第 70 回 代数学シンポジウム報告集

於　九州大学　西新プラザ

2025 年 8 月 26 日（火）~8 月 29 日（金）

第70回 代数学シンポジウム

日程：2025年8月26日（火）～ 8月29日（金）
会場：九州大学　西新プラザ　大会議室 AB （https://nishijinplaza.kyushu-u.ac.jp/）
開催方法： 現地開催（オンライン配信なし）
主催：日本数学会代数学分科会[1]
プログラム責任者：
[代数幾何] 岸本　崇（埼玉大学）・藤田　健人（大阪大学）
[環論] 山浦　浩太（山梨大学）・村井　聡（早稲田大学）
[数論] 古庄　英和（名古屋大学）・武田　秀一郎（大阪大学）
[群論・表現論] 小寺　諒介（千葉大学）・安部　利之（愛媛大学）
会場責任者：小林　真一（九州大学）
シンポジウム責任者：平野　幹（愛媛大学、連絡責任評議員）

プログラム

8月26日（火）

10:00–11:00 臼井　智（東京都立産業技術高等専門学校）

単項多元環上のゴレンシュタイン射影加群のなす安定圏の三角圏構造

11:15–12:15 佐野　太郎（神戸大学）

Fano 重み付き超曲面の K-安定性

14:00–15:00 松野　仁樹（公立諏訪東京理科大学）

The classification of noncommutative projective planes and noncommutative quadrics

15:15–16:15 柴田　崇広（福島大学）

On endomorphisms of affine surfaces

16:30–17:30 辻栄　周平（北海道教育大学）

グラフ超平面配置の q-変形

8月27日（水）

10:00–11:00 吉川　翔（東京科学大学）

Quasi-F-splitting and singularities in mixed characteristic

*11:15–12:15 神田　遼（大阪公立大学）

環の表現論におけるスペクトラム理論

[1]本研究集会は，以下の科研費による支援を受けています：
基盤研究 (A)：反円分岩澤理論の新展開と L-関数の特殊値公式（領域番号 22H00096） 代表者：小林 真一

*14:00–15:00　阿部　健（同志社大学）

一般型超曲面の部分多様体に関するいくつかの結果

*15:15–16:15　大坪　紀之（千葉大学）

Gauss 超幾何モチーフとそのアデール的実現

*16:30–17:30　廣惠　一希（千葉大学）

Riemann 球面上の有理型線型微分方程式とルート系

懇親会　西新プラザ（代数学シンポジウム会場にて立食形式で開催）　18:00 開始（17:30 より受付）

8 月 28 日（木）

*10:00–11:00　遠藤　直樹（明治大学）

Blow-up 代数の環構造論

*11:15–12:15　藤野　修（京都大学）

極小モデル理論の解析化

*14:00–15:00　中村　健太郎（九州大学）

斜交的 p 進 Galois 表現に対するパリティ予想について：岩澤理論的なアプローチ

*15:15–16:15　功刀　直子（東京理科大学）

有限群の表現論におけるブロックの森田同値および導来同値について

16:30–17:30　Henrik　Bachmann（名古屋大学）

sl_2 代数と多重アイゼンシュタイン級数について

8 月 29 日（金）

10:00–11:00　元良　直輝（富山大学）

W 代数の定義の変形とその応用について

11:15–12:15　山内　卓也（東北大学）

Gan-Gurevich リフトのフーリエ係数の数論

14:00–15:00　柴田　大樹（岡山理科大学）

スーパー代数群の既約表現のパラメータ集合について

15:15–16:15　森本　和輝（神戸大学）

ユニタリ群上の Whittaker 周期の市野-池田型公式について

16:30–17:30　栗原　大武（山口大学）

アソシエーションスキームや対称空間に付随する多変数多項式について

「*」の付いた講演は、専門分野以外の方も対象とした、サーベイなどを含む講演です。

単項多元環上のゴレンシュタイン射影加群のなす安定圏の三角圏構造

臼井　智 *

1　背景

本稿では，多元環は体 K 上の有限次元多元環を意味するものとする。特に断りがない限り，加群は右加群とし，また常に有限生成であると仮定する。

ゴレンシュタイン射影加群の研究の起源は，Auslander-Bridger [3] によるゴレンシュタイン次元が 0 の加群の研究にまで遡る。その後，Enochs-Jenda [15] によって，ゴレンシュタイン次元が 0 の加群を一般化する形でゴレンシュタイン射影加群が導入された。この名称は，ゴレンシュタイン射影加群がゴレンシュタインホモロジー代数において射影対象としての役割を担っていることに由来している。ゴレンシュタイン射影加群は，全反射加群 [4] とよばれることもあり，特に，多元環が岩永–ゴレンシュタインである場合には，極大 Cohen-Macaulay 加群 [6] に一致する。

さて，多元環 Λ 上のゴレンシュタイン射影加群のなす圏 $\operatorname{Gproj}\Lambda$ は，射影 Λ-加群を射影対象とするようなフロベニウス圏の構造をもつ。したがって，その安定圏 $\underline{\operatorname{Gproj}}\,\Lambda$ には三角圏の構造が自然に入る。このとき，安定圏 $\underline{\operatorname{Gproj}}\,\Lambda$ から Λ の特異圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{sg}}(\Lambda)$ への忠実充満な三角圏関手が存在し，この関手が三角圏同値になることと，Λ が岩永–ゴレンシュタインであることが同値であることが知られている [5]。現代の多元環の表現論における主要な目標の一つに，多元環に付随する種々の圏（加群圏，導来圏，特異圏など）の構造解明がある。したがって，安定圏 $\underline{\operatorname{Gproj}}\,\Lambda$ の三角圏構造の解明は，多元環の表現論における重要な課題の一つといえる。

これまでに，[7, 8, 10, 12, 22, 26, 29–31, 33, 34, 36, 38, 40, 41] などの数多くの研究者によって，$\underline{\operatorname{Gproj}}\,\Lambda$ の三角圏構造が決定されてきたが，その多くが岩永–ゴレンシュタイン多元環を対象としている。これに対して近年では，岩永–ゴレンシュタインとは限らない多元環の中でも，現象解析のテストケースとして多用される単項多元環に注目が集まっている。実際，Ringel [35] は，最も基本的な環のクラスの一つである中山多元環 Λ に対して，$\underline{\operatorname{Gproj}}\,\Lambda$ がある特定の自己入射中山多元環の安定加群圏として実現可能であることを示している。また，(i) Λ が gentle 多元環の場合 [23], (ii) Λ が overlap を持たない単項多元環の場合 [13], (iii) Λ が入射次元が高々 1 の岩永–ゴレンシュタイン単項多元環の場合 [32] においても研究が進んでおり，いずれの場合も，$\underline{\operatorname{Gproj}}\,\Lambda$ がある自己入射中山多元環の安定加群圏として実現可能であることが示されている。

本稿では，次章において本稿で必要となる概念およびその基本事項を紹介したのち，本間孝拓氏 (弓削商船高等専門学校) との共同研究によって得られた成果 [20] を概説する。注意

*東京都立産業技術高等専門学校 (usui@metro-cit.ac.jp)

4.2 で述べるように，我々の結果は，上述の先行結果を任意の単項多元環の場合に統一的に拡張するものとなっている。

2　準備

本章では，本稿で必要となる概念を紹介する。まず，記号を準備する。

多元環 Λ に対して，Λ の反転環を Λ^{op}，Λ の k 個のコピーの直積を $\Lambda^{(k)}$ で表す。Λ-加群の圏を $\operatorname{mod}\Lambda$，射影 Λ-加群からなる $\operatorname{mod}\Lambda$ の充満部分圏を $\operatorname{proj}\Lambda$ で表す。Λ-加群 M の入射次元を $\operatorname{id}_\Lambda M$ で表す。

本稿では，次数付き多元環は正次数付き多元環を意味するものとする。次数付き Artin 多元環の表現論については，[16, 17] を参照されたい。次数付き多元環 $\Lambda = \bigoplus_{i\geq 0}\Lambda_i$ に対して，次数付き Λ-加群の圏 $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ を次で定める。

- 対象は次数付き Λ-加群 $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ とする。
- 次数付き Λ-加群 M, N に対して，M から N への射集合を次で定める：

$$\operatorname{Hom}_\Lambda^{\mathbb{Z}}(M,N) := \{f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M,N) \mid f(M_i) \subseteq N_i \ (\forall i \in \mathbb{Z})\}$$

次数付き射影加群からなる $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ の充満部分圏を $\operatorname{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ と表す。次数付き Λ-加群 M の次数付き入射次元を $\operatorname{gr.id}_\Lambda M$ で表す。次数付き Λ-加群 M と整数 i に対して，$M(i)_j := M_{i+j}$ により，M の次数 i シフト $M(i) \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ を定める。これにより，次数シフト関手 $(i) : \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ が定まる。次数シフト関手は，完全かつ K-線形な $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ の自己圏同型である。

集合 X に対して，X の濃度を $|X|$ で表す。また，X の元で張られる K-ベクトル空間を KX で表す。特に，$X = \{x\}$ が一元集合である場合には，KX を単に Kx と書く。

圏 $\mathcal{C}$ の k 個のコピーの直積圏を $\mathcal{C}^{(k)}$ で表す。加法圏 $\mathcal{C}$ 上の複体のなすホモトピー圏を $\mathcal{K}(\mathcal{C})$，有界複体のなすホモトピー圏を $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$ で表す。アーベル圏 $\mathcal{A}$ の有界導来圏を $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$ で表す。Krull-Schmidt 圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}$ の直既約対象の同型類全体の集合を $\operatorname{ind}\mathcal{C}$ で表す。例えば，多元環 Λ に対する $\operatorname{proj}\Lambda$，$\operatorname{mod}\Lambda$ や次数付き多元環 Λ に対する $\operatorname{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$，$\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ は Krull-Schmidt 圏である。ホモトピー圏や導来圏については [28, 42] を，Krull-Schmidt 圏については [27, 37] を参照されたい。

2.1　ゴレンシュタイン射影加群

本節では，ゴレンシュタイン射影加群に関する基本事項のうち，本稿に関連のあるものについて説明する。詳細については，[9] を参照されたい。

ゴレンシュタイン射影加群の定義から始める。

定義 2.1 ([15])**.**　(1) 射影 Λ-加群からなる非輪状複体

$$P_\bullet \ : \ \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} P_{-2} \to \cdots$$

が **totally acyclic** であるとは，射影左 Λ-加群からなる複体 $\operatorname{Hom}_\Lambda(P_\bullet, \Lambda)$ が非輪状になるときをいう。

(2) Λ-加群 M が**ゴレンシュタイン射影的**であるとは，ある totally acyclic 複体 $P_\bullet$ が存在して M が 0 次微分 $d_0 : P_0 \to P_{-1}$ の核 $\operatorname{Ker} d_0$ と同型になるときをいう。

注意 2.2. ゴレンシュタイン射影 Λ-加群 M に対して，$M \cong \operatorname{Ker} d_0$ をみたす totally acyclic 複体 $P_\bullet$ は M の **complete resolution** とよばれる。この complete resolution は，ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\operatorname{proj}\Lambda)$ において，同型を除いて一意的に定まる [14]。

Λ が**岩永–ゴレンシュタイン** [6, 21] であるとは，Λ の片側加群としての入射次元 $\operatorname{id}_\Lambda \Lambda$, $\operatorname{id}_{\Lambda^{\mathrm{op}}} \Lambda$ がともに有限であるときをいう。このとき，等式 $\operatorname{id}_\Lambda \Lambda = \operatorname{id}_{\Lambda^{\mathrm{op}}} \Lambda$ が成り立つ [39]。例えば，大域次元が有限であるような多元環は岩永–ゴレンシュタイン多元環である。また，自己入射多元環は $\operatorname{id}_\Lambda \Lambda = 0$ の岩永–ゴレンシュタイン多元環 Λ に他ならない。

ゴレンシュタイン射影 Λ-加群のなす $\operatorname{mod}\Lambda$ の充満部分圏を $\operatorname{Gproj}\Lambda$ と表す。$\operatorname{Gproj}\Lambda$ は K-線形な Krull-Schmidt 圏である。また，任意の射影加群はゴレンシュタイン射影的であることがわかる。実際，射影加群 P に対して，次の非輪状複体は totally acyclic である：

$$P_\bullet \ : \ \cdots \to 0 \xrightarrow{0} P \xrightarrow{\mathrm{id}_P} P \xrightarrow{0} 0 \to \cdots$$

したがって，次の包含関係が成り立つ：

$$\operatorname{proj}\Lambda \subseteq \operatorname{Gproj}\Lambda \subseteq \operatorname{mod}\Lambda$$

ここで，$\operatorname{Gproj}\Lambda = \operatorname{mod}\Lambda$ が成り立つことと，Λ が自己入射多元環であることは同値である。一方，$\operatorname{proj}\Lambda = \operatorname{Gproj}\Lambda$ が成り立つとき，Λ は **CM-free** であるという。例えば，大域次元が有限であるような多元環は CM-free である。直既約なゴレンシュタイン射影 Λ-加群の同型類の個数が有限であるとき，Λ は **CM-finite** であるという。直既約射影 Λ-加群の同型類の個数は常に有限であるから，CM-free 多元環は CM-finie である。

加群圏 $\operatorname{mod}\Lambda$ の安定圏 $\underline{\operatorname{mod}}\Lambda$ を次で定める：

- 対象は Λ-加群とする。
- Λ-加群 M, N に対して，M から N への射集合を次で定める：

$$\underline{\operatorname{Hom}}_\Lambda(M,N) := \operatorname{Hom}_\Lambda(M,N)/\{\text{ 射影加群を通過する射 }\}$$

ゴレンシュタイン射影 Λ-加群からなる $\underline{\operatorname{mod}}\Lambda$ の充満部分圏を $\underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ と表す。このとき，$\underline{\operatorname{mod}}\Lambda$，$\underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ は K-線形な Krull-Schmidt 圏であり，

$$\operatorname{ind}\underline{\operatorname{mod}}\Lambda = \operatorname{ind}\operatorname{mod}\Lambda \setminus \operatorname{ind}\operatorname{proj}\Lambda, \quad \operatorname{ind}\underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda = \operatorname{ind}\operatorname{Gproj}\Lambda \setminus \operatorname{ind}\operatorname{proj}\Lambda$$

が成り立つ。

$\operatorname{Gproj}\Lambda$ は，射影対象全体が射影加群全体に一致するようなフロベニウス圏である。したがって，Happel [19] の定理より，その安定圏 $\underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ には三角圏の構造が自然に入る。Λ の特異圏，すなわち，$\operatorname{mod}\Lambda$ の有界導来圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)$ の完全導来圏 $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ による Verdier 商 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda)/\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj}\Lambda)$ を $\mathcal{D}_{\mathrm{sg}}(\operatorname{mod}\Lambda)$ で表す。前章で述べたように，安定圏 $\underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ から特異圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{sg}}(\operatorname{mod}\Lambda)$ への三角圏としての埋め込みが常に存在し，この埋め込みが三角圏同値であることと，Λ が岩永–ゴレンシュタイン多元環であることが同値である [5]。Λ が岩永–ゴレンシュタインであるとき，得られる三角圏同値 $\underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda \cong \mathcal{D}_{\mathrm{sg}}(\operatorname{mod}\Lambda)$ は Buchweitz が [6] において構成したそれに他ならない。

2.2　G-被覆関手

本節では，[1] に従って G-被覆関手の定義を述べるとともに，本稿で用いる基本事項を紹介する。なお，本節を通して，圏はすべて K-線形圏，関手はすべて K-線形関手とする。

圏 $\mathcal{C}$ と群準同型 $A : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ の組 $(\mathcal{C}, A)$ を G-**作用**をもつ圏，あるいは G-**圏**とよぶ。G-圏 $\mathcal{C}$ と元 $\alpha \in G$ に対して，$\alpha x := A(\alpha)(x)$ とおく。G の単位元を 1，$\mathcal{C}$ の恒等関手を $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ で表すと，$A(1) = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ が成り立つ。G-作用 $A : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ が**自由**であるとは，単位元でない各 $\alpha \in G$ と各 $x \in \mathcal{C}$ に対して，$\alpha x \neq x$ が成り立つときをいう。さらに，$A : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ が**局所有界**であるとは，各 $x, y \in \mathcal{C}$ に対して，$\{\, \alpha \in G \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha x, y) \neq 0 \,\}$ が有限集合であるときをいう。

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を G-圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, A)$ から圏 $\mathcal{C}'$ への関手とする。F の **invariance adjuster** とは，次の 2 つの条件を満たすような自然同型の族 $\phi = (\phi_\alpha : F \to FA(\alpha))_{\alpha \in G}$ である：

(1) $\phi_1 : F \to F$ は F の恒等自然変換 $\mathbb{1}_F$ である。

(2) 各 $\alpha, \beta \in G$ に対して，次の関手の図式は可換になる：

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "\phi_{\beta\alpha}"'] & FA(\alpha) \arrow[d, "\phi_\beta A(\alpha)"] \\ FA(\beta\alpha) \arrow[r, equal] & FA(\beta)A(\alpha). \end{tikzcd}$$

このとき，組 (F, ϕ) を G-**不変関手**とよぶ。条件 (1) は条件 (2) から直ちに従う [1, Remark 1.2]。また，[1, Lemma 1.4] より，G-不変関手 $F = (F, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ と関手 $H : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ に対して，$H\phi := (H\phi_\alpha)_{\alpha \in G}$ とおくと，$(HF, H\phi)$ は G-不変関手になる。

$F = (F, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を G-不変関手とする。各 $x, y \in \mathcal{C}$ に対して，次の 2 つの K-線形写像を考える：

$$F^{(1)}_{x,y} : \bigoplus_{\alpha \in G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha x, y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(x), F(y)), \quad (f_\alpha)_{\alpha \in G} \mapsto \sum_{\alpha \in G} F(f_\alpha) \cdot \phi_\alpha(x);$$

$$F^{(2)}_{x,y} : \bigoplus_{\beta \in G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \beta y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(x), F(y)), \quad (f_\beta)_{\beta \in G} \mapsto \sum_{\beta \in G} \phi_{\beta^{-1}}(\beta y) \cdot F(f_\beta)$$

ここで，

$$F(f_\alpha) \cdot \phi_\alpha(x) : F(x) \to F(y)$$

は $\phi_\alpha(x) : F(x) \to FA(\alpha)(x)$ と $F(f_\alpha) : F(\alpha x) \to F(y)$ の合成であり，

$$\phi_{\beta^{-1}}(\beta y) \cdot F(f_\beta) : F(x) \to F(y)$$

は $F(f_\beta) : F(x) \to F(\beta y)$ と $\phi_{\beta^{-1}}(\beta y) : F(\beta y) \to FA(\beta^{-1})(\beta y) = F(y)$ の合成である。[1, Proposition 1.6] より，$F^{(1)}_{x,y}$ が同型であることと，$F^{(2)}_{x,y}$ が同型であることは同値である。

関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が**稠密**であるとは，任意の $x' \in \mathcal{C}'$ に対してある $x \in \mathcal{C}$ が存在して $F(x) \cong x'$ であるときをいう。

定義 2.3. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を G-不変関手とする。

(1) F が G-**前被覆**であるとは，各 $x, y \in \mathcal{C}$ に対して $F^{(1)}_{x,y}$ が同型であるときをいう。

(2) F が G-**被覆**であるとは，F が G-前被覆かつ稠密であるときをいう。

定義 2.4. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, A)$ を G-圏とする。

(1) $\mathcal{C}$ の G による**軌道圏** $\mathcal{C}/G$ を次で定義する：

- 対象は $\mathcal{C}$ の対象とする。
- $x, y \in \mathcal{C}$ に対して，x から y への射集合を次で定める：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/G}(x, y) := \bigoplus_{\alpha \in G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha x, y)$$

- 射 $f : x \to y$, $g : y \to z$ に対して，f と g の合成を次で定める：

$$fg := \left(\sum_{\substack{\alpha, \beta \in G \\ \beta\alpha = \gamma}} g_\beta \cdot A(\beta)(f_\alpha) \right)_{\alpha \in G}$$

ここで，$g_\beta \cdot A(\beta)(f_\alpha)$ は $A(\beta)(f_\alpha) : \beta\alpha x = A(\beta)(\alpha x) \to A(\beta)(y)$ と $g_\beta : \beta y \to z$ の合成を表す。

(2) **標準関手** $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ を次で定める：

- 対象 x に対して，$P(x) := x$ とする。
- 射 f に対して，$P(f) := (\delta_{\alpha,1})_{\alpha \in G}$ とする。

G-圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, A)$ が与えられたとき，各 $\alpha \in G$ に対して，次で定まる自然同型を $\phi_\alpha = (\phi_{\alpha,x})_{x \in \mathcal{C}} : P \to PA(\alpha)$ で表す：

$$\phi_{\alpha,x} := (\delta_{\beta,\alpha}\, \mathrm{id}_{\alpha x})_{\beta \in G} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/G}(P(x), PA(\alpha)(x)) = \bigoplus_{\beta \in G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\beta x, \alpha x)$$

このとき，$\phi := (\phi_\alpha)_{\alpha \in G}$ は P の invariance adjuster となる。[1, Proposition 2.6] により，$P = (P, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ は G-被覆関手である。また，[1, Theorem 2.9] から，P は $\mathcal{C}$ からの G-不変関手のなかで普遍的であること，すなわち，任意の G-不変関手 $E = (E, \psi) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して $(E, \psi) = (HP, H\phi)$ を満たす関手 $H : \mathcal{C}/G \to \mathcal{C}'$ がただ一つ存在することがわかる。

最後に，G-圏 $\mathcal{C}$ に対して，G が自己圏同型 $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ によって生成される巡回群であるとき，軌道圏 $\mathcal{C}/G$ を $\mathcal{C}/\varphi$ で表す。

2.3 次数付きゴレンシュタイン射影加群

本節では，本稿で用いる次数付きゴレンシュタイン射影加群の基本事項を確認する。本節では，$\Lambda = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda_i$ を次数付き多元環とする。

定義 2.1 において，射影 Λ-加群を次数付き射影 Λ-加群に置き換えることで，**次数付きゴレンシュタイン射影 Λ-加群** [11] を定義できる。次数付きゴレンシュタイン射影 Λ-加群のなす圏を $\mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ で表すと，第 2.1 節と同様に，$\mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ は K-線形な Krull-Schmidt 圏であり，包含関係 $\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda \subseteq \mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda \subseteq \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ が得られる。

Λ が**次数付き岩永–ゴレンシュタイン**であるとは，Λ の片側加群としての次数付き入射次元 $\mathrm{gr.id}_{\Lambda}\Lambda$，$\mathrm{gr.id}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}\Lambda$ がともに有限であるときをいう。Λ が次数付き岩永–ゴレンシュタインであることと，(通常の多元環として) Λ が岩永–ゴレンシュタインであることは同値である [32, Section 2.1]。このことから本稿では，次数付き岩永–ゴレンシュタインであることと，岩永–ゴレンシュタインであることを区別しない。

さて，$\mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda = \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ が成り立つことと，Λ が自己入射多元環であることが同値である。また，$\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda = \mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ が成り立つとき，Λ を **graded CM-free** であるという。任意の整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，次数シフト関手 $(i) : \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ は，次数付き射影 Λ-加群を保存するような自己圏同型 $(i) : \mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ を誘導する。Λ が **graded CM-finite** であるとは，直既約な次数付きゴレンシュタイン射影 Λ-加群の同型類の個数が次数シフトを除いて有限であるときをいう。$\Lambda = \bigoplus_{i\geq 0}\Lambda_i$ は正次数付きであるから，[38, Propositions 2.16 and 2.18] により，次の等式が成り立つ：

$$\mathrm{ind}\,\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda = \{P(i) \mid P \in \mathrm{ind}\,\mathrm{proj}\,\Lambda, i \in \mathbb{Z}\}$$

したがって，graded CM-free な次数付き多元環は graded CM-finite である。

次数付き加群圏 $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ の安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ を，安定加群圏 $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ と同様に定義し，次数付きゴレンシュタイン射影加群のなす $\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ の充満部分圏を $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ で表す。このとき，$\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$，$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ はともに K-線形な Krull-Schmidt 圏であり，

$$\mathrm{ind}\,\underline{\mathrm{mod}}^{\mathbb{Z}}\Lambda = \mathrm{ind}\,\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda \setminus \mathrm{ind}\,\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda, \quad \mathrm{ind}\,\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda = \mathrm{ind}\,\mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda \setminus \mathrm{ind}\,\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$$

が成り立つ。

$\mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ は，次数付き射影加群を射影対象とするようなフロベニウス圏であり，したがって，その安定圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ には三角圏の構造が入る。本稿では，$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ を Λ の次数付き安定圏と呼ぶことにする。このとき，次数付き安定圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ から次数付き特異圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{sg}}(\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda) := \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda)/\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda)$ への三角圏としての埋め込みが常に存在し，この関手が三角圏同値であることと，Λ が岩永–ゴレンシュタインであることが同値になる。

$F : \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ を忘却関手とする。F は完全かつ K-線形な関手である。[17, Proposition 1.3] より，次数付き Λ-加群 M に対して，$M \in \mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ であることと，$FM \in \mathrm{proj}\,\Lambda$ であることは同値である。さらに，[11, Lemma 4.5] より，$M \in \mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ であることと，$FM \in \mathrm{Gproj}\,\Lambda$ であることも同値である。以上の事実により，$F : \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ は K-線形関手

$$F_G : \mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \mathrm{Gproj}\,\Lambda \quad \text{および} \quad \tilde{F}_G : \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\mathrm{Gproj}}\,\Lambda$$

を誘導する。$F : \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ は完全なので，$\tilde{F}_G$ は三角圏関手になる。

任意の整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，次数シフト関手 $(i) : \mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ は射影 Λ-加群を保存する。このことから，安定圏レベルの次数シフト関手 $(i) : \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ も定義される。次数シフト関手 (1) によって生成される巡回群を G とすると，$\mathrm{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ および $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ はともに G-圏となる。いずれの場合においても，この G-作用は自由かつ局所有限である。局所有限性については，次数付き Λ 加群 M, N に対して成り立つ次の 2 つの等式から導かれる:

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(FM, FN) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}}_{\Lambda}(M, N(i)), \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda}(FM, FN) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathbb{Z}}_{\Lambda}(M, N(i))$$

これらについては，例えば，[20, Lemma 1.1] を参照されたい。

さて，$F : \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \operatorname{mod}\Lambda$ は $F = F \circ (i)$ を満たす。このとき，F を $F_G, \tilde{F}_G$ に置き換えて得られる等式を invariance adjuster に採用することで，F_G および $\tilde{F}_G$ が G-不変関手であることがわかる。上記の 2 つの等式から，これらが G-前被覆関手であることも従う。[16, Corollary 3.4] より，射影 Λ-加群はすべて gradable であるから，次の補題を得る。

補題 2.5. 次の 3 つの条件は同値である。

(1) $F_G : \operatorname{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \operatorname{Gproj}\Lambda$ は稠密である。

(2) $F_G : \operatorname{Gproj}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \operatorname{Gproj}\Lambda$ は G-被覆関手である。

(3) $\tilde{F}_G : \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ は G-被覆関手である。

$\tilde{F}_G : \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ が G-被覆関手であると仮定する。このとき，標準関手 $P : \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1)$ を用いて,（G-不変関手として）$\tilde{F}_G = HP$ を満たすようなただ 1 つの圏同値 $H : \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1) \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \arrow[rr, "\tilde{F}_G"] \arrow[dr, "P"'] & & \underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda \\
& \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1) \arrow[ur, "\sim", "\exists! H"'] &
\end{tikzcd}$$

$\underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ は三角圏であるから，圏同値 $H : \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1) \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ を経由することで，軌道圏 $\underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1)$ に三角圏の構造を入れることができる。このとき，$H : \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1) \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ は三角圏関手，したがって三角圏同値となる。$\tilde{F}_G : \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\operatorname{Gproj}}\Lambda$ は三角圏関手であるから，標準関手 $P : \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\operatorname{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1)$ も三角圏関手となる。

2.4 単項多元環

単項多元環は特別な bound quiver algebra である。[2] に従って bound quiver algebra の定義を述べる。

Quiver とは，2 つの集合 Q_0, Q_1 と 2 つの写像 $s, t : Q_1 \to Q_0$ からなる組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことである。Q_0 の元を Q の**頂点**，Q_1 の元を Q の**矢**とよぶ。矢 $a \in Q_1$ に対して $s(a) \in Q_0$ を a の**始点**，$t(a) \in Q_0$ を a の**終点**という。矢 $a \in Q_1$ を矢印 $s(a) \xrightarrow{a} t(a)$ で表すことによって，Q を有向グラフとして図示できる。また，Q_0, Q_1 がともに有限であるとき，Q を**有限 quiver** とよぶ。本稿では，quiver は有限 quiver を意味するものとする。

Q を quiver とする。整数 $n \geq 1$ に対して，$t(a_i) = s(a_{i+1})$ $(1 \leq i \leq n)$ をみたす矢の列 $p = a_1 \cdots a_n$ を長さ n の **path** という。path p の長さ n を $l(p)$ で表し，始点を $s(p) := s(a_1)$，終点を $t(p) := t(a_n)$ と定める。各頂点 $i \in Q_0$ に対して，長さ 0 の **trivial path** e_i を導入し，$s(e_i) = i = t(e_i)$ と定める。長さ 1 以上の path を **nontrivial path** とよぶ。path 全体の集合を $\mathcal{B}$，長さ n の path 全体の集合を $\mathcal{B}_n$，長さ n 以上の path 全体の集合を $\mathcal{B}_{\geq n}$ と表す。長さ 1 の path は矢に他ならず，$\mathcal{B}_1 = Q_1$ が成り立つ。始点と終点が一致する nontrivial path を **cycle** とよぶ。cycle$c$ が **multiplicity-free** であるとは，$(c')^m = c$ をみたすような cycle c' と整数 $m \geq 2$ が存在しないことをいう。

体 K と quiver Q に対して，**path algebra** KQ を次のように定義する：

- ベクトル空間として，$KQ := K\mathcal{B}$ と定める。

- 2 つの path $p = a_1 \cdots a_n$, $q = b_1 \cdots b_m$ の積 pq を次のように定める：$t(a_n) = s(b_1)$ のとき $pq := a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$ とし，$t(a_n) \neq s(b_1)$ のとき $pq := 0$ とする。

このとき，$1_{KQ} = \sum_{i \in Q_0} e_i$ が成り立つ。Q_1 の元で生成される KQ の両側イデアルを J で表す。正の整数 $N \geq 1$ に対して，両側イデアル J^N は $\mathcal{B}_N$ の元で生成される。KQ の両側イデアル I が **admissible** であるとは，$J^N \subseteq I \subseteq J^2$ をみたすような $N \geq 2$ が存在するときをいう。admissible イデアルは両側イデアルとして有限生成である。path algebra KQ の admissible イデアル I による剰余多元環 KQ/I を **bound quiver algebra** という。path algebra は K 上有限次元であるとは限らないが，bound quiver algebra は常に K 上有限次元である。補足であるが，基礎体 K が代数的閉体である場合には，任意の多元環は，ある bound quiver algebra に森田同値になることが知られている。さて，bound quiver algebra KQ/I が**単項多元環**であるとは，I が path で生成されているときをいう。

Chen-Shen-Zhou [13] が与えた単項多元環上の直既約ゴレンシュタイン射影加群の構造定理を紹介しよう。

以下，本節では $\Lambda = KQ/I$ を単項多元環とする。paht p が **nonzero** であるとは，$p \notin I$ が成り立つとき，すなわち，自然な全射環準同型 $KQ \to KQ/I = \Lambda$ による p の像 $p + I$ が 0 でないときをいう。nonzero path 全体は Λ の K-基底をなす。混乱の恐れがない限り，Λ の元 $p + I$ を単に p と書く。さて，上述の構造定理において重要な役割を果たす perfect path の定義を述べる。

定義 2.6 ([13])**.** (1) nonzero path の組 (p, q) が **perfect** であるとは，次の 3 つの条件が満たされるときをいう：

(i) p, q はともに nontrivial であり，$t(p) = s(q)$ および $pq \in I$ が成り立つ。

(ii) $t(p) = s(q')$ かつ $pq' \in I$ を満たす nonzero path q' に対して，$q' = qq''$ を満たす path q'' が存在する。

(iii) $t(p') = s(q)$ かつ $p'q \in I$ を満たす nonzero path p' に対して，$p' = p''p$ を満たす path p'' が存在する。

(2) nonzero path の列 $(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1} = p_1)$ が **perfect path sequence** であるとは，$1 \leq i \leq n$ に対して，組 (p_i, p_{i+1}) が perfect pair であるときという。

(3) perfect path sequence に現れる nonzero path を **prefect path** とよぶ。

(4) perfect path sequence $(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1} = p_1)$ が**極小**であるとは，$p_i \neq p_j$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$ が成り立つときをいう。

perfect path 全体の集合を $\mathbb{P}_\Lambda$ と表す。nonzero path の個数は有限であるため，$\mathbb{P}_\Lambda$ は有限集合である。

定理 2.7 ([13])**.** $p \in \mathbb{P}_\Lambda$ を $p\Lambda \in \operatorname{ind} \underline{\operatorname{Gproj}} \Lambda$ に対応させるような全単射 $\mathbb{P}_\Lambda \to \operatorname{ind} \underline{\operatorname{Gproj}} \Lambda$ が存在する。

この定理から，Λ が CM-finite であることが従う。また，$\mathbb{P}_\Lambda = \varnothing$ であることと，Λ が CM-free であることが同値であることもわかる。

矢 $a \in Q_1$ に対して $\deg a = 1$ と定めることで，Λ に次数付き多元環の構造を入れる。このとき，$\Lambda = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda_i$ は $\Lambda_i = K\mathcal{B}_i$ $(i \geq 0)$ を満たす。nonzero path p は次数 $l(p)$ の Λ の斉次元であるから，p が生成する巡回加群 $p\Lambda$ は次数付き Λ-加群であり，次を満たす：

$$p\Lambda = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} p\Lambda_i, \quad p\Lambda_i = \begin{cases} 0 & (i < l(p)) \\ K\{\, pq \mid q \in \mathcal{B}_{i-l(p)},\, pq \notin I \,\} & (i \geq l(p)) \end{cases}$$

[32, Section 4.2] において，次の等式が得られている：

$$\operatorname{ind} \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}} \Lambda = \{\, p\Lambda(i) \mid p \in \mathbb{P}_\Lambda,\, i \in \mathbb{Z} \,\}$$

これは，Λ が graded CM-finite であることだけでなく，前節で登場した安定圏レベルの忘却関手 $\tilde{F}_G : \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}} \Lambda \to \underline{\mathrm{Gproj}}\, \Lambda$ が G-被覆関手であることも示している。ただし，$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}} \Lambda$ に作用している群 G は, 次数シフト関手 $(1) : \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}} \Lambda \to \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}} \Lambda$ によって生成される巡回群である。この事実を踏まえ，第 3 章および第 4 章では，それぞれ次数付き安定圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}} \Lambda$ およびその軌道圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}} \Lambda/(1)$ の三角圏構造を調べる。これにより，(通常の) 安定圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}\, \Lambda$ の三角圏構造を決定する。

3　単項多元環上の次数付きゴレンシュタイン射影加群の安定圏

以下，本稿では，$\Lambda = KQ/I$ を単項多元環とする。矢の次数を 1 と定めることで，Λ に次数付き多元環の構造を入れていたことを思い出そう。本章では，傾理論を用いて，次数付き安定圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}} \Lambda$ の三角圏構造を決定する。

$\mathcal{T}$ を三角圏とし，Σ を $\mathcal{T}$ のシフト関手とする。$\mathcal{T}$ の直和因子で閉じた三角部分圏を **thick 部分圏**という。$T \in \mathcal{T}$ に対して，X を含む最小の thick 部分圏 $\operatorname{thick} T$ と表す。$T \in \mathcal{T}$ が**傾対象**であるとは，次の 2 つの条件が成り立つときをいう：

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \Sigma^i T) = 0$ $(i \neq 0)$

(ii) $\operatorname{thick} T = \mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ が**代数的**であるとは，$\mathcal{T}$ がフロベニウス圏の安定圏に三角圏同値になるときをいう。代数的な Krull-Schmidt 三角圏 $\mathcal{T}$ が傾対象 $T \in \mathcal{T}$ をもつとき，$\mathcal{T}$ と自己準同型環 $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(T)$ の完全導来圏 $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(T))$ の間に三角圏同値が存在する [11, 24, 38]。

本節の主結果を述べるために必要な概念を導入する。

perfect path $p \in \mathbb{P}_\Lambda$ に対して，p から始まる perfect path sequence $(p_1 := p, \ldots, p_n, p_{n+1} = p_1)$ を取ると，積 $p_1 \cdots p_n$ は cycle になる。このとき，$p_1 \cdots p_n = c^m$ $(\exists m \geq 1)$ を満たす multiplicity-free cycle c を，p **に付随する underlying cycle** と呼び，c_p で表す。この c_p は perfect path sequence の取り方によらず一意的に定まる。巡回置換によって誘導される underlying cycle の同値類全体の集合を $\mathcal{C}(\Lambda)$ で表す。

2 つの perfect path p, q に対して，$p = qr$ をみたす path $r \in \mathcal{B}$ が存在するとき，$p \succeq q$ とかく。このとき，$(\mathbb{P}_\Lambda, \succeq)$ は半順序集合であり，付随する Hasse quiver $H(\mathbb{P}_\Lambda, \succeq)$ は linear quiver の和となる。ここで，linear quiver は次の形をした quiver である：

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

したがって，Hasse quiver $H(\mathbb{P}_\Lambda, \succeq)$ には sink すなわち矢の始点にはならない頂点が存在する。Hasse quiver $H(\mathbb{P}_\Lambda, \succeq)$ の sink に対応する perfect path を **co-elementary path** という。co-elementary path 全体の集合を $\mathbb{E}_\Lambda^{\mathrm{co}}$ で表す。

次の２つの命題が成り立つ。

命題 3.1 ([20, Theorem 2.11])**.** (1) 任意の *perfect path* $p \in \mathbb{P}_\Lambda$ に対して，ある *co-elementary path* $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{E}_\Lambda^{\mathrm{co}}$ が存在し，$p = r_1 \cdots r_n$ が成り立つ。このような分解は一意的である。

(2) $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{E}_\Lambda^{\mathrm{co}}$ を，任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して $\mathcal{C}(\Lambda)$ の元として $c_{r_i} = c_{r_j}$ が成り立つような *co-elementary path* とする。このとき，積 $r_1 \cdots r_n$ が *nonzero* であれば，$r_1 \cdots r_n$ は *perfect path* である。

命題-定義 3.2 ([20, Proposition-Definition 2.12])**.** 任意の *underlying cycle* $c \in \mathcal{C}(\Lambda)$ に対して，ある *co-elementary path* $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{E}_\Lambda^{\mathrm{co}}$ が存在し，$c = r_1 \cdots r_n$ が成り立つ。このような分解は一意的であり，$|c| := n$ と表す。

注意 3.3. 上の 2 つの命題より，$c \in \mathcal{C}(\Lambda)$ が perfect path であることと，c が nonzero であることは同値である。

$c = r_1 \cdots r_n \in \mathcal{C}(\Lambda)$ を underlying cycle とする。ただし，各 r_i は co-elementary path である。このとき，集合 $\mathbb{P}_\Lambda(c)$ を

$$\mathbb{P}_\Lambda(c) := \{\, p \in \mathbb{P}_\Lambda \mid p \succeq r_1 \,\},$$

対象 $T_c \in \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ を

$$T_c := \bigoplus_{p \in \mathbb{P}_\Lambda(c)} p\Lambda,$$

対象 $T \in \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ を

$$T := \bigoplus_{c \in \mathcal{C}(\Lambda)} \bigoplus_{0 \leq i < l(c)} T_c(i) \tag{1}$$

と定める。定義より，T は $\mathcal{C}(\Lambda)$ の完全代表系の取り方に依存することがわかる。また，[20, Lemma 3.4] の証明により，2 つの underlying cycle $c_1, c_2 \in \mathcal{C}(\Lambda)$ に対して，$\mathcal{C}(\Lambda)$ の元として $c_1 = c_2$ であるならば，$|\mathbb{P}_\Lambda(c_1)| = |\mathbb{P}_\Lambda(c_2)|$ となることがわかる。

[20, Theorem 3.8] の証明，および [20, Lemma 3.7] により，次の補題が得られる。

補題 3.4. (1) で定義された $T \in \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ は傾対象であり，次の多元環としての同型

$$\underline{\mathrm{End}}_\Lambda^{\mathbb{Z}}(T) \cong \prod_{c \in \mathcal{C}(\Lambda)} (K\mathbb{A}_c)^{(l(c))}$$

が存在する。ただし，$\mathbb{A}_c$ は次の *linear quiver* である：

$$\mathbb{A}_c : 1 \to 2 \to \cdots \to |\mathbb{P}_\Lambda(c)|$$

$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ は代数的な Krull-Schmidt 三角圏であり，自己準同型環 $\underline{\mathrm{End}}_\Lambda^{\mathbb{Z}}(T)$ は大域次元有限であるから，次の定理を得る。これが本節の主結果である。

定理 3.5 ([20, Theorem 3.8])**.** 単項多元環 Λ に対して，次の三角圏同値が存在する：

$$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \cong \prod_{c\in\mathcal{C}(\Lambda)} \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, K\mathbb{A}_c)^{(l(c))}$$

注意 3.6. 定理 3.5 は，岩永–ゴレンシュタイン単項多元環に対する Lu-Zhu の結果 [32, Proposition 4.3.4] を任意の単項多元環に拡張するものである。補足すると，[32, Proposition 4.3.4] では，岩永–ゴレンシュタイン単項多元環 Λ に対して，ある有限表現型遺伝多元環 H が存在して三角圏同値 $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \cong \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, H)$ が存在することが示されている。さらに，基礎体 K が代数的閉体である場合には，この三角圏同値は墳原による結果 [18, Theorem 7.3] の帰結として得られることも付記しておく。

例 3.7. Q を次の quiver とする：

$$Q:\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a_1"] & 2 \arrow[r, "b_2"] \arrow[d, "a_2"] & 4 \arrow[r, shift left, "a_4"] & 5 \arrow[l, shift left, "a_5"] \\ & 3 \arrow[ul, "a_3"] & & \end{tikzcd}$$

このとき，$a_{1231}, a_{23123}, a_{45}, a_{54}$ によって生成される KQ の admissible イデアルを I とする。ここで，a_{1231} は path $a_1a_2a_3a_1$ を表す。他の $a_{23123}, a_{45}, a_{54}$ についても同様である。まず，以下に挙げる nonzero path の列が（巡回置換によって一致するものを除いた）極小 perfect path sequence のすべてである：

$$(a_1,\ a_{231},\ a_{23},\ a_{123},\ a_1), \quad (a_4,\ a_5,\ a_4)$$

したがって，$\mathbb{P}_\Lambda = \{a_1,\ a_{231},\ a_{23},\ a_{123},\ a_4,\ a_5\}$ が成り立つ。また，

$$c_{a_1} = c_{a_{123}} = a_{123}, \qquad c_{a_{231}} = c_{a_{23}} = a_{231}, \qquad c_{a_4} = a_{45}, \qquad c_{a_5} = a_{54}$$

であるから，$\mathcal{C}(\Lambda) = \{a_{123}, a_{45}\}$ とわかる。さらに，

$$H(\mathbb{P}_\Lambda, \preceq):\quad a_{123} \longrightarrow a_1 \qquad a_{231} \longrightarrow a_{23} \qquad a_4 \qquad a_5$$

であるから，$|\mathbb{P}_\Lambda(a_{123})| = 2$, $|\mathbb{P}_\Lambda(a_{45})| = 1$ となる。したがって，定理 3.5 により，三角圏同値

$$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \ \cong\ \mathcal{D}^{\mathrm{b}}\left(\mathrm{mod}\, K(1\to 2)\right)^{(3)} \times \mathcal{D}^{\mathrm{b}}\left(\mathrm{mod}\, K\right)^{(2)}$$

を得る。

4　単項多元環上のゴレンシュタイン射影加群の安定圏

第 2.4 節の末尾で述べたように，本章では，軌道圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1)$ の三角圏構造の解析を通じて，安定圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}\,\Lambda$ の三角圏構造を決定する。

補題 3.4 より，

$$T = \bigoplus_{c\in\mathcal{C}(\Lambda)} \bigoplus_{0\le i<l(c)} T_c(i) \in \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$$

は $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda = \mathrm{thick}\, T$ を満たし，[20, Theorem 3.8] の証明より，

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Lambda}^{\mathbb{Z}}(T_c(i), T_c(j)) = 0 \quad (0 \leq i \neq j < l(c))$$

であるから，次の等式を得る：

$$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda = \prod_{c \in \mathcal{C}(\Lambda)} \prod_{0 \leq i < l(c)} \mathrm{thick}\, T_c(i)$$

ただし，各 $\mathrm{thick}\, T_c(i)$ は有界導来圏 $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, K\mathbb{A}_c)$ に三角圏同値である。

各 $c \in \mathcal{C}(\Lambda)$ と $i \in \mathbb{Z}$ に対して，次数シフト関手 $(i) : \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ を $\mathrm{thick}\, T_c$ に制限することで，圏同型 $(i) : \mathrm{thick}\, T_c \to (\mathrm{thick}\, T_c)(i)$ を得る。ここで，$(\mathrm{thick}\, T_c)(i)$ は次で定まる $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ の充満部分圏である：

$$(\mathrm{thick}\, T_c)(i) := \{X(i) \mid X \in \mathrm{thick}\, T_c, i \in \mathbb{Z}\}$$

このとき，$(\mathrm{thick}\, T_c)(i) = \mathrm{thick}\, T_c(i)$ が成り立つ。[20, Lemma 3.9] より，整数 $i, j \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathrm{thick}\, T_c(i) = \mathrm{thick}\, T_c(j)$ であることと，$i \equiv j \pmod{l(c)}$ であることが同値である。特に，自己圏同型 $(l(c)) : \mathrm{thick}\, T_c \to \mathrm{thick}\, T_c$ を得る。ここで，$\mathrm{thick}\, T_c$ の Auslander-Reiten translation を τ_c で表すと，[20, Proposition 3.11] より，$\mathrm{thick}\, T_c$ の自己圏同値としての同型 $(l(c)) \cong \tau_c^{-|c|}$ が存在することを補足しておく。

$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ の対象のクラス $\mathcal{X}$ に対して，次で与えられる軌道圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1)$ の充満部分圏を $P(\mathcal{X})$ で表す：

$$P(\mathcal{X}) := \{P(X) \mid X \in \mathcal{X}\}$$

各 $c \in \mathcal{C}(\Lambda)$ と $i \in \mathbb{Z}$ に対して，次数シフト関手 $(i) : \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ が誘導する自己圏同型 $(i) : \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1) \to \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1)$ は恒等関手であるから，次の等式を得る：

$$P(\mathrm{thick}\, T_c(i)) = P((\mathrm{thick}\, T_c)(i)) = P(\mathrm{thick}\, T_c)(i) = P(\mathrm{thick}\, T_c)$$

[20, Lemma 4.1] より，$P(\mathrm{thick}\, T_c) = \mathrm{thick}\, P(T_c)$ であるから，次の三角圏としての分解が存在する：

$$\underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1) = \prod_{c \in \mathcal{C}(\Lambda)} P(\mathrm{thick}\, T_c) \tag{2}$$

さて，各 $P(\mathrm{thick}\, T_c)$ について，次数シフト関手 $(l(c)) : \mathrm{thick}\, T_c \to \mathrm{thick}\, T_c$ が生成する巡回群を G_c とする。このとき，標準関手 $P : \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda \to \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1)$ が誘導する関手

$$P_c : \mathrm{thick}\, T_c \to P(\mathrm{thick}\, T_c)$$

は G_c-不変関手になる。さらに，[20, Lemma 4.2] の証明から，$P_c : \mathrm{thick}\, T_c \to P(\mathrm{thick}\, T_c)$ は G_c-被覆関手であることがわかる。したがって，次の三角圏同値が存在する：

$$P(\mathrm{thick}\, T_c) \cong \mathrm{thick}\, T_c/(l(c)) \cong \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, K\mathbb{A}_c)/\tau^{|c|} \tag{3}$$

ここで，$\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, K\mathbb{A}_c)/\tau^{|c|}$ は Keller [25] の意味での三角軌道圏である。(2) と (3) を組み合わせることで，三角圏同値

$$\underline{\mathrm{Gproj}}\,\Lambda \cong \underline{\mathrm{Gproj}}^{\mathbb{Z}}\Lambda/(1) \cong \prod_{c \in \mathcal{C}(\Lambda)} \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\, K\mathbb{A}_c)/\tau^{|c|} \tag{4}$$

が得られる。

各 $c \in \mathcal{C}(\Lambda)$ に対して，次で定まる連結な自己入射中山多元環を Λ_c で表す：

$$\Lambda_c := K\left(\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & |c| \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd} \right) \Big/ J^{|\mathbb{P}_\Lambda(c)|+1}$$

このとき，$\mathbb{P}_{\Lambda_c}$ は nonzero path 全体の集合に一致し，$\mathcal{C}(\Lambda_c)$ は一元集合となり，さらに $\mathbb{E}^{\mathrm{co}}_{\Lambda_c} = Q_1$ が成り立つ。$\mathcal{C}(\Lambda_c) = \{c'\}$ とすると，$|c'| = |c|$ かつ $|\mathbb{P}_{\Lambda_c}(c')| = |\mathbb{P}_\Lambda(c)|$ であるから，Λ_c に対して (4) を適用することで，次の三角圏同値が得られる：

$$\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda_c = \underline{\mathrm{Gproj}}\,\Lambda_c \cong \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,K\mathbb{A}_c)/\tau^{|c|}$$

以上をまとめることで，次の定理が得られる。これが本節の主結果である。

定理 4.1 ([20, Theorem 4.3])**.** 単項多元環 Λ に対して，次の三角圏同値が存在する：

$$\underline{\mathrm{Gproj}}\,\Lambda \cong \prod_{c \in \mathcal{C}(\Lambda)} \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda_c$$

注意 4.2. (1) 定理 4.1 より，単項多元環 Λ 上のゴレンシュタイン射影加群のなす安定圏 $\underline{\mathrm{Gproj}}\,\Lambda$ は，自己入射中山多元環 $\Gamma := \prod_{c \in \mathcal{C}(\Lambda)} \Lambda_c$ の安定加群圏 $\underline{\mathrm{mod}}\,\Gamma$ に三角圏同値であることがわかる。

(2) 定理 4.1 は，中山多元環に対する Ringel [35] の結果，gentle 多元環に対する Kalck [23] の結果，overlap を持たない単項多元環に対する Chen-Shen-Zhou [13] の結果，入射次元が高々1 の岩永–ゴレンシュタイン単項多元環に対する Lu-Zhu [32] の結果を，任意の単項多元環の場合に統一的に拡張するものとなっている。また，我々の結果は，任意の入射次元をもつ岩永–ゴレンシュタイン単項多元環の特異圏の三角圏構造を決定するものであることも付記しておく。

例 4.3. $\Lambda = KQ/I$ を例 3.7 と同じ単項多元環とする。このとき，$\mathcal{C}(\Lambda)$ の完全代表系として $\{a_{123}, a_{45}\}$ を取ると，$|a_{123}| = |a_{45}| = 2$ かつ $|\mathbb{P}_\Lambda(a_{123})| = 2, |\mathbb{P}_\Lambda(a_{45})| = 1$ であるから，定理 4.1 より，次の三角圏同値を得る：

$$\underline{\mathrm{Gproj}}\,\Lambda \cong \underline{\mathrm{mod}}\,K\big(1 \rightleftarrows 2\big)\big/J^3 \times \underline{\mathrm{mod}}\,K\big(1 \rightleftarrows 2\big)\big/J^2$$

謝辞

第 70 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会を賜りましたこと，世話人の皆様に心より感謝申し上げます。特に，講演をご依頼くださいました山浦浩太先生には，深く御礼申し上げます。

参考文献

[1] H. Asashiba. A generalization of gabriel's galois covering functors and derived equivalences. *J. Algebra*, 334(1):109–149, 2011.

[2] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.

[3] M. Auslander and M. Bridger. *Stable module theory*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 94. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[4] L. L. Avramov and A. Martsinkovsky. Absolute, relative, and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimension. *Proc. London Math. Soc.* (3), 85(2):393–440, 2002.

[5] P. A. Bergh, S. Oppermann, and D. A. Jorgensen. The Gorenstein defect category. *Q. J. Math.*, 66(2):459–471, 2015.

[6] R.-O. Buchweitz. Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings. unpublished manuscript, 1986. available at http://hdl.handle.net/1807/16682.

[7] X. Chen, S. Geng, and M. Lu. The Singularity Categories of the Cluster-Tilted Algebras of Dynkin Type. *Algebr. Represent. Theor.*, 18(2):531–554, 2015.

[8] X. Chen and M. Lu. Singularity categories of skewed-gentle algebras. *Colloq. Math.*, 141(2):183–198, 2015.

[9] X.-W. Chen. Gorenstein Homological Algebra of Artin Algebras. (2017). arXiv:1712.04587.

[10] X.-W. Chen. Relative singularity categories and Gorenstein-projective modules. *Mathematische Nachrichten*, 284(2-3):199–212, 2011.

[11] X.-W. Chen. THE STABLE MONOMORPHISM CATEGORY OF A FROBENIUS CATEGORY. *Math. Res. Lett*, 18(1):127–139, 2011.

[12] X.-W. Chen. Module factorizations and Gorenstein projective modules, 2024. arXiv:2402.11613.

[13] X.-W. Chen, D. Shen, and G. Zhou. The Gorenstein-projective modules over a monomial algebra. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 148(6):1115–1134, 2018.

[14] J. Cornick and P. H. Kropholler. On complete resolutions. *Topology Appl.*, 78(3):235–250, 1997.

[15] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda. Gorenstein injective and projective modules. *Math. Z.*, 220(4):611–633, 1995.

[16] R. Gordon and E. L. Green. Graded Artin algebras. *J. Algebra*, 76(1):111–137, 1982.

[17] R. Gordon and E. L. Green. Representation theory of graded Artin algebras. *J. Algebra*, 76(1):138–152, 1982.

[18] N. Hanihara. Auslander correspondence for triangulated categories. *Algebra & Number Theory*, 14(8):2037–2058, 2020.

[19] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[20] T. Honma and S. Usui. The stable category of Gorenstein-projective modules over a monomial algebra. *J. Lond. Math. Soc.*, 111(6):e70204, 2025.

[21] Y. Iwanaga. On rings with finite self-injective dimension. *Comm. Algebra*, 7(4):393–414, 1979.

[22] O. Iyama, Y. Kimura, and K. Ueyama. Cohen-Macaulay representations of Artin-Schelter Gorenstein algebras of dimension one, 2024. arXiv:2404.05925.

[23] M. Kalck. Singularity categories of gentle algebras. *Bull. London Math. Soc.*, 47:65–74, 2015.

[24] B. Keller. Deriving dg categories. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 27(1):63–102, 1994.

[25] B. Keller. On triangulated orbit categories. *Doc. Math.*, 10:551–581, 2005.

[26] Y. Kimura, H. Minamoto, and K. Yamaura. Tilting theory for finite dimensional 1-Iwanaga-Gorenstein algebras. *J. Algebra*, 663:259–288, 2025.

[27] H. Krause. Krull-Schmidt categories and projective covers. *Expo. Math.*, 33(4):535–549, 2015.

[28] Henning Krause. Derived categories, resolutions, and Brown representability. (2006). arXiv:math/0511047.

[29] P. Liu and M. Lu. Recollements of singularity categories and monomorphism categories. *Commun. Algebra*, 43(6):2443–2456, 2015.

[30] M. Lu. Singularity Categories of some 2-CY-tilted Algebras. *Algebr. Represent. Theor.*, 19:1257–1295, 2016.

[31] M. Lu. Gorenstein defect categories of triangular matrix algebras. *Journal of Algebra*, 480:346–367, 2017.

[32] M. Lu and B. Zhu. Singularity categories of Gorenstein monomial algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 225(8):Paper No. 106651, 39, 2021.

[33] H. Minamoto and K. Yamaura. Homological dimension formulas for trivial extension algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 224(8):106344, 2020.

[34] H. Minamoto and K. Yamaura. On finitely graded Iwanaga-Gorenstein algebras and the stable categories of their (graded) Cohen-Macaulay modules. *Adv. Math.*, 373:107228, 2020.

[35] C. M. Ringel. The Gorenstein projective modules for the Nakayama algebras. I. *J. Algebra*, 385:241–261, 2013.

[36] C. M. Ringel and P. Zhang. Representations of quivers over the algebra of dual numbers. *Journal of Algebra*, 475:327–360, 2017.

[37] Amit Shah. Krull-remak-schmidt decompositions in hom-finite additive categories. *Expositiones Mathematicae*, 41(1):220–237, 2023.

[38] K. Yamaura. Realizing stable categories as derived categories. *Adv. Math.*, 248:784–819, 2013.

[39] A. Zaks. Injective dimension of semi-primary rings. *J. Algebra*, 13:73–86, 1969.

[40] P. Zhang. Monomorphism categories, cotilting theory, and Gorenstein-projective modules. *J. Algebra*, 339(1):181–202, 2011.

[41] P. Zhang. Gorenstein-projective modules and symmetric recollements. *J. Algebra*, 388:65–80, 2013.

[42] A. Zimmermann. *Representation theory*, volume 19 of *Algebra and Applications*. Springer, Cham, 2014. A homological algebra point of view.

Fano 重みつき超曲面の K-安定性

佐野 太郎 *

1 Intro

滑らかな射影多様体 X で反標準束 $-K_X$ が豊富となるものを **Fano 多様体**という. 代数多様体の分類において, Fano 多様体は核となる対象であり, 長く研究されてきた.

一方で, 複素微分幾何学では Kähler–Einstein 計量を持つコンパクト複素多様体の研究が長くなされてきた. そのような多様体は標準束が豊富な場合, 自明になる場合と, Fano の場合の 3 つの場合があるが, 前半の 2 つは Aubin, Yau により存在が保証された. 残る Fano の場合には, Kähler–Einstein 計量を持つ Fano 多様体は, K-ポリ安定性と呼ばれる代数幾何学的な概念で特徴づけられる, ということが最終的に Chen–Donaldson–Sun[CDS15], Tian[Tia15] らにより証明された. また, この対応は klt 特異点を持つ Fano 多様体 ($\mathbb{Q}$-Fano 多様体) にも拡張された ([Li19], [LXZ22]). これにより, 与えられた Fano 多様体が Kähler–Einstein 計量を持つか決定する, という問題が代数的に取り組める問題となった.

代数的な定式化はできたが, K-ポリ安定性の定義は, test 配位と呼ばれる Fano 多様体の退化を全て考えてその上で Donaldson–二木不変量と呼ばれる不変量を使ってなされていた. 定義そのものから K-安定性を判定することは困難に思えたが, その後の様々な人の貢献により, 現在では δ-不変量と呼ばれる, Fano 多様体上の因子的付値から定まる不変量で K-安定性は特徴づけられた. この不変量も計算は困難であるが, 当初と比べると状況は大きく改善され, 具体的な Fano 多様体の K-安定性の決定が大きく進んできている. 例えば, 次の問題は有名である:

予想 1.1. *[Xu25] $X_d \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ を次数 d の非特異超曲面で $3 \leq d \leq n+1$ とする. このとき, X_d は K-安定となる.*

この問題は Donaldson やその周辺にも認識されていたようだが, 例えば [Xu25] には明示的に書かれている. 先行研究としては, $X_{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の K-安定性は α-不変量というものの評価を使って示された [Che01], [Fuj19a]. また, $X_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ が K-安定であることは [AZ22] により, δ-不変量というもの評価を “Abban–Zhuang の方法” と呼ばれる技術を駆使して示された. また, Fermat 超曲面 $X_d = (z_0^d + \cdots + z_{n+1}^d = 0) \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の K-安定性は [Zhu21] により示された. これと “K-安定性の openness”[BLX22] から, 一般の X_d は K-安定であることも従う.

* 神戸大学 大学院理学研究科 数学専攻　E-mail: tarosano@math.kobe-u.ac.jp

本稿では具体的な Fano 多様体の一つである, 重み付き Fano 超曲面と呼ばれるものについて, 筆者が共著者と得てきた結果 ([ST24], [LST25], [ST25]) について述べる. 方法としては, 上の通常の超曲面 X_{n+1} や X_n, および Fermat 超曲面の K-安定性を示す際に使われた技術を踏襲するが, 重み付きの場合の困難もあるので, それの説明も述べる.

2 重み付き超曲面について

まずは設定のためにも, 重み付き超曲面について導入しよう.

定義 2.1. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ であって, $\gcd(a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n) = 1 (i = 0, \ldots, r)$ となるものを考える. このとき,

$$\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n) := \operatorname{Proj} \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n] \quad (\text{但し} \deg z_i = a_i \ (\forall i))$$

とおいて, これを**重み付き射影空間**と呼ぶ.

これは $(a_0, \ldots, a_n) = (1, \ldots, 1)$ の時には通常の射影空間 $\mathbb{P}^n$ となるが, それ以外の時には特異点を持つ. 実際, 開集合 $(z_i \neq 0) \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ $(i = 0, \ldots, n)$ に対して

$$(z_i \neq 0) \simeq \mathbb{C}^n / \boldsymbol{\mu}_{a_i}(a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n)$$

が成り立つ (ここで右辺は $\boldsymbol{\mu}_{a_i} \simeq \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$ の $\mathbb{C}^n$ への重み $(a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n)$ から定まる作用による巡回商特異点 ($\frac{1}{a_i}(a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n)$**-特異点**) である). $P_i := [0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0] \in \mathbb{P}$ のことを $\frac{1}{a_i}(a_0, \ldots, \hat{a_i}, \ldots, a_n)$-特異点とも呼ぶ. $\operatorname{Sing} \mathbb{P} \subset \mathbb{P}$ を $\mathbb{P}$ の特異点集合とすると, 以下のような記述ができる [DD85, Proposition 7]:

$$\operatorname{Sing} \mathbb{P} = \bigcup_{J, a_J > 1} \{z_j = 0 \mid j \in \bar{n} \setminus J\},$$

ただし J は $\emptyset \neq J \subset \bar{n} := \{0, \ldots, n\}$ で $a_J := \gcd\{a_j \mid j \in J\}$ となるものを動く.

また, $\mathbb{C}^\times$ の作用 $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して, $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n) \simeq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^\times$ なる表示もあることに注意する. これより, 射影 $\pi \colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$ が定まる. この作用が自由でないところで特異点が生じる.

例 2.2. (i) $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ は特異点 $P_2 := [0 : 0 : 1 : 0]$ と $P_3 := [0 : 0 : 0 : 1]$ を持つ. 実際, P_2 は $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$-特異点で, P_3 は $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$-特異点である.

(ii) $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 2)$ の特異点集合は $(z_0 = z_1 = z_2 = 0) \simeq \mathbb{P}^1$ となる. 実際, P_3 と P_4 は $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 0)$-特異点で非孤立特異点である.

さて, 重み付き超曲面は次のようなものである.

定義 2.3. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を定義 2.1 の条件を満たすものとし, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. このとき, d 次の斉次式 $F_d \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$(ただし $\deg z_i = d_i$) から因子

$$X_d := (F_d = 0) \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n) =: \mathbb{P}$$

が定まる. これを**重み付き超曲面 (WHS)** という.

以下の仮定を置いた WHS を考えることが多い.

仮定 2.4. (i) $X_d \subset \mathbb{P}$ は **quasi-smooth**, つまり $\pi^{-1}(X_d) \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ が非特異.

(ii) $X_d \subset \mathbb{P}$ は **well-formed**, つまり $X_d \cap \operatorname{Sing} \mathbb{P} \hookrightarrow X_d$ の余次元は 2 以上.

この仮定を満たす WHS X_d は以下の良い性質を満たす.

命題 2.5. *(i)* X_d は商特異点のみを持ち, $\operatorname{Sing} X_d = \operatorname{Sing} \mathbb{P} \cap X_d$ となる. 特に, $\operatorname{Sing} \mathbb{P} \cap X_d = \emptyset$ であることと X_d が非特異になることは同値.

(ii) 反標準因子 $-K_{X_d}$ に対し, $\mathcal{O}_X(-K_{X_d}) = \mathcal{O}_X(\sum_{i=0}^n a_i - d)$ が成り立つ. 特に, X_d が *Fano* であることと, $I_{X_d} := \sum_{i=0}^n a_i - d > 0$ となることは同値. *(I_{X_d} を X_d の* **Fano 指数**と呼ぶ.*)*

(iii) $\dim X_d \geq 3$ なら, $\operatorname{Cl} X_d = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_{X_d}(1) \simeq \mathbb{Z}$.

(iv) $\mathcal{O}_{X_d}(1)^n = \dfrac{d}{\prod_{i=0}^n a_i}$.

例 2.6. (i) 一般の $X_6 \subset \mathbb{P}(1,1,2,3)$ は次数 1 非特異 del Pezzo 曲面となる. 実際, $[0,0,1,0], [0,0,0,1] \notin X_6$ と取れるので, X_6 は非特異となる. また, $-K_X = \mathcal{O}_X(7-6) = \mathcal{O}_X(1)$ が従い, $\mathcal{O}_X(1)^2 = \frac{6}{2\cdot 3} = 1$ も従う.

(ii) (一般の)$X_{10} \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2,5)$ は Fano 指数 1 非特異 Fano 4-fold となる.

(iii) (一般の)$X_6 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,2)$ は $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold となり, 3 点の $\frac{1}{2}(1,1,1)$-特異点をもつ. 実際, $\operatorname{Sing} \mathbb{P} \cap X_6 = \operatorname{Sing} X_6 \subset \mathbb{P}(2,2) \simeq \mathbb{P}^1$: 3 点からなる.

事実 2.7. [IF00], [CCC09] ちょうど 95 種の $(d; a_0, \dots, a_4)$ で $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_4)$ が末端特異点のみ持つ quasi-smooth $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold WHS で $I_{X_d} = 1$ となるものが存在する.

このように, WHS を考えることで多くの Fano 多様体の例が構成できる.

3 K-安定性に関する不変量

K-(ポリ, 半) 安定性は, test 配位と呼ばれる X の退化を考えて, それから定まる Donaldson–二木不変量と呼ばれる数を使って定義される. ここではその定義には触れない. 簡単に "対の特異点" について復習する. (詳細やより一般の場合は [Xu25], [KM98] などを参照.)

定義 3.1. X を非特異代数多様体とし, $D = \sum d_i D_i$ を効果的 $\mathbb{Q}$-因子 ($d_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$) とする. $\mu\colon \tilde{X} \to X$ を (X, D) の "log resolution", つまり μ は射影的双有理射で, $\tilde{X}$ が非特異かつ $\mu^{-1}(\operatorname{Supp} D) \cup \operatorname{Exc} \mu = \bigcup E_i$(ただし $\operatorname{Exc} \mu \subset \tilde{X}$ は μ の例外集合) が単純正規交差 (SNC) 因子となるものとする. このとき, 分岐公式

$$K_{\tilde{X}} = \mu^*(K_X + D) + \sum a_i E_i \quad (\exists a_i \in \mathbb{Q})$$

が成り立つ. 組 (X,D) が **lc** (resp. **klt**, **canonical**, **terminal**) であるとは, 任意の μ と i に対し $a_i \geq -1$ (resp. $a_i > -1$, $a_i \geq 0$, $a_i > 0$) となることとする.

例 3.2. (i) $C_1 \subset \mathbb{P}^2$ を nodal cubic curve とすると, $(\mathbb{P}^2, C_1)$ は lc.

(ii) $C_2 \subset \mathbb{P}^2$ を cuspidal cubic curve とすると, $(\mathbb{P}^2, C_2)$ は not lc だが, $(\mathbb{P}^2, \frac{5}{6}C_2)$ は lc.

注意 3.3. X を正規代数多様体, D を X 上の効果的 $\mathbb{Q}$-因子で $K_X + D$: $\mathbb{Q}$-Cartier となるものとすると, (X,D): lc/klt という概念が同様に log resolution $\mu\colon \tilde{X} \to X$ と分岐公式を使って定義できる.

K-安定性に関する有名な不変量として, 以下の α-不変量がある.

定義 3.4. X を非特異射影多様体 (または正規射影多様体で klt 特異点のみ持つもの) とする.

(i) D を X 上の効果的 $\mathbb{Q}$-(Cartier) 因子とする.

$$\mathrm{lct}(X,D) := \sup\{\lambda \geq 0 \mid (X, \lambda D) : \mathrm{lc}\}$$

とおき, これを X の D に関する **lc threshold** という.

(ii) L を X 上の豊富因子とする.

$$\alpha(X,L) := \inf\{\mathrm{lct}(X,D) \mid 0 \leq \forall D \sim_{\mathbb{Q}} L\}$$

とおき, (X,L) の **α-不変量**と呼ぶ.

以下の定理から α-不変量は K-安定性と関連する.

定理 3.5. *([Tia87], [OS12], [Fuj19a])* X を $\mathbb{Q}$-*Fano* 多様体とし, $\alpha(X) := \alpha(X, -K_X)$ とおく.

(i) $\alpha(X) > \dfrac{\dim X}{\dim X + 1}$ なら X は K-安定.

(ii) さらに X が非特異なら $\alpha(X) = \dfrac{\dim X}{\dim X + 1}$ でも X は K-安定.

例 3.6. (i) $X_{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を非特異な $(n+1)$-次超曲面とすると, $\alpha(X_{n+1}) \geq \frac{n}{n+1}$ が [Che01] により示された. よって上の定理 (ii) から X_{n+1} は K-安定となる.

(ii) $n \geq 2$ で $\alpha(\mathbb{P}^n) = \frac{1}{n+1} < \frac{n}{n+1}$ だが, $\mathbb{P}^n$ は K-ポリ安定 (特に K-半安定) である.

以下の δ-不変量により, $\mathbb{Q}$-Fano 多様体の K-安定性が特徴づけられる.

定義 3.7. ([FO18], [BJ20]) X を非特異射影多様体 (または正規 klt 射影多様体) とし, L を X 上の豊富因子とする.

(i) $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $N_m := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, mL) > 0$ なるものを考える. D が **m-basis type $\mathbb{Q}$-因子**とは, 以下の形の $\mathbb{Q}$-因子のこと:

$$D = \frac{1}{mN_m}\sum_{i=1}^{N_m}(s_i = 0),$$

但し, $s_1, \dots, s_{N_m} \in H^0(X, mL)$ は $\mathbb{C}$-基底とする. (このとき, $\mathbb{Q}$-線形同値 $0 \le D \sim_{\mathbb{Q}} L$ が成り立つことに注意.)

(ii) $\delta_m(X,L) := \inf\{\mathrm{lct}(X,D) \mid 0 \le \forall D \sim_{\mathbb{Q}} L : m\text{-basis type}\}$ とおくと, 数列 $\{\delta_m(X,L)\}_m$ は収束することが [BJ20] により示された. そこで

$$\delta(X,L) := \lim_{m\to\infty} \delta_m(X,L)$$

と定め, $\delta(X,L)$ を (X,L) **の δ-不変量**と呼ぶ.

注意 3.8. $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\delta(X,mL) = \frac{1}{m}\delta(X,L)$ が定義より従う.

以下の性質により, δ-不変量は K-安定性を特徴づける.

定理 3.9. *([Fuj19b], [Li17], [FO18], [BJ20]) X を $\mathbb{Q}$-Fano 多様体とし, $\delta(X) := \delta(X, -K_X)$ とおく.*

このとき, X が K-安定 (resp. K-半安定) であることと, $\delta(X) > 1$ (resp. ≥ 1) は同値である.

4 Fano WHS の K-安定性

このセクションでは断らない限り, $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_{n+1})$ を定義 2.1 のような重み付き射影空間とし, $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_{n+1})$ を quasi-smooth well-formed Fano WHS とする. 簡単のため, $a_0 \le \dots \le a_{n+1}$ としておく. 主に Fano 指数 I_{X_d} が 1 の場合を考えることにする.

先行研究としては, 次のようなものがあった:

(i) <u>$\dim X_d = 2$ のとき</u>: X_d が非特異かつ $I_{X_d} = 1$ の時は, X_d は次数が $1, 2, 3$ の del Pezzo 曲面である. Tian が KE 計量の存在を示していた. X_d: klt かつ $I_{X_d} = 1$ のときは, [JK01] がリストを与え, 数種類以外の場合には KE 計量の存在を示した. 最終的に [CPS21] により, $I_{X_d} = 1$ の場合は X_d は K-安定であることが示された. 一方で, $I_{X_d} = 2$ の場合には K-不安定な例が [KW21] により見つかっている.

(ii) <u>$\dim X_d = 3$ のとき</u>: X_d が非特異の場合, WHS となる Fano 3-fold は多くはないが, 4 次超曲面 [Cheltsov, 藤田], 3 次超曲面 [LX19] や $X_6 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,3)$[AGP06] などの K-安定性はわかっていた. X_d が terminal 特異点のみ持ち, $I_{X_d} = 1$ の場合, X_d が "一般" の時は [Che09], birationally superrigid の場合は [KOW23], そして残った場合は [CO24] により K-安定性が示された.

(iii) <u>$\dim X_d \ge 4$ のとき</u>: [JK01] は以下の結果を示した: $I_{X_d} = 1$ かつ $\frac{n+1}{n} a_0 a_1 > d$ ならば, X_d は K-安定. しかし, この場合は X_d は非特異にはならない.

注意 4.1. X_d が非特異 Fano ならば, $a_0 = a_1 = 1$ かつ $a_i | d (\forall i)$ かつ $\gcd(a_i, a_j) = 1$ $(\forall i \ne j)$.

よって, 非特異な Fano WHS で $I_{X_d} = 1$ の場合の K-安定性が筆者が Fano WHS の K-安定性に取り組み始めたときの問題となった. Tasin 氏との共同研究 [ST24] で技術的な仮定を置いた場

合の K-安定性を α-不変量を用いて示していた.

まず, 今回の主結果として以下の一般的な設定 (Fano は仮定しない) での結果を得た.

定理 4.2. *[ST25] $X = X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ を quasi-smooth かつ well-formed な WHS とする. ある $0 \leq r \leq n+1$ が存在し $a_r > 1$ かつ $a_r | d$ を満たすとすると, 次が成立.*

(i) $\delta(X_d, \mathcal{O}_{X_d}(1)) \geq \dfrac{(n+1)a_r}{d}$.

(ii) さらに $0 < I_{X_d} \leq \dfrac{(n+1)a_r}{d}$ *かつ* $n \geq 3$ *ならば,* X_d *は K-安定な* $\mathbb{Q}$*-Fano 多様体となる.*

(i) を認めると, (ii) はその帰結である. 実際, $\mathcal{O}_X(-K_X) = \mathcal{O}_X(I_X)$ であり,

$$\delta(X, -K_X) = \frac{1}{I_X}\delta(X, \mathcal{O}_X(1)) \geq 1$$

が (i) と仮定から従う. 等号成立の場合はないことも [AZ22] での議論などよりわかるので, X_d の K-安定性が従う. (i) の証明は後で説明する.

定理 4.2 の帰結として, 非特異 Fano WHS に対しては次の結果を得た.

系 4.3. *[ST25] $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ を非特異 Fano WHS で $I_{X_d} = 1, 2$ を満たすものとすると, X_d は K-安定である.*

この結果は, $(d; a_0, \ldots, a_{n+1})$ が $I_X = 1, 2$ の時に不等式 $I_{X_d} \leq \frac{(n+1)a_r}{d}$ を満たすことを注意 4.1 も使って初等的に確認することで, 定理 4.2 から従う.

また, terminal Fano 3-fold WHS に関しても, 次が定理 4.2 の帰結として得られる.

系 4.4. *[ST25] $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_4)$ が terminal quasi-smooth $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold WHS で $I_{X_d} = 1$ となるような 95 種の $(a_0, \ldots, a_4; d)$ のうち 82 種に対し, ある $0 \leq r \leq 4$ が存在し $1 < a_r | d$ かつ $\dfrac{4a_r}{d} \geq 1$ が成立. (これより, 82 種の X_d の K-安定性が従う.)*

この系から例えば次が従う:

例 4.5. (i) $X_6 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,2)$ は K-安定. 実際, $2|6$ かつ $\frac{4 \cdot 2}{6} = \frac{4}{3} > 1$ である.

(ii) $X_5 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ の K-安定性は系 4.4 からは従わないが, [CO24] により K-安定性が確認された. これを含む残っていた 13 個 (以下) の場合も [CO24] により K-安定性が確認された.

5 Abban–Zhuang の方法

定理の証明において重要な役割を果たす, Abban–Zhuang の方法 [AZ22] について説明する. この方法は大まかには, adjunction を使って δ-不変量の評価を低次元の場合に帰着する, というものである. まず局所 δ-不変量を以下のように定義する.

定義 5.1. X を非特異射影多様体 (または klt 射影多様体) とし, L を X 上の豊富因子, $x \in X$ とする. $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $|mL| \neq \emptyset$ となるものに対し,

$$\delta_{m,x}(X,L) := \sup\{\lambda \geq 0 \mid (X, \lambda D) : \text{“lc at } x\text{”} (\forall D : m\text{-basis type})\}$$

とおく. このとき, 数列 $\{\delta_{m,x}(L)\}_m$ は収束し (cf.[BJ20]),

$$\delta_x(X,L) := \lim_{m\to\infty} \delta_{m,x}(X,L)$$

とおいて (X,L) の x における**局所 δ-不変量**と呼ぶ.

δ-不変量は因子や付値を使って記述することもできる

注意 5.2 (δ-不変量の因子/付値による記述). (X,L) および $x \in X$ を定義 5.1 でのものとする.

(i)

$$\delta(X,L) = \inf_{E\colon \text{因子}/X} \frac{A_X(E)}{S(L;E)}$$

が成立, ただし E は X 上空の素因子 (つまりある正規多様体 $\tilde{X}$ からの射影双有理射 $\mu\colon \tilde{X} \to X$ があって $E \subset \tilde{X}$ が素因子となるもの) を動く. また, $A_X(E) := 1 + \mathrm{ord}_E(K_{\tilde{X}} - \mu^* K_X)$ は “log discrepancy” であり, “S-不変量”$S(L;E)$ は以下で定まる

$$S(L;E) := \frac{1}{\mathrm{vol}(L)} \int_0^\infty \mathrm{vol}(\mu^* L - xE)dx.$$

(vol は ($\mathbb{R}$-) 因子の体積である.)

(ii) $\delta_x(X,L)$ に関しては,

$$\delta_x(X,L) = \inf_{E\colon \text{因子}/X, x \in c_X(E)} \frac{A_X(E)}{S(L;E)}$$

が成立, 但し E は X 上空の因子で $c_X(E) := \mu(E) \subset X$ が x を含むものを動く.

(iii) 上の (i), (ii) は E が X 上空の因子を動いたときの下限であるが, これを “log discrepancy が有限となる付値 ν” を動かした時の下限にもなり, 実は付値 ν で最小値を実現するものがある [BJ20]. よって, $\delta(X,L) = \min_{x\in X} \delta_x(X,L)$ が成り立つ. また, $\delta(X,L) > 1 \Leftrightarrow \delta_x(X,L) > 1$ $(\forall x \in X)$ であることも従う.

以下の基盤的な不等式により, δ-不変量の評価を低次元の場合に帰着できる.

定理 5.3. *[AZ22] X を klt 射影多様体とし, L を X 上の豊富因子, $x \in X$ とする. ある $x \in H \in |L|$ で klt 特異点のみもち “well-formed”($H \cap \mathrm{Sing}\, X \subset H$ の余次元 ≥ 2) なものが取れるとする. このとき以下が成立 (但し $n := \dim X$):*

$$\delta_x(X,L) \geq \min\left\{n+1, \frac{n+1}{n}\delta_x(H, L|_H)\right\}.$$

例えば, $\mathbb{P}^n$ の K-半安定性が以下のように直ちに得られる.

例 5.4. $x \in \mathbb{P}^n$ とし, $x \in H_j \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)| (j = 1, \ldots, n-1)$ を一般の元とする.
すると, $\mathbb{P}^n \supset H_1 \supset \cdots \supset H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1} \ni x$ という線形部分多様体の列ができる. これと定理 5.3 より,

$$\delta_x(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \geq \frac{n+1}{n} \delta_x(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)) \geq \cdots \geq \frac{n+1}{2} \delta_x(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = n+1$$

が得られる. よって, $\delta(\mathbb{P}^n, -K_{\mathbb{P}^n}) \geq 1$ となり, $\mathbb{P}^n$ の K-半安定性が得られる.

系 5.5. *[AZ22] X を非特異射影多様体 (または klt 射影多様体) とし, L を X 上の豊富因子, $x \in X$ とする. また, $j = 1, \ldots n-1$ に対し, ある $x \in H_j \in |m_j L|$ であって,*

$$H_1 \supsetneq H_1 \cap H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1} = C$$

が全て正規かつ "well-formed"(特に C は非特異曲線) となるものが取れるとする.

このとき, 以下が成立:

$$\delta_x(X, L) \geq \frac{n+1}{m_1 \cdots m_{n-1} \cdot L^n}.$$

注意 5.6. [AZ22] は, X 上の因子だけでなく, X 上空の因子に対しても δ-不変量を比較する不等式を確立した. ただ, その場合には "次数付き線形系" の δ-不変量を考える必要がある.

6　定理 4.2(i) の証明

簡単のため, $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ を非特異 Fano WHS とし, $a_0 \leq \ldots \leq a_{n+1}$ としておく. このとき $a_0 = a_1 = \cdots = a_{c_1-1} = 1$ となる $c_1 \in \mathbb{Z}_{>1}$ がとれて, $a_i | d$ $(\forall i)$ が成り立っていた (注意 4.1). 示したいのは, 任意の $x \in X$ に対し $\delta_x(X, \mathcal{O}_X(1)) \geq \dfrac{(n+1)a_{n+1}}{d}$ となることであるが, 2 つの場合分けをして証明する.

(**Case 1**) $x \notin \mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_X(1)| = (z_0 = \cdots = z_{c_1-1} = 0) \subset X$ のとき:
　このときは以下の主張が成り立つ.

主張 6.1. $j = n, n-1, \ldots, 2$ に対し, $x \in H_j \in |\mathcal{O}_X(a_j)|$ であって, 部分多様体たち

$$H_n \supsetneq \cdots \supsetneq H_n \cap \cdots \cap H_2 = C$$

が全て正規になるものが存在する (特に C は非特異曲線).

($j = n+1$ は使わず, $j = n$ から始まっていることに注意されたい.) これと系 5.5 より, 以下の得たかった不等式を得る:

$$\delta_x(X, \mathcal{O}_X(1)) \geq \frac{n+1}{a_2 \cdots a_n \cdot \mathcal{O}_X(1)^n} = \frac{(n+1)a_{n+1}}{d}.$$

(**Case 2**) $x \in \mathrm{Bs}\,|\mathcal{O}_X(1)|$ のとき:

まず, ある $k \geq c_1$ で x の k 番目の座標 $x_k \neq 0$ なるものが存在. すると, ある $H_k \in |\mathcal{O}_X(a_k)|$ で $x \notin H_k$ かつ $\operatorname{Sing} H_k$ が 0 次元となるものが取れる. これより, $\pi\colon W \to X_d$ を H_k で分岐する分岐被覆とする. W は具体的には, H_k の方程式から定まる WHS

$$W \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, 1, \dots, a_{n+1}) \quad (a_k \text{ が } 1 \text{ になったもの})$$

として構成できる. $y \in W$ で $\pi(y) = x$ となるものを取ると, 次が成立:

主張 6.2. $\delta_x(X, \mathcal{O}_X(1)) \geq \delta_y(W, \mathcal{O}_W(1))$.

