沿って発展してきたが、その技術的な核は、広中特異点解消と共に、小平消滅定理の一般化である川又・Viehweg 消滅定理であった。また、極小モデル理論で重要な川又対数端末 (klt) 特異点という概念があるが、それは川又・Viehweg 消滅定理がうまく適用出来るぎりぎりの特異点と言える。因みに何れの消滅定理も、非特異複素射影多様体 X の Hodge スペクトル系列

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

が E_1 退化することから従う点で、klt 特異点の極小モデル理論は純 Hodge 構造を基にしている。

藤野氏は、混合 Hodge 理論のスペクトル系列を考えることにより極小モデル理論を「混合化」出来るのではないかと考えた。様々な試行錯誤の結果、D を X 上の単純正規交叉因子とすると、スペクトル系列

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p(\log D)(-D)) \Rightarrow H_c^{p+q}(X \setminus D, \mathbb{C})$$

の E_1 退化が正しい研究対象であることを発見した。彼は、コンパクト台コホモロジーに入る混合 Hodge 構造を用いることにより極小モデル理論を『混合』化することが可能で、この混合化によって高次元代数多様体の対数標準 (lc) 特異点に消滅定理を適用する際の制約がなくなる、と見抜いたのである。これが 2006 年から 2007 年にかけての藤野氏の考察と聞いている [F2017, 1.5–1.7]。

因みに同じ頃、C. Birkar、P. Cascini、Hacon、McKernan による論文 [BCHM] は klt 特異点の範囲でフリップの終止定理等を証明することで、極小モデル理論を多くの重要な場合に確立し、幾つかの重要な問題の解決に応用した。それにより極小モデル理論は、双有理幾何学の中心的な道具として大きく発展し広く普及している。

藤野氏は、その展開に鑑みて、lc 特異点を含めた極小モデル理論の枠組みを整備する必要性を感じたようだ。結局、消滅定理レベルからの「混合化」を目指した藤野氏は 10 年間ほど単独で理論を発展させることとなった。余談だが、ここで大学院時代に藤野氏の指導教員だった森重文氏のことばを引用しておく。「彼が独自の感性を大事にして研究していたのを思い出した。修士時代に半対数標準 (slc) 極小曲面のアバンダンス予想の論文を読んだ時に抱いた違和感を基に，その結果を 3 次元化するのに成功した [F2000]。今回はさらに，流行を追わない，研究者としての芯の強さも改めて感じた。」

話を戻すと、藤野氏はアイデアを着実に実現していった。F. Ambro が提唱した quasi-log variety の理論に厳密な基礎付けを与えて確立した [F2011a, F2017]。更に E. Bierstone–P. D. Milman による広中特異点解消の精密化も用いて、lc 特異点ばかりでなく、slc 特異点をも含んだ形で極小モデル理論の枠組みを拡張した [F2011b, F2014]。例えば、高々slc 特異点しか持たない射影多様体 X とそ

の上の豊富な直線束 $\mathcal{L}$ に対して、小平消滅定理の slc 版 [F2014, Theorem 1.8] が証明された。

$$H^i(X, \omega_X \otimes \mathcal{L}) = 0 \qquad (i > 0)$$

この小平消滅定理は X が slc という仮定を弱めると反例 [F2017, 5.9.5 (Sommese)] がある。枠組みの基本定理も、[F2017, 5.9 Examples] 等を見ると、仮定をぎりぎりまで弱めてあることがわかる。

藤野氏はさらに、藤澤太郎氏と共同で、混合 Hodge 構造の変動の理論も研究し高次元代数多様体論で非常に重要な半正値性定理の強力な一般化も確立した [FF2014]。その威力を発揮したのが、安定多様体のモジュライ空間の射影性に関する [F2018] である。種数 2 以上の代数曲線のモジュライ空間のコンパクト化のために導入されたのが、安定曲線という、高々ノードしか持たず標準束が豊富な（可約かもしれない）代数曲線であった。その高次元版である安定多様体は、等次元で高々slc 特異点しか持たず（多重）標準束が豊富な（可約かも知れない）射影多様体として導入された。極小モデル理論により、安定多様体のモジュライ空間が構成されている。モジュライ空間がコンパクトな代数空間であることは既知であったが、射影的かどうかが未解決であった。その射影性を、Kollár の射影性判定法を用いて、完全に解決したのが [F2018] である。

以上で、藤野氏が注力してきた、混合 Hodge 理論を用いた小平消滅定理の一般化とその応用について述べたが、それ以外の業績についても少しだけ触れよう。論文 [FM2000] は楕円曲面に対する小平の標準束公式を一般化した。この新しい標準束公式は当初の想定以上に有効であり、高次元代数多様体論で不可欠のものになっている。例えば、[BCHM] で確立された、射影多様体の標準環の有限生成性の証明では、一般型の場合に帰着するための道具として使用されている。また一般ファイバーが K3 曲面やアーベル多様体などの場合に氏は標準束公式を精密化した。

藤野氏はトーリック幾何学においても多くの業績を上げている。例えば、トーリック多様体上の消滅定理については、任意標数において、秋月・中野型、小平型、川又・Viehweg 型など様々な形の結果が、V. I. Danilov 等により得られていたが、氏はトーリック多様体の倍数写像を用いてそれらを含む包括的な結果を得た [F2007]。そのアイデアの簡明さと結果の強力さは印象的で、コロンブスの卵を見せられたような気分にさせる。

このように、氏は独自の視点から高い業績を上げているが、同時に、若手研究者の育成にも熱心である。双有理幾何学に対して、これからも幅広い貢献が期待される藤野修氏は、代数学賞に相応しい研究者である。

藤野修氏の出版物リスト (抜粋)

[F2000] Abundance theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.

[FM2000] (with Shigefumi Mori) A canonical bundle formula, J. Differential Geom. **56** (2000), no. 1, 167–188.

[F2007] Multiplication maps and vanishing theorems for toric varieties, Math. Z. **257** (2007), no. 3, 631–641.

[F2011a] Introduction to the theory of quasi-log varieties, *Classification of algebraic varieties*, 289–303, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[F2011b] Fundamental theorems for the log minimal model program, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 3, 727–789.

[F2014] Fundamental theorems for semi log canonical pairs, Algebr. Geom. **1** (2014), no. 2, 194–228.

[FF2014] (with Taro Fujisawa) Variations of mixed Hodge structure and semipositivity theorems, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **50** (2014), no. 4, 589–661.

[F2017] Foundations of the minimal model program, MSJ Memoirs, **35**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017.

[F2018] Semipositivity theorems for moduli problems, Ann. of Math. (2) **187** (2018), no. 3, 639–665.