2006年度代数学賞

吉田敬之氏「保型形式と周期の研究」

数論的多様体とそのコホモロジー類の最も豊かで興味深い例は，いうまでもなくモジュラー多様体と保型形式です．吉田敬之氏は，研究者としての出発以来，一貫して保型形式理論とその周辺を深く詳しく研究してきました．このたび授賞の対象とされたのは，氏が最近 10 年ほどにあげられてきた業績で，大きく分けて三つの話題（Hilbert 保型形式，Siegel 保型形式，絶対周期記号）を扱っています．それぞれについて簡単に解説します．

(1) Hilbert 保型形式の周期に関する志村予想の解決

周期の研究は，保型形式の理論において重要なウェイトを占めています．ここでいう周期とは, 保型形式が定義されている多様体のサイクルで保型形式を積分して得られる量のことです. 保型形式から得られる L 函数の特殊値をこのような周期と関係付けて調べるのは，周期の研究の中心的話題です. たとえば n を $0 < n < k$ なる整数とするとき, 一変数の重さ k の尖点形式 f に対して周期

$$\int_0^\infty f(it)t^{n-1}dt$$

を考えることができますが, これらの周期の本質的部分は符号 $\varepsilon = (-1)^n$ だけで定まることが知られています．この周期（の本質的部分）を $c^\varepsilon(f)$ で表すと L 函数の特殊値 $L(n, f)$ は 2 つの周期 $c^+(f)$, $c^-(f)$ によって表される, というのが古典的な Eichler–志村の理論です.

志村五郎氏はこの理論をさらに総実代数体上の Hilbert 保型形式に対して拡張しました．F を n 次の総実代数体, $\mathbf{f}$ を F 上の Hilbert 保型形式とします．志村氏は $\mathbf{f}$ から生ずる L 函数を深く研究し, このような L 函数の特殊値が, F の n 個の無限素点における符号分布に応じて得られる 2^n 個の周期で表されることを証明したうえで，この 2^n 個の周期が実は本質的には$2n$ 個の周期の組み合わせによって得られることを予想しました．吉田氏はこの予想に取り組み，重さが非常に小さい例外的な場合を除くと，志村の予想が正しいことを証明しました (*On a conjecture of Shimura concerning periods of Hilbert modular forms*, Amer. J. Math. **117** (1995), 1019 – 1038).

(2) Siegel 保型形式の基本的周期と L 函数の特殊値の研究

花村氏の項で解説したように，大雑把に言って（純）モチーフとは，代数多様体のコホモロジーの直和成分から得られる仮想的な対象です．モチーフ M から得られる L 函

数の特殊値 $L(n,M)$ は M から得られるある種の周期で表される，というのが有名な Deligne の予想です．

種々の保型形式に対してモチーフを対応させることができると一般に信じられています．吉田氏は，次数 m の Siegel 保型形式 f に対して，対応するモチーフの存在と Deligne の予想をひとまず仮定すれば，

(a) f は高々 $m+1$ 個の基本的な周期をもち，

(b) f から生ずる種々の L 函数の特殊値は，これらの基本的な周期の組み合わせによって表される，

ということを示しました (*Motives and Siegel modular forms*, Amer. J. Math. **123**(2001), 1171 – 1197)．

吉田氏のこの仕事は一変数保型形式に関する Eichler–志村理論を多変数 Siegel 保型形式の場合へと拡張するもので，Siegel 保型形式から生ずる L 函数の研究に一つの明快な見通しを与えたものとして，高く評価されています．

(3) Artin の L 函数の対数的導関数の特殊値と絶対周期記号の研究

志村五郎氏はCM型のアーベル多様体のいろいろな周期が，単項関係式とよばれる関係式を満たすことを示しました．この関係式を用いると，周期に対する双線型形式 $p_K(\sigma,\tau)$ が定義され，志村の周期記号と呼ばれています．K をCM体で $\mathbb{Q}$ 上 Galois 拡大であるもの，ψ を $G=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の表現で複素共役に関するある種の条件を満たすものとします．吉田氏は ψ から定まる Artin の L 函数 $L(s,\psi)$ の対数的導関数 $L'(s,\psi)/L(s,\psi)$ を考察しました．吉田氏は多くの数値計算に基づき，特殊値 $\exp(L'(0,\psi)/L(0,\psi))$ が志村の周期記号を用いて表されること（２次体に対する Chowla–Selberg 公式の一般化）を予想し，特殊な場合にはこの予想が実際に成り立っていることを示しました．さらに吉田氏は新谷氏の錐体分解と Barnes の多重 Γ 函数を用いて絶対周期記号 $g_K(\sigma,\tau)$ を定義し，志村の周期記号は本質的には絶対周期記号で表されると予想しました．この絶対周期記号を用いることによって，上記の予想はより精密な形で定式化されることになりました．

これらの予想は Hilbert の第 12 問題（類体の構成問題）の解決につながるものとして，多くの研究者の注目を集めていて，吉田氏はこの話題についての一連の成果を著書 *Absolute CM-Periods* (Mathematical Surveys and Monographs Vol. 106, AMS, Providence, RI, 2003) にまとめています．また加塩朋和氏との共同研究において，この予想の p 進的な類似についても研究を進めています．

以上のように吉田氏の研究は L 函数の特殊値と保型形式の周期の研究を本質的に深めるものであり，代数学賞を受賞するのにまことにふさわしいものです．