($\because$ これは δ-不変量と分岐被覆に関する標準的な議論から従う. 実際, X 上空の因子 E で $x \in c_X(E)$ となるものに対し, ある W 上空の因子 E' で $y \in c_W(E')$ となるものが存在し, $\dfrac{A_X(E)}{S(\mathcal{O}_X(1); E)} \geq \dfrac{A_W(E')}{S(\mathcal{O}_W(1); E')}$ が満たされる.)

これより, $\delta_y(\mathcal{O}_W(1))$ を上から評価できれば十分. そして, $y \notin \operatorname{Bs}|\mathcal{O}_W(1)|$ とできることに注意. すると, 主張 6.1 がこの時も成立し,

$$W \supsetneq \exists H'_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \exists H'_1 \cap \cdots \cap H'_{n-1} =: C' \ni y$$

なる正規多様体の列が作れる (C' は非特異曲線). すると, 系 5.5 から以下が示せる:

$$\delta_y(W, \mathcal{O}_W(1)) \geq \frac{(n+1)}{a_2 \cdots \hat{a_k} \cdots a_n \cdot \mathcal{O}_W(1)^n} = \frac{(n+1)a_{n+1}}{d}.$$

7 その他の話題

まず, Brieskorn–Pham 型の Fano WHS の K-安定性が以下のように言える.

定理 7.1. *[ST24] $a_i | d$ かつ $\gcd(a_i, a_j) = 1$ ($\forall i \neq j$) なる $(d; a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+2}$ がある時に,*

$$X = X_d := (z_0^{d_0} + \cdots + z_{n+1}^{d_{n+1}} = 0) \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_{n+1})$$

を考える. ただし $d_j := d/a_j$, $d \neq 1, 2$ とし, $I_{X_d} = \sum a_i - d > 0$ とする.

このとき, X_d は K-安定となる.

証明のスケッチ. 次の図式のように, 分岐被覆を

$$\pi\colon \mathbb{P}(a_0, \dots, a_{n+1}) \to \mathbb{P}(d, \dots, d) \simeq \mathbb{P}^{n+1}; \quad [z_0 : \cdots : z_{n+1}] \mapsto [z_0^{d_0} : \cdots : z_{n+1}^{d_{n+1}}]$$

から誘導する:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(a_0, \dots, a_{n+1}) \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}(d, \dots, d) \simeq \mathbb{P}^{n+1} & \ni [w_0 : \cdots : w_{n+1}] . \\
X_d \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_X"'] & L = (w_0 + \cdots + w_{n+1} = 0) \arrow[u, hook] & \supset L_i = (w_i = 0)
\end{tikzcd}$$

すると, L_i たちが $\pi_X := \pi|_X : X \to L$ の分岐因子となり, 次の分岐公式が成立:

$$K_{X_d} = \pi^*(K_L + \Delta_L), (\text{ただし } \Delta_L := \sum_{i=0}^{n+1}(1 - \frac{1}{d_i})L_i).$$

ここで,「X_d が K-ポリ安定 $\Leftrightarrow$ (L, Δ_L) が K-ポリ安定」なる関係が [LZ22], [Zhu21] により従うので, (L, Δ_L) の K-ポリ安定性に問題が帰着する. (L, Δ_L) は "log Fano 超平面配置" と呼ばれる対象になり, [Fuj21] を使って K-ポリ安定性が初等的な計算で判定できる. すると, X は非特異 Fano で $\mathbb{P}^n$ と 2 次超曲面以外のものであるので, $I_X < (n+1)a_0 = n+1$ であることから X の K-ポリ安定性が従う. これとは別に, 自己同型群 $\mathrm{Aut}(X_d)$ が有限であることも示せて, K-安定性が従う. $\square$

これより, 以下も従う:

系 7.2. $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ を一般の非特異 Fano WHS とし, X_d は $\mathbb{P}^n$ および 2 次超曲面でないとする. このとき, X_d は K-安定となる.

似たような (well-formed とは限らない)Brieskorn-Pham 型の Fano WHS の K-ポリ安定性の応用として, 5 次元以上の奇数次元の球面 (および Brieskorn 球面と呼ばれるエキゾチック球面) が無限個の族の Einstein 計量を許容することも筆者と Liu, Tasin との共同研究 [LST25] で示された.

今後の課題の一つとしては, 次がある.

予想 7.3. *[ST25] $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_{n+1})$ を quasi-smooth well-formed Fano WHS で $I_{X_d} = 1$ なるものとする. このとき, X_d は K-安定.*

部分的な結果として, 次がある (つまり, 2 つ以外の重みが全て 1 の場合).

定理 7.4. *[CFST] $X_d \subset \mathbb{P}(1, \ldots, 1, a, b)$ を quasi-smooth well-formed Fano WHS で $I_X = 1$ なるものとする. このとき, X_d は K-安定.*

例えば, $X_7 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$ の K-安定性はここからも従う. ただ, 3 つ以上の重みが 1 でない場合は未だ不透明である.

謝辞

講演の機会をくださった世話人の先生方, 特に岸本崇先生, 藤田健人先生に感謝いたします.

参考文献

[AGP06] C. Arezzo, A. Ghigi, and G. P. Pirola, *Symmetries, quotients and Kähler-Einstein metrics*, J. Reine Angew. Math. **591** (2006), 177–200. MR 2212883

[AZ22] H. Abban and Z. Zhuang, *K-stability of Fano varieties via admissible flags*, Forum Math. Pi **10** (2022), Paper No. e15, 43. MR 4448177

[BJ20] H. Blum and M. Jonsson, *Thresholds, valuations, and K-stability*, Adv. Math. **365** (2020), 107062, 57. MR 4067358

[BLX22] H. Blum, Y. Liu, and C. Xu, *Openness of K-semistability for Fano varieties*, Duke Math. J. **171** (2022), no. 13, 2753–2797. MR 4505846

[CCC09] J.-J. Chen, J. A. Chen, and M. Chen, *On quasismooth weighted complete intersections*, Journal of Algebraic Geometry 20 (2011), no. 2, 239–262 (2009).

[CDS15] X. Chen, S. Donaldson, and S Sun, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I,II,III*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 183–197, 199–234, 235–278.

[CFST] L. Campo, K. Fujita, T. Sano, and L. Tasin, *in preparation.*

[Che01] I. Cheltsov, *Log canonical thresholds on hypersurfaces*, Mat. Sb. **192** (2001), no. 8, 155–172.

[Che09] I. A. Cheltsov, *Extremal metrics on two Fano manifolds*, Mat. Sb. **200** (2009), no. 1, 97–136. MR 2499678

[CO24] L. Campo and T. Okada, *K-stablity of Fano threefold hypersurfaces of index 1*, 2024.

[CPS21] I. Cheltsov, J. Park, and C. Shramov, *Delta invariants of singular del Pezzo surfaces*, J. Geom. Anal. **31** (2021), no. 3, 2354–2382. MR 4225810

[DD85] A. Dimca and S. Dimiev, *On analytic coverings of weighted projective spaces*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), no. 3, 234–238. MR 806423

[FO18] K. Fujita and Y. Odaka, *On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors*, Tohoku Math. J. (2) **70** (2018), no. 4, 511–521. MR 3896135

[Fuj19a] K. Fujita, *K-stability of Fano manifolds with not small alpha invariants*, J. Inst. Math. Jussieu **18** (2019), no. 3, 519–530. MR 3936640

[Fuj19b] ———, *A valuative criterion for uniform K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties*, J. Reine Angew. Math. **751** (2019), 309–338. MR 3956698

[Fuj21] ———, *K-stability of log Fano hyperplane arrangements*, J. Algebraic Geom. **30** (2021), no. 4, 603–630. MR 4372401

[IF00] A. R. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*, Explicit birational geometry of 3-folds, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 281, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, pp. 101–173.

[JK01] J. M. Johnson and J. Kollár, *Kähler-Einstein metrics on log del Pezzo surfaces in weighted projective 3-spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** (2001), no. 1, 69–79. MR 1821068

[KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, 1998.

[KOW23] I.-K. Kim, T. Okada, and J. Won, *K-stability of birationally superrigid Fano 3-fold* *weighted hypersurfaces*, Forum Math. Sigma **11** (2023), Paper No. e93, 114. MR 4653768

[KW21] I.-K. Kim and J. Won, *Unstable singular del Pezzo hypersurfaces with lower index*, Comm. Algebra **49** (2021), no. 6, 2679–2688. MR 4255036

[Li17] Chi Li, *K-semistability is equivariant volume minimization*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 16, 3147–3218. MR 3715806

[Li19] Chi Li, *G-uniform stability and Kähler-Einstein metrics on Fano varieties*, https://arxiv.org/pdf/1907.09399.pdf (2019).

[LST25] Y. Liu, T. Sano, and L. Tasin, *Infinitely many families of Sasaki-Einstein metrics on spheres*, J. Differential Geom. **130** (2025), no. 1, 1–26. MR 4904495

[LX19] Yuchen Liu and Chenyang Xu, *K-stability of cubic threefolds*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 11, 2029–2073. MR 3992032

[LXZ22] Y. Liu, C. Xu, and Z. Zhuang, *Finite generation for valuations computing stability thresholds and applications to K-stability*, Ann. of Math. (2) **196** (2022), no. 2, 507–566. MR 4445441

[LZ22] Y. Liu and Z. Zhu, *Equivariant K-stability under finite group action*, Internat. J. Math. **33** (2022), no. 1, Paper No. 2250007, 21. MR 4380122

[OS12] Yuji Odaka and Yuji Sano, *Alpha invariant and K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties*, Adv. Math. **229** (2012), no. 5, 2818–2834. MR 2889147

[ST24] T. Sano and L. Tasin, *On K-stability of Fano weighted hypersurfaces*, Algebr. Geom. **11** (2024), no. 2, 296–317. MR 4713339

[ST25] ———, *Delta invariants of weighted hypersurfaces*, Advances in Mathematics **482** (2025), 110644.

[Tia87] G. Tian, *On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$*, Invent. Math. **89** (1987), no. 2, 225–246. MR 894378

[Tia15] ———, *K-stability and Kähler-Einstein metrics*, Comm. Pure Appl. Math. **68** (2015), no. 7, 1085–1156. MR 3352459

[Xu25] Chenyang Xu, *K-stability of Fano varieties*, New Mathematical Monographs, vol. 50, Cambridge University Press, Cambridge, 2025. MR 4893062

[Zhu21] Z. Zhuang, *Optimal destabilizing centers and equivariant K-stability*, Invent. Math. **226** (2021), no. 1, 195–223. MR 4309493

THE CLASSIFICATION OF NONCOMMUTATIVE PROJECTIVE PLANES AND NONCOMMUTATIVE QUADRICS

松野　仁樹

謝辞

講演の機会を与えてくださった山浦浩太先生と村井聡先生に心より感謝申し上げます. また, 第 70 回代数学シンポジウムの開催にご尽力くださった責任者の先生方, 特に, シンポジウム責任者の平野幹先生にこの場をお借りして, 厚く御礼申し上げます.

1. 導入

本稿を通して, k を標数が 0 である代数的閉体とし, 代数とは次数 1 の元で有限生成されている k 上の連結次数付き代数を意味するものとする. すなわち, 代数は全て自由代数 $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ の剰余として表されるものとする. 次数付き代数 A に対して, 次数付き右 A 加群のなす圏を $\operatorname{GrMod} A$ と表す. A と A' が次数付き森田同値であるとは, $\operatorname{GrMod} A$ と $\operatorname{GrMod} A'$ が圏同値となるときをいう. A と A' が次数付き代数であるとき, $A \cong A'$ と表し, 次数付き森田同値であるとき, $\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A'$ と表すものとする. k 上の $n-1$ 次元射影空間を $\mathbb{P}^{n-1}$ と表す.

非可換代数幾何学とは代数幾何学のアイデアや手法を用いて非可換代数を研究する分野であり, 1987 年に Artin-Schelter によって非可換な正則代数の概念が導入され, 3 次元の場合を分類することを試みたことに端を発する.

定義 1 ([1]). 次数付き代数 A が d **次元 Artin-Schelter 正則代数** (以下, 単に AS 正則代数と記す) とは, 次の条件を満たすときをいう:

(i) $\operatorname{gldim} A = d < \infty \quad$ (A の大域次元),
(ii) $\operatorname{GKdim} A := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \dim_k(\sum_{i=0}^{n} A_i) \le n^\alpha \quad \forall n \gg 0\} < \infty$,
(iii) $\operatorname{Ext}^i_A(k, A) = \begin{cases} k & (i = d), \\ 0 & (i \neq d). \end{cases} \quad$ (*Gorenstein* 条件)

大雑把な言い方をすれば, AS 正則代数は多項式代数の非可換類似である. 実際, 可換な AS 正則代数は多項式代数と次数付き代数同型である. しかし, 非可換な AS 正則代数は多くありこの分類は盛んに行われている. Artin-Schelter は 3 次元 AS 正則代数を分類することを試みたが, 残念ながら分類は未完成であった. 本稿では, 3 次元 AS 正則代数の分類とは, 3 次元 AS 正則代数の関係式を決定し, それらを次数付き代数同型及び次数付き森田同値を除いて分類することを意味するものとする. 一方, Artin-Schelter は次の重要な結果を与えた.

定理 2. ([1, Theorem 1.5]) 任意の 3 次元 AS 正則代数は次のいずれかと次数付き代数同型となる:

$$k\langle x, y, z\rangle/(f_1, f_2, f_3), \quad k\langle x, y\rangle/(g_1, g_2).$$

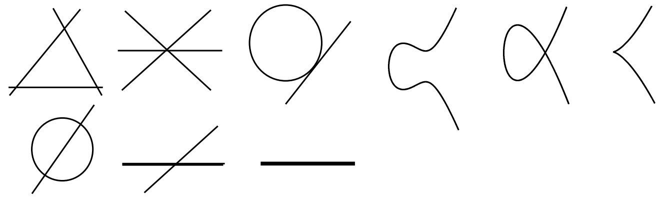
ここで, $f_i \in k\langle x, y, z\rangle_2$, $g_j \in k\langle x, y\rangle_3$ である.

関係式が 3 本の 2 次斉次元からなるものを 3 **次元** 2 **次 AS 正則代数**とよび, 関係式が 2 本の 3 次斉次元からなるものを 3 **次元** 3 **次 AS 正則代数**とよぶ.

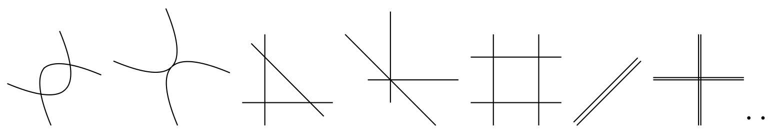
Artin-Tate-Van den Bergh [2] は 3 次元 AS 正則代数を代数幾何学の言葉を用いて次のように特徴付けた.

定理 3 ([2])**.** 任意の *3* 次元 AS 正則代数は, 射影スキーム E とその自己同型写像 $\sigma \in \mathrm{Aut}\, E$ からなる組 (E, σ) との *1* 対 *1* 対応がある.

(1) 3 次元 2 次 AS 正則代数のとき, E の候補は射影平面 $\mathbb{P}^2$ 自身または $\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線のいずれかである:



(2) 3 次元 3 次 AS 正則代数のとき, E の候補は射影直線の直積 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 自身または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の双次数 $(2, 2)$ 曲線のいずれかである:



定理 3 に関して, 3 次元 2 次 AS 正則代数の場合と 3 次元 3 次 AS 正則代数の場合とで大きく異なる点がある. 3 次元 2 次 AS 正則代数の場合, E が $\mathbb{P}^2$ 自身または $\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線のいずれかのとき, 少なくとも一つは 3 次元 2 次 Calabi-Yau AS 正則代数に対応する自己同型写像 $\sigma \in \mathrm{Aut}_k\, E$ が存在する. 一方, 3 次元 3 次 AS 正則代数の場合, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の双次数 $(2, 2)$ 曲線の中には, Calabi-Yau どころか, 3 次元 3 次 AS 正則代数と対応する組 (E, σ) が存在しない場合がある. Artin-Tate-Van den Bergh によって与えられた特徴付けは, 代数幾何学が非可換代数を研究する際にも有効な研究手法となり得ることを示唆する点で非常に重要な結果である. しかしながら, 3 次元 AS 正則代数に対応する組 (E, σ) のリストは与えられておらず, Artin-Schletr が試みた分類は依然として未完成であった.

定義 4 ([5])**.** 代数 S が d **次元 Calabi-Yau 代数** (以下, 単に CY 代数と記す) とは, 次の条件を満たすときをいう:

(i) $\mathrm{pd}_{S^e} S = d < \infty$,

(ii) $\mathrm{Ext}^i_{S^e}(S, S^e) = \begin{cases} S & (i = d), \\ 0 & (i \neq d). \end{cases}$ (右 S^e 加群として)

ここで, $S^e = S^{\mathrm{op}} \otimes_k S$ とする.

3 次元 AS 正則代数の分類問題について, CY 代数である場合にはすでに分類が完成している ([13], [14]). 本稿の目的は, 3 次元 AS 正則代数の分類について, 現在までに得られた結果を紹介することである. 本稿の内容は, 板場綾子氏との共同研究 [7], [8], 齋藤由宇氏との共同研究 [11], 板場綾子氏と齋藤由宇氏との共同研究 [9], 及び [12] で得られた結果に基づいている.

2. 幾何的代数と 3 次元 AS 正則代数

この章では, 幾何的代数の概念を紹介し, 3 次元 AS 正則代数の分類問題への応用について説明する. 幾何的代数は与えられた次数付き代数の関係式の次数に応じて, 幾何的 2 次代数と幾何的 3 次代数の二つの場合に分かれる. $A = k\langle x_1, \ldots, x_n \rangle / (R)$ が m 次代数であるとき,

$$\Gamma_A := \{(p_1, \ldots, p_m) \in (\mathbb{P}^{n-1})^{\times m} \mid g(p_1, \ldots, p_m) = 0 \quad \forall g \in R\}$$

と定める.

2.1. 幾何的 2 次代数と 3 次元 2 次 AS 正則代数.

定義 5 ([12, Definition 4.3])**.** $A = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/(R)$ を 2 次代数とする. 射影多様体 $E \subset \mathbb{P}^{n-1}$ とその自己同型写像 $\sigma \in \mathrm{Aut}_k\ E$ からなる組 (E, σ) を幾何的組とよぶ.

(1) A が (G1) **を満たす**とは, ある幾何的組 (E, σ) が存在して

$$\Gamma_A = \{(p, \sigma(p)) \in \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \mid p \in E\}$$

が成り立つときをいう. このとき, $\mathcal{P}(A) = (E, \sigma)$ と書く.

(2) A が (G2) **を満たす**とは, ある幾何的組 (E, σ) が存在して

$$R = \{f \in k\langle x_1, \dots, x_n\rangle_2 \mid f(p, \sigma(p)) = 0 \quad \forall p \in E\}$$

が成り立つときをいう. このとき, $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ と書く.

(3) A が**幾何的 2 次代数**であるとは, A が (G1), (G2) を満たし $A = \mathcal{A}(\mathcal{P}(A))$ が成り立つときをいう.

大雑把な言い方をすると, 幾何的 2 次代数とは幾何的組 (E, σ) と一対一に対応する 2 次代数である. 定理 3 より, 任意の 3 次元 2 次 AS 正則代数は幾何的 2 次代数である. よって, 射影平面内の 3 次曲線 E に対し, その自己同型群 $\mathrm{Aut}_k\ E$ を決定することができれば, 幾何的 2 次代数の条件 (G2) を用いて 3 次元 2 次 AS 正則代数の関係式を直接計算することが可能となる.

定理 6 ([12, Theorem 4.7])**.** $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$, $A' = \mathcal{A}(E', \sigma')$ を幾何的 2 次代数とする. ここで, $E, E' \subset \mathbb{P}^{n-1}$, $\sigma \in \mathrm{Aut}_k\ E$, $\sigma' \in \mathrm{Aut}_k\ E'$ とする.

(1) $A \cong A'$ である必要十分条件は, $\mathbb{P}^{n-1}$ の自己同型写像を制限して得られる E から E' への同型写像 τ が存在して, 図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma"'] & E' \arrow[d, "\sigma'"] \\ E \arrow[r, "\tau"'] & E' \end{tikzcd}$$

が可換となることである.

(2) $\mathrm{GrMod}\ A \cong \mathrm{GrMod}\ A'$ である必要十分条件は, $\mathbb{P}^{n-1}$ の自己同型写像を制限して得られる E から E' への同型写像の列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して, 任意の $i \in \mathbb{Z}$ について図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "\sigma"'] & E' \arrow[d, "\sigma'"] \\ E \arrow[r, "\tau_{i+1}"'] & E' \end{tikzcd}$$

が可換となることである.

$A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ を幾何的 2 次代数とし, E と E' は射影同値である, すなわち $\mathbb{P}^{n-1}$ の自己同型写像を制限して得られる E から E' への同型写像 τ が存在するとする. このとき, $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$ とおくと, $A' = \mathcal{A}(E', \sigma')$ は幾何的 2 次代数であり, 図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma"'] & E' \arrow[d, "\sigma'"] \\ E \arrow[r, "\tau"'] & E' \end{tikzcd}$$

が可換となる．よって, 定理 6 (1) より $A \cong A'$ となる．これは幾何的 2 次代数を次数付き代数同型を除いて分類するときには, 射影同値である E と E' を同一視してよいことを意味する．特に射影平面内の 3 次曲線は楕円曲線の場合を除いて唯一通りに定まる．したがって, 3 次元 2 次 AS 正則代数を分類するための手順は以下の通りである．

Step 0 E の定義方程式を一つ固定する．
Step 1 E の自己同型群 $\mathrm{Aut}_k\, E$ を決定する．
Step 2 各自己同型写像 $\sigma \in \mathrm{Aut}_k\, E$ に対して, 条件 (G2) を用いて幾何的 2 次代数 $\mathcal{A}(E, \sigma)$ の関係式を決定する．
Step 3 定理 6 (1) を用いて, 次数付き代数同型となるための必要十分条件を求める．
Step 4 定理 6 (2) を用いて, 次数付き森田同値となるための必要十分条件を求める．

板場綾子氏との共同研究 [7], [8], 及び [10] において, 3 次元 2 次 AS 正則代数の関係式の完全なリストを与え, 次数付き代数同型及び次数付き森田同値となる必要十分条件を与えた．分類結果の詳細は [7, Theorem 3.1, Theorem 3.2] を参照されたい．また 3 章では E が射影平面内の楕円曲線である場合について詳しく説明をする．

2.2. **幾何的 3 次代数と 3 次元 3 次 AS 正則代数.** 3 次元 2 次 AS 正則代数の分類では, 毛利出氏によって導入された幾何的 2 次代数の概念が重要な役割を果たした．3 次元 3 次 AS 正則代数の場合にも幾何的手法を用いるために, 幾何的 3 次代数の概念を導入する．

$E \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ を射影多様体とし, $\pi_i : \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ を第 i 成分への射影とする $(i = 1, 2)$. E の自己同型群 $\mathrm{Aut}_k\, E$ の部分集合 $\mathrm{Aut}_k^G\, E$ を次のように定める:

$$\mathrm{Aut}_k^G\, E = \{\sigma \in \mathrm{Aut}_k\, E \mid (\pi_1\sigma)(p, q) = \pi_2(p, q) \quad \forall (p, q) \in E\}.$$

一般に, $\mathrm{Aut}_k^G\, E$ は $\mathrm{Aut}_k\, E$ の部分群となるとは限らない．

例 7. $E = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とする． $(p, q) \in E$ とし, $(r, s) = \sigma \in \mathrm{Aut}_k^G\, E$ とする． このとき, $r = (\pi_1\sigma)(p, q) = \pi_2(p, q) = q$ が成り立つ．ここで, 自己同型写像 $\nu \in \mathrm{Aut}_k\, E$ を $\nu(p, q) = (q, p)$ と定めると,

$$\mathrm{Aut}_k^G\, E = \{(\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1} \times \mu)\nu \mid \mu \in \mathrm{Aut}_k\, \mathbb{P}^1\}$$

となる．よって, $\mathrm{id}_E \notin \mathrm{Aut}_k^G\, E$ であるため, $\mathrm{Aut}_k^G\, E$ は $\mathrm{Aut}_k\, E$ の部分群でない．

定義 8 ([11, Definition 3.3])**.** $A = k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/(R)$ を 3 次代数とする．

(0) 組 (E, σ) が**幾何的組**であるとは, $E \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ が射影多様体であり, $\sigma \in \mathrm{Aut}_k^G\, E$ であるときをいう．

(1) A が (G1) **を満たす**とは, ある幾何的組 (E, σ) が存在して

$$\Gamma_A = \{(p, q, (\pi_2\sigma)(p, q)) \in \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \mid (p, q) \in E\}$$

が成り立つときをいう．このとき, $\mathcal{P}(A) = (E, \sigma)$ と書く．

(2) A が (G2) **を満たす**とは, ある幾何的組 (E, σ) が存在して

$$R = \{f \in k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle_3 \mid f(p, q, (\pi_2\sigma)(p, q)) = 0 \quad \forall (p, q) \in E\}$$

が成り立つときをいう．このとき, $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ と書く．

(3) A が**幾何的 3 次代数**であるとは, A が (G1), (G2) を満たし $A = \mathcal{A}(\mathcal{P}(A))$ が成り立つときをいう．

用語と記号の乱用ではあるが幾何的 2 次代数と同じ用語と記号を用いることに注意する．幾何的 2 次代数と大きく異なる点は, 幾何的組となる σ を制限している所である．本研究では, 3 次元 3 次 AS 正則代数の分類へ応用することを念頭に置いているためこのような定義としている．定理 3 より, 任意の 3 次元 3 次 AS 正則代数は幾何的 3 次代数である．

定理 9 ([11, Theorem 3.5, Theorem 3.6])**.** $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$, $A' = \mathcal{A}(E', \sigma')$ を幾何的 3 次代数とする. ここで, $E, E' \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$, $\sigma \in \mathrm{Aut}_k^G E$, $\sigma' \in \mathrm{Aut}_k^G E'$ とする.

(1) $A \cong A'$ である必要十分条件は, ある $\mathbb{P}^{n-1}$ の自己同型写像 τ が存在して, $(\tau\times\tau)(E) = E'$ を満たし, 図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tau\times\tau"] \arrow[d, "\sigma"'] & E' \arrow[d, "\sigma'"] \\ E \arrow[r, "\tau\times\tau"'] & E' \end{tikzcd}$$

が可換となることである.

(2) GrMod $A \cong$ GrMod A' である必要十分条件は, $\mathbb{P}^{n-1}$ の自己同型写像の列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して, 任意の $i \in \mathbb{Z}$ について $(\tau_i \times \tau_{i+1})(E) = E'$ を満たし, 図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tau_i\times\tau_{i+1}"] \arrow[d, "\sigma"'] & E' \arrow[d, "\sigma'"] \\ E \arrow[r, "\tau_{i+1}\times\tau_{i+2}"'] & E' \end{tikzcd}$$

が可換となることである.

$A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ を幾何的 3 次代数とし, ある $\mathbb{P}^{n-1}$ の自己同型写像 τ が存在して, $(\tau\times\tau)(E) = E'$ を満たすとする. このとき, $\sigma' = (\tau \times \tau)\sigma(\tau^{-1} \times \tau^{-1})$ とおくと, $A' = \mathcal{A}(E', \sigma')$ は幾何的 3 次代数であり, 図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tau\times\tau"] \arrow[d, "\sigma"'] & E' \arrow[d, "\sigma'"] \\ E \arrow[r, "\tau\times\tau"'] & E' \end{tikzcd}$$

が可換となる. よって, 定理 9 (1) より $A \cong A'$ となる.

定義 10 ([11, Definition 3.7])**.** $E, E' \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ を射影多様体とする.

(1) E と E' が**同値**であるとは, ある $\mathbb{P}^{n-1}$ の自己同型写像 τ_1, τ_2 が存在して, $(\tau_1 \times \tau_2)(E) = E'$ が成り立つときをいう.

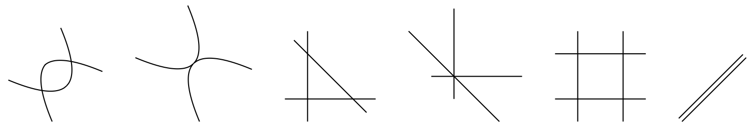
(2) E と E' が **2-同値**であるとは, ある $\mathbb{P}^{n-1}$ の自己同型写像 τ が存在して, $(\tau\times\tau)(E) = E'$ が成り立つときをいう.

したがって, 3 次元 3 次 AS 正則代数を分類するための手順は以下の通りである.

Step 0 E を 2-同値を除いて分類する.
Step 1 各 E ごとに $\mathrm{Aut}_k^G E$ を決定する.
Step 2 各自己同型写像 $\sigma \in \mathrm{Aut}_k^G E$ に対して, 条件 (G2) を用いて幾何的 3 次代数 $\mathcal{A}(E, \sigma)$ の関係式を決定する.
Step 3 定理 9 (1) を用いて, 次数付き代数同型となるための必要十分条件を求める.
Step 4 定理 9 (2) を用いて, 次数付き森田同値となるための必要十分条件を求める.

E が $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 自身または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の双次数 $(2, 2)$ 曲線の中で可約である場合に対応する 3 次元 3 次 AS 正則代数の分類は完成している.

定理 11 ([11, Theorem 4.9, Theorem 4.10], [9, Theorem 4.2, Theorem 4.3])**.** $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ を 3 次元 3 次 *AS* 正則代数とする. ここで, E は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 自身または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 内の双次数 $(2, 2)$ 曲線の中で以下のいずれかとする:



このとき,

(1) A の関係式の完全なリストを与え,
(2) 次数付き代数同型となる必要十分条件, 及び
(3) 次数付き森田同値となる必要十分条件を与えた.

3. 楕円曲線に対応する 3 次元 2 次 AS 正則代数

本稿の最後に, E が $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線である場合の 3 次元 2 次 AS 正則代数の分類結果を紹介する. ここでは, $E = \mathcal{V}(f)$, $f = x^3 + y^3 + z^3 - 3\lambda xyz$ $(\lambda^3 \neq 1)$ という Hesse 形式を採用する. $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線は射影同値を除いてこの形式で表記できる. 楕円曲線 E には零元を $o := (1, -1, 0)$ として加法群の構造が入る. 任意の E の点 $p = (a, b, c)$ に対して, E の加法を用いて p を足すという translation $\sigma_p \in \operatorname{Aut} E$ が得られる. E の j-不変量とは

$$j(E) := \frac{27\lambda^3(\lambda^3+8)^3}{(\lambda^3-1)^3}$$

のことである. $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線 E と E' が射影同値である必要十分条件は $j(E) = j(E')$ となることである ([6, Theorem IV 4.1 (b)]).

幾何的組全体を決定するために, $j(E)$ ごとに E の自己同型群 $\operatorname{Aut}_k E$ を決定する. ここで translation の全体のなす集合を $T := \{\sigma_p \in \operatorname{Aut} E \mid p \in E\}$ とおき, E の零元 $o = (1, -1, 0)$ に対して,

$$\operatorname{Aut}_k(E, o) := \{\sigma \in \operatorname{Aut} E \mid \sigma(o) = o\}$$

とする. T と $\operatorname{Aut}_k(E, o)$ は $\operatorname{Aut}_k E$ の部分群であり, $\operatorname{Aut}_k(E, o)$ は位数有限の巡回群となる ([6, Corollary IV 4.7]).

定理 12 ([7, Theorem 4.6])**.** $\operatorname{Aut}_k(E, o)$ の生成元 τ は次のように与えられる:

$$\begin{cases} \tau(a,b,c) = (b,a,c) & (j(E) \neq 0, 12^3\text{の場合}), \\ \tau(a,b,c) = (b,a,c\varepsilon) & (\lambda = 0\text{ の場合}), \\ \tau(a,b,c) = (a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c, a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c, a+b+c) & (\lambda = 1+\sqrt{3}\text{の場合}). \end{cases}$$

ただし, ε は 1 の原始 3 乗根とする.

$j(E) = 0, 12^3$ の場合は, それぞれ $\lambda = 0, 1+\sqrt{3}$ のように λ を固定していることに注意する. いずれの場合も生成元 τ は $\mathbb{P}^2$ のある自己同型写像を E 上に制限することで得られる. ここで,

$$\operatorname{Aut}_k(\mathbb{P}^2, E) := \{\phi \in \operatorname{Aut}_k \mathbb{P}^2 \mid \phi|_E \in \operatorname{Aut}_k E\}$$

と定める. E が $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線の場合, ある自己同型写像 $\sigma \in \operatorname{Aut}_k E$ が $\mathbb{P}^2$ の自己同型写像へ延長可能ならば, その延長の仕方は唯一通りに定まるので, $\operatorname{Aut}_k(\mathbb{P}^2, E)$ を $\operatorname{Aut}_k E$ の部分群とみなすことができる. 特に, $\operatorname{Aut}_k(E, o)$ は $\operatorname{Aut}_k(\mathbb{P}^2, E)$ の部分群である. E の自己同型群 $\operatorname{Aut}_k E$ は T と $\operatorname{Aut}_k(E, o)$ の半直積に同型となる:

$$\operatorname{Aut}_k E \cong T \rtimes \operatorname{Aut}_k(E, o).$$

したがって, 自己同型写像 $\sigma \in \operatorname{Aut}_k E$ は

$$\sigma = \sigma_p \tau^i$$

と表される. ただし, $p \in E$ であり, $i \in \mathbb{Z}_{|\tau|}$ である.

$\sigma \in \mathrm{Aut}_k E$ が translation σ_p に一致している場合, $A = \mathcal{A}(E, \sigma_p)$ は 3 次元 Sklyanin 代数とよばれるものであり, 関係式がすでに分かっている:

$$A = \mathcal{A}(E, \sigma_p) = k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} ayz + bzy + cx^2 \\ azx + bxz + cy^2 \\ axy + byx + cz^2 \end{pmatrix}.$$

ただし, $p = (a, b, c)$ は $abc \neq 0$ かつ $(a^3 + b^3 + c^3)^3 \neq (3abc)^3$ を満たすとする. 幾何的 2 次代数 $\mathcal{A}(E, \sigma_p\tau^i)$ の関係式は, 3 次元 Sklyanin 代数の関係式を twist することで得られる.

定理 13 ([7, Theorem 4.9])**.** *E を $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線とし, $\sigma = \sigma_p\tau^i \in \mathrm{Aut}_k E$ とする. ただし, $p = (a, b, c)$ は $abc \neq 0$ かつ $(a^3 + b^3 + c^3)^3 \neq (3abc)^3$ を満たすとし, $i \in \mathbb{Z}_{|\tau|}$ とする. このとき, 幾何的 2 次代数 $\mathcal{A}(E, \sigma_p\tau^i)$ は*

$$k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} a\tau^i(y)z + b\tau^i(z)y + c\tau^i(x)x \\ a\tau^i(z)x + b\tau^i(x)z + c\tau^i(y)y \\ a\tau^i(x)y + b\tau^i(y)x + c\tau^i(z)z \end{pmatrix}$$

に次数付き代数同型となる.

例 14. *$j(E) \neq 0, 12^3$ のとき, $\mathrm{Aut}_k(E, o)$ の生成元 τ は, $\tau(a, b, c) = (b, a, c)$ によって与えられる. ゆえに, τ の位数は 2 である. 定理 13 より, 幾何的 2 次代数 $\mathcal{A}(E, \sigma_p\tau)$ は*

$$k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} axz + bzy + cyx \\ azx + byz + cxy \\ ay^2 + bx^2 + cz^2 \end{pmatrix}$$

に次数付き代数同型となる.

E の点 p において, $np = p + \cdots + p = o$ を満たすものを n-**トーション**とよぶ. n-トーション全体のなす集合を $E[n]$ と表し, $T[n] := \{\sigma_p \in \mathrm{Aut}_k E \mid p \in E[n]\}$ とする. 定理 13 において $p = (a, b, c)$ が $abc \neq 0$ を満たすとしていたが, これは $p \notin E[3]$ と同値である.

補題 15 ([12, Lemma 5.3])**.** *E を $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線とする. このとき,*

$$\mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^2, E) \cap T = T[3]$$

が成り立つ.

$p = (a, b, c)$ が $abc = 0$ を満たす, すなわち $p \in E[3]$ である場合, 補題 15 より translation σ_p は $\mathbb{P}^2$ の自己同型写像に延長することができる. このとき, 幾何的組 (E, σ_p) から条件 (G2) を用いて得られる $\mathcal{A}(E, \sigma_p)$ は幾何的組 $(\mathbb{P}^2, \sigma_p)$ に対応する幾何的 2 次代数となる. したがって, $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線 E とその自己同型写像 $\sigma = \sigma_p\tau^i$ からなる幾何的組 (E, σ) に対応する幾何的 2 次代数を調べるときには, $p \notin E[3]$ とする必要がある. 補題 15 より, 次の結果を得る.

定理 16 ([7, Theorem 4.12])**.** *E を $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線とする. このとき,*

$$\mathrm{Aut}_k(\mathbb{P}^2, E) = T[3] \rtimes \mathrm{Aut}_k(E, o)$$

が成り立つ.

定理 6 (1) と定理 16 より, 次数付き代数同型であるための判定条件が得られる.

定理 17 ([7, Theorem 4.16])**.** *E を $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線とし, $p, q \in E \setminus E[3]$, $i, j \in \mathbb{Z}_{|\tau|}$ とする. このとき, $\mathcal{A}(E, \sigma_p\tau^i) \cong \mathcal{A}(E, \sigma_q\tau^j)$ である必要十分条件は, $i = j$ かつ, ある 3-トーション $r \in E[3]$ と $l \in \mathbb{Z}_{|\tau|}$ が存在して $q = \tau^l(p) + r - \tau^i(r)$ が成り立つことである.*

例 18. E を射影平面内の楕円曲線とし, $j(E) \neq 0, 12^3$ とする. $p = (a, b, c) \in E \setminus E[3]$ とする. このとき, 次の三つの次数付き代数を考える.

$$A = k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} ayz + bzy + cx^2 \\ azx + bxz + cy^2 \\ axy + byx + cz^2 \end{pmatrix},$$

$$A' = k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} byz + azy + cx^2 \\ bzx + axz + cy^2 \\ bxy + ayx + cz^2 \end{pmatrix},$$

$$A'' = k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} axz + bzy + cyx \\ azx + byz + cxy \\ ay^2 + bx^2 + cz^2 \end{pmatrix}.$$

A, A', A'' のように非可換代数が生成元と関係式を用いて表されているとき, 次数付き代数同型であるかどうかを判定することは難しい問題である. 一方, A, A', A'' は全て幾何的 2 次代数であり, それぞれ $A = \mathcal{A}(E, \sigma_p), A' = \mathcal{A}(E, \sigma_{\tau(p)}), A'' = \mathcal{A}(E, \sigma_p\tau)$ と表される. よって, 定理 *17* の判定条件を用いると, $A \cong A'$ であることが示される. また, τ の指数が異なることから A と A'' 及び A' と A'' は次数付き代数同型でないことも直ちに示される.

定理 6 (2) と定理 16 より, 次数付き森田同値であるための判定条件が得られる.

定理 19 ([7, Theorem 4.20])**.** E を $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線とし, $p, q \in E \setminus E[3]$, $i, j \in \mathbb{Z}_{|\tau|}$ とする. このとき, $\operatorname{GrMod} \mathcal{A}(E, \sigma_p\tau^i) \cong \operatorname{GrMod} \mathcal{A}(E, \sigma_q\tau^j)$ である必要十分条件は, $p - \tau^{j-i}(p) \in E[3]$ かつ, ある 3-トーション $r \in E[3]$ と $l \in \mathbb{Z}_{|\tau|}$ が存在して $q = \tau^l(p) + r$ が成り立つことである.

例 20. E を射影平面内の楕円曲線とし, $j(E) \neq 0, 12^3$ とする. $p = (a, b, c) \in E \setminus E[3]$ とする. このとき, 次の三つの次数付き代数を考える.

$$A = \mathcal{A}(E, \sigma_p) = k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} ayz + bzy + cx^2 \\ azx + bxz + cy^2 \\ axy + byx + cz^2 \end{pmatrix},$$

$$A' = \mathcal{A}(E, \sigma_{\tau(p)}) = k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} byz + azy + cx^2 \\ bzx + axz + cy^2 \\ bxy + ayx + cz^2 \end{pmatrix},$$

$$A'' = \mathcal{A}(E, \sigma_p\tau) = k\langle x, y, z\rangle / \begin{pmatrix} axz + bzy + cyx \\ azx + byz + cxy \\ ay^2 + bx^2 + cz^2 \end{pmatrix}.$$

生成元と関係式によって与えられた次数付き代数が次数付き森田同値となるかどうかを判定することは非常に難しい問題である.

(1) A と A' について: $A = \mathcal{A}(E, \sigma_p)$, $A' = \mathcal{A}(E, \sigma_{\tau(p)})$ より, $i = j = 0$ であるので, 定理 *19* の条件を満たす. ゆえに, $\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A'$ となる.

(2) A と A'' について: $A'' = \mathcal{A}(E, \sigma_p\tau)$ より, $\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A''$ となる必要十分条件は $p - \tau(p) \in E[3]$ である. τ の位数が 2 であることから, $p - \tau(p) \in E[3]$ は $2p \in E[3]$ に同値である. したがって, $p \in E[6] \setminus E[3]$ のとき, $\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A''$ となる.

一般に幾何的 2 代数は AS 正則代数であるとは限らない. 次の結果は射影平面内の楕円曲線 E と自己同型写像 σ からなる幾何的組 (E, σ) に対応する幾何的 2 次代数 $\mathcal{A}(E, \sigma)$ が AS 正則代数であるための判定条件を与える.

定理 21 ([8, Theorem 4.3])**.** E を $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線とし, $p \in E \setminus E[3]$, $i \in \mathbb{Z}_{|\tau|}$ とする. $A = \mathcal{A}(E, \sigma_p\tau^i)$ を幾何的 2 次代数とする. このとき, 次は同値である.

(1) A は 3 次元 2 次 AS 正則代数である.
(2) $p - \tau^i(p) \in E[3]$.
(3) $\mathrm{GrMod}\, A \cong \mathrm{GrMod}\, \mathcal{A}(E, \sigma_p)$.

定理 21 より, 3 次元 Sklyanin 代数は 3 次元 2 次 AS 正則代数である. さらに 3 次元 Sklyanin 代数は Calabi-Yau 代数でもある. よって, 定理 19 と定理 21 より, 射影平面内の楕円曲線 E と自己同型写像 $\sigma = \sigma_p\tau^i$ からなる幾何的組 (E, σ) に対応する幾何的 2 次代数 $\mathcal{A}(E, \sigma)$ が 3 次元 2 次 AS 正則代数であるならば, 3 次元 2 次 Calabi-Yau AS 正則代数 $\mathcal{A}(E, \sigma_p)$ と次数付き森田同値となる. より一般に, 次の結果が得られる.

定理 22 ([8, Theorem 4.4])**.** 任意の 3 次元 2 次 AS 正則代数 A に対して, ある 3 次元 2 次 CY AS 正則代数 S が存在して, $\mathrm{GrMod}\, A \cong \mathrm{GrMod}\, S$ が成り立つ.

Artin-Zhang [4] によって非可換射影スキーム $\mathrm{Proj}_{nc}\, A$ の概念が導入され, その基礎理論が確立された. A がネーター AS 正則代数である非可換射影スキーム $\mathrm{Proj}_{nc}\, A$ は非可換射影空間や量子射影空間と呼ばれ, 非可換代数幾何学における重要な研究対象の一つである. 特に, A が 3 次元 2 次 AS 正則代数のとき, $\mathrm{Proj}_{nc}\, A$ は非可換射影平面 (noncommutative projective plane) と呼ばれ, A が 3 次元 3 次 AS 正則代数のとき, $\mathrm{Proj}_{nc}\, A$ は非可換 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$(noncommutative quadric) と呼ばれる. 定理 22 より, 任意の非可換射影平面 $\mathrm{Proj}_{nc}\, A$ は, ある 3 次元 2 次 CY AS 正則代数に付随する非可換射影平面 $\mathrm{Proj}_{nc}\, S$ と非可換射影スキームとして同型となる.

References

[1] M. Artin and W. Schelter, *Graded algebras of global dimension* 3, Adv. Math., **66** (1987), 171–216.
[2] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, The Grothendieck Festschrift, Vol. 1, Progr. Math., 86, Birkhäuser, Boston (1990), 33–85.
[3] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, *Modules over regular algebras of dimension* 3, Invent. Math., **106** no. 2 (1991), 335–388.
[4] M. Artin and J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes*, Adv. Math. **109** (1994), no. 2, 228–287.
[5] V. Ginzburg, Calabi-Yau algebras, Preprint, 2007, arXiv:0612139.
[6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1977).
[7] A. Itaba and M. Matsuno, *Defining relations of* 3*-dimensional quadratic AS-regular algebras*, Math. J. Okayama Univ. **63** (2021), 61–86.
[8] A. Itaba and M. Matsuno, *AS-regularity of geometric algebras of plane cubic curves*, J. Aust. Math. Soc. **112**, no. 2 (2022), 193–217.
[9] A. Itaba, M. Matsuno and Y. Saito, Classifications of 3-dimensional cubic AS-regular algebras whose point schemes are not integral, Preprint, 2025, arXiv:2511.02361.
[10] M. Matsuno, *A complete classification of* 3*-dimensional quadratic AS-regular algebras of Type EC*, Canad. Math. Bull. **64** (1) (2021), 123–141.
[11] M. Matsuno and Y. Saito, *Defining relations of* 3*-dimensional cubic AS-regular algebras of Type P, S and T*, J. Algebra Appl. (2026), to appear, https://dx.doi.org/10.1142/S0219498826502002.
[12] I. Mori, *Noncommutative projective schemes and point schemes*, Algebras, rings, and their representations, World Sci. Publ. (2006), 215–239.
[13] I. Mori and S. P. Smith, *The classification of* 3*-Calabi-Yau algebras with* 3 *generators and* 3 *quadratic relations*, Math. Z. **287** (1–2) (2017), 215–241.
[14] I. Mori and K. Ueyama, *The classification of* 3*-dimensional noetherian cubic Calabi-Yau algebras*, J. Pure Appl. Algebra **223** (2019), no. 5, 1946–1965.

〒 391-0292 長野県茅野市豊平 5000-1　公立諏訪東京理科大学 共通・マネジメント教育センター
Email address: matsuno_masaki@rs.sus.ac.jp

ON ENDOMORPHISMS OF AFFINE SURFACES

柴田崇広

1. イントロダクション

本稿では共著論文 [JSXZ24] の結果のうち，アフィン曲面の川口–Silverman 予想についてのものを紹介したい．なお，本稿では断りのない限り $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で議論するものとする．

準射影代数多様体 X 上の自己有理写像 $f : X \dashrightarrow X$ を考える．反復合成 $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$（$n$ 個の f の合成）の，n を大きくしていった時の複雑さの増大度を測る不変量として力学次数と算術次数という二つの不変量が定義される．前者は交点数を用いた幾何的な不変量であり，後者は高さ関数を用いた数論的な不変量である．それぞれの定義を見ていこう．

定義 1.1. X を射影多様体とし，$f : X \dashrightarrow X$ を支配的自己有理写像とする．H を X の豊富因子とする．X の (第一) 力学次数を

$$\delta_f := \lim_{n\to\infty} ((f^n)^*H \cdot H^{\dim X-1})^{\frac{1}{n}}$$

と定める．この極限は常に収束し，さらに H の取り方に依らない．

X が一般の準射影多様体である場合は射影多様体 Y からの双有理写像 $\mu : Y \dashrightarrow Y$ を用いて $\delta_f := \delta_{\mu^{-1}\circ f\circ\mu}$ と定める．この定義は μ の取り方に依らない．

定義 1.2. X を射影多様体とし，$f : X \dashrightarrow X$ を支配的自己有理写像とする．H を X の豊富因子とし，$h_H : X(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ を H から定まる対数的高さ関数とする．$x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ で $O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ が定義できるものに対し，f の x での算術次数を

$$\alpha_f(x) := \lim_{n\to\infty} h_H^+(f^n(x))^{\frac{1}{n}}$$

と定める．ここで $h_H^+ = \max\{h_H, 1\}$ と定めている．この極限が常に存在するかは分かっていないが H の取り方には依らない．

X が一般の準射影多様体である場合は射影多様体 Y からの双有理写像 $\mu : Y \dashrightarrow Y$ を用いて $\alpha_f(x) := \alpha_{\mu^{-1}\circ f\circ\mu}(\mu^{-1}(x))$ と定める．この定義は μ の取り方に依らない．

力学次数と算術次数の間の基本的な関係について述べたものが以下の予想である．

予想 1.3 (川口–Silverman 予想 (KSC), cf. [KS16])**.** X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の準射影多様体とし，$f : X \dashrightarrow X$ を支配的自己有理写像とする．X の $\overline{\mathbb{Q}}$ 有理点 x について，x の f 軌道 $O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ が定義可能であり X 内で稠密であるとする．このとき極限 $\alpha_f(x)$ は収束し，さらに $d_1(f) = \alpha_f(x)$ が成り立つ．

KSC は未解決の問題だが，多くの場合について成り立つことが知られている．KSC についての知られた結果について，本稿で紹介する結果と関わりの深いものを挙げておく．より詳しい情報については [Mat23] を参照されたい．

- 射影曲面上の自己射 ([MSS18], [MZ19]).
- 半アーベル多様体上の自己射 ([KS14], [MS20]).
- $\mathbb{A}^2$ の自己同型 ([Kaw06]).

本稿ではアフィン曲面上の自己有限射に対する KSC を取り上げる．このようなアフィン曲面の構造については [GZ08] で詳しく調べられている．その研究を援用することで [JSXZ24] において以下が示された．

定理 1.4. X を対数的小平次元が非負の非特異アフィン曲面とし，$f : X \to X$ を有限射とする．このような f に対し *KSC* が成り立つ．

以下，この定理の証明の概要を見ていこう．

2. アフィン多様体のコンパクト化

アフィン多様体のコンパクト化について簡単におさらいしておこう．

定義 2.1. X をアフィン多様体とする．

(1) X を開集合として含む射影多様体 $\overline{X}$ を X のコンパクト化と言う．
(2) X のコンパクト化 $\overline{X}$ が非特異であるとき，これを滑らかなコンパクト化という．
(3) X のコンパクト化 $\overline{X}$ が非特異であり，$\overline{X} \setminus X$ が単純正規交差因子であるとき，これをログ滑らかなコンパクト化と言う．

コンパクト化を用いて，開代数多様体の重要な不変量である対数的小平次元が定義される．

定義 2.2. X を滑らかな準射影多様体とする．X のログ滑らかなコンパクト化 $\overline{X}$ を取り，$D = \overline{X}\,\mathrm{sm}\,X$ とする．

$$\overline{\kappa}(X) := \kappa(K_{\overline{X}} + D)$$

を X の対数的小平次元と言う．これは X のコンパクト化の取り方に依らない．

次の命題は後で用いる．

命題 2.3 ([JSXZ24, Lemma 2.2]). X を非特異アフィン曲面とし $\overline{X}$ を X のログ滑らかなコンパクト化とする．このとき $D = \overline{X} \setminus X$ は豊富因子の台である．

3. $\mathbb{G}_m$ ファイブレーション

対数的小平次元が非負の非特異アフィン曲面に対しては $\mathbb{G}_m$ ファイブレーションの構造が重要である．ここでは $\mathbb{G}_m$ ファイブレーションおよび $\mathbb{G}_m$ 束について成り立つ事柄を見ていこう．

命題 3.1 (Suzuki's formula, cf. [Suz77],[Gur97])**.** $\pi : X \to B$ を非特異アフィン曲面から非特異曲線への全射で，一般ファイバーが既約なものとする．

(1) $e(X) = e(B)e(F) + \sum_s (e(F_s) - e(F))$ および $e(F_s) \geq e(F)$ が成り立つ．ここで F は π の一般ファイバー，$\{F_s\}_s$ は π の特異ファイバーの全体とする．
(2) 各 s で $e(F_s) = e(F)$ が成り立つとする．この時 $F \cong \mathbb{A}^1$ または $\mathbb{G}_m^1$ であり，各 s で $\operatorname{supp} F_s \cong F$ が成り立つ．

命題 3.2 ([JSXZ24, Proposition 2.10])**.** $\pi : X \to B$ を非特異アフィン曲面から非特異アフィン曲線への全射とする．π の各ファイバーの台は $\mathbb{G}_m$ に同型であるとし，$\{\pi^{-1}(b_i) = m_i F_i\}_{i=1}^r$ を π の重複ファイバーの全体とする．このとき非特異曲線からの有限射 $B' \to B$ で，$B_0 := B \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}$ 上エタールで $X \times_B B'$ の正規化 X' を考えると $X' \to X$ がエタール射であり，$X' \to B'$ が $\mathbb{G}_m$ 束となるものが取れる．

定義 3.3. $\pi : X \to B$ を非特異アフィン曲面から非特異曲線への $\mathbb{G}_m$ 束とする．X のログ滑らかなコンパクト化 $\overline{X}$ と B の滑らかなコンパクト化 $B \subset \overline{B}$ で π が $\mathbb{P}^1$ ファイブレーション $\overline{\pi} : \overline{X} \to \overline{B}$ に延長するものを取ったとき，$\overline{X} \setminus X$ の水平部分がちょうど二つの π の切断となるとき，π は untwisted であると言う．

命題 3.4 ([JSXZ24, Lemma 2.7])**.** $\pi : X \to B$ を非特異アフィン曲面から非特異曲線への $\mathbb{G}_m$ 束とする．このとき非特異曲線 B' からのエタール射 $B' \to B$ があって，$X' = X \times_B B'$ とすると $X' \to B'$ は *untwisted* な $\mathbb{G}_m$ 束となる．

命題 3.5 ([JSXZ24, Lemma 2.7])**.** $\pi : X \to B$ を非特異アフィン曲面から非特異曲線への $\mathbb{G}_m$ 束とする．

(1) $\overline{\kappa}(X) = \overline{\kappa}(B)$.
(2) π は *untwisted* で B は非特異アフィン有理曲線とする．このとき π は自明な $\mathbb{G}_m$ 束である．

命題 3.6 ([JSXZ24, Corollary 2.8])**.** $\pi : X \to B$ を非特異アフィン曲面から非特異曲線への $\mathbb{G}_m$ 束とする．この時 B はアフィン曲線である．

4. Q トーラス

ここで Q トーラスの概念を定義しておく．これは射影多様体における Q アーベル多様体のアフィン多様体における analogue である．

定義 4.1. 非特異アフィン多様体 X が代数トーラスからの有限エタール射を持つとき，X を Q トーラスという．

命題 4.2 ([JSXZ24, Lemma 2.21])**.** X を Q トーラスとする．このとき代数トーラスからの有限エタールガロア射 $\pi : T \to X$ であり次を満たすものが存在する：

任意の代数トーラスからの有限エタール射 $\pi' : T' \to X$ に対しエタール射 $\tau : T' \to T$ で $\pi' = \pi \circ \tau$ を満たすものが存在する．

このような $\pi : T \to X$ を X の代数トーラス閉包と呼ぶ．

5. アフィン曲面の自己有限射の構造

以下の定理により，対数的小平次元が非負の非特異アフィン曲面の自己有限射をより簡単な形に帰着することができる．

定理 5.1 ([JSXZ24, Theorem 1.9]). X を非特異アフィン曲面とし，$f : X \to X$ を $\deg(f) \geq 2$ を満たす有限射とする．

(1) $\overline{\kappa}(X) = 2$ とする．このとき f は有限位数の自己同型である．
(2) $\overline{\kappa}(X) = 1$ とする．この時 X は $\mathbb{G}_1$ ファイブレーション $\pi : X \to B$ の構造を持ち，B の有限位数の自己同型 g があって $g \circ \pi = \pi \circ f$ が成り立つ．
(3) $\overline{\kappa}(X) = 0$ とする．このときエタール射 $\pi : \mathbb{G}_m^2 \to X$ および有限射 $g : \mathbb{G}_m^2 \to \mathbb{G}_m^2$ があって $\pi \circ g = f \circ \pi$ が成り立つ．

証明の概略. (1) は [Iit82, Theorem 11.6, Theorem 11.12] の特別な場合である．

(2) $\overline{X}$ をログ滑らかな X のコンパクト化とし，$D = \overline{X} \backslash X$ とすると仮定より $\kappa(K_{\overline{X}}+D) = 1$ である．$K_{\overline{X}} + D = P + N$ を Zariski 分解とすると P は半豊富である．よって充分大きい s に対し $|sP|$ はファイブレーション $\overline{\pi} : \overline{X} \to \overline{B}$ で $\overline{B}$ は非特異射影曲線で $\kappa(\overline{B}) = 1$ であるようなものを誘導する．さらに f は $\overline{g} : \overline{B} \to \overline{B}$ を誘導する．$B = \pi(X)$ とすると B 上の自己射 $g = \overline{g}|_B : B \to B$ を得る．ここで，$\overline{\pi}$ のファイバー $\overline{F}$ は $\kappa(\overline{F}) = 0$ を満たす．よって $\pi : X \to B$ の一般ファイバーは $\mathbb{G}_m$ に同型であり，$e(X) = 0$ となる．Suzuki's formula により π の全てのファイバーの台は $\mathbb{G}_m$ に同型である．

$\{\pi^{-1}(b_i) = m_i F_i\}_{i=1}^r$ $(r \geq 0)$ を $\pi : X \to B$ の重複ファイバーの全体とする．$B_0 = B \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}$, $X_0 = \pi^{-1}(B_0)$ とする．このとき特異ファイバー全体の合併集合が f^{-1} 不変であることから $g(B_0) \subset B_0$ である．ここで $X_0 \to B_0$ が $\mathbb{G}_m$ 束であることから命題 3.5 より $\overline{\kappa}(B_0) = \overline{\kappa}(X_0) \geq \overline{\kappa}(X) = 1$ となり，$\overline{\kappa}(B_0) = 1$ を得る．ゆえに $g|_{B_0}$ (そして g) は有限位数の自己同型である．

(3) 一旦，基礎体が $\mathbb{C}$ であると仮定する．今，$e(X) = 0$ かつ $j > 2$ について $H^j(X, \mathbb{C}) = 0$ が成り立っているので $b_1(X) \geq 1$ である．$\overline{X}$ をログ滑らかな X のコンパクト化とし，$D = \overline{X} \setminus X$ とする．対数的 Hodge to de Rham スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = H^q(\overline{X}, \Omega^1_{\overline{X}}(\log D)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

の E_1 退化を考えると

$$1 \leq b_1(X) = h^0(\overline{X}, \Omega^1_{\overline{X}}(\log D)) + h^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = h^0(\overline{X}, \Omega^1_{\overline{X}}(\log D)) + h^0(\overline{X}, \Omega^1_{\overline{X}}) \leq 2\overline{q}(X).$$

よって $\overline{q}(X) \neq 0$ であり，quasi-Albanese map $a : X \to S$ は非自明である．

$0 \to T \to S \to A \to 0$ を半アーベル多様体 S の代数トーラス T とアーベル多様体 A への分解とする．

$S = A$ かつ $\dim A = 2$ であると仮定する．すると $\overline{X}$ を適切に取り直して双有理射 $\overline{a} : \overline{X} \to A$ が得られるので Then $\kappa(K_{\overline{X}}) = \kappa(\overline{X}) = 0$ となる．しかし，$\kappa(K_{\overline{X}}+D) = \overline{\kappa}(X) = 0$ かつ D は命題 2.3 より豊富因子であり，矛盾である．よってこのケースは起こらない．

次に $\dim S = 1$，$\dim A = 1$ または $\dim S = \dim T = 2$ であると仮定する．それぞれの場合に応じて $B = S$, A または T/T_0（$T_0 \subset T$ は 1 次元部分トーラス）と定める．F を $\pi : X \to B$ の一般ファイバーとする．飯高不等式より $\overline{\kappa}(F) = 0$ となるので π は $\mathbb{G}_m$ ファイブレーションである．Suzuki's formula から π の任意のファイバーの台は $\mathbb{G}_m$ に同型である．

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ B'' \arrow[r, "\psi"'] & B' \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

命題 3.2 より有限射 $\varphi : B' \to B$ があって $X \times_B B'$ の正規化を X' とすると $X' \to X$ はエタールかつ $X' := (X \times_B B')^\nu \to B'$ は $\mathbb{G}_m$ 束となる．命題 3.5 より $\overline{\kappa}(B') = \overline{\kappa}(X') = \overline{\kappa}(X') = 0$ である．よって $B' = \mathbb{G}_m$ かつ φ はエタールである．命題 3.4 および命題 3.5 より有限射 $\psi : B'' \to B'$ があって $X'' = X \times_{B'} B'$ とすると $X'' \to X'$ はエタールかつ $X'' \to B''$ は自明な $\mathbb{G}_m$ 束となる．このとき $X'' \cong \mathbb{G}_m^2$ なので $\mathbb{G}_m^2$ から X へのエタール射が得られた．ここから $\overline{\mathbb{Q}}$ においても $\mathbb{G}_m^2$ から X へのエタール射を構成することができる．つまり X は Q トーラスである．

$\pi : \mathbb{G}_m^2 \to X$ を代数トーラス閉包とする (cf. 命題 4.2). すると命題 4.2 により $g : \mathbb{G}_m^2 \to \mathbb{G}_m^2$ で $\pi \circ g = f \circ \pi$ となるものが存在する. □

定理 1.4 の証明. $\overline{\kappa}(X) = 1$ または 2 の場合は稠密軌道が存在しないので OK．$\overline{\kappa}(X) = 0$ の場合は次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{G}_m^2 \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

ここで g は有限射，π はエタール射である．このとき一般論により $\delta_g = \delta_f$ かつ任意の $x \in \mathbb{G}_m^2(\overline{\mathbb{Q}})$ に対し $\alpha_g(x) = \alpha_f(\pi(x))$ が成り立つ．よって証明は $X = \mathbb{G}_m^2$ の場合に帰着されるが，より一般に半アーベル多様体に対して KSC が証明されている (cf. [MS20]) のでこれで証明が終わる． □

References

[Gur97] R. V. Gurjar, A new proof of Suzuki's formula, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **107** (1997), no. 3, 237–242.

[GZ08] R. V. Gurjar and D.-Q. Zhang, Non-singular affine surfaces with self-maps, in: Proceedings of a book. Affine algebraic geometry, pp. 217–229, Osaka Univ. Press, Osaka, edited by T. Hibi, October 2007, arXiv:**0802.4323**

[Iit82] S. Iitaka, *Algebraic geometry. An introduction to birational geometry of algebraic varieties*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 76. North-Holland Mathematical Library, 24. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[JSXZ24] J. Jia, T. Shibata, J. Xie and D.-Q. Zhang, Endomorphisms of quasi-projective varieties: towards Zariski dense orbit and Kawaguchi-Silverman conjectures, Math. Res. Lett. **31** (2024), no. 3, 701–746.

[Kaw06] S. Kawaguchi, Canonical height functions for affine plane automorphisms, Math. Ann. **335** (2006), no. 2, 285–310.

[KS14] S. Kawaguchi and J. Silverman, Examples of dynamical degree equals arithmetic degree, Michigan Math. J. 63(2014), no. 1, 41-63.

[KS16] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties, J. Reine Angew. Math. **713** (2016), 21–48.

[Mat23] Y. Matsuzawa, Recent advances on Kawaguchi-Silverman conjecture, November 2023, arXiv:**2311.15489**

[MS20] Y. Matsuzawa, K. Sano, Arithmetic and dynamical degrees of self-morphisms of semi-abelian varieties, Ergodic Theory Dynam. Systems **40** (2020), no. 6, 1655–1672.

[MSS18] Y. Matsuzawa, K. Sano and T. Shibata, Arithmetic degrees and dynamical degrees of endomorphisms on surfaces, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 7, 1635–1657.

[MZ19] S. Meng and D.-Q. Zhang, Kawaguchi–Silverman Conjecture for surjective endomorphisms, August 2019, arXiv:**1908.01605**

[Suz77] M. Suzuki, Sur les opérations holomorphes du groupe additif complexe sur l'espace de deux variables complexes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **10** (1977), no. 4, 517–546.

グラフ超平面配置の q-変形

辻栄 周平 （北海道教育大学旭川校）

概要

組紐超平面配置と位数 q の有限体上の全超平面配置にはいくつかの類似がみられる．たとえば，有限体上の全超平面配置の特性多項式に現れる q の冪 q^k を形式的に k に置き換えることで，組紐配置の特性多項式が得られる．このような類似は，定義多項式や対数的ベクトル場の加群の基底にも現れる．

また，組紐配置の任意の部分配置は単純グラフに対応し，この対応を通じて単純グラフに基づく有限体上の超平面配置が得られる．これらの配置の特性多項式は，グラフの彩色多項式の q-変形とみなされる性質を有すると期待される．本講演では，これらの q-変形に関する未解決問題を紹介し，この方向における部分的な結果を報告する．本研究は，年通宇氏，内海凌氏，吉永正彦氏との共同研究に基づく．

1 超平面配置

体 $\mathbb{K}$ 上の ℓ 次元ベクトル空間 $\mathbb{K}^\ell$ の有限個の超平面（余次元 1 の部分ベクトル空間）の集まり $\mathcal{A}$ を（中心的）**超平面配置**という．超平面配置の研究において，特に重要なものは以下で定義される**交叉半順序集合** $L(\mathcal{A})$ と**特性多項式** $\chi(\mathcal{A}, t)$ である．

$$L(\mathcal{A}) \coloneqq \left\{ \bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \;\middle|\; \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\},$$
$$\chi(\mathcal{A}, t) \coloneqq \sum_{X\in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim X} \in \mathbb{Z}[t].$$

$L(\mathcal{A})$ は逆包含順序により，全空間 $\hat{0} = \mathbb{K}^\ell$ を最小元とする半順序集合となる．また，特性多項式の定義式における関数 $\mu(X)$ は以下のように帰納的に定義される $L(\mathcal{A})$ 上の関数であり，**メビウス関数**と呼ばれる．

$$\mu(X) \coloneqq \begin{cases} 1 & (\text{if } X = \hat{0}); \\ -\sum_{Y<X} \mu(Y) & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

超平面配置 $\mathcal{A}$ の特性多項式は，$\mathcal{A}$ の補空間 $M(\mathcal{A}) \coloneqq \mathbb{K}^\ell \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$ の性質を反映した多項式不変量である．

Example 1.1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，補空間 $M(\mathcal{A})$ の各連結成分を**部屋**という．部屋の個数は $(-1)^\ell \chi(\mathcal{A}, -1)$ に一致する（Zaslavsky [8]）．

Example 1.2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき，補空間 $M(\mathcal{A})$ のポアンカレ多項式は，$(-t)^\ell \chi(\mathcal{A}, -t^{-1})$ に一致する（Orlik-Solomon [5]）．

Example 1.3. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ のとき，補空間 $M(\mathcal{A})$ の元の個数は $\chi(\mathcal{A}, q)$ に一致する．

次に超平面配置の**自由性**の定義について説明する．$S \coloneqq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_\ell]$ とおき，$\mathrm{Der}(S)$ で $\mathbb{K}$ 線形な S 導分

のなす集合を表す．超平面配置 $\mathcal{A}$ の**対数的ベクトル場のなす加群** $D(\mathcal{A})$ を以下のように定義する．

$$D(\mathcal{A}) \coloneqq \{\, \theta \in \mathrm{Der}(S) \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H \ (\forall H \in \mathcal{A}) \,\}.$$

ただし，α_H は $\operatorname{Ker}\alpha_H = H$ となるような斉次 1 次式である．$D(\mathcal{A})$ は次数付き S 加群の構造をもつ．$D(\mathcal{A})$ が S 加群として自由であるとき，$\mathcal{A}$ を**自由超平面配置**という．このように，超平面配置の自由性の定義は代数的であるが，実は超平面配置の交叉の組合せ構造と密接な関係がある．

Theorem 1.4 (寺尾の分解定理 [7])**.** $\mathcal{A}$ を自由超平面配置とする．このとき，特性多項式 $\chi(\mathcal{A},t)$ は $\mathbb{Z}[t]$ において，以下のように 1 次式の積に分解する．

$$\chi(\mathcal{A},t) = (t-d_1)\cdots(t-d_\ell).$$

ただし，$d_1,\dots,d_\ell$ は $D(\mathcal{A})$ の斉次基底の次数である．

2 組紐配置と有限体上の全超平面配置の類似性

$\mathbb{R}^\ell$ の $x_i = x_j$ で定義される超平面全体からなる配置を**組紐配置**といい，$\mathcal{B}_\ell$ で表す．また，$\mathbb{F}_q^\ell$ のすべての超平面からなる配置を**全超平面配置**といい，$\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)$ で表す．一見関係なさそうであるが，$\mathcal{B}_\ell$ と $\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)$ の間にはいくつかの観点で類似性がみられるということをみていく．

まず，定義多項式 (超平面の定義 1 次式の積) に注目する．組紐配置 $\mathcal{B}_\ell$ の定義多項式 $Q(\mathcal{B}_\ell) \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_\ell]$ は，よく知られている Vandermonde の行列式である．

$$Q(\mathcal{B}_\ell) = \prod_{1\le i<j\le \ell}(x_j - x_i) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{\ell-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{\ell-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_\ell & x_\ell^2 & \dots & x_\ell^{\ell-1} \end{vmatrix}.$$

全超平面配置 $\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)$ の定義多項式 $Q\left(\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)\right) \in \mathbb{F}_q[x_1,\dots,x_\ell]$ は Moore 行列の行列式である．

$$Q\left(\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)\right) = \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{c_1,\dots,c_{i-1}\in\mathbb{F}_q} (c_1x_1 + \cdots + c_{i-1}x_{i-1} + x_i) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^q & x_1^{q^2} & \dots & x_1^{q^{\ell-1}} \\ x_2 & x_2^q & x_2^{q^2} & \dots & x_2^{q^{\ell-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_\ell & x_\ell^q & x_\ell^{q^2} & \dots & x_\ell^{q^{\ell-1}} \end{vmatrix}.$$

両者共に行列式を用いて綺麗に表すことができる上，行列自体の形も似ている．定義体の標数が異なるのでめちゃくちゃな操作であると思うが，Moore 行列の q^k を形式的に k に置き換えると，Vandermonde 行列が得られることに注意しておく．

次に特性多項式に注目すると

$$\chi(\mathcal{B}_\ell,t) = t(t-1)\cdots(t-\ell+1).$$
$$\chi(\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell),t) = (t-1)(t-q)\cdots(t-q^{\ell-1}).$$

となっていて，ここでも q^k を形式的に k に置き換えると $\chi(\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell),t)$ から $\chi(\mathcal{B}_\ell,t)$ が得られる．さらに，

$$\chi(\mathcal{A}_{K_\ell},\ell) = \ell(\ell-1)\cdots 1 = \#\mathfrak{S}_\ell.$$
$$\chi(\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell),q^\ell) = (q^\ell-1)(q^\ell-q)\cdots(q^\ell-q^{\ell-1}) = \#\,\mathrm{GL}_\ell(\mathbb{F}_q)$$

となっていて，特性多項式の値として，$\mathcal{B}_\ell$ と $\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)$ の対称性を表す群の位数が登場するのは，気になるところである．

$\mathcal{B}_\ell$ と $\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)$ は共に自由配置であり，基底としてそれぞれ

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\ell} x_i^k \partial_k \;\middle|\; k \in \{0,1,\dots,\ell-1\} \right\}, \qquad \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} x_i^{q^k} \partial_k \;\middle|\; k \in \{0,1,\dots,\ell-1\} \right\}$$

が取れる．この場合も $\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)$ の基底の q^k を形式的に k に置き換えると，$\mathcal{B}_\ell$ の基底が得られるという関係が成り立っていて，とても不思議である．

3 グラフ配置とその q-変形

組紐配置 $\mathcal{B}_\ell$ の部分配置はすべて $[\ell] = \{1,\dots,\ell\}$ を頂点集合とする単純グラフ $G = ([\ell], E_G)$ を用いて，

$$\mathcal{A}_G \coloneqq \left\{ \{x_i - x_j = 0\} \subseteq \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; \{i,j\} \in E_G \right\}$$

の形で表すことができる．$\mathcal{A}_G$ を**グラフ配置**という．グラフ配置 $\mathcal{A}_G$ の性質は，グラフ G の組合せ論的性質と関係している．たとえば，$\mathcal{A}_G$ の特性多項式 $\chi(\mathcal{A}_G, t)$ は G の彩色多項式 $\chi(G,t)$ に一致する．また，$\mathcal{A}_G$ が自由であることと，G がコーダルグラフであることは同値である．

全超平面配置 $\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)$ の部分配置で，グラフ G と自然に対応するようなものは考えられないだろうか．グラフとして ℓ 頂点の完全グラフ K_ℓ を考えると，$\mathcal{A}_{K_\ell} = \mathcal{B}_\ell$ となっているので，完全グラフ K_ℓ には $\mathcal{A}_{\mathrm{all}}(\mathbb{F}_q^\ell)$ を対応させるのが自然である．そこで，グラフ G のクリーク $\{i_1,\dots,i_r\}$ に $x_{i_1},\dots,x_{i_r}$ からなる全超平面を対応させることにして，**グラフ配置の q-変形** $\mathcal{A}_G^q$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{A}_G^q \coloneqq \bigcup_{\{i_1,\dots,i_r\}:\ G \text{ のクリーク}} \left\{ \{a_{i_1}x_{i_1} + \cdots + a_{i_r}x_{i_r} = 0\} \subseteq \mathbb{F}_q^\ell \;\middle|\; (a_{i_1},\dots,a_{i_r}) \in \mathbb{F}_q^r \setminus \{0\} \right\}.$$

$\mathcal{A}_G^q$ の性質は，グラフ G の性質と関係していることが期待される．実際，グラフ配置 $\mathcal{A}_G$ の自由性の証明と全く同様にして，$\mathcal{A}_G^q$ が自由であることと G がコーダルグラフであることが同値であることが証明できる．では，$\mathcal{A}_G^q$ の特性多項式と G の彩色多項式には何か関係はあるだろうか．彩色多項式の定義を思い出してみると，任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$\chi(G,k) = \#\left\{ (u_1,\dots,u_\ell) \in \{1,\dots,k\}^\ell \;\middle|\; ij \text{ が } G \text{ の辺} \Longrightarrow u_i \neq u_j \right\}$$

が成り立っている．この条件は G のクリークの言葉で以下のように言い換えることができる．

$$\chi(G,k) = \#\left\{ (u_1,\dots,u_\ell) \in \{1,\dots,k\}^\ell \;\middle|\; \begin{array}{l} \{i_1,\dots,i_p\} \text{ が } G \text{ のクリーク} \\ \Longrightarrow u_{i_1},\dots,u_{i_p} \text{ は互いに相異なる} \end{array} \right\}.$$

$\mathcal{A}_G^q$ の特性多項式についても，似たような解釈が可能である．

$$\frac{\chi(\mathcal{A}_G^q, q^k)}{(q-1)^\ell} = \#\left\{ (\overline{u_1},\dots,\overline{u_\ell}) \in \mathbb{P}(\mathbb{F}_q^k)^\ell \;\middle|\; \begin{array}{l} \{i_1,\dots,i_p\} \text{ が } G \text{ のクリーク} \\ \Longrightarrow u_{i_1},\dots,u_{i_p} \text{ は } \mathbb{F}_q \text{ 上 1 次独立} \end{array} \right\}.$$

G が K_3 と同型な誘導部分グラフを含まない (triangle-free) ときは，もっと強いことが言える．

Proposition 3.1. G が *triangle-free* のとき，

$$\frac{\chi(\mathcal{A}_G^q, q^k)}{(q-1)^\ell} = \#\left\{ (\overline{u_1},\dots,\overline{u_\ell}) \in \mathbb{P}(\mathbb{F}_q^k)^\ell \;\middle|\; ij \text{ が } G \text{ の辺} \Longrightarrow \overline{u_i} \neq \overline{u_j} \right\}.$$

よって，

$$\frac{\chi(\mathcal{A}_G^q, q^k)}{(q-1)^\ell} = \chi(G, [k]_q).$$

ただし，$[k]_q = \#\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^k) = \frac{q^k-1}{q-1}$ は q-**整数**である．とくに，

$$\chi(\mathcal{A}_G^q, t) = (q-1)^\ell \chi\left(G, \frac{t-1}{q-1}\right).$$

Example 3.2. 閉路グラフ C_ℓ の彩色多項式は

$$\chi(C_\ell, t) = (t-1)^\ell + (-1)^\ell (t-1)$$

である．$\ell \geq 4$ のとき，C_ℓ は triangle-free なので，

$$\chi(\mathcal{A}_{C_\ell}^q, t) = (q-1)^\ell \chi\left(C_\ell, \frac{t-1}{q-1}\right) = (t-q)^\ell + (-1)^\ell (q-1)^{\ell-1}(t-q).$$

Remark 3.3. G が triangle-free でないときは，Proposition 3.1 は成立しない．たとえば，$G = K_3$ のとき，$\chi(K_3, t) = t(t-1)(t-2)$ なので，

$$(q-1)^3 \chi\left(K_3, \frac{t-1}{q-1}\right) = (t-1)(t-q)(t-2q+1)$$

となっていて，これは

$$\chi(\mathcal{A}_{K_3}^q, t) = (t-1)(t-q)(t-q^2)$$

とは異なる．

q-整数 $[k]_q$ は整数の q-**類似**である．つまり，$\lim_{q\to 1}[k]_q = k$ が成り立っている．G が triangle-free のとき，q が素数幕であることは忘れて q を 1 に近づける極限を考えてみると，

$$\lim_{q\to 1} \frac{\chi(\mathcal{A}_G^q, q^k)}{(q-1)^\ell} = \lim_{q\to 1} \chi(G, [k]_q) = \chi(G, k)$$

となっている．G が完全グラフ K_ℓ のときは，Proposition 3.1 は適用できないが，

$$\frac{\chi(\mathcal{A}_{K_\ell}^q, q^k)}{(q-1)^\ell} = \frac{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{\ell-1})}{(q-1)^\ell} = [k]_q([k]_q-[1]_q)\cdots([k]_q-[\ell-1]_q)$$

となっているから，

$$\lim_{q\to 1} \frac{\chi(\mathcal{A}_{K^\ell}^q, q^k)}{(q-1)^\ell} = k(k-1)\cdots(k-\ell+1) = \chi(K_\ell, k)$$

が成り立っている．

Question 3.4. $\dfrac{\chi(\mathcal{A}_G^q, q^k)}{(q-1)^\ell}$ は q に関する多項式だろうか．また，もしそうなら

$$\lim_{q\to 1} \frac{\chi(\mathcal{A}_G^q, q^k)}{(q-1)^\ell} = \chi(G, k)$$

は成り立つだろうか．

Question 3.4 に答えるのは難しいと思われるが，以下の弱めた形であれば成り立つことが証明できる．

Theorem 3.5 ([4])**.** $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$\frac{\chi(\mathcal{A}_G^q, q^k)}{(q-1)^\ell} \equiv \chi(G, k) \pmod{q-1}.$$

[4] では，対数的ベクトル場のなす加群の基底の類似性などについても触れているので，ぜひご覧いただきたい．

4 対数凹性に関連する疑問

グラフ $G = ([\ell], E_G)$ の彩色多項式を

$$\chi(G, t) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^{\ell-i} a_i t^i$$

と表すと，$a_i > 0$ $(0 \le i \le \ell)$ が成り立つ．Read [6] は係数列 $a_0, a_1, \ldots, a_\ell$ は**単峰的**である，つまり，ある i が存在して，$a_0 \le \cdots \le a_i \ge \cdots \ge a_\ell$ と予想した．係数列 $a_0, a_1, \ldots, a_\ell$ が単峰的であることを示すには，**対数凹**であること，すなわち

$$a_i^2 \ge a_{i-1} a_{i+1} \qquad (1 \le i \le \ell - 1)$$

となることを示せばよい．June Huh [2] は彩色多項式の係数列の対数凹性を超平面配置の代数幾何学的手法を用いて証明した．超平面配置（あるいはより一般にマトロイド）の特性多項式は対数凹であることが示された [1, 2, 3] ので，

$$\chi(\mathcal{A}_G^q, t) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^{\ell-i} a_i(q) t^i$$

と表したとき，任意の素数幂 q に対して，$a_i(q) > 0$ $(0 \le i \le \ell)$，かつ，係数列 $a_0(q), a_1(q), \ldots, a_\ell(q)$ は対数凹である．

Example 4.1. $G = C_4$ の場合を考える．

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{A}_{C_4}^q, t) &= (t-q)^4 + (q-1)^3(t-q)\\ &= t^4 - 4qt^3 + 6q^2t^2 + (-3q^3 - 3q^2 + 3q - 1)t + 3q^3 - 3q^2 + q.\end{aligned}$$

係数は q に関する多項式になっている．各係数を $q = 1$ でテイラー展開してみると，

$$\begin{aligned}a_4(q) &= 1\\ a_3(q) &= 4 + 4(q-1)\\ a_2(q) &= 6 + 12(q-1) + 6(q-1)^2\\ a_1(q) &= 4 + 12(q-1) + 12(q-1)^2 + 3(q-1)^3\\ a_0(q) &= 1 + 4(q-1) + 6(q-1)^2 + 3(q-1)^3\end{aligned}$$

となっていて，係数はすべて正である．これは任意の素数冪 q に対して $a_i(q) > 0$ となることよりも強い条件である．さらに，$a_i(q)^2 - a_{i-1}(q)a_{i+1}(q)$ も計算してみると，

$$
\begin{aligned}
&a_1(q)^2 - a_0(q)a_2(q) = 10 + 60(q-1) + 150(q-1)^2 + 198(q-1)^3 + 144(q-1)^4 + 54(q-1)^5 + 9(q-1)^6 \\
&a_2(q)^2 - a_1(q)a_3(q) = 20 + 80(q-1) + 120(q-1)^2 + 84(q-1)^3 + 24(q-1)^4 \\
&a_3(q)^2 - a_2(q)a_4(q) = 10 + 20(q-1) + 10(q-1)^2
\end{aligned}
$$

のように係数はすべて正であり，これは任意の素数冪 q に対して，$a_0(q), \dots, a_4(q)$ が対数凹であるという条件より強い条件である．

Question 4.2. $a_i(q)$ は q に関する多項式だろうか．また，もしそうなら $a_i(q)$ や $a_i(q)^2 - a_{i-1}(q)a_{i+1}(q)$ を $q = 1$ でテイラー展開したときの係数はすべて正だろうか．

謝辞

この度は，第 70 回代数学シンポジウムでの講演という大変貴重な機会をいただき，どうもありがとうございました．本研究は科研費 (課題番号:JP23H00081) の助成を受けています．

参考文献

[1] K. Adiprasito, J. Huh, and E. Katz, *Hodge theory for combinatorial geometries*, Annals of Mathematics **188** (2018), no. 2.

[2] J. Huh, *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*, Journal of the American Mathematical Society **25** (2012), no. 3, 907–927.

[3] J. Huh and E. Katz, *Log-concavity of characteristic polynomials and the Bergman fan of matroids*, Mathematische Annalen **354** (2012), no. 3, 1103–1116.

[4] T. Nian, S. Tsujie, R. Uchiumi, and M. Yoshinaga, *q-deformation of chromatic polynomials and graphical arrangements*, April 2025, arXiv:2412.08290 [math].

[5] P. Orlik and L. Solomon, *Combinatorics and topology of complements of hyperplanes*, Inventiones mathematicae **56** (1980), no. 2, 167–189.

