

高橋亮氏「可換環の加群圏の部分圏の研究」

高橋氏は、主に可換環論の研究を行ってきた。その研究業績は非常に多岐にわたり、102編¹もの原著論文（プレプリントを含む）を執筆している。28編の単著論文を書いていることは高橋氏の単独研究遂行能力の高さを示し、異なる50名もの研究者（日本人22名、外国人28名）と計74編の共著論文を書いていることは、高橋氏の共同研究能力、国際研究能力、そして研究の注目度の高さを窺わせるものである。高橋氏は、極めて多様な土俵で高橋氏らしい能力を発揮して成果を挙げ続けてきた。細分化の進んだ可換環論の主要な話題すべてに精通していて、若きリーダーの一人として文字通り活躍している。

高橋氏が最も重点的に行ってきた研究は、可換環論の表現論との境界領域、すなわち「可換環の表現論」である。一般に、環の表現論の主題は、与えられた環の加群圏（その環上の加群全体のなす圏）の構造を決定することである。古典的な群の表現論は与えられた群の線形表現を考察する分野だが、それは群環上の加群を考えることと同値なので、その意味で環の表現論に含まれる。環の加群圏の構造は直既約な加群をすべて決定することで明らかになるが、それは一般には不可能とされている（Drozdの tame-wild 二分定理）。こうして現代の環の表現論においては、加群圏の導来圏やそれらの部分圏の構造を解析し、そこで得られた情報を基にして元の加群圏の構造の理解を目指すという手法が主流となっている。

有限次元多元環の表現論の高次元版として1970年代に誕生したCohen–Macaulay表現論（Cohen–Macaulay環上の極大Cohen–Macaulay加群のなす圏の研究）が、可換環の表現論において中心的な役割を果たしてきた。Cohen–Macaulay環は、元々は代数幾何学の局所理論としてのイデアル論においてその重要性を見出された環だが、ホモロジー代数的にも組合せ論的にも重要な意味を持ち、まさしく現代の可換環論における最も主要な環である。従来の有限次元多元環の表現論とは異なり、Cohen–Macaulay表現論は代数幾何学的な要素を多分に含む。たとえば、有限表現型のCohen–Macaulay環は、アフィンスキームとして非常に良い特異点を定める。McKay対応やAuslander–Reiten理論に代表される2次元のCohen–Macaulay表現論が、今世紀に入ってから団傾理論（cluster tilting theory）として高次元化された。さらに近年は、Kontsevichが提唱したホモロジカルミラー対称性予想関係で行列因子化（matrix factorization）を共通言語として物理学との交流も行われ、Cohen–Macaulay表現論は活気付いている。

上述のような状況の下、高橋氏はCohen–Macaulay表現論を軸とした可換環の表現論を中心に、可換環論の各種の話題に関する研究を展開してきた。ここでは既に国際的な定評を得ている高橋氏の最も主要な研究に焦点を絞る、その成果をいくつか紹介する。

(1) Auslander–Buchweitzの近似定理は、Cohen–Macaulay局所環上の加群の構造の理解が極大Cohen–Macaulay加群の構造の理解に帰着することを保証するCohen–Macaulay表

¹2019年12月現在

現論の基本定理である。高橋氏は、この近似定理の逆に相当する主張を示し、Buchweitz–Greuel–Schreyer の定理を改良する系「完備局所環が単純特異点であるための必要十分条件は、非自由直既約全反射加群が一個以上かつ有限個であることである」を導いた。これは、全反射加群の振る舞いは基礎環の Gorenstein 性には無関係だろうという大方の予想を覆すもので、一躍脚光を浴びた。この定理は、米国可換環論業界では「Postdoc Theorem」と呼ばれている（この定理を述べた論文の著者が高橋氏含め当時全員ポスドクだったため）。その後高橋氏は、任意の Gorenstein Hensel 局所環の加群圏の反変有限分解部分圏をすべて決定した。1990 年代初頭に Auslander と Reiten が、大域次元が有限な Artin 多元環の加群圏の反変有限分解部分圏を分類し、森田理論の一般化である傾理論と反変有限分解部分圏の密接な関係を見出したが、そこでは大域次元の有限性が本質的であり、それを仮定しないと無数の反変有限分解部分圏が現れて分類は絶望的と考えられていた。しかし、高橋氏の分類定理は大域次元の有限性の仮定を必要としない。しかも、前出の「Postdoc Theorem」のより体系的な別証明を副産物としてもたらしたため、非常に高く評価された。

(2) 部分圏の分類問題は、環論、代数幾何学、モジュラー表現論、安定ホモトピー論、モチーフ理論、シンプレクティック幾何学といった多くの分野に跨る問題であり、分野間の交流を通じて盛んに研究されている。高橋氏は、超曲面の特異圏 (singularity category) の thick 部分圏を分類した。これは Benson–Carlson–Rickard の定理の高次元版の一種であり関心と呼んだ。応用として、Keller–Murfet–Van den Bergh の定理を改良し、Huneke–Wiegand の定理を回復した。また、階級一致関数という Spec 上の自然数値関数を考案し、この関数を用いて完全交叉環の加群圏の分解部分圏を完全に分類した。これにより、正則環上の二つの加群の一方が他方から生成されるか否かという非常に難解な問題が、両者の局所的な射影次元を測るという数値的な（ゆえに計算可能な）問題に落とし込めることがわかった。副産物として、Auslander が 1962 年の国際数学会議で行った講演の主定理が回復された。さらに高橋氏は、与えられた可換環上の右有界複体全体のなす導来圏のコンパクト生成および余コンパクト生成な thick テンソルイデアルを完全に分類した。これは、完全複体の導来圏に関する基本定理である Hopkins–Neeman の分類定理を包括するものである。また、同導来圏の Balmer spectrum の位相構造を解析することで Balmer が 2010 年の国際数学会議で提唱した予想に対して否定的解答を与え、話題となった。

(3) 三角圏の Rouquier 次元の概念は、Bondal, Rouquier, Van den Bergh によって、コホモロジカル関手の表現可能性や表現次元を調べるために導入され、表現論においてさまざまなアプローチによって活発に研究されている。高橋氏は、等標数優秀局所環の導来圏の Rouquier 次元が必ず有限になることを証明した。これは完全体上本質的有限型の環の導来圏の Rouquier 次元が有限であるという Rouquier の定理をはるかに一般化するものであり、体上の代数の導来圏の Rouquier 次元の有限性に関して現時点で最も強い結果である。また高橋氏は、Rouquier 次元の類似物としてアーベル圏の部分圏の次元と半径の概念を導入し、Cohen–Macaulay 局所環の加群圏において punctured spectrum で局所自由な極大 Cohen–Macaulay 加群のなす部分圏が有限次元をもつことで孤立特異点を特徴付けた。これは「有限表

現型の Cohen–Macaulay 局所環は孤立特異点である」という Auslander, Huneke, Leuschke, Wiegand による非常に著名な定理の相当進んだ一般化になっている。また, Cohen–Macaulay 局所環の加群圏の分解部分圏のうち有限半径をもつものは極大 Cohen–Macaulay 加群からなるものに限るだろうという予想を提起し, 完全交叉環に対して正しいことを示した。高橋氏の導入した次元と半径の概念は, 可換環論における表現論・特異点論・ホモロジー代数という三つのブランチを繋げるものであり, 注目を集めている。

以上のように, 高橋氏の業績は可換環論と表現論の発展に大きく寄与するものであり, 代数学賞に大変相応しいものである。