[6] R. C. Read, *An introduction to chromatic polynomials*, Journal of Combinatorial Theory **4** (1968), no. 1, 52–71.

[7] H. Terao, *Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula*, Inventiones mathematicae **63** (1981), no. 1, 159–179.

[8] T. Zaslavsky, *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes*, Memoirs of the American Mathematical Society ; no. 154, American Mathematical Society, Providence, 1975.

Quasi-F-splitting and singularities in mixed characteristic

（吉川翔・東京科学大学）

1　はじめに

本講演では,Bhatt–Ma–Patakfalvi–Schwede–Tucker–Waldron–Witaszek によって導入された perfectoid purity（[1]）を背景に, 混標数における新たな特異点の概念である *quasi-F-splitting* を紹介した．特に,quasi-F-splitting と perfectoid purity との関係, およびそれを用いた perfectoid purity の新たな判定法に焦点を当てた．本稿では, この枠組みの中心となる quasi-F-splitting の基本的性質と, その "height" の具体的な計算例について述べる.

2　混標数における特異点

以下では素数 p を固定する．$(R, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし,$p \in \mathfrak{m}$ を仮定する．また,R/pR 上の Frobenius 写像が有限射であるとする．文献 [1] では, 正標数における F-pure の混標数類似として *perfectoid pure* が導入された.

2.1　perfectoid pure の定義

定義 **2.1.** *R が perfectoid pure であるとは,perfectoid への環の純拡大 $R \to B$ が存在することをいう．さらに,R が Gorenstein である場合, 誘導される top local cohomology への写像*

$$H^{\dim R}_{\mathfrak{m}}(R) \to H^{\dim R}_{\mathfrak{m}}(B)$$

が単射であることと同値である.

R が正標数の場合, 完全化 R_{perf} は perfectoid R-algebra の圏の始対象となる．したがって,R が perfectoid pure であることと $R \to R_{\mathrm{perf}}$ が純拡大であることは同値であり, これはさらに Frobenius 写像の純性と同値となる．よって正標数の場合,perfectoid pure であることと F-pure であることは一致する.

2.2　特徴づけについて

k を標数 p の体とし, その Witt 環上の形式的冪級数環

$$A := W(k)[[x_1, \dots, x_N]]$$

を考える.$I \subset A$ をイデアルとし $R = A/I$ とする．このとき

$$A_\infty := A[p^{1/p^\infty}, x_1^{1/p^\infty}, \dots, x_N^{1/p^\infty}]$$

は A 上の典型的な perfectoid である．さらに A_∞/IA_∞ の perfectoid 化 $(A_\infty/IA_\infty)_{\mathrm{perfd}}$ が存在し, $R_\infty := (A_\infty/IA_\infty)_{\mathrm{perfd}}$ と書くと, これは R 上の perfectoid である．また,R が perfectoid pure であることと $R \to R_\infty$ が純拡大であることが同値であることが知られている.

しかし $(A_\infty/IA_\infty)_{\mathrm{perfd}}$ の構造を明示的に理解するのは極めて難しく, $I=(x_1+x_2)$ のような単純な場合であっても計算は困難である. このため perfectoid purity を実際に判定することは難しいと考えられてきた. そこで, この困難を回避するために混標数版の quasi-F-splitting を導入した.

3 Quasi-F-splitting

3.1 Witt ベクトルと準分裂

quasi-F-splitting を定義するには R 上の Witt 環が重要である. 正標数とは限らない環の Witt 環を考えることはあまり一般的ではないが, 本研究ではそこが重要な役割を担う.

環 A に対し,Witt 環 $W_n(A)$ は以下の性質を満たす:

1. $W_n(A)$ は集合として A^n である.
2. ghost component と呼ばれる環準同型
$$\varphi : W_n(A) \to A^n, \qquad (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (a_0, a_0^p + pa_1, \ldots)$$
を備え,A が p-torsion free ならば φ は単射になる.
3. 環準同型 $f : A \to B$ から誘導される
$$W_n(f) : W_n(A) \to W_n(B) \qquad (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$$
は環準同型になる.

さらに, 準同型 $F : W_{n+1}(R) \to W_n(R)$ が存在し, これによって次の pushout 図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
W_{n+1}(R) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & F_*W_n(R) \arrow[d] \\
R \arrow[r] \arrow[d] & F_*W_n(R)/pW_n(R) =: Q_{R,n} \\
\overline{R} := R/pR. \arrow[ur, "\Phi_{R,n}"] &
\end{tikzcd}$$

この図式により $\overline{R} \to Q_{R,n}$ が得られ, これを $\Phi_{R,n}$ と書く.

定義 3.1.
- R が n-quasi-F-split とは $\Phi_{R,n}$ が分裂 $\overline{R}$-加群準同型であることをいう.
- R が *quasi-F-split* とは, ある $n \geq 1$ で R が *n-quasi-F-split* となることをいう.
- *quasi-F-splitting height* を
$$\mathrm{ht}(R) := \inf\{n \geq 1 \mid R \textit{ is } n\textit{-qFS}\},$$
と定める（存在しなければ $\mathrm{ht}(R) = \infty$）.

いくつかの関連する事実を紹介する：

- R が 1-quasi-F-split であることと $\overline{R}$ の F-pure 性は同値.
- 正標数の場合, これは呼子氏 [2] による F-splitting height の一般化.
- Witt 環の関手性により $\mathrm{ht}(\overline{R}) \geq \mathrm{ht}(R)$.
- 例 $R = \mathbb{Z}_p[x]/(x^p - p)$ は $p \geq 3$ で quasi-F-split でない.

4　主定理

定理 **4.1.** R を完全交叉かつ *p-torsion free* とする．もし R が *quasi-F-split* ならば,R は *perfectoid pure* である．特に,$\overline{R}$ が *quasi-F-split* ならば R は *perfectoid pure* である．

$n=1$ の場合は [1] による結果であり, この定理はその一般化になっている.
以下では, 本定理により perfectoid pure であることが初めて確認された例を示す.

4.1　主定理に関連する例

例 **4.1.**

$$R = \mathbb{Z}_p[x, y, z]/(x^3 + y^3 + z^3).$$

- $p \equiv 1 \pmod 3$：$\overline{R}$ は *F-pure.* よって 1-*qFS,* したがって *perfectoid pure*（*[1]*）.
- $p \equiv 2 \pmod 3$：$\overline{R}$ は 2-*quasi-F-split.* よって *perfectoid pure.*
- $p = 3$：*quasi-F-split* でない． *perfectoid purity* は講演時点では未解決であったが, 最近 *perfectoid pure* であることが示された *[3].*

例 **4.2.**

$$R = \mathbb{Z}_2[x, y, z, w]/(w^2 + xyz(x + y + z)).$$

このとき R は 2-*quasi-F-split* であり, したがって *perfectoid pure* である．一方で $\overline{R}$ は *quasi-F-split* ではない点に注意が必要である．

5　謝辞

第 70 回代数学シンポジウムの関係者の皆様, 特に講演の機会を与えてくださったプログラム責任者の岸本崇先生ならびに藤田健人先生に心より感謝申し上げます．本研究は JSPS 科研費 JP24K16889 の助成を受けたものです.

References

[1] B. Bhatt, L. Ma, Z. Patakfalvi, K. Schwede, K. Tucker, J. Waldron, J. Witaszek, *Perfectoid pure singularities*, arXiv:2409.17965 (2024).

[2] F. Yobuko, *Quasi-Frobenius splitting and lifting of Calabi–Yau varieties in characteristic p*, Math. Z. **292** (2019), no. 1–2, 307–316.

[3] S. Yoshikawa, *A Criterion for Perfectoid Purity and the Rationality of Thresholds*, arXiv:2510.19319.

環の表現論におけるスペクトラム理論

神田 遼 *

概要

環の表現論におけるスペクトラム理論について概説する．本稿では部分圏の分類を主たる問題と位置付け，可換ネーター環の素イデアルの集合の類似である Gabriel スペクトラムと Ziegler スペクトラムが果たす役割に焦点を絞って解説する．中村 力 氏との共同研究 [KN22] で得られたネーター代数上の平坦純移入加群の分類にも触れる．

1 はじめに

環論において，可換環の Zariski スペクトラムの一般化や類似として得られる位相空間はしばしばスペクトラムと呼ばれる．スペクトラムの定義はその用途に応じて複数存在するが，可換ネーター環においては多くの定義が Zariski スペクトラムに一致するため，最も理論がうまくいくモデルケースと言える．一方で，スペクトラムの概念を加群圏の一般化・類似であるアーベル圏に拡張することで，非可換環上の加群圏やスキーム上の連接層の圏などにも適用できるようになり，さらに加群圏上の関手圏のスペクトラムを考えることで，加群のモデル理論とも密接に関係する．本稿では Gabriel スペクトラムと Ziegler スペクトラム，およびそれらに直接関係するスペクトラムに焦点を絞り，定義や古典的な結果を紹介し，中村 力 氏との共同研究の内容 [KN22] で得られたネーター代数上の平坦純移入加群の分類に触れる．

謝辞

第 70 回代数学シンポジウムで講演の機会を与えてくださった世話人の皆様に感謝申し上げます．本研究は，JSPS 科研費 JP21H04994，JP24K06693，および文部科学省特色ある共同研究拠点の整備の推進事業 JPMXP0723833165 の助成を受けたものです．

2 可換ネーター環の Zariski スペクトラム

可換環 R に対して，その素イデアル全体の集合である Zariski スペクトラムを $\operatorname{Spec} R$ で表す．この集合に Zariski 位相と構造層を付加して幾何的な対象と見なすことはスキーム論において基本的な考え方であるが，一方で，素イデアルの集合の部分集合と，種々の部分圏の間に 1 対 1 対応があることが知られている．このような対応の源流と言える結果が以下に述べる Gabriel の定理である．まず

* 所属：大阪公立大学大学院理学研究科数学専攻
メールアドレス：ryo.kanda.math@gmail.com

は必要な記号・用語を準備する．

一般に，可換とは限らない環 R に対して，右 R 加群全体のなす圏（射は R 準同型）を $\operatorname{Mod} R$ で表す．有限表示 R 加群全体のなす圏（射は R 準同型）を $\operatorname{mod} R$ で表す．ここで加群 M が**有限表示**（finitely presented）であるとは，$R^m \to R^n \to M \to 0$（m, n は非負整数）という完全列を持つことであり，R が右ネーター環の場合には有限生成であることと同値である．

$\operatorname{Mod} R$ は加法圏であり，任意の射が kernel と cokernel を持ち，準同型定理が成り立つので，アーベル圏である．R が右ネーター環のとき，あるいはより一般に右連接環のとき，有限表示加群のなす圏 $\operatorname{mod} R$ もアーベル圏となる．[*1]

アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して，$M \in \mathcal{A}$ で，M が $\mathcal{A}$ の対象であることを表す．$\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ で，$\mathcal{X}$ が $\mathcal{A}$ の充満部分圏であることを表す．これは $\mathcal{X}$ が $\mathcal{A}$ の対象の集まりであると言っても同じことである．本稿においては充満部分圏を単に**部分圏**とよぶことにする．

一般に，アーベル圏の対象 $M \in \mathcal{A}$ に対して，M の**部分対象**（subobject）・**剰余対象**（quotient object）の概念が定義される．環 R に対する $\operatorname{Mod} R$，および右ネーター環 R に対する $\operatorname{mod} R$ においては，これらは部分加群・剰余加群の概念に一致する．

定義 2.1. $\mathcal{A}$ をアーベル圏とし，$\emptyset \neq \mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ とする．

(1) $\mathcal{X}$ が**部分対象**（resp. **剰余対象**）**で閉じている**とは，任意の $M \in \mathcal{X}$ に対して，M の任意の部分対象（resp. 剰余対象）が $\mathcal{X}$ に属することをいう．

(2) $\mathcal{X}$ が**拡大**（extension）**で閉じている**とは，$\mathcal{A}$ における任意の短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ に対して，$L, N \in \mathcal{X}$ ならば $M \in \mathcal{X}$ が成り立つことをいう．

(3) $\mathcal{X}$ が $\mathcal{A}$ の **Serre 部分圏**であるとは，$\mathcal{X}$ が $\mathcal{A}$ において部分対象，剰余対象，拡大で閉じていることをいう．

可換環 R に対して，部分集合 $\Phi \subset \operatorname{Spec} R$ が**特殊化**（specialization）**で閉じている**，あるいは**特殊化閉集合**であるとは，Φ が素イデアルの包含関係という半順序に関して upper set となっていること，つまり，任意の素イデアルの列 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ に対して，$\mathfrak{p} \in \Phi$ ならば $\mathfrak{q} \in \Phi$ が成り立つことをいう．

定理 2.2 (Gabriel [Gab62]). R を可換ネーター環とするとき，次のような包含関係を保つ全単射がある：

$$\begin{array}{ccc}
\{\operatorname{mod} R \text{ の Serre 部分圏}\} & \xrightarrow{\sim} & \{\operatorname{Spec} R \text{ の特殊化閉集合}\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\mathcal{X} & \mapsto & \bigcup_{M \in \mathcal{X}} \operatorname{Supp} M
\end{array}$$

逆写像は $\Phi \mapsto \{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{Supp} M \subset \Phi \}$ で与えられる．

この定理はこれまでに研究されている種々の部分圏の分類の源流（の 1 つ）と言えるものであり，現在までに次のような一般化が考えられてきた：

(1) 可換ネーター環でない場合を考える．

[*1] 環 R が**右連接**（right coherent）であるとは，R の任意の有限生成右イデアルが（右加群として）有限表示であることをいう．R が右連接であることは，$\operatorname{mod} R$ が $\operatorname{Mod} R$ のアーベル部分圏となることと同値であり，さらに $\operatorname{mod} R$ が（内在的に）アーベル圏となることとも同値である．例えば [Her97, §1.3] を参照．

(2) Serre 部分圏以外の部分圏を考える．

(3) より広く，$\mathrm{mod}\,R$ 以外の圏の様々な部分圏を考える．

いずれの方向性でも多岐に渡る結果があるが，ここでは代表的かつ本稿の趣旨に近いものに限定して言及する．まず (1) の方向性では，Gabriel [Gab62] 自身が，定理 2.2 の結果がネータースキーム X の連接層の圏 $\mathrm{coh}\,X$ の Serre 部分圏に対しても成り立つことを示している（この場合，$\mathrm{Spec}\,R$ の代わりとなるのはスキーム X の底集合である）．また，次の章で説明する非可換環への一般化も (1) の例である．

次に，定理 2.2 と同じ可換ネーター環 R に対する $\mathrm{mod}\,R$ について (2) の方向性を考察する．定理 2.2 の対応を観察すると，Serre 部分圏とは限らない部分圏 $\mathcal{X} \subset \mathrm{mod}\,R$ に対しても，$\bigcup_{M\in\mathcal{X}} \mathrm{Supp}\,M$ は特殊化閉集合である．逆に，特殊化閉集合とは限らない部分集合 $\Phi \subset \mathrm{Spec}\,R$ に対しても，対応する部分圏は Serre 部分圏となっているので，この意味で安直な一般化はない．しかし実は対応の仕方を変えることで，次のように一般化できる：

定理 2.3 (Takahashi [Tak08])**.** R を可換ネーター環とするとき，次のような包含関係を保つ全単射がある：

$$\begin{array}{ccc} \{\,\mathrm{mod}\,R \text{ の torsionfree class}\,\} & \xrightarrow{\sim} & \{\,\mathrm{Spec}\,R \text{ の部分集合}\,\} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{X} & \mapsto & \bigcup_{M\in\mathcal{X}} \mathrm{Ass}\,M \end{array}$$

逆写像は $\Phi \mapsto \{\, M \in \mathrm{mod}\,R \mid \mathrm{Ass}\,M \subset \Phi \,\}$ で与えられる．

ここで $\mathcal{X} \subset \mathrm{mod}\,R$ が torsionfree class であるとは，$\mathcal{X}$ が部分加群と拡大で閉じていることをいう．（ある torsion pair $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ に現れる $\mathcal{F}$ を torsionfree class とよぶことも多いが，ここでの定義とは異なる．）$\mathcal{X} \subset \mathrm{mod}\,R$ が Serre 部分圏であるときは，$\bigcup_{M\in\mathcal{X}} \mathrm{Ass}\,M = \bigcup_{M\in\mathcal{X}} \mathrm{Supp}\,M$ は特殊化閉集合となるため，定理 2.3 の全単射の制限として定理 2.2 の全単射が得られる．

双対的に，torsion class は剰余対象と拡大で閉じたクラスとして定義されるが，$\mathrm{mod}\,R$ においては必ずしも torsion class と torsionfree class は 1 対 1 に対応せず，実際，$\mathrm{mod}\,R$ の torsion class はすべて Serre 部分圏になることが知られている．（この事実は [SW11, Theorem 2] で明示的に述べられているが，それ以前にも知られていたようである．）

Saito [Sai25, Theorem A] は広いクラスのネータースキーム X に対して 定理 2.3 を一般化したが，この場合は $\mathrm{coh}\,X$ の torsionfree class で line bundle をテンソルする操作で閉じているものと，X の底集合の部分集合が 1 対 1 に対応する．Iyama-Kimura [IK24] では非可換なネーター代数（定義は後述）に対して，torsion class および torsionfree class を考察している．

(3) の方向性として，導来圏の部分圏の分類は環の表現論における主要な問題の 1 つである．代表的な結果として，次の Hopkins-Neeman の定理が有名である．

定理 2.4 (Hopkins [Hop87], Neeman [Nee92])**.** R を可換ネーター環とするとき，次のような包含関係を保つ全単射がある：

$$\{\,\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,R) \text{ の thick 部分圏}\,\} \xrightarrow{\sim} \{\,\mathrm{Spec}\,R \text{ の特殊化閉集合}\,\}$$

ここで $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,R)$ は有限生成射影加群のなすホモトピー圏であり，これは三角圏の構造を持つ．thick 部分圏とは（三角圏の意味での）拡大，シフト関手 $[n]$ $(n \in \mathbb{Z})$，直和因子で閉じた部分圏であ

る．この結果は Thomason [Tho97] によって，quasi-compact quasi-separated スキームに一般化されている．

有界導来圏 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, R)$ および特異圏 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ の thick 部分圏の分類はより難しく，可換環の表現論における主要な問題の 1 つである．例えば Stevenson [Ste14] による hypersurface および complete intersection についての結果が有名であるが，本稿では詳細には立ち入らない．

以上に述べた結果は主に有限生成加群のなす圏，およびそれに付随する導来圏などの部分圏の分類であるが，有限生成とは限らない加群の圏 $\mathrm{Mod}\, R$ に関する部分圏の分類もある．例えば定理 2.2 については，Gabriel 自身が，$\mathrm{Mod}\, R$ の局所化部分圏（Serre 部分圏であって有限個とは限らない直和で閉じたもの）と $\mathrm{Spec}\, R$ の特殊化閉集合が 1 対 1 に対応することを示している．

3 非可換環のスペクトラム

この章では，可換ネーター環についての Serre 部分圏の分類（定理 2.2）を，非可換環に一般化することを考える．定理 2.2 では R の素イデアルを用いて分類したので，非可換環においても素イデアルを用いようとするのは自然な発想であろう．

可換とは限らない環 R に対して，**イデアル** $I \subset R$ は，両側イデアル（$RIR \subset I$ を満たす加法部分群）を意味するものとする．

定義 3.1. R を環とする．イデアル $P \subsetneq R$ が**素イデアル**（prime ideal）であるとは，任意のイデアル $I, J \subset R$ に対して，$IJ \subset P$ ならば $I \subset P$ または $J \subset P$ が成り立つことをいう．これは，任意の $a, b \in R$ に対して，$aRb \subset P$ ならば $a \in P$ または $b \in P$ が成り立つことと同値である．

R の素イデアル全体のなす集合を $\mathrm{Spec}\, R$ で表す．

素朴には「$ab \in P$ ならば $a \in P$ または $b \in P$」という条件も考えられる．この条件は上記の素イデアルの定義より真に強く，この条件を満たすイデアル $P \subsetneq R$ は**完全素イデアル**（completely prime ideal）とよばれる．素イデアルと完全素イデアルはいずれも重要な概念であるが，素イデアルには次のような利点がある：

(1) 任意の環 $R \neq 0$ は少なくとも 1 つの素イデアルを持つ．実際，Zorn の補題より極大イデアルが存在し，それは素イデアルである．一方，完全素イデアルは存在しないことがある．例えば，体 K 上の n 次正方行列環 $M_n(K)$ は，$n \geq 2$ のとき，完全素イデアルを持たない．（イデアルは 0 と $M_n(K)$ のみであり，いずれも完全素イデアルではない．$n = 1$ のときは体 K そのものなので，0 が完全素イデアルである．）

(2) 素イデアルの概念は森田不変である．すなわち，環 R, S が森田同値（$\mathrm{Mod}\, R$ と $\mathrm{Mod}\, S$ が圏として同値）であるならば，R のイデアルと S のイデアルは自然に 1 対 1 に対応し，この対応は包含関係およびイデアルの積を保つので，$\mathrm{Spec}\, R$ と $\mathrm{Spec}\, S$ は自然に 1 対 1 に対応する．一方，完全素イデアルの概念は森田不変ではない．実際，任意の $n \geq 2$ に対して，体 K と $M_n(K)$ は森田同値であるが，K が完全素イデアル 0 を持つ一方，$M_n(K)$ は完全素イデアルを持たない．

なお，片側イデアル（右イデアル・左イデアル）に対して，素イデアルの概念を考える試みもあるが（例えば [Rey10]），定義にいくつかバリエーションがあり，上記の素イデアルの概念と比べると扱

いづらい点が多い．

さて，今は加群圏の部分圏の分類を念頭においているので，数が比較的多く，森田不変な概念である素イデアル（定義 3.1）が妥当な選択肢であるように思われる．しかし実際には，R が**ネーター環であっても，素イデアルは十分たくさんあるとは限らない**：

例 3.2. K を標数 0 の体とし，Weyl 代数 $R = A_1(K) = K\langle x, y\rangle/(xy - yx - 1)$ を考える．R はネーター環（左ネーター環かつ右ネーター環）であり，単純環（0 と R 以外の非自明なイデアルを持たない）である．0 が唯一の素イデアルであり，完全素イデアルでもある．一方，R は左アルティン環でも右アルティン環でもない．R の大域次元と Gabriel-Rentschler の意味での Krull 次元はともに 1 であり，R の Gelfand-Kirillov 次元は 2 である．（[MR01, §1.3.5, §7.5.8, §8.1.15] を参照.）

Krull 次元が 0 の可換ネーター環はアルティン環であった．この非可換ネーター環 R においては，素イデアルの意味での Krull 次元は 0 であるにも関わらず，R はアルティン環ではない．よって，長さ有限な加群全体のなす Serre 部分圏は R を含まない．このことから，$\operatorname{Spec} R = \{0\}$ の部分集合では，$\operatorname{mod} R$ の Serre 部分圏を分類することはできないことが分かる．($\operatorname{Spec} R$ の部分集合は 2 つだけだが，$\operatorname{mod} R$ の Serre 部分圏は 3 つ以上存在する.）

よって非可換の場合，$\operatorname{mod} R$ の部分圏を分類するという観点からは，素イデアルの集合 $\operatorname{Spec} R$ は適切なスペクトラムとは言えない．ここで可換ネーター環における次の基本的な事実に注目しよう．

定理 3.3 (Matlis [Mat58])**.** R を可換ネーター環とするとき，次の全単射がある：

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} R & \xrightarrow{\sim} & \{\text{直既約移入 } R \text{ 加群の同型類}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & E_R(R/\mathfrak{p}) \end{array}$$

ここで $E_R(M)$ は R 加群 M の移入包絡である．逆写像は，直既約移入加群 I に対して，$\operatorname{Ass} I = \{\mathfrak{p}\}$ となる $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を対応させることで与えられる．

実は非可換ネーター環においては定理 3.3 は必ずしも成り立たず，先の例 3.2 がその反例となっている．そこで発想を変えて，素イデアルの集合ではなく，直既約移入加群の同型類の集合をスペクトラムと見なすことにしよう．後の議論のためにより一般的な定義をしておく．

アーベル圏であって，任意の対象の族の直和（余積）を持ち，順極限が完全[*2]であり，生成対象を持つようなものを **Grothendieck 圏**とよぶ．任意の環 R に対して，$\operatorname{Mod} R$ が Grothendieck 圏であることは容易に分かる．任意のスキーム X に対して，準連接層の圏 $\operatorname{QCoh} X$ は Grothendieck 圏であるが，生成対象の存在が非自明であり，これは 2000 年頃に Gabber によって証明された（[Con00, Lemma 2.1.7]，[Bra18, Appendix] を参照）．Grothendieck 圏において，任意の対象 M は移入包絡 $M \subset E(M)$ を持ち，その同型類は一意に定まる．

[*2] ここで圏 $\mathcal{C}$ における順極限（direct limit）とは，$\mathcal{C}$ における順系（有向集合から $\mathcal{C}$ への関手）の余極限のことを指す．アーベル圏 $\mathcal{C}$ において**順極限が完全**とは，任意の有向集合 I（を圏と見なしたもの）に対して，順極限をとる関手 $\varinjlim \colon \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ が完全であることをいう．順極限より一般の余極限として，フィルター圏からの関手の余極限である**フィルター余極限**（filtered colimit）があるが，任意のフィルター圏は，ある順系からの final functor を持つので，順極限が完全であることはフィルター余極限が完全であることと同値である．（[AR94, Theorem 1.5] および [AN82] を参照.）

定義 3.4. $\mathcal{G}$ を Grothendieck 圏とする．

$$\operatorname{Sp}\mathcal{G} := \{\, \mathcal{G} \text{ における直既約移入対象の同型類} \,\}$$

と定め，これを $\mathcal{G}$ の Gabriel **スペクトラム**とよぶ．[*3]

可換ネーター環 R に対しては，定理 3.3 より，$\operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ と $\operatorname{Spec} R$ の間に自然な全単射がある．部分圏の分類には $\operatorname{Supp} M$ や $\operatorname{Ass} M$ などの操作が必要になるが，次のように定義すると可換ネーター環上の加群に対する $\operatorname{Supp} M$ および $\operatorname{Ass} M$ の一般化が得られる：

定義 3.5. $\mathcal{G}$ を Grothendieck 圏とする．$M \in \mathcal{G}$ に対して，次のように定義する：

(1) $\operatorname{Supp} M := \{\, I \in \operatorname{Sp}\mathcal{G} \mid \operatorname{Hom}(M, I) \neq 0 \,\}$.

(2) $\operatorname{Ass} M := \{\, I \in \operatorname{Sp}\mathcal{G} \mid I \text{ は } E(M) \text{ の直和因子} \,\}$.

Gabriel による Serre 部分圏の分類（定理 2.2）では $\operatorname{Spec} R$ の特殊化閉集合を用いたが，非可換の場合はその定義に注意が必要である．$I, J \in \operatorname{Sp}\mathcal{G}$ に対して

$$I \leq J \;:\Longleftrightarrow\; \text{任意の } M \in \mathcal{G} \text{ に対して，} I \in \operatorname{Supp} M \text{ ならば } J \in \operatorname{Supp} M$$

と定めると，これは可換ネーター環 R に対する $\operatorname{Spec} R$ の包含関係の一般化となっている．この関係 $\leq$ は一般に前順序（partial preorder）であるが，$\mathcal{G}$ が局所ネーター的[*4]であれば $\leq$ は半順序（partial order）となる．しかし，この順序に関する upper set は必ずしも Serre 部分圏と 1 対 1 に対応しない．（[Pap02, Example 4.7] および [Kan15, Example 3.4] で挙げられている例では，半順序は自明だが，以下に述べる Ziegler 位相は離散位相ではないので，これが反例となる.）

代わりに考えるべき部分集合は次の意味の**開集合**である：

定義 3.6. $\mathcal{G}$ を局所連接 Grothendieck 圏とし，$\operatorname{coh}\mathcal{G}$ を連接対象のなす部分圏とする．[*5] このとき，$\operatorname{Sp}\mathcal{G}$ には

$$\{\, \operatorname{Supp} M \mid M \in \operatorname{coh}\mathcal{G} \,\}$$

を開集合の基底とする位相が定まる．この位相を Ziegler **位相**とよび，その開集合を，Ziegler **開集合**とよぶ．[*6]

この位相は，可換ネーター環 R に対する $\operatorname{Spec} R$ の Zariski 位相の一般化**ではない**．実際，全単射 $\operatorname{Spec} R \cong \operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ によって，$\operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ の Ziegler 開集合は，$\operatorname{Spec} R$ の特殊化閉集合と一致する．したがってこの場合，Ziegler 開集合の無限個の共通部分も Ziegler 開集合となるが，一般の Grothendieck 圏においては，それが局所ネーターであっても，Ziegler 開集合の無限個の共通部分は Ziegler 開集合とは限らない（[Pap02, Example 4.7]，[Kan15, Example 3.4]）．

[*3] ここでは単なる集合として定義しているが，可換環の Zariski スペクトラムの一般化となる位相を入れた場合に限って Gabriel スペクトラムとよぶ流儀もある．

[*4] Grothendieck 圏 $\mathcal{G}$ が**局所ネーター**（locally noetherian）であるとは，ネーター対象（部分対象に関する昇鎖条件を満たす対象）からなる対象の族で，$\mathcal{G}$ を生成するものが存在することをいう．

[*5] Grothendieck 圏 $\mathcal{G}$ が**局所連接**（locally coherent）であるとは，$\mathcal{G}$ の任意の対象が連接対象の順極限（あるいはフィルター余極限）と同型であることをいう．連接対象は連接加群の自然な一般化だが，定義は [Her97, §1] を参照．例えば R が右連接環のとき，$\operatorname{Mod} R$ は局所連接である．

[*6] [Her97] では，本稿における Gabriel スペクトラムにこの位相を入れたものを Ziegler **スペクトラム**とよんでいる．

定理 3.7 (Herzog [Her97], Krause [Kra97]). $\mathcal{G}$ を局所連接 Grothendieck 圏とするとき，次のような包含関係を保つ全単射がある：

$$\begin{array}{ccc} \{\operatorname{coh}\mathcal{G} \text{ の Serre 部分圏}\} & \xrightarrow{\sim} & \{\operatorname{Sp}\mathcal{G} \text{ の Ziegler 開集合}\} \\ \uplus & & \uplus \\ \mathcal{X} & \mapsto & \bigcup_{M\in\mathcal{X}} \operatorname{Supp} M \end{array}$$

逆写像は $\Phi \mapsto \{\, M \in \operatorname{coh}\mathcal{G} \mid \operatorname{Supp} M \subset \Phi \,\}$ で与えられる．

さて，定理 3.3 の後に述べたように，右ネーター環 R に対して，素イデアルの集合 $\operatorname{Spec} R$ と Gabriel スペクトラム $\operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ は必ずしも 1 対 1 に対応しない．しかし，次のように一方から他方への自然な写像を作ることができる：任意の $P \in \operatorname{Spec} R$ に対して，ただ 1 つの $I_R(P) \in \operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$（直既約移入右 R 加群の同型類）と，ただ 1 つの正整数 n_P が存在して，$E_R(R/P) \cong I(P)^{n_P}$ となる．逆に，任意の $I \in \operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ に対して，$\operatorname{Ass} I$（両側素イデアルの意味での随伴素イデアル）は 1 点集合となるので，その 1 点を対応させることができる．

R が右ネーター環なので，定義 3.5 の後に定義した関係 $\leq$ により $\operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ は半順序集合となる．一方，$\operatorname{Spec} R$ は素イデアルの包含関係により半順序集合である．

定理 3.8. 右ネーター環 R に対して，上記の方法で定義される写像を

$$\operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \operatorname{Spec} R$$

とおくと，次が成り立つ：

(1) φ と ψ は半順序集合の準同型である．（$I \leq J$ ならば $\varphi(I) \subset \varphi(J)$．$\psi$ も同様．）

(2) $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$．特に，$\varphi$ は全射であり，ψ は単射である．

(3) 任意の $I \in \operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ と $P \in \operatorname{Spec} R$ に対して，$\psi(P) \leq I$ は $P \subset \varphi(I)$ と同値である．

(4) φ および ψ を制限することで，極小元の集合の間の**全単射**

$$\operatorname{Min}(\operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \operatorname{Min}(\operatorname{Spec} R)$$

が得られる．

定理 3.8 (4) より，$\operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ の極小元の個数は $\operatorname{Spec} R$ の極小元の個数と一致し，R のネーター性からこれらは有限である．これらが 1 点集合であるという性質は，可換ネーター環に対するアファインスキームの既約性を一般化した概念となる．一方，部分圏を用いることで，R が $\operatorname{Sp}(\operatorname{Mod} R)$ の意味で被約（reduced）であることと，$\operatorname{Spec} R$ の意味で被約であることをそれぞれ定義することができ，両者の概念が（非自明な議論により）一致する．定理 3.8 およびそれを用いた既約性・被約性に関する議論は，ある種のネーター性と直積の完全性を満たす Grothendieck 圏に対して行うことができる（[Kan22, Theorem 1.1]）．

定理 3.8 の φ と ψ が互いに逆写像であることは，R が**右 FBN 環**（right fully bounded noetherian ring）であることと同値であることが知られているが，応用上重要な例が次のネーター代数である：R を可換ネーター環とし，A を R 代数（環 A と，R から A の中心への環準同型の組）とする．A が

R 加群として有限生成であるとき，A を**ネーター R 代数**（Noether R-algebra）とよぶ．これは単に A が R 代数であってネーター環であることよりも，はるかに強い性質である．

命題 3.9. ネーター R 代数 A に対して，

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}\,A) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spec}\,A$$

は互いに逆写像である．（つまり，A は右 FBN 環である．ネーター代数の定義の左右対称性より，A は左 FBN 環でもある．）

定理 3.7 より，ネーター R 代数 A に対して，$\mathrm{mod}\,A$ の Serre 部分圏は $\mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}\,A)$ の Ziegler 開集合と 1 対 1 に対応するが，これは命題 3.9 によって，$\mathrm{Spec}\,A$ の特殊化閉集合（$\mathrm{Spec}\,A$ の upper set）と 1 対 1 に対応する．

さて，可換環の Zariski スペクトラムが持つ重要な性質に関手性がある．すなわち，可換環の間の環準同型 $R \to S$ は写像 $\mathrm{Spec}\,S \to \mathrm{Spec}\,R$ を誘導し，Spec は可換環全体のなす圏から集合全体のなす圏（あるいはスキーム全体のなす圏）への反変関手となる．このような関手性を非可換環に対しても期待することは自然な発想だが，残念ながら，素イデアルの集合 $\mathrm{Spec}\,R$ と Gabriel スペクトラム $\mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}\,R)$ はいずれも関手性を満たさない．このことは次の例から分かる：

例 3.10. K を体として，環準同型

$$f\colon K \times K \cong \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \hookrightarrow \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix} = M_2(K)$$

を考える．$\mathrm{Spec}(K \times K) = (\mathrm{Spec}\,K) \sqcup (\mathrm{Spec}\,K) = \{P_1, P_2\}$ は 2 点集合であり，$M_2(K)$ は K と森田同値なので，$\mathrm{Spec}\,M_2(K)$ は 1 点集合である．よって写像 $\mathrm{Spec}\,M_2(K) \to \mathrm{Spec}(K \times K)$ は 1 点集合から 2 点集合への写像となるが，$\mathrm{Spec}(K \times K)$ の 2 点の役割は対等なので，少なくとも自然な方法では行き先を定めることはできない．

実際，Spec が集合の圏への反変関手であると仮定すると次のように矛盾が生じる．$K \times K$ の成分を入れ替える自己環準同型 $(a, b) \mapsto (b, a)$ と，$M_2(K)$ の自己環準同型

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

を考えると，可換図式

$$\begin{tikzcd} K \times K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M_2(K) \arrow[d] \\ K \times K \arrow[r, "f"] & M_2(K) \end{tikzcd}$$

が得られる．ここに関手（と仮定した）Spec を適用すると，

$$\begin{tikzcd} \{P_1, P_2\} & \{*\} \arrow[l, "\mathrm{Spec}\,f"'] \\ \{P_1, P_2\} \arrow[u] & \{*\} \arrow[l, "\mathrm{Spec}\,f"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

となるが，左下から左上への写像は 2 点を入れ替える写像なので，$\operatorname{Spec} f$ をどのように定義しても矛盾である．$K \times K$ と $M_2(K)$ はいずれもネーター代数なので，以上の議論は Spec を Gabriel スペクトラムに置き換えても成立する．

以上の議論では，スペクトラムが森田不変であることを本質的に用いているが，これを仮定しない場合でも，次のような結果がある：

定理 3.11 (Reyes's No-Go Theorem [Rey12, Theorem 1.1])**.** F が環全体のなす圏から集合全体のなす圏への反変関手であり，これを可換環全体のなす圏に制限したものが Zariski スペクトラムに一致すると仮定する．このとき，任意の $n \geq 3$ に対して，$F(M_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ が成り立つ．

$M_n(\mathbb{C})$ は非常に基本的な非可換環（$\mathbb{C}$ と森田同値）であるため，そのスペクトラムが空集合となるものは用途が限定的になる．実は，完全素イデアル（$ab \in P$ ならば $a \in P$ または $b \in P$）全体のなす集合をスペクトラムと考えたものが関手的なスペクトラムの例になっているが，$n \geq 2$ に対して $M_n(\mathbb{C}) = \emptyset$ である．

注意 3.12. 完全素イデアルの代わりに素イデアルを使うべきという発想は，テンソル三角圏のスペクトラムにおいても有効である．Balmer [Bal05] は対称テンソル三角圏に対するスペクトラムを定義し，いくつかのテンソル thick 部分圏の分類を統一する見方を与えた．このスペクトラムは現在では Balmer スペクトラムとよばれており，このスペクトラムを用いた理論は tt-geometry（tensor trinagular geometry）とよばれている（Balmer 自身による概説 [Bal20] がある）．

対称テンソル三角圏 $\mathcal{T}$ に対して，thick 部分圏 $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$ であって，$\mathcal{T} \otimes \mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ を満たすものを **thick テンソルイデアル**とよぶ．thick テンソルイデアル $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{T}$ が**素**（prime）であるとは，$X \otimes Y \in \mathcal{P}$ ならば $X \in \mathcal{P}$ または $Y \in \mathcal{P}$ を満たすことをいう．$\mathcal{T}$ の素 thick テンソルイデアル全体の集合を $\mathcal{T}$ の **Balmer スペクトラム**とよぶ．すなわち，可換環に対する加法部分群，イデアル，素イデアルの概念が，対称テンソル三角圏における thick 部分圏，イデアル，素イデアルに対応している．

一方，finite tensor category のように，対称とは限らない重要なテンソル三角圏もある．この場合に上記の Balmer スペクトラムの定義をそのまま用いる（ただしイデアルは両側イデアルにする）と完全素イデアルの概念に対応するが，Nakano-Vashaw-Yakimov [NVY22] は，素 thick テンソルイデアルの条件を $X \otimes \mathcal{T} \otimes Y \in \mathcal{P}$ ならば $X \in \mathcal{P}$ または $Y \in \mathcal{P}$ に変更した非可換 Balmer スペクトラムを考え，その後 [NVY24] において，finite tensor category のコホモロジー環の圏論的中心（categorical center）との関係を考察している．

なお，可換環 R に対する有界導来圏 $\mathrm{D^b}(\operatorname{mod} R)$ や特異圏 $\mathrm{D^{sg}}(R)$，非可換環の導来圏のように，テンソル構造を持つとは限らない重要な三角圏もある．この場合のスペクトラムは Matsui [Mat21] によって，素 thick 部分圏を用いて定義されており，**Matsui スペクトラム**とよばれている．テンソル構造を持つ三角圏に対しても，一般に Matsui スペクトラムは Balmer スペクトラムよりも複雑な構造を持つ．Hirano-Ouchi [HO22] は楕円曲線 E に対して，$\mathrm{D^b}(\operatorname{coh} E)$ の Matsui スペクトラムを決定している．

4 関手圏のスペクトラム

R を環とする．ここでは，有限表示右加群全体のなす圏 $\operatorname{mod} R$ からアーベル群全体のなす圏 Ab への加法的関手全体のなす圏 $(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ を考え（これを本稿では単に**関手圏**とよぶ），その Gabriel スペクトラムについて考察する．$\operatorname{mod} R$ は一般に無限直和を持たない「小さい」圏だが，Ab が無限直和を持つ「大きい」圏であるため，$(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ も「大きい」圏であることに注意する．

関手 $F \in (\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ が**有限表示**であるとは，

$$\mathrm{Hom}(M_1, -) \to \mathrm{Hom}(M_0, -) \to F \to 0$$

$(M_0, M_1 \in \operatorname{mod} R)$ という完全列を持つことをいう．有限表示関手全体のなす $(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ の部分圏を $\mathrm{fp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ と表す．

注意 4.1. 任意の環 R に対して，$(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ は局所連接 Grothendieck 圏である（Auslander [Aus66]）．その連接対象全体のなす部分圏は $\mathrm{fp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ である．

したがって定理 3.7 より，$\mathrm{fp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ の Serre 部分圏は $\mathrm{Sp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ の Ziegler 開集合と 1 対 1 に対応する．

有限表示右 R 加群の圏 $\operatorname{mod} R$ の関手圏と，有限表示左 R 加群の圏 $\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}$ の関手圏[*7]には，次のような Auslander-Gruson-Jensen **双対**がある．

定理 4.2 (Auslander [Aus86], Gruson-Jensen [GJ81])**.** 環 R に対して，反変同値

$$d\colon \mathrm{fp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{fp}(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$$

が次のように定まる：$F \in \mathrm{fp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ に対して，$dF \in \mathrm{fp}(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ を，任意の $L \in \operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}$ に対して

$$(dF)(L) := \mathrm{Hom}(F, - \otimes_R L)$$

とおくことで定める．d の擬逆関手も同様の形で定義される．

この反変同値は，次のようにテンソル関手と Hom 関手を入れ替える：

- 任意の $N \in \operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}$ に対して，$d(- \otimes_R N) \cong \mathrm{Hom}_R(N, -)$.
- 任意の $M \in \operatorname{mod} R$ に対して，$d(\mathrm{Hom}_R(M, -)) \cong M \otimes_R -$.

反変同値によって Serre 部分圏は Serre 部分圏に写るので，定理 3.7 と定理 4.2 を組み合わせることで次が得られる：

系 4.3. $\mathrm{Sp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ の Ziegler 開集合と，$\mathrm{Sp}(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ の Ziegler 開集合は，1 対 1 に対応する．

このことから，$\mathrm{Sp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ と $\mathrm{Sp}(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ の間に同相写像があるのではないかと期待したくなるが，これは筆者の知る限り未解決である．もし $\mathrm{Sp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ が Ziegler 位相に関し

[*7] R^{op} は，R の積を逆にして定義される**反転環**（opposite ring）を表す．右 R^{op} 加群を考えることと左 R 加群を考えることは同じである．

て T_0 空間（任意の 2 点が位相的に識別可能）であるならば，このことは容易に従うが，一般に $\mathrm{Sp}(\mathrm{mod}\,R, \mathrm{Ab})$ は T_0 空間ではないことが知られている．詳細は [Pre09, §5.4] を参照されたい．

注意 4.4. 定理 4.2 は関手圏に関する定理だが，加群のモデル理論における双対性の帰結でもある．

環 R に対して，pp-formula とよばれる，R 加群の元の組を自由変数とする論理式 ϕ を考えると，任意の加群 M に対して，ϕ を満たすような加群の元の組の集合 $F_\phi(M) \subset M^n$ が定まり，これは M^n の加法部分群となる．同じ個数の自由変数を持つ 2 つの pp-formula ϕ, ψ が，任意の R 加群 M に対して $F_\psi(M) \subset F_\phi(M)$ を満たすとき，組 ϕ/ψ を pp-pair とよぶ．任意の pp-pair ϕ/ψ に対して，対応 $M \mapsto F_\phi(M)/F_\psi(M)$ は有限表示関手 $\mathrm{mod}\,R \to \mathrm{Ab}$ を定め，すべての有限表示関手 $\mathrm{mod}\,R \to \mathrm{Ab}$ は同型を除いてこの形で表せる．

各 pp-formula ϕ に対して，その elementary dual とよばれる pp-formula $D\phi$ が定まる．pp-pair ϕ/ψ に対しては，その dual として $D\psi/D\phi$ を考えることができ，この対応が定理 4.2 の反変同値を導く．詳細については [Pre09] を参照されたい．([KN22, §8] に簡潔なまとめがある．)

一般に，加群圏のスペクトラム $\mathrm{Sp}(\mathrm{Mod}\,R)$ よりも関手圏のスペクトラム $\mathrm{Sp}(\mathrm{mod}\,R, \mathrm{Ab})$ の方がはるかに大きいが，純移入加群の概念を用いると，関手圏のスペクトラムを加群の言葉で記述することができる．

定義 4.5. R を環とする．

(1) 右 R 加群の短完全列
$$0 \to L \to M \to N \to 0$$
が**純完全列**（pure exact sequence）であるとは，任意の左 R 加群 W に対して，誘導される列
$$0 \to L \otimes_R W \to M \otimes_R W \to N \otimes_R W \to 0$$
が（アーベル群の）完全列であることをいう．

(2) 右 R 加群 Q が**純移入加群**（pure-injective module）であるとは，任意の右 R 加群の純完全列
$$0 \to L \to M \to N \to 0$$
に対して，誘導される列
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N, Q) \to \mathrm{Hom}_R(M, Q) \to \mathrm{Hom}_R(L, Q) \to 0$$
が（アーベル群の）完全列であることをいう．

定義より自明に，任意の移入加群は純移入加群である．

例 4.6. R を可換環とし，A を（可換ともネーターとも限らない）R 代数とし，E を移入 R 加群とする．任意の右 A 加群 M に対して，
$$M^* := \mathrm{Hom}_R(M, E) \in \mathrm{Mod}\,A^{\mathrm{op}}$$
は純移入左 A 加群である（[Pre09, Proposition 4.3.29] を参照）．

特に，K が体，A が有限次元 K 代数であるとき，K-dual を $(-)^* = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ で表すと，任意の $M \in \mathrm{mod}\,A$（有限次元加群）に対して，同型 $M \xrightarrow{\sim} M^{**}$ が存在するので，M は純移入加群である．

考察 4.7. 任意の $M \in \operatorname{Mod} R$ に対して，関手 $M \otimes_R -\colon \operatorname{mod} R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ を与える対応は，忠実充満関手 $\operatorname{Mod} R \to (\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ を定める．これを制限することで，純移入右 R 加群のなす部分圏と，移入対象からなる $(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ の部分圏の間の同値が得られる（[Pre09, §12.1.1] を参照）．

したがって，直既約純移入右 R 加群の同型類と，$(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ の直既約移入対象の同型類は 1 対 1 に対応する．後者のなす集合は関手圏のスペクトラム $\operatorname{Sp}(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ に他ならない．

直既約純移入 R 加群の同型類の集合を，R の Ziegler **スペクトラム**とよぶ．[*8]

例 4.6 からも分かるように，与えられた環 R に対して，一般に，純移入加群は非常に多く存在するので，R の Ziegler スペクトラム全体を描写することは容易ではない．一方で，移入加群は純移入加群の特別な場合なので，Matlis の対応（定理 3.3）は可換ネーター環 R に対して，Ziegler スペクトラムの一部を素イデアルを用いて描写したものと見なせる．この直既約移入加群の全体に，定理 4.2 の反変同値を用いて得られる部分は，直既約純移入加群であって平坦（flat）であるものの全体である：

定理 4.8 (Herzog [Her93, Corollary 9.6])**.** R を右ネーター環とする．[*9]このとき，直既約移入右 R 加群の同型類と，直既約平坦純移入左 R 加群の同型類は 1 対 1 に対応する．

Auslander-Gruson-Jensen 双対（定理 4.2）は $\operatorname{Sp}(\operatorname{mod} R, \mathrm{Ab})$ と $\operatorname{Sp}(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ の間の全単射を誘導するわけではないが，Herzog は，直既約移入加群がなす前者の部分集合と，直既約平坦純移入加群がなす後者の部分集合の間には全単射が誘導されることを示し，定理 4.8 を得た．ところがこの対応は具体的ではなかったため，直既約平坦純移入加群が具体的にどのような形であるかという問題が残った．

平坦純移入加群の分類に関する先行結果はそれほど多くないが，可換ネーター環の場合には，以下のように記述できることが知られていた．

定理 4.9 (Enochs [Eno84])**.** R を可換ネーター環とするとき，

$$M = \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \operatorname{Hom}_R(E_R(\mathfrak{p}), E_R(\mathfrak{p})^{\oplus B_{\mathfrak{p}}})$$

の形の加群が，平坦純移入 R 加群の同型類のすべてである．ここで各 $B_{\mathfrak{p}}$ は集合であり，その濃度は M の同型類によって一意に定まる．（$E_R(\mathfrak{p})^{\oplus B_{\mathfrak{p}}}$ は，$E_R(\mathfrak{p})$ のコピーを $B_{\mathfrak{p}}$ の濃度だけ直和したものを表す．）

したがって，直既約平坦純移入 R 加群の同型類は

$$\operatorname{Hom}_R(E_R(\mathfrak{p}), E_R(\mathfrak{p})) = \widehat{R_{\mathfrak{p}}}$$

（$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$）という形である．ここで $\widehat{R_{\mathfrak{p}}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ の $\mathfrak{p}$ 進完備化を表す．

Kanda-Nakamura [KN22] ではこの結果を非可換なネーター代数に一般化した．主張を述べるための準備をしよう．R を可換ネーター環，A をネーター R 代数とし，$f\colon R \to A$ を代数構造を与え

[*8] もともとは Ziegler [Zie84] が加群のモデル理論の文脈で導入した概念である．Herzog [Her97] は局所連接 Grothendieck 圏 $\mathcal{C}$ の直既約移入対象の同型類全体のなす位相空間を $\mathcal{C}$ の Ziegler スペクトラムとよんでいるが，これは考察 4.7 を踏まえたものである．すなわち，（Herzog の意味での）$(\operatorname{mod} R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ は，（Ziegler の意味での）R の Ziegler スペクトラムと同一視できる．これらは $\operatorname{Mod} R$ の Ziegler スペクトラムではないことに注意．

[*9] [Her93] ではより一般的な状況で述べている．また，右連接環（特に右ネーター環およびネーター代数）に対しては，平坦純移入左加群と平坦余ねじれ左加群（flat cotorsion module）は同じ概念となる（[KN22, §2.1] を参照）．

る環準同型とするとき，任意の素イデアル $P \subset A$ に対して，$P \cap R := f^{-1}(P)$ は R の素イデアルとなる．また，命題 3.9 より A は右 FBN 環であり，P に対応する直既約移入右 A 加群 $I_A(P)$ で表される．

定理 4.10 (Kanda-Nakamura [KN22, Theorem 1.1, Proposition 5.4])**.** R を可換ネーター環，A をネーター R 代数とするとき，

$$M = \prod_{P \in \operatorname{Spec} A} \operatorname{Hom}_R(I_A(P), E_R(R/(P \cap R))^{\oplus B_P})$$

の形の加群が，平坦純移入左 A 加群の同型類のすべてである．ここで各 B_P は集合であり，その濃度は M の同型類によって一意に定まる．

したがって，直既約平坦純移入左 A 加群の同型類は

$$T_{A^{\mathrm{op}}}(P) := \operatorname{Hom}_R(I_A(P), E_R(P \cap R))$$

（$P \in \operatorname{Spec} A$）という形である．

直既約移入加群 $I_A(P)$ と直既約平坦純移入加群 $T_{A^{\mathrm{op}}}(P)$ の対応が，Herzog の対応（定理 4.8）の具体的な記述を与えることも分かる．また，可換ネーター環の場合の類似として，完備化を用いて直既約平坦純移入左 A 加群を計算することもできる：

命題 4.11 (Kanda-Nakamura [KN22, Proposition 5.2])**.** R を可換ネーター環，A をネーター R 代数とする．任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対して，左 A 加群の直既約分解

$$\widehat{A_{\mathfrak{p}}} \cong \bigoplus_{\substack{P \in \operatorname{Spec} A \\ P \cap R = \mathfrak{p}}} T_{A^{\mathrm{op}}}(P)^{n_P}$$

が存在する．ここで，$\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の $\mathfrak{p}$ 進完備化であり，正整数 n_P は $E_A(A/P) \cong I_A(P)^{n_P}$ によって決定される．

例 4.12. R を可換ネーター環とし，下三角行列環 $A = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}$ を考えると，A はネーター R 代数である．各 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対して，

$$\widehat{A_{\mathfrak{p}}} \cong \begin{pmatrix} \widehat{R_{\mathfrak{p}}} \\ \widehat{R_{\mathfrak{p}}} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{R_{\mathfrak{p}}} \end{pmatrix}$$

が左 A 加群としての直既約分解を与えるので，直既約平坦純移入左 A 加群の同型類は

$$\begin{pmatrix} \widehat{R_{\mathfrak{p}}} \\ \widehat{R_{\mathfrak{p}}} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{R_{\mathfrak{p}}} \end{pmatrix}$$

（$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$）で，すべて与えられる．

参考文献

[AN82] H. Andréka and I. Németi, *Direct limits and filtered colimits are strongly equivalent in all categories*, Universal algebra and applications (Warsaw, 1978), Banach Center Publ., vol. 9, PWN, Warsaw, 1982, pp. 75–88. MR 738804

[AR94] Jiří Adámek and Jiří Rosický, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR 1294136

[Aus66] Maurice Auslander, *Coherent functors*, Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965), Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966, pp. 189–231. MR 212070

[Aus86] Maurice Auslander, *Isolated singularities and existence of almost split sequences*, Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1178, Springer, Berlin, 1986, pp. 194–242. MR 842486

[Bal05] Paul Balmer, *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*, J. Reine Angew. Math. **588** (2005), 149–168. MR 2196732

[Bal20] Paul Balmer, *A guide to tensor-triangular classification*, Handbook of homotopy theory, CRC Press/Chapman Hall Handb. Math. Ser., CRC Press, Boca Raton, FL, 2020, pp. 145–162. MR 4197984

[Bra18] Martin Brandenburg, *Rosenberg's reconstruction theorem*, Expo. Math. **36** (2018), no. 1, 98–117. MR 3780029

[Con00] Brian Conrad, *Grothendieck duality and base change*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1750, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR 1804902

[Eno84] Edgar Enochs, *Flat covers and flat cotorsion modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), no. 2, 179–184. MR 754698

[Gab62] Pierre Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448. MR 232821

[GJ81] L. Gruson and C. U. Jensen, *Dimensions cohomologiques reliées aux foncteurs* $\varprojlim^{(i)}$, Paul Dubreil and Marie-Paule Malliavin Algebra Seminar, 33rd Year (Paris, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 867, Springer, Berlin, 1981, pp. 234–294. MR 633523

[Her93] Ivo Herzog, *Elementary duality of modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), no. 1, 37–69. MR 1091706

[Her97] Ivo Herzog, *The Ziegler spectrum of a locally coherent Grothendieck category*, Proc. London Math. Soc. (3) **74** (1997), no. 3, 503–558. MR 1434441

[HO22] Yuki Hirano and Genki Ouchi, *Prime thick subcategories on elliptic curves*, Pacific J. Math. **318** (2022), no. 1, 69–88. MR 4460228

[Hop87] Michael J. Hopkins, *Global methods in homotopy theory*, Homotopy theory (Durham, 1985), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 117, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, pp. 73–96. MR 932260

[IK24] Osamu Iyama and Yuta Kimura, *Classifying subcategories of modules over Noetherian algebras*, Adv. Math. **446** (2024), Paper No. 109631, 62. MR 4736586

[Kan15] Ryo Kanda, *Specialization orders on atom spectra of Grothendieck categories*, J. Pure Appl. Algebra **219** (2015), no. 11, 4907–4952. MR 3351569

[Kan22] Ryo Kanda, *Integrality of noetherian Grothendieck categories*, J. Algebra **592** (2022), 233–299. MR 4342508

[KN22] Ryo Kanda and Tsutomu Nakamura, *Flat cotorsion modules over Noether algebras*, Doc. Math. **27** (2022), 1101–1167. MR 4458029

[Kra97] Henning Krause, *The spectrum of a locally coherent category*, J. Pure Appl. Algebra **114** (1997), no. 3, 259–271. MR 1426488

[Mat58] Eben Matlis, *Injective modules over Noetherian rings*, Pacific J. Math. **8** (1958), 511–528. MR 99360

[Mat21] Hiroki Matsui, *Prime thick subcategories and spectra of derived and singularity categories of noetherian schemes*, Pacific J. Math. **313** (2021), no. 2, 433–457. MR 4323421

[MR01] J. C. McConnell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, revised ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 30, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, With the cooperation of L. W. Small. MR 1811901

[Nee92] Amnon Neeman, *The chromatic tower for $D(R)$*, Topology **31** (1992), no. 3, 519–532, With an appendix by Marcel Bökstedt. MR 1174255

[NVY22] Daniel K. Nakano, Kent B. Vashaw, and Milen T. Yakimov, *Noncommutative tensor triangular geometry*, Amer. J. Math. **144** (2022), no. 6, 1681–1724. MR 4521050

[NVY24] Daniel K. Nakano, Kent B. Vashaw, and Milen T. Yakimov, *On the spectrum and support theory of a finite tensor category*, Math. Ann. **390** (2024), no. 1, 205–254. MR 4800913

[Pap02] Christopher J. Pappacena, *The injective spectrum of a noncommutative space*, J. Algebra **250** (2002), no. 2, 559–602. MR 1899866

[Pre09] Mike Prest, *Purity, spectra and localisation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 121, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. MR 2530988

[Rey10] Manuel L. Reyes, *A one-sided prime ideal principle for noncommutative rings*, J. Algebra Appl. **9** (2010), no. 6, 877–919. MR 2748128

[Rey12] Manuel L. Reyes, *Obstructing extensions of the functor Spec to noncommutative rings*, Israel J. Math. **192** (2012), no. 2, 667–698. MR 3009738

[Sai25] Shunya Saito, *Classifying torsionfree classes of the category of coherent sheaves and their Serre subcategories*, J. Pure Appl. Algebra **229** (2025), no. 1, Paper No. 107799, 34. MR 4795692

[Ste14] Greg Stevenson, *Subcategories of singularity categories via tensor actions*, Compos. Math. **150** (2014), no. 2, 229–272. MR 3177268

[SW11] Donald Stanley and Binbin Wang, *Classifying subcategories of finitely generated modules over a Noetherian ring*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), no. 11, 2684–2693. MR 2802159

[Tak08] Ryo Takahashi, *Classifying subcategories of modules over a commutative noetherian ring*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), no. 3, 767–782. MR 2456904

[Tho97] R. W. Thomason, *The classification of triangulated subcategories*, Compositio Math. **105** (1997), no. 1, 1–27. MR 1436741

[Zie84] Martin Ziegler, *Model theory of modules*, Ann. Pure Appl. Logic **26** (1984), no. 2, 149–213. MR 739577

一般型超曲面の部分多様体に関する いくつかの結果

阿部　健　（同志社大学　理工学部）

1　はじめに

本稿は第 70 回代数学シンポジウム（2025 年 8 月 26-29 日，九州大学西新プラザ）において行った講演の内容をまとめたものである．

1960 年代に小林昭七は双曲性という概念を導入した．Lang は，複素微分幾何的概念である双曲性が代数的に言い換えられる，という予想を提示した．この予想は未解決であるが，Lang の予想を通じて，双曲性に関する問題の代数類似を考えることが出来るようになる．小林は双曲性を導入した際，いくつもの興味深い問題を提示した．そのうちの一つが超曲面予想と呼ばれるもので，その主張は，射影空間内の次数が大きい generic な超曲面は双曲的であろう，というものである．これの代数的類似を Ein は 90 年頃に証明した．この報告書の内容は，Ein の結果のその後の発展に関するものである．

2　序

複素多様体 X 上には小林擬距離と呼ばれる擬距離が定義され，これが距離になるとき X は小林双曲的であるといわれる．複素平面 $\mathbb{C}$ から X への正則写像が定値写像しかないとき，X は Brody 双曲的であるといわれる．小林双曲的なら Brody 双曲的である．X がコンパクトのときは逆も成り立ち，二つの双曲性は同値になる (cf. [Kob98])．以下コンパクトな場合を主に扱うので,「小林」と「Brody」を区別せず単に双曲的という．

例. 種数 g のコンパクトリーマン面が双曲的 $\Longleftrightarrow g \geq 2$.

1次元の場合は複素微分幾何的概念である双曲性と代数幾何的概念である一般型が一致するが，高次元の場合は一致しない．実際，次元が2以上の非特異複素射影多様体 X の1点 blow-up$\widetilde{X}$ を考えると，$\widetilde{X}$ は $\mathbb{P}^1$ を含むので双曲的でない．

Lang は次の予想をした [Lang]．複素微分幾何的性質である双曲性が代数的に言い換えられるであろう，という予想である．

予想 2.1 (Lang 予想)**.** 非特異複素射影多様体 X が双曲的 $\Longleftrightarrow$ X の全ての *subvariety* は一般型.

この予想2.1は未解決である．知られている結果として，X が曲面のとき「$\Rightarrow$」は成り立つ（cf. [Lang, p190]）．また，X がアーベル多様体の部分多様体であるとき，予想2.1は成り立つ（cf. [Kaw]).

小林は [Kob70] で次の予想をした（正確には問題として提示した）．

予想 2.2. 複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内の次数が大きい *generic* な超曲面は双曲的か?

予想2.2が現れたのは1970年だが，解決には時間を要し，ようやく2010年代に Siu [Siu], Brotbek [Brot] によって肯定的に解決された．

予想2.2内の「双曲的」という部分を，予想2.1の双曲的性質の代数的言い換えで置き換えることによって，予想2.2の代数版を考えることができるが，この代数版は1990年ごろに Ein によって証明されている．ここでは Voisin による改良された形で定理を紹介する．

定理 2.1 ([Ein], [V96], [V98])**.** $X \subset \mathbb{P}^n$ を *very general* な d 次超曲面とし，$Y \subset X$ を X の k 次元 *subvariety* とする．

(1) $d \geq 2n - k$ なら Y は一般型である．

(2) $d \geq 2n - k - 1$ なら Y の幾何種数は正である．すなわち，$\widetilde{Y} \to Y$ が特異点解消のとき $\mathrm{H}^0(\widetilde{Y}, K_{\widetilde{Y}}) \neq 0$ である．

定理2.1(1)が予想2.2の代数版に相当する部分である．定理2.1(2)より特に，次数 $d \geq 2n-2$ の very general な超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ は有理曲線を持たないことが分かる．これは best possible である．実際，次数 $d \leq 2n-3$ の超曲面は line を含む．

次節以降では定理2.1のその後の展開を見ていく．

3 Green-Griffiths-Lang 予想とその代数版

超曲面の双曲性のみに考察を限定してしまうと，前節まででで話は終わってしまうのであるが，代数幾何的には，定理 2.1 で次数 d が小さくなるとどうなるか，というのは興味ある問題である．この方向性の見通しを得るために Green-Griffiths-Lang 予想を思い出しておく．

予想 3.1 (Green-Griffiths-Lang 予想)**.** 非特異複素射影多様体 X が一般型のとき，*Zariski* 閉な真部分集合 $Z \subsetneq X$ が存在し，任意の非定値正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ の像 $f(\mathbb{C})$ は Z に含まれる．

予想 3.1 は $X \setminus Z$ が Brody 双曲的と言っている．$X \setminus Z$ はコンパクトではないから，$X \setminus Z$ に対して予想 2.1 を当てはめることは出来ないのであるが，$X \setminus Z$ に対して形式的に予想 2.1 を当てはめて得られる次の主張が予想されている（ように筆者には思われる）．

予想 ♣. 非特異複素射影多様体 X が一般型のとき，Zariski 閉な真部分集合 $Z \subsetneq X$ が存在し，Z に含まれない任意の subvariety $Y \subset X$ は一般型である．

上の二つの予想は，X がアーベル多様体 A の部分多様体の場合は，$Z =$ (X に含まれる部分アーベル多様体の平行移動の和集合) としてして成立する（cf. [Kaw]）．

定理 2.1(1) より，次数 $d \geq 2n-1$ の very general な超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ に対しては，予想 ♣ は $Z = \emptyset$ として成立することが分かる．次数 d に関する条件を緩くして $d \geq \frac{3n+3}{2}$ の場合も，次の Clemens-Ran による定理により予想 ♣ が成り立つことが分かる．

定理 3.1 ([CR])**.** $X \subset \mathbb{P}^n$ を *very general* な d 次超曲面とし，$Z :=$ (X に含まれる *line* の和集合) とおく．$Y \subset X$ を k 次元 *subvariety* とする．

(1) $d \geq \frac{3n-k}{2} + 2$ で Y が一般型でないなら，$Y \subset Z$ である．

(2) $d \geq \frac{3n-k}{2} + 1$ で Y の幾何種数が 0 なら，$Y \subset Z$ である．

定理 3.1(2) より，次数 $d \geq \frac{3n+1}{2}$ の very general な超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ 内の有理曲線 C は $Z :=$ (X に含まれる line の和集合) に含まれることが分かる．これだけでは，C 自身が line かどうかは分からないが，Riedl-Yang [RY] は C 自身が line であることを示した．Coskun-Riedl [CR22] は少し不等式の評価を改善して，$d \geq \frac{3n}{2}$ のときに very general な d 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$

内の有理曲線は line であることを示した．この評価はほぼ best possible である．実際，次数 $d \leq \frac{3n}{2} - 1$ の超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ は conic を含む．超曲面内の有理曲線については次の Voisin による予想があることに注意しておく．

予想 3.2 ([V03]). 次数 $d \geq n+2$ の *very general* な超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ 内の有理曲線の次数は有界である．

次の節では，定理 3.1 を二つの方向に発展させた結果を紹介する．

4　いくつかの結果

まず，定理 3.1 で次数 d が更に小さくなる場合について考えてみる．次の定理は定理 3.1(2) の一般化である．

定理 4.1 ([A23]). $d > \frac{7n}{5} + \frac{18-2k}{5}$ とする．$X \subset \mathbb{P}^n$ を *very general* な d 次超曲面，$Y \subset X$ を k 次元の *subvariety* とする．このとき，Y の幾何種数が 0 なら，Y は *line* や *conic* の和集合である．

系 4.2. 次数 $d > \frac{7n+16}{5}$ の *very general* な超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ 内の有理曲線は *line* または *conic* である．

注意. 定理 3.1(1) の一般化はまだ無い．

定理 4.1 の d に関する不等式が best possible かどうかは分からない．conic の次に「簡単な」有理曲線は twisted cubic であるように思えて，次元を勘定すると，次数 $d < \frac{4n}{3}$ の超曲面は twisted cubic を含むと期待される．そこで次のことが気になる．

問題 4.3. $\frac{7n+16}{5} \geq d \geq \frac{4n}{3}$ のとき，very general な超曲面 $X \subset \mathbb{P}^n$ 内に，line や conic 以外の有理曲線が存在するか？

また，定理 4.1 では結論が，$Y \subset$ (X に含まれる line や conic の和集合) ではなく，Y 自身が line や conic の和集合であると主張されている．そこで次の疑問も生じてくる．

問題 4.4. 次数 $d \geq n+2$ の very general な超曲面内の幾何種数 0 の subvariety は uniruled か？

次に定理 3.1 の対数版について紹介する．まずは予想 $\clubsuit$ の対数版から始める．

予想 $\clubsuit^{\log}$. X を非特異複素射影多様体，$D \subset X$ を単純正規交差因子とし，$K_X + D$ が big であるとする．このとき，Zariski 閉な真部分集合 $Z \subsetneq X$ が存在し，$D \cup Z$ に含まれない任意の subvariety $Y \subset X$ に対し，対 $(Y, Y \cap D)$ は対数的一般型である．

ここで「対数的一般型」とは，$g : \widetilde{Y} \to Y$ が対 $(Y, Y \cap D)$ の log resolution のとき，$K_{\widetilde{Y}} + g^{-1}(Y \cap D)$ が big ということである．

$X = \mathbb{P}^n$ の場合に，まず次のことが知られている．

定理 4.5 ([PR]). *$D \subset \mathbb{P}^n$ を very general な d 次超曲面とする．$d \geq 2n + 2 - k$ のとき，k 次元 subvariety $Y \subset \mathbb{P}^n$ が D に含まれないならば，対 $(Y, Y \cap D)$ は対数的一般型である．*

すなわち，この場合は $Z = \emptyset$ で予想 $\clubsuit^{\log}$ が成り立っている．$Z = \emptyset$ と取れる場合に限定すると，上の定理は best possible である．実際，$d = 2n$ のとき，line $l \subset \mathbb{P}^n$ で $|l \cap D| \leq 2$ となるものが存在することが知られている．

Chen-Riedl-Yeong は $d = 2n$ の場合を調べた．

定理 4.6 ([CRY]). *$d = 2n$ とし，$D \subset \mathbb{P}^n$ を very general な d 次超曲面とする．このとき，Zariski 閉な真部分集合 $Z \subsetneq \mathbb{P}^n$ が存在し，$D \cup Z$ に含まれない任意の曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ に対して，不等式*

$$2g(\widetilde{C}) - 2 + \left|\mu^{-1}(C \cap D)\right| \geq a \deg C$$

が成り立つ．ここで $\mu : \widetilde{C} \to C$ は正規化で，

$$a = \begin{cases} 1 & n \geq 3 \\ \frac{1}{2} & n = 2, \end{cases}$$

である．また，$n = 2$ のときは，$Z = ($union of bitangent and flex lines to $D)$ と取れる．

次が定理 3.1 の対数版である．

定理 4.7 ([A24]). *$D \subset \mathbb{P}^n$ を very general な d 次超曲面，$Y \subset \mathbb{P}^n$ を D に含まれない k 次元 subvariety とし，$g : \widetilde{Y} \to Y$ を対 $(Y, Y \cap D)$ の log resolution とする．*

(1) $d \geq \frac{3n-k}{2}+2$ のとき，もし $K_{\widetilde{Y}}+g^{-1}(Y \cap D)$ が *big* でないなら，Y は $|l \cap D| \leq 2$ または $l \subset D$ となる直線 $l \subset \mathbb{P}^n$ たちの和集合である．

(2) $d \geq \frac{3n-k}{2}+1$ のとき，もし $\mathrm{H}^0\left(\widetilde{Y}, \mathcal{O}(K_{\widetilde{Y}}+g^{-1}(Y \cap D))\right)=0$ なら，Y は $|l \cap D| \leq 1$ または $l \subset D$ となる直線 $l \subset \mathbb{P}^n$ たちの和集合である．

これより，$D \subset \mathbb{P}^n = X$ が very general な次数 $d \geq \frac{3n+1}{2}$ の超曲面のとき，

$$Z=\overline{(\text{union of lines that intersect } D \text{ in at most 2 points})}$$

として，予想 $\clubsuit^{\log}$ が成り立つことが分かる．

5　証明の概略

この節では，定理 4.1 と定理 4.7 の証明のポイントを述べる．いずれの証明も定理 3.1 の証明が下地になっている．そして，定理 3.1 の証明は Ein の定理（定理 2.1 の仮定の不等式が 1 だけ強くなっているもの）を発展させたものである．そこでまずは，Ein の定理の証明の筋道を思い出すことにする．

Ein の定理

$X \subset \mathbb{P}^n$ が very general な次数 $d \geq 2n+1-k$ の超曲面のとき，X の任意の k 次元 subvariety $Y \subset X$ は一般型である．

Ein の定理の証明の概略．証明のアイデアは normal bundle の正値性を示すことである．$S \subset \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \setminus \{0\}$ を Zariski 開集合とする（S は以下の議論で必要に応じて小さく取り直す）．$\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times S$ を次数 d の非特異超曲面の universal family とする．$\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ を k 次元 subvariety の family とする．

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{Y} \subset \mathcal{X} & \subset & \mathbb{P}^n \times S & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & S & & \end{array}$$

という状況である．簡単のため，$\mathcal{Y}$ は S 上 smooth とする．また，$\mathcal{X}$ や $\mathcal{Y}$ は $\mathbb{P}^n$ 上 smooth と仮定する．我々は $Y_s \subset X_s$ $(s \in S)$ が一般型であるこ

とを示したい．そのために

$$\mathrm{H}^0(Y_s, K_{Y_s}(-1)) \neq 0 \tag{1}$$

を示す．短完全列

$$0 \to T_{Y_s} \to T_{X_s}|_{Y_s} \to N_{Y_s/X_s} \to 0,$$

より

$$K_{Y_s} = K_{X_s}|_{Y_s} \otimes \det N_{Y_s/X_s} = \mathcal{O}_{Y_s}(d-n-1) \otimes \det N_{Y_s/X_s}$$

を得る．(1) を示すには $\det N_{Y_s/X_s} \otimes \mathcal{O}_{Y_s}(d-n-2) \geq 0$ を示せばよい．$N_{Y_s/X_s} \simeq N_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}}\big|_{Y_s}$ であることに注意する．短完全列

$$0 \to T_{\mathcal{Y}} \to T_{\mathcal{X}}|_{\mathcal{Y}} \to N_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}} \to 0,$$

があるが，いま $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ は $\mathbb{P}^n$ 上 smooth と仮定しているので，

$$0 \to T_{\mathcal{Y}/\mathbb{P}^n} \to T_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^n}|_{\mathcal{Y}} \to N_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}} \to 0,$$

を得る．正整数 k に対して，$\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束 $\mathcal{M}^k_{\mathbb{P}^n}$ を完全列

$$0 \to \mathcal{M}^k_{\mathbb{P}^n} \to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) \to 0.$$

によって定義する．すると，$T_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^n} \simeq q^*\mathcal{M}^d_{\mathbb{P}^n}$ となる．ただし， $q : \mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times S \to \mathbb{P}^n$ である．よって，我々は全射

$$q^*\mathcal{M}^d_{\mathbb{P}^n}\big|_{\mathcal{Y}} \to N_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}} \tag{2}$$

を得る．この全射を通じて $\mathcal{M}^d_{\mathbb{P}^n}$ が有している正値性から $N_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}}$ の正値性を導こうというわけである．$\mathbb{P}^n$ 上に全射

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \otimes \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{M}^d_{\mathbb{P}^n}. \tag{3}$$

があるので，(2) と (3) より（ファイバー Y_s に制限して）全射

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d-1)) \otimes \mathcal{M}^1_{\mathbb{P}^n}\big|_{Y_s} \twoheadrightarrow N_{Y_s/X_s}. \tag{4}$$

を得る．$\mathcal{M}^1_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ は globally generated なので，上の全射性より $N_{Y_s/X_s} \otimes \mathcal{O}(1)$ も globally generated となる．外積を取って，$\big(\det N_{Y_s/X_s}\big) \otimes \mathcal{O}(n-1-k)$ も globally generated となる．いま $n-1-k \leq d-n-2 \quad (\because d \geq 2n+1-k)$ なので，

$$\big(\det N_{Y_s/X_s}\big) \otimes \mathcal{O}_{Y_s}(d-n-2) \geq 0$$

となる．これが示したかったことである． □

Clemens-Ran は Ein の議論を発展させて定理 3.1 を証明した．証明の流れは次の様である．

- もし $X_s \supset Y_s$ が一般型ではないとすると，general な点 $y \in Y_s$ に対して，canonical に定まる $(n-2)$ 次元の線形系 $L_y \subset |\mathcal{I}_y(1)| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|$（それは y を通る line l_y に対応する）を見つけることができる．さらに，$|l_y \cap X_y| \le 2$ または $l_y \subset X_s$ が成り立つことも示せる．
- 3 つ組のモジュライ空間

$$\left\{ (X,p,l) \middle| \begin{array}{l} X \subset \mathbb{P}^n \text{ は } d \text{ 次超曲面，} l \text{ は line，} p \text{ は点} \\ \text{ただし，} \ p \in l \cap X \text{ かつ } |l \cap X| = 2 \text{ (or 1)} \end{array} \right\},$$

  を考えることにより $l_y \subset X_s$ であることを示す．

最後に定理 4.1 と定理 4.7 の証明のポイントを簡単に述べる．いずれの定理の証明も基本的には，上で述べた Clemens-Ran の定理の証明を踏襲するので，証明において新たに必要となる議論についてだけ言及する．

定理 4.1 の証明では $X_s \supset Y_s$ の幾何種数が 0 とのき，general な点 $y \in Y_s$ に対して，canonical に定まる点 y を通る 2 次超曲面の線形系 $L_y \subset |\mathcal{I}_y(2)| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)|$ を見つける．点 y を通る超平面の線形系は点 y を含む射影部分空間と対応するが，一般には点 y を通る 2 次超曲面の線形系が y を含む図形と対応するとは期待できない．ところが今の場合は，線形系 L_y の固定点集合 $\mathrm{Bs}(L_y)$ を調べることで，点 y を通る conic を見つけることができる．

定理 4.7 の証明では，まず図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \mathcal{D} \subset \mathbb{P}^n \times S \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^n \\ \mathcal{Y} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{Y} \arrow[urr, hook] & & S & \end{tikzcd}$$

を考える．$(Y_s, Y_s \cap D_s)$ が対数的一般型ではないとき，general な点 $y \in Y_s$ に対して，canonical に定まる line $y \in l_y \subset \mathbb{P}^n$ を見つけることができる．ここまでは Clemens-Ran の議論と同じなのであるが，Clemens-Ran の証明と異なり，定理 4.7 ではアプリオリには $|l_y \cap D_s|$ の評価が得られないのである．

Chen-Riedl-Yeong [CRY] は次のことを観察した．

Chen-Riedl-Yeong の観察：　general な点 $y, y' \in Y_s$ に対し，点付き直線 (l_y, y) and $(l_{y'}, y')$ 上の次数 d の因子 $l_y \cap D_s$, $l_{y'} \cap D_s$ は同値である：

$$\begin{array}{ccc} y & \leftrightarrow & y' \\ \pitchfork & & \pitchfork \\ l_y & \simeq & l_{y'} \\ \cup & & \cup \\ l_y \cap D_s & \leftrightarrow & l_{y'} \cap D_s. \end{array}$$

そこで定理 4.7 の証明では点付き直線 (l_0, p_0) とその上の次数 d の因子 $E_0 \subset l_0$ を固定して，3 つ組のモジュライ空間

$$\left\{ (D, p, l) \middle| \begin{array}{l} D \subset \mathbb{P}^n \text{ は } d \text{ 次超曲面}, l \text{ は line}, p \text{ は } l \text{ の点で}, \\ (l, p) \text{ 上の因子 } l \cap D \text{ は } (l_0, p_0) \text{ 上の因子 } E_0 \text{ と同値} \end{array} \right\},$$

を考えることにより $|l_y \cap D_s| \leq 2$ を導くことになる．論文 [A24] ではこのモジュライ空間のコンパクト化とその標準因子の計算が主要部分である．

謝辞

本研究は，JSPS 科研費 JP22K03232. の助成を受けています.

参考文献

[A23] T. Abe : *Subvarieties of geometric genus zero of a very general hypersurface*, Algebr. Geom. 10 (2023), no. 1, 41-86.

[A24] T. Abe : *Subvarieties of a very general logarithmic projective space*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 129 (2024), no. 2, Paper No. e12621, 35 pp.

[Brot] D. Brotbek : *On the hyperbolicity of general hypersurfaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 126 (2017), 1-34.

[CR] H. Clemens and Z. Ran: *Twisted genus bounds for subvarieties of generic hypersurfaces*, Amer. J. Math. 126 (2004), no. 1, 89-120; erratum, Amer. J. Math. 127 (2005), no. 1, 241-242.

[CR22] I. Coskun and E. Riedl: *Clustered families and applications to Lang-type conjectures*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 125 (2022), no. 6, 1353–1376.

[CRY] X. Chen, E. Riedl and W. Yeong : *Algebraic hyperbolicity of complements of generic hypersurfaces in projective spaces* , arXiv:2208.07401v1.

[Ein] L. Ein : *Subvarieties of generic complete intersections. II*, Math. Ann. 289 (1991), no. 3, 465-471.

[Kaw] Y. Kawamata : *On Bloch's conjecture*, Invent. Math. 57 (1980), no. 1, 97-100.

[Kob70] S. Kobayashi : *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Pure Appl. Math., 2 Marcel Dekker, Inc., New York, 1970, ix+148 pp.

[Kob98] S. Kobayashi : *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren Math. Wiss., 318 Springer-Verlag, Berlin, 1998. xiv+471 pp.

[Lang] S. Lang : *Hyperbolic and Diophantine analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 14 (1986), no. 2, 159-205.

[PR] G. Pacienza and E. Rousseau : *On the logarithmic Kobayashi conjecture*, J. Reine Angew. Math. 611 (2007), 221-235.

[RY] E. Riedl and D. Yang : *Rational curves on general type hypersurfaces*, J. Differential Geom. 116 (2020), no. 2, 393-403.

[Siu] Y. -T. Siu : *Hyperbolicity of generic high-degree hypersurfaces in complex projective space* Invent. Math. 202 (2015), no. 3, 1069-1166.

[V96] C. Voisin; *On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces*, J. Differential Geom. 44 (1996), no. 1, 200-213;

[V98] C. Voisin: *A correction: "On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces"*, J. Differential Geom. 49 (1998), no. 3, 601-611.

[V03] C. Voisin: *On some problems of Kobayashi and Lang; algebraic approache*, Current developments in mathematics, 2003, 53-125.

Gauss 超幾何モチーフとそのアデール的実現

大坪 紀之 *

1 超幾何関数と数論

「超幾何」という用語は 17 世紀に Wallis によって使われ始めた．幾何級数

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

を一般化し, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で係数比 a_{n+1}/a_n が n の有理式であるものを**超幾何級数**と呼ぶ．例えば, べき関数 $(1-x)^{-a}$，多重対数関数 $\mathrm{Li}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ $(k \in \mathbb{N})$，指数関数 e^x，三角関数 $\sin x$ などは超幾何級数で表せる．

超幾何関数は最もよく知られた特殊関数の族であり, 数学のさまざまな局面で現れるのみならず, 物理学や計算数学 (π の高速計算など) でも重要な役割を果たしている．超幾何関数論の発展には Euler, Gauss, Kummer, Ramanujan らが大きな貢献をしており, 超幾何関数論と数論との関わりは深い．

1.1 Gauss 超幾何関数

複素数 a, b, c $(c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0})$ をパラメータとする **Gauss 超幾何級数**は次で定義される:

$$F(a,b;c;x) = {}_2F_1\left({a, b \atop c}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(1)_n (c)_n} x^n,$$

ここで, **Pochhammer 記号** (上昇階乗べき)

$$(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \prod_{i=0}^{n-1} (a+i).$$

この級数は $|x|<1$ で収束して **Gauss 超幾何関数**を定める．同様に, p 個 (q 個) の分子 (分母) パラメータをもつ**一般超幾何関数** ${}_pF_q\left({a_1, \ldots, a_p \atop b_1, \ldots, b_q}; x\right)$ が定義される ($p = q+1$ の場合が正則型である)．

超幾何関数は

- 代数的: 級数表示

* 千葉大学大学院理学研究院 otsubo@math.s.chiba-u.ac.jp

- 解析的: 微分方程式の解
- 幾何的: 積分表示

という「三位一体」をもち, これが超幾何関数論を非常に豊かなものにしている. 超幾何関数の諸公式については, 例えば [9, Chapters 15, 16] を参照とする.

1.2 超幾何微分方程式

Gauss 超幾何関数 $F(a,b;c;x)$ は 2 階の常微分方程式

$$\big[D(D+c-1)-x(D+a)(D+b)\big]y=0,\quad D:=x\frac{d}{dx}$$

の解である. これは次のようにも書ける:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{c}{x}-\frac{a+b+1-c}{1-x}\right)\frac{d}{dx}-\frac{ab}{x(1-x)}\right]y=0.$$

よって, $x=0,1,\infty$ が正則特異点であり, もう一つの独立解は

$$F(a,b;a+b+1-c;1-x)$$

で与えられる. また, 関数 $F(a,b;c;x)$ は $\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$ 上の多価関数に解析接続される.

微分方程式の比較により, 非常に多くの変換公式や積公式が示される. 例えば:

$$F(2a,2b;a+b+1;x)=F\left(a,b;a+b+1;1-(1-2x)^2\right). \tag{Gauss}$$

$$(1+8x)^{3a}F\left(4a,4a+1;\frac{4a+5}{2};x\right)=F\left(a,a+1;\frac{2a+5}{2};64x\left(\frac{1-x}{1+8x}\right)^3\right). \tag{Goursat}$$

他の諸公式やそれらの証明については, [11] を参照とする.

1.3 超幾何関数の積分表示

ガンマ関数とベータ関数は $\mathrm{Re}(s),\mathrm{Re}(s_i)>0$ のとき次で定義される:

$$\Gamma(s):=\int_0^\infty e^{-t}t^s\,\frac{dt}{t},\quad B(s_1,s_2):=\int_0^1 t^{s_1}(1-t)^{s_2}\frac{dt}{t(1-t)}.$$

ベータ関数はガンマ関数に分解する:

$$B(s_1,s_2)=\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}$$

Gauss 超幾何関数は次の **Euler 型の積分表示**をもつ: $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0$ のとき,

$$B(b,c-b)F(a,b;c;x)=\int_0^1(1-xt)^{-a}t^b(1-t)^{c-b}\frac{dt}{t(1-t)}.$$

ここで, $(1-x)^{-a} = {}_1F_0(a;x)$ であることに注意する. 上と同様に, ${}_1F_0(x)$ にベータ積分を累次的に施して, ${}_{q+1}F_q(x)$ を得る.

上の積分表示で $x=1$ としてベータ関数をガンマ関数に分解することで, **Euler-Gauss の和公式** (特殊値公式) を得る: $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ のとき,

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

ほかにも, 多くの特殊値公式が知られている. 例えば:

$$F(2a,b;2a-b+1;-1) = \frac{\Gamma(2a-b+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(2a+1)\Gamma(a-b+1)} \quad (\mathrm{Re}(b)<1). \tag{Kummer}$$

$$\pi = 4F\left(1,\frac{1}{8};\frac{9}{8};\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{2}F\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{5}F\left(1,\frac{5}{8};\frac{13}{8};\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{6}F\left(1,\frac{3}{4};\frac{7}{4};\frac{1}{16}\right). \tag{Bailey-Borwein-Plouffe 1995}$$

後者は π を 100 兆桁まで計算するのに用いられた (Iwao, 2022).

1.4 数論幾何学における基本的な予想

代数体上の代数多様体 (またはモチーフ) の L 関数は数論における中心的な対象の一つである. とくにその整数点における特殊値について, Birch-Swinnerton-Dyer, Deligne, Beilinson, Bloch-Kato らによる予想があるが, 部分的にでも示されている例は少なく, 一般的なアプローチは知られていない. これらの予想は, L 関数の特殊値という解析的な対象を周期やレギュレーターなどの幾何的不変量で記述するものであり, Dirichlet の解析的類数公式を一般化するものである.

L 関数の特殊値や周期, レギュレーター (または Mahler 測度, Abel-Jacobi 写像) が超幾何関数を用いて記述される例がいくつか知られている.

- Riemann ゼータ関数 :

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} = {}_{k+1}F_k\left(\begin{matrix}1,1,\dots,1\\ 2,\dots,2\end{matrix};1\right) \quad (k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}).$$

- Dirichlet L 関数 : 指標 $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$L(\chi,k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^k} = \sum_{0<a<N}\frac{\chi(a)}{a^k}{}_{k+1}F_k\left(\begin{matrix}1,\frac{a}{N},\dots,\frac{a}{N}\\ \frac{a}{N}+1,\dots,\frac{a}{N}+1\end{matrix};1\right).$$

- Fermat 曲線の L 関数の特殊値やレギュレーターの一部は ${}_3F_2(1)$ で記述できる ([13] 参照).
- $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E: y^2 = x^3+4x$ を考える (4 次 Fermat 曲線の商であり, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に虚数乗法をもつ). E の (正確には $h_1(E)$ の) L 関数は次の Euler 積で定義される:

$$L(E,s) = \prod_{p\neq 2:\ \text{素数}}\left(1-a_p p^{-s}+p^{1-2s}\right)^{-1}; \quad a_p := 1+p-\#E(\mathbb{F}_p).$$

このとき, 次が知られている:

$$L(E,1)=\frac{1}{8}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{2}\\ \frac{5}{4}\end{matrix};1\right). \qquad \text{(Damerell 1970)}$$

$$L(E,2)=\frac{\pi}{32}\left(B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\\ \frac{3}{2},\frac{3}{4}\end{matrix};1\right)-B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\\ \frac{3}{2},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right)\right). \qquad \text{(O. 2011 [10], Ito 2018 [5])}$$

$$L(E,3)=\frac{\pi^2}{768\sqrt{2}}\left(3B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right){}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},1,1,1\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{4}\end{matrix};1\right)+12B\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right){}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},1,1,1\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{4}\end{matrix};1\right)\right.$$
$$\left.+B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right){}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{2},1,1,1\\ \frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{7}{4}\end{matrix};1\right)\right). \qquad \text{(Zudilin 2013 [16])}$$

以上の例などから, また虚数乗法をもつモチーフの周期をガンマ関数で記述する Gross-Deligne 予想との類似からも, 超幾何関数論は上記の予想への一つのアプローチを与えるのではないかと期待することができる.

2 有限体上の超幾何関数

2.1 背景

有限体上の超幾何関数は 1980 年代から研究されてきた. 国内では小池正夫氏などの研究があった. 有限体上の超幾何関数にはいくつかの定義がある: Koblitz ('83), Greene ('87), Katz ('90), McCarthy ('12), O. ('24) など (これらの間の関係については [12, Remark 2.13] を参照).

最新の定義 [12] の利点として以下が挙げられる:

- 定義および性質において, $\mathbb{C}$ 上の超幾何関数との類似が明らかである.
- 一般超幾何関数 ${}_pF_q$ で $p \neq q+1$ の場合のような非正則型 (合流型) のものも同様に扱える. それまでは, Kummer の合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ の研究すらなかった.
- 非常に広いクラスの多変数超幾何関数の有限体類似 (非正則型を含む) も同様に扱える: Nakagawa [7], [8], Ito-Kumabe-Nakagawa-Nemoto [6] など.

有限体上の超幾何関数は,

- 変換公式, 積公式,
- 積分表示の類似となる和表示,
- 特殊値公式,

の全てにおいて, $\mathbb{C}$ 上の超幾何関数と類似の性質をもつ. 以下では, 定義を述べた後にその一部を紹介する.

2.2 Gauss 和と Jacobi 和

有限体上の超幾何関数は, ガンマ関数・ベータ関数と Gauss 和・Jacobi 和との類似に基づいている. 以下では, $\mathbb{F}$ を位数 q の有限体とし, 非自明な加法指標 $\psi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{C}^\times$ を固定する (指数関数の類似).

乗法指標 φ, $\varphi_i \in \widehat{\mathbb{F}^\times} = \mathrm{Hom}(\mathbb{F}^\times, \mathbb{C}^\times)$ に対して, **Gauss 和**, **Jacobi 和**を次で定義する:

$$g(\varphi) = -\sum_{t\in\mathbb{F}} \psi(t)\varphi(t), \quad j(\varphi_1, \varphi_2) = -\sum_{t\in\mathbb{F}} \varphi_1(t)\varphi_2(1-t) \quad \in \mathbb{C}$$

(便宜上 $\varphi(0) = \varphi_i(0) = 0$ と定める). ガンマ関数・ベータ関数の定義

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}, \quad B(s_1, s_2) = \int_0^1 t^{s_2}(1-t)^{s_2} \frac{dt}{t(1-t)}$$

との類似に注意しよう. また, **$\circ$ つき Gauss 和**を

$$g^\circ(\varphi) = g(\varphi)\ (\varphi \neq 1), \quad g^\circ(1) = q$$

と定める ($g(1) = 1$ に注意). このとき次が成り立つ ($\overline{\varphi} = \varphi^{-1}$) :

$$g(\varphi)g^\circ(\overline{\varphi}) = \varphi(-1)q, \quad j(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{g(\varphi_1)g(\varphi_2)}{g^\circ(\varphi_1\varphi_2)} \quad ((\varphi_1, \varphi_2) \neq (1,1)).$$

よく知られた以下の公式との類似に注意しよう:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad B(s_1, s_2) = \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(s_1+s_2)}.$$

2.3 有限体上の Gauss 超幾何関数

パラメータ $\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{F}^\times}$, 変数 $\lambda \in \mathbb{F}$ をもつ $\mathbb{F}$ **上の Gauss 超幾何関数**を次で定義する:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \lambda) = \frac{1}{1-q} \sum_{\nu \in \widehat{\mathbb{F}^\times}} \frac{(\alpha)_\nu (\beta)_\nu}{(1)^\circ_\nu (\gamma)^\circ_\nu} \nu(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{F}).$$

ここで, ($\circ$ つき) Pochhammer 記号は

$$(\alpha)_\nu := \frac{g(\alpha\nu)}{g(\alpha)}, \quad (\alpha)^\circ_\nu := \frac{g^\circ(\alpha\nu)}{g^\circ(\alpha)}.$$

注意 2.1.

- これは $\mathbb{F}$ から $\mathbb{C}$ への関数だが, 実際は円分体 $\mathbb{Q}(\mu_{q-1})$ に値をとる.
- パラメータは有理数の類似である: $\widehat{\mathbb{F}^\times} \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \simeq \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

- $\mathbb{C}$ 上の超幾何関数において, 1つのパラメータの ± 1 シフトは 1 階の微分作用素に対応する. 例えば, $(D+a)F(a,b;c;x) = aF(a+1,b;c;x)$. 有限体上の超幾何関数において, このシフトに対応するものはない —「微分が消えている」.

より簡単な公式に帰着する例外的な場合を除いて, 例えば以下が成り立つ.

- Gauss の変換公式の類似:
$$F(\alpha^2, \beta^2; \alpha\beta; \lambda) = F\left(\alpha, \beta; \alpha\beta; 1-(1-2\lambda)^2\right).$$
(注意: Goursat の変換公式の類似はまだない.)
- Euler 型積分表示の類似:
$$-j(\beta, \overline{\beta}\gamma)F(\alpha,\beta;\gamma;\lambda) = \sum_{t\in\mathbb{F}} \overline{\alpha}(1-\lambda t)\beta(t)\overline{\beta}\gamma(1-t).$$
注意: $\overline{\alpha}(1-\lambda) = {}_1F_0(\alpha;\lambda)$.
- Euler-Gauss 和公式の類似:
$$F(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{g^\circ(\gamma)g(\overline{\alpha\beta}\gamma)}{g^\circ(\overline{\alpha}\gamma)g^\circ(\overline{\beta}\gamma)}.$$

以上のような類似は, 非正則型の超幾何関数や多変数の超幾何関数に対しても数多く示されている. このことは, これらの定義の正当性を示すとともに, **「共通のモチーフ」**の存在を期待させる.

3 超幾何モチーフ

3.1 モチーフとは

体 k 上の非特異射影代数多様体の圏から次数つき K ベクトル空間 $(\operatorname{char} K = 0)$ の圏へのコホモロジー関手を考える:
$$H\colon \mathbf{SmProj}(k)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}(K).$$
ベクトル空間 V が射影子 $e \in \operatorname{End}(V)$, $e^2 = e$ を持つとき, 分解 $V = eV \oplus (1-e)V$ を得る.

一方で, k 上の K 係数 (Chow) **モチーフの圏** $\mathbf{Mot}(k,K)$ へのモチーフ関手が存在する:
$$h\colon \mathbf{SmProj}(k) \to \mathbf{Mot}(k,K),$$
$$h(f\colon X\to Y) = \operatorname{Graph}(f) \in \operatorname{Hom}(h(X),h(Y)) \coloneqq \mathrm{CH}_{\dim X}(X\times Y)\otimes_{\mathbb{Z}} K.$$
ここで, $\mathrm{CH}_d(X)$ は X 上の d 次元代数的サイクル (modulo 有理同値) のなす群である. 圏 $\mathbf{Mot}(k,K)$ の一般の対象は三つ組
$$M = \left(X \in \mathbf{SmProj}(k),\ e\in \mathrm{CH}_{\dim X}(X\times X)\otimes_{\mathbb{Z}} K\ (e^2=e),\ n\in\mathbb{Z}\right)$$
である (合成 e^2 は交点理論による).

「よい」コホモロジー理論 H は, **実現関手**を経由する:

$$\mathbf{Mot}(k,K)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}(K).$$

基礎体 k が代数体のときに, **Betti 実現** (位相幾何学的), **de Rham 実現** (微分幾何学的), **エタール実現** (Galois 理論的) などを考える. モチーフ M の周期は M の Betti-de Rham 実現から, L 関数は M のエタール実現から定まる.

3.2 モチーフの例

多様体 $X \in \mathbf{SmProj}(k)$ に有限アーベル群 G が作用しているとする. 群環 $K[G]$ (K は十分大) において,

$$1 = \sum_{\chi\in\widehat{G}} e^{\chi}, \quad e^{\chi}e^{\chi'} = \delta(\chi,\chi')e^{\chi}, \quad e^{\chi} := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{-1}(g)g \qquad (\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, K^{\times})).$$

環準同形 Graph: $K[G] \to \mathrm{CH}_{\dim X}(X\times X)\otimes_{\mathbb{Z}} K$ により, モチーフの分解を得る:

$$h(X) = \bigoplus_{\chi\in\widehat{G}} h(X)^{\chi}, \quad h(X)^{\chi} := (X, e^{\chi}, 0).$$

例 3.1 (Artin モチーフ)**.** $k=\mathbb{Q}$, $X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N)$ (円分体), $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_N)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ のとき, 分解

$$h\left(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N)\right) = \bigoplus_{\chi\in\widehat{G}} h\left(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}(\mu_N)\right)^{\chi}.$$

は, Dedekind ゼータ関数の Dirichlet L 関数への分解と対応する:

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\mu_N)} = \prod_{\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}\to\mathbb{C}^{\times}} L(\chi, s).$$

例 3.2 (Fermat モチーフ)**.** N 円分体 $k=\mathbb{Q}(\mu_N)$ 上の N 次 Fermat 曲線 $X_N : x^N + y^N = 1$ (種数は $(N-1)(N-2)/2$ である) には, 群 $G = \mu_N^2$ が自然に作用する. このモチーフは, 指標 $\chi_N^{a,b}(\xi,\eta) = \xi^a\eta^b$ ($a,b\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) によって分解する:

$$h(X_N) = h_0(X_N)\oplus h_1(X_N)\oplus h_2(X_N), \quad h_1(X_N) = \bigoplus_{a,b\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, a,b,a+b\neq 0} X_N^{a,b}.$$

さらに, $a, b, a+b \neq 0$ のとき:

- de Rham コホモロジー $H_{\mathrm{dR}}(X_N^{a,b})$ は 1 次元で, 微分 1 形式 $\omega_N^{a,b} = x^a y^b \frac{dx^N}{x^N y^N}$ の類が生成する.
- 周期の本質的な部分はベータ関数 $\int_{\delta}\omega_N^{a,b} = B\left(\frac{a}{N}, \frac{b}{N}\right)$. ここで, $\delta(t) = (\sqrt[N]{t},\ \sqrt[N]{1-t})$.

- ℓ 進エタールコホモロジー $H_\ell(X_N^{a,b})$ は 1 次元であり, k の素イデアル $\mathfrak{p} \nmid N$ に対して, Frobenius 元 $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$ は Jacobi 和 $j(\varphi_{N,\mathfrak{p}}^a, \varphi_{N,\mathfrak{p}}^b)$ 倍で作用し, L 関数は Jacobi 和 Hecke L 関数

$$L(j_N^{a,b}, s) \coloneqq \prod_{\mathfrak{p} \nmid N} \left(1 - j(\varphi_{N,\mathfrak{p}}^a, \varphi_{N,\mathfrak{p}}^b) q_\mathfrak{p}^{-s}\right)^{-1}.$$

ここで, $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ における剰余体, $\varphi_{N,\mathfrak{p}} \in \widehat{\mathbb{F}_\mathfrak{p}^\times}$ は $\mathfrak{p}$ における N 乗剰余指標, $q_\mathfrak{p} \coloneqq |\mathbb{F}_\mathfrak{p}|$.

このように, ベータ関数と Jacobi 和は単に類似するだけでなく, **共通のモチーフの異なる実現**である. ガンマ関数・ベータ関数の間の関数等式たち, およびそれらと類似する Gauss 和・Jacobi 和の間の関係式たちは, (ほぼ全て) **モチーフの同形に持ち上がる** (O.-Yamazaki [15]). 例えば, ガンマ関数の Legendre-Gauss 積公式, および Gauss 和の Davenport-Hasse 積公式

$$\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(n)} = n^{n(s-1)} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma(s+\frac{i}{n})}{\Gamma(1+\frac{i}{n})}, \quad g(\varphi_N^{na}) = \varphi_N^a(n)^n \prod_{b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, nb=0} \frac{g(\varphi_N^{a+b})}{g(\varphi_N^b)} \quad (n \mid N)$$

を持ち上げるものは次である.

定理 3.3 ([15, Theorem 7.2]). 基礎体 k の標数は N と素であり, $\mu_N \subset k$ とする. 任意の $n \mid N$ に対して,

$$X_N\langle n\rangle^{(a,\dots,a)} \simeq \bigotimes_{b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, nb=0} X_N^{a,b} \quad (a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} - \{0\}).$$

ここで左辺は, $(n-1)$ 次元 Fermat 型多様体 $x_1^N + \cdots + x_n^N = n$ に付随するモチーフである. □

これらの証明では Katsura-Shioda の帰納的構造と, Terasoma による代数対応が重要な役割を果たす. また, 技術的な理由で Voevodsky モチーフの理論を用いる.

例 3.4 (保型形式のモチーフ). レベル $\Gamma_0(N)$ のモジュラー曲線 $X_0(N)$ を考える. 素数 $p \nmid N$ に対して, 射

$$X_0(pN) \to X_0(N) \times X_0(N); \quad (E, C) \mapsto \big((E, C_N), (E/C_p, C/C_p)\big),$$

(E は楕円曲線, $C \subset E$ は位数 pN の巡回部分群, C_N は C の N ねじれ部分群)

の像は **Hecke 代数対応**

$$T_p \in \mathrm{End}(h(X_0(N))) = \mathrm{CH}_1(X_0(N) \times X_0(N)) \otimes_\mathbb{Z} K$$

を定める. これらにより, **保型形式のモチーフ**への分解

$$h_1(X_0(N)) = \bigoplus_{f \in S_2(\Gamma_0(N)):\ \text{正規 Hecke 同時固有}} M(f).$$

を得る (Deligne-Scholl). モチーフ $M(f)$ の ℓ 進エタール・コホモロジーは 2 次元であり, $f = \sum_{n=1}^\infty a_n q^n$ のとき, $M(f)$ の L 関数は保型 L 関数

$$L(f, s) = \prod_{p:\ \text{素数}} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}$$

($p \mid N$ における Euler 因子は要修正) と一致する.

3.3 超幾何モチーフ

上記の Artin モチーフ, Fermat モチーフは階数 1 のモチーフ (可逆モチーフ) であったが, Gauss 超幾何モチーフは保型形式のモチーフと同様に**階数 2 のモチーフ**である.

本稿では, 有理数 A, B, C をパラメータとする Gauss 超幾何関数で, $C = 1$ の場合

$$F(A, B; 1; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (B)_n}{(1)_n (1)_n} \lambda^n$$

に対応するモチーフを中心に紹介する. この関数は**ベータ関数の 1 パラメータ変形**とみなすことができる:

$$F(A, B; 1; 1) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{(1 - \mathbf{e}(A))(1 - \mathbf{e}(B))}{1 - \mathbf{e}(A + B)} B(A, B), \quad \mathbf{e}(x) := e^{2\pi i x}.$$

同様に, 有限体 $\mathbb{F}$ 上の超幾何関数は **Jacobi 和の変形**である: $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ のとき

$$F(\alpha, \beta; 1; 1) = j(\alpha, \beta).$$

基礎体 k は $\mathrm{char}\, k \nmid N$, かつ $\mu_N \subset k$ をみたすとする. 各 $\lambda \in k - \{0, 1\}$ に対して, k 上の**超幾何曲線**を

$$X_{N,\lambda} : (1 - x^N)(1 - y^N) = \lambda x^N y^N$$

で定める (正確には, このアフィン曲線を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ において完備化したもの). このとき:

- 群 $G_N = \mu_N^2$ が作用する.
- 非特異射影曲線で, 種数は $(N - 1)^2$.
- $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 上の曲線族を定める.
- $\lambda = 1$ において, N 次 Fermat 曲線と有理曲線の和に退化する.

注意 3.5. $N = 2$ のとき, Legendre 楕円曲線 $E_\lambda : v^2 = -u(1 - u)(1 - \lambda u)$ への全射が存在する:

$$X_{2,\lambda} \to E_\lambda; \quad (u, v) = \left(-\frac{x^2}{1 - x^2}, \frac{xy}{(1 - x^2) y^2} \right).$$

よく知られているように, E_λ の周期は楕円積分であり, Gauss 超幾何関数 $F(1/2, 1/2; 1; \lambda)$, $F(1/2, 1/2; 1; 1 - \lambda)$ になる.

Fermat モチーフの場合と同様に, 超幾何曲線 $X_{N,\lambda}$ への群 $G_N = \mu_N^2$ の作用を用いて, **超幾何モチーフ**への分解を得る:

$$h(X_{N,\lambda}) = h_0(X_{N,\lambda}) \oplus h_1(X_{N,\lambda}) \oplus h_2(X_{N,\lambda}), \quad h_1(X_{N,\lambda}) = \bigoplus_{(a,b) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2, a,b \neq 0} X_{N,\lambda}^{a,b}.$$

これらのモチーフの Betti-de Rham 実現およびエタール実現としてそれぞれ, $\mathbb{C}$ 上の Gauss 超幾何関数と有限体上の Gauss 超幾何関数が現れる. 以下, $a,b \in \{1,\dots,N-1\}$ とし, $A=a/N$, $B=b/N$ とおく. 次が成り立つ [2]:

- de Rham コホモロジー $H_{\mathrm{dR}}(X^{a,b}_{N,\lambda})$ は 2 次元で, 次の微分 1 形式の類が基底をなす:

$$\omega^{a,b}_N = x^a y^b \frac{dx^N}{x^N(1-x^N)}, \quad \eta^{a,b}_N = (1-y^N)\omega^{a,b}_N.$$

- $\omega^{a,b}_N$ の複素周期の本質的な部分は $F(A,B;1;\lambda)$ および $F(A,B;A+B;1-\lambda)$ であり, $\eta^{a,b}_N$ のそれは $\frac{d}{d\lambda}F(A,B;1;\lambda)$ および $\frac{d}{d\lambda}F(A,B;A+B;1-\lambda)$ である.
- $X^{a,b}_{N,\lambda}$ を $\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$ 上のモチーフ族と見たときの Gauss-Manin 接続は, 超幾何微分方程式 $\left[D^2-\lambda(D+A)(D+B)\right]y=0$ $(D=\lambda\frac{d}{d\lambda})$ である.
- ℓ 進エタールコホモロジー $H_\ell(X^{a,b}_{N,\lambda})$ は 2 次元であり, k の (良い) 素イデアル $\mathfrak{p}\nmid N$ における Frobenius 作用のトレースは $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 上の超幾何関数 $F(\varphi^a_{N,\mathfrak{p}},\varphi^b_{N,\mathfrak{p}};1;\lambda \bmod \mathfrak{p})$ である.
- 付随する L 関数は (悪い素イデアルにおける Euler 因子を除いて)

$$\prod_{\mathfrak{p}\nmid N}\Big(1-F(\varphi^a_{N,\mathfrak{p}},\varphi^b_{N,\mathfrak{p}};1;\lambda \bmod \mathfrak{p})p^{-s}+\varphi^{-a-b}_{N,\mathfrak{p}}(1-\lambda)p^{1-2s}\Big)^{-1}.$$

Frobenius トレースの計算には 2 つの方法がある. 一つは (指標つき) 有理点の個数を数えるもので, Fermat 曲線に対する Weil の方法と同様である. もう一つは Frobenius 代数対応 (およびその転置) を「超幾何代数対応」で表すものであり, Fermat 曲線に対する Coleman の方法と同様である.

注意 3.6. 一般のパラメータ A,B,C をもつ Gauss 超幾何モチーフを定義するには, 超幾何曲線として

$$x_1^N+y_1^N=1, \quad x_2^N+y_2^N=1, \quad \lambda x_1^N x_2^N = y_1^N y_2^N$$

で定義されるものを用いる. この曲線には群 μ_N^4 が作用し, 4 つの指数をもつモチーフが定義される.

3.4 超幾何モチーフの変換公式

$\mathbb{C}$ 上の超幾何関数に対して, 以下の変換公式は基本的である:

$$F(A,B;C;\lambda)=(1-\lambda)^{C-A-B}F(C-A,C-B;C;\lambda). \tag{Euler}$$

$$F(A,B;C;\lambda)=(1-\lambda)^{1-A}F\left(A,C-B;C;\frac{\lambda}{\lambda-1}\right). \tag{Pfaff}$$

これらの有限体類似が存在する: 例外的な場合を除いて,

$$F(\alpha,\beta;\gamma;\lambda)=\overline{\alpha\beta}\gamma(1-\lambda)F(\overline{\alpha}\gamma,\overline{\beta}\gamma,\gamma;\lambda),$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;\lambda)=\overline{\alpha}\gamma(1-\lambda)F\left(\alpha,\overline{\beta}\gamma,\gamma;\frac{\lambda}{\lambda-1}\right).$$

これらはともにモチーフの同形に持ち上がる：

定理 3.7 (モチーフ的 Euler-Pfaff 変換, “$C = 1$” の場合)**.** 任意の $a, b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対して, $\mathbf{Mot}(k, K)$ における以下の同形が存在する:

$$X_{N,\lambda}^{a,b} \simeq K_N\langle 1-\lambda\rangle^{-a-b} \otimes X_{N,\lambda}^{-a,-b},$$
$$X_{N,\lambda}^{a,b} \simeq K_N\langle 1-\lambda\rangle^{-a} \otimes X_{N,\frac{\lambda}{\lambda-1}}^{a,-b}.$$

ここで, $K_N\langle 1-\lambda\rangle^a$ は Kummer 拡大 $k(\sqrt[N]{1-\lambda})/k$ に関する Artin モチーフである. □

4 アデール的超幾何関数

4.1 多様体の射影系

我々はしばしば, 多様体の射影系 $(V_N)_{N\in\mathbb{Z}_{>0}}$ ($M \mid N$ のとき $V_N \to V_M$) を考える:

- 有限体 $V_N = \operatorname{Spec}\mathbb{F}_{p^N}$. 代数多様体 $X/\mathbb{F}_p$ に対して $V_N = X \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^N}$.
- 円分体 $V_N = \operatorname{Spec}\mathbb{Q}(\mu_N)$ – 岩澤理論など.
- Fermat 曲線 $V_N : x^N + y^N = 1$ – 伊原-Anderson 理論など.
- モジュラー曲線 $V_N = X(\Gamma_1(N))$ – 肥田理論など.
- 超幾何曲線 $V_N = X_{N,\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$).

各 V_N のホモロジー的不変量 $H(V_N)$ (例えば円分体のイデアル類群) よりも, それらの逆極限

$$H(V_\infty) \coloneqq \varprojlim_N H(V_N)$$

の方が, 加群としての構造が捉えやすい場合がある.

4.2 アデール的超幾何関数

代数体 k 上の超幾何曲線の射影系 $(X_{N,\lambda})_N$ に対して, アデール的ホモロジー群

$$H_1^{\text{ét}}(\overline{X}_{\infty,\lambda}, \widehat{\mathbb{Z}}) \coloneqq \varprojlim_{N,n} H_1^{\text{ét}}(\overline{X}_{N,\lambda}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \quad \overline{X}_{N,\lambda} \coloneqq X_{N,\lambda} \otimes_k \overline{\mathbb{Q}}$$

を考える. これは完備群環

$$\Lambda = \widehat{\mathbb{Z}}[[G_\infty]] \coloneqq \varprojlim_{N,n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[G_N] \quad (G_N = \mu_N^2)$$

上の加群になる. 絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)$ は $H_1^{\text{ét}}(\overline{X}_{\infty,\lambda}, \widehat{\mathbb{Z}})$ および Λ に作用する. 曲線 $X_{N,\lambda}$ の種数は $(N-1)^2$, よって第 1 Betti 数は $2(N-1)^2 \approx 2N^2$ であることを思い出そう.

定理 4.1 (Λ 自由性 [2, Corollary 3.4])**.** 任意の $\lambda \in k - \{0, 1\}$ に対して, $H_1^{\text{ét}}(\overline{X}_{\infty,\lambda}, \widehat{\mathbb{Z}})$ は階数 2 の自由 Λ 加群である. □

注意 4.2. 素数 l を固定して l 進部分だけを考えることもできる. このとき,

$$\Lambda_{\text{pro-}l} = \mathbb{Z}_l[[G_{l^\infty}]] \coloneqq \varprojlim_{i,j} \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z}[G_{l^j}] \simeq \mathbb{Z}_l[[x,y]] \quad (\text{形式的べき級数環})$$
$$(\zeta_{l^\infty}, 1) \mapsto 1-x,\ (1, \zeta_{l^\infty}) \mapsto 1-y.$$

定義 4.3. $H_1^{\text{ét}}(\overline{X}_{\infty,\lambda}, \widehat{\mathbb{Z}})$ の Λ 基底 $\{\alpha_\infty, \beta_\infty\}$ を選ぶと, 絶対 Galois 群の 1-コサイクル

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k) \to \mathrm{GL}_2(\Lambda); \quad \sigma \mapsto M(\sigma) \text{ s.t. } \sigma(\alpha_\infty, \beta_\infty) = (\alpha_\infty, \beta_\infty)M(\sigma)$$

が定まる (i.e. $M(\sigma\tau) = M(\sigma)\cdot\sigma M(\tau)$). このトレース

$$F_\lambda \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k) \to \Lambda; \quad \sigma \mapsto \operatorname{trace} M(\sigma)$$

を**アデール的超幾何関数**と呼ぶ.

この関数は全ての有限体上の全ての Gauss 超幾何関数 ($C = 1$ 型) を補完する:

定理 4.4 (補完性質 [2, Theorem 4.4])**.** $k \supset \mu_N$ のとき, k の素イデアル $\mathfrak{p} \nmid N$ で λ が $\mathfrak{p}$ 整かつ $\lambda \not\equiv 0, 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ であるもの, および $a, b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} - \{0\}$ に対して,

$$\chi_N^{a,b}(F_\lambda(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})) = 1 \otimes F(\varphi_{N,\mathfrak{p}}^a, \varphi_{N,\mathfrak{p}}^b; 1; \lambda \bmod \mathfrak{p}).$$

ここで, 左辺は $\Lambda \to \widehat{\mathbb{Z}}[G_N] \xrightarrow{\chi_N^{a,b}} \widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}(\mu_N)$ による $F_\lambda(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})$ の像である. □

4.3 アデール的ベータ関数

Fermat 曲線の射影系 $(X_N)_N$ のアデール的ホモロジー群

$$H_1^{\text{ét}}(\overline{X}_\infty, \widehat{\mathbb{Z}}) = \varprojlim_{N,n} H_1^{\text{ét}}(\overline{X}_N, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

は階数 1 の自由 Λ 加群であり, その基底 γ_∞ を選ぶと, 1-コサイクル

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k) \to \Lambda^\times = \mathrm{GL}_1(\Lambda); \quad \sigma \mapsto B(\sigma) \text{ s.t. } \sigma\gamma_\infty = B(\sigma)\gamma_\infty$$

が定まる. これが Anderson-Ihara の**アデール的ベータ関数** ([1], [4]) であり, 全ての有限体上の全ての Jacobi 和を補完するものである.

これまでに紹介した超幾何的対象の $\lambda = 1$ における特殊化をまとめると以下の通りである：

$$\begin{cases} \mathbb{C}\text{ 上の超幾何関数} \to \text{ベータ関数}, \\ \text{有限体上の超幾何関数} \to \text{Jacobi 和}, \\ \text{超幾何曲線・超幾何モチーフ} \to \text{Fermat 曲線・Fermat モチーフ}, \\ \text{アデール的超幾何関数} \to \text{アデール的ベータ関数}. \end{cases}$$

4.4 アデール的超幾何関数の変換公式

Euler-Pfaff 変換公式はモチーフのレベルで存在するので, その実現であるエタール・コホモロジー群の同形を導き, アデール的超幾何関数の Euler-Pfaff 変換公式 [2, Theorem 4.6] を導く: $k \supset \mu_N$, $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ のとき,

$$\chi_N^{a,b}(F_\lambda(\sigma)) = K_{N,1-\lambda}^{-a-b}(\sigma)\chi_N^{-a,-b}(F_\lambda(\sigma)),$$
$$\chi_N^{a,b}(F_\lambda(\sigma)) = K_{N,1-\lambda}^{-a}(\sigma)\chi_N^{a,-b}(F_{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(\sigma)) \quad (\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)).$$

ここで, $K_{N,1-\lambda}$ は Kummer 拡大 $k(\sqrt[N]{1-\lambda})/k$ が定める Galois 指標である.

アデール的超幾何関数の変換公式があれば, それは特殊化によって有限体上の超幾何関数の変換公式を導く. 逆に補完性質と Chebotarev 密度定理によって, 有限体上の超幾何関数の変換公式からアデール的超幾何関数の変換公式が導くことができる. 例えば, Gauss 変換公式 ($C = 1$ の場合)

$$F(2A, -2A; 1; x) = F\left(A, -A; 1; 1-(1-2x)^2\right)$$

のアデール版が成り立つ [2, Theorem 4.8]: $k \supset \mu_N$, $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ のとき

$$\chi_N^{2a,-2a}(F_\lambda(\sigma)) = \chi_N^{a,-a}(F_{1-(1-2\lambda)^2}(\sigma)) \quad (\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/k)).$$

4.5 課題

今後の課題として, 以下のような問題が挙げられる.

超幾何モチーフについて:

- 正則型の一般超幾何関数 ${}_{q+1}F_q$ に対応する (q 次元) モチーフは例 3.6 と同様に構成ができる. その期待される性質 (コホモロジーの次元など) を示す必要がある.
- 非正則型の場合は, 代数多様体から構成するモチーフではなく「指数モチーフ」になるが, それらについて理解を深めたい. この場合でも有限体上では, Artin-Schreier 曲線を用いることでモチーフを構成できるだろう [8] 参照).
- さまざまな変換公式 (Gauss, Goursat, など) および積公式をモチーフの同形に持ち上げる.

アデール的超幾何関数について:

- 一般化された超幾何曲線 (例 3.6) の射影系のアデール的ホモロジー群の Λ 自由性 (階数 4) を示す. すると, $\mathbb{C}$ 上の関数 $x^D F(A+D, B+D; C+D; x)$ ($A, B, C, D \in \mathbb{Q}$) と対応する, 4 変数のアデール的超幾何関数が定義できる.
- アデール的ベータ関数の l 進成分を $\mathbb{Z}_l[[x, y]]$ の元と見たとき (注意 4.2), その展開係数には円単数が現れる (伊原予想: Ihara-Kaneko-Yukinari, Anderson, Coleman が証明). アデール的超幾何関数の l 進成分の展開係数を調べる.
- Furusho による l 進超幾何関数 [3] との関係を調べる.

謝辞

本シンポジウムでの講演の機会をくださった世話人の皆様に感謝いたします．本研究は JSPS 科研費 24K06682 の援助を受けています．

参考文献

[1] G. W. Anderson, The hyperadelic gamma function, Invent. Math. **95** (1989), no.1, 63–131.

[2] M. Asakura and N. Otsubo, The adelic Gaussian hypergeometric function, preprint, arXiv:2408.08012.

[3] H. Furusho, The l-adic hypergeometric function and associators, Tunisian J. Math. **5** (2023), No. 1, 1–29.

[4] Y. Ihara, Profinite braid groups, Galois representations, and complex multiplications, Ann. Math. **123** (1986), no. 1, 43–106.

[5] R. Ito, The Beilinson conjectures for CM elliptic curves via hypergeometric functions, Ramanujan J. **45** (2018), (2) 433–449.

[6] R. Ito, S. Kumabe, A. Nakagawa and Y. Nemoto, Kampé de Fériet hypergeometric functions over finite fields, Res. Number Theory **9:52** (2023).

[7] A. Nakagawa, Appell-Lauricella hypergeometric functions over finite fields and algebraic varieties, Hokkaido Math. J. **53(2)** (2024), 307–347.

[8] A. Nakagawa, Symmetry of hypergeometric functions over finite fields and geometric interpretation, preprint, arXiv:2505.05858.

[9] NIST Digital Library of Mathematical Functions, `https://dlmf.nist.gov/`

[10] N. Otsubo, Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions, J. Number Theory **131** (2011), 648–660.

[11] N. Otsubo, A new approach to hypergeometric transformation formulas, Ramanujan J. **55** (2021), 793–816.

[12] N. Otsubo, Hypergeometric functions over finite fields, Ramanujan J. **63** (2024), 55–104.

[13] 大坪紀之, フェルマー曲線と一般超幾何関数, 第 55 回代数学シンポジウム報告集, 2010, `https://www.mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp10.html`

[14] N. Otsubo and T. Senoue, Product formulas for hypergeometric functions over finite fields, Res. Number Theory, **8:80** (2022).

[15] N. Otsubo and T. Yamazaki, Motivic Gauss and Jacobi sums, arXiv:2402.06072, to appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse.

[16] W. Zudilin, Period(d)ness of L-values, *Number Theory and Related Fields: In Memory*

of Alf van der Poorten (J. M. Borwein et al. eds.), Springer Proc. in Math. & Stat. **43**, 381-395.

Riemann 球面上の有理型線型微分方程式とルート系

廣恵一希 *

Abstract

微分方程式の特異点の合流/開折操作は古典的な研究手法ですが現在でも重要な研究対象である．本稿では Riemann 球面上の有理型の線形微分方程式に対して，特異点の合流/開折による微分方程式の退化を考え，「特異点の合流/開折による微分方程式の退化の族は，スペクトル型と呼ばれる微分方程式の局所データの組み合わせ的構造によって記述される」とした大島利雄氏による予想を出発点として，複素簡約代数群の構造論やルート系の概念がどのように微分方程式の特異点とその変形（合流）に関連するのかを解説する．

Introduction

線形微分方程式の不確定特異点の研究において，特異点の合流操作は古典的に重要な研究手法として知られています．例えば，Gauss の超幾何微分方程式の特異点の合流によって，Kummer の合流型超幾何微分方程式や，Hermite-Weber, Airy といった不確定特異点を持つ微分方程式が得られることはよく知られています．本稿では高々不分岐不確定特異点を考えることとして，Airy の微分方程式は除外して，これらの微分方程式の退化の様子を図示すると次のようになります．

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Gauss}} \arrow[r] & \boxed{\text{Kummer}} \arrow[r] & \boxed{\text{Hermite-Weber}} \end{tikzcd}$$

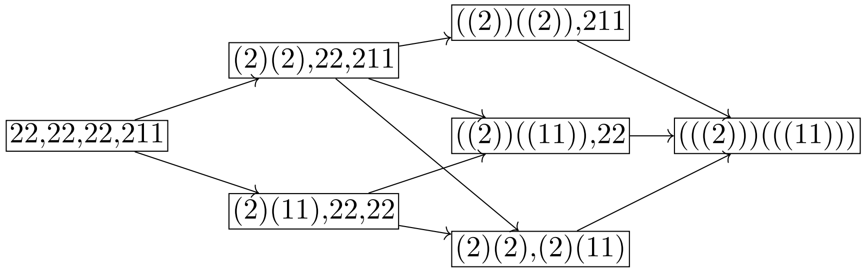
また，アクセサリーパラメーターを持つ微分方程式として知られる Heun の微分方程式に対しても，下の図のような特異点の合流による微分方程式の退化族が知られており，モノドロミー保存変形を通じた Painlevé 方程式の退化の観点からも盛んに研究されています．

$$\begin{tikzcd} & & \boxed{\text{biconfluent Heun}} \arrow[dr] & \\ \boxed{\text{Heun}} \arrow[r] & \boxed{\text{confluent Heun}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{\text{triconfluent Heun}} \\ & & \boxed{\text{doubly-confluent Heun}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

アクセサリー・パラメーターは Riemann 球面上の微分方程式の研究の上で非常に重要な量と考えられており，上の Gauss の方程式はアクセサリー・パラメーターが 0 個の方程式の典型例として知られていて，次の Heun の方程式はアクセサリー・パラメーターを 1

*千葉大学大学院理学研究院 数学・情報数理学研究部門, kazuki@math.s.chiba-u.ac.jp

個[1]もつ方程式の典型例です．そうした中で，川上-坂井-中村は Painlevé 方程式の高次元化の文脈から 4 次元の相空間をもつモノドロミー保存変形方程式の分類を考え，その研究過程で 4 個のアクセサリー・パラメーターを持つ線形微分方程式ついての系統的な退化のリストを構成しました [6].



上の図は川上-坂井-中村のリストから一例を取り上げたものです．左端の箱の中にある

$$22, 22, 22, 211$$

についてもう少し説明します．これは自然数 4 の分割の 4 つの組みと思うことができて，対応する微分方程式は Riemann 球面上に 4 つの確定特異点を持つ 4 階の微分方程式です．すなわち，方程式の階数である自然数 4 の分割が，方程式の特異点の個数である 4 個並んでいるという具合です．

さて確定特異点近傍の同値類は局所モノドロミー行列の共役類や，冪級数解の特性指数によって分類されることを思い出しましょう．その上で 4 の分割は特性指数あるいはモノドロミー行列の固有値の重複を表すと考えます．すなわち 4 の分割

$$211$$

はこの確定特異点近傍では解空間の次元である 4 次元のうち，特性指数が同じ級数解が 2 つあり，その他に特性指数が異なる解が 1 つずつ合計 4 次元の解空間を生成していいることを意味しています．こうした特性方程式の根（特性指数）の重なりを表す自然数の分割の組を**スペクトル型**と呼びます．

古典的な例である Gauss や Heun の方程式は 2 階の方程式だったので，こうした特性指数の重複というものは意味を持たない（特性指数が重複すると，特異点はゲージ変換で除去できる）ため，これまであまり考えられてきませんでした．しかし，アクセサリー・パラメータを複数個もつような一般の微分方程式の研究が進むにつれて，特性指数（モノドロミー行列の固有値）の重複度はアクセサリー・パラメータの個数を決める重要な不変量として認識されるようになってきました．

その他の記号の詳細に関しては原論文を参照してもらい，これと等価な対応物を本稿でも後に導入します．例えば $((2))((11)), 22$ などは不確定特異点の特性方程式の重根の様子を表し，括弧の個数で不確定度の深さを表現しています．このように上の図式は，スペクトル型 $22, 22, 22, 211$ を持つ Fuchs 型微分方程式から出発して，特異点の合流によって得られる不確定特異点型の微分方程式たちを，対応するスペクトル型によって表すものです．また図の矢印は，微分方程式たちが特異点の合流によってつながっていることを意味します．

さて上の図を眺めていると，自然数 4 の分割の 4 つ組 $22, 22, 22, 211$ から出発して，この分割に対する何らかの組み合わせ的な操作がこの退化図式の背後にあるのが感じ取れるかと思います．詳細は後に回しますが，実際この川上-坂井-中村による微分方程式の退化の図式は，微分方程式の特異点の合流とは全く独立に, 自然数 4 の分割の組 $22, 22, 22, 211$ の組み合わせ的な考察によって再構成することが出来ます．このことから次のような問いを立ててみましょう．

[1] 1 階の行列型微分方程式として書くと 2 個のアクセサリーパラメーターを持ちます.

Question 0.1. 自然数 n の勝手な分割の組

$$m_{1,1}\ \ldots\ m_{1,k_1},\ m_{2,1}\ \ldots\ m_{2,k_2},\ \ldots,\ m_{r,1}\ \ldots\ m_{r,k_r} \qquad \left(n=\sum_{j=1}^{k_i} m_{i,j},\ i=1,\ldots,r\right)$$

に対して，川上-中村-坂井の退化図式を形式的に得ることができる．一方でこの形式的な退化図式を実現するような，Riemann 球面上の有理型線形微分方程式は存在するのだろうか．

この素朴な問いは大島利雄氏によって数学的に定式化され，論文 [10], [11] において予想として提出されました．本稿ではこの大島氏の予想について解説し，またその解決に向けて複素簡約 Lie 群の構造論やルート系が本質的な役割を果たすことを説明したいと思います．

以下に予想の解決に向けた戦略を非常に雑にですが述べることにします．上の問いは

$$\boxed{\text{自然数 } n \text{ の分割の組の退化}} \overset{?}{\longleftrightarrow} \boxed{\text{微分方程式の特異点の合流}}$$

という対応関係について問うています．この対応を考える際に鍵となる基本戦略は吉田正章氏によって提出された以下の問題になります．

Problem 0.2 (吉田 [13][2]). m 個の特異点をもつ n 階線型 Fuchs 型微分方程式と，それらから合流操作で得られる方程式とを合わせた全体 X(あるいは適当な部分) を適当な同値関係で割ったもの $X/\sim$ に解析構造を入れること

すなわち特異点の合流/開折による微分「方程式」の変形の問題を，微分方程式たちのなす「空間」（微分方程式のアクセサリーパラメーター（モジュライ）の空間）の変形族を幾何学的に構成する問題としてとらえなおし

$$\boxed{\text{自然数 } n \text{ の分割の組の退化}} \overset{?}{\longleftrightarrow} \boxed{\text{微分方程式のモジュライ空間の変形}}$$

という対応関係を構築すること目標とします．この対応を与える鍵は Lie 群の表現論ではよく知られた

$$\boxed{\text{自然数 } n \text{ の分割の組}} \overset{!!}{\longleftrightarrow} \boxed{\mathrm{GL}_n \text{ の放物型部分群}}$$

という関係です．この関係から，自然数 n の分割の組の退化によって，この放物型部分群たちの包含列が構成されるのですが，これを通じて最終的に

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{自然数 } n \text{ の分割の組の退化}} & \longleftrightarrow & \boxed{\text{放物型部分群の包含列}} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\boxed{\text{モジュライ空間の変形}} & \longleftrightarrow & \boxed{\text{微分方程式の特異点の合流}}
\end{array}$$

という対応を構成するのが本稿での戦略になります．

[2]若林功氏によってまとめられた諸問題のうちの一つ．

1　スペクトル型

本節ではスペクトル型の定義を与えます．微分方程式 $d/dz\, Y = A(z)Y$, $A(z) \in M_n(\mathbb{C}(z))$ が $z=0$ に確定特異点を持つことは，ある $g(z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\!(z)\!))$ による変換で

$$g(z)A(z)g(z)^{-1} + \left(\frac{d}{dz}g(z)\right)g(z)^{-1} = \frac{A}{z}, \quad (A \in M_n(\mathbb{C}))$$

と方程式の係数行列を単純極に変換できることと同値であったことを思い出しましょう．このとき特に方程式 $d/dz\, Y = A(z)Y$ の $z=0$ の局所同型類は $e^{2\pi i A}$ の共役類によって一意的に特徴づけることができます．すなわち変換後の留数行列 A の Jordan 標準型が微分方程式の局所同型類を決定することになります．これから定義するスペクトル型とはこの A の Jordan 細胞の大きさや，それらの数を数えるための有限個のデータからなり，微分方程式の局所同型類のある種のラベルの役割を果たすものです．

さて，これを拡張して不確定特異点の形式的局所同型類を特徴づける標準型を与えるのが福原-Turrittin 理論です．福原-Turrittin 理論は Babbitt-Varadarajan によって一般の複素線形代数群に拡張がなされているので，彼らの手法に沿って不確定特異点の局所形式論の復習をしましょう．

G を連結な複素簡約線形代数群として，$\mathfrak{g}$ でその Lie 環を表します．適当な GL_N への埋め込み $\rho\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}_N$ を固定します．$\mathcal{R}$ を形式的べき級数環 $\mathbb{C}[\![z]\!]$，あるいは形式的 Laurent 級数体 $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ のいずれかとします．このとき写像 $\delta_G\colon G(\mathcal{R}) \to \mathfrak{g}(\mathcal{R})$ であって

$$d\rho(\delta_G(g)) = \left(\frac{d}{dz}\rho(g)\right)\rho(g)^{-1} \quad (g \in G(\mathcal{R}))$$

を満たすものが存在します（例えば [2] を参照）．ここで $\mathrm{GL}_N(\mathcal{R})$ には $\mathcal{R}$ の微分構造によって d/dz が自然に定義され，また実は δ_G は G の埋め込みに依存しません．

ここで $\mathfrak{g}$-値形式的微分形式 $A\,dz$, $A \in \mathfrak{g}(\mathcal{R}) := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{R}$ を $\mathcal{R}$ 上の**形式的有理型** G **接続**と呼び，それらの間の変換を $g \in G(\mathcal{R})$ に対して，

$$g \cdot A\,dz := \mathrm{Ad}(g)(A)\,dz + \delta_G(g)\,dz \tag{1}$$

と定め**ゲージ変換**と呼びます．

確定特異点の場合にゲージ変換で定数行列 A を留数に持つ接続 $A/z\,dz$ に変換できたように，不確定特異点を持つ場合も，以下の「標準型」に必ず変換できるというのが，福原[7]，Turrittin[12]，Levelt[9] による標準化 ($G = \mathrm{GL}_N$)，そして Babbitt-Varadarajan[2](一般の複素線形代数群) による標準化として知られています．

Definition 1.1 (標準形)**.** $H \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z)\!))$ は次のように表されるとき，**福原-*Turrittin-Levelt-Babbitt-Varadarajan*の標準形**，あるいは単に標準形と呼ばれる．すなわち，H は

$$H\,dz = \left(\sum_{i=1}^{k} H_i z^{-i} + H_{\mathrm{res}}\right)\frac{dz}{z}$$

と表され，各 $H_i, i = 1, \ldots, k$ は半単純で，$[H_i, H_j] = 0$, $[H_i, H_{\mathrm{res}}] = 0$ を満たす．

留数の H_{res} は一般には半単純である必要はないので，$H_{\mathrm{res}} = H_0 + H_{\mathrm{nil}}$ で半単純部分 H_0 と冪零部分 H_{nil} に Jordan 分解しておきます．

Theorem 1.2. 形式的有理型 G 接続 $A\,dz$ $(A \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z)\!)))$ に対して，拡大体 $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ $(t^q = z, q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1})$ と $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ 上の標準形 $H \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(t)\!))$ が存在して，$A\,dz$ は $\mathbb{C}(\!(t)\!)$ 上のゲージ変換で $H\,dt$ に移すことができる．

上の定理において，$A\,dz$ が特に係数体の拡大を必要とせずに標準化出来るとき ($q=1$ の場合)，$A\,dz$ は $z=0$ を**不分岐な**不確定特異点に持つといいます．以下本稿では有理型接続の特異点は常に不分岐とします．

この標準型 $H\,dz$ に対してスペクトル型と呼ばれる有限データを定義しましょう．スペクトル型とは雑にいうと「固有値の重複」を数えるデータです．しかし今

$$H\,dz = \left(\sum_{i=1}^{k} H_i z^{-i} + H_{\mathrm{res}}\right)\frac{dz}{z}$$

と係数 “行列” H_i たちが z^{-i} ごとに並んでいますので，これらの「**同時**固有値の重複」を数えていくことにします．

$H \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z)\!))$ を $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ 上の標準形とすると，係数の H_i 達は互いに可換な半単純元であったので，これら H_i すべて含むような Cartan 部分代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ が存在します．この $\mathfrak{t}$ に対して $\mathfrak{g}$ のルート空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

を考え，単純ルート系 $\Pi \subset \Phi$ を一つ決めます．最も深い極 $z^{-(k+1)}$ の係数である H_k は，必要ならば $G(\mathbb{C})$ の作用を考えて，$\mathfrak{t}$ の基本領域

$$\mathcal{D} := \{X \in \mathfrak{t} \mid \alpha \in \Pi \text{ に対し } \operatorname{Re}\alpha(X) \geqslant 0 \text{ かつ } \operatorname{Re}\alpha(X) = 0 \text{ の場合 } \operatorname{Im}\alpha(X) \geqslant 0\}$$

に入っているとして，Π の部分集合を

$$\Pi_k := \{\alpha \in \Pi \mid \alpha(H_k) = 0\}$$

と定めます．例えば，$G = \mathrm{GL}_5$ の場合に $\Pi = \{e_1, \ldots, e_4\}$ を標準的な単純ルート系として，

$$H_k = \begin{pmatrix} a & & & & \\ & b & & & \\ & & b & & \\ & & & c & \\ & & & & c \end{pmatrix} \quad (a, b, c \text{ は互いに異なる })$$

を考えると，$\Pi_k = \{e_2, e_4\}$ となります．これを自然数 5 の分割で言い換えると 122 となり，Introduction で例示した固有値の重複度のデータが得られます．すなわち Π_k は H_k の固有値の重複度を表していると思うことができます．

次の H_{k-1} も適当な Weyl 群作用で

$$\mathcal{D}_k := \{X \in \mathfrak{t} \mid \alpha \in \Pi_k \text{ に対し } \operatorname{Re}\alpha(X) \geqslant 0 \text{ かつ } \operatorname{Re}\alpha(X) = 0 \text{ の場合 } \operatorname{Im}\alpha(X) \geqslant 0\}$$

に入っているとしましょう．ここで H_k は動かさずに H_{k-1} を $\mathcal{D}_k$ に入れることが出来ることに注意します．そして

$$\Pi_{k-1} := \{\alpha \in \Pi \mid \alpha(H_k) = \alpha(H_{k-1}) = 0\}$$

と定義すると，これは H_k と H_{k-1} の “同時固有値” の重複を表す量と思えます．

以下同様にして $H_k, H_{k-1}, \ldots, H_0$ に対しても Π_i を定義することが出来るので，結果として単純ルート系 Π の部分集合の列

$$\Pi_{k+1} = \Pi \supset \Pi_k \supset \cdots \supset \Pi_0$$

が得られ，これが H 全体の “同時固有値” の重複の様子を表すことになります．また冪零部分は留数 $H_{\mathrm{res}} = H_0 + H_{\mathrm{nil}}$ の冪零部分 H_{nil} の随伴軌道を考えることになりますが，その際 $H_k, \ldots, H_1$ は動かさないようにする必要があります．以上の考察から不分岐標準型 $H\,dz$ のスペクトル型を同時固有値の重複度と冪零部分のデータとして次のように定義しましょう．

Definition 1.3. $H\,dz$ を上のような不分岐な標準形とする．このとき H の**スペクトル型**を対 $\mathrm{sp}(H) := (\Pi_H; [H_{\mathrm{nil}}])$ によって定める．ここで

$$\Pi_H : \Pi_k \supset \Pi_{k-1} \supset \cdots \supset \Pi_0$$

は上で定めた単純ルート系 Π の部分集合列で，$[H_{\mathrm{nil}}]$ は冪零元 H_{nil} の

$$G(\mathbb{C})_{H_{\mathrm{irr}}} := \{g \in G(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Ad}(g)(H_i) = H_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$$

による随伴軌道である．

スペクトル型自体は次のように標準型とは独立に定義することができます．$\Pi_k \supset \Pi_{k-1} \supset \cdots \supset \Pi_0$ を $\mathfrak{g}$ の単純ルート系の部分集合の列，$\mathfrak{l}_i \subset \mathfrak{g}$ を $\Pi_i \subset \Pi$ に付随した放物部分代数の Levi 部分代数として，L_i で各 $\mathfrak{l}_i$ に対応する $G(\mathbb{C})$ の解析的部分群としましょう．$J \in \mathfrak{l}_0$ を冪零元として，$[J]$ で J の L_1 随伴軌道とします．このとき対 $(\Pi_k \supset \Pi_{k-1} \supset \cdots \supset \Pi_0; [J])$ を**抽象スペクトル型**と呼ぶことにします．

2 スペクトル型の開折と退化図式

本節ではスペクトル型に対して開折という操作を導入します．これは後の節で微分方程式の特異点の退化と対応することになります．

$S = (\Pi_k \supset \Pi_{k-1} \supset \cdots \supset \Pi_0; [J])$ を抽象スペクトル型とします．さらに $\mathcal{P}_{[k+1]}$ で集合 $\{0, 1, \ldots, k\}$ の分割全体の集合とします．$\mathcal{P}_{[k+1]}$ には分割の細分によって自然に半順序が入ることに注意します．

分割 $\{0, 1, \ldots, k\} = I_0 \sqcup I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_r$ を，$\mathcal{I} = (I_0, I_1, \ldots, I_r) \in \mathcal{P}_{[k+1]}$ と書くことにして，以下では適当に並べ替えて $0 \in I_0$ であると約束します．ここで，分割の各成分 $I_j \subset \{0, 1, \ldots, k\}$ に添字づけられた $\Pi_k \supset \Pi_{k-1} \supset \cdots \supset \Pi_0$ の部分列を Π_{I_j} とおいて，

$$S^{I_0} := (\Pi_{I_0}; [J]), \qquad S^{I_j} := (\Pi_{I_j}; [0]),\ j \neq 0$$

と定めると，分割 $\mathcal{I}$ に対して，スペクトル型の組 $S^{\mathcal{I}} := (S^{I_j})_{j=1,\ldots,r}$ が得られます．これを**分割 $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{[k+1]}$ に対する開折**と呼びます．

一般には微分方程式は複数の特異点を持つため，各特異点ごとに複数のスペクトル型が定まり，その組 $\mathbf{S} = (S_i)_{i=1,2,\ldots,d} = \left((\Pi^{(i)}_{k_i} \supset \Pi^{(i)}_{k_i-1} \supset \cdots \supset \Pi^{(i)}_0; [J^{(i)}_0])\right)_{i=1,2,\ldots,d}$ を考えます．その場合も各分割の組 $\boldsymbol{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}^{(i)})_{i=1,2,\ldots,d} \in \prod_{i=1}^d \mathcal{P}_{[k_i+1]}$ によって $\mathbf{S}$ の開折を

$$\mathbf{S}^{\boldsymbol{\mathcal{I}}} = (S_i^{\mathcal{I}^{(i)}})_{i=1,2,\ldots,d}$$

と定めることができます．特に，最も細かい分割 $(\{0\} \sqcup \cdots \sqcup \{k_a\})_{a \in D} \in \mathcal{P}_{[k_a+1]}$ に対応する $\mathbf{S}$ の開折を $\mathbf{S}^{\mathrm{reg}}$ と書くことにしておきます．これはスペクトル型 $\mathbf{S}$ に対応する不確定特異点を開折して得られる確定特異点型方程式のスペクトル型に対応することが期待されるものです．

上の定義では異なる分割に対して，同じスペクトル型が現れてしまう場合があるので，それらを次のように同一視しておきます．抽象スペクトル型の組 $\mathbf{S} = (S_i)_{i=1,2,\ldots,d}$ から，整数の列 $0 \leqslant l^{(i)}_1 < l^{(i)}_2 < \cdots < l^{(i)}_{t_i} = k_i$ を

$$\Pi^{(i)}_{k_i} = \cdots = \Pi^{(i)}_{l^{(i)}_{t_i-1}+1} \supsetneq \cdots \supsetneq \Pi^{(i)}_{l^{(i)}_2} \cdots = \Pi^{(i)}_{l^{(i)}_1+1} \supsetneq \Pi^{(i)}_{l^{(i)}_1} = \cdots = \Pi^{(i)}_0,$$

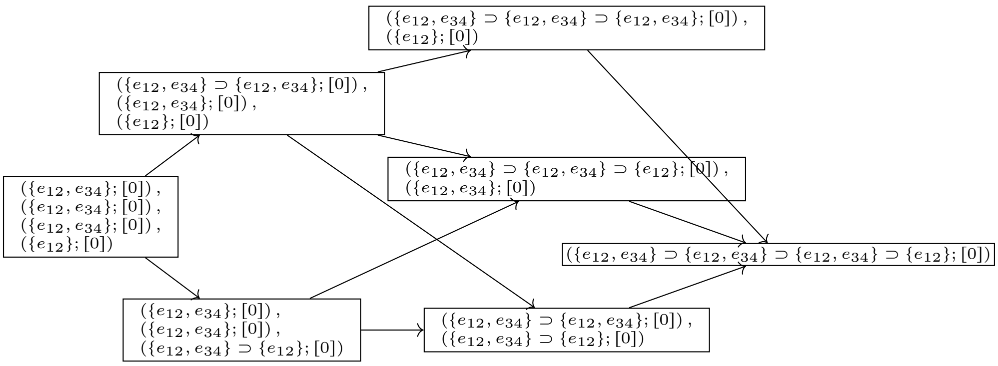
$i=1,2,\ldots,d$ となるようにとります．ここから対称群 $\mathfrak{S}_{k_i+1}$ の部分群 $\mathfrak{S}_{l_0^{(i)}+1}\times\mathfrak{S}_{l_1^{(i)}-l_0^{(i)}}\times\cdots\mathfrak{S}_{l_{t_i}^{(i)}-l_{t_i-1}^{(i)}}$ が定まるので，この群作用による半順序集合の商として

$$\mathcal{P}_{[k_i+1]}^{S_i}:=\mathcal{P}_{[k_i+1]}/(\mathfrak{S}_{l_0^{(i)}+1}\times\mathfrak{S}_{l_1^{(i)}-l_0^{(i)}}\times\cdots\mathfrak{S}_{l_{t_i}^{(i)}-l_{t_i-1}^{(i)}})$$

を考えます．商の作り方から，分割の組 $\boldsymbol{\mathcal{I}},\boldsymbol{\mathcal{J}}\in\prod_{i=1}^d\mathcal{P}_{[k_i+1]}$ がこの商の中で等しくなるならば，は $\mathbf{S}^{\boldsymbol{\mathcal{I}}}=\mathbf{S}^{\boldsymbol{\mathcal{J}}}$ となることがわかります．

したがって半順序集合 $\prod_{i=1}^d\mathcal{P}_{[k_i+1]}^{S_i}$ では，開折によって得られるスペクトル型の重複が解消されていることになるので，この Hasse 図式を抽象スペクトル型の組 $\mathbf{S}$ の**被約な開折図式**，あるいは単に開折図式，退化図式などと呼ぶことにします．

例えば，スペクトル型の組として $(\{e_{12},e_{34}\}\supset\{e_{12},e_{34}\}\supset\{e_{12},e_{34}\}\supset\{e_{12}\};[0])$ を考えると，以下の被約な開折図式を得ますが，これは Introduction で例示した川上-坂井-中村の退化図式に他なりません．



3　大島予想

抽象スペクトル型に対しその開折と開折図式を形式的に定義しました．では実際にこれを $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 G 接続の不確定特異点の開折によって実現することができるでしょうか．

定式化を正確にするために少し準備をします．D は $\mathbb{P}^1$ 上の点の有限集合で，簡単のため $\infty\notin D$ としておきます．$\mathbf{S}=(S_a)_{a\in D}$ を抽象スペクトル型の組とします．このとき $\mathrm{Sp}(\mathbf{H})=\mathbf{S}$ となる標準形の組 $\mathbf{H}=(H^{(a)})_{a\in D}\in\prod_{a\in D}\mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z_a)\!))$ があって，次の意味で $\mathbf{H}$ を局所データにもつ $\mathbb{P}^1$ 上の自明 G 主束における既約[3]な有理型接続が存在する時，$\mathbf{S}$ は**既約実現可能**であるということにします．自明 G 主束の接続は $\mathfrak{g}$ 値微分 1 形式で代表されたことから，既約実現可能であるとは，$\mathbb{P}^1$ 上で D にのみ特異点を持つ $\mathfrak{g}$ 値微分 1 形式

$$\nabla_A=\sum_{a\in D}\sum_{i=0}^{k_a}\frac{A_i^{(a)}}{(z-a)^i}\frac{dz}{z-a}\quad(A_i^{(a)}\in\mathfrak{g})$$

があって，接続行列の各特異点 $a\in D$ での主要部が

$$\sum_{i=0}^{k_a}\frac{A_i^{(a)}}{(z-a)^{i+1}}\in\mathbb{O}_{H^{(a)}}\subset\mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z_a^{-1})\!)/\mathbb{C}[\![z_a]\!])$$

を満たす，と言い換えられます．ただし $\mathbb{O}_{H^{(a)}}$ は標準形を $H^{(a)}$ の $G(\mathbb{C}[\![z_a]\!])$ 作用による軌道を表します．このとき d_A を $\mathbf{S}$ の実現と呼びます．

[3]既約性の定義は Arinkin[1] を参照.

また $\mathbf{S}$ は**半普遍的に既約実現可能**であるというのを以下のように定義します．原点を含む開集合 $U \subset \prod_{a\in D} \mathbb{C}^{k_a+1}$ に対して，$\mathbf{c} \in U$ に正則に依存する既約な $\mathfrak{g}$ 値微分 1 形式の族 $\nabla_{A(\mathbf{c})} = A(\mathbf{c})\,dz$ が存在し，任意の $\boldsymbol{\mathcal{I}} \in \prod_{a\in D} \mathcal{P}_{[k_a+1]}$ に対して $\nabla_{A(\mathbf{c})}$ $(\mathbf{c} \in C(\mathcal{I}) \cap U)$ は $\mathbf{S}^{\boldsymbol{\mathcal{I}}}$ の実現を与える．すなわち，$(\nabla_{A(\mathbf{c})})_{\mathbf{c}\in U}$ は $\mathbf{S}$ の開折図式に従って特異点が退化していく G 接続の正則族を与えているといえます．

抽象スペクトル型 $\mathbf{S}$ の実現可能性，その確定特異点型への開折 $\mathbf{S}^{\mathrm{reg}}$ の実現可能性，そして $\mathbf{S}$ の半普遍的実現可能性，が同値であるという次の予想が大島利雄によって提出されました．

Conjecture 3.1 (大島 [10, 11])**.** $\mathbf{S} = (S_a)_{a\in D}$ を抽象スペクトル型の組とする．このとき以下は同値．

1. $\mathbf{S}$ は既約実現可能．

2. $\mathbf{S}$ は半普遍的に既約実現可能．

3. $\mathbf{S}^{\mathrm{reg}}$ は既約実現可能．

$G = \mathrm{GL}_N$ であってアクセサリーパラメーターの個数が 0〜4 個の場合に，この予想が正しいことが大島自身によって示されています (Remark 6.2 [10], Remark 5.7 [11])．

4 福原標準形の打ち切り軌道

前節の予想にアタックするために吉田の問題に倣って G 接続のモジュライ空間の変形を考えるというのが本稿の基本戦略でした．その準備として，本節ではまずは G 接続の局所同型類をパラメトライズするために，Boalch[3] にならって標準形の打ち切り軌道というものを導入し，その余随伴軌道としての解釈について説明します．

定理 1.2 でみたように G 接続のゲージ変換による同型類は定義 1.1 で与えた標準形によって分類されます．すなわち標準形 $H\,dz$ に対して，そのゲージ変換軌道

$$O_H := \{\mathrm{Ad}(g)(H) + \delta_G(g) \mid g \in G(\mathbb{C}(\!(z)\!))\}$$

が G 接続の局所形式的同型類を与えます．一方 Boalch は [3] で $\delta_G(g)$ を打ち切った以下のような軌道を導入しました．一般に $g \in G(\mathbb{C}[\![z]\!])$ に対しては，

$$\delta_G(g) \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}[\![z]\!]) \tag{2}$$

とできることから，標準形を

$$H\,dz = \left(\sum_{i=1}^{k} H_i z^{-i} + H_{\mathrm{res}}\right)\frac{dz}{z} \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z)\!)/\mathbb{C}[\![z]\!])$$

と $\mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z)\!))$ から正則項を打ち切った部分に属するとみなすことで，$\mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z)\!)/\mathbb{C}[\![z]\!])$ 上での $G(\mathbb{C}[\![z]\!])$ 軌道を考えると式 (2) より $\delta_G(g)$ 部分が打ち切られて，

$$\mathbb{O}_H := \{\mathrm{Ad}(g)(H) \mid g \in G(\mathbb{C}[\![z]\!])\} \subset \mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z)\!)/\mathbb{C}[\![z]\!])$$

が得られます．これを不分岐な標準形 $H\,dz$ の**打ち切り軌道**と呼びましょう．

ここでは $G(\mathbb{C}[\![z]\!])$ の随伴作用のみで軌道を考えることができ，元のゲージ変換軌道 O_H よりも構造が単純化されています．また $H\,dz$ が**非共鳴的**[4]という条件下では $\mathbb{O}_H$ によってゲージ変換による同型類がパラメトライズできることが知られています．

[4]詳細は [5]

さらに打ち切り軌道は以下で見るように自然に有限次元 Lie 群の余随伴軌道としての構造を持ちます．$l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ に対して

$$\mathbb{C}[z]_l := \mathbb{C}[\![z]\!]/\langle z^{l+1}\rangle$$

という $\mathbb{C}$ 代数を定めます．さらに

$$\mathbb{C}[z^{-1}]_l := z^{-(l+1)}\mathbb{C}[\![z]\!]/\mathbb{C}[\![z]\!]$$

として高々 $l+1$ 位の極を持ち正則項を打ち切った形式的有理型関数の空間を考えると，これには自然に $\mathbb{C}[z]_l$ 加群の構造が入ります.

特に標準形 $H\,dz$ はその形から $H\,dz \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z^{-1}]_k)$ とみなすことができます．さらにこのとき, 非退化ペアリング

$$\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}[z]_l) \times \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}[z^{-1}]_l) \ni (X(z), Y(z)) \mapsto \mathrm{Res}_{z=0}\left(\mathrm{tr}\ (X(z)Y(z))\right) \in \mathbb{C}$$

によって

$$\mathfrak{g}(\mathbb{C}[z^{-1}]_l) \cong \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_l)^*$$

と同一視することで

$$H\,dz \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_k)^*$$

と $H\,dz$ を $\mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_k)$ の双対空間の元だと思えます．したがって

$$\mathbb{O}_H = \{\mathrm{Ad}^*(g)(H) \mid g \in G(\mathbb{C}[z]_k)\} \subset \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_k)^*$$

となり，打ち切り軌道 $\mathbb{O}_H$ は有限次元複素 Lie 群 $G(\mathbb{C}[z]_k)$ の余随伴軌道としての解釈を持つことがわかります.

5 $\mathbb{P}^1$ 上の有理型 G 接続のモジュライ空間

前節同様に D を $\mathbb{P}^1$ の有限部分集合で，簡単のため $\infty \notin D$ としておきます．$z_a := z - a$ で $a \in D$ を中心とした $\mathbb{P}^1$ の局所座標関数を表し，$\mathbf{H} = (H^{(a)})_{a\in D}$ として各点 $a \in D$ での不分岐標準形の組を固定します.

各打ち切り軌道 $\mathbb{O}_{H^{(a)}}$ は余随伴軌道として自然に正則シンプレクティック構造を持ちますが，その際自然なはめ込み[5] $\iota_{H^{(a)}} \colon \mathbb{O}_{H^{(a)}} \hookrightarrow \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z_a]_{k^{(a)}})^*$ は $G(\mathbb{C}[z_a]_{k_a})$ 作用の運動量写像となることはよく知られています．ここでさらに自然な包含 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_k)$ の双対写像 $\mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_k)^* \to \mathfrak{g}^*$ は同一視 $\mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_k)^* \cong \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z^{-1}]_k)$ の下で留数写像

$$\mathrm{Res}_{z=0} \colon \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z^1]_k) \ni X(z) \mapsto \mathrm{Res}_{z=0}X(z) \in \mathfrak{g}$$

を与えることに注意すると,

$$\mu_H \colon \mathbb{O}_H \hookrightarrow \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z^{-1}]_k) \xrightarrow{\mathrm{Res}_{z=0}} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$$

は $G(\mathbb{C})$ 作用による運動量写像を与えることがわかります．これによって $\mathbf{H} = (H^{(a)})_{a\in D}$ 全体では積多様体 $\prod_{a\in D}\mathbb{O}_{H^{(a)}}$ への G の対角作用による運動量写像

$$\mu_{\mathbf{H}} \colon \prod_{a\in D}\mathbb{O}_{H^{(a)}} \ni (X_a)_{a\in D} \mapsto \sum_{a\in D}\mu_{H^{(a)}}(X_a) \in \mathfrak{g}^*$$

[5] ここでは $\mathbb{O}_{H^{(a)}} = G(\mathbb{C}[z]_{k^{(a)}})/G(\mathbb{C}[z]_{k^{(a)}})_{H^{(a)}}$ みなしています.

に対するシンプレクティック簡約

$$\mathcal{M}_{\mathbf{H}} := \mu_{\mathbf{H}}^{-1}(0)/G$$

を考えることができます．

　このシンプレクティック簡約は運動量写像 $\mu_{H^{(a)}}$ が留数写像と一致することから，次のように $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathfrak{g}$ 値有理型 1 形式，すなわち自明 G 主束上の有理型接続の空間とみなすことができます．

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathbf{H}} &= \mu_{\mathbf{H}}^{-1}(0)/G \\
&= \left\{ (X_a)_{a\in D} \in \prod_{a\in D} \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z_a^{-1}]_{k^{(a)}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{a\in D} \mathrm{Res}_{z_a=0} X_a = 0, \\ X_a \in \mathbb{O}_{H^{(a)}},\ a\in D \end{array} \right\} \Big/ G \\
&= \left\{ \nabla_A = \sum_{a\in D}\sum_{i=0}^{k_a} \frac{A_i^{(a)}}{(z-a)^{i+1}}\, dz \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{a\in D} A_0^{(a)} = 0, \\ \sum_{i=0}^{k_a} \frac{A_i^{(a)}}{(z-a)^i} \in \mathbb{O}_{H^{(a)}},\ \ a\in D \end{array} \right\} \Big/ G
\end{aligned}$$

　ここで $\mathcal{M}_{\mathbf{H}} = \mu_{\mathbf{H}}^{-1}(0)/G$ では G 作用による素朴な商をとっているので，作用の安定性について以下でコメントをしておきます．G 接続 $\nabla_A = \sum_{a\in D}\sum_{i=0}^{k_a} \frac{A_i^{(a)}}{(z-a)^{i+1}}\, dz$ が**既約**であるというのを，係数 $A_i^{(a)}$ を全てを同時に含む $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数は $\mathfrak{g}$ のみである，という条件で定めることにします．そして $(\mu_{\mathbf{H}}^{-1}(0))^{\mathrm{ir}}$ で $\mu_{\mathbf{H}}^{-1}(0)$ の既約元全体のなす開部分集合を表すことにします．すると幾何学的不変式論から，G をその中心 Z で割った G/Z の作用は固有かつ概自由[6]であることがわかるので，

$$\mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{\mathrm{ir}} := (\mu_{\mathbf{H}}^{-1}(0))^{\mathrm{ir}}/G$$

を以下 $\mathbb{P}^1$ 上の**既約 G 接続のモジュライ空間**と呼ぶことにします．

6　福原標準形の δ 不変量と剛性指数

本節では標準形に対して δ 不変量と剛性指数と呼ばれる不変量を導入し，G 接続のモジュライ空間の次元との関係について説明します．

　不分岐な標準形

$$H\,dz = \left(\sum_{i=1}^{k} H_i z^{-i} + H_{\mathrm{res}} \right) \frac{dz}{z}$$

をとり，$(\Pi_k \supset \cdots \supset \Pi_0; [J_0])$ をそのスペクトル型とします．このとき標準形 $H\,dz$ の**不確定度**を

$$\mathrm{Irr}(H) := \sum_{i=1}^{k} (\dim G - \dim L_i)$$

によって定めます．ここで L_i は放物型部分群 $P_{\Pi_i} \subset G$ の Levi 部分群をあらわします．これは $G = \mathrm{GL}_N$ の場合の小松-Malgrange の不確定度の類似となっています．

　さらにこの不確定を用いて $H\,dz$ の δ **不変量**を

$$\delta(H) := \dim G + \mathrm{Irr}\,(H) - \dim G_H$$

で定めます．ただし G_H は H の G における固定化部分群をあらわします．

[6] 固定化部分群が有限

不確定度や δ 不変量は局所的な不変量でしたが，次に剛性指数とよばれる大域的な不変量を導入します．前節のように不分岐標準形の組 $\mathbf{H}=(H^{(a)})_{a\in D}$ を考えます．このとき $\mathbf{H}$ の**剛性指数**を

$$\mathrm{rig}(\mathbf{H}) := 2\dim G - \sum_{a\in D}\delta(H^{(a)})$$

によって定めます．これは $G=\mathrm{GL}_N$ の場合の Katz の剛性指数の類似にあたるものです．

これらの不変量は定め方から標準形のスペクトル型のみに依存することに注意をしておきます．

ではここからは，これらの不変量たちと G 接続のモジュライ空間の次元との関係について説明していきます．

そのために有限次元複素 Lie 群 $G(\mathbb{C}[z]_k)$ の構造について少し復習しておきましょう．$\mathbb{C}[z]_k$ は唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}_z^{(k)} := \langle z\rangle$ を持つ局所 $\mathbb{C}$ 代数なので，剰余写像 $\pi\colon \mathbb{C}[z]_k \to \mathbb{C}[z]_k/\mathfrak{m}_z^{(k)} \cong \mathbb{C}$ とおくと，包含写像 $i\colon \mathbb{C}\hookrightarrow \mathbb{C}[z]_k$ はその切断を与えます．これより G に対する右分裂短完全列

$$1 \to \mathrm{Ker}\,\pi_* \to G(\mathbb{C}[z]_k) \underset{i_*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} G(\mathbb{C}) \to 1$$

が定まるので，半直積分解

$$G(\mathbb{C}[z]_k) = G \ltimes G(\mathbb{C}[z]_k)_1 \quad (G(\mathbb{C}[z]_k)_1 := \mathrm{Ker}\,\pi_*)$$

が得られます．ここで半直積の第二成分 $G(\mathbb{C}[z]_k)_1$ の Lie 環は

$$\mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_k)_1 := \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_z^{(k)}$$

となりますが，$\mathfrak{m}_z^{(k)}$ が冪零イデアルであることから，$\mathfrak{g}(\mathbb{C}[z]_k)_1$ は冪零 Lie 環，よって $G(\mathbb{C}[z]_k)_1$ は冪単 Lie 群となります．したがって, 指数写像が同型を与えることから $G(\mathbb{C}[z]_k)_1$ の元を次のように明示的に書くことができます．

Proposition 6.1. $g(z)\in G(\mathbb{C}[z]_k)_1$ は

$$g(z) = e^{X_k z^k} e^{X_{k-1}z^{k-1}}\cdots e^{X_1 z} \quad (X_1,\ldots,_k \in \mathfrak{g})$$

の形に一意的に書くことができる．

この明示式から $G(\mathbb{C}[z]_k)_1$ における $H\,dz$ の固定化部分群を次のようにあらわすことができます．

$$\mathrm{Stab}_{G(\mathbb{C}[z]_k)_1}(H) = \left\{ e^{X_k z^k} e^{X_{k-1}z^{k-1}}\cdots e^{X_1 z} \,\middle|\, X_i \in \mathfrak{l}_i \right\} \tag{3}$$

このことから打ち切り軌道 $\mathbb{O}_H$ の次元が δ 不変量で次のように計算されます．

Proposition 6.2. 次の等式が成立．

$$\dim \mathbb{O}_H = \delta(H)$$

Proof. これまでの準備からすぐに従うので証明を与えておきます．上の等式 (3) より

$$\dim \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{C}[z]_k)} = \sum_{i=1}^{k} \dim L_i + \dim \mathrm{Stab}_G(H)$$

となるので，

$$\begin{aligned}\dim \mathbb{O}_H &= \dim G(\mathbb{C}[z]_k) - \dim \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{C}[z]_k)(}(H)\\ &= (k+1)\cdot \dim G - \left(\sum_{i=1}^k L_i + \mathrm{Stab}_G(H)\right)\\ &= \dim G + \sum_{i=1}^k (\dim G - \dim L_i) - \dim \mathrm{Stab}_G(H)\\ &= \dim G + \mathrm{Irr}(H) - \dim \mathrm{Stab}_G(H) = \delta(H).\end{aligned}$$

□

同様にモジュライ空間の次元も次のように計算できます．

Proposition 6.3. 標準形の組 $\mathbf{H} = (H^{(a)})_{a\in D}$ の留数の和が $\mathfrak{g}$ の半単純部分 $\mathfrak{g}_{ss}$ に含まれるとする．このとき等式

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ir}}_{\mathbf{H}} = 2\dim Z - \mathrm{rig}(\mathbf{H})$$

が成立する．

前節でコメントしたように δ 不変量や剛性指数はスペクトル型のみから決定されました．したがって Proposition6.2, 6.3 の等式からスペクトル型は G 接続の局所同型類やモジュライ空間の次元を決定する重要な不変量であることが見て取れます．

7　福原標準形の開折とスペクトル型の開折

第 2 節でスペクトル型に対して開折という操作を形式的に定義しました．本節ではそれを福原標準形の変形として実現します．まず $z=0$ を不分岐な不確定特異点と考えた場合の福原標準形

$$H\,dz = \left(\sum_{i=1}^k H_i z^{-i} + H_{\mathrm{res}}\right)\frac{dz}{z} \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}(\!(z)\!)/\mathbb{C}[\![z]\!])$$

をとります．このとき $z=0$ は点が $k+1$ 重に縮退した点とみなして，この縮退を開折することを考えましょう．そのために $\mathbb{C}^{k+1}$ に対して有限集合 $\{0,1,\ldots,k\}$ の分割から定まる自然な階層構造を導入します．$\mathcal{I}\colon I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_r = \{0,1,\ldots,k\}$ を分割として，$0\in I_0$ としておきます．このとき

$$C(\mathcal{I}) := \left\{(a_0,\ldots,a_k)\in \mathbb{C}^{k+1} \,\middle|\, a_i = a_j \Leftrightarrow \exists l \text{ s.t. } i,j\in I_l\right\}$$

として $\mathbb{C}^{k+1}$ の部分集合を定義しましょう．これによって非交和分解

$$\mathbb{C}^{k+1} = \bigsqcup_{\mathcal{I}\in\mathcal{P}_{[k+1]}} C(\mathcal{I})$$

を得られます．ここで $\mathcal{I},\mathcal{J}\in\mathcal{P}_{[k+1]}$ に対して

$$C(\mathcal{I}) \subset \overline{C(\mathcal{J})} \Leftrightarrow \mathcal{I} \leqslant \mathcal{J}$$

が成立することに注意します．

さて，$\mathbf{c} = (c_0, \ldots, c_k) \in \mathbb{C}^{k+1}$ を $k+1$ 個の点の集合とみなして，標準形 $H\,dz$ の変形を次のように定義します

$$H(\mathbf{c}) := \left(\frac{H_k}{(z-c_1)\cdots(z-c_k)} + \frac{H_{k-1}}{(z-c_1)\cdots(z-c_{k-1})} + \cdots + \frac{H_1}{z-c_1} \right) \frac{1}{z-c_0}.$$

このとき $\mathbf{c} \in \mathbf{C}^{k+1}$ に対して階層 $\mathbf{c} \in C(\mathcal{I})$ なる分割 $\mathcal{I}\colon I_0 \sqcup \cdots \sqcup I_r$ がただ一つ定まり，$\mathbf{c}$ は点集合としては

$$\{c_0, \ldots, c_k\} = \{c_{I_0}, \ldots, c_{I_r}\}$$

と r 個の異なる点の集合となります．したがって部分分数分解を考えることで，

$$H(\mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{|I_j|-1} \frac{H_{j,\nu}(\mathbf{c})}{(z-c_{I_j})^{\nu+1}}$$

とあらわして，分解の各 I_j 成分を $H(\mathbf{c})_j = \sum_{\nu=0}^{|I_j|-1} \frac{H_{j,\nu}(\mathbf{c})}{(z-c_{I_j})^{\nu+1}}$ と書きましょう．このとき部分分数分解 $H(\mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{r} H(\mathbf{c})_j$ と，第 2 節で定義したスペクトル型 $\mathrm{sp}(H)$ の $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{[k+1]}$ に対する開折

$$\mathrm{sp}(H)^{\mathcal{I}} = (\mathrm{sp}(H)^{I_j})_{j=0,\ldots,r}$$

は次のように対応します．

Proposition 7.1. *H を不分岐な標準形，$\mathrm{sp}(H)$ をそのスペクトル型とする．原点を含む稠密な開部分集合 $\mathbb{B}_H \subset \mathbb{C}^{k+1}$ が存在して以下が成り立つ．*

1. *すべての $\mathcal{I}$ に対して $C(\mathcal{I}) \cap \mathbb{B}_H \neq \emptyset$.*
2. *$\mathbf{c} \in C(\mathcal{I}) \cap \mathbb{B}_H$ ならば，部分分数分解 $H(\mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{r} H(\mathbf{c})_j$ の各成分は $z = c_{I_j}$ における不分岐な標準形であって，そのスペクトル型に対して*

$$\mathrm{sp}(H(\mathbf{c})_j) = \mathrm{sp}(H)^{I_j} \quad (j = 0, \ldots, r)$$

が成り立つ．

さらにこの変形 $H(\mathbf{c})$ は δ 不変量を保ちます．

Proposition 7.2. *$\mathcal{I} \in \mathcal{P}_{[k+1]}$, $\mathbf{c} \in C(\mathcal{I}) \cap \mathbb{B}_H$ に対して，部分分数分解 $H(\mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{r} H(\mathbf{c})_j$ は以下のように δ 不変量を保つ．すなわち*

$$\sum_{j=0}^{r} \delta(H(\mathbf{c})_j) = \delta(H)$$

が成立する．

同様のことは標準形の組 $\mathbf{H} = (H^{(a)})_{a\in D} \in \prod_{a\in D} \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z_a^{-1}]_{k_a})$ に対しても考えることができますが，各成分 $H^{(a)}$ の変形が δ 不変量を保つことから，$\mathbf{H}$ 全体の変形が剛性指数を保つことになります．

Proposition 7.3. *$\mathbf{c} \in \mathbb{B}_{\mathbf{H}} := \prod_{a\in D} \mathbb{B}_{H^{(a)}}$ とすると，*

$$\mathrm{rig}(\mathbf{H}(\mathbf{c})) = \mathrm{rig}(\mathbf{H})$$

が成立する．

8　吉田の問題と大島の予想

本節では吉田の問題 (Problem 0.2) に一つの解答を与えることで，大島の予想 (Conjecture 3.1) が解決できることを解説します．

残念ながら詳細は省略しますが，前節までの考察から次のように打ち切り軌道 $\mathbb{O}_H$ の変形を構成することができます．紙数の都合から詳細は省略しますが，ここからさらに次のように打ち切り軌道 $\mathbb{O}_H$ の変形を構成することができます．

Theorem 8.1. *([5])* $\pi_{\mathbb{B}_H}\colon \mathbb{O}_{H,\mathbb{B}_H} \to \mathbb{B}_H$ *を上で定めた* $\mathbb{O}_H$ *の変形とする．このとき* $\mathbf{c} \in C(\mathcal{I}) \cap \mathbb{B}_H$ *におけるファイバー* $\pi_{\mathbb{B}_H}^{-1}(\mathbf{c})$ *は* $\prod_{j=0}^{r} \mathbb{O}_{H(\mathbf{c})_j}$ *の稠密な開集合と同型である．*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{スペクトル型の開折} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftarrow] & & \text{福原標準形の開折} \\
& \begin{array}{c}\mathbb{C}^{k+1}\text{ の階層} \\ \parallel \\ \{0,\ldots,k\}\text{ の分割}\end{array} & \\
& \text{打ち切り軌道の変形} \arrow[ur] \arrow[ul, leftarrow, phantom] &
\end{tikzcd}$$

さらに，$D = \sum_{i=1}^{d}(k_{a_i}+1)\cdot a_i$ を $\mathbb{P}^1$ の有効因子として，簡単のため D が定める点集合 $|D|$ は複素数平面 $\mathbb{C}$ に含まれているとします．$\mathbf{H} = (H^{(a)})_{a\in|D|} \in \prod_{a\in|D|} \mathfrak{g}(\mathbb{C}[z_a^{-1}]_{k_a})$ を各点 $a \in |D|$ での不分岐標準形の組とします．また変形のパラメーター空間として $\mathbb{B}_{\mathbf{H}} = \prod_{a\in|D|} \mathbb{B}_{H^{(a)}}$ を考えると，打ち切り軌道の変形の組 $\prod_{a\in|D|} \mathbb{O}_{H^{(a)},\mathbb{B}_{H^{(a)}}}$ と射影

$$\pi_{\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}\colon \prod_{a\in|D|} \mathbb{O}_{H^{(a)},\mathbb{B}_{H^{(a)}}} \longrightarrow \prod_{a\in|D|} \mathbb{B}_{H^{(a)}}.$$

が上のように定義できます．

さらに第 5 節で導入した打ち切り軌道の運動量写像 $\mu_{H^{(a)}}\colon \mathbb{O}_{H^{(a)}} \to \mathfrak{g}^*$ の変形も構成することができ，その変形された運動量写像の積によって G 同変な写像

$$\mu_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}\colon \prod_{a\in|D|} \mathbb{O}_{H_a,\mathbb{B}_{H^{(a)}}} \ni (X_a)_{a\in|D|} \longmapsto \sum_{a\in|D|} \mu_{\mathbb{O}_{H^{(a)}\downarrow G,\mathbb{B}_{H^{(a)}}}}(X_a) \in \mathfrak{g}^*,$$

を構成することができます．

Definition 8.2 (モジュライ空間 $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{\mathrm{ir}}$ の変形)**.** 上で定めた変形された運動量写像の 0 での等位集合 $(\mu_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}})^{-1}(0)$ とその G 安定部分 $((\mu_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}})^{-1}(0))^{\mathrm{st}}$ に対して

$$\mathcal{M}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}} := \mu_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}^{-1}(0)/G, \qquad \mathcal{M}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}^{\mathrm{ir}} := ((\mu_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}})^{-1}(0))^{\mathrm{st}}/G.$$

と定める．ここで射影 $\pi_{\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}\colon \prod_{a\in|D|} \mathbb{O}_{H^{(a)},\mathbb{B}_{H^{(a)}}} \to \mathbb{B}_{\mathbf{H}}$ によって射影 $\pi_{\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}\colon \mathcal{M}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}} \to \mathbb{B}_{\mathbf{H}}$, $\pi_{\mathbb{B}_H}\colon \mathcal{M}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}^{\mathrm{ir}} \to \mathbb{B}_{\mathbf{H}}$ がそれぞれ定義される．

次の定理が吉田の問題に対する一つの解答です．$\mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{\mathrm{ir}} \neq \emptyset$ として，$\pi_{\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}\colon \mathcal{M}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}^{\mathrm{ir}} \to \mathbb{B}_{\mathbf{H}}$ の像を $\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}$ とおきます．そして $\pi_{\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}}\colon \mathcal{M}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}^{\mathrm{ir}} \to \widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}$ を $\pi_{\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}$ から誘導される射影とします．

Theorem 8.3. *([5])* $\mathcal{M}_{\mathbf{H}}^{\mathrm{ir}} \neq \emptyset$ *とする．*

1. 商空間 $\mathcal{M}^{\mathrm{ir}}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}$ は複素軌道体 *(orbifold)* の構造を持つ.

2. $\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}$ は $\mathbf{0}$ を含む $\mathbb{C}^{k+1}$ の開部分多様体である.

3. 射影 $\pi_{\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}}\colon \mathcal{M}^{\mathrm{ir}}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}} \to \widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}$ は全射沈め込みである.

4. $\prod_{a\in|D|}\mathbb{C}^{k_a+1}$ の全ての階層 $\prod_{a\in|D|}\mathcal{C}(\mathcal{I}^{(a)})$ は低空間 $\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}$ と空でない交わりを持つ.

5. 軌道体 $\mathcal{M}^{\mathrm{ir}}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}$ は $\mathcal{M}^{\mathrm{ir}}_{\mathbf{H}}$ の変形を与える．すなわち

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ir}}_{\mathbf{H}} \cong \pi^{-1}_{\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}}(\mathbf{0}).$$

が成り立つ.

6. 任意の $\mathbf{c} \in \widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}$ に対し，ファイバー $\pi^{-1}_{\widetilde{\mathbb{B}}_{\mathbf{H}}}(\mathbf{c})$ は G 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}^{\mathrm{ir}}_{\mathbf{H}(\mathbf{c})}$ の稠密な開部分集合と同型である.

この定理の *6* は，不確定特異点の開折によって得られる，福原標準形の開折そしてスペクトル型の開折，の両者と整合的に G 接続のモジュライ空間が変形されていることを表しています．また，この変形の切断 $s\colon U \to \mathcal{M}^{\mathrm{ir}}_{\mathbf{H},\mathbb{B}_{\mathbf{H}}}$ が，既約な G 接続の変形を与えることになりますが，定理の *2* と *3* より原点近傍で陰関数定理を適用することで，このような切断が原点近傍でとれることが保証されます．したがって，この定理より次が言えることになります.

> 標準形の組 $\mathbf{H}$ を局所同型類に持つ既約 G 接続 ∇_A に対して，次を満たす G 接続の変形族 $(\nabla_{A(\mathbf{c})})_{\mathbf{c}\in U}$, $U \subset \mathbb{B}_{\mathbf{H}}$ がが必ず存在する.
>
> *1.* $\nabla_{A(\mathbf{0})} = \nabla_A$.
>
> *2.* 任意の $\mathcal{I} = (\mathcal{I}^{(a)})_{a\in|D|} \in \prod_{a\in|D|}\mathcal{P}_{[k_a+1]}$, $\mathbf{c} \in C(\mathcal{I}) \cap U$ に対して，$\nabla_{A(\mathbf{c})}$ は既約で，その標準形は $\mathbf{H}(\mathbf{c})$ と一致する.

すなわち次が従うことになります.

Corollary 8.4. 大島の予想 *Conjecture 3.1* において，条件 *1* と条件 *2* は同値.

また条件 *2* が条件 *3* を導くことは定義から明らかです．さらにここで次の事実を思い出しておきます.

Theorem 8.5. *([4])* $G = \mathrm{GL}_N$ の場合，条件 *3* は条件 *1* を導く

この定理は $G = \mathrm{GL}_N$ に G 接続のモジュライ空間が箙多様体で実現できることから，箙のルート系の組み合わせ的議論を用いることで示されます．したがって以上を合わせると $G = \mathrm{GL}_N$ の場合の大島の予想の解決が得られます.

Theorem 8.6. $G = \mathrm{GL}_N$ の場合 *Conjecture 3.1* は真である.

References

[1] D. Arinkin, *Irreducible connections admit generic oper structures, preprint (2016) arXiv:1602.08989.*

[2] D. Babbitt, V. Varadarajan, *Formal reduction theory of meromorphic differential equations: a group theoretic view, Pacific J. Math.* ***109*** *(1983), no.1, 1–80.*

[3] Boalch, P.: *Symplectic manifolds and isomonodromic deformations. Adv. Math.* ***163*** *(2) (2001), 137–205.*

[4] K. Hiroe, *Unfolding of spectral types, Josai Math. Monographs* ***12*** *(2020), 53–67.*

[5] K. Hiroe, *Deformation of moduli spaces of meromorphic G-connections on* $\mathbb{P}^1$ *via unfolding of irregular singularities, preprint (2024), arXiv:2407.20486.*

[6] K. Hiroe, H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai, *4-dimensional Painlevé type equations, MSJ memoirs,* ***37****, 2018.*

[7] M. Hukuhara, *Sur les points singuliers des équations diférentielles linéaires. III, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Imp. Univ. A* ***2*** *(1942) 125–137.*

[8] N. Katz, *Rigid local systems, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. viii+223 pp.*

[9] G. Levelt, *Jordan decomposition for a class of singular differential operators, Ark. Mat.* ***13*** *(1975) 1–27.*

[10] T. Oshima, *Confluence and versal unfolding of Pfaffian equations, Josai Mathematical Monographs* ***12*** *(2020), 117–151.*

[11] T. Oshima, *Versal unfolding of irregular singurarities of a linear differential equation on the Riemann sphere , Publ. RIMS Kyoto Uinv.* ***57*** *(2021), 893–920.*

[12] H. Turrittin, *Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, Acta Math.* ***93*** *(1955) 27–66.*

[13] 若林功問題特集–多変数関数論を中心として, 数学 ***32****, no. 2, 161–187.*

Blow-up 代数の環構造論

遠藤 直樹（明治大学政治経済学部）

1　はじめに

本小稿では, blow-up 代数を巡る歴史的潮流を概観する。Blow-up 代数の環論的性質については, 第 51 回代数学シンポジウムにおいて, 後藤四郎明治大学名誉教授が「blow-up 代数の可換環論」と題するご講演を行い, 1970 年代から 2000 年代に至る発展の道筋を整理・概説された。本小稿では, その流れを受け, とりわけ 2010 年代以降から近年にかけての話題を中心として, 私自身が関わってきた範囲に重点を置きつつ, 謂わば「blow-up 代数の可換環論」の続編に相当する位置付けで論じる。なお, blow-up 代数の Gorenstein 性に関しては, 第 67 回代数学シンポジウムにおいて, 北海道教育大学の居相真一郎先生がご講演「ブローアップ代数のゴレンシュタイン性について」の中で, 精緻かつ体系的に論じられている。

定義 1.1 (Blow-up 代数)**.** 可換 Noether 環 A 内のイデアル I に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(I) &= A[It] \subseteq A[t]\\ \mathcal{R}'(I) &= A[It, t^{-1}] \subseteq A[t, t^{-1}]\\ G(I) &= \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I) \cong \mathcal{R}(I)/I\mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

と定め, それぞれイデアル I の Rees 代数, 拡大 Rees 代数, 随伴次数環といい, これらを総称して, イデアル I の blow-up 代数と呼ぶ[1]。但し, t により, A 上の不定元を表す。

Blow-up 代数に関する基本的事項については, [6, Section 4.5], [54], [92, Chapter 5], [98], [99], [112, 第 3 章第 2 節] 等を参照されたい。代数幾何学の観点では, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ はイデアル I の生成元 $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ から定まる有理写像 $\operatorname{Spec} A \dashrightarrow \mathbb{P}^{\ell-1}$ のグラフの閉包の斉次座標環として登場し, 後に定義を紹介する射影スキーム $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(I)$ は $\operatorname{Spec} A$ の I が定める部分スキーム $V(I)$ に沿った blowing up を与える ([21, IV.2 Blow-ups])。

一方, 可換環論の文脈における Rees 代数の淵源は, D. Rees による 1956 年の研究 [79] に遡る。Rees は, 実際には Rees 代数そのものではなく, 拡大 Rees 代数を導入・考察し, Krull の交叉定理の鮮やかな別証明を提示すると共に, Artin-Rees の補題を準備し, これを用いて Krull の単項イデアル定理の別証明を与えた。なお, Artin-Rees の補題の名称に関して, Rees は次のように経緯を説明している。Rees 自身は 1954 年の時点で既に当該証明を得ていたものの, 論文として投稿したのは 1955 年 5 月になってからであった。ところが, 論文 [79] が出版された 1956 年のまさにその月に, E. Artin は日本で開催された研究集会において, 同一の議論と結果を発表した。その為, どちらの功績に帰すべきかの裁定を永田雅宜先生に仰いだところ,「それは明らかに Artin-Rees の補題である」と答えたと述べている ([82, pages 563–564])。

さて, A 上の多項式環 $A[t]$ と Laurent 多項式環 $A[t, t^{-1}]$ を自然に $\mathbb{Z}$-次数環とみなすと, それらの次数付けにより, blow-up 代数も $\mathbb{Z}$-次数環の構造を持つ。即ち

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n, \quad \mathcal{R}'(I) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^n t^n, \quad G(I) \cong \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$$

[1] Rees 代数のことを blow-up 代数と呼ぶ流儀もある。また, $(A, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環である場合には, イデアル I に関する fiber cone $\mathcal{F}(I) = \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cong \bigoplus_{n \geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$ も blow-up 代数に含めることがある。

である。但し, $n \le 0$ に対しては, $I^n = A$ と定める。特に, A は $\mathcal{R}(I)$ の環直和因子である。また, イデアル I の生成元 $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ を取り, $I = (a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ と表すと

$$\mathcal{R}(I) = A[a_1t, a_2t, \ldots, a_\ell t]$$

が成り立つ。従って, blow-up 代数 $\mathcal{R}(I), \mathcal{R}'(I), G(I)$ は全て Noether 環である。

命題 1.2 ([97, Corollary 1.6, Remark 1.7], [92, Theorem 5.1.4, Proposition 5.1.6])**.** Noether 環 A の Krull 次元 $d = \dim A$ は有限とし, $I \ne A$ と仮定する。次の主張が成り立つ。

(1) $\dim \mathcal{R}(I) = \begin{cases} d+1 & (\exists\, P \in \operatorname{Spec} A \text{ s.t. } I \not\subseteq P \text{ and } \dim A/P = d) \\ d & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $\dim \mathcal{R}'(I) = d+1$

(3) $\dim G(I) \le d$ であり, $(A, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環ならば, $\dim G(I) = d$

注意 1.3. $(A, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環でない場合には, $\dim G(I) = d$ は一般には成立しない。実際, $R = k[X, Y, Z]$ は体 k 上の多項式環とし, 積閉集合 $S = R \setminus \{(X, Y) \cup (Z)\}$ を考える。そこで, $A = S^{-1}R$ とおくと, A は Noether 環であって, $\mathfrak{m} = (X, Y)A$ と $\mathfrak{n} = (Z)A$ は環 A 内の極大イデアルである。特に, $\operatorname{ht}_A \mathfrak{m} = 2 > 1 = \operatorname{ht}_A \mathfrak{n}$ となる。従って

$$\dim G(\mathfrak{n}) = \dim G(\mathfrak{n}A_\mathfrak{n}) = \dim A_\mathfrak{n} = \operatorname{ht}_A \mathfrak{n} < \operatorname{ht}_A \mathfrak{m} \le \dim A$$

が得られる。

ここで, $\mathcal{R}(I)_+ = \bigoplus_{n>0} I^n t^n$ とおくと, $\mathcal{R}(I)_+$ は $\mathcal{R}(I)$ の次数付きのイデアルである。集合

$$\operatorname{Proj} \mathcal{R}(I) = \{P \in \operatorname{Spec} \mathcal{R}(I) \mid P \text{ は次数付き}, \mathcal{R}(I)_+ \not\subseteq P\}$$

を考えると, 空間 $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(I)$ にはスキームの構造が入る。自然な射 $f : \operatorname{Proj} \mathcal{R}(I) \to \operatorname{Spec} A$ を $\operatorname{Spec} A$ の閉集合 $V(I)$ を中心とする blowing-up と呼ぶ。Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の特異点解消とは, 射影的射 $f : X \to \operatorname{Spec} A$ であって, X が非特異であり, f の制限 $X \setminus f^{-1}(\mathfrak{m}) \to \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}\}$ が同型であることをいう ([112, 第 3 章第 2 節])。

Blowing-up は特異点解消の基本的手法であり, その幾何学的側面については古典以来, 膨大な研究が蓄積されている。一方で, 私の興味はスキーム $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(I)$ の斉次座標環である $\mathcal{R}(I)$ の環論的側面にある。即ち, 本研究の目的は, 下記の通りである。

研究の目的

Blow-up 代数の環論的性質を調べる。

Blow-up 代数の環構造を解析する上で, 分析の視座の適切な設定は不可欠である。本研究では, 次の Noether 局所環の階層を指標とする環構造解析に従事する。

Noether 局所環の階層

- 正則局所環 $\Longrightarrow$ 完全交叉環 $\Longrightarrow$ Gorenstein 環 $\Longrightarrow$ Cohen-Macaulay 環 $\Longrightarrow$ Buchsbaum 環, 系列的 Cohen-Macaulay 環
- 正則局所環 $\Longrightarrow$ 有理特異点 $\Longrightarrow$ Cohen-Macaulay 正規環
- 正則局所環 $\Longrightarrow$ 弱 F-正則環 $\Longrightarrow$ F-有理環 $\Longrightarrow$ Cohen-Macaulay 正規環

第 1 行はホモロジー代数的視点に基づく階層であり, 第 2 行は特異点論的視点, 第 3 行は正標数の視点 (最後の含意には, 基礎環は Cohen-Macaulay 環の準同型像という仮定が必要である) の階層である。

現在では, blow-up 代数の環構造解析は可換環論の中核的課題の 1 つとして, 確固たる地位を築くに至っているが, 1970 年代半ば頃までを顧みれば, Rees 代数の環論的性質の研究は, いくつかの具体例と散発的な結果を除いて, 包括的な理論の体系化はなお途上にあった ([106, page 6])。以下に, その代表例を紹介する。

例 1.4. 体 k 上の多項式環 $A = k[X_1, X_2, \dots, X_d]$ $(d \geq 2)$ 内において, 不定元で生成されるイデアル $I = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ を考えると, 次の同型

$$\mathcal{R}(I) \cong k[X_1, X_2, \dots, X_d, Y_1, Y_2, \dots, Y_d]/\mathrm{I}_2\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$$

が成り立つ。但し, $\mathrm{I}_2(\mathbb{M})$ により, 行列 $\mathbb{M}$ の 2 次小行列式全体が生成するイデアルを表す。

例 1.4 において, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は行列式環として現れ, ASL (Algebras with Straightening Law) の枠組みで捉えられるため ([6, Section 7.2]), 組合せ論的視点からの考察が可能である。この環は多項式環の Segre 積 $k[X_1, X_2]\# k[Y_1, Y_2, \dots, Y_d]$ でもあり ([53, page 197], [80, page 653]), 標数 0 の体 k に対しては, 一般線型群の不変式環としても実現される ([7, Theorem (7.6)], [15], [93, page 1166])。環構造に目を向けると, この $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域であって, 体 k の標数が 0 である場合には有理特異点 ([103, (6.1.5) Corollary (b)]), 正標数の場合には F-正則特異点 ([5, Theorem 3.1], [59, Theorem (7.14)]) となる。以上の事実は, Rees 代数が多様な視点からの探求に値する豊かな研究対象であることを物語っている。

例 1.5 ([1, Proposition 2, Corollary], [97, Theorem 3.1])**.** Noether 環 A 内の正則列[2] $a_1, a_2, \dots, a_d \in A$ $(d \geq 2)$ に対して, $I = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ とおくと

$$\mathcal{R}(I) \cong A[Y_1, Y_2, \dots, Y_d]/\mathrm{I}_2\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$$

が成り立つ。但し, $A[Y_1, Y_2, \dots, Y_d]$ は A 上の多項式環を表す。従って, A が Cohen-Macaulay 局所環ならば, 任意の $n \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(I^n)$ は Cohen-Macaulay 環である。

例 1.4, 1.5 の証明は, 原論文以外にも, [106, 例 1.3, 命題 1.4] に記載されている。なお, 正則列が生成するイデアル I の随伴次数環は A/I 上の多項式環に同型である ([6, Theorem 1.1.8])。正則列が生成するイデアルの冪の拡大 Rees 代数や随伴次数環に関しては, [60, Section 4], [97, Theorem 3.2] を参照されたい。

2　Blow-up 代数の Cohen-Macauay 性

Blow-up 代数の Cohen-Macaulay 性解析に関しては, [106, 第 4 節, 第 7 節] に詳細な記述がある。歴史を遡れば, Cohen-Macaulay 環という名称は, F. S. Macaulay と I. S. Cohen の結果に由来する。1916 年, Macaulay は体上の多項式環において非混合定理[3] (the unmixedness theorem) が成り立つことを示し ([71]), 1946 年には, O. Zariski の学生であった Cohen が正則局所環の場合に同定理が成り立つことを証明した ([14])。以上を背景に, Cohen-Macaulay 環は非混合定理を満たす環として定義された。特に, Noether 局所環に対しては, Krull 次元と深さ (depth) が一致することと同値となる。

以下, $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし, $d = \dim A$ とする。

[2] M は A-加群とする。A の元の列 $a_1, a_2, \dots, a_d$ が M-正則列であるとは, 任意の $1 \leq i \leq d$ に対して, a_i は $M/(a_1, a_2, \dots, a_{i-1})M$ 上の非零因子であり, かつ $(a_1, a_2, \dots, a_d)M \neq M$ を満たすことをいう。

[3] Noether 環 A 内で非混合定理が成り立つとは, イデアル I が $n = \mathrm{ht}_A I$ 個の元で生成されるとき, 任意の $P \in \mathrm{Ass}_A A/I$ に対して, $\mathrm{ht}_A P = n$ であることをいう。

定義 2.1. A が Cohen-Macaulay 環であるとは, $\dim A = \operatorname{depth} A$ が成り立つことである。

Noether 局所環が Cohen-Macaulay であることと, 任意の巴系[4]が正則列を成すことは同値であり, また 1 つでも正則列をなすような巴系を含めば, その局所環は必ず Cohen-Macaulay 環である。整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して, A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する i 次局所コホモロジー加群

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = \varinjlim_{n} \operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^n, A)$$

を考えると, 等式

$$\dim A = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) \neq (0)\}, \quad \operatorname{depth} A = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) \neq (0)\}$$

が成り立つ ([6, Theorem 3.5.7])。従って, A が Cohen-Macaulay 環であることと次の条件

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0) \quad (\forall\, i \neq d)$$

は同値である。必ずしも局所環とは限らない Noether 環 A が Cohen-Macaulay であるとは, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対して, 局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ が Cohen-Macaulay であることと定める。

Rees 代数の Cohen-Macaulay 性解析において, 決定的な役割を果たしたのは, Hochster-Roberts による次の例である。

例 2.2 ([61, Example 2.2], [34, Example 3.4])**.** 体 k 上の形式的冪級数環 $k[[X,Y]]$ の部分環 $A = k[[X^2, Y, X^3, XY]]$ は Cohen-Macaulay ではない[5]が, イデアル $I = (X^2, Y)$ に関する Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

例 2.2 の帰結として, 環の Cohen-Macaulay 性が環直和因子を取る操作で保たれないことが従う。Hochster-Roberts が例 2.2 を提示した目的は, この事実を指摘することにあったが, 例 2.2 は別の観点から眺めても示唆に富む。即ち, 基礎環が Cohen-Macaulay でない場合であっても, イデアルを適切に選べば, Rees 代数が Cohen-Macaulay 環となり得ることを示している。実際, 下田保博により, この現象は精緻に解析され, 次の定理として定式化された。

定理 2.3 ([83, Theorem], [49, Theorem (1.1)])**.** 次の 2 条件は同値である。

(1) A は Buchsbaum 環であり, かつ $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ $(\forall\, i \neq 1, d)$ である。

(2) A の任意の巴系イデアル[6]Q に対して, $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay 環である。

上記の同値条件が成り立つとき, A の任意の巴系イデアル Q と任意の $n \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(Q^n)$ は Cohen-Macaulay 環である。

定理 2.3 は, 下田により, まず基礎環が 2 次元 Noether 局所整域の場合に示され, その後, 後藤-下田によって, 高次元の場合を含む上記の定理の形へと一般化された。なお, A が重複度 2 の Buchsbaum 局所環であって, $\operatorname{depth} A > 0$ であると仮定すると, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ $(\forall\, i \neq 1, d)$ が成り立つ ([34, Theorem 1.1])。特に, 例 2.2 における環 A は定理 2.3 の条件 (1) を満たすので, 巴系イデアル $I = (X^2, Y)$ に関する Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

定理 2.3 を踏まえると, 極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Rees 代数の環構造解析は, 自ずから生起する課題であり, 次の定理が, 所謂, Rees 代数の Cohen-Macaulay 性に関する「後藤-下田の定理」である。

[4] $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とし, $s = \dim_A M$ とする。$\mathfrak{m}$ の元の列 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ が M の巴系であるとは, $\ell_A(M/(a_1, a_2, \ldots, a_s)M) < \infty$ を満たすことをいう。

[5] 環 A は $\dim A = 2$, $\operatorname{depth} A = 1$ であって, 重複度 2 の Buchsbaum 局所環である。

[6] 巴系で生成されたイデアルのことである。

定理 2.4 ([50, Theorem (1.1), Remark (3.10)]). $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とし, I は A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2) $G(I)$ が Cohen-Macaulay 環であり, かつ $\mathrm{a}(G(I)) < 0$ である。

ここで, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(I)_+$ により, $\mathcal{R}(I)$ の次数付き極大イデアルを表し

$$\mathrm{a}(G(I)) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(G(I))]_n \neq (0)\}$$

により, $G(I)$ の a-不変量[7]（a-invariant）を表す。但し, $[\mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(G(I))]_n$ は, 次数付き局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(G(I))$ の n 次斉次成分を表す。

定理 2.4 は, [50, Theorem (1.1)] において, 極大イデアルの場合に証明されたが, 同論文の [50, Remark (3.10)] において, 同様の議論により, $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合に拡張されることが言及されている。

例 2.5. $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。A の巴系イデアル Q に対して, $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay 環[8]である。

$\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, $I^2 = QI$ を満たす巴系イデアル $Q \subseteq I$ が存在するならば

$$G(I) \text{ が Cohen-Macaulay 環 \ かつ \ } \mathrm{a}(G(I)) \leq 1 - d$$

が成り立つ。

例 2.6. $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとすると, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。実際, 無限体を通して, $A/\mathfrak{m} = \infty$ と仮定して良い ([50, Lemma (3.8)], [92, Lemma 8.4.2 (9)])。剰余体が無限である 2 次元正則局所環上の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルに対しては, J. Lipman-B. Tessier の定理 ([70, Proposition 5.5], [64, Theorem 5.1], [66, Theorem 3.1]) により, $I^2 = QI$ を満たす巴系イデアル $Q \subseteq I$ が存在する。故に, 定理 2.4 から, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環となる。

以上, 定理 2.4 により, 具体的かつ豊富な Cohen-Macaulay Rees 代数の例を構成することが可能である。なお, 定理 2.4 において, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の構造が随伴次数環 $G(I)$ とその a-不変量の挙動により記述されることが見出され, 長期に渡って後の Rees 代数研究の指針の 1 つとなった。現在では, 定理 2.4 は次のように拡張されている。

定理 2.7 ([96, Theorem 7.1]). $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。I $(\neq A)$ は A のイデアルであって, $\mathrm{ht}_A I > 0$ とする。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2) $G(I)$ が Cohen-Macaulay 環であり, かつ $\mathrm{a}(G(I)) < 0$ である。

即ち, 定理 2.4 は, $\mathfrak{m}$-準素イデアルに限らず, $\mathrm{ht}_A I > 0$ であるイデアル I に対しても成立する。 併せて, 定理 2.4 は第 5 節で述べるように, 後藤-西田康二 ([47, Part II, Theorem (1.1)]) や D. Q. Viet ([101, Theorem 1.1]) によるイデアルの filtration に関する定理へと拡張される端緒を開いた。加えて, 基礎環 A が正則局所環である場合（より一般には pseudo-rational の場合）には, 常に $a(G(I)) < 0$ が成立するため,「$\mathcal{R}(I)$ の CM 性と $G(I)$ の CM 性は同値である」という Lipman の定理 ([69, Theoerm 5]) が直接的に導出される。なお, 論文 [50]

[7] [53, Definition (3.1.4)] を参照されたい。
[8] 例 1.5 からも従う。

では, 極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Rees 代数が正則環, 完全交叉環となる特徴付けも与えられている ([50, Proposition (4.9), Corollary (4.10)])。

本節の最後に, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性と射影スキーム $\operatorname{Proj}\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性の関連を考察する。ここで, $\operatorname{Proj}\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay スキームであるとは, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}\mathcal{R}(I)$ に対して, 局所環 $\mathcal{R}(I)_{\mathfrak{p}}$ が Cohen-Macaulay 局所環であることをいう。

命題 2.8 ([99, Proposition 3.20])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。I $(\neq A)$ は A のイデアルであって, $\operatorname{ht}_A I > 0$ とする。このとき, $\operatorname{Proj}\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は, $\operatorname{Proj} G(I)$ が Cohen-Macaulay である。

注意 2.9 ([99, Remark 3.21]). 命題 2.8 の設定の下, 次の含意と同値性

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(I) \text{ は Cohen-Macaulay} &\implies G(I) \text{ は Cohen-Macaulay} \\ &\implies \operatorname{Proj}\mathcal{R}(I) \text{ は Cohen-Macaulay} \\ &\iff \operatorname{Proj} G(I) \text{ は Cohen-Macaulay} \end{aligned}$$

が成り立つ。

3 Blow-up 代数の Gorenstein 性

本節では, blow-up 代数の Gorenstein 性について論じる。Cohen-Macaulay 性の場合と同様に, Gorenstein 性に関しても, [106, 第 4 節, 第 6 節] に詳しい記述がある。近年の進展については, [109] を参照されたい。Gorenstein 環の概念は, 1952 年の D. Gorenstein による平面曲線の研究 ([31]) に起源を持ち, その後, A. Grothendieck による双対性に関する理論の枠組みの中で整備され, 1963 年に H. Bass の自己入射次元による環論的特徴付けが確立された。Gorenstein 環の歴史的背景については, [65, 107] に詳しい。

以下, $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし, $d = \dim A$ とする。A-加群 M に対して, $\operatorname{id}_A M$ により, M の入射次元を表す。

定義 3.1 ([3, Theorem and definition])**.** A が Gorenstein 環であるとは, 自己入射次元が有限である, 即ち, $\operatorname{id}_A A < \infty$ が成り立つことである。

Noether 局所環 A が Gorenstein 環であるための必要十分条件は, A が Cohen-Macaulay 環であり, かつ $\mathrm{K}_A \cong A$ が成り立つこと[9]である。但し, K_A は A の正準加群を表す。局所コホモロジー加群を用いると, A の Gorenstein 性は A が Cohen-Macaulay 環であって, 次の同型

$$\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A) \cong \mathrm{E}_A(A/\mathfrak{m})$$

が成り立つことで特徴付けられる。但し, $\mathrm{E}_A(A/\mathfrak{m})$ により, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ の入射包絡 (injective envelope, injective hull) を表す。Blow-up 代数の Gorenstein 性に目を向けると, Cohen-Macaulay 性に関する結果の類似として, 次の定理が成り立つ。

定理 3.2 ([50, Theorem (1.2)], [67, Corollary 3.7], [47, Part II, Corollary (1.4)])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 2$ とし, I は A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環である。

(2) $G(I)$ が Gorenstein 環であり, かつ $\mathrm{a}(G(I)) = -2$ である。

[9] 正準加群 K_A が環 A の双対的な性質を持つことを鑑みるに, Gorenstein 環は対称性を備えた Cohen-Macaulay 環であると判断される。

上記の同値条件が成り立つとき, A は Gorenstein 環である。

定理 3.2 は, 定理 2.4 に合わせて $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合に限定して主張を述べたが, [67, Corollary 3.7], [47, Part II, Corollary (1.4)] に示されているように, 定理 3.2 の主張は, より一般のイデアルやイデアルの filtration に付随する blow-up 代数に対しても成立する。

例 3.3. $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 2$ とする。例 2.5 により, A の巴系イデアル Q に対して, $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay 環であった。このとき, $\mathcal{R}(Q)$ が Gorenstein 環であることと, A が Gorenstein 環かつ $d = 2$ であることは同値である。

例 3.4. $(A, \mathfrak{m})$ が 2 次元正則局所環の場合に, $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I = \mathfrak{m}^\ell$ $(\ell \geq 1)$ を考えると, Zariski の定理 ([104, Part II, Section 12], [105, Appendix 5, Theorem 2'], [64, Theorem 3.7]) によって, I は整閉である。例 2.6 により, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。このとき, $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環であるための必要十分条件は, $I = \mathfrak{m}$ である。

例 3.3 において, 基礎環の次元を 3 以上に取るか, 或いは例 3.4 において, $\ell \geq 2$ とすると, それらに伴い現れる Rees 代数はいずれも Gorenstein ではない Cohen-Macaulay 環となる。

4　Blow-up 代数の almost Gorenstein 性

Almost Gorenstein 環論の根底には,「何故 Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環が, かくも多様かつ豊富に存在するのか」という素朴な疑問がある。Almost Gorenstein 環は, 1997 年に V. Barucci-R. Fröberg により, 解析的不分岐な 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環[10]に対して導入された概念である ([2, Definition–Proposition 20])。その後, 2013 年に, 後藤-松岡直之-T. T. Phuong によって, 解析的不分岐を仮定しない 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環へと枠組みが拡張された ([42, Definition 3.1])。2015 年には, これら 1 次元の理論を高次元へと拡張する定義が後藤-高橋亮-谷口直樹[11]によって導入され ([51, Definition 3.3]), 本節で扱う blow-up 代数をはじめとして, 行列式環 ([10, 93]), Stanley-Reisner 環 ([72]), 日比環 ([73]), 標準的次数付き環 ([51, 57]), 2 次元正規特異点 ([78]) 等, 多岐に渡るクラスの環に対して, almost Gorenstein 性が精緻に解析されてきた。なお, almost Gorenstein 性の基本的性質に関しては, [110] も併せて参照されたい。

近年, almost Gorenstein 環論を嚆矢として非 Gorenstein 環論が急速に展開されており, nearly Gorenstein 環 ([55]), semi-Gorenstein 環 ([51]), 2-almost Gorenstein 環 ([11]), generalized Gorenstein 環 ([40]), weakly almost Gorenstein 環 ([20]), far-flung Gorenstein 環 ([56]), canonical trace radical 環 ([74]), Goto 環 ([24]) 等, Gorenstein 性の一般化としての多様なクラスが提案され, 積極的に解析されている。このように非 Gorenstein 環論は, 現代可換環論における主要な研究潮流の 1 つを形成しつつある。以上の環のクラスを相関図に纏めると, 次のようになる。但し, CTR により, canonical trace radical 環を表し, min. multi. は極小重複度 (minimal multiplicity) を意味する。

$$\begin{tikzcd}
\text{CTR} & \text{nearly Gor} \arrow[l, Rightarrow] & \text{nearly Gor + min. multi.} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \text{2-almost Gor} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \text{semi-Gor} \arrow[r, Rightarrow] & \text{almost Gor} \arrow[ul, Rightarrow, "\dim=1"'] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[urr, dashed, leftrightarrow, "\text{``\textbf{twins}''}"] \arrow[drr, Rightarrow, "\dim\leq1"'] & & \text{generalized Gor} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Goto} \\
& \text{far-flung Gor} & \text{nearly Gor + far-flung Gor} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow, "\dim=1"] & & \text{weakly almost Gor} &
\end{tikzcd}$$

Blow-up 代数に着目すると, 例 3.3, 例 3.4 のように, 数多ある Cohen-Macaulay Rees 代数の中でも, Gorenstein 環は僅かであり, これら非 Gorenstein Rees 代数の中には, almost

[10]典型例として, 体上の数値半群環が挙げられる。
[11]2019 年 2 月に遠藤に改姓する。

Gorenstein 環となり得るものが含まれていて, 解明を待っていると推測される。この種の典型例に対して, almost Gorenstein 性を解析することは, almost Gorenstein 環の具体例を与えるに留まらず, その定義の妥当性を検証し, 理論の基盤を強固にする上でも重要な課題である。以上を踏まえ, 本節では, まず, [51] による almost Gorenstein 環の定義を紹介したい。

定義 4.1 ([51, Definition 3.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A$ とし, 環 A は正準加群 K_A を持つと仮定する。このとき, A が almost Gorenstein 局所環であるとは, A-加群としての短完全列

$$0 \to A \to \mathrm{K}_A \to C \to 0$$

であって, 等式 $\mu_A(C) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C)$ を満たすものが存在するこという。但し, $\mu_A(C)$ により A-加群 C の極小生成系の個数を表し, また $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C)$ は A-加群 C の $\mathfrak{m}$ に関する重複度を表す。即ち

$$\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C) = \lim_{n\to\infty}(d-1)! \cdot \frac{\ell_A(C/\mathfrak{m}^{n+1}C)}{n^{d-1}}$$

である。

任意の Gorenstein 環は, 余核として零加群が取れるため, almost Gorenstein 環である。一方, その逆は基礎環 A が Artin 環であれば成り立つ ([51, Lemma 3.1 (3)])。定義 4.1 の意味するところは, almost Gorenstein 環 A は, 必ずしも Gorenstein 環であるとは限らないものの, 環 A は正準加群 K_A へ埋め込むことができ, その差分 K_A/A が「良い性質を備える」という点にある。今, 任意に A から K_A に単射が与えられているとし, その余核を C で表す。即ち, 次の A-加群としての短完全列

$$0 \to A \to \mathrm{K}_A \to C \to 0$$

を考える。$C \neq (0)$ の場合, A-加群 C は Cohen-Macaulay であって, $\dim_A C = d-1$ である ([51, Lemma 3.1 (2)])。剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限体であると仮定し, 局所環 $A_1 = A/[(0):_A C]$ を見ると, A_1 の剰余体も無限であるので, 元 $f_1, f_2, \dots, f_{d-1} \in \mathfrak{m}$ であって, $(f_1, f_2, \dots, f_{d-1})A_1$ が A_1 の極大イデアル $\mathfrak{m}_1$ の極小節減を成すものを選ぶことができる。従って, 次の不等式

$$\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}_1}(C) = \ell_A(C/(f_1, f_2, \dots, f_{d-1})C) \geq \ell_A(C/\mathfrak{m}C) = \mu_A(C)$$

が得られる。以上より, $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C) \geq \mu_A(C)$ である。ここで, 等号 $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C) = \mu_A(C)$ が成り立つとき, C を Ulrich A-加群と呼ぶ。従って, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限体である場合, C が Ulrich A-加群であることと

$$\mathfrak{m}C = (f_1, f_2, \dots, f_{d-1})C$$

が成り立つことは同値である。特に, 環 A が 1 次元の場合, A-加群 C が Ulrich である必要十分条件は, C が剰余体 $A/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間である。このように, almost Gorenstein 環は, 同型 $\mathrm{K}_A \cong A$ が成り立つとは限らないが, その差 C がベクトル空間 (とその一般化である Ulrich 加群) という「良い性質を備える」ことを意味している。

Almost Gorenstein 環の具体例は数多く存在する ([9, 30, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 57, 72, 73, 93])。とりわけ重要な例としては, 2 次元有理特異点や有限表現型 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環が挙げられる。なお, almost Gorenstein 環論の根底に数値半群環の理論があることから, almost Gorenstein となる数値半群環の例も非常に豊富である ([2, 42])。

次に, 次数環に対する almost Gorenstein 性の定義を紹介する。実は, Cohen-Macaulay 性, Gorenstein 性と異なり, almost Gorenstein 性は次数環と局所環の間に若干の差異が生じる。

定義 4.2 ([51, Definition 8.1])**.** $R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ は Cohen-Macaulay 次数環, $d=\dim R$ とする。$(R_0,\mathfrak{m})$ は局所環とし, 環 R は次数付き正準加群 K_R を持つと仮定する。このとき, R が almost Gorenstein 次数環であるとは, 次数 R-加群としての短完全列

$$0\to R\to \mathrm{K}_R(-a)\to C\to 0$$

であって, 等式 $\mu_R(C)=\mathrm{e}^0_{\mathfrak{M}}(C)$ を満たすものが存在するこという。但し, $a=\mathrm{a}(R)$ により, R の a-不変量[12]を表し, $\mathfrak{M}=\mathfrak{m}R+R_+$ は R の次数付き極大イデアルである。なお, $\mathrm{K}_R(-a)$ は R-加群としては K_R と同一であるが, $[\mathrm{K}_R(-a)]_n=[\mathrm{K}_R]_{n-a}$ $(n\in\mathbb{Z})$ という次数付けを持つ次数付き R-加群を表す。

局所環の場合と同様に, 任意の Gorenstein 次数環は almost Gorenstein である。また, $C_{\mathfrak{M}}$ は Ulrich $R_{\mathfrak{M}}$-加群であり, 正準加群 K_R は局所化と可換であるため, R が次数環として almost Gorenstein であれば, 局所環 $R_{\mathfrak{M}}$ も almost Gorenstein となる。もっとも, 一般にはその逆は成立しない ([44, Theorems 2.7, 2.8], [51, Example 8.8]) が, 次の例が示すように, almost Gorenstein 環は次数付き環として見た場合にも, 魅力的な性質を備えている。

例 4.3 ([51, Example 10.5], [93, Theorem 1.1])**.** 無限体 k 上の不定元を成分に持つ $m\times n$ 行列 $X=[X_{ij}]$ $(2\leq t\leq \min\{m,n\})$ に対して, k 上の多項式環を $S=k[X]=k[X_{ij}\mid 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n]$ により表し, 行列式環 $R=S/\mathrm{I}_t(X)$ を考える。但し, $\mathrm{I}_t(X)$ は行列 X の t 次小行列式全体が生成する S のイデアルを表す。Hochster-J. A. Eagon ([58, Theorem 2, Corollary], [6, Theorem 7.3.1 (c)]) により, R は Cohen-Macaulay 整閉整域, $\dim R=mn-(m-(t-1))(n-(t-1))$ である。また, 行列式環 R が Gorenstein であるための必要十分条件は, $m=n$ で与えられる ([91, Theorem (5.5.6)], [6, Theorem 7.3.6 (b)])。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $R=k[X]/\mathrm{I}_t(X)$ は almost Gorenstein 次数環である。

(2) $m=n$ であるか, または $m\neq n$ かつ $t=\min\{m,n\}=2$ である。

例 4.4 ([51, Example 10.8])**.** 無限体 k 上の多項式環 $R=k[X_1,X_2,\dots,X_d]$ $(d\geq 1)$ と整数 $n\geq 1$ に対して, Veronese 部分環 $R^{(n)}=k[R_n]$ を考える。$R^{(n)}$ は R の純 (pure) 部分環なので, Cohen-Macaulay 環である ([108, 注意 7.7, 補題 7.7])。特に, $R^{(n)}$ が Gorenstein 環であることと, $d=1$ または $n\mid d$ が成り立つことは同値である ([32, Examples (1)])。このとき, 次の主張が成り立つ。

(1) $d\leq 2$ の場合, $R^{(n)}$ は almost Gorenstein 次数環である ([51, Corollary 10.6])。

(2) $d\geq 3$ の場合, $R^{(n)}$ が almost Gorenstein 次数環であるための必要十分条件は, $n\mid d$ または $d=3$ かつ $n=2$ である。

以上の準備の下, blow-up 代数の almost Gorenstein 性に関する結果を紹介する。

定理 4.5 ([51, Theorem 8.3], [43, Theorem 1.3], [48, Theorem 1.3])**.** $(A,\mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d=\dim A\geq 3$ とし, 環 A は Gorenstein 環の準同型像とする。A の部分巴系 $a_1,a_2,\dots,a_r\in\mathfrak{m}$ $(3\leq r\leq d)$ に対して, $Q=(a_1,a_2,\dots,a_r)$ とおくと, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(Q)$ は almost Gorenstein 次数環である。

(2) A は正則局所環であり, かつ $a_1,a_2,\dots,a_r$ は A の正則巴系の一部である。

[12] 即ち, $\mathrm{a}(R)=\max\{n\in\mathbb{Z}\mid [\mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(R)]_n\neq 0\}=-\min\{n\in\mathbb{Z}\mid [\mathrm{K}_R]_n\neq 0\}$ である。

定理 4.5 は, [51, Theorem 8.3] において, [39] による canonical filtration の理論を駆使し, 基礎環 A が Gorenstein 環であり, Q が巴系イデアルである場合に証明された。続いて, [43, Theorem 1.3] において, Eagon-Northcott 複体を用いて極小自由分解の構造を解析し, 部分巴系で生成されるイデアルの場合へと拡張された。さらに, [48, Theorem 1.3] では, 基礎環に課す仮定が Gorenstein 性から Cohen-Macaulay 性へと緩和され, 上記の形で定理 4.5 が得られている。一方で, 定理 4.5 に関連する次の予想は依然として未解決である。

予想 4.6 ([48, Conjecture 1.4])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環とし, Gorenstein 環の準同型像とする。I $(\neq A)$ は環 A のイデアルであって, $\mathrm{ht}_A I \geq 3$ とする。このとき, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が almost Gorenstein 次数環ならば, A は Gorenstein 環である。

定理 4.5 に対して, Rees 代数の次数付き極大イデアルによる局所化の局所環としての almost Gorenstein 性は次のように特徴付けられる。

定理 4.7 ([43, Theorem 1.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Gorenstein 局所環とし, $d = \dim A \geq 3$ とする。A の部分巴系 $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ $(3 \leq r \leq d)$ に対して, $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ とおくと, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(Q)_{\mathfrak{M}}$ は almost Gorenstein 局所環である。

(2) A は正則局所環である。

但し, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(Q) + \mathcal{R}(Q)_+$ により, $\mathcal{R}(Q)$ の次数付き極大イデアルを表す。

定理 4.5 と定理 4.7 により, 局所環 $\mathcal{R}(Q)_{\mathfrak{M}}$ が almost Gorenstein であっても, 次数環 $\mathcal{R}(Q)$ が almost Gorenstein とは限らないことが従う。また, これらの結果において, 基礎環の次元は 3 以上と仮定しているが, 2 次元の場合は次のようになる。

注意 4.8 ([43, Proposition 2.10]). $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $\dim A = 2$ とする。A の巴系イデアル Q に対して, 次の 3 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(Q)$ は Gorenstein 環である。

(2) A は Gorenstein 環である。

(3) $\mathcal{R}(Q)_{\mathfrak{M}}$ は almost Gorenstein 局所環である。

次に, 例 2.5 と例 3.4 を鑑み, 2 次元正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルの Rees 代数を考察する。

定理 4.9 ([44, Theorem 1.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環であり, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。任意の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, $\mathcal{R}(I)$ は almost Gorenstein 次数環である。

定理 4.9 の証明の鍵は, J. Verma による joint reduction number が 0 であるような joint reduction の存在性にある ([100, Theorem 2.1])。加えて, Zariski の定理 ([104, Part II, Section 12], [105, Appendix 5, Theorem 2'], [64, Theorem 3.7]) により, 2 次元正則局所環上の極大イデアルの冪は整閉である。従って, 定理 4.9 から次の系が直ちに得られる。

系 4.10 ([44, Corollary 1.4])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環であり, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。任意の $\ell \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は almost Gorenstein 次数環である。

続いて, 定理 4.9 の拡張可能性を考察したい。定義の紹介から始める。

定義 4.11 ([76, Definition 3.2], [77, Theorem 1.1])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元優秀正規局所環とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は代数閉体と仮定する。A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I が p_g イデアルであるとは, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 正規整域であることをいう。

剰余体が代数閉体である 2 次元優秀正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上では, 任意の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルは p_g イデアルであるので, 次の定理は定理 4.9 の 1 つの拡張である。

定理 4.12 ([46, Theorem 1.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元優秀 Gorenstein 正規局所環とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は代数閉体であると仮定する。任意の p_g イデアル I に対して, $\mathcal{R}(I)$ は almost Gorenstein 次数環である。

また, 系 4.10 の拡張として, 次の定理が得られる。

定理 4.13 ([46, Theorem 1.4])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元 almost Gorenstein 局所環であり, 極小重複度を持つと仮定する。任意の $\ell \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は almost Gorenstein 次数環である。

系 4.14 ([46, Corollary 1.5])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元有理特異点とする。任意の $\ell \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は almost Gorenstein 次数環である。

系 4.10 の高次元化としては, 次の定理が成り立つ。

定理 4.15 ([46, Theorem 1.6])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A \geq 2$ とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。次の主張が成り立つ。

(1) $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ が almost Gorenstein 次数環であるための必要十分条件は, $\ell = 1$ かつ $d = 2$, または $\ell = d - 1$ である。

(2) $\ell \geq 2$, $d \geq 3$ の場合, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)_{\mathfrak{M}}$ が almost Gorenstein 局所環であるための必要十分条件は, $\ell \mid d - 1$ である。

但し, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell) + \mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)_+$ により, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ の次数付き極大イデアルを表す。

特に, $\ell = 2$, $d = 5$ の場合, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^2)_{\mathfrak{M}}$ は almost Gorenstein 局所環であるが, 次数環として $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^2)$ は almost Gorenstein ではない。

注意 4.16. 定理 4.15 の設定の下, $\ell = 1$ の場合, 定理 4.5 により, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell) = \mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は almost Gorenstein 次数環である。$d = 2$ の場合, 系 4.10 から, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は almost Gorenstein 次数環である。加えて, $\ell = d - 1$ の場合, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は Gorenstein 環である ([43, Proposition 2.3])。

本節の最後に, 随伴次数環の almost Gorenstein 性に関する結果を紹介する。ここで, Cohen-Macaulay 環 R に対して, $\mathrm{r}(R)$ により, R の Cohen-Macaulay 型を表す。

定理 4.17 ([51, Theorem 9.1])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環であり, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。環 A は正準加群 K_A を持つと仮定する。A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, 随伴次数環 $G(I)$ が almost Gorenstein 次数環であり, $\mathrm{r}(G(I)) = \mathrm{r}(A)$ が成り立つならば, A は almost Gorenstein 局所環である。

定理 4.17 の証明は, 次元に関する数学的帰納法による。1 次元の場合は, canonical filtration を用い, 2 次元以上の場合は, 適切に上表元を選ぶことにより証明される。

5 Blow-up 代数の系列的 Cohen-Macaulay 性

加群の系列的 Cohen-Macaulay 性は, Cohen-Macaulay 性の拡張概念の 1 つであり, 元々, 次数環上の加群に対して, 1983 年に R. P. Stanley によって定義された概念である ([86, 2.9 Definition])。局所環上の加群に対する定義は, 1998 年, P. Schenzel により, Cohen-Macaulay filtered module という名称の下で導入された ([81, Definition 4.1])。系列的 Cohen-Macaulay 加群という用語が局所環上の加群に対して明示的に定義されたのは, 2003 年の [18, Definition

4.2] である。系列的 Cohen-Macaulay 加群の基本的性質に関しては, [16, 17, 38, 94, 95] 等を参照されたい。

以下, 特に断らない限り, 本節では, A は Noether 環, $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とし, $s = \dim_A M < \infty$ と仮定する。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\dim_A N \leq n$ を満たす最大の M の A-部分加群 N を M_n と表す。集合 $\mathcal{S}(M) = \{\dim_A N \mid N \text{ は } M \text{ の } A\text{-部分加群}, N \neq (0)\}$ を考えると, 等式

$$\mathcal{S}(M) = \{\dim A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M\}$$

が成り立つ。$\ell = \#\mathcal{S}(M)$ とおき

$$\mathcal{S}(M) = \{d_1 < d_2 < \cdots < d_\ell = s\}$$

と表す。各 $1 \leq i \leq \ell$ に対して, $D_i = M_{d_i}$ とおくと, 次の M の A-部分加群の列

$$D_0 := (0) \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \cdots \subsetneq D_\ell = M$$

が得られる。これを M の dimension filtration という。各 $1 \leq i \leq \ell$ に対して, $C_i = D_i/D_{i-1}$ と定める。すると, $\dim_A D_i = \dim_A C_i = d_i$ が成り立つ。

定義 5.1 ([86, 2.9 Definition], [81, Definition 4.1])**.** A-加群 M が系列的 Cohen-Macaulay A-加群であるとは, 任意の $1 \leq i \leq \ell$ に対して, 剰余加群 C_i が Cohen-Macaulay A-加群であることをいう。Noether 環 A が系列的 Cohen-Macaulay 環であるとは, $\dim A < \infty$ であり, かつ A 自身が系列的 Cohen-Macaulay A-加群であることをいう。

例 5.2. $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とする。次の主張が成り立つ。

(1) $\dim_A M = 1$ ならば, M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である。

(2) M が Cohen-Macaulay A-加群ならば, M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である。A-加群 M が unmixed[13]ならば, 逆も正しい。

(3) 整数 $n \geq 1$ に対して, M_i が Cohen-Macaulay A-加群 $(1 \leq i \leq n)$ ならば, $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である ([95, Proposition 3.2])。

(4) A 上 M のイデアル化 $A \ltimes M$[14]が系列的 Cohen-Macaulay 環であるための必要十分条件は, A が系列的 Cohen-Macaulay 環であり, かつ M が系列的 Cohen-Macaulay A-加群である ([95, Theorem 1.2])。

(5) 自己同型群 $\mathrm{Aut}\, A$ の有限部分群 G に対して, $\#G$ は A の単元とする。このとき, A が系列的 Cohen-Macaulay 環ならば, 不変式環 A^G は系列的 Cohen-Macaulay 環である ([95, Corollary 3.7])。

例 5.3 ([86, pages 86–87])**.** k は体とする。単体的複体 Δ に付随する Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ に対して, Δ が shellable ならば, $k[\Delta]$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

注意 5.4. 単体的複体 Δ が shellable であることの定義には, Δ が pure であることを仮定する流儀がある ([6, Definition 5.1.11])。このとき, 付随する Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ は Cohen-Macaulay 環となる ([6, Theorem 5.1.13])。一方で, pure であることを要請しない shellable の定義もあり ([4, 2.1 Definition]), その場合には, $k[\Delta]$ は系列的 Cohen-Macaulay 環となる。

命題 5.5 ([94, Proposition 2.2])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とする。$x \in \mathfrak{m}$ は M-非零因子とする。次の 2 条件は同値である。

[13] $\widehat{A}$, $\widehat{M}$ により, 環 A と加群 M の $\mathfrak{m}$-進完備化を表すとき, 等式 $\mathrm{Ass}_{\widehat{A}}\, \widehat{M} = \mathrm{Assh}_{\widehat{A}}\, \widehat{M}$ が成り立つことである。
[14] イデアル化の基本的性質に関しては, [108, 1.86] を参照されたい。

(1) M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である。

(2) M/xM は系列的 Cohen-Macaulay A/xA-加群であり, かつ $\{D_i/xD_i\}_{0\le i\le \ell}$ は M/xM の dimension filtration である。

注意 5.6. 命題 5.5 (2) $\Rightarrow$ (1) において, $\{D_i/xD_i\}_{0\le i\le \ell}$ が M/xM の dimension filtration であるという仮定は不可欠である。実際, A は 2 次元 Noether 局所整域, $\operatorname{depth} A = 1$ とする[15]。任意の $0 \neq x \in A$ に対して, A/xA は系列的 Cohen-Macaulay であるが, A は系列的 Cohen-Macaulay ではない。

以上を踏まえて, blow-up 代数の系列的 Cohen-Macaulay 性を考察する。鍵となる着想は, filtration に付随する blow-up 代数へと枠組みを拡張することである。

定義 5.7 (イデアルの filtration に付随する blow-up 代数)**.** 環 A のイデアルの族 $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が A のイデアルの filtration であるとは, 次の 3 条件

(1) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $F_n \supseteq F_{n+1}$

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, $F_mF_n \subseteq F_{m+n}$

(3) $F_0 = A$

を満たすことである[16]。環 A のイデアルの filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に付随して, 次数環

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \sum_{n\ge 0} F_nt^n \subseteq A[t]$$
$$\mathcal{R}'(\mathcal{F}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_nt^n \subseteq A[t, t^{-1}]$$
$$G(\mathcal{F}) = \mathcal{R}'(\mathcal{F})/t^{-1}\mathcal{R}'(\mathcal{F})$$

が定まり, それぞれ $\mathcal{F}$ の Rees 代数, 拡大 Rees 代数, 随伴次数環と呼ぶ。但し, t により, A 上の不定元を表す。すると, $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n\ge 0} F_n$, $\mathcal{R}'(\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ であって, $G(\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n\ge 0} F_n/F_{n+1}$ が成り立つ。

注意 5.8. 環 A のイデアルの filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して, $F_1 = A$ であることと, $G(\mathcal{F})$ が零環であることは同値である。

例 5.9. 次に挙げるイデアル F_n による族 $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ がイデアルの filtration の例である。

(1) A のイデアル I に対して, $F_n = I^n$ (イデアルの冪)

(2) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対して, $F_n = \mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^nA_{\mathfrak{p}} \cap A$ (素イデアルのシンボリック冪)

(3) A のイデアル I に対して, $F_n = \overline{I^n}$ (イデアルの冪の整閉包)

(4) A のイデアル I に対して, $F_n = \widetilde{I^n}$ (イデアルの冪の Ratliff-Rush 閉包)

(5) 次数環 $R = \bigoplus_{n\ge 0} R_n$ のとき, $F_n = \sum_{k\ge n} R_k$

定義 5.7 と同様に, 環 A のイデアルの filtration に基づく A-部分加群の filtration を次のように導入する。

[15] 例えば, Nagata's bad example [75, Appendix A1] がある。

[16] (1) は随伴次数環 $G(\mathcal{F})$ を考える上で不可欠な条件であり, (2) は blow-up 代数に環構造を入れるための条件である。(3) は, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $F_n = (0)$ という自明な filtration を排除し, また blow-up 代数を A-代数とみなすために課されている。

定義 5.10. $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は環 A のイデアルの filtration とする。M は A-加群とする。M の A-部分加群の族 $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が M の A-部分加群の $\mathcal{F}$-filtration であるとは, 次の 3 条件

(1) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $M_n \supseteq M_{n+1}$

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, $F_m M_n \subseteq M_{m+n}$

(3) $M_0 = M$

を満たすことである。A-加群 M の A-部分加群の $\mathcal{F}$-filtration に対して

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \sum_{n\geq 0} t^n \otimes M_n \subseteq A[t] \otimes_A M$$
$$\mathcal{R}'(\mathcal{M}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n \otimes M_n \subseteq A[t, t^{-1}] \otimes_A M$$
$$G(\mathcal{M}) = \mathcal{R}'(\mathcal{M})/t^{-1}\mathcal{R}'(\mathcal{M})$$

と定め, それぞれ $\mathcal{M}$ の Rees 加群, 拡大 Rees 加群, 随伴次数加群という。但し, t は A 上の不定元とし, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $t^n \otimes M_n = \{t^n \otimes x \mid x \in M_n\} \subseteq A[t, t^{-1}] \otimes_A M$ とする。

定義 5.7, 定義 5.10 により, $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は次数 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群, $\mathcal{R}'(\mathcal{M})$ は次数 $\mathcal{R}'(\mathcal{F})$-加群であって, $F_1 \neq A$ である場合には, $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ は次数 $G(\mathcal{F})$-加群である。なお, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, A-加群としての同型 $t^n \otimes M_n \cong M_n$ を踏まえると

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} M_n, \quad \mathcal{R}'(\mathcal{M}) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n, \quad G(\mathcal{M}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} M_n/M_{n+1}$$

が成り立つ。以下, 本節においては, 次の設定の下に議論を進める。

設定 5.11. $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし, $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とする。$\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ により A のイデアルの filtration を表し, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は M の A-部分加群の $\mathcal{F}$-filtration とする。さらに, $F_1 \neq A$ であり, $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ は Noether 環であって, $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は有限生成 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群と仮定する。$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(\mathcal{F}) + \mathcal{R}(\mathcal{F})_+$ により, $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ の次数付き極大イデアルを表す。

定理 5.12 ([94, Corollary 2.4, Proposition 2.5 (3), Corollary 2.6])**.** 次の主張が成り立つ。

(1) $\dim_{\mathcal{R}(\mathcal{F})} \mathcal{R}(\mathcal{M}) = \begin{cases} \dim_A M + 1 & (\exists\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Assh}_A M \text{ s.t. } F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}) \\ \dim_A M & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $\dim_{\mathcal{R}'(\mathcal{F})} \mathcal{R}'(\mathcal{M}) = \dim_A M + 1$

(3) $\dim_{G(\mathcal{F})} G(\mathcal{M}) = \dim_A M$

但し, $\mathrm{Assh}_A M = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A M \mid \dim A/\mathfrak{p} = \dim_A M\}$ である。

ここで, 有限生成次数 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群 N, $\dim_{\mathcal{R}(\mathcal{F})} N = t$ に対して

$$\mathrm{a}(N) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^t_{\mathfrak{M}}(N)]_n \neq (0)\}$$

と定め, N の a-不変量[17]と呼ぶ。次の定理で述べるように, Rees 代数の Cohen-Macaulay 性に関する後藤-下田の定理 (定理 2.4) は, イデアルや加群の filtration に対しても成立する。

定理 5.13 ([47, Part II, Theorem (1.1)], [94, Theorem 3.8], [101, Theorem 1.1])**.** M は Cohen-Macaulay A-加群とする。次の 2 条件は同値である。

[17] [53, Definition (3.1.4)] を参照されたい。

(1) $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は Cohen-Macaulay $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群であり, かつ $\dim_{\mathcal{R}(\mathcal{F})} \mathcal{R}(\mathcal{M}) = d+1$ である。

(2) $G(\mathcal{M})$ は Cohen-Macaulay $G(\mathcal{F})$-加群であり, かつ $\mathrm{a}(G(\mathcal{M})) < 0$ である。

定理 5.13 は, 1990 年代に後藤-西田, 及び Viet により, イデアルの filtration に基づく blow-up 代数に対して証明され, その後 2018 年に, 谷口-Phuong-N. T. Dung-T. N. An により加群の filtration の場合へと拡張された。続いて, このような filtration から構成される blow-up 代数の系列的 Cohen-Macaulay 性について考察する。

設定 5.11 の下, M の dimension filtration $\{D_i\}_{0 \le i \le \ell}$ を取り, 各 $1 \le i \le \ell$ に対し, $C_i = D_i/D_{i-1}$ とおく。ここで

$$\mathcal{D}_i = \{M_n \cap D_i\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathcal{C}_i = \{[(M_n \cap D_i) + D_{i-1}]/D_{i-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

を考えると, $\mathcal{D}_i$ と $\mathcal{C}_i$ はそれぞれ D_i, C_i の A-部分加群の $\mathcal{F}$-filtration である。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, A-加群としての短完全列

$$0 \to [\mathcal{D}_{i-1}]_n \to [\mathcal{D}_i]_n \to [\mathcal{C}_i]_n \to 0$$

から, 次数 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群としての短完全列が導出される。

$$0 \to \mathcal{R}(\mathcal{D}_{i-1}) \to \mathcal{R}(\mathcal{D}_i) \to \mathcal{R}(\mathcal{C}_i) \to 0$$
$$0 \to \mathcal{R}'(\mathcal{D}_{i-1}) \to \mathcal{R}'(\mathcal{D}_i) \to \mathcal{R}'(\mathcal{C}_i) \to 0$$
$$0 \to G(\mathcal{D}_{i-1}) \to G(\mathcal{D}_i) \to G(\mathcal{C}_i) \to 0$$

補題 5.14 ([17, Proposition 5.1], [94, Lemma 3.1])**.** 次の主張が成り立つ。

(1) $\{\mathcal{R}'(\mathcal{D}_i)\}_{0 \le i \le \ell}$ は $\mathcal{R}'(\mathcal{M})$ の dimension filtration である。

(2) 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M$ に対して, $F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$ と仮定すると, $\{\mathcal{R}(\mathcal{D}_i)\}_{0 \le i \le \ell}$ は $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ の dimension filtration である。

以上の準備の下, 次の定理が成り立つ。特に, 定理 5.16 は, 後藤-下田の定理の系列的 Cohen-Macaulay 性への一般化である。

定理 5.15 ([17, Theorem 5.2], [94, Theorem 1.1])**.** 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}'(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}'(\mathcal{F})$-加群である。

(2) $G(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $G(\mathcal{F})$-加群であり, かつ $\{G(\mathcal{D}_i)\}_{0 \le i \le \ell}$ は $G(\mathcal{M})$ の dimension filtration である。

上記の同値条件が成り立つとき, M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である。

定理 5.16 ([17, Theorem 5.3], [94, Theorem 1.2])**.** M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群とし, 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M$ に対して, $F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$ と仮定する。次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群である。

(2) $G(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $G(\mathcal{F})$-加群, $\{G(\mathcal{D}_i)\}_{0 \le i \le \ell}$ は $G(\mathcal{M})$ の dimension filtration であって, 任意の $1 \le i \le \ell$ に対して, $\mathrm{a}(G(\mathcal{C}_i)) < 0$ である。

上記の同値条件が成り立つとき, $\mathcal{R}'(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}'(\mathcal{F})$-加群である。

本節の最後に, 定理 5.15, 定理 5.16 の Stanley-Reisner 環への応用を論じる。

設定 5.17. Δ は $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n > 0)$ を頂点集合とする単体的複体で, $\Delta \neq \emptyset$ とする。$\mathcal{F}(\Delta)$ により, Δ の facet 全体の集合を表し, $m = \#\mathcal{F}(\Delta)$ とおく。体 k 上の多項式環 $S = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ 内において, イデアル $I_\Delta = (X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_r} \mid \{i_1 < i_2 < \cdots < i_r\} \notin \Delta)$ を考える。単体的複体 Δ に付随する Stanley-Reisner 環

$$R = k[\Delta] = S/I_\Delta$$

を $\mathbb{Z}$-次数環 $R = \sum_{n \geq 0} R_n$ とみなし, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $I_n = \sum_{k \geq n} R_k$ とおくと, $I_n = \mathfrak{m}^n$ となる。但し, $\mathfrak{m} = R_+ = \sum_{n > 0} R_n$ は R の次数付き極大イデアルである。

定義 5.18 ([4, 2.1 Definition])**.** 単体的複体 Δ が shellable[18]であるとは, $m = 1$ または, $m \geq 2$ であって, 次の 3 条件

(1) $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$

(2) 任意の $2 \leq i \leq m$ に対して, $\langle F_1, F_2, \ldots, F_{i-1} \rangle \cap \langle F_i \rangle$ が pure[19]

(3) 任意の $2 \leq i \leq m$ に対して, $\dim \langle F_1, F_2, \ldots, F_{i-1} \rangle \cap \langle F_i \rangle = \dim F_i - 1$

を満たす $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ が存在することである。このような $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ を shelling order と呼ぶ。

単体的複体 Δ が shellable ならば, shelling order $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ を $\dim F_1 \geq \dim F_2 \geq \cdots \geq \dim F_m$ を満たすように選ぶことができる。仮定より, $\Delta \neq \{\emptyset\}$ であるので, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ に対して, $\mathfrak{p} \not\supseteq I_1$ が成り立つ。加えて, Δ が shellable ならば, R は系列的 Cohen-Macaulay 環なので, 次を得る。

命題 5.19 ([94, Proposition 5.1])**.** 単体的複体 Δ が shellable ならば, $\mathcal{R}'(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

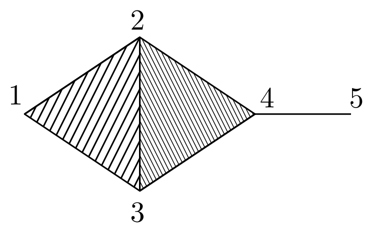
定理 5.20 ([94, Theorem 5.2])**.** Δ は shellable であり, shelling order $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ は $\dim F_1 \geq \cdots \geq \dim F_m$ を満たすと仮定する。次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

(2) $m = 1$ または, $m \geq 2$ であって, 任意の $2 \leq i \leq m$ に対して, $\dim F_i + 1 > \#\mathcal{F}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ が成り立つ。但し, $\Delta_1 = \langle F_1, F_2, \ldots, F_{i-1} \rangle$, $\Delta_2 = \langle F_i \rangle$ とする。

系 5.21 ([94, Corollary 5.4])**.** 定理 5.20 の設定の下, $m \geq 2$ であり, $\dim F_m \geq 1$ と仮定する。任意の $2 \leq i \leq m$ に対して, $\langle F_1, F_2, \ldots, F_{i-1} \rangle \cap \langle F_i \rangle$ が単体ならば, $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

例 5.22. $\Delta = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ を $F_1 = \{1, 2, 3\}$, $F_2 = \{2, 3, 4\}$, $F_3 = \{4, 5\}$ により定めると, Δ は shellable であって, $\langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle$ と $\langle F_1, F_2 \rangle \cap \langle F_3 \rangle$ は単体である。従って, $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

$\Delta =$ 

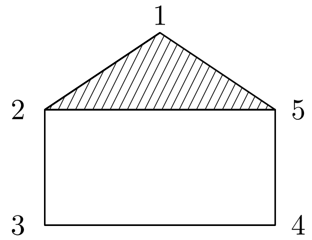
[18] shellable とは, 単体的複体 Δ の facet を貝殻を 1 枚ずつ重ねるように順番に並べられることを意味する。
[19] 単体的複体 Δ が pure であるとは, 任意の $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\Delta)$ に対し, $\dim F_1 = \dim F_2$ が成り立つことである。

例 5.23. $\Delta = \langle F_1, F_2, F_3, F_4 \rangle$ を $F_1 = \{1,2,5\}$, $F_2 = \{2,3\}$, $F_3 = \{3,4\}$, $F_4 = \{4,5\}$ により定めると, Δ は shellable である。$\Delta_1 = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$, $\Delta_2 = \langle F_4 \rangle$ を考えると

$$\#\mathcal{F}(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 2 = \dim F_4 + 1$$

であるので, $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環ではない。

$\Delta =$



6 Blow-up 代数の Buchsbaum 性

Buchsbaum 環は, 1973 年に W. Vogel が D. A. Buchsbaum の問題に対して否定的な結論を得た事実を契機として, J. Stückrad-Vogel によって導入された Cohen-Macaulay 環の拡張概念である[20]。まず, Buchsbaum の問いを振り返りたい。

問題 6.1 ([8, page 228], [33, page 42])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とする。環 A の任意の巴系イデアル Q に対して, 差 $\ell_A(A/Q) - \mathrm{e}_Q^0(A)$ は $\dim A - \operatorname{depth} A$, 或いは他の不変量によって決定されるだろうか。

ここで, $\ell_A(X)$ により A-加群 X の長さを表し, 有限生成 A-加群 M とその巴系イデアル $\mathfrak{q}$ に対して, $\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}^0(M)$ は $\mathfrak{q}$ に関する M の重複度とする。

現代的な観点から見れば, 上記の問いが正しくはないことは容易に判別されるが, その反例が Vogel によって初めて提示されたのは 1973 年のことである ([102, Satz])。その後, 上記の差 $\ell_A(A/Q) - \mathrm{e}_Q^0(A)$ が一定値となる局所環の構造が解析される過程で, Buchsbaum 環の概念が, 同年 Stückrad-Vogel によって定義された。もっとも 1973 年の段階では, Buchsbaum 環は I-環 (I-Ring) と呼ばれており ([88, Definition 2]), その翌年の 1974 年に, Buchbaum 環という名称が初めて登場した ([89, Section 3, Definitionen, page 439])。

以下, $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし, M は有限生成 A-加群, $s = \dim_A M$ とする。

定義 6.2 ([88, Definition 2], [89, Section 3, Definitionen, page 439])**.** A-加群 M が Buchsbaum 環 A-加群であるとは, 差 $\mathrm{I}(M) = \ell_A(M/\mathfrak{q}M) - \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}^0(M)$ が, M の巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の選び方に依らず, 一定値[21]を取ることをいう。また, $s \geq 1$ の場合, この条件は, M の任意の巴系 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ が M-弱列 (weak M-sequence) を成すこと, 即ち, 任意の整数 $0 \leq i \leq s-1$ に対して, 等式

$$(a_1, \ldots, a_i)M :_M a_{i+1} = (a_1, \ldots, a_i)M :_M \mathfrak{m}$$

が成り立つことと同値[22]である ([90, Theorem 1.12], [108, 定理 9.14])。なお, M が Buchsbaum A-加群であることは, M の任意の巴系 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ が d-列[23]を成す, 即ち, 任意の整数 $1 \leq i \leq j \leq s$ に対して, 等式

$$(a_1, \ldots, a_{i-1})M :_M a_i a_j = (a_1, \ldots, a_{i-1})M :_M a_j$$

[20] 系列的 Cohen-Macaulay 性とは別方向への拡張である。後藤四郎先生のお言葉であるが, Cohen-Macaulay 環との比較において, Buchsbaum 環とは双子であり, Buchsbaum 環の更なる一般化である FLC 環 (finitely generated local cohomology modules を持つ環) とは従兄弟, 系列的 Cohen-Macaulay 環とは友達である。

[21] 一般に, $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) \geq \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}^0(M)$ が成り立つ ([108, 命題 8.21]) ので, 一定値は非負整数値を取る。

[22] 但し, $i = 0$ のとき, $(a_1, \ldots, a_i) = (0)$ と定める。

[23] d-列の概念は, C. Huneke ([63, Definition 1.1]) により導入された。基本的性質に関しては, [108, 付録 D] も併せて参照されたい。

が成り立つこととも同値である ([63, Remarks (1), page 252], [108, 命題 9.12])。環 A が Buchsbaum 環であるとは, A 自身が Buchsbaum A-加群であることをいう。

M が Buchsbaum A-加群であるとき, M の巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の取り方に依らず定まる一定値

$$\mathrm{I}(M) = \ell_A(M/\mathfrak{q}M) - \mathrm{e}^0_{\mathfrak{q}}(M)$$

を M の Buchsbaum 不変量[24]という。次元正の Buchsbaum A-加群 M は, M-弱列により特徴付けられるため, $\mathfrak{m}\,\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ $(\forall\, i \neq s)$ であって, 局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$ $(\forall\, i \neq s)$ は剰余体 $A/\mathfrak{m}$ 上の有限次元ベクトル空間となり, 等式

$$\mathrm{I}(M) = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \ell_A(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M))$$

が成り立つ ([90, Proposition 2.6])。Buchsbaum A-加群 M において, 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A M \setminus \{\mathfrak{m}\}$ に対して, 局所化 $M_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay $A_{\mathfrak{p}}$-加群であって, 等式 $\dim_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \dim_A M - \dim A/\mathfrak{p}$ が成り立つ ([108, 定理 9.6])。

有限生成 A-加群 $M \neq (0)$ に対し, $s = \dim_A M$ とおくと, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^n, M)$ であるので, 自然な射

$$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^n, M) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$$

が得られる。次の定理が, 所謂, Buchsbaum 性に関する surjectivity criterion である。

定理 6.3 ([90, Theorem 2.10], [108, 定理 9.19])**.** 任意の $i \neq s$ に対して, 上記の自然な射が全射であれば, M は Buchsbaum A-加群である。A が正則局所環であれば, 逆も正しい。

定理 6.3 の帰結として, 次を得る。

系 6.4 ([90, Theorem 2.10], [108, 系 9.20])**.** $t = \mathrm{depth}_A M < s$ かつ $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ $(i \neq t, s)$ と仮定する。このとき, M が Buchsbaum A-加群であるための必要十分条件は, $\mathfrak{m}\,\mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ が成り立つことである。

例 6.5 ([108, 例 9.16])**.** k は体とし, $S = k[[X, Y, Z, W]]$ は k 上の形式的冪級数環とする。このとき, $A = S/(X, Y) \cap (Z, W)$ は 2 次元 Buchsbaum 局所環, $\mathrm{depth}\, A = 1$ である。

以下, 与えられた blow-up 代数が如何なる条件下で Buchsbaum 環になり得るかという問いを考察する。

定理 6.6 ([35, Theorem 1.1 (3)])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Buchsbaum 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。A の任意の巴系イデアル Q に対して, $G(Q)$ は Buchsbaum 環である。

定理 6.7 ([87, Theorem 13])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Buchsbaum 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。A の任意の巴系イデアル Q に対して, $\mathcal{R}(Q)$ は Buchsbaum 環である。

定理 6.6, 定理 6.7 は, 後藤-下田の定理の Buchsbaum 性への拡張可能性を示唆する。この方面においては, 次の結果が知られている。

定理 6.8 ([37, Theorem (1.2)])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 2$ とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I は極小重複度[25]を持つと仮定する。次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Buchsbaum 環である。

[24]或いは, I-不変量とも呼ばれる。

[25]等式 $\mu_A(I) = \mathrm{e}^0_I(A) + d - \ell_A(A/I)$ が成り立つことである。

(2) $G(I)$ は Buchsbaum 環である。

その後, 礎石イデアル $I = Q :_A \mathfrak{m}$ に付随する blow-up 代数の Buchsbaum 性を巡る諸問題も提起され, 後藤, 西田に加え, 山岸規久道や櫻井秀人により精力的に解析されている。本節においては, より多くの Buchsbaum となる Rees 代数の例を提供するという観点から, Ratliff-Rush 閉包に着目したい。ここで, 加群に対する Rees 代数を考察する。

Rees 代数は通常イデアルに基づき定義されるが, 自由加群の対称代数が多項式環に同型である事実を用いて, 自然に加群へと拡張され, 特異点論への応用を中核に加群に固有の理論が展開されている ([25, 26, 27, 28, 29, 84, 85])。

定義 6.9 (加群の Rees 代数)**.** A は Noether 環とする。有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群 M に対して, 包含写像から誘導される対称代数 $\mathrm{Sym}_A(-)$ の間の射

$$\mathrm{Sym}(i) : \mathrm{Sym}_A(M) \to \mathrm{Sym}_A(F) = A[t_1, t_2, \ldots, t_r] = S$$

を考える。このとき, $\mathcal{R}(M) = \mathrm{Im}\,\mathrm{Sym}(i)$ と定め, A-加群 M の Rees 代数と呼ぶ。多項式環 S を自然に $\mathbb{Z}$-次数環と考え, この次数付けを用いて $\mathcal{R}(M)$ も $\mathbb{Z}$-次数環の構造を持つ。従って

$$\mathcal{R}(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^n$$

と表せる。但し, M^n は $\mathcal{R}(M)$ の n 次斉次成分である。

A-加群 M は, $\mathcal{R}(M)$ の 1 次斉次成分 $[\mathcal{R}(M)]_1$ に一致し, 対称代数は次数 1 の斉次成分で生成されるので, Rees 代数 $\mathcal{R}(M)$ は A 上 M により生成される標準的次数付き A-代数である。また, $r = 1$ の場合, A-加群 M として A 内のイデアル I を選ぶと, 加群 M の Rees 代数はイデアル I の Rees 代数に一致する。即ち, $\mathcal{R}(M) = \mathcal{R}(I) = A[It]$ が成り立つ。環 A 内のイデアル $I_1, I_2, \ldots, I_r$ に対して, A-加群 $M = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_r$ を $F = A^{\oplus r}$ の A-部分加群と考えると, M の Rees 代数は多重 Rees 代数 $\mathcal{R}(I_1, I_2, \ldots, I_r) = A[I_1t_1, I_2t_2, \ldots, I_rt_r]$ となる。

注意 6.10. M が A-加群として階数 $e > 0$ を持つ[26]とすると, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}(i) = t(\mathrm{Sym}_A(M))$ が成り立つ。ここで, $t(\mathrm{Sym}_A(M))$ は $\mathrm{Sym}_A(M)$ の A-加群としての捩れ部分を表す。従って

$$\mathcal{R}(M) \cong \mathrm{Sym}_A(M)/t(\mathrm{Sym}_A(M))$$

となり, Rees 代数 $\mathcal{R}(M)$ は M の自由加群への埋め込みの取り方に依存しない。

定理 6.11 ([85, proposition 2.2])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $d = \dim A$ とし, M は有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群であって, 階数 r を持つとする。等式

$$\dim \mathcal{R}(M) = d + r = d + \mathrm{ht}_{\mathcal{R}(M)}\, \mathcal{R}(M)_+$$

が成り立つ。

加群の Rees 代数は, イデアルの Rees 代数の場合と異なり, 随伴次数環が存在しないという顕著な事実により, その構造はイデアルの場合に比べ遥かに複雑となる。この事実を鑑み, 随伴次数環の非存在性を補うべく, 導入された概念が generic Bourbaki ideals である。

定義-定理 6.12 ([85, Definition 3.3, Theorem 3.5])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $d = \dim A$ とし, M は有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群であって, 階数 r を持つとする。$\mathrm{depth}\, A_\mathfrak{p} \leq 1$ を満たす任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ に対して, $M_\mathfrak{p}$ は自由 $A_\mathfrak{p}$-加群であると仮定する。A-加群 M の生成元を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とし, A 上の多項式環

$$A' = A[Z] = A[Z_{ij} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r - 1]$$

[26]即ち, $\mathrm{Q}(A)$ により A の全商環を表すとき, $\mathrm{Q}(A) \otimes_A M \cong \mathrm{Q}(A)^{\oplus e}$ が成り立つことである。

を考える。但し, $Z = \{Z_{ij} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le r-1\}$ は A 上の不定元の成す集合を表す。また, $M' = M \otimes_A A'$ 内において, $x_j = \sum_{i=1}^{n} Z_{ij} a_i$ $(1 \le j \le r-1)$ とおき, $G' = \sum_{j=1}^{r-1} A' x_j$ とする。さらに

$$A'' = A[Z]_{\mathfrak{m}A[Z]}, \quad M'' = M \otimes_A A'', \quad G'' = G' \otimes_{A'} A''$$

とおく。このとき, $G'' \cong (A'')^{\oplus(r-1)}$ であって, $\mathrm{grade}_{A''} I > 0$ かつ $E''/G'' \cong I$ を満たす A'' のイデアル I が存在する ([85, Proposition 3.2])。イデアル I を E の generic Bourbaki ideal という ([85, Definition 3.3])。上記の設定の下, 次の主張が成り立つ ([85, Theorem 3.5])。

(1) $\mathcal{R}(M)$ が Cohen-Macaulay 環であるための必要十分条件は, $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環である。

(2) $\mathcal{R}(I)$ が正規ならば, $\mathcal{R}(M)$ は正規である。逆は, (0) でない任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対し, $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{p}} \otimes_A \mathcal{R}(M) \ge r+1$ ならば, 正しい。

従って, 加群の Rees 代数の議論がイデアルの場合に帰着されるのである。次に, 加群に対する整閉包の概念を紹介する。

定義 6.13. A は Noether 環とし, M は有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群とする。整数 $n \ge 0$ に対して, M^n の整閉包を

$$\overline{M^n} = \left(\overline{\mathcal{R}(M)}^S\right)_n \subseteq S_n = F^n$$

により定める。但し, $\overline{\mathcal{R}(M)}^S$ は $\mathcal{R}(M)$ の S 内における整閉包を表す。言い換えるなら, $\overline{M^n}$ は S のイデアル $(MS)^n$ に対する整閉包の n 次斉次成分にも一致する。即ち

$$\overline{M^n} = \left(\overline{(MS)^n}\right)_n$$

が成り立つ。特に, $\overline{M} = \left(\overline{MS}\right)_1 \subseteq F$ であって, 元 $x \in \overline{M}$ は, 環 S 内における等式

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \quad (\exists\, n > 0,\ \exists\, c_i \in M^i)$$

を満たす。

注意 6.14 ([23, Lemma 2.2]). M が階数 r を持つならば, $\mathrm{Q}(\mathcal{R}(M)) = \mathrm{Q}(S)$ である。特に, A が正規整域ならば, $\overline{\mathcal{R}(M)}^{\mathrm{Q}(\mathcal{R}(M))} = \overline{\mathcal{R}(M)}^S$ が成り立つ。但し, $\mathrm{Q}(-)$ により全商環を表す。

以上を踏まえて, 加群に対する Ratliff-Rush 閉包を導入する。

定義 6.15 ([23, Definition 3.1])**.** A は Noether 環, M は有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群とする。自然な全射 $\varepsilon : S \to S/\mathcal{R}(M)$ について, 環 S の次数付き部分環

$$\widetilde{\mathcal{R}(M)}^S = \varepsilon^{-1}\left(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(S/\mathcal{R}(M))\right) \subseteq S$$

を考える。但し, $\mathfrak{a} = \mathcal{R}(M)_+$ とする。整数 $n \ge 0$ に対して, M^n の Ratliff-Rush 閉包を

$$\widetilde{M^n} = \left(\widetilde{\mathcal{R}(M)}^S\right)_n \subseteq S_n = F^n$$

により定める。即ち

$$\widetilde{M^n} = \bigcup_{\ell > 0} \left[(M^n)^{\ell+1} :_{F^n} (M^n)^{\ell}\right]$$

が成り立つ。特に, $\widetilde{M} = \bigcup_{\ell > 0} \left[M^{\ell+1} :_F M^{\ell}\right]$ である。

定義6.15はイデアルのRatliff-Rush閉包の自然な拡張である。基本的性質等の詳細は, [23, Section 3] を参照されたい。

定理 6.16 ([23, Theorem 1.2], [111, 定理3.6])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は2次元正則局所環とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。$M \neq (0)$ は有限生成 torsion-free A-加群とする。次の2条件は同値である。

(1) $\widetilde{M} = \overline{M}$

(2) $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(M)$ は正規スキーム

上記の同値条件が成り立つとき, $\mathcal{R}(M)$ がCohen-Macaulay環であるための必要十分条件は, A-加群 M が整閉である。

系 6.17 ([23, Theorem 5.1], [111, 系3.7])**.** 定理6.16の設定の下, 次の3条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(M)$ はBuchsbaum環であり, かつ $\widetilde{M} = \overline{M}$ である。

(2) $\mathcal{R}(M)$ はBuchsbaum環であり, かつ $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(M)$ は正規である。

(3) $\mathfrak{m}\overline{M} \subseteq M$ であり, かつ $M \cdot \overline{M} = M^2$ である。

例 6.18. $A = k[[X, Y]]$ は無限体 k 上の形式的冪級数環とする。次の主張が成り立つ。

(1) $I = (X^4, X^3Y^2, XY^6, Y^8)$, $M = I \oplus I \subseteq F = A \oplus A$ とおくと, $\mathcal{R}(M)$ はBuchsbaum環ではない。

(2) $I_1 = (X^6, X^5Y^2, X^4Y^3, X^3Y^4, XY^7, Y^8)$, $I_2 = (X^5, X^4Y^2, X^3Y^3, XY^6, Y^7)$ とし, $M = I_1 \oplus I_2 \subseteq F = A \oplus A$ とおくと, $\mathcal{R}(M)$ はBuchsbaum環である。

(3) $M = \left\langle \begin{pmatrix} X^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^2Y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} XY^3 \\ X^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y^5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ X^2Y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ XY^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Y^5 \end{pmatrix} \right\rangle$ とおくと, A-加群 M は直既約であり, $\mathcal{R}(M)$ はBuchsbaum環である。

7 Blow-up代数のCohen-Macaulay正規性

本小稿の掉尾を飾るべく, 本節ではblow-up代数, 特にRees代数のCohen-Macaulay正規性について論じる。第6節において, 加群に対する整閉包を紹介したが, ここではイデアルの場合の定義を改めて振り返りたい。

以下, A はNoether環, I は A のイデアルとする。元 $x \in A$ が I 上で整 (integral over I) であるとは, 等式

$$x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n = 0, \quad \exists\, n > 0, \exists\, c_i \in I^i \ (1 \leq i \leq n)$$

を満たすことである。イデアル I 上で整であるような環 A の元全体の集合

$$\overline{I} = \{x \in A \mid x \text{ は } I \text{ 上で整である }\}$$

は A のイデアルであって, I の整閉包 (integral closure) と呼ばれる。等式 $I = \overline{I}$ が成り立つとき, イデアル I は整閉といい, I の任意の冪が整閉であるとき, 即ち, $I^n = \overline{I^n}$ が任意の整数 $n \geq 1$ に対して成立するとき, I は正規であるという。なお, A が正規整域の場合, Rees代数の正規性はイデアルの正規性と同値である。本節で考察する問題は下記の通りである。

問題 7.1. $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A$ とし, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき, いつRees代数 $\mathcal{R}(I)$ はCohen-Macaulay正規整域となるか。

問題 7.1 に対して, $d \leq 1$ の場合は, 定義により, $\mathcal{R}(I)$ は常に Cohen-Macaulay 正規整域である。$d = 2$ の場合は, Zariski の定理 ([104, Part II, Section 12], [105, Appendix 5, Theorem 2'], [64, Theorem 3.7]) により, $\mathcal{R}(I)$ は正規であって, Lipman-Tessier の定理 ([70, Proposition 5.5], [64, Theorem 5.1], [66, Theorem 3.1]) と後藤-下田の定理 (定理 2.4) により, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。なお, 2 次元の場合には, 環 A の正則性を緩和して, $(A, \mathfrak{m})$ が 2 次元有理特異点[27]の場合にも, 剰余体が無限ならば, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である ([69, Theorem (7.1)], [112, 5.45 定理])。有理特異点とイデアルの整閉性に関しては次の定理がある。

定理 7.2 ([19, Theorem 1])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元優秀正規局所整域とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は代数閉体であると仮定する。次の 3 条件は同値である。

(1) A は有理特異点である。

(2) I, J が整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルならば, IJ は整閉である。

(3) I が A の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルならば, I^2 は整閉である。

同論文 ([19]) において, 環 $A = \mathbb{Q}[[X, Y, Z]]/(X^3 + 3Y^3 + 9Z^3)$ は有理特異点ではない 2 次元正規局所整域であって, 任意の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアル I, J に対して, IJ が整閉であることも示されている。即ち, 定理 7.2 では, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が代数閉体という仮定は不可欠である。

議論を正則局所環に戻して, $d \geq 3$ の場合を考察すると, 実は次の例が存在する。

例 7.3 ([92, Exercise 1.14])**.** $A = k[[X, Y, Z]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とする。このとき

$$Q = (X^7, Y^3, Z^2), \quad I = \overline{Q} = (X^7, Y^3, Z^2, X^5Y, X^4Z, X^3Y^2, X^2YZ, Y^2Z)$$

とおくと, $\overline{I} = I$, $\overline{I^2} \neq I^2$, $I^2 = QI$ である。故に, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環であるが, 正規ではない。

例 7.4 ([62, Theorem 3.11])**.** $A = k[[X, Y, Z]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とする。$\operatorname{ch} k \neq 3$ と仮定し, $I = (X^4, X(Y^3 + Z^3), Y(Y^3 + Z^3), Z(Y^3 + Z^3)) + \mathfrak{m}^5$ とおくと, I は正規であるが, $G(I)$ は Cohen-Macaulay 環ではない。故に, $\mathcal{R}(I)$ は正規であるが, Cohen-Macaulay 環ではない。但し, $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ とする。

つまり, $d \geq 3$ の場合, 例 7.4 が示すように, 正規性は Cohen-Macaulay 性を導かない。同様に, 例 7.3 より, Cohen-Macaulay 環であるが, 正規でない Rees 代数も存在する。従って, Rees 代数の Cohen-Macaulay 性と正規性は独立の概念であり, Rees 代数が Cohen-Macaulay かつ正規整域になるためには, 基礎環, 或いはイデアルに対する制約条件が必要となる。本節では基礎環を正則と仮定しているので, イデアルに対する条件に焦点を当て議論を進める。とりわけ, その条件として生成元の個数に注目して考察する。ここで, $v(-)$ により環の埋め込み次元を表し, $\mu_A(-)$ は極小生成系の個数である。この方面においては, 次の結果がある。

定理 7.5 ([36, Corollary (1.3)])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A$ とし, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。次の主張が成り立つ。

(1) $\mu_A(I) = d$ ならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(2) $\mu_A(I) = d$ であることの必要十分条件は, $v(A/I) \leq 1$ である。

定理 7.6 ([12, Theorem 1.1, Corollary 3.3], [13, Section 4])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A$ とし, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。次の主張が成り立つ。

[27] 正規局所環 A が有理特異点であるとは, 特異点解消 $f : X \to \operatorname{Spec} A$ であって, $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X) = (0)$ $(\forall\, i > 0)$ を満たすものが存在することをいう。

(1) $\mu_A(I) = d + 1$ ならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(2) $\mu_A(I) = d + 1$ ならば, $v(A/I) \le 2$ である。

以上の先行研究を踏まえて, 本報告書の最後に最近の結果を紹介したい。

定理 7.7 ([25]). $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A$ とし, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。次の主張が成り立つ。

(1) $v(A/I) \le 2$ ならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(2) $\mu_A(I) \le d + 2$ ならば, $v(A/I) \le 2$ である。

特に, $\mu_A(I) \le d + 2$ ならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

例 7.8. $A = k[[X, Y, Z]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とする。次の主張が成り立つ。

(1) $I = \overline{(X^3, Y^3, Z)} = (X^3, X^2Y, XY^2, Y^3, Z)$ とおくと, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルであって, $\mu_A(I) = 5 = d + 2$ である。故に, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(2) $I = \overline{(X^4, Y^4, Z)} = (X^4, X^3Y, X^2Y^2, XY^3, Y^4, Z)$ とおくと, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルであって, $\mu_A(I) = 6 > d + 2$ であるが, $v(A/I) = 2$ である。従って, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(3) 任意の $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ と整数 $n \ge 1$ に対し, $I = (f) + \mathfrak{m}^n$ とおくと, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルであって, $v(A/I) \le 2$ である。故に, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

定理 7.9 ([25]). 標数 0 の体 k 上の多項式環 $A = k[X_1, X_2, \ldots, X_d]$ における整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, $\mu_A(I) \le d+3$ かつ I が単項式イデアルならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

謝辞. 第 70 回代数学シンポジウムの関係者の皆様に深く感謝申し上げます。とりわけ貴重な講演の機会を賜りましたプログラム責任者の村井聡先生, 山浦浩太先生, 並びにシンポジウム責任者の平野幹先生, 会場責任者の小林真一先生に心より御礼申し上げます。

参考文献

[1] J. Barshay, Graded algebras of powers of ideals generated by A-sequences, *J. Algebra*, **25** (1973), 90–99.

[2] V. Barucci and R. Fröberg, One-dimensional almost Gorenstein rings, *J. Algebra*, **188** (1997), no. 2, 418–442.

[3] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.*, **82** (1963), 8–28.

[4] A. Björner and M. L. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348** (1996), no.4, 1299–1327.

[5] W. Bruns and A. Conca, F-rationality of determinantal rings and their Rees rings, *Michigan Math. J.*, **45** (1998), no.2, 291–299.

[6] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay Rings, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1993.

[7] W. Bruns and U. Vetter, Determinantal rings, Lecture Notes in Mathematics, 1327, *Springer-Verlag*, Berlin, 1988.

[8] D. A. Buchsbaum, Complexes in local ring theory, Some Aspects of Ring Theory, C.I.M.E., Rome, 1965.

[9] E. Celikbas, O. Celikbas, S. Goto, and N. Taniguchi, Generalized Gorenstein Arf rings, *Ark. Mat.*, **57** (2019), no.1, 35–53.

[10] E. Celikbas, N. Endo, J. Laxmi, and J. Weyman, Almost Gorenstein determinantal rings of symmetric matrices, *Comm. Algebra*, **50** (2022), no.12, 5449–5458.

[11] T. D. M. Chau, S. Goto, S. Kumashiro, and N. Matsuoka, Sally modules of canonical ideals in dimension one and 2-AGL rings, *J. Algebra*, **521** (2019), 299–330.

[12] C. Ciupercă, Integrally closed almost complete intersection ideals, *Journal of Algebra*, **302** (2006), 720–728.

[13] C. Ciupercă, Integral closure and generic elements, *Journal of Algebra*, **328** (2011), 122–131.

[14] I. S. Cohen, On the structure and ideal theory of complete local rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59** (1946), 54–106.

[15] C. D. Consini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, *Adv. Math.*, **21** (1976), 330–354.

[16] N. T. Cuong and D. T. Cuong, On sequentially Cohen-Macaulay modules, *Kodai Math. J.*, **30** (2007), 409–428.

[17] N. T. Cuong, S. Goto, and H. L. Truong, The equality $I^2 = \mathfrak{q}I$ in sequentially Cohen-Macaulay rings, *J. Algebra*, **379** (2013), 50–79.

[18] N. T. Cuong and L. T. Nhan, Pseudo Cohen-Macaulay and pseudo generalized Cohen-Macaulay modules, *J. Algebra*, **267** (2003), no.1, 156–177.

[19] S. D. Cutkosky, A new characterization of rational surface singularities, *Invent. Math.*, **102** (1990), 157–177.

[20] H. Dao, T. Kobayashi, and R. Takahashi, Trace ideals of canonical modules, annihilators of Ext modules, and classes of rings close to being Gorenstein, *J. Pure Appl. Algebra*, **225** (2021), no. 9, Paper No.106655.

[21] D. Eisenbud and J. Harris, The geometry of schemes, *Springer-Verlag*, New York, 2000.

[22] D. Eisenbud, C. Huneke, and B. Ulrich, What is the Rees algebra of a module?, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), 701–708.

[23] N. Endo, On Ratliff-Rush closure of modules, *Math. Scand.*, **126** (2020), no.2, 170–188.

[24] N. Endo, Goto rings, arXiv:2312.14379.

[25] N. Endo, J. Hong, and B. Ulrich, Normality of ideals and modules, preprint 2025.

[26] T. Gaffney, Integral closure of modules and Whitney equisingularity, *Invent. Math.*, **107** (1992), 301–322.

[27] T. Gaffney, Multiplicities and equsingularity of ICIS germs, *Invent. Math.*, **123** (1996), 209–220.

[28] T. Gaffney, The theory of integral closure of ideals and modules: applications and new developments, With an appendix by Steven Kleiman and Anders Thorup, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 21, New developments in singularity theory (Cambridge, 2000), 379–404, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[29] T. Gaffney and S. L. Kleiman, Specialization of integral dependence for modules, *Invent. Math.*, **137** (1999), 541–574.

[30] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, and W. V. Vasconcelos, Invariants of Cohen-Macaulay rings associated to their canonical ideals, *J. Algebra*, **489** (2017), 506–528.

[31] D. Gorenstein, An arithmetic theory of adjoint plane curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 414–436.

[32] S. Goto, The Veronesean subrings of Gorenstein rings, *J. Math. Kyoto Univ.*, **16** (1976), no.1, 51–55.

[33] S. Goto, Blowing-up characterization for local rings, RIMS Kôkyûroku, **400** (1980), 42–50.

[34] S. Goto, Buchsbaum rings with multiplicity 2, *J. Algebra*, **74** (1982), 494–508.

[35] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Algebra*, **85** (1983), 490–534.

[36] S. Goto, Integral closedness of complete intersection ideals, *J. Algebra*, **108** (1987), 151–160.

[37] S. Goto, Buchsbaumness in Rees algebras associated to ideals of minimal multiplicity, *J. Algebra*, **213** (1999), 604–661.

[38] S. Goto, Y. Horiuchi, and H. Sakurai, Sequentially Cohen-Macaulayness versus parametric decomposition of powers of parameter ideals, *J. Comm. Algebra*, **2** (2010), 37–54.

[39] S. Goto and S.-i. Iai, Embeddings of certain graded rings into their canonical modules, *J. Algebra*, **228** (2000), no.1, 377–396.

[40] S. Goto and S. Kumashiro, On generalized Gorenstein local rings, arXiv:2212.12762.

[41] S. Goto, D. V. Kien, N. Matsuoka, and H. L. Truong, Pseudo-Frobenius numbers versus defining ideals in numerical semigroup rings, *J. Algebra*, **508** (2018), 1–15.

[42] S. Goto, N. Matsuoka and T. T. Phuong, Almost Gorenstein rings, *J. Algebra*, **379** (2013), 355–381.

[43] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras of parameters, *J. Algebra*, **452** (2016), 263–278.

[44] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras over two-dimensional regular local rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **220** (2016), 3425–3436.

[45] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, On the almost Gorenstein property in Rees algebras of contracted ideals, *Kyoto J. Math.*, **59** (2019), no.4, 769–785.

[46] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras of p_g-ideals, good ideals, and powers of the maximal ideals, *Michigan Math. J.*, **67** (2018), 159–174.

[47] S. Goto and K. Nishida, The Cohen-Macaulay and Gorenstein properties of Rees algebras associated to fltrations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **110**, 1994.

[48] S. Goto, M. Rahimi, N. Taniguchi, and H. L. Truong, When are the Rees algebras of parameter ideals almost Gorenstein graded rings?, *Kyoto J. Math.*, **57** (2017), no.3, 655–666.

[49] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras over Buchsbaum rings, *J. Math. Kyoto Univ.*, **20** (1980), 691–708.

[50] S. Goto and Y. Shimoda, On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings, Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979), 201–231, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **68**, Dekker, New York, 1982.

[51] S. Goto, R. Takahashi and N. Taniguchi, Almost Gorenstein rings -towards a theory of higher dimension, *J. Pure Appl. Algebra*, **219** (2015), 2666–2712.

[52] S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, Ulrich ideals and almost Gorenstein rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **144** (2016), 2811–2823.

[53] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On graded rings I*, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), no. 2, 179–213.

[54] M. Herrmann, S. Ikeda, and U. Orbanz, Equimultiplicity and blowing up, *Springer-Verlag*, Berlin, 1988. An algebraic study; With an appendix by B. Moonen.

[55] J. Herzog, T. Hibi, and D. I. Stamate, The trace of the canonical module, *Israel J. Math.*, **233** (2019), 133–165.

[56] J. Herzog, S. Kumashiro, and D. I. Stamate, The tiny trace ideals of the canonical modules in Cohen-Macaulay rings of dimension one, *J. Algebra*, **619** (2023), 626–642.

[57] A. Higashitani, Almost Gorenstein homogeneous rings and their h-vectors, *J. Algebra*, **456** (2016), 190–206.

[58] M. Hochster and J. A. Eagon, A class of perfect determinantal ideals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1970), 1971–1120.

[59] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure of parameter ideals and splitting in module-finite extensions, *J. Algebraic Geom.*, **3** (1994), 599–670.

[60] M. Hochster and L. J. Ratliff, Jr., Five theorems on Macaulay rings, *Pacific J. Math.*, **44** (1973), 147–172.

[61] M. Hochster and J. L. Roberts, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, *Adv. Math.*, **13** (1974), 115–175.

[62] S. Huckaba and C. Huneke, Normal ideals in regular rings, *J. reine angew. Math.*, **510** (1999), 63–82.

[63] C. Huneke, The theory of d-sequences and powers of ideals, *Adv. Math.*, **46** (1982), 249–279.

[64] C. Huneke, Complete ideals in two-dimensional regular local rings, In Commutative Algebra (Berkeley, CA, 1987) Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, New York, Springer, 1989, pp. 325–338.

[65] C. Huneke, Hyman Bass and ubiquity: Gorenstein rings, Algebra, K-theory, groups, and education (New York, 1997), 55–78. Contemp. Math., **243**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[66] C. Huneke and J. Sally, Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals, *J. Algebra*, **115** (1988), 481–500.

[67] S. Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings, *Nagoya Math. J.*, **102** (1986), 135–154.

[68] J. Lipman, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **36** (1969), 195–279.

[69] J. Lipman, Cohen-Macaulayness in graded algebras, *Math. Res. Lett.*, **1** (1994), 149–157.

[70] J. Lipman and B. Tessier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, *Michigan Math. J.*, **28** (1981), 97–116.

[71] F. S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, 1916.

[72] N. Matsuoka and S. Murai, Uniformly Cohen-Macaulay simplicial complexes and almost Gorenstein* simplicial complexes, *J. Algebra*, **455** (2016), 14–31.

[73] M. Miyazaki, Almost Gorenstein Hibi rings, *J. Algebra*, **493** (2018), 135–149.

[74] M. Miyazaki, Radical property of the traces of the canonical modules of Cohen-Macaulay rings, arXiv:2506.17987.

[75] M. Nagata, Local Rings, Interscience Tracts Pure Appl. Math. **13**, Wiley, New York, 1962.

[76] T. Okuma, K-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, Good ideals and p_g-ideals in two-dimensional normal singularities, *Manuscripta Math.*, **150** (2016), 499–520.

[77] T. Okuma, K-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, Rees algebras and p_g-ideals in a two-dimensional normal local domain, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **145** (2017), 39–47.

[78] T. Okuma, K.-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, A Geometric description of almost Gorensteinness for two-dimensional normal singularities, arXiv:2410.23911.

[79] D. Rees, Two classical theorems of ideal theory, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **52** (1956), 155–157.

[80] P. C. Roberts, Local cohomology of Segre product type rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **219** (2015), no.3, 652–665.

[81] P. Schenzel, On the dimension filtration and Cohen-Macaulay filtered modules, Proc. of the Ferrara Meeting in honour of Mario Fiorentini, University of Antwerp, Wilrijk, Belgium, 1998, 245–264.

[82] R. Y. Sharp, David Rees, FRS 1918–2013, *Bull. London Math. Soc.*, **48** (2016), 557–576.

[83] Y. Shimoda, A note on Rees algebras of two-dimensional local domains, *J. Math. Kyoto Univ.*, **19** (1979), 327–333.

[84] A. Simis, K. Smith, B. Ulrich, An algebraic proof of Zak's inequality for the dimension of the Gauss image, *Math. Z.*, **241** (2002), 871–881.

[85] A. Simis, B. Ulrich, and W. V. Vasconcelos, Rees algebras of modules, *Proc. London Math. Soc.*, **87** (2003), no.3, 610–646.

[86] R. P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Birkhaüser, Boston, 1996.

[87] J. Stückrad, On the Buchsbaum property of Rees and form modules, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **19** (1985), 83–103

[88] J. Stückrad and W. Vogel, Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973), 513–528.

[89] J. Stückrad and W. Vogel, Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum Varietäten, *Monatsh. Math.*, **78** (1974), 433–445.

[90] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, An interaction between algebra, geometry and topology, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[91] T. Svanes, Coherent cohomology on Schubert subschemes of flag schemes and applications, *Adv. Math.*, **14** (1974), 369–453.

[92] I. Swanson and C. Huneke, Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2006.

[93] N. Taniguchi, On the almost Gorenstein property of determinantal rings, *Comm. Algebra*, **46** (2018), no.3, 1165–1178.

[94] N. Taniguchi, T. T. Phuong, N. T. Dung, and T. N. An, Sequentially Cohen-Macaulay Rees algebras, *J. Math. Soc. Japan*, **69** (2017), no.1, 293–309 .

[95] N. Taniguchi, T. T. Phuong, N. T. Dung, and T. N. An, Topics on sequentially Cohen-Macaulay modules, *J. Comm. Algebra*, **10** (2018), no.2, 295–304.

[96] N. V. Trung and S. Ikeda, When is the Rees algebra Cohen-Macaulay?, *Comm. Algebra*, **17** (1989), 2893–2922.

[97] G. Valla, Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay, *J. Algebra*, **42** (1976), 537–548.

[98] W. V. Vasconcelos, Arithmetic of Blowup Algebras, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol **195**, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1994.

[99] W. V. Vasconcelos, Integral closure. Rees algebras, Multiplicities, Algorithms, *Springer Monogr. Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[100] J. K. Verma, Joint reductions and Rees algebras, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **109** (1991) 335–342.

[101] D. Q. Viet, A note on the Cohen-Macaulayness of Rees Algebra of filtrations, *Comm. Algebra*, **21** (1993), 221–229.

[102] W. Vogel, Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum, *J. Algebra*, **25** (1973), 106–112.

[103] J. Weyman, Cohomology of vector bundles and syzygies, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2003.

[104] O. Zariski, Polynomial ideals defined by infinitely near base points, *Amer. J. Math.*, **60** (1938), no.1, 151-204.

[105] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra Volume II, *Springer*, 1960.

[106] 後藤四郎, Blow-up 代数の可換環論 –Cohen-Macaulay 性解析の視点から–, 第 51 回代数学シンポジウム報告集, 2006 年

[107] 後藤四郎, Gorenstein 環について, 『数学』(日本数学会), **31** (1979), no. 4, 349–364.

[108] 後藤四郎, 渡辺敬一, 『可換環論』, 日本評論社, 2011 年

[109] 居相真一郎, ブローアップ代数のゴレンシュタイン性について, 第 67 回代数学シンポジウム報告集, 2022 年

[110] 谷口直樹, Almost Gorenstein rings, 第 61 回代数学シンポジウム報告集, 2016 年

[111] 松岡直之, 2 次元単項式イデアルの Ratliff-Rush 閉包と Rees 代数の Buchsbaum 性について, 第 26 回可換環論シンポジウム報告集, (2005), 19–28.

[112] 渡辺敬一, 日高文夫, 『特異点論における代数的手法』, 共立出版, 2024 年

極小モデル理論の解析化

京都大学大学院理学研究科数学教室
藤野 修 *

令和 7 年 8 月 28 日

概要

複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論について説明する。

目次

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町, e-mail: fujino@math.kyoto-u.ac.jp

1　はじめに

極小モデル理論は、本来、射影的な代数多様体に対する理論として発展してきた。しかし、現代的な代数幾何においては、相対的な設定で理論を構築することが自然であり、極小モデル理論もまた、代数多様体の間の射影射に対して展開されてきた。

ここ数年で、この理論を複素解析空間の間の射影射にまで一般化する計画を実行した。概要を述べると、次のようになる。

> 複素解析空間の間の射影射に対して、極小モデル理論を完全に一般化した。

より具体的には、以下の二点が主な成果である：

- 代数多様体の間の射影射に対する極小モデル理論の結果のほとんどは、複素解析空間の間の射影射に対しても証明が可能であることを示した。
- 主要な未解決問題（アバンダンス予想や極小モデルの存在など）は、射影的な代数多様体に対する元々の予想に帰着されることを明らかにした。

このように、複素解析空間の間の射影射に対しても、代数多様体の場合とほぼ同様に極小モデル理論を構築することができる。上に述べたとおり、解析的な設定での極小モデル理論の完成のためには、もとの射影的な代数多様体に対する予想を解決すれば十分である。

本稿の第 1 章から第 12 章までは、ほぼ講演の内容に基づいている。第 13 章には文献に関するメモを、また第 14 章にはおまけとして補足的な内容を付け加えた。第 15 章には、よくある質問の答えを書いておいた。興味を持たれた読者は、第 13 章の文献案内を参考にし、ぜひ原論文に挑戦していただきたい。

2　非特異射影曲面の極小モデルプログラム（現代版）

極小モデル理論を、最も基本的な場合として、非特異複素射影曲面に対して考察する。X を非特異な複素射影曲面とするとき、以下のように極小モデルプログラムが実行される：

$$X =: X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_m$$

- 各ステップは、(-1) 曲線と呼ばれる $\mathbb{P}^1$ を一点に収縮する双有理写像である。
- 最終的なモデル X_m は、**極小モデル**または**森ファイバー空間**となる。
- 非特異射影曲面が森ファイバー空間であるとは、それが $\mathbb{P}^2$ または曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束であることを意味する。
- 非特異射影曲面が極小モデルであるとは、その標準因子 K が数値的に非負 (nef と呼ばれる) であることを意味する。

上記の事実は、本質的にはイタリア学派によって既に得られていたが、極小モデルの概念およびこのような視点での体系的理解は、**森理論**の成果によるところが大きい。

極小モデルプログラムとは、非常に大まかに言えば、与えられた射影多様体に対して有限回の双有理変換を施し、極小モデルあるいは森ファイバー空間を得る操作である。

3　歴史

森理論（以下、**極小モデル理論**ともいう）の歴史を簡単に振り返る。

- 1980 年頃：森理論（極小モデル理論）が始まる。
- 1980 年代後半：森重文氏が 3 次元フリップの存在を証明し、3 次元における極小モデルの存在が確立される。これにより、1990 年に森氏がフィールズ賞を受賞。
- 1990 年代前半：3 次元極小モデル理論に関する主要な予想がすべて解決される。
- 1990 年代後半：極小モデル理論の「冬の時代」。筆者が大学院に進学し、研究を開始。
- 2000 年頃：Shokurov 氏が「Prelimiting flips」と題された長大なプレプリントを公開。
- 2002 年：ケンブリッジ大学・ニュートン研究所にて、Shokurov 氏のプレプリントの解読セミナーが開催される。
- 2005 年：Hacon 氏と McKernan 氏がフリップの存在証明を発表。

- 同年：筆者が第 50 回代数学シンポジウムにて、上記の成果を解説 ([藤 1])。
- 2006 年：Birkar–Cascini–Hacon–McKernan による重要な成果のプレプリントが発表される (後に [BCHM] として出版)。この論文は通例、BCHM と略称される。
- 2007 年：筆者が第 52 回代数学シンポジウムにて、BCHM を解説 ([藤 2])。

20 世紀における極小モデル理論は主に 3 次元代数多様体を対象としていたが、21 世紀に入ってからは、Shokurov 氏の哲学に基づき、一般次元への展開が進められていると言える。Hacon–McKernan によるフリップの存在証明の衝撃や、BCHM の登場による驚きについては、筆者が当時執筆した代数学シンポジウムの報告 ([藤 1] と [藤 2]) をご覧いただければ、当時の雰囲気を感じ取っていただけるだろう。

その後の主要な発展として、以下のような顕著な成果が挙げられる：

- Sarkisov プログラムの確立（Hacon–McKernan）
- Shokurov の ACC 予想の解決（Hacon–McKernan–Xu）
- 安定多様体の有界性の確立（Hacon–McKernan–Xu）
- BAB（Borisov–Alexeev–Borisov）予想の解決（Birkar）

これらの成果は、基本的に BCHM を起点とした自然な流れの中で得られたものである。BAB 予想の解決によって Birkar 氏がフィールズ賞を受賞したことは、広く知られている。

これらの成果とは異なる方向への一般化として、以下のような研究もある：

- 極小モデル理論の枠組みの拡張（Fujino）

上記の成果の多くは、Shokurov 氏の哲学を忠実に受け継ぎつつ、同一路線上で理論を「前へ前へ」と進めていったものであるのに対し、筆者の研究は、極小モデル理論の適用範囲を「横へ横へ」と広げるものであり、当初の想定を超えて研究対象を拡張した点に特徴がある。

このほかにも、安定多様体のモジュライ理論、正標数における極小モデル理論、K 安定性との関係、混標数の極小モデル理論、葉層構造の極小モデル理論やケーラー多様体の極小モデル理論など、多方面での発展が現在も続いており、その勢いは衰える気配がない。

4　研究の動機

今回の研究の動機は、主に以下の二点である。

- **複素解析的特異点の研究**
- **代数多様体の退化の研究**

2 次元における孤立特異点の研究では、以下のような操作が標準的に用いられる。まず特異点解消を施し、例外集合の中に (-1) 曲線が存在すれば、それを収縮する。有限回の収縮射を経ることで、最終的に例外集合内に (-1) 曲線が存在しない状態にすることができる。このような特異点解消を **minimal resolution** と呼ぶ。minimal resolution における例外集合のなす双対グラフを調べることで、特異点の性質を詳しく理解することが可能となる。

極小モデル理論の解析化の第一の動機は、このような操作を高次元の複素解析的特異点に対しても実行可能にすることである。特異点解消は有限回の爆発により得られ、解消から元の空間への射は射影的となる。したがって、複素解析空間の間の射影射に極小モデル理論を適用できるようになれば、高次元における minimal resolution を構成するための理論的枠組みが得られることになる。

第二の動機である代数多様体の退化の研究としては、Kulikov による $K3$ 曲面の退化の研究が念頭にある。単位円板上に定義された射影多様体の族を考え、原点を除く各ファイバーが非特異であるとする。このとき、原点上での退化の様子を解析する方法として、**半安定極小モデルプログラム**と呼ばれる極小モデル理論が考えられる。

ただし、単位円板自体は代数多様体ではなく複素解析空間であるため、この種の議論を理論的に保証するには、複素解析空間の間の射影射に対して極小モデル理論が構築されている必要がある。以上の理由から、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論の確立は重要であると思う。

5　BCHM の結果について

ここでは、[BCHM] の主な結果を簡単に紹介する。[BCHM] は、多くの命題を次元による帰納法により同時に示しており、その全体像を追うのは容易ではない。詳細については原論文 [BCHM] を参照されたい。ここでは、特に応用上有用で、比較的理解しやすい二つの主張に焦点を当てて述べる。

まず一つ目の定理は、適切な仮定の下で**スケール付き極小モデルプログラム**が機能することを主張している。

定理 5.1（[BCHM, Corollary 1.4.2]）　X と Y を準射影的代数多様体とし、$\pi\colon X \to Y$ を射影射とする。(X, Δ) は $\mathbb{Q}$-分解的な川又対数的末端対とし、Δ は π-巨大 (big) と仮

定する。さらに、有効な $\mathbb{R}$-因子 C が存在して、$K_X+\Delta+C$ が π-数値的非負 (nef) であり、$(X,\Delta+C)$ も川又対数的末端対であるとする。このとき、Y 上で C に関するスケール付き $(K_X+\Delta)$-極小モデルプログラムを実行することができ、その結果として、Y 上の極小モデルあるいは森ファイバー空間の構造を得る。

次に述べる定理は、上述のスケール付き極小モデルプログラムの実行可能性を前提とすれば、比較的容易に導かれるものである。

定理 5.2（[BCHM, Theorem 1.2]） X と Y を準射影的代数多様体とし、$\pi\colon X\to Y$ を射影射とする。(X,Δ) は川又対数的末端対と仮定する。さらに、以下のいずれかの条件を仮定する。

- Δ は π-巨大で、かつ $K_X+\Delta$ は π-擬有効 (pseudo-effective) である。
- $K_X+\Delta$ は π-巨大である。

このとき、次の主張が成り立つ。

(1) (X,Δ) は Y 上の**極小モデル** (minimal model) をもつ。

(2) $K_X+\Delta$ が π-巨大であれば、(X,Δ) は Y 上の**対数的標準モデル** (log canonical model) をもつ。

(3) $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-カルティエであれば、

$$R(X/Y,K_X+\Delta):=\bigoplus_{m\in\mathbb{N}}\pi_*\mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X+\Delta)\rfloor)$$

は有限生成な $\mathcal{O}_Y$-代数である。

6　極小モデル理論の解析化を目指して

[F2] における最大の成果は、次のような設定が複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論を論じるための正しい枠組みであると見抜いた点にあると考えられる。

設定 6.1　以下が我々の目的に適した正しい設定である：

- X と Y は複素解析空間である。
- $\pi\colon X\to Y$ は射影射である。
- W は Y の**スタインコンパクト**な部分集合であり、$\Gamma(W,\mathcal{O}_Y)$ はネーター環になるものとする。

見慣れない用語が含まれているかもしれないが、まずはこの設定が適切なものであると認め、その上で議論を進めることにしたい。

7 BCHM の解析化

[BCHM] の証明を精査すると、[BCHM] は究極的には**広中の特異点解消定理**と**川又–フィーベック消滅定理**しか使っていないと言ってよいだろう。川又–フィーベック消滅定理は**小平消滅定理**の一般化である。小平の消滅定理を認めると簡単に証明できる定理である。広中の特異点解消定理は元々は代数多様体に対する定理であったが、複素解析空間に対しても同様の特異点解消定理が証明されていることはよく知られている。また、小平の消滅定理は非コンパクトな複素多様体に一般化されており、その応用として複素解析空間の間の射影射に対して小平の消滅定理（の相対版）も知られている。

[BCHM] の主結果のほとんどは、複素解析空間の間の射影射に対しても移植可能である。以下では、定理 5.1 および定理 5.2 の解析的類似を述べる。

定理 7.1（[F2, Theorem 1.1]） X, Y, $\pi\colon X \to Y$, および W は設定 6.1 の通りとする。(X, Δ) は川又対数的末端対であり、Δ は π-巨大と仮定する。また、X は W 上 $\mathbb{Q}$-分解的とする。さらに、有効な $\mathbb{R}$-因子 C が存在して $K_X + \Delta + C$ が W 上 π-数値的非負であり、$(X, \Delta + C)$ も川又対数的末端対であるとする。

このとき、Y 上で C に関するスケール付き $(K_X + \Delta)$-極小モデルプログラムを実行することができ、その結果として、Y 上の極小モデルまたは森ファイバー空間の構造を得る。

すなわち、Y 上のフリップおよび**因子収縮** (divisorial contraction) からなる有限列

$$(X, \Delta) =: (X_0, \Delta_0) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow (X_i, \Delta_i) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow (X_m, \Delta_m)$$

が存在し、(X_m, Δ_m) は Y 上の極小モデルか、あるいは森ファイバー空間の構造をもつ。

以下は、代数的設定と解析的設定の間の重要な違いに関する注意である。

注意 7.2 定理 7.1 における各ステップ（フリップや因子収縮）では、必要に応じて Y を W のより小さな近傍に取り直す必要がある。そのため、最終的に得られる X_m も、Y を W の近傍に置き換えた後のものである。この点は、注意 8.2 や第 15 章と深く関係している。

定理 7.3（[F2, Theorem 1.2]） X, Y, $\pi\colon X \to Y$, および W は設定 6.1 の通りとし、(X, Δ) は川又対数的末端対と仮定する。さらに、以下のいずれかの条件を仮定する：

- Δ は π-巨大であり、かつ $K_X + \Delta$ は π-擬有効である。
- $K_X + \Delta$ は π-巨大である。

このとき、次の各主張が成り立つ：

(1) (X, Δ) は W の**ある近傍上で**極小モデルをもつ。

(2) $K_X + \Delta$ が π-巨大であれば、(X, Δ) は W の**ある近傍上で**対数的標準モデルをもつ。

(3) $K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-カルティエであれば、

$$R(X/Y, K_X + \Delta) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \pi_* \mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor)$$

は局所的に有限生成な $\mathcal{O}_Y$-代数である。

8　π-豊富性と π-数値的非負性

代数多様体の間の射影射に対する極小モデル理論と、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論は非常によく似ているが、複素解析的な設定にすることによって、新たに微妙な問題が生じることもある。

以下、この章では、$\pi\colon X \to Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、W を Y の部分集合とする。$\mathcal{L}$ を X 上の $\mathbb{R}$-直線束あるいは $\mathbb{R}$-カルティエ因子とする。

注意 8.1（W 上の π-豊富性） $\mathcal{L}$ が W 上 π-豊富 (ample) であるとは、任意の $w \in W$ に対して $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(w)}$ が豊富であることをいう。$\pi^{-1}(w)$ は射影的であるため、$\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(w)}$ の豊富性は、通常の代数幾何学における豊富性と同義である。

この定義からは明らかではないが、$\mathcal{L}$ が W 上 π-豊富であることと、$\mathcal{L}$ が W の適当な開近傍上で π-豊富であることは同値である。したがって、$\mathcal{L}$ が W 上 π-豊富であり、かつ W がコンパクトであれば、$\mathcal{L}$ は W の近傍上で有限個の π-豊富な直線束の $\mathbb{R}_{>0}$-線形結合として表せることになる。

注意 8.2（W 上の π-数値的非負性） $\mathcal{L}$ が W 上 π-数値的非負 (nef) であるとは、任意の $w \in W$ に対して $\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(w)}$ が数値的非負であることをいう。$\pi^{-1}(w)$ は射影的であるため、$\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(w)}$ の数値的非負性も、通常の代数幾何学におけるものと同じである。

ここまでは豊富性とまったく同様である。しかし、$\mathcal{L}$ が W 上で π-数値的非負であっても、必ずしも W の近傍上で π-数値的非負となるとは限らない。

このように、π-数値的非負性の「振る舞いの悪さ」が、解析的設定における極小モデル理論の展開において、ところどころで障害となる。以下に述べる予想は、この問題に対する自然な解決を示唆するものである。

予想 8.3（[F2, Conjecture 8.4]）　$\pi\colon X \to Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、(X, Δ) を対数的標準対とする。P を Y の一点とし、$(K_X+\Delta)|_{\pi^{-1}(P)}$ が数値的非負であると仮定する。このとき、$K_X+\Delta$ は P の近傍上で π-数値的非負である。

仮に予想 8.3 が正しいとすれば、解析的設定で極小モデルプログラムを実行し、W に潰れる曲線で $K_X+\Delta$ と負に交わるものが存在しないようにできれば、それは W の近傍上で極小モデルとなる。

注意 8.4　予想 8.3 は、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論が完全に確立されれば成立することが知られている（[F2, Remark 8.5] を参照)。また、[EH3, Theorem 1.7] を用いると、X が 3 次元以下の場合には予想 8.3 が成り立つことが確認できる。

一方で、一般の $\mathbb{R}$-直線束については、数値的非負性の開性 (openness) が成り立たないことが知られている（[F2, Remark 4.3])。しかし、曲面の場合には任意の $\mathbb{R}$-直線束に対して数値的非負性の開性が成立することが示されている（[Mo, Lemma 2.6])。

さらに強い結果として、次の予想も成立すると期待される。

予想 8.5（**アバンダンス予想の特殊形**）　$\pi\colon X \to Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、(X, Δ) を対数的標準対とする。P を Y の一点とし、$(K_X+\Delta)|_{\pi^{-1}(P)}$ が数値的非負であると仮定する。このとき、$K_X+\Delta$ は P の近傍上で π-半豊富 (semi-ample) である。

仮に予想 8.5 まで正しいとすれば、解析的極小モデル理論において、W に潰れる曲線で $K_X+\Delta$ と負に交わるものが存在しないようにできれば、それは W の近傍上で**良い極小モデル**（good minimal model）になるといえる。

予想 8.3 および予想 8.5 は未解決であるが、[BCHM] の解析的類似に現れるような特定の設定（たとえば、定理 7.1 や定理 7.3）においては、これらの予想が成り立つことが証明されている。詳しくは [F2, Theorem 8.3] を参照されたい。いずれにせよ、完全に一般の設定では、予想 8.3 と予想 8.5 は依然として非常に困難な未解決問題であると考えら

れている。

9　極小モデル理論をいかに定式化するか？

ここからは設定 6.1 をもう少し詳しく見てみたい。我々の目的には以下のスタイン空間の特徴付けを定義として採用しても問題ない。

定義 9.1（スタイン空間）　X を複素解析空間とする。X がスタイン空間であるとは、任意の解析的連接層 $\mathcal{F}$ に対して $H^i(X,\mathcal{F})=0$ がすべての $i>0$ に対して成り立つこととする。

この定義を見ると、代数幾何学でのアフィンスキームと複素幾何のスタイン空間が対応すると思ってよい。

定義 9.2（スタインコンパクト集合）　X を複素解析空間とし、K を X のコンパクト部分集合とする。K がスタイン開集合からなる基本近傍系を持つとき、K はスタインコンパクト集合と呼ばれる。

以下の補題を用いると、スタインコンパクト集合が多数存在することがわかる。正則凸包は多変数関数論でよく知られた概念である。

補題 9.3（正則凸包）　K をスタイン空間 X 上のコンパクト集合とする。

$$\widehat{K} := \left\{ x\in X \;\middle|\; |f(x)| \le \sup_{z\in K} |f(z)| \text{ for every } f\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X) \right\}$$

と定めるとき、$\widehat{K}$ は K の正則凸包と呼ばれる。このとき、$\widehat{K}$ は X のスタインコンパクト集合である。

次の例は、ルベーグ積分論でよく知られるカントール集合に関するものである。

例 9.4（カントール集合）　$X=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<2\}$ とし、$\mathcal{C}$ をカントール集合とする。

$$\mathcal{C}\subset[0,1]\subset X$$

であることに注意する。このとき、$\mathcal{C}$ は X のスタインコンパクト集合である。なぜなら、非コンパクトなリーマン面はすべてスタインであり、$\mathcal{C}$ はコンパクトだからである。

しかし、

$$\mathcal{O}_X(\mathcal{C})=\Gamma(\mathcal{C},\mathcal{O}_X)=\varinjlim_{\mathcal{C}\subset U}\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$$

はネーター環ではない。

上の例からわかるように、スタインコンパクト集合という仮定だけでは、「病的」とも言えるような集合も存在し得る。次に述べる Siu による結果は、そのような集合を排除する条件を与えるものである。

定理 9.5（Siu, [F2, Theorem 2.10]）　K を複素解析空間 X のスタインコンパクトな部分集合とする。このとき、$\mathcal{O}_X(K) = \Gamma(K, \mathcal{O}_X)$ がネーター環となるための必要十分条件は、以下の通りである：

($\star$)　K の開近傍上で定義された任意の解析的集合 Z に対し、$K \cap Z$ の連結成分は高々有限個である。

カントール集合 $\mathcal{C}$ の場合、連結成分が無限個存在するため、$\mathcal{O}_X(\mathcal{C})$ はネーター環とならなかったのである。

注意 9.6　条件 ($\star$) はいつ成立するのか、あるいは ($\star$) を満たすコンパクト集合は豊富に存在するのか、という疑問が生じるかもしれない。

一般に、K が **半解析的集合（semianalytic subset）** でかつコンパクトであるとき、K は条件 ($\star$) を満たすことが知られている。

解析空間 X のある点 P の近傍で何かを考察する際には、局所的に X を多重円板内に実現できる。このような状況において、P の近傍にスタインコンパクトな半解析的集合を構成することはいくらでも可能である。

$\pi\colon X \to Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、W を Y のコンパクトな部分集合とする。$\pi(C)$ が W の点になるような X 上の射影曲線 C たちが生成する自由アーベル群を $Z_1(X/Y; W)$ と書く。現時点では W はコンパクト部分集合であることのみを仮定する。

U を W の開近傍とすると、

$$\mathrm{Pic}\left(\pi^{-1}(U)\right) \times Z_1(X/Y; W) \to \mathbb{Z}$$

なる交点形式を定義することができる。ここで、我々が考える曲線は π によって W の点に移るものであるため、U が W の近傍であれば、上の交点形式は問題なく定義される。

代数的な場合と同様に、数値的同値関係 $\equiv$ で割った空間

$$\widetilde{A}(U, W) := \mathrm{Pic}\left(\pi^{-1}(U)\right) / \equiv$$

を考える。さらに、W の開近傍 U を走らせて

$$A^1(X/Y;W) := \varinjlim_{W\subset U} \widetilde{A}(U,W)$$

と定義する。もちろん $A^1(X/Y;W)$ はアーベル群であるが、一般には有限生成とは限らない。

ここで、以下の中山の定理が重要な役割を果たす。

定理 9.7（Nakayama, [N2, Chapter II. 5.19. Lemma], [F2, Theorem 4.7]） $\pi\colon X \to Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、W を Y のコンパクト部分集合とする。

($\star$) W の開近傍上に定義された任意の解析的集合 Z に対して、$W \cap Z$ の連結成分は高々有限個である。

という条件 ($\star$) が成り立つとき、$A^1(X/Y;W)$ は有限生成アーベル群である。

すでにお気付きの読者も多いと思われるが、定理 9.7 における条件 ($\star$) は、定理 9.5 における条件 ($\star$) と全く同じものである。このことから、結局のところ ($\star$) という条件が様々な有限性を保証するために本質的なものであることがわかる。単にコンパクト部分集合を固定するだけでは不十分であり、($\star$) を満たすコンパクト部分集合を考える必要がある。

$A^1(X/Y;W)$ が有限生成アーベル群であるとき、

$$N^1(X/Y;W) := A^1(X/Y;W) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

は有限次元の実ベクトル空間となる。このとき、その双対ベクトル空間 $N_1(X/Y;W)$ 内に、**クライマン–森錐体**

$$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;W)$$

を定義することができる。すなわち、$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;W)$ は、π によって W の点に移る曲線たちが張る錐体の $N_1(X/Y;W)$ 内での閉包である。

$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;W)$ が定義できれば、**クライマンの豊富性判定法**も、代数多様体の場合と同様に、$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;W)$ を用いて定式化・証明することができる。また、極小モデル理論の出発点である**錐体定理**（cone theorem）や**収縮定理**（contraction theorem）も、代数的な場合と類似の形で定式化可能である。ただし、すでに見たように、**「W 上での π-数値的非負性」**と**「W の近傍上での π-数値的非負性」**には差があるため、細かな技術的修正が必要になる。いずれにせよ、$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;W)$ が適切に定義できるような枠組みを整備する段階自体が、非自明であると思われる。

10　消滅定理

川又対数的末端対を扱うだけであれば、小平の消滅定理の解析版だけで十分である。しかし、対数的標準対や、さらに悪い特異点を持つ複素解析空間まで扱おうとすると、既存の消滅定理では全く不十分である。このような状況を踏まえ、以下の定理を証明した。代数多様体に対する同様の定理は、極小モデル理論や高次元代数多様体に関する研究においてすでに大きな役割を果たしている。ここではその複素解析空間版を与えることが主張である。

定理 10.1（[F4, Theorem 1.1]）　(X, Δ) を解析的な単純正規交叉対とし、Δ を境界 $\mathbb{R}$-因子とする。$f\colon X \to Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、$\mathcal{L}$ を X 上の直線束とする。q は任意の整数とする。

(i) （Strict support condition）$\mathcal{L} - (\omega_X + \Delta)$ が f-半豊富であるとき、$R^q f_* \mathcal{L}$ の随伴部分多様体 (associated subvariety) は、(X, Δ) のある階層 (stratum) の f による像である。

(ii) （Vanishing theorem）$\pi\colon Y \to Z$ を複素解析空間の間の射影射とし、$\mathcal{H}$ を Y 上の π-豊富な $\mathbb{R}$-直線束とする。$\mathcal{L} - (\omega_X + \Delta) \sim_{\mathbb{R}} f^* \mathcal{H}$ が成り立つとき、任意の $p > 0$ に対して、$R^p \pi_* R^q f_* \mathcal{L} = 0$ が成立する。

技術的な定義については詳述しないが、定理 10.1 に現れる単純正規交叉対 (X, Δ) とは、単純正規交叉的な複素解析空間 X と、その上の境界因子 Δ からなる対をいう。特に、X は一般には可約であることに注意しておきたい。

注意 10.2　代数的な設定における定理 10.1 の証明には、混合ホッジ構造が本質的に用いられていた。代数多様体は常にコンパクト化可能であるため、大域的なホッジ理論の結果を利用することができる。詳しくは [F1, Chapter 5] を参照されたい。

実際、混合ホッジ構造の理論から導かれるスペクトル系列の E_1 退化を用いることで、代数的な設定における定理 10.1 は証明されていた。

しかし、この手法は定理 10.1 のような解析的な設定には適用できないため、同定理は長らく未解決の問題として残されていた。

定理 10.1 は、最初に [F4] で、斉藤盛彦による混合ホッジ加群の理論を用いて証明された。定理 10.1 に関しては、[F7] も参照されたい。その後、[FF] において、ホッジ加群を

用いない別の証明が与えられた。[FF] では、タイトルにもある通り混合ホッジ構造の変動の理論を利用している。証明のアイデア自体は、[F4] および [FF] の両者で本質的に同じである。その後、[Mu] では、上記の定理を含むより一般的な結果が示されているようだが、残念ながら私はその内容を十分に追えていない。

いったん定理 10.1 が証明されると、複素解析空間に対しても対数的標準中心 (log canonical center) に関する基本的な性質が示されるほか、究極的な形の錐体定理や収縮定理も複素解析的な設定で証明できるようになる。詳しくは [F5] や [F6] を参照されたい。

川又対数的末端対よりも悪い特異点をもつ複素解析空間に対しては、今回の一連の研究における最大の成果は、まさに定理 10.1 を解析的設定で証明できたことである。というのも、定理 10.1 を出発点として導かれるさまざまな結果は、代数的な設定においてすでに多くの蓄積があり、それらはほとんどそのまま複素解析空間の場合にも翻訳可能だからである。

11　代数的 vs. 解析的

これまで全体を通じて、代数的な場合と解析的な場合の類似性を強調してきたが、ここでは両者の違いを際立たせる Serre の有名な例を紹介する。

例 11.1（Serre）　C を楕円曲線とし、以下のような分裂しない短完全列

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

によって定義される階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}$ を考える。

このとき、$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ は、射影ベクトル束 $\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ のザリスキ開集合として実現可能である。もう少し詳しく言うと、$\mathbb{P}_C(\mathcal{E})$ のザリスキ開集合 U が存在して、複素解析空間として $U \simeq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ が成り立つ。もちろん、U は代数多様体としては $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ と同型ではない。

一方、$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ は明らかに $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ のザリスキ開集合でもある。

すなわち、

$$\mathbb{P}_C(\mathcal{E}) \xleftarrow[\text{解析的}]{} \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \xhookrightarrow[\text{代数的}]{} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

という形で、$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ に対して二通りのコンパクト化を構成することができる。

複素解析空間が必ずしもコンパクト化できるとは限らないことは、よく知られている事実である。また、$f\colon X \to Y$ を複素解析空間の間の射影射とし、X と Y がそれ

ぞれコンパクト化可能であったとしても、f がそれらのコンパクト化の間で双有理型 (bimeromorphic) 写像を与えるとは限らない。上の Serre の例は、まさにそのような現象が起こり得ることを示している。

12　アバンダンス予想について

極小モデル理論において最も困難な未解決問題と考えられているのが、アバンダンス予想である。この予想は複数の形で述べられるが、ここでは以下のように定式化する。

予想 12.1（**アバンダンス予想**）　(X, Δ) を射影的な対数的標準対とする。$K_X + \Delta$ が数値的に非負であるとき、$K_X + \Delta$ は半豊富である。

この予想に関して、以下のような定理が証明できた：

定理 12.2（**複素解析空間の間の射影射に対するアバンダンス定理、**[F9, Theorem 1.10]）予想 12.1 が n 次元で成立すると仮定する。$\pi\colon X \to Y$ は複素解析空間の間の射影射とし、W は Y のコンパクト部分集合で、(X, Δ) が対数的標準対であるとする。このとき、$K_X + \Delta$ が Y 上で数値的に非負かつ $\dim X \leq n$ であれば、$K_X + \Delta$ は W の適当な近傍上で π-半豊富である。

定理 12.2 は [F9] において証明されたが、その証明は決して容易ではない。

注意 12.3　厳密に言えば、定理 12.2 において Δ が $\mathbb{R}$-因子の場合には若干の修正が必要である。詳しくは [F9, Corollary 1.11] を参照されたい。しかしながら、いずれにしても、射影的な多様体に対するアバンダンス予想（予想 12.1）が成立すれば、複素解析空間の間の射影射に対してもアバンダンス予想が成り立つことがわかる。

この定理のおかげで、アバンダンス予想に関しては、射影的な（元々の）設定における予想さえ解決すれば十分であることが明確になった。この意味において、複素解析空間の間の射影射に対するアバンダンス予想は解決したと言ってもいいであろう。

13　文献についての備忘録

ここでは複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論関連の文献について述べておく。

この方面を最初に系統立てて研究したのは中山による [N1] である。1980 年代の仕事

で、極小モデル理論のかなり初期段階の仕事であった。もちろん、扱っている対象は川又対数的末端対のみであった。3 次元極小モデル理論の研究で必要に応じて複素解析的設定の極小モデル理論を扱うことは他の人の論文内でもあったと思うが、一般次元で一般論を本格的に論じたものは [N1] だけであったと思う。中山は著書 [N2] で [N1] の不備を修正している。定理 9.7 は [N2] が初出である。

その後は複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論関連の仕事はまったく存在しなかった。ここ数年の一連の仕事の始まりは [F2] である。すでに述べたように、[F2] では [BCHM] をほぼ忠実に複素解析空間の間の射影射に対して一般化した。その後、[DHP] では少し異なる方法で [F2] の主要な結果を再現している。また、[LM] は [DHP] と似た方法で、複素解析空間以外にも適用可能なさらなる一般化を与えている。

いずれにせよ、ここまで述べた仕事は主に川又対数的末端対に対するものであり、特異点解消定理と小平の消滅定理が解析的設定で成り立つことを考えれば、とくに驚くことではない。中山の [N1]、[N2] と [F2] の主たる貢献は、極小モデル理論を論じる正しい設定を見つけ、定式化した点であると思う。

次に、[F4] で複素解析空間の間の射影射に対して強力な消滅定理（定理 10.1）を確立した。これは個人的には長年未解決の問題で、[F2] の仕事を完成させた後も、定理 10.1 は私が現役の間には証明できないかもしれないと思っていた主張であった。いずれにせよ、[F4] が完成してしまえばあとは一気に研究が進むのは自明であった。

[F5] では対数的標準対に対して極小モデル理論の基礎である錐体定理や収縮定理を証明した。消滅定理の応用である。[F6] では**半対数的標準対** (semi-log canonical pairs) なども扱えるように複素解析空間にも**擬対数的構造** (quasi-log structure) を導入して基本的な道具を全部揃えた。

榎園と橋詰は [EH1] で複素解析空間の間の射影射に対して **(弱) 半安定退化定理**を確立し、それを用いて [EH2] で対数的標準対に対しても解析的な極小モデル理論を論じた。[F9] では上記結果も援用し、アバンダンス予想を論じた。特に**対数的標準フリップ** (log canonical flip) が複素解析的設定でも存在することを示した ([F9, Theorem 1.7])。フリップの存在問題は最初の非自明で重要な場合が森によって証明されたが、ここにきて通常考えられるフリップの一番一般的な存在定理が確立したことになる。[F9] や [EH3] で、極小モデル関連のほぼすべての予想はオリジナルの代数的な設定の予想に帰着できることが確認され、ある意味、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデル理論は完成したと言って良いだろう。

橋詰は [H] でさらに特異点の悪い場合の極小モデル理論も扱っている。いずれにせよ、ここ数年の一連の仕事で、複素解析空間の射影射に対しても代数多様体の場合とほぼ同じ

ように極小モデル理論は使える、となり、一段落ついたと思う。

複素解析的な設定での対数的標準閾値 (log canonical threshold) の ACC については [F3] と [F9, Theorem 6.2]、複素解析的な設定での対数的標準性についての逆随伴は [F8] と [F9, Theorem 6.3] で扱われている。

14　おまけ

今回の極小モデル理論の解析化に関する話の前半（論文 [F2] で扱った部分）は、[BCHM] を読めば誰でもすぐに思いつくような話である。優秀な学生でちょうどいい問題を探している人がいればやらせてみよう、と考えていたのだが、そんな機会がないまま気づけば 10 年以上が経ってしまっていた。

コロナ禍の 2021 年 9 月、「極小モデル理論についての問題」というタイトルで講演を行った（講演記録は [藤 3] を参照)。この講演では、極小モデル理論の解析化についても話したのだが、その後、数理研の講究録（[藤 3]）を書く段になって、「変なこと言ってなかったかな？」「当たり前のことばかりじゃなかったかな？」と少し気になり始めた。そこで改めて考えてみたところ、気づけば [F2] ができあがっていた、というのが今回の研究の裏話である。

当時はコロナ禍で外出も少なく、時間に余裕があり、周囲の雑音に惑わされることもなかったので、集中して仕事ができた。その結果、10 年以上手つかずだった消滅定理の複素解析化も [F4] であっさり証明できてしまった。

こうなると、あとは代数的な結果を複素解析的な設定にどんどん翻訳していくだけの話であった。

15　よくある質問への答え

ここでは、よくある質問への答えを記しておく。代数多様体の場合には問題とならなかったが、複素解析空間の間の射影射を扱う際に現れる現象である。

Y を非特異射影曲面、$P \in Y$ とする。

$$\pi\colon X \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\alpha} Y$$

を次のように構成する。$\alpha\colon Z \to Y$ は Y の点 P におけるブローアップ、$\beta\colon X \to Z$ は $Q \in Z \setminus \mathrm{Exc}(\alpha)$ におけるブローアップとする。β による例外曲線を $F \subset X$、α による例外曲線の厳密変換（strict transform）を $E \subset X$ とする。

このとき、$W := P$ とおいて錐体定理を考えると、

$$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;P) = \mathbb{R}_{\geq 0}[E]$$

となることは明らかであろう。ここで、Y 上の豊富なカルティエ因子 H を一つ選び、$\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(\pi^*H + F)$ とおく。

このとき、$\mathcal{L} \cdot E = 0$ より、$\mathcal{L}$ は明らかに P 上で π-数値的非負である。また、

$$K_X = \pi^*K_Y + E + F$$

より、$-K_X$ は P 上で π-豊富である。

さらに、$\mathcal{L} - K_X$ は P 上で π-豊富となるので、複素解析空間の間の射影射に対する固定点自由化定理（basepoint free theorem）を用いれば、$\mathcal{L}$ は P のある開近傍上で π-半豊富であることが示せる。

しかしながら、$\mathcal{L} \cdot F = -1$ であるため、$\mathcal{L}$ はそもそも Y 上では π-数値的非負ではない。したがって、当然ながら $\mathcal{L}$ は Y 上で π-半豊富にはなりえない。

$\mathcal{L}$ は $\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;P) = \mathbb{R}_{\geq 0}[E]$ における K_X-負な端射線の支持関数を与え、また、$\mathcal{L}$ はこの端射線に含まれる曲線を潰す収縮写像を与えるが、この収縮写像は Y 上ではなく、$Y \setminus \alpha(Q)$ 上でのみ存在する。

複素解析空間の間の射影射に対する極小モデルプログラムにおいて、各ステップが W の適当な近傍に制限しないと存在しないというのは、このような現象によるものである。

もちろん、ここで取り上げた例は極めて単純であり、Y 上で目的の E のみを潰す射の存在は明らかであるが、$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y;W)$ の端射線から一般論により収縮射を構成すると、W の近傍上でしかその存在を言えないことになる。

通常の錐体定理を考えると、

$$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y) = \mathbb{R}_{\geq 0}[E] + \mathbb{R}_{\geq 0}[F]$$

となり、このとき $\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}[E]$ の支持関数にはならない。たとえば、$\mathcal{L}' := \mathcal{O}_X(\pi^*H - F)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}[E]$ の支持関数となることが分かり、通常の代数多様体の場合の収縮定理を用いれば、$\mathcal{L}'$ は Y 上で E のみを潰す収縮写像を与える。

一方、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデルプログラムでは、W に潰れる曲線のみを扱うため、上記のような差異が生じるのである。

折角なので、もう一つ別の例も扱ってみる。今度は $Y := \mathbb{P}^3$ とし、点 $P \in L \subset \mathbb{P}^3$ を取る。ただし、L は $\mathbb{P}^3$ 上の直線とする。$\pi\colon X \to Y$ を L に沿ったブローアップとする。

このとき $W = P$ として錐体定理を考えると、

$$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y; P) = \mathbb{R}_{\geq 0}[\ell]$$

となることは明らかであろう。ここで、$\ell := \pi^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^1$ である。

π の例外因子を E とすると、

$$K_X = \pi^* K_Y + E$$

と書けるので、$-K_X$ が π-豊富であることがわかる。

このとき、複素解析空間の間の射影射に対する収縮定理を用いることで、P の開近傍 U が存在し、Y を U に縮めた上で、ℓ を点に潰す収縮射 φ が存在することがわかる。

さらに、$\pi\colon E \to L$ に剛性補題（rigidity lemma）を適用すると、$Q \in L \cap U$ の任意のファイバー $\pi^{-1}(Q) \simeq \mathbb{P}^1$ は収縮射 φ により点に潰されることがわかる。

この例からわかるように、複素解析空間の間の射影射に対する極小モデルプログラムでは、$W = P$ に潰れる曲線だけを用いて錐体定理および収縮定理が構成されている。しかし、極小モデルプログラムの各ステップにおいては、W からはみ出す曲線が潰されることもある。

つまり、$\overline{\mathrm{NE}}(X/Y; P)$ は P に潰れる曲線のみを考慮しているが、実際にプログラムを走らせると、P のファイバー内だけでフリップや因子収縮が生じるとは限らない。この点には注意が必要である。

16　謝辞

代数学シンポジウムの開催に際し、プログラム責任者である岸本崇さんおよび藤田健人さんをはじめ、運営にご尽力くださった皆さまに深く感謝申し上げます。また、本稿を丁寧に読んで有益なコメントを寄せてくださった橋詰健太さんと森山奈緒さんにも心より御礼申し上げます。

参考文献

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.

[DHP] O. Das, C. Hacon, M. Păun, On the 4-dimensional minimal model program for Kähler varieties, Adv. Math. **443** (2024), Paper No. 109615, 68 pp.

[EH1] M. Enokizono, K. Hashizume, Semistable reduction for complex analytic spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **378** (2025), 7667–7688.

[EH2] M. Enokizono, K. Hashizume, Minimal model program for log canonical pairs on complex analytic spaces, preprint (2024). arXiv:2404.05126 [math.AG]

[EH3] M. Enokizono, K. Hashizume, On termination of minimal model program for log canonical pairs on complex analytic spaces, preprint (2025). arXiv:2501.03531 [math.AG]

[F1] O. Fujino, *Foundations of the minimal model program*, MSJ Memoirs, **35**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017.

[F2] O. Fujino, Minimal model program for projective morphisms between complex analytic spaces, preprint (2022). arXiv:2201.11315 [math.AG]

[F3] O. Fujino, ACC for log canonical thresholds for complex analytic spaces, *Higher Dimensional Algebraic Geometry. A Volume in Honor of V. V. Shokurov*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. **489**, Cambridge University Press, Cambridge, 2025, 11–18.

[F4] O. Fujino, Vanishing theorems for projective morphisms between complex analytic spaces, Math. Res. Lett. **32** (2025), no. 3, 739–769.

[F5] O. Fujino, *Cone and contraction theorem for projective morphisms between complex analytic spaces*, MSJ Memoirs, **42**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2024.

[F6] O. Fujino, On quasi-log structures on complex analytic spaces, preprint (2022). arXiv:2209.11401 [math.AG]

[F7] O. Fujino, On vanishing theorems for analytic spaces, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **100** (2024), no. 4, 21–25.

[F8] O. Fujino, Log canonical inversion of adjunction, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **100** (2024), no. 2, 7–11.

[F9] O. Fujino, On finiteness of relative log pluricanonical representations, preprint (2024). arXiv:2506.00760 [math.AG]

[藤 1] 藤野　修、Recent developments in the log minimal model program （対数的極小モデル理論の最近の発展について）第 50 回代数学シンポジウム報告集 p151–p162 (2005). `https://www.mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp05_files/Fujino.pdf`

[藤 2] 藤野　修、Recent developments in the log minimal model program II（対数的極小モデル理論の最近の発展について II）第 52 回代数学シンポジウム報告集 p141–153 (2007). https://www.mathsoc.jp/assets/file/sections/algebra/algsympo/algsymp07/fujino.pdf

[藤 3] 藤野　修、Problems on the theory of minimal models（極小モデル理論についての問題）数理解析研究所講究録, no. **2211**, p223–235 (2022). https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/server/api/core/bitstreams/e39c64da-0df7-4b6b-b996-f264ccd173d2/content

[FF] O. Fujino, T. Fujisawa, Variation of mixed Hodge structure and its applications, Internat. J. Math. **36** (2025), no. 9, Paper No. 2550020, 43 pp.

[H] K. Hashizume, Minimal model program for normal pairs along log canonical locus in complex analytic setting, preprint (2025). arXiv:2501.04057 [math.AG]

[LM] S. Lyu, T. Murayama, The relative minimal model program for excellent algebraic spaces and analytic spaces in equal characteristic zero, preprint (2022). arXiv:2209.08732 [math.AG]

[Mo] N. Moriyama, Remarks on the minimal model theory for log surfaces in the analytic setting, preprint (2025). arXiv:2505.18055 [math.AG]

[Mu] T. Murayama, Injectivity theorems and cubical descent for schemes, stacks, and analytic spaces, preprint (2024). arXiv:2406.10800 [math.AG]

[N1] N. Nakayama, The lower semicontinuity of the plurigenera of complex varieties, *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, 551–590, Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[N2] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, **14**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. xiv+277 pp.

斜交的 p-進 GALOIS 表現に対する p-PARITY 予想：岩澤理論的なアプローチ

中村　健太郎

1. p-PARITY 予想とは

F を代数体, E を F 上の楕円曲線とする. E の Mordell-Weil 群 $E(F)$ の階数を $r_{\mathrm{alg}}(E)$, E の L-関数 $L(E/F,s)$ の (解析接続を仮定した上で)$s=1$ での零点の位数を $r_{\mathrm{an}}(E)$ と表す. E に対する p-parity 予想とは, Birch and Swinnerton-Dyer 予想 (BSD 予想) の等式

$$r_{\mathrm{alg}}(E)=r_{\mathrm{an}}(E)$$

の法 2 版, つまり, 合同式

$$r_{\mathrm{alg}}(E)\equiv r_{\mathrm{an}}(E)\mod 2 \tag{1.1}$$

に関する予想である. $L(E,s)$ に適切な Gamma 因子をかけて得られる $\Lambda(E/F,s)$ は関数等式

$$\Lambda(E/F,s)=w(E/F)\Lambda(E/F,2-s)$$

$(w(E/F)\in\{\pm1\})$ を満たすと予想されているが, これを認めると上の合同式は次の等式と同値になる.

予想 1.1. (parity 予想)

$$(-1)^{r_{\mathrm{alg}}(E)}=w(E/F) \tag{1.2}$$

「parity 予想 $+$ $L(E,s)$ の良い解析的性質」$\Rightarrow$ 弱 BSD mod 2

ここで, $w(E/F)$ はルートナンバーと呼ばれ, F の各素点 v での完備化 F_v への E の底変換 $E_{F_v}=E\times_{\mathrm{Spec}(F)}\mathrm{Spec}(F_v)$ に対して定義される局所ルートナンバー

$$w(E_{F_v}/F_v)\in\{\pm1\}$$

の積

$$w(E/F)=\prod_v w(E_{F_v}/F_v)$$

として定義される. $w(E_{F_v}/F_v)$ は, v が無限素点の場合は -1, v が有限素点で E_{F_v} が良還元をもつ場合は 1 である. E_{F_v} が悪い還元を持つ場合もほとんどの場合 (特に $p\geq5$ の場合は全ての場合) に値が知られている (Rohlich[19], Kobayashi[11]).

これらの事実, 特に,

- $L(E,s)$ に関する予想を仮定しないでも $w(E/F)$ は定義できる
- $w(E/F)$ は各素点での局所成分に分解できる

という 2 つの事実によって, parity 予想は弱 BSD 予想よりも調べやすい予想となるが, さらに左辺 $r_{\mathrm{alg}}(E)$ も素点への分解に適したより扱い易い対象に置き換えることで本稿のテーマである次の p-parity 予想に到達する.

E/F の p^∞-Selmer 群と Tate-Shafarevich 群をそれぞれ $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F)$, Ш$(E/F)$ と表す. これらの群の定義は解説しない ($\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F)$ についてはこれと非常に近い対象である Bloch-加藤 Selmer 群の定義を後で解説する) が, $E(F)$ とこれらの群の間には次の完全列

$$0 \to E(F) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to \mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F) \to Ш(E/F)[p^\infty] \to 0$$

があることが知られており, これによって等式

$$r_{\mathrm{alg}}(E) = \mathrm{corank}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F)) + \mathrm{corank}_{\mathbf{Z}_p}(Ш(E/F)[p^\infty])$$

$(\mathrm{corank}_{\mathbf{Z}_p}(-) := \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, -))$ があるため, Ш(E/F) が (よって Ш$(E/F)[p^\infty]$ も) 有限群であるという基本的な予想の下では parity 予想は次の予想と同値になる.

予想 1.2. (p-parity 予想)

$$(-1)^{\mathrm{corank}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F))} = w(E/F) \tag{1.3}$$

「p-parity 予想 + Ш$(E/F)[p^\infty]$ の有限性」⇒ parity 予想

詳しくは後で説明するが, $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F)$ は, E の p 進 Tate 加群 $T_pE := \varprojlim_n E(\overline{F})[p^n]$ として得られる G_F の p-進 Galois 表現を用いて定義され, 特に F の各素点 v での分解群 $G_{F_v} \subset G_F$ への制限 $T_pE|_{G_{F_v}}$ の局所的な性質が反映した群となる. $\mathrm{corank}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F))$ は $V_pE = T_pE \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ の情報から定まり, また, E_{F_v} から定義された $w(E_{F_v}/F_v)$ も $V_pE|_{G_{F_v}}$ から定義されることが知られている. 以上のことから, p-parity 予想では等式の両辺が

- p 進 Galois 表現 V_pE という線形代数的な対象から得られる
- 各素点での情報に分解し易い

という性質を持つことになり, これらの事実によって p-parity 予想は parity 予想よりも遥に扱い易い予想となる.

本稿では, より一般の p 進 Galois 表現に対する p-parity 予想について, まずは予想の定式化を解説し, ついで予想の両辺を素点ごとの情報の積に分解するための代表的な研究手法を一つ（相対的 p-parity 予想を) 解説する. 予想の右辺 $w(E/F)$ は定義からそもそも素点ごとに定義される $w(E_v/F_v)$ の積であるので, ここでの問題は $\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/F)$ をいかにして素点ごとの情報に分解するかが本質的な問題となる.

以下, 本稿では簡単のため代数体 F は $\mathbf{Q}$ の場合のみ考え, 合わせて (分解群として考える) 局所体も $\mathbf{Q}_\ell$ のみを考えることにする.

1.1. **斜交的 p 進 Galois 表現.** $K = \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_\ell$ とする. R を位相的な可換 $\mathbf{Z}_p$-代数とする. G_K が連続 R-線形に作用する有限自由 R-加群 T を G_K の R-表現と呼ぶことにする. G_K の階数 1 の $\mathbf{Z}_p$-表現 $\varprojlim_n \mu_{p^n}(\overline{K})$ $(\mu_{p^n}(\overline{K}) = \{x \in \overline{K} \mid x^{p^n} = 1\})$ を $\mathbf{Z}_p(1)$ と表し, 整数 r に対して $\mathbf{Z}_p(r) = \mathbf{Z}_p(1)^{\otimes r}$ $(r \geq 0)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Z}_p(-r), \mathbf{Z}_p)$ $(r \leq 0)$ と表す. G_K の R-表現 T に対して $T(r) = T \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p(r)$ と表す.

楕円曲線 E に対する p-parity 予想をより一般の p 進 Galois 表現に対して拡張したい. 楕円曲線の parity 予想の背景には, E のゼータ関数が

$$\Lambda(E, s) = w(E/F)\Lambda(E, 2 - s)$$

という関数等式を持つという事実 (予想) が存在していたが, この事実の Galois 表現論的な背景には, V_pE が Weil ペアリングから定まる斜交的完全ペアリング

$$V_pE \times V_pE \to \mathbf{Q}_p(1)$$

を持つことがある. p-parity 予想はこのようなペアリングを持つ幾何的な大域 p 進 Galois 表現に対して定式化される.

定義 1.3. G_K の R-表現 T が R-双線形かつ G_K-同変な斜交的完全ペアリング

$$\langle -, - \rangle : T \times T \to R(1)$$

を持つとき, つまり, 等式

$$\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle \quad (x, y \in T)$$

を満たし, $\langle -, - \rangle$ から誘導される写像

$$T \to T^*(1) := \mathrm{Hom}_R(T, R(1)) : x \mapsto [y \mapsto \langle x, y \rangle]$$

が同型となるとき, T (正確には組 $(T, \langle -, - \rangle)$) は斜交的自己双対性を持つ (symplectic self-dual), または単に斜交的である, と言うことにする.

K 上の楕円曲線 E に対して, V_pE は Weil ペアリングによって G_K の斜交的な 2 次元 $\mathbf{Q}_p$-表現になる. より一般に K 上の奇数次元 $d = 2m-1$ の proper smooth な代数多様体 X に対して, それの $\overline{K}$ への底変換 $X_{\overline{K}}$ の中間次元エタールコホモロジー $\mathrm{H}^d_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p(m))$ は Poincaré 双対ペアリング

$$\mathrm{H}^d_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p(m)) \times \mathrm{H}^d_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p(m)) \to \mathrm{H}^{2d}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p(2m)) = \mathrm{H}^{2d}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p(d+1)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_p(1)$$

によって G_K の斜交的 $\mathbf{Q}_p$-表現となる. 重さが偶数 $k = 2k' \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$, レベル N の Hecke 固有新形式 $f \in S^{\mathrm{new}}_{2k}(\Gamma_0(N))$ に対して, f に付随する $G_{\mathbf{Q}}$ の 2 次元 p-進表現 $V_f(k')$ は, V_f を実現するモジュラー曲線のエタールコホモロジーの Poincaré 双対ペアリングから誘導されるペアリングによって斜交的となる. G_K の階数 2 の R-表現 T に対して, T が斜交的であることは , T の行列式指標 $\det_R(T) : G_K \to R^\times$ が p 進円分指標に一致することと同値になる. より一般に, G_K の斜交的 R-表現は必ず階数は偶数 $2d$ であり, G_K の階数 $2d$ の R-表現が (あるペアリングによって) 斜交的であるためには T の基底を選ぶことで表現行列が $\mathrm{GSp}_{2n}(R)$ に値を持ち, かつ similitude character が p 進円分指標となることと同値になる.

1.2. **p-parity 予想の定式化.** ここでは楕円曲線に対して説明した p-parity 予想を $G_{\mathbf{Q}}$ の斜交的 p-進表現に対して拡張したい. p-parity は p^∞-Selmer 群とルートナンバーに関する等式であったが, このような Selmer 群的なものと L-関数的なものを定義するためには, p-進表現が幾何的という条件を満たす必要がある. そこでまずはこれらと関連する事柄の定義を復習したい.

L を $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体とする.

V を $G_{\mathbf{Q}}$ の L-表現とする. V が幾何的であるとは, $V|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}$ は有限個の素数 ℓ を除いて不分岐であり, かつ $V|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ が de Rham 表現であることとする. 次に説明するように, 幾何的な表現からは各素点での $V|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}$ の情報を用いて (適切な性質を持つ)Selmer 群や L-関数が定義される.

ℓ を素数とし, V を $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ の L-表現とする. $\ell = p$ の場合は V は de Rham であると仮定する. このような V に対しては, Selmer 群や L-関数の局所因子となる対象を定義するこ

とができる．ます, V の Galois コホモロジー群 $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V)$ の部分空間 $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ を

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V) := \begin{cases} \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V) \to \mathrm{H}^1(I_\ell, V)) & (\ell \neq p) \\ \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) & (\ell = p) \end{cases}$$

で定める (I_ℓ は $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ の分岐群). 重要な事実として, Tate ペアリング

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V) \times \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V^*(1)) \to L$$

によって部分空間 $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ と $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V^*(1))$ は直交補空間の関係

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V) = \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V^*(1))^\perp$$

になることが知られている (Bloch-加藤双対). また, V に対して, $\mathbf{Q}_\ell$ の Weil-Deligne 群の表現 $\mathrm{WD}(V)$ というより代数的な表現が得られ, 局所因子の理論 (Deligne[6]) によって $\mathrm{WD}(V)$ からは局所 L-因子, 局所 ε-因子という L 関数の ℓ における局所因子となる複素関数

$$L_\ell(\mathrm{WD}(V), s), \quad \varepsilon_\ell(\mathrm{WD}(V), s)$$

を定義することができる．定義は解説しないが, これらは一般には様々な選択 (例えば $\mathbf{C}_p$ と $\mathbf{C}$ の同一視の取り方や非自明指標 $\psi : \mathbf{Q}_\ell \to \mathbf{C}^\times$ の取り方) に依存することを注意したい. $\ell = p$ の場合にはさらに, V に対応する de Rham コホモロジーの Hodge フィルトレイションから Hodge-Tate 重みという V の階数 d 個の (重複を許す) 整数の組 $\{k_1, k_2, \cdots, k_d\}$ が定まる.

　ここで, $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ の L-表現 $V(\ell = p$ の場合は de Rham を仮定) が斜交的であると仮定する. このとき, $\mathrm{WD}(V)$ の局所 ε-定数

$$\varepsilon_\ell(V) := \varepsilon_\ell(\mathrm{WD}(V), 0) \in \mathbf{C}^\times$$

(局所 ε-因子の $s = 0$ での値) は様々な選択に依存せず, かつ

$$\varepsilon_\ell(V) \in \{\pm 1\}$$

となることが知られている. $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ に関しては, (V 上に与えられた斜交的ペアリングによって) 同型 $V \xrightarrow{\sim} V^*(1)$ があるから, Tate ペアリングは $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V)$ の完全ペアリング

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V) \times \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V) \to L$$

を誘導し, Bloch-加藤双対によって $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ はこのペアリングに関して Lagrangian, つまり,

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V) = \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)^\perp$$

を満たすものとなる. また, V のペアリングの斜交性と Tate ペアリングの斜交性から上記のペアリングは対称ペアリングになる. 最後に $\ell = p$ の場合の Hodge-Tate 重みに関しては, $\mathbf{Q}_p(1)$ の Hodge-Tate 重みは 1 となることと, V の Hodge-Tate 重みが $\{k_1, \cdots, k_d\}$ のとき V^* の Hodge-Tate 重みが $\{-k_1, \cdots, -k_d\}$ となることから, 斜交的な $2d$ 次元の V に対しては

$$\{k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_d \geq 1 - k_d \geq \cdots \geq 1 - k_2 \geq 1 - k_1\}$$

$(k_i \geq 1)$ と書けることがわかる.

次に, V は $G_{\mathbf{Q}}$ の幾何的かつ斜交的 L-表現であると仮定する．このとき, まず V の Blcoh-加藤 Selmet 群 $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, V)$ を

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, V) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}, V) \to \prod_{\ell} \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V)/\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)\right)$$

で定める．これは有限次元であることが知られており (この事実については斜交的という仮定は不要である),

$$\chi_f(V) := \dim_L \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, V) - \dim_L \mathrm{H}^0(\mathbf{Q}, V)$$

と定める．各素数 ℓ に対して $\varepsilon_\ell(V) := \varepsilon_\ell(V|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}})$ と表す．さらに, $V|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ の Hodge-Tate 重みを $\{k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_d \geq 1-k_d \geq \cdots \geq 1-k_2 \geq 1-k_1\}$ としたとき,

$$\varepsilon_\infty(V) = \prod_{i=1}^{d} (-1)^{k_i - 1} \in \{\pm 1\}$$

と定め, さらに

$$\varepsilon(V) := \varepsilon_\infty(V) \cdot \prod_{\ell} \varepsilon_\ell(V) \in \{\pm 1\}$$

と定める．$V|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}$ が不分岐なとき $\varepsilon_\ell(V) = 1$ であり, V は幾何的と仮定しているので上の無限積は意味を持つことに注意．後で使う記号として

$$\widehat{\varepsilon}_p(V) = \varepsilon_\infty(V)\varepsilon_p(V)$$

と定める．

注意 1.4. E を $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線とする．このとき, $\mathbf{Q}$ の全ての素点 v に対して,

$$\varepsilon_v(V_pE) = w_v(E_{\mathbf{Q}_v}/\mathbf{Q}_v)$$

が成り立つ．よって

$$\varepsilon(V_pE) = w(E/\mathbf{Q})$$

も成り立つ．さらに, $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{H}^0(\mathbf{Q}, V_pE) = 0$,

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}, V_pE) = \mathrm{corank}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbf{Q}))$$

が成り立つので

$$\chi_f(V_pE) = \mathrm{corank}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbf{Q}))$$

が成り立つ．

予想 1.5. (p-parity 予想) V を $G_{\mathbf{Q}}$ の幾何的かつ斜交的な L-表現とする．このとき

$$(-1)^{\chi_f(V)} = \varepsilon(V)$$

が成り立つ．

2. 相対的 p-PARITY 予想

多くの (大域体的な) 整数論の問題と同様に, p-parity 予想においても問題を素点毎の問題に分解して考えることは重要である. p-parity 予想

$$(-1)^{\chi_f(V)} = \varepsilon(V)$$

の右辺は

$$\varepsilon(V) = \varepsilon_\infty(V) \cdot \prod_\ell \varepsilon_\ell(V)$$

と局所成分の積に分解していたので, 問題は左辺

$$(-1)^{\chi_f(V)}$$

の局所成分への分解となる. $(-1)^{\chi_f(V)}$ を単独で局所成分に分解することは難しく, 適切な他のものと比較することで分解する, というのが p-parity 予想におけるスタンダードな研究手法である. 本稿ではその中でも代表的な手法の一つである, p-進表現 V_1, V_2 に対する p-parity 予想を比較する相対的 p-parity 予想について解説する. これは, 二つの斜交的 p-進 Galois 表現 V_1, V_2 に対して, 両者の予想の同値性, つまり, V_1(または V_2) に対して p-parity 予想が成り立っていれば V_2(または V_1) に対しても成り立つ, ことを主張する予想である. 一般の V_1, V_2 に対してこの予想を考えることは, p-parity 予想自体を考えること大差がなくなってしまうので, 適切な関係性を持つ V_1, V_2 に対してこの予想を考えることが重要になる. 本稿では, 法 p で合同な V_1, V_2 についての相対的 p-parity 予想 (のみ) を考える.

2.1. **相対的 p-parity 予想.** G_K の斜交的 $\mathcal{O}_L$-表現 T_1, T_2 に対して, 斜交的ペアリングと両立する $\mathbf{F}[G_K]$-加群の同型

$$\overline{T}_1 := T_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathbf{F} \xrightarrow{\sim} \overline{T}_2$$

が存在するとき, T_1 と T_2 は法 p で合同である, と呼ぶことにする. このようなとき, $\overline{T} := \overline{T}_1$ と表し, 同型によってこれを $\overline{T}_2$ とも同一視することにする.

予想 2.1. (相対的 p-parity 予想) T_1, T_2 を法 p で合同な $G_{\mathbf{Q}}$ の斜交的 L-表現とし, $V_1 := T_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} L, V_2$ は幾何的であるとする. このとき

$$(-1)^{\chi_f(V_1) - \chi_f(V_2)} = \frac{\varepsilon(V_1)}{\varepsilon(V_2)}$$

が成り立つ.

注意 2.2. p-parity 予想と相対的 p-parity 予想には多くの先行研究があるが, ここでは我々の研究と関連する代表的なものを挙げるにとどめたい. まず, $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線に対する p-parity 予想は全ての場合に Dokchitser 兄弟 [7] によって証明されている. Coates-Fukaya-Kato-Sujatha は代数体上の g 次元アーベル多様体 A で, p の上の素点で (アーベル拡大上) 準安定還元を持ち, かつ $A[p]$ が位数 p^g の F 上の部分群を持つ場合に V_pA に対する p-parity 予想を示している. A が (一般の代数体上の) 楕円曲線の場合は Česnavičius[4] によって p の上の素点で (アーベル拡大上) 準安定還元を持つという仮定は不要になった. Nekovar[14] は p-ordinary 族 (例えば肥田族) の同じ既約成分に含まれる V_1, V_2 に対する（必ずしも法 p で合同とは限らない場合の) 相対的 p-parity 予想を証明している. ここでは, V_1, V_2 は p-ordinary 族に含まれるので $V_1|_{G_{\mathbf{Q}_p}}, V_2|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ ともに ordinary という強い条件が必要であり, かつ, 族の同じ既約成分に入るかどうかは一般には判定するのが難しい問題である. Pottharst-Xiao[20] は Nekovar の結果を p-trianguline 族 (例えば Coleman 族) に一般化し,

その族の同じ既約成分に含まれる V_1, V_2 に対する相対的 p-parity 予想を証明している．この族に含まれる V_1, V_2 は p-trianguline なので $V_1|_{G_{\mathbf{Q}_p}}, V_2|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ ともに (アーベル拡大したら)semi-stable という条件が必要であり, かつ, 族の同じ既約成分に入るかどうかは一般には判定するのはさらに難しい問題である．同じ既約成分に入るかについては Johannson-Newton の結果 [9] がある．次で詳しく説明するが, Nekovar 法 p で合同な場合の上記の相対的 p-parity 予想についても多くの研究を行っている ([15], [16], [17], [18]).

幾何的な斜交的 L-表現 V に対して, 定義より

$$\varepsilon(V) = \varepsilon_\infty(V) \cdot \prod_\ell \varepsilon_\ell(V)$$

だったので予想 2.1 の右辺は局所成分の積

$$\frac{\varepsilon(V_1)}{\varepsilon(V_2)} = \frac{\varepsilon_\infty(V_1)}{\varepsilon_\infty(V_2)} \cdot \prod_\ell \frac{\varepsilon_\ell(V_1)}{\varepsilon_\ell(V_2)}$$

に分解している．法 p で合同な T_1, T_2 の場合, これに対応するような左辺 $(-1)^{\chi_f(V_1)-\chi_f(V_2)}$ の局所成分への分解が Mazur-Rubin[12] によって与えられた.

2.2. **Mazur-Rubin 定数.** T を $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ の $\mathcal{O}_L$-表現とし, $\overline{T}$ をその剰余表現とする．$V = T \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ とおく, $\ell = p$ の場合は V は de Rham であるとする．このとき, $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, T)$ および $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, \overline{T})$ の部分 $\mathcal{O}_L$-加群を

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T) = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, T) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, V)/\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)),$$

$$\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T)} := \mathrm{Image}(\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, T) \to \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, \overline{T}))$$

で定める．$H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ の Bloch-加藤双対性からの簡単な帰結として, Tate ペアリング

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, \overline{T}) \times \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, \overline{T}^*(1)) \to \mathbf{F}$$

に対して ($\mathbf{F}$ は体係数なので V の場合と同様にこれは完全ペアリングになる),

$$\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T)} = \left(\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T^*(1)}\right)^\perp$$

が成り立つことがわかる.

T_1 と T_2 は法 p で合同な $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ の $\mathcal{O}_L$-表現であるとする．$\ell = p$ の時は $V_1 = T_1 \otimes_{\mathcal{O}_L} L$, $V_2 = T_2 \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ はともに de Rham であると仮定する．上に述べたことから $\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T_1)}$ と $\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T_2)}$ はともに $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell, \overline{T})$ の Lagrangian となっている ($\overline{T} := \overline{T}_1 \xrightarrow{\sim} \overline{T}_2$). これらを用いて

$$\delta_\ell(T_1, T_2) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

を次で定義する.

定義 2.3. (Mazur-Rubin 定数 [12])

$$\delta_\ell(T_1, T_2) := \dim_{\mathbf{F}} \left(\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T_1)}/\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T_1)} \cap \overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T_2)}\right) \mod 2$$

対称二次加群の Lagrangian の性質から, $\delta_\ell(T_1,T_2)$ は

$$\delta_\ell(T_1,T_2)=\delta_\ell(T_2,T_1),$$
$$\delta_\ell(T_1,T_3)=\delta_\ell(T_1,T_2)+\delta_\ell(T_2,T_3)$$

などの良い性質を持つ. また, $\ell\neq p$ かつ T_1,T_2 がともに不分岐であるときは

$$\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell,T_1)}=\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_\ell,T_2)}=\mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_\ell,\overline{T})\to\mathrm{H}^1(I_\ell,\overline{T}))$$

となり, $\delta_\ell(T_1,T_2)=0$ が成り立つ.

T_1,T_2 を法 p で合同な $G_{\mathbf{Q}}$ の斜交的 $\mathcal{O}_L$-表現とし, V_1,V_2 は幾何的であると仮定する. このとき, 各素数 ℓ に対して

$$\delta_\ell(T_1,T_2)=\delta_\ell(T_1|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}},T_2|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}})$$

と表す.

Mazur-Rubin 定数によって $\chi_f(V_1)$ と $\chi_f(V_2)$ のずれが次のように局所成分の和として書くことができる.

定理 2.4. (Mazur-Rubin[12])

$$(-1)^{\chi_f(V_1)-\chi_f(V_2)}=(-1)^{\Sigma_\ell\delta_\ell(T_1,T_2)}$$

この定理により, 合同な T_1,T_2 に対する相対的 p-parity 予想は等式

$$(-1)^{\Sigma_\ell\delta_\ell(T_1,T_2)}=\frac{\varepsilon_\infty(V_1)}{\varepsilon_\infty(V_2)}\cdot\prod_\ell\frac{\varepsilon_\ell(V_1)}{\varepsilon_\ell(V_2)}$$

となる. よって, 相対的 p-parity 予想は次の局所相対的 p-parity 予想に帰着される.

予想 2.5. (局所相対的 p-parity 予想, Nekovar[17], [18], [BKNO][2]) *T_1,T_2 を法 p で合同な $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ の $\mathcal{O}_L$-表現とする. $\ell=p$ のときは, V_1,V_2 は de Rham であると仮定する. このとき,*

$$(-1)^{\delta_\ell(T_1,T_2)}=\begin{cases}\frac{\varepsilon_\ell(V_1)}{\varepsilon_\ell(V_2)} & (\ell\neq p)\\ \frac{\widehat{\varepsilon}_p(V_1)}{\widehat{\varepsilon}_p(V_2)} & (\ell=p)\end{cases}$$

注意 2.6. $\ell=p$ のときは, Nekovar[18] では, V_1,V_2 の Hodge-Tate 重みが (重複を除いて)$\{0,1\}$ となる場合が扱われており (このとき $\varepsilon_\infty(V_1)=\varepsilon_\infty(V_2)=1$ となるので, 上の予想の右辺は $\frac{\varepsilon_p(V_1)}{\varepsilon_p(V_2)}$ となる), 上記の $\widehat{\varepsilon}_p(-)$ による予想は明示的には書かれていなかった. 予想を明示的に述べたのは (おそらく)[BKNO][2] が初めてで, この論文では実際に階数 2 の場合に予想を証明している (後述).

$\ell\neq p$ の場合は, この予想はすでに証明されている.

定理 2.7. (Nekovar[17]) *$\ell\neq p$ のとき, 局所相対的 p-parity 予想は正しい.*

以上により, 相対的 p-parity 予想は $\ell=p$ における局所相対的 p-parity 予想に帰着される. Nekovar は次の特別な場合, 特に $\varepsilon_\infty(V_1)=\varepsilon_\infty(V_2)=1$ の場合に相対的 p-parity 予想を示した.

定理 2.8. (Nekovar[18]) *$\ell=p$ とする. V_1,V_2 の Hodge-Tate 重みは (重複を除いて)$\{0,1\}$ かつ $V_1|_{G_{\mathbf{Q}_p(\zeta_p)}},V_2|_{G_{\mathbf{Q}_p(\zeta_p)}}$ がクリスタリンのとき, T_1,T_2 に対する相対的 p-parity 予想は正しい.*

注意 2.9. 実際には [18] ではより一般に, 任意の p-進体 K に対して, 上記の仮定に相当する G_K の表現に対する相対的 p-parity 予想を証明している.

3. [BKNO] の結果

以下, p-進 Galois 表現の係数環 R は, 完備 Noether 局所 (可換)$\mathbf{Z}_p$-代数で, 剰余体 $\mathbf{F} = R/\mathfrak{m}_R$ が有限体となるもの ($\mathfrak{m}_R$ は R の極大イデアル) か, $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体かのいずれかとする. 例えば, $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体 L に対して, その整数環 $\mathcal{O}_L$ やその剰余体 $\mathbf{F}$ はそのような環の例である. これらを係数に持つ表現は G_K の L-表現 V があれば, G_K-作用で閉じている $\mathcal{O}_L$-格子 $T \subset V$ や剰余表現 $\overline{T} = T/\pi_L T$ として現れるが, ここでより重要なのは, $\mathcal{O}_L$-係数の形式的冪級数環 $\mathcal{O}_L[[X_1, \cdots, X_d]]$ やその商などの L, $\mathcal{O}_L$ などと比べて大きな環である.

$G_{\mathbf{Q}_p}$ の斜交的 R-表現 T に対して $\overline{T} = T \otimes_R \mathbf{F}$ と表す. $\mathrm{H}^0(\mathbf{Q}_p, \overline{T}) = 0$ となるとき T は generic であると呼ぶ. このとき, (T の階数を $2d$ とすると)$\mathrm{H}^0(\mathbf{Q}_p, T) = \mathrm{H}^2(\mathbf{Q}_p, T) = 0$ となり, $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T)$ は階数 $2d$ の自由 R-加群となり, 任意の環準同型 $R \to R'$ に対して底変換の写像の同型

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \otimes_R R' \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T \otimes_R R')$$

が成り立つ (以下, この同型によって両者を同一視する). また, Tate ペアリングと斜交的ペアリングの同型 $T \xrightarrow{\sim} T^*(1)$ によって誘導される対称完全ペアリング

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \times \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \to R$$

がある.

3.1. 階数 2 の場合: $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T)$ の符号分解.

定理 3.1. ([BKNO][2]) *任意の R, および $G_{\mathbf{Q}_p}$ の階数 2 の generic な斜交的 R-表現 T に対して次を満たす分解が一意的に存在する：*

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) = \mathrm{H}^1_+(\mathbf{Q}_p, T) \oplus \mathrm{H}^1_-(\mathbf{Q}_p, T)$$

(1) $\mathrm{H}^1_\pm(\mathbf{Q}_p, T)$ *は Lagrangian, つまり,* $\mathrm{H}^1_\pm(\mathbf{Q}_p, T) = (\mathrm{H}^1_\pm(\mathbf{Q}_p, T))^\perp$.
(2) $\mathrm{H}^1_\pm(\mathbf{Q}_p, T)$ *は任意の底変換と可換, つまり, 任意の* $R \to R'$ *に対して*

$$\mathrm{H}^1_\pm(\mathbf{Q}_p, T) \otimes_R R' = \mathrm{H}^1_\pm(\mathbf{Q}_p, T \otimes_R R')$$

(3) $R = L$, $T = V$ *が de Rham であるとき,*

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, V) = \mathrm{H}^1_{-\widehat{\varepsilon}_p(V)}(\mathbf{Q}_p, V)$$

(*ここで,* $\mathrm{H}^1_{\pm 1}(\mathbf{Q}_p, V) := \mathrm{H}^1_\pm(\mathbf{Q}_p, V)$ *とおいた*)

系 3.2. *T_1, T_2 を法 p で合同な階数 2 の generic な斜交的 $\mathcal{O}_L$-表現とし, V_1, V_2 は de Rham と仮定する. このとき*

$$(-1)^{\delta_p(T_1, T_2)} = \frac{\widehat{\varepsilon}_p(V_1)}{\widehat{\varepsilon}_p(V_2)}$$

Proof. $\frac{\widehat{\varepsilon}_p(V_1)}{\widehat{\varepsilon}_p(V_2)} = 1$ の場合に系を証明する (他の場合も同様). そこで, $\varepsilon := \widehat{\varepsilon}_p(V_1) = \widehat{\varepsilon}_p(V_2)$ と仮定する. このとき, (3) を V_1, V_2 に対して考えることで

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, V_i) = \mathrm{H}^1_{-\varepsilon}(\mathbf{Q}_p, V_i) \quad (i = 1, 2)$$

が成り立つ．これと，$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_i)$ の定義，および (2) の $\mathcal{O}_L \hookrightarrow L$ の場合から

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_i) = \mathrm{H}^1_{-\varepsilon}(\mathbf{Q}_p, T_i)$$

も成り立つ．これと，$\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_i)}$ の定義，および (2) の $\mathcal{O}_L \to \mathbf{F}$ の場合から

$$\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_i)} = \mathrm{H}^1_{-\varepsilon}(\mathbf{Q}_p, \overline{T})$$

が成り立つ ($\overline{T} = \overline{T}_1 \xrightarrow{\sim} \overline{T}_2$)．よって，

$$\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_1)} = \overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_2)}$$

となるので

$$\delta_p(T_1, T_2) = 0$$

となり，等式

$$(-1)^{\delta_p(T_1,T_2)} = (-1)^0 = 1 = \frac{\widehat{\varepsilon}_p(V_1)}{\widehat{\varepsilon}_p(V_2)}$$

を得る．

□

3.2. 高次元の場合への拡張：pfaffian を用いた定式化． M を階数 $2d$ の自由 R-加群とし，対称完全 R-双線形ペアリング

$$\langle -, - \rangle : M \times M \to R$$

が与えられているとする．$N \subset M$ をこのペアリングによる Lagrangian，つまり，N および M/N は自由 R-加群で $N = N^{\perp}$ を満たすとする．このとき，同型 $(M/N) \xrightarrow{\sim} N^* : \bar{x} \to [y \mapsto \langle x, y \rangle]$ が誘導されるが，次の同型の合成

$$\det_R M \xrightarrow{\sim} \det_R N \otimes_R \det_R(M/N) \xrightarrow{\sim} \det_R N \otimes_R \det_R(N^*) \xrightarrow{\sim} \det_R N \otimes_R (\det_R N)^* \xrightarrow{\sim} R$$

を

$$\mathrm{Pf}_N : \det_R M \xrightarrow{\sim} R$$

と表し，これを N の Pfaffian と呼ぶことにする．

補題 3.3. 同型 $M \xrightarrow{\sim} M^* : x \mapsto [y \mapsto \langle x, y \rangle]$ によって誘導される同型

$$c : \det_R M \xrightarrow{\sim} \det_R(M^*) \xrightarrow{\sim} (\det_R M)^*$$

に対して次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} \det_R M \arrow[r, "\mathrm{Pf}_N"] \arrow[d, "c"'] & R \arrow[d, "\mathrm{id}_R"] \\ (\det_R M)^* & R \arrow[l, "(\mathrm{Pf}_N)^*"] \end{tikzcd}$$

定義 3.4. 可換図式

$$\begin{tikzcd} \det_R M \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "c"'] & R \arrow[d, "\mathrm{id}_R"] \\ (\det_R M)^* & R \arrow[l, "(\Psi)^*"] \end{tikzcd}$$

を満たす同型 $\Psi : \det_R M \xrightarrow{\sim} R$ を weak pfaffian と呼ぶことにする.

補題 3.5. $\Psi_1, \Psi_2 : \det_R M \xrightarrow{\sim} R$ を *weak pfaffian* とすると, $\Psi_1 \in \{\pm\Psi_2\}$ となる.

注意 3.6. 通常, pfaffian は歪対称ペアリングの Lagrangian に対して定義され, その場合は pfaffian は Lagrangian によらないペアリングの不変量となる. この定義を対称ペアリングに適用したものが我々の pfaffian であるが, この場合は Lagrangian の選び方のズレとして ± 1 が現れる.

補題 3.7. R を体とし, N_1, N_2 を M の *Lagrangian* とする. このとき

$$\delta(N_1, N_2) = \dim_R(N_1/N_1 \cap N_2)$$

とおくと

$$\mathrm{Pf}_{N_1} = (-1)^{\delta(N_1,N_2)}\mathrm{Pf}_{N_2}$$

が成り立つ.

この Pfaffian を我々の設定に適用したい. T を $G_{\mathbf{Q}_p}$ の斜交的 $\mathcal{O}_L$-表現とし, $V = T \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ は de Rham であると仮定する. このとき, $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, V)$ の Lagrangian $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, V)$ と $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, \overline{T})$ の Lagrangian $\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T)}$ から Pfaffian

$$\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,V)} : \det_L \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, V) \xrightarrow{\sim} L,$$

$$\mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,T)}} : \det_{\mathbf{F}} \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, \overline{T}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}$$

がそれぞれ定まる. また, さらに T が generic という仮定のもとでは, $\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T)$ は $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T)$ の Lagrangian であり

$$\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,T)} : \det_L \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_L$$

も定まる. そして, Pfaffian の底変換との両立性から, 底変換による同型

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \otimes_{\mathcal{O}_L} L \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, V)$$

と (generic のもとで成り立つ同型)

$$\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathbf{F} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T)}$$

による同一視のもとでそれぞれ

$$\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,T)} \otimes \mathrm{id}_L = \mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,V)}$$

および

$$\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,T)} \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{F}} = \mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,T)}}$$

が成り立つ.

T_1, T_2 を法 p で合同な $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ の斜交的 $\mathcal{O}_L$-表現, $\overline{T} = \overline{T}_1 \xrightarrow{\sim} \overline{T}_2$ をその剰余表現, V_1, V_2 は de Rham とする. $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, \overline{T})$ の Lagrangian $\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_1)}$, $\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_2)}$ に上の補題を適用することで次が得られる (Pfaffian による Mazur-Rubin 定数の解釈).

系 3.8.

$$\mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,T_1)}} = (-1)^{\delta_p(T_1,T_2)}\mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p,T_2)}}$$

我々は定理 3.1 の高次元版として次の予想を立てた.

予想 3.9. ([BKNO][3]) 任意の R, および $G_{\mathbf{Q}_p}$ の *generic* な斜交的 R-表現 T に対して次を満たす R-線形同型

$$\mathrm{Pf}(T) : \det_R \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \xrightarrow{\sim} R$$

が一意に存在する.

(1) $\mathrm{Pf}(T)$ は *weak pfaffian.*
(2) 任意の $R \to R'$ に対して, 底変換の同型 $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \otimes_R R' \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T \otimes_R R')$ による両者の同一視の元で

$$\mathrm{Pf}(T) \otimes \mathrm{id}_{R'} = \mathrm{Pf}(T \otimes_R R')$$

が成り立つ.
(3) $R = L$, $T = V$ が *de Rham* であるとき,

$$\mathrm{Pf}(V) = \varepsilon_p(V)\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, V)}$$

が成り立つ.

注意 3.10. 階数 2 の場合は, 予想 3.9 は定理 3.1 から直ちに従う. 実際, 階数 2 の任意の T に対して, $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T)$ の Lagrangian $\mathrm{H}^1_-(\mathbf{Q}_p, T)$ に対する Pfaffian

$$\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_-(\mathbf{Q}_p, T)} : \det_R \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \xrightarrow{\sim} R$$

が予想の $\mathrm{Pf}(T)$ の性質を満たす. 定理の性質 (1), (2), (3) がそれぞれ予想の性質 (1), (2), (3) を導く.

命題 3.11. 予想 3.9 を仮定すると, $\ell = p$ における *gereric* な表現に対して局所相対的 p-*parity* 予想は正しい. つまり, T_1, T_2 を法 p で合同な *generic* 斜交的 $\mathcal{O}_L$-表現とし, V_1, V_2 は *de Rham* と仮定する. このとき

$$(-1)^{\delta_p(T_1, T_2)} = \frac{\widehat{\varepsilon}_p(V_1)}{\widehat{\varepsilon}_p(V_2)}$$

Proof. まず, (3) を V_1, V_2 に対して考えることで

$$\mathrm{Pf}(V_i) = \widehat{\varepsilon}_p(V_i)\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, V_i)} \quad (i = 1, 2)$$

が成り立つ. これと予想 (2) の $\mathcal{O}_L \hookrightarrow L$ の場合から

$$\mathrm{Pf}(T_i) = \widehat{\varepsilon}_p(V_i)\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_i)} \quad (i = 1, 2)$$

が得られ, さらに予想 (2) の $\mathcal{O}_L \to \mathbf{F}$ の場合から

$$\mathrm{Pf}(\overline{T}) = \mathrm{Pf}(\overline{T}_i) = \widehat{\varepsilon}_p(V_i)\mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_i)}} \quad (i = 1, 2)$$

が得られる. よって

$$\widehat{\varepsilon}_p(V_1)\mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_1)}} = \widehat{\varepsilon}_p(V_2)\mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_2)}}$$

が得られ, これと等式

$$\mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_1)}} = (-1)^{\delta_p(T_1, T_2)}\mathrm{Pf}_{\overline{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, T_2)}}$$

から

$$(-1)^{\delta_p(T_1, T_2)} = \frac{\widehat{\varepsilon}_p(V_1)}{\widehat{\varepsilon}_p(V_2)}$$

が得られる.

□

予想 3.9 に関しては現在次の定理の証明に取り組んでいる.

定理 3.12. ([BKNO][3] *in progress*) 任意の R, および $G_{\mathbf{Q}_p}$ の *generic* な斜交的 R-表現 T に対して次を満たす R-線形同型

$$\mathrm{Pf}(T) : \det_R \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \xrightarrow{\sim} R$$

が一意に存在する.

(1) $\mathrm{Pf}(T)$ は *weak pfaffian.*

(2) 任意の $R \to R'$ に対して, 底変換の同型 $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T) \otimes_R R' \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T \otimes_R R')$ による両者の同一視の元で

$$\mathrm{Pf}(T) \otimes \mathrm{id}_{R'} = \mathrm{Pf}(T \otimes_R R')$$

が成り立つ.

(3) $R = L$, $T = V$ が *de Rham* かつ *trianguline,* つまり, $\mathbf{Q}_p$ のある有限次元アーベル拡大 K があり $V|_{G_K}$ が *semi-stable* となるとき,

$$\mathrm{Pf}(V) = \varepsilon_p(V)\mathrm{Pf}_{\mathrm{H}^1_f(\mathbf{Q}_p, V)}$$

が成り立つ.

注意 3.13. 本稿では簡単のため T が generic であると仮定した. $\mathrm{H}^1(\mathbf{Q}_p, T)$ の代わりに Galois コホモロジー複体 $C^\bullet(G_{\mathbf{Q}_p}, T)$ を考え, 導来圏レベルで pfaffian を定義することで generic でない一般の $G_{\mathbf{Q}_p}$ の斜交的 R-表現に対して予想 3.9 および定理 3.12 が得られる. また, 今回は (generic を仮定したので)$\ell = p$ の場合のみの予想 3.9 を解説したが, $\ell \neq p$ の場合も同様の予想が定式化および証明ができ, Nekovar の定理 2.8 の別証明および一般化が得られる. さらに, 大域 Galois コホモロジー複体に対して (Poitou-Tate 完全列による)pfaffian を考えると Mazur-Rubin の定理 2.4 の別証明および一般化が得られ, 相対的 p-parity 予想のみでなく, p-parity 予想自体も pfaffian を用いて定式化できるようになる. さらに, 注意 2.2 のほぼ全ての結果も pfaffian による定式化によって統一的に扱うことができ, 既存の理論の簡易化, 一般化などができるようになる. 以上については全て [3] にまとめる予定である.

References

[1] A. Burungale, S. Kobayashi, K. Ota, Rubin's conjecture on local units in the anticyclotomic tower at inert primes, Ann. of Math.(2) 194 (2021), no. 3, 943-966.

[2] A. Burungale, S. Kobayashi, K. Nakamua and K. Ota, A local sign decomposition for symplectic self-dual Galois representations of rank two, arXiv:2508.17776.

[3] A. Burungale, S. Kobayashi, K. Nakamua and K. Ota, A local sign decomposition for symplectic self-dual Galois representations II, in preparation.

[4] K. Česnavičius, The p-parity conjecture for elliptic curves with a p-isogeny, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 719 (2016), 45-73,

[5] J. Coates, T. Fukaya, K. Kato and R. Sujatha, Root numbers, Selmer groups, and non-commutative Iwasawa theory, J. Algebraic Geom. 19 (2010), 19-97.

[6] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), Lecture Notes in Math., Vol. 349, 501–597, Springer, Berlin-New York(1973).

[7] T. Dockchitser, V. Dockchitser, On the Birch-Swinnerton-Dyer quotients modulo squares, Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 1, 567–596.
[8] T. Fukaya, K. Kato, A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 219 American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, 1–85.
[9] C. Johansson, J. Newton, Parallel weight 2 points on Hilbert modular eigenvarieties and the parity conjecture, Forum Math. Sigma, 7, Paper No. e27, 36 (2019).,
[10] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse–Weil L-functions via B_{dR}. II, preprint.
[11] S. Kobayashi, The local root number of elliptic curves with wild ramification, Math. Ann. 323 (2002), 609-623.
[12] B. Mazur, K. Rubin, Finding large Selmer rank via an arithmetic theory of local constants, Ann. of Math. (2), 166 (2007), no. 2, 579-612.
[13] K. Nakamura, Local ε-isomorphisms for rank two p-adic representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ and a functional equation of Kato's Euler system, Camb. J. Math. 5 (2017), no. 3, 281-368.
[14] J. Nekovář, Selmer complexes, Astérisque, 310, viii+559 (2006),
[15] J. Nekoář, On the parity of ranks of Selmer groups. III, Doc. Math. 12 (2007), 243-274.
[16] J. Nekovář, Some consequences of a formula of Mazur and Rubin for arithmetic local constants, Algebra Number Theory, 7 (2013), no. 5, 1101-1120.
[17] J. Nekovář, Compatibility of arithmetic and algebraic local constants (the case $\ell \neq p$), Compos. Math., 151 (2015), no. 9, 1626-1646.
[18] J. Nekovář, Compatibility of arithmetic and algebraic local constants, II: the tame abelian potentially Barsotti-Tate case, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 116 (2018), no. 2, 378-427.
[19] D. E. Rohrlich, Variation of root number in families of elliptic curves, Compos. Math., 87(1993) 119-151.
[20] J. Pottharst, L. Xiao, On the parity conjecture in finite-slope families, arXiv:1410.5050.

Email address: `nakamura@math.kyushu-u.ac.jp`

有限群の表現論におけるブロックの森田同値および導来同値について

切刀 直子 (東京理科大学)

1 はじめに

有限群の表現論は，標数が 0 または G の位数を割らない体上の表現である通常表現と，標数が G の位数を割る体上の表現であるモジュラー表現に分けられる。通常表現では，Maschke の定理により群環 kG は半単純であり，さらに単純加群の同型類の個数は G の共役類の個数と一致することが知られる。したがって，有限個である単純加群の同型類を記述することで，全体が把握できる。一方，モジュラー表現では，kG は半単純にならず，単純加群だけでなく，より複雑な構造をもつ直既約加群を調べる必要がある。群環 kG の表現型は，多くの場合「wild 表現型」となることが知られ，すべての直既約加群を調べることは困難であるため，加群圏やその導来圏の分類が重要な課題となる。Brauer による「与えられた群 G の素数 p に関する表現の情報は，その p-局所部分群の表現の情報から得られるのではないか」という考えに基づき，モジュラー表現論では McKay 予想，Alperin 予想，Dade 予想，Broué 予想，Donovan 予想など多くの予想が提唱され，それらを中心に研究が発展してきた。

本稿では，加群の圏やその導来圏の分類に関する予想である，Broué 予想，Donovan 予想 (Puig 予想) に関する研究について述べる。

2 記号と基本用語

p を素数とし，G を有限群とする。また，k を標数 p をもつ代数的閉体とする。kG を

$$kG := \left\{ \sum_{g\in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in k \right\}$$

で定まる G の群環とする。kG-加群は k 上有限次元であるとし，特に断らない限り右加群とする。k_G で自明な kG-加群を表す。これは

$$k_G \cong k \sum_{g\in G} g \subset kG$$

と同一視できる。

kG-加群 U が Q**-射影的**であるとは，次の kG-準同型

$$\varphi : U \otimes_{kQ} kG \longrightarrow U, \quad u \otimes a \mapsto ua$$

が**分裂する**ときである ($U \mid U \otimes_{kQ} kG = U \downarrow_Q \uparrow^G$)。$kG$-準同型 $f : U \to V$ が Q**-射影的**であるとは，Q-射影的 kG-加群 W，および kG-準同型 $g : U \to W, h : W \to V$ が存在して，$f = h \circ g$ となることである。$Q = 1$ のときは，普通の射影加群のことである。

kG-加群 U が p-**置換加群**であるとは，U を G の任意の p-部分群へ制限したとき，置換加群となることである。p-部分群 Q に対し，誘導加群 $k_Q \uparrow^G$ は自明な kG-加群 k_G を部分加群にもつ直既約因子をただ 1 つもつ。この直既約因子を Q に関する **Scott 加群**とよび，$S(G, Q)$ で表す。定義より，Scott 加群は p-置換加群である。

kG-加群 U，G の p-部分群 Q に対し，$U(Q) = U^Q / \sum_{R \lneq Q} \mathrm{Tr}_R^Q(U^R)$ を U の Q に関する **Brauer construction** とよぶ。ここで，$U^R = \{u \in U | ux = u (\forall x \in R)\}$, $\mathrm{Tr} : U^R \to U^Q, u \mapsto \sum_{t \in [R \backslash Q]} ut$ である。

群環 kG の両側イデアルとしての直既約分解

$$kG = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_\ell$$

において，各成分 A_i を kG の**ブロック**と呼ぶ。任意の直既約 kG-加群はちょうど 1 つのブロックに属する。自明な kG-加群を含むただ 1 つのブロックを**主ブロック**とよび，$B_0(G)$ で表す。G のブロック A と G の p-部分群 D に対し，両側 (A, A)-加群の準同型写像

$$\varphi_D : A \otimes_{kD} A \longrightarrow A, \qquad x \otimes y \mapsto xy$$

を考える。φ_D が分裂する最小の p-部分群 D を A の**不足群**とよぶ。不足群は G-共役をのぞき一意に定まり，ブロックの表現型に深く関係する。例えば不足群が自明であればブロックは半単純となり，不足群が巡回群であればブロックは有限表現型である。G の主ブロックの不足群は G の Sylow p-部分群である。

Brauer は第 1 主定理において，以下のような対応を与えている。

定理 1 (Brauer の第 1 主定理)**.** 有限群 G の p-部分群 D に対し，G の不足群 D をもつブロックと $N_G(D)$ の不足群 D をもつブロックの間に 1 対 1 対応が存在する。

とくに D が G の Sylow p 部分群であるとき，G の主ブロックはこの対応により $N_G(D)$ の主ブロックへ対応する (Brauer の第 3 主定理)。

3 Broué 予想および関連する予想

有限群のモジュラー表現論では,

$$\{G \text{ の表現の情報 }\} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \{G \text{ の } p\text{-局所部分群たちの表現の情報 }\}$$

を考えることが重要である。とくに，p-局所構造を共通にもつ有限群のブロックについて，加群の圏やその導来圏の関係を調べることは重要である。この節では，この観点での予想および関連する予想について述べる。

P を G の p-部分群とする。G における P 上の **fusion system** $\mathcal{F}_P(G)$ とは，次のように定義される圏である。$\mathcal{F}_P(G)$ の対象は P の部分群全体であり，任意の部分群 $Q, R \leq P$ に対して，射の集合は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_P(G)}(Q,R) = \{\, f\colon Q \to R : \text{群準同型} \ \mid \ \text{ある } g \in G \text{ に対して } f = c_g \,\}$$

で与えられる。ここで c_g は g による共役写像を表す。

本稿では，基本的に以下の設定を考える。

設定 1. 有限群 G と H は共通の Sylow p 部分群 $P(\neq 1)$ を持つとし，同じ p-局所構造をもつこと，すなわち，$\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(H)$ であることとする。また，$A = B_0(G)$，$B = B_0(H)$ とおく。

予想 1 (Broué [1, 2])**.** 設定 1 のもとで，さらに，P は可換群とする。このとき，$D^b(\mathrm{mod}A) \sim D^b(\mathrm{mod}B)$ すなわち，A と B に対する導来圏は，三角圏として同値（導来同値）である。

P が非可換群である場合には，反例が存在することが知られている。Rouquier [18] により，P が非可換である場合に関する予想も提唱されている。

Broué 予想が解決されている場合としては，P が巡回群 ([15, 17])，$P \cong C_2 \times C_2$([16])，$P \cong C_3 \times C_3$([6], また例 1，例 2 も参照) などの場合が挙げられる。また，対称群や一般線型群に関しても解決が得られている ([3])。

例 1 ([13],[9])**.** $p = 3$ とし，$\mathcal{F}_3 := \{q : \text{素数のべき} \mid (q-1)_3 = 3\}$ とおく。$G = \mathrm{PSL}(3,q)$ とし，$q \in \mathcal{F}_3$ であるとすると，$C_3 \times C_3 \cong P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ である。$H = N_G(P)$ とする。このとき，$\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(H)$ が成り立つ。この設定のもと，以下が成立する。

(1) $D^b(\mathrm{mod}B_0(G)) \sim D^b(\mathrm{mod}B_0(H))$ すなわち，$B_0(G)$ と $B_0(H)$ に対する導来同値である。つまり，*Broué* の予想が成立する。
(2) G と H の主ブロックの間だけでなく，P の各部分群 Q の中心化群 $C_G(Q), C_H(Q))$ の主ブロック間にも導来同値（この場合は実際は，森田同値）が得られる。

例 1(2) のように，splendid 同値とよばれる，中心化群のブロック間にも導来同値を引き起こす状況がよいものがある。この例での導来同値は，splendid 同値と呼ばれているものであり，実際 Broué 予想の状況では，splendid 同値まで予想されている ([16])。

例 2 ([9])**.** $p = 3$ とし，$\mathcal{F}_3 := \{q : \text{素数のべき} \mid (q-1)_3 = 3\}$ とおく。q_1，$q_2 \in \mathcal{F}_3$ に対し，$G_1 = \mathrm{PSL}(3,q_1)$, $G_2 = \mathrm{PSL}(3,q_2)$ *)* とする。このとき，$\mathcal{F}_P(G_1) = \mathcal{F}_P(G_2)$ であり（例 1 参照）$B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ は森田同値である。

例 2 のように Lie 型の群の無限系列で p 局所構造を一致させると，森田同値が期待される。以

下の予想とも関連し重要である。

予想 2 (Donovan)**.** P を有限 p 群とする。P を不足群にもつ有限群のブロックの森田同値類は有限個である。

4　森田型安定同値の森田同値への持ち上げ

森田同値や導来同値を構成する手法として，まず森田型安定同値を構成し，それを森田同値，導来同値へ持ち上げる手法がある。この節では，森田型安定同値を森田同値へ持ち上げる手法を述べる。

設定 2. M は (A,B)-両側加群とし，以下を仮定する：

(I) M は左 A-加群かつ右 B-加群として射影的

(II) k-双対加群 $M^* := \mathrm{Hom}_k(M,k)$ を用いて，次の両側加群同型が存在する：

$$M \otimes_B M^* \cong A \oplus X, \qquad M^* \otimes_A M \cong B \oplus Y \tag{$\star$}$$

定義 1. (1) 設定 2($\star$) において，$X=0$ かつ $Y=0$ となるとき，M は A と B の間の森田同値を誘導するという。

(2) 設定 2($\star$) において， X と Y が射影的となるとき，M は A と B の間の森田型安定同値を誘導するという。

森田同値は導来同値を誘導し，導来同値は森田型安定同値を誘導する。$G \geq H$ のとき，$B_0(G)$ と $B_0(H)$ の間での誘導と制限が森田型安定同値を与えることがある。例えば，G が TI-set となる Sylow p-部分群 P をもつとき，$B_0(G)$ と $B_0(N_G(P))$ は誘導と制限により森田型安定同値となる。

森田型安定同値と森田同値に関して，次の定理はとても重要である (導来同値への持ち上げにも使える)。

定理 2 (Linckelmann [12])**.** M を直既約 (A,B) 両側加群で A と B の森田型安定同値を誘導するとする。このとき，次が成立する。

(1) 任意の単純 A-加群に対し，$S \otimes_A M$ は直既約 B-加群である。

(2) 任意の単純 A-加群に対し，$S \otimes_A M$ が単純 B-加群となるならば，M は A と B の間の森田同値を誘導する。

以下, 引き続き設定 1 を仮定する。$\Delta(P)=\{(x,x)|x \in P\} \leq G\times H$ とする。$\Delta(P)$-射影的な p-置換 $k[G\times H]$ 加群で誘導される森田同値は splendid 森田同値とよばれる。$M=S(G\times H,\Delta(P))$ を $\Delta(P)$ に関する Scott 加群とする。このとき，M は，設定 2 を満たしている。

定理 3 (Broué [2])**.** 設定 1 を仮定する。$M=S(G\times H,\Delta(P))$ に対し，次は同値である。

(1) M は A と B の間の森田型安定同値を誘導する。

(2) $1 \lneq \forall Q \leq P$ に対し, M の Brauer construction $M(\Delta(Q)) = M^{\Delta(Q)}/\sum_{R \lneq Q} \mathrm{Tr}_R^Q(M^{\Delta(R)})$ は $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_H(Q))$ の森田同値を誘導する。

注 1. M のかわりに 各項が $\Delta(P)$-射影的な p-置換加群からなる有界複体 $M^\bullet$ にかえ, 森田同値を導来同値とした，複体版（Rouquier の定理 [18]）が得られるている。

Broué の定理（Rouquier の定理）と Linckelmann の定理を組合せ，以下のような森田同値の構成法が考えられている。

(i) 任意の p 部分群 $Q(\neq 1)$ に対し，中心化群の主ブロック $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_H(Q))$ の間に森田同値を構成する

(ii) (i) で得られた各森田同値をはり合わせることにより，$B_0(G)$ と $B_0(H)$ の間の森田型安定同値を構成する

(iii) (ii) で構成した森田型安定同値のもとで，単純 $B_0(G)$ 加群の像がまた単純 $B_0(H)$ 加群になることを示す

実際，例 2 や他の多くの例で，この方法で森田同値が示されている。

5 Brauer 直既約性

前節で説明した森田型安定同値を森田同値に持ち上げる手法の適用の際，いくつかの課題がある。課題の 1 つは，p 局所部分群の森田同値をうまくはりあわせることができるかという点である。うまくはりあわせるために，Scott 加群 $S(G \times H, \Delta(P))$ について，Brauer 直既約性という性質をもつことが要求される。kG-加群 U が **Brauer 直既約**であるとは，G の任意の p-部分群 Q に対し，Brauer construction $U(Q)$ が $kQC_G(Q)$-加群として直既約または 0 となるときにいう。

設定 1 のもと，さらに P が可換である場合に，以下が示されている。

定理 4 (Kessar-K-Mitsuhashi [5])**.** 設定 1 のもと，$M = S(G \times H, \Delta(P))$ とおく。P は可換群であると仮定すると，M は Brauer 直既約である。

P が非可換のときは，状況は複雑である。以下が示されている。

定理 5 (Ishioka-K [4])**.** G を有限群, P を G の p-部分群，$\mathcal{F}_P(G)$ saturated であるとする。$M = S(G, P)$ とおく。次は同値

(1) M は Brauer 直既約

(2) 任意の fully nodrmalized な P の部分群 Q に対し，$S(N_G(Q), N_P(Q))$ は $QC_G(Q)$ 加群として直既約

定理 5 を用いることなどにより，Koshitani,Tuvay などが，Brauer 直既約性の研究を発展させ

ている。たとえば，設定 1 において $p=2$, P を準 2 面体群 [7]，あるいはリース 2 群 [8]，に対し，$M=S(G\times H,\Delta(P))$ の Brauer 直既約性が示されている。

次節で述べる相対安定同値の構成のために，[10] において，相対 Brauer 直既約性も定義されている。

6 中心的 p-部分群を含む場合の新しい手法

はりあわせのもう一つの大きな問題として， G, H が非自明な中心的 p 部分群 Z をもつときには，$C_G(Z)=G$, $C_H(Z)=H$ となってしまうため, Broué の定理 (3) をうまく使えない，ということがあげられる。これを克服するために，森田型相対安定同値の理論を発展させた。以下は，鈴木香一氏との共同研究に基づく内容である。

A を群 G のブロック，Q を G の p 部分群とする。A の**相対** Q **安定圏** $\underline{\mathrm{mod}}^Q A$ とは，A-加群を対象とし，$\underline{\mathrm{Hom}}_A^Q(U,V)=\mathrm{Hom}_A(U,V)/\{f\in\mathrm{Hom}_A(U,V)\mid f:Q\text{-射影的}\}$ を射の集合とする圏である。これは，三角圏の構造をもつ。

定義 2 (Wang-Zhang [19])**.** G と H は Q を共通の p 部分群としてもつ有限群とし，A, B をそれぞれ G, H のブロックとする。設定 2($\star$) において X と Y が $(Q\times Q)$ 射影的となるとき，M は A と B の間の森田型相対 Q 安定同値を誘導するという。

この定義において，G と H は設定 1 をみたすことは要求されていないが，その場合，一般に M は相対安定圏の同値を引き起こすとは限らない。

以下, G と H は設定 1 をみたす, すなわち, 共通の Sylow p 部分群 P をもち, $\mathcal{F}_P(G)=\mathcal{F}_P(H)$ が成立しているとする。G と H は中心に p 部分群 $Z\neq P$ をもつ場合を考える。

Broué の定理 (定理 3) に対応するものとして，以下の定理を得た。

定理 6 (K-Suzuki [10])**.** 設定 1 のもと，さらに G, H は中心に p 部分群 $Z\lneq P$ をもつとする。$M=S(G\times H,\Delta(P))$ に対し，次は同値である。

(1) M は $B_0(G)$ と $B_0(H)$ の間の森田型相対 Z 安定同値を誘導する。
(2) Z を真に含む P の任意の部分群 Q に対し，Brauer construction $M(\Delta(Q))$ は $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_H(Q))$ の森田同値を誘導する。

Linckelmann の定理 (定理 2) に対応するものとして，以下の定理を得た。

定理 7 (K-Suzuki [10])**.** 設定 1 のもと，さらに G, H は中心に p 部分群 $Z\lneq P$ をもつとする。$M=S(G\times H,\Delta(P))$ が $A=B_0(G)$ と $B=B_0(H)$ の間の森田型相対 Z 安定同値を導くと仮定する。このとき，次が成立する。

(1) M は $\underline{\mathrm{mod}}^Z A$ と $\underline{\mathrm{mod}}^Z B$ の間の三角圏としての同値を導く。
(2) 任意の単純 $B_0(G)$ 加群 S に対し，$S\otimes_{B_0(G)} M$ は直既約 $B_0(H)$ 加群である。

(3) 任意の単純 $B_0(G)$ 加群 S に対し，$S \otimes_{B_0(G)} M$ が単純 $B_0(H)$ 加群であれば，M は森田同値を誘導する。

定理 6, 7 を組み合わせることで，非自明な中心的 p 部分群 Z を持つ場合に，森田型相対 Z 安定同値を構成し，それを森田同値へ持ち上げるという新しい手法が得られたことになる。

(i) 任意の p 部分群 $Z \lneq Q$ に対して，中心化群 $C_G(Q)$，$C_H(Q)$ の主ブロック $B_0(C_G(Q))$，$B_0(C_H(Q))$ の間に森田同値を構成する。

(ii) (i) で得られた各森田同値をはり合わせることにより，$B_0(G)$ と $B_0(H)$ の間の森田型相対 Z 安定同値を構成する。

(iii) (ii) で構成した森田型相対 Z 安定同値において，単純 $B_0(G)$-加群の像が再び単純 $B_0(H)$-加群になることを示す。

新しい手法を適用することで，以下を得た。

定理 8 (K-Suzuki [11]). $p = 2$, q_1, q_2: 奇素数べきとし，$(q_1-1)_2 = (q_2-1)_2 = 2^m$ $(m \geq 2)$ とする。$G_1 = \mathrm{GL}(2, q_1)$, $G_2 = \mathrm{GL}(2, q_2)$ とすると，G_1 と G_2 は共通の Sylow 2-部分群 $P \cong (C_{2^m} \times C_{2^m}) \rtimes C_2$ をもち，$\mathcal{F}_P(G_1) = \mathcal{F}_P(G_2)$ となる。このとき，$M = S(G_1 \times G_2, \Delta(P))$ は森田同値 $\mathrm{mod}B_0(G_1) \sim \mathrm{mod}B_0(G_2)$ を誘導する。

この定理により，$\mathrm{GL}(2, q)$ に対する森田同値分類は完成したことになる。

7 おわりに

モジュラー表現論における主ブロックの森田同値について，はりあわせを用いて森田型安定同値を構成し，森田同値を得る手法について整理し，非自明な中心的 p-部分群をもつ場合にも適用できる新しい手法を紹介した。

導来同値の構成については，多くの課題がある。中心に非自明な p-部分群を含む場合の導来同値の構成法を与えることも課題の 1 つである。また，巡回不足群をもつブロックに対する Broué 予想の解決を利用し，p-ランクが 2 の可換不足群をもつ場合やメタ巡回不足群をもつ場合について，主ブロック間の森田型安定同値がそれぞれ [18][13] において得られている。導来同値の構成にこれらを有効に使った研究を進展させることも今後の課題である。

参考文献

[1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque* **181-182** (1990), 61–92.

[2] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras, in Finite Dimensional Algebras and Related Topics, (edited by V. Dlab and L.L. Scott) Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994,

pp.1–26.

[3] J. Chuang and R. Rouquier, Derived equivalences for symmetric groups and sl_2categorification. Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 1, 245–298

[4] H. Ishioka and N. Kunugi, Brauer indecomposability of Scott modules, J. Algebra **470** (2017), 441–449

[5] R. Kessar, N. Kunugi and N. Mitsuhashi, On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules, J. Algebra **340** (2011), 90–103

[6] S. Koshitani and N. Kunugi, Broué's conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect group of order 9, J. Algebra **248** (2002), no. 2, 575–604

[7] S. Koshitani and İ. Tuvay, Brauer indecomposability of Scott modules with semidihedral vertex, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **64** (2021), no. 2, 174–182;

[8] S. Koshitani and İ. Tuvay, The Brauer indecomposability of Scott modules with wreathed 2-group vertices, Rocky Mountain J. Math. **51** (2021), no. 4, 1259–1280;

[9] N. Kunugi, Morita equivalent 3-blocks of the 3-dimensional projective special linear groups, Proc. London Math. Soc. (3) **80** (2000), no. 3, 575–589.

[10] N. Kunugi and K. Suzuki, Relative stable equivalences of Morita type for the principal blocks of finite groups and relative Brauer indecomposability, J. Group Theory **26** (2023), no. 6, 1157–1184;

[11] N. Kunugi and K. Suzuki, Splendid Morita equivalences for the principal 2-blocks of 2-dimensional general linear groups in non-defining characteristic, SUT J. Math. **59** (2023), no. 2, 117–135;

[12] M. Linckelmann, Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and $p$groups, Math. Z. **223** (1996), 87-100.

[13] T. Okuyama, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, preprint (1998)

[14] T. Okuyama, Relative projective covers and the Brauer construction over finite group algebras, in H. Sasaki ed. *Cohomology Theory of Finite Groups and Related Topics*, Kyoto, RIMS 1784, pp.77-95 (2012)

[15] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), 303–317.

[16] J. Rickard, Splendid equivalences : Derived categories and permutation modules, Proc. London Math. Soc. (3) **72** (1996), 331-358.

[17] R. Rouquier, The derived category of blocks with cyclic defect groups, in "Derived equivalences for group rings" Springer Lecture Notes in Math. **1685**, (1998), 199–220.

[18] R. Rouquier, Block theory via stable and Rickard equivalences, Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998), 101–146, de Gruyter, Berlin, 2001

[19] L. Wang and J. Zhang, Relatively stable equivalences of Morita type for blocks, J. Pure Appl. Algebra 222 (2018), no. 9, 2703–2717.

ON $\mathfrak{sl}_2$-ALGEBRAS AND MULTIPLE EISENSTEIN SERIES

HENRIK BACHMANN
(*Based on a joint work with* JAN-WILLEM VAN ITTERSUM and NILS MATTHES [BIM],
and work in progress with JAN-WILLEM VAN ITTERSUM and ANNIKA BURMESTER [BBI])

Abstract. In this survey article we summarize the results of [BIM] in which the authors introduced the algebra of formal multiple Eisenstein. This algebra is motivated by the classical multiple Eisenstein series, introduced by Gangl–Kaneko–Zagier as a hybrid of classical Eisenstein series and multiple zeta values. This algebra is an $\mathfrak{sl}_2$-algebra by formalizing the usual derivations for quasimodular forms and extending them naturally to the whole algebra. A quotient of this algebra is isomorphic to the algebra of formal multiple zeta values. This gives a novel and purely formal approach to classical (quasi)modular forms and builds a new link between (formal) multiple zeta values and modular forms. In this note, we use a new algebraic setup, used in [BBI], to define these objects and present dimension and structural conjectures related to Lie algebras of derivations.

1. Introduction

The purpose of this note is to provide a summary of the work [BIM], where the authors introduced formal multiple Eisenstein and studied their derivations, and to give an overview of a work in progress [BBI] on certain conjectures which arose from [BIM]. Formal multiple Eisenstein series are a formalization of multiple Eisenstein series, which are a hybrid of classical Eisenstein series and multiple zeta values. Multiple zeta values, which are defined for integers $r \geq 1$ and $k_1 \geq 2, k_2, \dots, k_r \geq 1$ by

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \tag{1.1}$$

are subject to many relations. Denote the $\mathbb{Q}$-algebra of all multiple zeta values by $\mathcal{Z}$. Conjecturally, the *extended double shuffle relations* of multiple zeta values provide all algebraic relations among multiple zeta values [IKZ]. These relations are obtained (after possible regularization) from the two ways of expressing the product of multiple zeta values—the 'usual' (stuffle) product of real numbers, and a (shuffle) product from the iterated integral representation of multiple zeta values—which both can be interpreted as quasi-shuffle products [H].

Multiple zeta values and (quasi)modular forms are connected in various ways. For example, in the case $r = 1$, they appear as the constant term of the Eisenstein series. The Eisenstein series of weight $k \geq 2$ is given for $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ by

$$\mathbb{G}_k(\tau) := \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m,n \geq 1} n^{k-1} q^{mn} \qquad (q = e^{2\pi i \tau}).$$

For even $k \geq 2$ these series are (quasi)modular forms for the full modular group. In [GKZ] the authors defined double Eisenstein series, which have double zeta values ((1.1) in the case $r = 2$)

Date: December 14, 2025.

as their constant terms, and which can be seen as a natural depth two version of Eisenstein series. This construction was generalized by the first author in [Ba1].

The main goal of [BIM] was to define a formal algebraic structure that captures the properties of these series. In this note, we will first review the classical theory of Multiple Zeta Values and the motivation coming from analytic Multiple Eisenstein series (and their relation to MacMahon's sums). We will then introduce the *algebra of formal multiple Eisenstein series* $\mathcal{G}^f$. While [BIM] used a "bi-bracket" notation, we will present here a new "balanced" setup developed in [Bu1] and used in [BBI], which simplifies the algebraic description. Finally, we will discuss the $\mathfrak{sl}_2$-structure on this algebra and relate it to conjectures about Lie algebras of derivations.

Acknowledgements. The author thanks the organizers of the conference "70th Algebra Symposium 2025" for giving him the opportunity to present the results of [BIM] and [BBI]. This project was partially supported by JSPS KAKENHI Grant 23K03030.

2. Multiple Zeta Values and Lie Algebras

We begin by establishing the algebraic framework for multiple zeta values, which serves as the foundation for the more general theory of multiple Eisenstein series.

2.1. Algebraic setup.

Let $X = \{x_0, x_1\}$ and $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$. We have an embedding

$$\begin{aligned}\iota : \mathbb{Q}\langle Y\rangle &\hookrightarrow \mathbb{Q}\langle X\rangle \\ y_{k_1}\cdots y_{k_r} &\mapsto x_0^{k_1-1}x_1\cdots x_0^{k_r-1}x_1,\end{aligned}$$

and a canonical projection $\Pi_Y : \mathbb{Q}\langle X\rangle \to \mathbb{Q}\langle Y\rangle$ which maps any word ending in x_0 to 0. This setup reflects the two representations of MZVs: the harmonic sum representation (alphabet Y) and the iterated integral representation (alphabet X).

We define two coproducts corresponding to the two multiplication laws of MZVs. On $\mathbb{Q}\langle X\rangle$, let $\Delta_{ш}$ be the shuffle coproduct defined on generators by $\Delta_{ш}(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$. On $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$, let Δ_* be the harmonic coproduct defined by $\Delta_*(y_i) = y_i \otimes 1 + 1 \otimes y_i + \sum_{k+l=i} y_k \otimes y_l$.

2.2. The Lie algebra $\mathfrak{dm}_0$.

The structure of multiple zeta values is conjecturally governed by a specific Lie algebra. For $f \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$ and a word $w \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$, we denote by $(f \mid w)$ the coefficient of w in f.

Definition 2.1 ([Rac]). Let $\mathfrak{dm}_0$ be the set of all $\psi \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$, such that

(i) $(\psi \mid x_0) = (\psi \mid x_1) = (\psi \mid x_0x_1) = 0$,
(ii) $\Delta_{ш}\psi = \psi \otimes 1 + 1 \otimes \psi$,
(iii) $\Delta_*\psi_* = \psi_* \otimes 1 + 1 \otimes \psi_*$,

where $\psi_* = \Pi_Y(\psi) +$ correction terms.

Racinet showed that $(\mathfrak{dm}_0, \{-,-\})$ is a Lie algebra under the Ihara bracket. The connection to formal MZVs is given by the following isomorphism:

Theorem 2.2 ([Rac]). *We have an isomorphism* $\mathcal{Z}^{\mathrm{f}} \cong \mathbb{Q}[\zeta^{\mathrm{f}}(2)] \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{dm}_0)^\vee$.

One of the major open problems in the field is to determine the structure of this Lie algebra.

Conjecture 2.3. *We have* $\mathfrak{dm}_0 \cong \mathrm{Lie}(\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \ldots)$*, a free Lie algebra with one generator in each odd weight* $k \geq 3$.

This conjecture implies the famous Zagier dimension conjecture for MZVs:

$$\sum_{k\geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k^f \, X^k = \frac{1}{1-X^2-X^3}.$$

The motivation of [BBI] is to describe an analogue of Theorem 2.2 for multiple Eisenstein series.

3. Multiple Eisenstein Series

Before defining multiple Eisenstein series, we recall some basic facts on (quasi)modular forms and related objects.

3.1. $\mathfrak{sl}_2$-algebras and Classical Quasimodular Forms.

The structure we aim to capture is that of an $\mathfrak{sl}_2$-algebra.

Definition 3.1. An $\mathfrak{sl}_2$-*algebra* is an algebra A together with a Lie algebra homomorphism $\mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{Der}(A)$. Equivalently, an $\mathfrak{sl}_2$-algebra is an algebra A together with three derivations $D, W, \delta \in \mathrm{Der}(A)$ satisfying the commutator relations

$$[W, D] = 2D, \quad [W, \delta] = -2\delta, \quad [\delta, D] = W.$$

In this case, (D, W, δ) is called an $\mathfrak{sl}_2$-*triple*.

The prototypical example arises from the theory of modular forms. For $\tau \in \mathbb{H}$, let $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathbb{Q}[\mathbb{G}_2, \mathbb{G}_4, \mathbb{G}_6]$ be the algebra of quasimodular forms with rational coefficients. It is well known that $\widetilde{\mathcal{M}}$ is an $\mathfrak{sl}_2$-algebra. The derivations $D, W, \delta \in \mathrm{Der}(\widetilde{\mathcal{M}})$ are defined on generators by:

$$D(\mathbb{G}_k) = (2\pi i)\frac{d}{d\tau}\mathbb{G}_k, \qquad W(\mathbb{G}_k) = k\mathbb{G}_k, \qquad \delta(\mathbb{G}_k) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & k = 2, \\ 0, & k \geq 4. \end{cases}$$

3.2. MacMahon's sums and q-analogues.

A historical motivation for multiple Eisenstein series comes from the work of MacMahon, who introduced the q-series

$$A_r(q) = \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{q^{m_1+\cdots+m_r}}{(1-q^{m_1})^2 \cdots (1-q^{m_r})^2}. \tag{3.1}$$

Andrews and Rose ([AR]) proved that for any $r \geq 1$, the $A_r(q)$ are quasimodular forms of *mixed* weight. For example, $A_1(q) = \mathbb{G}_2(q) + \frac{1}{24}$ and $A_2(q) = -\frac{1}{2}\mathbb{G}_4(q) + \frac{1}{2}\mathbb{G}_2(q)^2 + \frac{1}{8}\mathbb{G}_2(q) + \frac{3}{640}$.

The $A_r(q)$ can be seen as special cases of the q-series

$$g(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{\substack{m_1 > \cdots > m_r > 0 \\ n_1, \ldots, n_r > 0}} \frac{n_1^{k_1-1}}{(k_1-1)!} \cdots \frac{n_r^{k_r-1}}{(k_r-1)!} q^{m_1 n_1 + \cdots + m_r n_r}. \tag{3.2}$$

Specifically, $A_r(q) = g(2, \ldots, 2)$. These g-series are q-analogues of multiple zeta values: $\lim_{q\to 1}(1-q)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})} g(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$. However, like $A_r(q)$, they are not of homogeneous weight. This leads to the definition of multiple Eisenstein series, which provide a "homogeneous weight" version of these objects.

3.3. **Multiple Eisenstein Series (MES).** For a depth $r \geq 1$ and integers $k_1, \dots, k_r \geq 2$, the *multiple Eisenstein series* are defined for $\tau \in \mathbb{H}$ by

$$\mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r}(\tau) := \sum_{\substack{\lambda_1 \succ \cdots \succ \lambda_r \succ 0 \\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}} \frac{1}{\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_r^{k_r}},$$

where the order $\succ$ on the lattice $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ is the standard lexicographical order. These functions are holomorphic in $\mathbb{H}$. Since $\mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r}(\tau+1) = \mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r}(\tau)$, they possess a Fourier expansion. These Fourier expansions can be described explicitly in terms of the q-series $g(k_1, \dots, k_r)$ given in (3.2). In this context the q-series g always appear together with a power of $-2\pi i$ and therefore we set for $k_1, \dots, k_r \geq 1$

$$\hat{g}(k_1, \dots, k_r) := (-2\pi i)^{k_1+\cdots+k_r} g(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{Q}[\pi i][\![q]\!].$$

Notice that with that notation we can write the classical Eisenstein as

$$\mathbb{G}_k(\tau) = \zeta(k) + \hat{g}(k)$$

and for multiple Eisenstein series we get the following generalization:

Theorem 3.2 ($r = 1, 2$ [GKZ], $r \geq 1$ [Ba1])**.** *For $k_1, \dots, k_r \geq 2$ there exist explicit $\alpha^{k_1,\dots,k_r}_{l_1,\dots,l_r,j} \in \mathbb{Z}$, such that for $q = e^{2\pi i \tau}$ we have*

$$\mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r}(\tau) = \zeta(k_1, \dots, k_r) + \sum_{\substack{0<j<r \\ l_1+\cdots+l_r = k_1+\cdots+k_r \\ l_1 \geq 2, l_2, \dots, l_r \geq 1}} \alpha^{k_1,\dots,k_r}_{l_1,\dots,l_r,j}\, \zeta(l_1, \dots, l_j) \hat{g}(l_{j+1}, \dots, l_r) + \hat{g}(k_1, \dots, k_r).$$

In particular, $\mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r}(\tau) = \zeta(k_1, \dots, k_r) + \sum_{n>0} a_{k_1,\dots,k_r}(n) q^n$ for some $a_{k_1,\dots,k_r}(n) \in \mathcal{Z}[\pi i]$.

In the case $r = 2$ we get that for $k_1, k_2 \geq 2$ the Fourier expansion of the double Eisenstein series is given by (see [GKZ, Theorem 6])

$$\mathbb{G}_{k_1,k_2}(\tau) = \zeta(k_1, k_2) + \sum_{\substack{l_1+l_2=k_1+k_2 \\ l_1, l_2 \geq 2}} \left((-1)^{k_2} \binom{l_1 - 1}{k_2 - 1} + (-1)^{l_1 - k_1} \binom{l_1 - 1}{k_1 - 1} + \delta_{l_1,k_2} \right) \zeta(l_1) \hat{g}(l_2) + \hat{g}(k_1, k_2).$$

Example 3.3. Writing $P = -2\pi i$ we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_6(\tau) &= \zeta(6) + \hat{g}(6) \\
&= \zeta(6) + \frac{1}{120} P^6 q + \frac{11}{40} P^6 q^2 + \frac{61}{30} P^6 q^3 + \dots, \\
\mathbb{G}_{4,2}(\tau) &= \zeta(4,2) + 2\zeta(2)\, \hat{g}(4) + 2\zeta(3)\, \hat{g}(3) + 4\zeta(4)\, \hat{g}(2) + \hat{g}(4,2) \\
&= \zeta(4,2) + \Big(\frac{1}{3} P^4 \zeta(2) + P^3 \zeta(3) + 4P^2 \zeta(4) \Big) q + \Big(3P^4 \zeta(2) + 5P^3 \zeta(3) + 12 P^2 \zeta(4) \Big) q^2 + \dots, \\
\mathbb{G}_{3,3}(\tau) &= \zeta(3,3) + \zeta(3)\, \hat{g}(3) - 6\zeta(4)\, \hat{g}(2) + \hat{g}(3,3) \\
&= \zeta(3,3) + \Big(\frac{1}{2} P^3 \zeta(3) - 6P^2 \zeta(4) \Big) q + \Big(\frac{5}{2} P^3 \zeta(3) - 18 P^2 \zeta(4) \Big) q^2 + \dots.
\end{aligned}$$

Example 3.4. Multiple Eisenstein series can also be seen as giving the correct linear combination of the q-series g in order to get something of homogeneous weight. For example, the mixed weight quasimodular forms (3.1) can be made into homogeneous weight as follows: Setting $G_{\{2\}^l} = (2\pi i)^{-2l}\mathbb{G}_{\{2\}^l}$ we get

$$\begin{aligned} G_2 &= g(2) - \frac{1}{24}, \\ G_{2,2} &= g(2,2) - \frac{1}{8}g(2) + \frac{1}{1920}, \\ G_{2,2,2} &= g(2,2,2) - \frac{5}{24}g(2,2) + \frac{13}{1920}g(2) - \frac{1}{322560}. \end{aligned}$$

These are quasimodular forms of homogeneous weights $2, 4$ and 6 , respectively

3.4. **The space $\mathcal{E}$ and Conjectures.** We denote the $\mathbb{Q}$-vector space spanned by all multiple Eisenstein series by

$$\mathcal{E} = \langle \mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r} \mid r \geq 0, k_1, \dots, k_r \geq 2 \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

It is easy to check that $\mathcal{E}$ is an algebra, which has the algebra of quasimodular forms as a subalgebra. We conjecture that the $\mathfrak{sl}_2$-structure of quasimodular forms extends to the entire space $\mathcal{E}$.

Conjecture 3.5. *The operators D, W, δ defined on generators by*

$$\begin{aligned} D(\mathbb{G}_{\mathbf{k}}) &= (2\pi i)\frac{d}{d\tau}\mathbb{G}_{\mathbf{k}}, \\ W(\mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r}) &= (k_1 + \cdots + k_r)\mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r}, \\ \delta(\mathbb{G}_{k_1,\dots,k_r}) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\mathbb{G}_{k_2,\dots,k_r} & \text{if } k_1 = 2, \\ 0 & \text{if } k_1 > 2, \end{cases} \end{aligned}$$

give well-defined derivations on $\mathcal{E}$ and form an $\mathfrak{sl}_2$-triple.

We also have a conjecture for the size of this space. Let $\mathsf{M}(X) = ((1 - X^4)(1 - X^6))^{-1}$ be the series for modular forms, $\mathsf{S}(X) = X^{12}\mathsf{M}(X)$ for cusp forms, and $\mathsf{O}(X) = X^3(1 - X^2)^{-1}$ for odd weights.

Conjecture 3.6. *The dimension of $\mathcal{E}$ is given by*

$$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}_k X^k = \mathsf{M}(X) \cdot \frac{1}{1 - X^2 - \mathsf{O}(X) + 2\mathsf{S}(X)}.$$

This suggests an isomorphism $\mathcal{E} \cong \mathcal{M} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{E})^\vee$, where $\mathfrak{E}$ is a Lie algebra related to cusp forms. This Lie algebra will be studied in [BBI].

4. Formal multiple Eisenstein series

To study these structures rigorously without relying on analytic difficulties, we introduce the algebra of formal multiple Eisenstein series. Here we use the "balanced" setup introduced in [Bu1] and used in [BBI], which differs from the bi-bracket notation used in [BIM] but describes the same object.

4.1. **The balanced setup.** Let $\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle$ be the non-commutative polynomial ring in the alphabet $\mathcal{B}=\{b_0,b_1,\ldots\}$. On $\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle$ we recursively define the *stuffle product* $*$ as the $\mathbb{Q}$-bilinear product satisfying $1*w=w*1=w$ and

$$b_iu*b_jv=b_i(u*b_jv)+b_j(b_iu*v)+\delta_{ij>0}\,b_{i+j}(u*v).$$

Let $\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle^0$ be the subspace of words not starting in b_0. This subspace is closed under $*$. We define a $\mathbb{Q}$-linear involution $\tau:\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle^0\to\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle^0$ by

$$\tau(b_{k_1}b_0^{m_1}\cdots b_{k_s}b_0^{m_s}):=b_{m_s+1}b_0^{k_s-1}\cdots b_{m_1+1}b_0^{k_1-1},$$

where $k_i\geq 1$ and $m_i\geq 0$. This map τ plays the role of the swap map in [BIM].

Definition 4.1. The algebra of *formal multiple Eisenstein series* is defined by

$$\mathcal{G}^f:=\left.(\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle^0,*)\middle/\mathcal{T}\right.,$$

where $\mathcal{T}$ is the ideal generated by $\tau(w)-w$ for all $w\in\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle^0$. We denote the class of $b_{k_1}\cdots b_{k_r}$ by $G^f(k_1,\ldots,k_r)$.

While the definition involves b_0, we are often interested in the "analytic" subspace spanned by generators with indices ≥ 2:

$$\mathcal{E}^f:=\langle G^f(k_1,\ldots,k_r)\mid r\geq 0,k_i\geq 2\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Conjecture 4.2. *The map $\mathcal{E}^f\to\mathcal{E}$ given by $G^f(\mathbf{k})\mapsto\mathbb{G}_{\mathbf{k}}$ is an isomorphism.*

The formal space satisfies the properties conjectured for the analytic space.

Theorem 4.3 ([BIM])**.** *There exist explicit derivations W,D,δ on $\mathcal{G}^f$ such that $\mathcal{G}^f$ is an $\mathfrak{sl}_2$-algebra.*

The derivations are defined combinatorially on the words in $\mathcal{B}$. In particular, D is a derivation of weight -2 and δ is a derivation of weight 2.

Theorem 4.4 ([BIM])**.** *There exists a surjective algebra homomorphism*

$$\pi:\mathcal{G}^f\to\mathcal{Z}^f$$

such that $\pi(G^f(\mathbf{k}))=\zeta^f(\mathbf{k})$.

This is the "formal projection to the constant term". As a natural sub algebra we define the algebra of *formal quasimodular forms* by $\widetilde{\mathcal{M}}^f:=\mathbb{Q}[G^f(2),G^f(4),G^f(6)]\subset\mathcal{G}^f$.

Theorem 4.5. *$\widetilde{\mathcal{M}}^f\cong\widetilde{\mathcal{M}}$ as $\mathfrak{sl}_2$-algebras.*

This implies that relations such as the Ramanujan differential equations and the Chazy equation hold in $\mathcal{G}^f$. We also define the algebra of *formal cusp forms* by $\mathcal{S}^f=\ker\pi_{|\mathcal{M}^f}$. The first non-zero formal cusp form is $\Delta^{\mathfrak{f}}\in\mathcal{S}^f_{12}$, defined analogously to the classical discriminant Δ.

5. Lie Algebras and Dimensions

In this final section, we mention the conjectural structure of the derivations on $\mathcal{G}^f$ and dimension conjectures which will be studied in [BBI].

5.1. **The Lie algebra $\mathfrak{D}$.** For $l \in \mathbb{Z}$, let $\mathfrak{D}_l$ be the space of τ-equivariant derivations on $\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle^0$ of weight $-l$.

$$\mathfrak{D}_l = \{d \in \mathrm{Der}(\mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle^0, *) \mid d \circ \tau = \tau \circ d, \deg(d) = -l\}.$$

Define $\mathfrak{D} = \sum_{l\geq 1} \mathfrak{D}_l$. It is easy to check that $\mathfrak{D}$ is a Lie subalgebra of derivations.

Theorem 5.1 ([BIM]). *There exist explicit non-zero elements $\omega_1 \in \mathfrak{D}_1$ and $\delta \in \mathfrak{D}_2$.*

The element δ here is the same operator that gives the $\mathfrak{sl}_2$-structure. We conjecture that $\mathfrak{D}$ is generated by δ and elements $\omega_s \in \mathfrak{D}_s$ for odd $s \geq 1$. We further expect an embedding $\mathfrak{dm}_0 \hookrightarrow \mathfrak{D}$.

5.2. **The space $\mathfrak{bm}_0$.** To better understand $\mathfrak{D}$, Burmester introduced a subspace $\mathfrak{bm}_0 \subset \mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle$, which can be seem as an analogue of Racinets $\mathfrak{dm}_0$.

Definition 5.2 ([Bu1]). The space $\mathfrak{bm}_0$ consists of all $\Psi \in \mathbb{Q}\langle\mathcal{B}\rangle$, such that
- (i) $(\Psi \mid b_k) = 0$ for $k = 0, 2, 4, 6$,
- (ii) $\Delta_b(\Psi) = \Psi \otimes 1 + 1 \otimes \Psi$,
- (iii) $\tau(\Pi_0(\Psi)) = \Pi_0(\Psi)$.

Theorem 5.3 ([Bu1]). *There is an embedding $\mathfrak{dm}_0 \hookrightarrow \mathfrak{bm}_0$.*

Conjecture 5.4. *$\mathfrak{bm}_0$ is a Lie algebra and $\mathcal{G}^f \cong \widetilde{\mathcal{M}}^f \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{bm}_0)^\vee$.*

5.3. **Relation between $\mathfrak{D}$ and $\mathfrak{bm}_0$.** The main motivation of [BBI] is to show that Burmesters $\mathfrak{bm}_0$ can be described by the derivations in $\mathfrak{D}$. Let $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}_1 \oplus \bigoplus_{l\geq 3} \mathfrak{D}_l$.

Conjecture 5.5 ([BBI]). *$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{bm}_0$ as Lie algebras. Thus $\mathfrak{D} \cong \mathbb{Q}\delta \oplus \mathfrak{bm}_0$.*

5.4. **Dimension Conjecture for $\mathcal{G}^f$.** Define the Hilbert–Poincaré series of the space of period polynomials W_k with even $k \geq 2$ by

$$\mathsf{W}(X) = \sum_{\substack{k\geq 2\\ k \text{ even}}} \dim_{\mathbb{Q}} W_k X^k = \mathsf{M}(X) + \mathsf{S}(X) - 1 = \frac{X^4}{1-X^2} + 2\,\mathsf{S}(X)$$

where $\mathsf{D}(X) = \frac{1}{1-X^2}$, $\mathsf{O}(X) = \frac{X^3}{1-X^2}$, $\mathsf{M}(X) = \frac{1}{(1-X^4)(1-X^6)}$, $\mathsf{S}(X) = X^{12}\mathsf{M}(X)$.

Conjecture 5.6 ([BK],[BBI]). *The dimension of $\mathcal{G}^f$ is given by:*

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{G}^f_k X^k &= \widetilde{\mathsf{M}}(X) \cdot \frac{1}{1 - \mathsf{D}(X)X - \mathsf{D}(X)\mathsf{O}(X) + \mathsf{D}(X)\mathsf{W}(X)}\\ &= \mathsf{M}(X) \cdot \frac{1}{1 - X - X^2 - \mathsf{O}(X) + \mathsf{W}(X)}.\end{aligned}$$

This provides a unified conjectural picture for the size of the algebra of multiple Eisenstein series, combining the structure of modular forms (M) with the structure of multiple zeta values (O) and period polynomials (W).

References

[AR] G. Andrews and S. Rose:*MacMahon's sum-of-divisors functions, Chebyshev polynomials, and quasi-modular forms*, J. Reine Angew. Math. 676 (2013) 97.

[Ba1] H. Bachmann: *Multiple Zeta-Werte und die Verbindung zu Modulformen durch Multiple Eisensteinreihen*, Master thesis, Universität Hamburg (2012).

[BBI] H. Bachmann, A. Burmester, J.-W. van Ittersum: *Lie algebras and derivations related to multiple Eisenstein series*, (in preparation).

[BIM] H. Bachmann, J.-W. van Ittersum, N. Matthes: *Formal multiple Eisenstein series and their derivations*, to appear in Advances in Mathematics.

[BK] H. Bachmann, U. Kühn: *A dimension conjecture for q-analogues of multiple zeta values*, Theory and Arithmetic, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **314** (2020), 237–258.

[Bu1] A. Burmester: *An algebraic approach to multiple q-zeta values*, PhD Thesis, Universität Hamburg (2023).

[GKZ] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier: *Double zeta values and modular forms*, in "Automorphic forms and zeta functions" World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2006), 71–106.

[H] M. E. Hoffman: *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), 49-68.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier: *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[Rac] G. Racinet: *Series generatrices non-commutatives de polyzetas et associateurs de Drinfeld*, Thesis, Laboratoire Amienois de Mathematique Fondamentale et Appliquee (2000).

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Nagoya, Japan.
Email address: henrik.bachmann@math.nagoya-u.ac.jp

W代数の定義の変形とその応用について

元良 直輝　（富山大学）

1 Motivations

1.1 W-algebras

Let $\mathfrak{g}$ be a simple Lie algebra and $k \in \mathbb{C}$. Then the *affine vertex algebra* $V^k(\mathfrak{g})$ of $\mathfrak{g}$ at level k is defined. Since

$$V^k(\mathfrak{g})\text{-modules} = \text{smooth } \widehat{\mathfrak{g}}\text{-modules of level } k,$$

$V^k(\mathfrak{g})$ is a vertex algebra version of the affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$. Therefore we can study smooth $\widehat{\mathfrak{g}}$-modules using technology of vertex algebras. In particular, $\widehat{\mathfrak{g}}$-modules will be related to *modular forms* because vertex algebra is originated from $2d$ conformal field theory.

Let f be a nilpotent element of $\mathfrak{g}$. Then one can define the BRST cohomology asso. to f of $V^k(\mathfrak{g})$:

$$W^k(\mathfrak{g}, f) := H^0_f(V^k(\mathfrak{g})).$$

$W^k(\mathfrak{g}, f)$ is a vertex algebra and called the *W-algebra* of $\mathfrak{g}, f$ at level k [FF90, KRW03].

For $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ with $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $W^k(\mathfrak{sl}_2, f) =$ the Virasoro (vertex) algebra of some central charge. In general, the W-algebras contain interesting vertex algebra and using the BRST functor

$$V^k(\mathfrak{g})-\text{mod} \ni \ M \ \mapsto \ H^0_f(M) \ \in W^k(\mathfrak{g}, f)-\text{mod}$$

one may associate $\widehat{\mathfrak{g}}$-modules to $W^k(\mathfrak{g}, f)$-modules.

1.2 Examples: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$

Consider the case $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. Let f be a nilpotent element in $\mathfrak{sl}_3$. Then the Jordan form of f has only 0 in the diagonal entries and thus is one of the followings:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

which corresponds to the partitions (3), $(2,1)$, (1^3) of 3, called principal, subregular, zero, respectively. Thus we obtain three families of W-algebras in case $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$:

- $W^k(\mathfrak{sl}_3, f_{\mathrm{prin}}) =$ the Zamolodchikov W_3-algebra.
- $W^k(\mathfrak{sl}_3, f_{\mathrm{sub}}) =$ the Bershadsky-Polyakov algebra.
- $W^k(\mathfrak{sl}_3, 0) =$ the affine vertex algebra $V^k(\mathfrak{sl}_3)$.

1.3 Finite analogs

Given a vertex algebra V, we can define the Zhu algebra $\mathrm{Zhu}V$, an associative algebra. For $V = V^k(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Zhu}V^k(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})$ [FZ92]. Thus, $\mathrm{Zhu}V$ gives a finite analog of V.

For $V = W^k(\mathfrak{g}, f)$, $\mathrm{Zhu}W^k(\mathfrak{g}, f) = U(\mathfrak{g}, f)$ [Ara07, DSK06], the *finite W-algebra* of $\mathfrak{g}, f$, introduced by Premet [Pre02]. For examples,

- $U(\mathfrak{g}, 0) = U(\mathfrak{g})$.
- $U(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}}) = Z(\mathfrak{g})$: the center of $U(\mathfrak{g})$ [Kos78].
- $U(\mathfrak{sl}_n, f) =$ shifted Yangian of type A [BK06].
- $U(\mathfrak{g}, f) =$ shifted twisted Yangian of type BCD for $\mathfrak{g} = BCD$ [Bro09, LPT$^+$25].
- $U(\mathfrak{sl}(m|n), f) =$ shifted super Yangian of type A [BR03, BBG13, Pen21].

1.4 Poisson geometry

Using the PBW filtration on $U(\mathfrak{g})$,

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \quad \text{(Possion algebra)}$$

Thus $\mathfrak{g}^*$ is a Poisson variety (Kirillov-Kostant), and the symplectic leaves of $\mathfrak{g}^*$ are coadjoint orbits $\mathcal{O}^*$.

The finite W-algebra has a canonical filtration (Kazhdan filtration), and the associated graded algebra also becomes a Poisson algebra [Pre02, GG02, Los10]:

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}, f) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{S}_f],$$

where $\mathcal{S}_f$ is the *Slodowy slice* of $\mathfrak{g}$ at f.

Suppose that $f \neq 0$. Then the Jacobson-Morozov theorem implies that there exists an $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{e, h, f\} \subset \mathfrak{g}$ containing our choice of f. Then

$$\mathcal{S}_f = f + \mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*.$$

Let $\mathfrak{h}$ be a Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}$ and $h \in \mathfrak{h}$.
A pair (f, h) is called a *good pair* if
(1) $\operatorname{ad} h$ defines a $\mathbb{Z}$-grading on $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$, where
$\mathfrak{g}_j = \{a \in \mathfrak{g} \mid [h, a] = ja\}$
(2) $f \in \mathfrak{g}_{-2}$
(3) $\operatorname{ad} f \colon \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j-2}$ is injective for $j \geq 1$ and surjective for $j \leq 1$.

For example, we may choose h in the $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{e, h, f\}$. In general, we have more options for h. Classifications: [EK05, Hoy12].

By the good conditions,

$$\langle a, b \rangle := (f|[a, b]) = ([f, a]|b), \quad a, b \in \mathfrak{g}_1$$

defines a non-deg. skew-symmetric (=symplectic) form on $\mathfrak{g}_1$.

Let $\mathfrak{l}$ be a Lagrangian (= maximal isotropic subspace) in $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{m}$ a nilpotent subalgebra

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}_{\geq 2}.$$

For example, in case $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$,

$$f = f_{\text{prin}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{m} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f = f_{\text{sub}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{m} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $M = \exp(\mathfrak{m})$ a unipotent Lie group. Then the coadjoint action of M on $\mathfrak{g}^*$ is Hamiltonian with the moment map

$$\mu \colon \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}^*, \quad a \mapsto (a \,|\, \cdot).$$

Let $\chi = (f \,|\, \cdot) \in \mathfrak{m}^*$. Gan-Ginzburg show that

$$\alpha \colon M \times \mathcal{S}_f \to \mu^{-1}(\chi), \quad (g, a) \mapsto \operatorname{Ad}_g(a)$$

is an isomorphism. Therefore

$$\mathcal{S}_f \simeq \mu^{-1}(\chi)/M =: \mathfrak{g}^*/\!/M.$$

The RHS is called the *Hamiltonian reduction* of $\mathfrak{g}^*$ by M at χ. Then the Poisson structure of $\mathcal{S}_f$ is induced from $\mathfrak{g}^*$.

1.5 Variations of Hamiltonian reductions

Gan-Ginzburg proposed variations of Hamiltonian reductions. Let $\mathfrak{l}$ be any *isotropic* subspace in $\mathfrak{g}_1$ and set

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}_{\geq 2}, \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{l}^\perp \oplus \mathfrak{g}_{\geq 2},$$

where $\mathfrak{l}^\perp = \{a \in \mathfrak{g}_1 \mid \langle a, \mathfrak{l} \rangle = 0\} \supset \mathfrak{l}$. Thus $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$. For example, in case $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ and $\mathfrak{l} = 0$,

$$f_{\mathrm{sub}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $N = \exp(\mathfrak{n})$ and $\chi = (f|\cdot) \in \mathfrak{n}^*$. Set the N-orbit at χ

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{n}} := \mathrm{Ad}_N^* \chi \simeq \mathfrak{l}^\perp/\mathfrak{l}.$$

Then $X := \mathfrak{g}^* \times \mathcal{O}_{\mathfrak{n}}$ is a Poisson variety. Define a moment map

$$\mu_X : X = \mathfrak{g}^* \times \mathcal{O}_{\mathfrak{n}} \ni (\zeta, \eta) \mapsto \zeta|_{\mathfrak{n}} - \eta \in \mathfrak{n}^*.$$

We have $\mu_X^{-1}(0) \simeq \mu^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}})$, where $\mu \colon \mathfrak{g}^* \twoheadrightarrow \mathfrak{n}^*$ the restriction. Gan-Ginzburg show that

$$\gamma \colon N \times \mathcal{S}_f \to \mu^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}}), \quad (g, a) \mapsto \mathrm{Ad}_g(a)$$

is an isomorphism. Hence $\mathcal{S}_f \simeq \mu^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}})/N$. For $\mathfrak{l}$ =Lagrangian: $\mathcal{S}_f \simeq \mu^{-1}(\chi)/M$ (Premet). For $\mathfrak{l} = 0$: $\mathcal{S}_f \simeq \mu^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{>0}})/G_{>0}$ (Kac-Roan-Wakimoto).

At the level of coordinate rings (or Poisson algebras),

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_f] \simeq \mathbb{C}[\mu^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}})]^N = \mathbb{C}[\mu^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}})]^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}} = (\mathbb{C}[X]/I_{\mathfrak{n}})^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}},$$

where $I_{\mathfrak{n}}$ is the defining ideal for

$$\mu^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}}) \simeq \mu_X^{-1}(0) \subset X = \mathfrak{g}^* \times \mathcal{O}_{\mathfrak{n}}.$$

Using the Lie algebra cohomology and homology,

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_f] \simeq H^0(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[X]/I_{\mathfrak{n}}) = H^0(\mathfrak{n}, H_0(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{O}_{\mathfrak{n}}])).$$

Fourthermore, using the semi-infinite cohomology (= a mix version of homology/cohomology),

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_f] \simeq H^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{n}, \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{O}_{\mathfrak{n}}]).$$

These results lead to equivalent variant definitions of $U(\mathfrak{g}, f)$.

Given a good pair (f, h) in $\mathfrak{g}$ and an isotropic subspace $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{g}_1$, set

$$U(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l}) := H^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{n}, U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{D}_{\mathfrak{n}}),$$

where $\mathcal{D}_{\mathfrak{n}}$ is the Weyl algebra associated to $\mathcal{O}_{\mathfrak{n}} \simeq \mathfrak{l}^\perp/\mathfrak{l}$.

For example, if $\mathfrak{l}^\perp/\mathfrak{l} = \mathbb{C}^{2n}$, then $\mathcal{D}_{\mathfrak{n}} = \langle \partial_i, x_i \mid i = 1, \dots n \rangle_{\mathrm{alg}}$ with the relation $[\partial_i, x_j] = \delta_{i,j}$ and $[\partial_i, \partial_j] = [x_i, x_j] = 0$.

Gan-Ginzburg [GG02] and Brundan-Goodwin [BG07] show that these algebras are isomorphic to each other if f belongs to the same nilpotent orbit $\mathcal{O}_f := \mathrm{Ad}_G(f)$. Therefore,

$U(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l})$ is isomorphic to the finite W-algebra $U(\mathfrak{g}, f)$

because these include Premet's original definition of $U(\mathfrak{g}, f)$: h comes from an $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{e, h, f\}$ and $\mathfrak{l}$ is a Lagrangian.

2 Main results

Following Gan-Ginzburg, for a good pair (f, h) in $\mathfrak{g}$ and an isotropic subspace $\mathfrak{l}$ in $\mathfrak{g}_1$, define a vertex algebra

$$W^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l}) := H^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{n}[t^{\pm 1}], V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}_{\mathfrak{n}}),$$

where $\mathfrak{n}[t^{\pm 1}]$ is a Lie subalgebra of $\widehat{\mathfrak{g}}$ and $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}}$ is the Weyl vertex algebra assoiated to $\mathcal{O}_{\mathfrak{n}}$.

The following result is a long-standing conjecture or well-known "fact" for specialists of W-algebras, but nobady knows the precise proof:

Theorem 2.1 ([GJ25]). *Fix $\mathfrak{g}$ and k. Then $W^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l})$ are isomorphic to each other if f belongs to the same nilpotent orbit $\mathcal{O}_f$.*

Therefore, $W^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l})$ is isomorphic to the W-algebra $W^k(\mathfrak{g}, f)$ because these include Kac-Roan-Wakimoto's original definition: $\mathfrak{l} = 0$.

2.1 Idea of proof for equivalence theorem

We mimic the strategy of [AKM15]. They provided the $\hbar$-adic version of our results for $\mathfrak{l} = 0$ and $\mathfrak{l}$ is a Lagrangian (they defined the W-algebras as the $\mathbb{C}^*$-invariant algebra of the $\hbar$-adic ones. In fact, one can prove their W-algebras are isomorphic to $W^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l})$ by using our results).

Here I will expain the strategy.

Let $\mathfrak{a}$ be a vector space and $\Lambda(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*)$ the Clifford algebra associated to $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*$. This means $\Lambda(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*)$ is generated by odd generators φ_i, φ_i^* for $i = 1, \dots \dim \mathfrak{a}$ with the relations

$$[\varphi_i, \varphi_j^*] = \delta_{i,j}, \quad [\varphi_i, \varphi_j] = [\varphi_i^*, \varphi_j^*] = 0,$$

where $[\cdot, \cdot]$ is the odd bracket. Then the cochain complex of $U(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l}) = H^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{n}, U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{D}_{\mathfrak{n}})$ is defined by

$$C(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l}) := U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{D}_{\mathfrak{n}} \otimes \Lambda(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^*).$$

Vertex algebra version:

$$C^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l}) := V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}_{\mathfrak{n}} \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^*),$$

where $\mathcal{F}(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*)$ is the Clifford vertex superalgebra associated to $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*$. $C^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l})$ is the cochain complex of $W^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l})$.

Want to compare the case of $\mathfrak{l} = 0$ (Kac-Roan-Wakimoto choice) and the case of $\mathfrak{l}$ = Lagrangian (Premet choice). Set

$$C_{\mathrm{KRW}} = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}_{\mathfrak{g}_{>\circ}} \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{g}_{>0} \oplus \mathfrak{g}^*_{>0}), \quad C_{\mathrm{Lag}} = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^*).$$

But we have no morphisms between C_{KRW} and C_{Lag} commuting with the differentials in general. Now, define the *intermediary complex*

$$C_{\mathrm{int}} = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}^*_{>0}).$$

Then the natural maps $\mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{>0}$ and $\mathfrak{g}^*_{>0} \twoheadrightarrow \mathfrak{n}^*$ induces

$$C_{\mathrm{KRW}} \hookleftarrow C_{\mathrm{int}} \twoheadrightarrow C_{\mathrm{Lag}}.$$

Then these maps are commuting the diffrentials and we have

$$W^k(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{KRW}} \leftarrow W^k(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{int}} \rightarrow W^k(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{Lag}}.$$

In finite cases,

$$U(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{KRW}} \leftarrow U(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{int}} \rightarrow U(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{Lag}}$$

are isomorphisms because

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l}) \simeq \mathbb{C}[\mu^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}})]^N \simeq \mathbb{C}[\mathcal{S}_f].$$

What about $\operatorname{gr} W^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l})$?

The following result is proved esssentially by Kac-Roan-Wakimoto [KRW03] for $\mathfrak{l} = 0$, and by Arakawa-Moreau [AM24] when $\mathfrak{l}$ is a Lagrangian, but we prove general cases:

Theorem 2.2 ([GJ25]).

$$\operatorname{gr} W^k(\mathfrak{g}, f, h, \mathfrak{l}) \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathcal{S}_f].$$

Therefore $\operatorname{gr} W^k(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{KRW}} \simeq \operatorname{gr} W^k(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{int}} \simeq \operatorname{gr} W^k(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{Lag}}$, which implies the original maps are isomorphisms.

2.2 Structure Theorem on BRST cohomology

Let $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$ be nilpotent Lie algebras s.t. $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{m}$.
Set $M = \exp(\mathfrak{m}) \lhd N = \exp(\mathfrak{n})$. Denote by $V(\mathfrak{m}) \subset V(\mathfrak{n})$ the affine vertex algebras of $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$.

Let X be a Poisson variety with the Hamiltonian N-action and $\mu \colon X \to \mathfrak{m}^*$ the N-equivariant moment map.

Suppose that

(P1) μ is smooth and surjective and there exists a closed subvariety $\mathcal{S} \subset \mu^{-1}(\chi)$ for some $\chi \in \mathfrak{m}^*$ s.t.

$$\alpha \colon N \times \mathcal{S} \to \mu^{-1}(\chi), \quad (g, s) \mapsto g \cdot s$$

is a well-defined isom.

Let $V \subset \widetilde{V}$ be vertex algebras with $V(\mathfrak{m}) \subset V(\mathfrak{n})$-actions, i.e. there exist vertex algebra homomorphisms

$$\Upsilon \colon V(\mathfrak{n}) \to \widetilde{V}, \quad \Upsilon|_{V(\mathfrak{m})} \colon V(\mathfrak{m}) \to V.$$

Suppose that

(P2) V is closed by $\mathfrak{n}[t]$-action through Υ.

(P3) $\operatorname{gr} V \simeq \mathbb{C}[J_\infty X]$ and $\Upsilon|_{V(\mathfrak{m})}$ imduces a PVA hom

$$\operatorname{gr} \Upsilon \colon \mathbb{C}[J_\infty \mathfrak{m}^*] \to \mathbb{C}[J_\infty X].$$

Then $\operatorname{gr} \Upsilon(a) = J_\infty \mu^*(a)$ for $a \in \mathfrak{m}$.

(P4) The induced $\mathfrak{n}[t]$-action on $\mathbb{C}[J_\infty X]$ coincides with the one from $J_\infty N$.

(P5) $\widetilde{V}$ is graded by L_0^{old}: $\widetilde{V} = \bigoplus_{\Delta \in \frac{1}{K}\mathbb{Z}} \widetilde{V}(\Delta)$ for some $K \in \mathbb{N}$ s.t. V is non-negatively graded and each homogeneous space $V(\Delta)$ is finite-dimensional.

(P6) $\Upsilon(a) \in \bigoplus_{\Delta \leq 1} \widetilde{V}(\Delta)$ for all $a \in \mathfrak{n}$.

(P7) Let $\Upsilon_1(a)$ be the image of the proj. $V(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\Upsilon} \widetilde{V} \twoheadrightarrow \widetilde{V}(1)$. Then $\Upsilon_1(a) \in V(1)$ for $a \in \mathfrak{n}$ and

$$V(\mathfrak{n}) \to V, \quad a \mapsto \Upsilon_1(a)$$

defines a free $\mathfrak{n}[t^{-1}]t^{-1}$-action on V.

Let $C_V = V \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^*) \ \subset \ C_{\widetilde{V}} = \widetilde{V} \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^*)$ and

$$Q_\chi = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{n}} (\Upsilon(x_i) - \chi(x_i)) \otimes \varphi^i - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{\dim \mathfrak{n}} c_{ij}^k \otimes :\varphi_k \varphi^i \varphi^j: \in C_{\widetilde{V}}.$$

Then $d_\chi = Q_{\chi(0)}$ satisfies that $d_\chi^2 = 0$ on C_V.

The (mixed-type) BRST cohomology is defined by

$$H_\chi^\bullet(V) := H^\bullet(C_V^\bullet, d_\chi).$$

Let $C_{V,+} = C_V / I_V$ with $I_V = \operatorname{Span}\{\varphi_{i(-n)} c, (d_\chi \varphi_i)_{(-n)} c \mid 1 \leq i \leq \dim \mathfrak{m},\ c \in C_V\}$.

Suppose that

(P8) C_V has a new Hamiltonian op. L_0^{new} s.t. $L_0^{\mathrm{new}} \circ d_\chi = d_\chi \circ L_0^{\mathrm{new}}$ and $L_0^{\mathrm{new}}(I_V) \subset I_V$.

(P9) The L_0^{new}-action defines a non-negative garding on $C_{V,+}$.

The folllowing theorem is a generalization of results of Arakawa-Moreau for $V = V^k(\mathfrak{g})$ with $H^0_\chi(V) = W^k(\mathfrak{g}, f)_{\mathrm{Lag}}$:

Theorem 2.3 ([GJ25]). *Suppose* (P1)–(P9). *Then* $H^i_\chi(V) = 0$ *for* $i \neq 0$, *and* $\operatorname{gr} H^0_\chi(V) \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathcal{S}]$.

3 Applications: Reduction by stages

We apply our theorem for $V = V^k(\mathfrak{g})$ or $V = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}$, then we get the equivalence theorem. How about $V = W^k(\mathfrak{g}, f)$? Answer: we get *reduction by stages* theorem, which tells that BRST reduction of W-algebra gives different W-algebra under some nice geometric assumptions.

3.1 Reduction by stages (general cases)

Let X be a Poisson variety with a Hamiltonian M_2-action and M_1 a normal Lie subgroup of M_2. Then we obtain two Poisson varieties $X//M_1$, $X//M_2$ from X by using the Hamiltonian reductions. But, under suitable assumptions, we may define a Hamiltonian M_2/M_1-action on $X//M_1$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "//M_2"] \arrow[dr, "//M_1"'] & & X//M_2 \\ & X//M_1 \arrow[ur, dashed, "//(M_2/M_1)"'] & \end{tikzcd}$$

This procedure is called the *reduction by stages* since we obtain $X//M_2$ by stages. We will apply for $X = \mathfrak{g}^*$.

3.2 Reduction by stages for W-algebras

Let (f_1, h_1), (f_2, h_2) be good pairs in $\mathfrak{g}$ s.t. $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$, and

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{(1)}_j = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{(2)}_j$$

the $\mathbb{Z}$-gradings by $\operatorname{ad} h_1$, $\operatorname{ad} h_2$. Then we have Slodowy slices

$$\mathcal{S}_{f_1} \simeq \mu_1^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}_1})/N_1, \quad \mathcal{S}_{f_2} \simeq \mu_2^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}_2})/N_2.$$

Definition 3.1. (f_1, h_1) is a *step towards* (f_2, h_2) if $f_0 := f_2 - f_1 \in \mathfrak{g}^{(1)}_0 \cap \mathfrak{g}^{(2)}_{-2}$, and

$$\mathfrak{g}^{(1)}_{\geq 2} \subset \mathfrak{g}^{(2)}_{\geq 1} \subset \mathfrak{g}^{(1)}_{\geq 0}, \quad \mathfrak{g}^{(1)}_1 \subset \bigoplus_{j=0}^{2} \mathfrak{g}^{(2)}_j, \quad \mathfrak{g}^{(2)}_1 \subset \bigoplus_{j=0}^{2} \mathfrak{g}^{(1)}_j.$$

Note: we will explain examples later.

By the step conditions,

- we have $\mathcal{O}_{f_1} \subset \overline{\mathcal{O}}_{f_2}$ (Zariski clusure).
- $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2$ ideal and $\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_0$ for some Lie subalgebra $\mathfrak{n}_0$.
- $\mathcal{S}_{f_1}$ has a Hamiltonian N_0-action for $N_0 := \exp(\mathfrak{n}_0) \simeq N_2/N_1$.

The result (1) in the following was conjectured by Morgan in case of $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$:

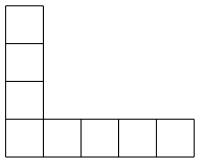
Theorem 3.2 ([GJ24]). *Suppose that* (f_1, h_1) *is a step towards* (f_2, h_2). *Then*

1. $\mathcal{S}_{f_2} \simeq \mathcal{S}_{f_1}//N_0$.

2. $U(\mathfrak{g}, f_2) \simeq H^0_{f_0}(U(\mathfrak{g}, f_1))$.

Examples:

- Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ such that $1 \leq a_1 < a_2 \leq n$ and $f_1 = (a_1, 1^{n-a_1})$, $f_2 = (a_2, 1^{n-a_2})$. These are called hook-type nilpotent elements:



  Then f_1, f_2 satisfies the step conditions.

- Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4$, $f_1 = (2, 1^2)$ and $f_2 = (2^2)$.
- Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$, f_1 is subregular and f_2 is principal.
- Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, $f_1 = (2^2, 1^{2n-4})$ (short nilpotent) and f_2 is principal.
- Let $\mathfrak{g} = G_2$, f_1 is $\widetilde{A}_1$ and f_2 is subregular.
- (Maybe) more...

Our goal is to establish a proof of the following theorem:

Theorem 3.3 ([GJ25]). *Suppose that (f_1, h_1) is a step towards (f_2, h_2). Then*

$$W^k(\mathfrak{g}, f_2) \simeq H^0_{f_0}(W^k(\mathfrak{g}, f_1))$$

for all $k \in \mathbb{C}$.

Main technical difficulty is that we have no morphism naively between $W^k(\mathfrak{g}, f_2)$ and $H^0_{f_0}(W^k(\mathfrak{g}, f_1))$. To overcome the difficulty, we need to vary the defining complexes of these algebras.

3.3 Idea of proof for reduction by stages theorem

Under the step conditions, there exist nilpotent Lie algebras $\mathfrak{n}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ such that $\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_0$, $\mathcal{S}_{f_1} \simeq \mu_1^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}_1})/N_1$ and $\mathcal{S}_{f_2} \simeq \mu_2^{-1}(\mathcal{O}_{\mathfrak{n}_2})/N_2$. Set

$$\widetilde{\mathfrak{n}}_2 := \widetilde{\mathfrak{n}}_1 \oplus \mathfrak{n}_0, \quad \widetilde{\mathfrak{n}}_1 := \mathfrak{g}^{(1)}_{>0}.$$

We have $\widetilde{\mathfrak{n}}_i \supset \mathfrak{n}_i$ for $i = 1, 2$. Let

$$\begin{aligned} &V_1 = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}_{\widetilde{\mathfrak{n}}_1}, \quad C_1 = V_1 \otimes \mathcal{F}(\widetilde{\mathfrak{n}}_1 \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_1^*), \quad C_2 = V_1 \otimes \mathcal{F}(\widetilde{\mathfrak{n}}_2 \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_2^*) \\ &W_1 = H^0(C_1), \quad W_2 = H^0(C_2), \quad C_{W_1} = W_1 \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_0^*). \end{aligned}$$

Then $W_1 = W^k(\mathfrak{g}, f_1)$ and $H^0(C_{W_1}) = H^0_{f_0}(W^k(\mathfrak{g}, f_1))$.

Geometry says:

$$N_0 \times \mathcal{S}_{f_2} \simeq \mu_0^{-1}(\chi_0), \quad \widetilde{N}_2 \times \mathcal{S}_{f_2} \simeq \mu_2^{-1}(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathfrak{n}}_1}).$$

Therefore the structure theorem of BRST cohomology applies:

$$H^i(C_{W_1}) = H^i(C_2) = 0 \ (i \neq 0), \ \operatorname{gr} H^0(C_{W_1}) \simeq \operatorname{gr} H^0(C_2) \simeq \mathbb{C}[J_\infty \mathcal{S}_{f_2}].$$

Let

$$\iota \colon C_{W_1} = W_1 \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_0^*) \hookrightarrow C_1 \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_0^*) = C_2.$$

Then we have $\bar{\iota} \colon H^0(C_{W_1}) \to H^0(C_2)$ and $\operatorname{gr} \bar{\iota}$ is an isom. Hence

$$H^0_{f_0}(W^k(\mathfrak{g}, f_1)) = H^0(C_{W_1}) \simeq H^0(C_2).$$

Remaining part: $W^k(\mathfrak{g}, f_2) \simeq H^0(C_2)$. Recall $C_2 = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}_{\widetilde{\mathfrak{n}}_1} \otimes \mathcal{F}(\widetilde{\mathfrak{n}}_2 \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_2^*)$. Set

$$C_{\mathfrak{n}_2} = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_2} \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_2^*),$$
$$C_{\text{int}} = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}_{\widetilde{n}_1} \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{n}_2 \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_2^*).$$

Then the natural maps $\mathfrak{n}_2 \hookrightarrow \widetilde{\mathfrak{n}}_2$ and $\widetilde{\mathfrak{n}}_2^* \twoheadrightarrow \mathfrak{n}_2^*$ induces

$$C_2 \hookleftarrow C_{\text{int}} \twoheadrightarrow C_{\mathfrak{n}_2}.$$

Then we have $H^0(C_2) \leftarrow H^0(C_{\text{int}}) \rightarrow H^0(C_{\mathfrak{n}_2})$, which are isomorphisms by the strucrue theorem of BRST cohomology. Now we have $H^0(C_{\mathfrak{n}_2}) \simeq W^k(\mathfrak{g}, f_2)$ by the equivcalence theorem. As a consequence,

$$W^k(\mathfrak{g}, f_2) \simeq H^0(C_{\mathfrak{n}_2}) \simeq H^0(C_2) \simeq H^0(C_{W_1}) = H^0_{f_0}(W^k(\mathfrak{g}, f_1)).$$

This completes the proof.

References

[AKM15] Tomoyuki Arakawa, Toshiro Kuwabara, and Fyodor Malikov. Localization of affine w-algebras. *Communications in Mathematical Physics*, 335(1):143–182, 2015.

[AM24] Tomoyuki Arakawa and Anne Moreau. *Arc spaces and vertex algebras.* 2024.

[Ara07] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of $\mathcal{W}$-algebras. *Inventiones Mathematicae*, 169(2):219–320, 2007.

[BBG13] Jonathan Brown, Jonathan Brundan, and Simon Goodwin. Principal w-algebras for $\mathrm{GL}(m|n)$. *Algebra & Number Theory*, 7(8):1849–1882, 2013.

[BG07] Jonathan Brundan and Simon M Goodwin. Good grading polytopes. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 94(1):155–180, 2007.

[BK06] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev. Shifted yangians and finite w-algebras. *Advances in Mathematics*, 200(1):136–195, 2006.

[BR03] C Briot and E Ragoucy. w-superalgebras as truncations of super-yangians. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(4):1057, 2003.

[Bro09] Jonathan Brown. Twisted yangians and finite w-algebras. *Transformation Groups*, 14(1):87–114, 2009.

[DSK06] Alberto De Sole and Victor G Kac. Finite vs affine w-algebras. *Japanese Journal of Mathematics*, 1(1):137–261, 2006.

[EK05] AG Elashvili and VG Kac. Classification of good gradings of simple lie algebras. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, 213:85–104, 2005.

[FF90] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the drinfeld-sokolov reduction. *Physics Letters B*, 246(1-2):75–81, 1990.

[FZ92] Igor B Frenkel and Yongchang Zhu. Vertex operator algebras associated to representations of affine and virasoro algebras. *Duke Mathematical Journal*, 66(1):123, 1992.

[GG02] Wee Liang Gan and Victor Ginzburg. Quantization of slodowy slices. *International Mathematics Research Notices*, 2002(5):243–255, 2002.

[GJ24] Naoki Genra and Thibault Juillard. Reduction by stages for finite $\mathcal{W}$-algebras. *Math. Z.*, 308(1):36, 2024. Id/No 15.

[GJ25] Naoki Genra and Thibault Juillard. Reduction by stages for affine w-algebras, 2025, 2501.04501.

[Hoy12] Crystal Hoyt. Good gradings of basic lie superalgebras. *Israel Journal of Mathematics*, 192(1):251–280, 2012.

[Kos78] Bertram Kostant. On whittaker vectors and representation theory. *Inventiones mathematicae*, 48(2):101–184, 1978.

[KRW03] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Communications in Mathematical Physics*, 241(2):307–342, 2003.

[Los10] Ivan Losev. Quantized symplectic actions and w-algebras. *Journal of the American Mathematical Society*, 23(1):35–59, 2010.

[LPT+25] Kang Lu, Yung-Ning Peng, Lukas Tappeiner, Lewis Topley, and Weiqiang Wang. Shifted twisted yangians and finite w-algebras of classical type. *arXiv preprint arXiv:2505.03316*, 2025.

[Pen21] Yung-Ning Peng. Finite w-superalgebras via super yangians. *Advances in Mathematics*, 377:107459, 2021.

[Pre02] Alexander Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. *Advances in Mathematics*, 170(1):1–55, 2002.

GAN-GUREVICH リフトのフーリエ係数の数論

山内 卓也 (東北大学)

1. 序文

本稿はトロント大の Henry Kim 氏との共同研究 [11] の概説である. 内容を代数学シンポジウムにおける講演内容に沿う形でまとめた.

表題の Gan-Gurecivh リフトは $\mathbb{Q}$ 上の分裂例外群 G_2 上のある種の尖点的保型形式 (cuspidal automorphic form), またはそれが生成する保型表現である. 一般に簡約連結代数群 $G/\mathbb{Q}$ 上の保型形式 F を調べるとき F が生成する $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の素性を知ることは F の研究の方向性を決める重要な手掛かりとなる ([27]). 加えて, 数論への応用を考える場合, 具体的に扱いやすい F の表示が必要となる. $G = GL_2/\mathbb{Q}$ または $G = SL_2/\mathbb{Q}$ の場合に代表される保型形式は正則な楕円保型形式, 所謂, モジュラー形式である. モジュラー形式は正則性からフーリエ展開がきれいな形をしており, これを中心として様々な数論が展開される. このことは保型表現論の一般論から眺めると極めて希な状況であり, 正則保型形式の範囲を超えて「フーリエ展開」および「フーリエ展開係数の数論」の研究を実行するためには織田孝幸氏の哲学 ([26],[27],[35]) に立ち戻り保型形式を具体的に実現する球関数を明示的に求めなくてはならない (例えば, $G = Sp_4$ の場合は文献 [24], [25],[26],[27],[28],[14] を参照).

本稿の設定では Aaron Pollack が明示的に求めた球関数とそれを用いて得られるフーリエ展開の理論 ([30],[31]) を援用する. この理論を Gan-Gurevich リフトと呼ばれる $PGL_2/\mathbb{Q}$ から G_2 へのリフトに適用することで, Gan-Gurevich リフトを生成する四元数カスプ形式をユニポテントアーベル群に沿った先頭項のフーリエ展開係数を得る. 我々が興味を持つ対象は $S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ ($k \geq 6$ は偶数) に属する正規化された Hecke 固有形式 f (以下これを newform と呼ぶ) に付随する尖点的保型表現 π_f の Gan-Gurevich リフトである. 得られたリフトを生成する保型形式は四元数カスプ形式と呼ばれる. このフーリエ係数を調べるために Gan-Gurevich リフトの各有限素点における成分が退化主系列表現, 無限素点では退化主系列表現の部分表現であることに着目し, 任意の素点において局所フーリエヤコビ写像を構成し, 大域的なフーリエヤコビ展開との整合性を確認する. これより, Gan-Gurevich リフトのフーリエ係数の一部は f の志村対応のフーリエ係数で記述されることが分かり, Gross の予想が部分的解決される.

本講演では先ずフーリエ係数の数論というものがどういうものか感じ取って頂くために具体例から始める. そして, 一般の保型形式に対するフーリエ係数を定義し, G_2 の場合に Pollack のフーリエ展開の理論を紹介する. Gan-Gurevich リフトは Ginzburg によるリフトと例外テータリフトとを組み合わせたハイブリッドリフトである. これについて簡単に紹介した後で, 四元数カスプ形式に対する Gross の予想について述べる. Gross の予想とは彼が David Pollack に宛てた手紙の中で論じた Saito-Kurokawa lift の G_2 類似のフーリエ係数の明示公式を含む予想である.

後半では退化主系列表現の局所・大域フーリエヤコビ係数の理論を援用して得られた結果について論じる. 最後に今後の課題や関連する話題についても述べたい.

Date: 第 70 回 代数学シンポジウム, 2025 年 8 月 29 日 (金).

2. 保型形式のフーリエ係数の数論: 具体例

整数 $N, k \geq 1$, 指標 $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して重さ k, レベル $\Gamma_0(N)$, 指標 χ を持つモジュラー形式 (正則楕円保型形式) 全体の成す空間を $M_k(\Gamma_0(N), \chi)$, モジュラー尖点形式全体の成す空間を $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ で表す (cf. [4],[3]). 以下 χ が自明指標のときは記号から略すことにする. 代数群 $SL_2/\mathbb{Q}$ の保型因子を $j : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}^\times, (\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto j(\gamma, z) = cz + d$ と定義する. ただし, $\mathbb{H} = \{z = x + y\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ は複素上半平面である. モジュラー形式 $f(z) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n(f) q^n \in M_k(\Gamma_0(N), \chi),\ q = e^{2\pi\sqrt{-1}z},\ z \in \mathbb{H}$ に対して,

$$\varphi_f : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C},\ g \mapsto j(g, \sqrt{-1})^{-k} f(g\sqrt{-1})$$

と定義すると, φ_f は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上の保型形式 (automorphic form) となる (cf. [2, 1.3, 1.5-(1)]). 非負整数 n に対して, φ_f の n-th フーリエ係数を

$$W_n(\varphi_f; g) := \int_0^1 \varphi_f(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) e^{-2\pi\sqrt{-1}nt} dt$$

と定めると, 岩澤分解 $g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix} k \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = B(\mathbb{R})\mathrm{SO}(2),\ x \in \mathbb{R},\ y > 0,\ k \in \mathrm{SO}(2)$ より,

$$\begin{aligned} W_n(\varphi_f; g) &= y^{\frac{k}{2}} \int_0^1 f(x + t + y\sqrt{-1})) e^{-2\pi\sqrt{-1}nt} dt \\ &= y^{\frac{k}{2}} q^n a_n(f) \\ &= \mathrm{Im}(g\sqrt{-1})^{\frac{k}{2}} e^{2\pi\sqrt{-1}n(g\sqrt{-1})} a_n(f) \end{aligned} \tag{2.1}$$

となり, モジュラー形式 f の n-th フーリエ係数 $a_n(f)$ は保型形式 φ_f に対する積分 $W_n(\varphi_f; g)$ に対応する. ここで, $a_n(f)$ は “数” であるのに対し, $W_n(\varphi_f; *)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上の関数であることに注意されたい. $W_n(\varphi_f; g)$ における $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 上の関数 $\mathrm{Im}(g\sqrt{-1})^{\frac{k}{2}} e^{2\pi\sqrt{-1}n(g\sqrt{-1})}$ は所謂, 球関数と呼ばれる部分であり, これを基準にして得られるもの, 数論を展開するに相応しい数, が我々がよく見かける $a_n(f)$ である.

以下の例ではモジュラー形式のように対称領域上の関数のフーリエ係数についての話だが上記のように保型因子を用いて (代数群上の) 保型形式のフーリエ係数としても捉えられることに注意されたい.

Example 2.1. テータ級数 $\theta(z) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2},\ q = e^{2\pi\sqrt{-1}z},\ z \in \mathbb{H}$ に対して, $\theta^4 \in M_2(\Gamma_0(4))$ であることが知られている (cf. [16, p.138-139]). モジュラー形式 θ^4 の n-th フーリエ係数は

$$a_n(\theta^4) = \sharp\{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = n\}$$

となる. 他方, $M_2(\Gamma_0(4)) = \langle E_2^{(2)}, E_2^{(4)} \rangle_{\mathbb{C}}$ となることが知られている. ただし, $E_2(z) = 1 - 24 \displaystyle\sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) q^n,\ \sigma_1(n) := \sum_{d \mid n} d$ に対して, $E_2^{(d)}(z) = (1-d)^{-1}(E_2(z) - dE_2(d)),\ d = 2, 4$ と定義する. よって, ある $a, b \in \mathbb{C}$ が存在して, $\theta^4 = aE_2^{(2)} + bE_2^{(4)}$ となるが, フーリエ係数を比較することで, $a = 0, b = 1$ を得るので,

$$\sharp\{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4 \mid n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = n\} = a_n(\theta^4) = a_n(E_2^{(4)}) = 8 \sum_{\substack{d \mid n \\ 4 \nmid d}} d$$

を得る．これはよく知られたLagrangeの四平方定理の保型形式を用いた証明である[1].

Example 2.2. エータ積によって得られる級数 $f(z)=\eta(z)\eta(23z)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{23n})=\sum_{n\geq 1}a_n(f)q^n=q-q^2-q^3+q^6+q^8-q^{13}-q^{16}+q^{23}+\cdots+2q^{59}+\cdots$ は $S_1(\Gamma_0(23),\chi)$ の元を定める．ただし, 2次指標 $\chi:(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})=\langle\bar{5}\rangle\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ は $\chi(\bar{5})=-1$ で定める．多項式 $h(x)=x^3-x+1\in\mathbb{Z}[x]$ を考え, 各素数 p に対して $h \bmod p$ を h_p と記す．このとき, 各素数 $p\neq 23$ に対して,

$$a_p=\begin{cases} 2 & (h_p\ \text{は}\ \mathbb{F}_p\ \text{上の1次式の積に分解}) \\ 0 & (h_p\ \text{は}\ \mathbb{F}_p\ \text{上1次式と既約2次式の積に分解}) \\ -1 & (h_p\ \text{は}\ \mathbb{F}_p\ \text{上既約}) \end{cases}$$

が成り立つ．このようにモジュラー尖点形式 f のフーリエ係数は多項式 h の相互法則 ([36, Section 6]) を支配している．

Example 2.3. 次数2のジーゲル上半空間 $\mathbb{H}_2=\{Z=X+Y\sqrt{-1}\in M_2(\mathbb{C})\mid {}^tZ=Z,\ \mathrm{Im}(Z)=Y>0\}$ を考える．$G=Sp_4=\{X\in M_4\mid {}^tXJ_2X=J_2\}$, $J_2=\begin{pmatrix}0_2 & I_2\\ -I_2 & 0_2\end{pmatrix}$ とすると, $G(\mathbb{R})$ の元 $\gamma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ および $Z\in\mathbb{H}_2$ に対して, $\gamma Z=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ と定める．また, $j(\gamma,Z)=CZ+D$ とおく．これは G の (canonical) 保型因子である．$\Gamma=G(\mathbb{Z})=\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ とおき, その部分群 $\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ 0_2 & D\end{pmatrix}\in\Gamma\right\}$ を考える．整数 $k\in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と複素変数 s に対して, Siegel-Eisenstein series を

$$E_k(Z,s):=\det(\mathrm{Im}(Z))^s\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\det(j(\gamma,Z))^{-k}|\det(j(\gamma,Z))|^{-2s},\ Z\in\mathbb{H}_2,\ s\in\mathbb{C}$$

と定めると, これは $\{(Z,s)\in\mathbb{H}_2\times\mathbb{C}\mid k+2\mathrm{Re}(s)>3\}$ において絶対一様収束し, さらに, 全 s-平面に有理型に解析接続される (cf. [22, Section 1])．それを再び $E_k(Z,s)$ と記す．Kohnen は各 $Z\in\mathbb{H}_2$ に対して, $E_2(Z,0)$ が有限であることを示し, そのフーリエ展開を計算した [17] ([21] に short proof がある)．$E_2(Z,0)$ は Z に関する正則関数とはならないが,

$$E_2(Z,0)=(\text{非正則な部分})+\sum_{T\in\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z})^*>0}A(T)q_T,\ q_T=e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(TZ)},\ Z\in\mathbb{H}_2$$

と展開される．ただし, $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z})^*>0$ は正定値半整数対称行列全体の成す集合．このとき, 正整数 m_1,m_2 であって, m_1m_2 が平方数でないものに対して, 次が成り立つ ([9, Section 2]):

$$\frac{1}{288}\sum_{\substack{T\in\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z})^*>0\\ \mathrm{diag}(T)=(m_1,m_2)}}A(T)=\text{Hecke 対応 } T_{m_1} \text{ と } T_{m_2} \text{ との交点数.}$$

ただし, $T=(t_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ に対して, $\mathrm{diag}(T):=(t_{11},t_{22})$ である．また, 整数 $m\geq 1$ に対して, Hecke 対応 T_m は $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 内の解析的集合 $\{(j(\tau),j(m\tau))\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\mid\tau\in\mathbb{H}\}$ に対応するアフィン代数曲線である (cf. [33])．ただし, j は (Felix Klein の)j-関数である．このように, $E_2(Z,0)$ の正則部分のフーリエ係数は幾何的意味をもつ (cf. [19])．

[1]ヤコビは楕円関数を用いた証明を与えた.

Example 2.4. 整数 $k \geq 6$ に対して, 志村, Kohnen の基本結果により $S_{2k} := S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ と半整数重さのモジュラー cusp forms の成す空間の plus 空間 $S^+_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ (cf. [16, Chapter IV]) との間に Hecke 作用素を保つ $\mathbb{C}$ 線形同型が存在することが知られている. これを志村対応という. 正規化された Hecke 固有形式 $f \in S_{2k}$ に対応する $S^+_{k+\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_0(4))$ の元を $\mathrm{Sh}(f)$ と表し f の志村リフトという. $\mathrm{Sh}(f) = \sum_{n\geq 1} c(n)q^n$ とフーリエ展開する. Kohnen-Zagier の結果 ([18]) により, 基本判別式 D であって $(-1)^k D > 0$ なるものに対して

$$\frac{L(k, f\otimes\chi_D)}{\langle f, f\rangle} = \frac{c(|D|)^2}{\langle g, g\rangle}\cdot\frac{\pi^k}{(k-1)!|D|^{k-\frac{1}{2}}} \tag{2.2}$$

が成り立つ. ただし, χ_D は判別式 D を持つ 2 次体に付随する 2 次指標であり, $f\otimes\chi_D$ は f の χ_D による捻りである. このように志村リフト $\mathrm{Sh}(f)$ の $|D|$-th フーリエ係数 $c(|D|)$ は $f\otimes\chi_D$ の L 関数の中心値と関係する.

3. 保型形式のフーリエ係数: 一般論

$G/\mathbb{Q}$ を連結簡約代数群[2]とする (cf. $G = GL_n,\ SL_n,\ PGL_n,\ GSp_{2n}, Sp_{2n}, SO(p,q), U(p,q), SU(p,q)$). ある整数 N をとり, G を一般線形群 $GL_N/\mathbb{Q}$ に埋め込んでおく: $\iota : G \hookrightarrow GL_N$. $G(\mathbb{Q})$ の離散部分群 Γ が数論的であるとは Γ と $\iota^{-1}(\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}))\cap G(\mathbb{Q})$ が通約可能[3]であるときをいう. $G(\mathbb{R})$ の元 g に対してそのノルムを, $\iota(g) = (g_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ とおくとき, $||g|| := \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq N} g_{ij}^2}$ と定める. $G(\mathbb{R})$ のリー代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) := T(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\langle X\otimes Y - Y\otimes X - [X,Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\rangle$, $T(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ の中心を $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ と表す[4]. $\mathfrak{g}$ の元 X と $G(\mathbb{R})$ 上の (ベクトル値) 関数 f に対して, $X\cdot f$ を

$$X\cdot f(g) := \left(\frac{d}{dt} f(g\exp(tX))\right)\Big|_{t=0}$$

と定め, この定義を $\mathbb{C}$ 線形に $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に延長し, さらには $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 上にも自然に延長しておく.

G の $\mathbb{Q}$-放物部分群 P とは G の $\mathbb{Q}$ 上の閉部分群であり, G/P が射影的代数多様体となるものである. そのような P に対して, $P = M_P N_P = M_P \ltimes N_P$ を Levi 分解とする. M_P は P に含まれる最大の reductive 部分であり, N_P は P に含まれる最大のユニポテント正規部分群である. 以下, P の Levi 分解を単に $P = MN$ と表すこともあるので注意されたい.

$G(\mathbb{R})$ の最大コンパクト部分群を K_∞ とし, K_∞ の有限次元複素表現 $\rho : K_\infty \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_\rho)$ を考える. また, Γ を $G(\mathbb{Q})$ の数論的部分群とする. このとき, 滑らかな V_ρ 値関数

$$f : G(\mathbb{R}) \longrightarrow V_\rho$$

が

(1) $f(\gamma g k_\infty) = \rho(k_\infty^{-1}),\ \gamma\in\Gamma,\ g\in G(\mathbb{R}),\ k_\infty\in K_\infty$;
(2) $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ のイデアル J であって, $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/J$ が有限となるものが存在して, $J\cdot f = 0$;
(3) f は緩増加, つまり, ある正定数 C と正整数 n が存在して, 任意の linear functional $l : V_\rho \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して, $|l\circ f(g)| \leq C||g||^n,\ {}^\forall g\in G(\mathbb{R})$,

[2]代数群 G が簡約であるとは, G は非自明な nomral unipotent 部分群を持たないときを言う.

[3]群 G の部分群 H, K が通約可能であるとは $[H : H\cap K], [K, H\cap K]$ が共に有限であるときをいう.

[4]G は半単純であるとし, その $\mathbb{Q}$-階数を r とするとき, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ は r 変数の $\mathbb{C}$ 上の多項式環と同型となることが知られている (Harish-Chandra 同型).

を満たすとき, f を (Γ, K_∞) に対する型 (ρ, J) の保型形式 (automorphic form) という (cf. [2, 1.3+1.5-(1)]). そのようなもの全体の成す空間を $\mathcal{A}(\Gamma, \rho, J, K_\infty)$ と表す. さらに次の条件を課すとき, f を尖点的保型形式 (cuspidal automorphic form) という:

(4) 任意の $\mathbb{Q}$-放物部分群 $P = M_P N_P \neq G$ に対して,

$$\int_{(N_P(\mathbb{R})\cap\Gamma)\backslash N_P(\mathbb{R})} f(ng)dn = 0, \ {}^\forall g \in G(\mathbb{R}).$$

尖点的保型形式全体の成す空間を $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\Gamma, \rho, J, K_\infty)$ と表す.

保型形式 $f \in \mathcal{A}(\Gamma, \rho, J, K_\infty)$ をとる. $\mathbb{Q}$-放物部分群 $P = MN$ および連続指標 $\psi : N(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して,

$$f_{N,\psi}(g) := \int_{(N(\mathbb{R})\cap\Gamma)\backslash N(\mathbb{R})} f(ng)\overline{\psi(n)}dn$$

を f の N に沿った指標 ψ に関するフーリエ係数という. ψ はアーベル商 $N(\mathbb{R})/[N(\mathbb{R}), N(\mathbb{R})]$ を経由するので, f の $[N(\mathbb{R}), N(\mathbb{R})]$ の作用が自明な部分の情報を見ていることに注意されたい. よって, このフーリエ係数を用いて, f 全体が" フーリエ展開" されるとは限らないので注意が必要である.

Example 3.1. 半単純群 G の対称領域 $G(\mathbb{R})/K_\infty$ が Hermitian tube domain であるとき (cf. $G = Sp_{2n}, SU(n,n), SU(n,n,H)^5,\ SO(2,n),\ E_{7,3}$), G は $\mathbb{Q}$-放物部分群 P であって, N_P がアーベルであるものを備える. G 上の保型形式 f の N に沿ったフーリエ係数は実際に N に沿ったフーリエ展開に現れる係数と対応する. 正則な部分は Example 2.3 で見たようにフーリエ係数は球関数 (この場合は指数関数 q_T と $\det(Y)$ の冪をかけたもの) の前に現れる数 $A(T)$ である ([27, 2 節]). 非正則な部分の記述に現れる球関数は一般には複雑になり, 幾つかの場合には計算されているが完全にフーリエ展開を書ききるには至っていない (どの場合に書き下されているかは [20], [14] 等を参照).

Example 3.2. 連結簡約群 G の $\mathbb{Q}$-放物部分群 $P = MN$ を考える. N は 2-step unipotency を持つと仮定すると, N の中心 Z は $Z = [N, N]$ を満たす. $W = N/Z$ とおくとこれは additive algebraic group となる. 連続指標 $\psi : N(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ は商 $W(\mathbb{R}) = N(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})$ を経由することに注意する. 保型形式 $f \in \mathcal{A}(\Gamma, \rho, J, K_\infty)$ に対して, N に沿った指標 ψ に関するフーリエ係数 $f_{N,\psi}$ は次のように現れる. 先ず, Z に沿った定数項

$$f_Z(g) := \int_{(Z(\mathbb{R})\cap\Gamma)\backslash Z(\mathbb{R})} f(zg)dz$$

を考える. このとき, $f_Z(zg) = f_Z(g),\ z \in Z(\mathbb{R})$ なので, f_Z はコンパクトアーベル群 $W_\Gamma\backslash W(\mathbb{R})$ の指標で展開ができる. ただし, W_Γ は $N(\mathbb{R}) \cap \Gamma$ の $W(\mathbb{R})$ への像を表す. この指標は連続指標 $\psi : N(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ であって, $N(\mathbb{R}) \cap \Gamma$ 上自明なものを渡るので,

$$f_Z = \sum_{\substack{\psi : N(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ \psi|_{N(\mathbb{R})\cap\Gamma} = 1}} f_{N,\psi} \tag{3.1}$$

という展開を得る. このようにフーリエ係数 $f_{N,\psi}$ は f の Z に沿った定数項 f_Z の展開に現れる. もう少し詳しく見ると, f は

$$f = \sum_{\substack{\varphi : Z(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ \varphi|_{Z(\mathbb{R})\cap\Gamma} \equiv \mathbf{1}}} f_{Z,\varphi},\ f_{Z,\varphi}(g) := \int_{(Z(\mathbb{R})\cap\Gamma)\backslash Z(\mathbb{R})} f(zg)\overline{\varphi(z)}dz \tag{3.2}$$

---

[5] H は $\mathbb{Q}$ 上の四元数代数.

と展開され, 連続指標 φ が自明指標 $\mathbf{1}$ のときが $f_Z = f_{Z,\mathbf{1}}$ である. 従って, 一般には f を記述するには非自明な φ に対しても $f_{Z,\varphi}$ を調べる必要がある. 一方, 例外群 G_2 のときには興味深いことに f_Z と f は等価な情報を持っていることが知られている (次節参照). 他方, $f_{Z,\varphi},\ \varphi \neq \mathbf{1}$ も十分に深い考察対象であり (G_2 の場合は [11, Appendix B],[23] を参照), 次の例で述べるフーリエヤコビ展開を用いて考察される.

Example 3.3. この例に関する内容は [13] を参照. 連結簡約群 G の $\mathbb{Q}$-放物部分群 $P = MN = NM = N \rtimes M$ をとる. Z_N を N の中心とする. 今, M の半単純部分群 H が存在して, $J = N \rtimes H$ がヤコビ群となっているとする. 定義より, $N = XYZ$ という分解をもつ. ただし, X は N の Lagrangian 部分群, Y は X の双対に対応する部分群であり, Z は N の中心である. この時, 非自明な加法的指標 $\psi : Z_N(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とシュワルツ関数 $\Phi \in \mathcal{S}(X(\mathbb{R}))$ に対して, $J(\mathbb{R})$ の metaplectic double covering $\widetilde{J(\mathbb{R})} = N(\mathbb{R}) \rtimes \widetilde{H(\mathbb{R})}$ 上のテータ関数 $\Theta_\psi(v\widetilde{h};\Phi)$ であって, $\Theta_\psi(zv\widetilde{h};\Phi) = \psi(z)\Theta_\psi(v\widetilde{h};\Phi),\ z \in Z_N(\mathbb{R})$ を満たすものを $\widetilde{J(\mathbb{R})}$ の Weil 表現の (lattice model を用いて) 定義することができる. このとき $G(\mathbb{R})$ 上の保型形式 $f \in \mathcal{A}(\Gamma,\rho,J,K_\infty)$ に対して,

$$f_{\psi,\Phi}(\widetilde{h}) := \int_{N(\mathbb{R})\cap\Gamma\backslash N(\mathbb{R})} f_{Z,\psi}(vh)\overline{\Theta_\psi(zv\widetilde{h};\Phi)}dv$$

を f の (ψ,Φ) におけるフーリエヤコビ係数という. ただし, h は $\widetilde{h}$ の $\widetilde{H(\mathbb{R})} \longrightarrow H(\mathbb{R})$ による像である. フーリエヤコビ係数 $f_{\psi,\Phi}(\widetilde{h})$ は $\widetilde{H(\mathbb{R})}$ 上の保型型式である.

Example 3.4. $G/\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群とする. B をボレル部分群とし, $B = TN$ と Levi 分解する. $\Delta = \Delta(B,T)$ を (B,T) に関する単純ルート全体の成す集合とする. また各元 $\alpha \in \Delta$ に対応する root space を $X_\alpha \subset N$ と記す. 連続指標 $\psi : N(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^1$ が非退化であるとは, 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, $\psi|_{X_\alpha(\mathbb{R})} \not\equiv \mathbf{1}$. そのような非退化指標 ψ に対し, 保型形式 $f \in \mathcal{A}(\Gamma,\rho,J,K_\infty)$ が ψ-generic であるとは $f_{N,\psi} \not\equiv 0$ となるときを言う. ψ-generic な f に対して, $f_{N,\psi}$ を Whittaker フーリエ係数といい, その数論的性質については森本氏の講演およびその報告集原稿を参照されたい.

4. G_2 上の四元数保型形式と Pollack の (ロバスト) フーリエ展開の理論

4.1. G_2 の定義.

G_2 を $\mathbb{Q}$ 上の分裂例外群 "G_2" とする. G_2 の単純ルートは α,β であり (α は short root, β は long root), positive roots 全体の成す集合は

$$\Phi(G_2)^+ = \{\alpha,\beta,\alpha+\beta,2\alpha+\beta,3\alpha+\beta,3\alpha+2\beta\}$$

となる. Roots 全体を $\Phi(G_2) := \Phi(G_2)^+ \cup (-\Phi(G_2)^+)$ とし, 各 root γ に対して, X_γ を root space (その元を $x_\gamma(t),\ t \in \mathbb{G}_a$ とかく), w_γ を Weyl 元とする. [11, Appendix C] では Pollack [31] に従って, G_2 を $SO(3,4)$ 内で明示したので興味ある読者はそちらも参照されたい.

集合 $\{\alpha\}$ に対応する G_2 の $\mathbb{Q}$-放物部分群 $P = MN$ に対してその unipotent part N は Heisenberg 群の構造をもつ. 実際,

$$N = X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$$

$$= \{n(a_1,a_2,a_3,a_4,t) := x_\beta(a_1)x_{\alpha+\beta}(a_2)x_{2\alpha+\beta}(a_3)x_{3\alpha+\beta}(a_4)x_{3\alpha+2\beta}(t) \mid a_1,\ldots,a_4,t \in \mathbb{G}_a\}.$$

で与えられ, 演算は

$$n(a_1,a_2,a_3,a_4,t_1)n(b_1,b_2,b_3,b_4,t_2) = n(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4,t_1+t_2-a_4b_1+3a_3b_2)$$

で与えられる．具体的には

$$n(a_1,a_2,a_3,a_4,t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_3 & 2a_2 & -a_1 & a_2^2-a_1a_3 & 2a_2a_3-a_1a_4-t \\ 0 & 1 & -a_4 & 2a_3 & -a_2 & -a_2a_3+t & a_3^2-a_2a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

N の中心は $Z_N = \{n(0,0,0,0,t) = x_{3\alpha+2\beta}(t) \mid t \in \mathbb{G}_a\}$ である．また, 座標を

$$n_1(a_1,a_2,a_3,a_4,t) := n(a_1,a_2,a_3,a_4,\frac{1}{2}t-(\frac{1}{2}a_1a_4-\frac{3}{2}a_2a_3)). \tag{4.1}$$

と修正し, $n_1(\mathbf{a},t) = n_1(a_1,a_2,a_3,a_4,t),\ \mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{G}_a^4$ と書くことにすると

$$n_1(\mathbf{a},t_1)n_1(\mathbf{b},t_2) = n_1(\mathbf{a}+\mathbf{b},t_1+t_2+\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle) \tag{4.2}$$

となる．ただし, $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = a_1b_4-3a_2b_3+3a_3b_2-a_4b_1,\ \mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3,a_4),\ \mathbf{b} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$. これより, N は Z_N を中心とする Heisenberg 群の構造をもつ.

また, $\langle *,*\rangle$ は

$$W := X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} \simeq N/Z_N.$$

上の symplectic form を定める．P の Levi factor は $M \simeq GL_2$ であり, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2$ に対応する M の元 $m = m(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ は

$$m(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} d & -cd & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ab & a(bc+1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{a} & -\frac{2cd}{a} & \frac{c^2d}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 2bc+1 & -c(bc+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ab^2}{d} & -\frac{2ab(bc+1)}{d} & \frac{a(bc+1)^2}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{bc+1}{d} & \frac{b}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

で与えられる．Determinant 指標 $\det : M \longrightarrow GL_1$ を上記同一視 $M \simeq GL_2$ と $\det : GL_2 \longrightarrow GL_1$ との合成で与え, それを $\det : P \longrightarrow \mathrm{GL}_1$ に延長しておく．直接計算で,

$$\mathrm{Ad}(m)(n_1(\mathbf{a},z)) = mn_1(\mathbf{a},z)m^{-1} = n_1(\det(m)^{-1}\rho_3(m)\mathbf{a},\det(m)z) \tag{4.3}$$

が示せる．ただし, $\rho_3(m)\mathbf{a}$ は同一視

$$W \simeq \mathrm{Sym}^3\mathrm{St}_2,\ \mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3,a_4) \longleftrightarrow f_{\mathbf{a}}(u,v) = a_1u^3+3a_2u^2v+3a_3uv^2+a_4v^3 \tag{4.4}$$

の下, 作用 $mf_{\mathbf{a}}(u,v) = f(du+bv,cu+av)$ に対応するものである．ここで, $\mathrm{Sym}^3\mathrm{St}_2$ は GL_2 の 2 次元標準表現 St の symmetric cubic 表現である．M の W への adjoint action は $\det^{-1}\otimes\rho_3$ であり, 同型 $W \simeq \det^{-1}\mathrm{St}_2 \otimes \mathrm{Sym}^3\mathrm{St}_2$ を誘導する．この作用は [31] で導入したものとは若干異なることに注意．Haar 測度が考えられる設定に於いて, P の modulus character は $\delta_P(p) = |\det(m)|^3,\ p = mn \in P = MN$ で与えられる.

任意の標数 0 の可換環 R に対して,

$$W(R) := \{\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3,a_4) := n(a_1,a_2,a_3,a_4,0) \mid a_1,a_4 \in R,\ a_2,a_3 \in \frac{1}{3}R\}$$

とおき, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in W(R)$ に対して, Freudenthal's quartic form を

$$q(\mathbf{a}) = -\frac{1}{27}\mathrm{disc}_x(f_{\mathbf{a}}(x,1)) = -3a_2^2a_3^2 + 4a_1a_3^3 + 4a_2^3a_4 - 6a_1a_2a_3a_4 + a_1^2a_4^2. \tag{4.5}$$

と定める.

4.2. G_2 **上の四元数保型形式 (quaternionic modular forms) の定義.** 以下では保型形式は $\mathbb{Q}$ 上の代数群上のアデール値上定義されたものを考える (cf. [2, Section 1.9]). 強近似定理より, Section 3 との定義との対応は容易に確認できる. $\mathbb{Q}$ のアデール環を $\mathbb{A}$ とし, その有限部分を $\mathbb{A}_{\mathbf{f}}$ と記す.

$G_2(\mathbb{R})$ の極大コンパクト群を K_∞ とする. $K_\infty \simeq \mathrm{SU}(2)_{3\alpha+2\beta} \times \mathrm{SU}(2)_\alpha$ が知られている. ただし, $\mathrm{SU}(2)_\gamma$ は $G_2(\mathbb{R})$ のコンパクト部分群で, その複素化の Lie 代数が $\mathfrak{sl}_{2,\gamma}$(γ に対する $\mathfrak{sl}_2$-triple) と同型となるものである. $G_2(\mathbb{R})$ の対称空間は実 14 次元であるが複素構造を持たない. よって正則離散系列表現 (Gelfand Kirillov 次元が小さい表現) を持たない. しかしながら, G_2 の場合におけるその代替物が, 四元数離散系列表現 $D_k,\ k \geq 2$ である ([10]). D_k の最小 K_∞-type は $(\tau_k, V_k),\ V_k = \mathrm{Sym}^{2k}(\mathbb{C}^2) \boxtimes \mathbf{1}$ で与えられ, 退化主系列表現への埋め込み

$$D_k \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{G_2(\mathbb{R})} \mathrm{sgn}^k(\det)|\det|^{k-\frac{1}{2}}$$

を持つことが知られている [10, Section 13](右辺は normalized induction).

以下では Gan-Gross-Savin [5, Section 7] に従って, $G_2(\mathbb{A})$ 上の四元数保型形式 (quaternionic modular forms) の定義を与える:

Definition 4.6. 滑らかな V_k-値関数 $F : G_2(\mathbb{A}) \longrightarrow V_k^\vee$ が重さ k の四元数保型形式 (quaternionic modular form) であるとは F が次の条件を満たすときを言う:

(1) $F(\gamma g \kappa_\infty) = \tau_k^\vee(\kappa_\infty)^{-1}F(g),\ g \in G_2(\mathbb{A}),\ \gamma \in G_2(\mathbb{Q}),\ \kappa_\infty \in K_\infty$;
(2) ある $G_2(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$ の開コンパクト部分群が U 存在して, $F(gu) = F(g)\ g \in G_2(\mathbb{A}),\ u \in U$;
(3) $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ のイデアル J であって, $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/J$ が有限となるものが存在して, $J \cdot f = 0$;
(4) 各 $g_{\mathbf{f}} \in G_2(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$ に対して $F(g_{\mathbf{f}}g_\infty)$ は $g_\infty \in G_2(\mathbb{R})$ について緩増加;
(5) F は D_k に付随する $(\mathfrak{g}, K_\infty)$ 加群を生成.

さらに, G_2 の任意の $\mathbb{Q}$-放物部分群の unipotent part に沿った定数項が 0 であるとき, F を四元数カスプ形式 (quaternionic cusp form) という.

4.3. **Pollack による四元数保型形式の (ロバスト) フーリエ展開.** 標準加法的指標 $\psi = \otimes_p' \psi_p : \mathbb{Q}\backslash\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $p < \infty$ に対しては, $\psi_p(x) = e^{-2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Frac}(x)}$ とし ($\mathrm{Frac}(x)$ は $x \in \mathbb{Q}_p$ の有理数部分), $p = \infty$ に対しては $\psi_\infty(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ と定める. 各 $t \in \mathbb{Q}$ に対して, $\psi_t : \mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\psi_t(*) = \psi(t*)$ によって定める. Section 4.1 の Heisenberg 放物群 $P = MN$ を思い出す. N の中心を Z_N とする. 今, $F : G_2(\mathbb{A}) \longrightarrow V_k^\vee$ を四元数保型形式とすると F は左 $Z_N(\mathbb{Q})$-不変なので, Z_N に沿った展開

$$F = \sum_{t \in \mathbb{Q}} F_t = F_0 + \sum_{t \in \mathbb{Q}^\times} F_t, \quad F_t(g) := \int_{Z_N(\mathbb{Q})\backslash Z_N(\mathbb{A})} F(zg)\overline{\psi_t(z)}dz \tag{4.7}$$

を得る. 定数項 Z_N に沿った F_0 および $F_t,\ t \neq 0$ は F の情報を引き継いでいる. 実際, [5, Lemma 8.5] を援用すると次が成り立つ ([11, Proposition 4.5]):

Proposition 4.1. 次は同値である:

(1) $F = 0$.
(2) $F_0 = 0$.
(3) 任意の $t \in \mathbb{Q}^\times$ に対して, $F_t = 0$.

(4) 任意に固定した $t \in \mathbb{Q}^\times$ に対して, $F_t = 0$.

よって, F を調べるために F_0 を考えても情報は落ちていないと考えてよい. 実際, [11, Theorem 1.1] により F_0 の情報から F が再構成される.

さて, Pollack はより一般の四元数保型形式に対して F_0 を N/Z_N に沿った明示的フーリエ展開を得た ([30]). Pollack はこれはフーリエ展開のロバスト理論と呼んでいる. それを G_2 の場合に論じたのが [31] である. 他方, 成田宏秋氏は $F_t, t \neq 0$ をフーリエヤコビ展開の理論を用いて調べており, そのテータ展開係数 (SL_2-部分) は連続スペクトラムに非自明に寄与することを解明した. この成果は著者には驚くべきものであった.

さて, Pollack のフーリエ展開がどのようなものかを説明する. 任意の quasi-character $N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ は $Z_N(\mathbb{A})$ 上自明であり, ある $w \in W(\mathbb{Q})$ を用いて $\psi_w(n) := \psi(\langle w, x\rangle)$, $n = n(x,t) \in N(\mathbb{A})$ と表せる. これより, $W = N/Z_N$ に沿った F_0 のフーリエ展開

$$F_0(g) = \sum_{w \in W(\mathbb{Q})} F_w(g), \quad F_w(g) = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} F(ng)\overline{\psi_w(n)}dn. \tag{4.8}$$

を得る. Aaron Pollack は球関数を計算することで F_w を明示した. それを強近似定理と岩澤分解を用いると, F_0 は本質的には

$$F_0(n(x)m) = F_{00}(m) + \sum_{\substack{w \in W(\mathbb{Q}) \\ w \geq 0}} a_F(w) e^{2\pi\sqrt{-1}\langle w,x\rangle} \mathcal{W}_w(m),$$

$n(x) := n(x,0) \in W(\mathbb{R}),\ m \in M(\mathbb{R})$ と表示される ([31, Theorem 3.4]). ただし, $\mathcal{W}_w(m)$ は Pollack の $V_k^\vee$-値球関数であり modified Bessel 関数を用いて表示される ([31, p.391]). また, $F_{00}(g) = \displaystyle\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} F(ng)dn$ は F_0 の N/Z_N に沿った先頭項である (F がカスプ形式なら 0 である). 和の指数に関しては, $w \in W(\mathbb{Q})$ に対して, 同型 (4.4) で対応する多項式を $f_w(z,1)$ とするとき, 条件 $w \geq 0$ は「$f_w(z,1)$ の根はすべて実数」という条件を意味する. さらに, $w \geq 0$ に対して, $f_w(z,1)$ が重根を持たないことと $q(w) \neq 0$ は同値である.

F が四元数カスプ形式の場合, Pollack [30, Corollary 1.2.3] はより精密な展開

$$F_0(n(x)m) = \sum_{\substack{w \in W(\mathbb{Q}) \\ w \geq 0,\ q(w) < 0}} a_F(w) e^{2\pi\sqrt{-1}\langle w,x\rangle} \mathcal{W}_w(m). \tag{4.9}$$

を得た ("$q(w) < 0$" は "下半" 対称空間を考えていることに対応). 冒頭でキーワードとして説明したフーリエ展開における「球関数」が $e^{2\pi\sqrt{-1}\langle w,x\rangle}\mathcal{W}_w(m)$ であり, その展開係数 $a_F(w)$ が F の数論的性質を秘めた重要な数となる. 本稿の目標は F が Gan-Gurevich リフトとよばれる四元数カスプ形式であるときにある一部の w に対して $a_F(w)$ の数論的性質を調べることである.

5. Gan-Gurevich リフト

この節の内容は [6] に従う. Gan-Gurevich リフトは Ginzburg が構成したリフト (Miyawaki lift 型のリフト) と例外テータリフトを組み合わせたハイブリッドリフトである. 以下このリフトについて簡単に説明する. [6] では任意の代数体上で議論しているがここでは簡単のため $\mathbb{Q}$ 上で考える.

先ず, Ginzburg が構成したリフト [7] について説明する. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の既約 cuspidal 表現 τ に対して, $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{A})$ への Waldspurger リフトを σ(既約 cuspidal 表現) とする. 一般に σ が存在するとも限らないが, 存在するための必要十分条件はインプシロン因子の言葉で与えられる ([6, Section 3.2] を参照). また, σ は存在したとしても一意ではない. そのような σ の同型類

全体の成す集合を global Waldspurger packet といい $\widetilde{A}_\tau$ で表す．各 $\sigma \in \widetilde{A}_\tau$ に対して, σ の Saito-Kurokawa リフト ([29]) により得られる $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{A})$ の既約 2 乗可積分表現を $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ に中心指標が自明となるように延長したものを $\mathrm{SK}(\sigma)$ と書く ($\mathrm{SK}(\sigma)$ は σ に対して常に存在する)．以下の構成の後半においては $\mathrm{SK}(\sigma)$ は cuspidal とならないように σ を選ぶが, そのような σ の存在は $L(\frac{1}{2},\tau) \neq 0$ と同値である ([6, Theorem 3.2-(iii)]).

代数群 GSp_8 の $\mathbb{Q}$-放物部分群 $Q_8 = MN$ で, $M \simeq GL_2 \times GSp_4$ となるものをとる．このとき, (normalized) 誘導表現 $\mathrm{Ind}_{Q_8(\mathbb{Q})}^{\mathrm{GSp}_8(\mathbb{A})}\delta_{Q_8}^s(\tau \otimes \mathrm{SK}(\sigma))$ に付随する Eisenstein series の $s = \frac{3}{14}$ における residue が張る $\mathrm{PGSp}_8(\mathbb{A})$ の既約 2 乗可積分表現を $\Pi(\sigma)$ と記す.

さて, τ_1, τ_2 を $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の既約 cuspidal 表現とし, それぞれ保型形式の成す L^2-空間の中で実現しておく．また τ_1 に対して, $\sigma_1 \in \widetilde{A}_{\tau_1}$ を選ぶ．このとき, $\Sigma(\sigma_1, \tau_2)$ を次の保型形式が張る $\mathrm{GSp}_6(\mathbb{A})$ の表現とする:

(5.1)

$$\theta_{\Pi(\sigma_1)}(f,\varphi)(g) := \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{A})} f(g, h\cdot s(g))\varphi(h\cdot s(g))dh,\ f \in \Pi(\sigma_1),\ \varphi \in \tau_2,\ g \in \mathrm{GSp}_6(\mathbb{A}).$$

ただし, $g \in GSp_6$ に対して, $s(g) \in GL_2$ は $(g, s(g)) \in (GSp_6 \times GL_2)^0 := \{(g_1, g_2) \in GSp_6 \times GL_2 \mid \nu(g_1) = \det(g_2)\}$ を満たすものを勝手にとってきたものである (例えば, $g \in Sp_6$ ならば $s(g) = I_2$). Ginzburg は $\Sigma(\sigma_1, \tau_2)$ は non-zero な $L^2(\mathrm{PGSp}_6(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{PGSp}_6(\mathbb{A}))$ な $\mathrm{PGSp}_6(\mathbb{A})$)-部分加群であることを示し, それが $L^2_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGSp}_6(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{PGSp}_6(\mathbb{A}))$ に含まれるためには $\Theta_{\mathrm{SK}(\sigma_1)}(\tau_2) = 0$ となることが必要十分条件であることを示した ([6, p.16, Proposition 4.3]). ただし, $\Theta_{\mathrm{SK}(\sigma_1)}(\tau_2)$ は $\mathrm{SK}(\sigma_1)$ をテータ核の類似として見て構成される PGL_2 から PGL_2 へのリフトであり, (5.1) と同様にして定義される ([6, Section 4.2] を参照).

ここで, $L(\frac{1}{2}, \tau_1) \neq 0$ を仮定することで, 先に説明したように τ_1 の Waldspurger リフト σ_1 であって, $\mathrm{SK}(\sigma_1)$ は cuspidal とならないように選ぶことができる．これより, $\Theta_{\mathrm{SK}(\sigma_1)}(\tau_2) = 0$ を得るので, non-zero な (既約とは限らない)cuspidal 表現 $\Sigma(\sigma_1, \tau_2)$ を得る．以上が Ginzburg リフトの構成の概要である.

Gan-Gurevich は例外 dual pair $(G_2, PGSp_6) \subset E_7$ (E_7 は分裂例外 E_7) に対する例外テータ対応 $\Theta_{E_7}^{C_3}$ の $\Sigma(\sigma_1, \tau_2)$ の像 $\Theta_{E_7}^{C_3}(\Sigma(\sigma_1, \tau_2))$ のある idex に対するフーリエ展開および (分岐素点を除いた部分)L 関数計算し, 次を示した．[6] では $\tau_1 \not\simeq \tau_2$ のとき, $\Theta_{E_7}^{C_3}(\Sigma(\sigma_1, \tau_2)) = 0$ を示しているので, $\tau_1 \simeq \tau_2$ の場合が本質であることに注意する:

Theorem 5.1. [6, p.3, Main theorem, Proposition 5.1,5.2,5.3, Appendix 14] $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の既約 cuspidal 表現 τ は $L(\frac{1}{2}, \tau) \neq 0$ を満たすと仮定し, τ の Waldspurger リフト σ であって, $\mathrm{SK}(\sigma)$ は cuspidal とならないものをとる．このとき, $\Theta_{E_7}^{C_3}(\Sigma(\sigma, \tau))$ は $G_2(\mathbb{A})$ の non-zero な (既約とは限らない)cuspidal 表現であり, その既約成分 Π はいずれも $\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G_2(\mathbb{A})}\tau \otimes |\det|^{\frac{1}{2}}$ の既約成分と nearly equivalent である．さらに, S を無限素点および τ の分岐素点全体の成す集合とするとき, Π の標準部分 L 関数は

$$L^S(s, \Pi, \mathrm{St}) = L^S(s, \mathrm{Sym}^2\tau)L^S(s + \frac{1}{2}, \tau)L^S(s - \frac{1}{2}, \tau)$$

を満たす.

Definition 5.2. 上記主張の $\Theta_{E_7}^{C_3}(\Sigma(\sigma, \tau))$ を τ の Gan-Gurevich リフトという.

Gan-Gurevich リフトの既約性は判定されておらず, また, 無限素点における表現がどのようなものであるか調べられていなかったため, 著者は Kim 氏との共同研究で次を確認した:

Theorem 5.2. ([11, Appendix A]) $k \geq 6$ とし, new form $f \in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ は $L(k, f) \neq 0$ を満たすと仮定する (この仮定から k は even となる). New form f に付随する $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の既約

cuspidal 表現を π_f とする．このとき, π_f の Gan-Gurevich リフト $\Pi_f := \Theta_{E_7}^{C_3}(\Sigma(\sigma,\pi_f))$ は既約 cuspidal 表現であり, 無限素点における成分は D_k と同型である．特に, Π_f は重さ k の四元数カスプ形式で生成される．また標準 L 関数は

$$L(s,\Pi_f,\mathrm{St}) = L(s,\mathrm{Sym}^2\pi_f)L(s+\frac{1}{2},\pi_f)L(s-\frac{1}{2},\pi_f)$$

で与えられる．

6. Gross の予想

この節では Gross が David Pollack 氏に宛てた手紙に書かれてある予想について述べる．重さ k, $G_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ で固定される四元数カスプ形式 $F: G_2(\mathbb{A}) \longrightarrow V_k^\vee$ とその Z_N に沿った定数項 F_0 のフーリエ展開 (4.9)

$$F_0(n(x)m) = \sum_{\substack{w\in W(\mathbb{Q})\\ w\geq 0,\ q(w)<0}} a_F(w)e^{2\pi\sqrt{-1}\langle w,x\rangle}\mathcal{W}_w(m),\ n(x)m \in W(\mathbb{R})N(\mathbb{R})$$

を思い出す．同型 (4.4) により $W(\mathbb{Z})$ の元 $w=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $a_1,a_4\in\mathbb{Z}$, $a_2,a_3\in\frac{1}{3}\mathbb{Z}$ に対応する cubic form を $p_w(u,v)=a_1u^3+3a_2u^2v+3a_3uv^2+a_4v^3$ とする．このとき $\mathbb{Z}$ 上階数 3 の可換代数 $A_w=\mathbb{Z}\cdot 1+\mathbb{Z}\cdot\alpha+\mathbb{Z}\cdot\beta$ を以下の構造で与える ([5, Proposition 4.2]):

$$\begin{cases} \alpha\beta = -a_1a_4, \\ \alpha^2 = -3a_1a_3+3a_2\alpha-a_1\beta, \\ \beta^2 = -3a_2a_4+a_4\alpha-3a_3\beta. \end{cases}$$

以下, w は $q(w)<0$ および $w\geq 0$ を満たすと仮定する．このとき, $E_w := A_w\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ 上エタールかつ $E_w\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}^3$ となる (実際には $q(w)\neq 0$, $w\geq 0$ の条件のみでそうなる)．環 A_w が E_w の極大整環であるとき, A_w は maximal であるという．さらに, Artin 表現 $\rho_{A_w}: G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を $\zeta_{A_w}(s)=\zeta(s)L(s,\rho_{A_w})$ によって定義する (cf. [32, Section 3])．また, $L(s,f\otimes\rho_{A_w})$ を (unnormalized) Rankin-Selberg L で $s=k$ が central value となるものとする．以上で, Gross 予想を述べる準備が整った．

Conjecture 6.1. (Gross の予想 [8]) 偶数 $k\geq 6$ および new form $f\in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ をとり, $\mathbb{Q}_f=\mathbb{Q}(a_n(f)\mid n\geq 1)$ を f の Hecke 体とする．このとき, f に対して, 重さ k の四元数カスプ形式 F_f が存在して次を満たす:

(1) 適当な正規化の下, $a_{F_f}(w)\in\mathbb{Q}_f$ が任意の maximal な w に対して成立する．
(2) 任意の maximal な w に対して

$$\frac{L(k,f\otimes\rho_{A_w})}{\langle f,f\rangle} = \frac{a_{F_f}(w)^2}{\langle F_f,F_f\rangle}\cdot\frac{\pi^{2k}}{((k-1)!)^2|q(w)|^{k-\frac{1}{2}}}$$

が成立する．ただし, $\langle *,*\rangle$ は Petersson 内積である．

上記の予想の 2 番目の主張は Kohnen-Gross の公式 (2.2) の類似である．

7. 主結果と証明のアイデア

この節では [11] の主結果である「F_f に対する Gross 予想の部分的解決」の証明のアイデアを紹介する．主な道具は退化主系列表現における退化 Whittaker 関数および global Fourier-Jacobi 展開と local Fourier-Jacobi 写像との整合性である．

偶数 $k\geq 6$ をとる．New form $f\in S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約 cuspidal 表現 $\pi=\pi_f=\otimes'_p\pi_p=\pi_{\mathbf{f}}\otimes\pi_\infty$ を考える．以下通して, $L(k,f)\neq 0$ を仮定する．任意の有限

素点 p において, $\pi_p = \pi(\mu_p, \mu_p^{-1})$, $\mu_p : \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ と表すとき, $G_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現 $\Pi_p = \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G_2(\mathbb{Q}_p)} \mu_p \circ \det$ (normalized induction) を考える. 無限素点においては, 四元数離散系列表現 $\Pi_\infty = D_k$ を考える. 今, $L(k,f) \neq 0$ を仮定しているので, Gan-Gurevich リフト F_f に付随する $G_2(\mathbb{A})$ の保型表現は

$$\Pi_f := \otimes_p' \Pi_p$$

と同型になる. 各 $w \in W(\mathbb{Q})$, $q(w) < 0$, に対して Jacquet 積分を用いることで functionals

$$\widetilde{\mathbf{w}}_w^{\mu_p} \in \mathrm{Hom}_{N(\mathbb{Q}_p)}(\Pi_p, \mathbb{C}(\psi_{w,p})),\ p < \infty, \quad W_w^{(k-\frac{1}{2})} \in \mathrm{Hom}_{N(\mathbb{R})}(\Pi_\infty, \mathbb{C}(\psi_{w,\infty})),$$

を対応させせることができる. ただし, $\psi_w = \otimes_p' \psi_{w,p} : N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ は $\psi_w(n(x,t)) = \psi(\langle w, x \rangle)$ で定義される. 有限素点の場合は $q(w) \neq 0$ という条件のみで, $\dim(\mathrm{Hom}_{N(\mathbb{Q}_p)}(\Pi_p, \mathbb{C}(\psi_{w,p}))) = 1$ が示せる. 他方, 無限素点においては $q(w) < 0$ の仮定の下, $\dim(\mathrm{Hom}_{N(\mathbb{R})}(\Pi_\infty, \mathbb{C}(\psi_{w,\infty}))) = 1$ が示せる ([11, Section 6]). Gan-Gurevich リフト Π_f の L^2 空間における実現

$$\Pi \hookrightarrow L^2_{\mathrm{cusp}}(G_2(\mathbb{Q})\backslash G_2(\mathbb{A}))$$

を考え, $\phi = \otimes_p' \phi_p \in \Pi_f$ の上記実現における像を $F_f(*;\phi)$ と記す.

Theorem 7.1. 上記の設定の下, $F_f(*;\phi)$ は次のように展開される:

$$F_f(g;\phi) = \sum_{s \in \mathbb{Q}} F_{(s,0)}(g;\phi) + \sum_{\gamma \in w_\beta X_\beta(\mathbb{Q})} \sum_{s \in \mathbb{Q}^\times} F_{(s,0)}(\gamma g;\phi),\ g = (g_p)_p \in G_2(\mathbb{A}). \tag{7.1}$$

ただし,

$$F_{(s,0)}(g;\phi) := \sum_{\substack{w=(a_1,a_2,a_3,s) \in W(\mathbb{Q})_{\geq 0} \\ q(w)<0}} C_w^{\mu_{\mathbf{f}}}(F_f) \Big(\prod_{p<\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^{\mu_p}_{\mathrm{Ad}(w_\alpha)w}(g_p \cdot \phi_p) \Big) W^{(k-\frac{1}{2})}_{\mathrm{Ad}(w_\alpha)w}(g_\infty \cdot \phi_\infty)$$

であり, $C_w^{\mu_{\mathbf{f}}}(F_f) \in \mathbb{C}$ である.

不分岐ベクトル $\phi_{\mathbf{f}} = \otimes_{p<\infty}' \phi_p \in \Pi_{\mathbf{f}}^{G_2(\widehat{\mathbb{Z}})}$, $\phi_{\mathbf{f}}(1_{\mathbf{f}}) = 1$ および $\phi_\infty \in V_k \subset D_k$ を適切に選ぶ. このとき, $F_f := F_f(*;\phi)$ に対して, フーリエ係数 $C_w^{\mu_{\mathbf{f}}}(F_f)$ を調べたい.

以下では, $w = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in W(\mathbb{Z})_{\geq 0} := W(\mathbb{Z}) \cap W(\mathbb{Q})_{\geq 0}$, $q(w) < 0$ であって, E_w は $\mathbb{Q}^3$ かまたは $\mathbb{Q} \times K$ (K は 2 次体) となるものを考える. 後者の場合は $w \geq 0$ から K は実 2 次となる. このとき, ある $m \in M(\mathbb{Q})$ を用いて $w = \mathrm{Ad}(m'^{-1})(t, 0, S, 0)$ と書くことができる. ただし, $m' = \mathrm{Ad}(w_\alpha)(m)$ であり, $t, S \in \mathbb{Q}$ は $t < 0$ かつ $S > 0$ を満たす.

Theorem 7.2. 上記, $w = \mathrm{Ad}(m'^{-1})(t, 0, \frac{S}{3}, 0) \in W(\mathbb{Q})$, $m' = \mathrm{Ad}(w_\alpha)(m)$ に対して, ある零でない定数 $C(S)$ が存在して,

$$C_w^{\mu_{\mathbf{f}}}(F_f) = C(S)\mu_{\mathbf{f}}(\det(m))^{-1}\mu_{\mathbf{f}}(S)^{-1}c_{tS}$$

が成り立つ. ただし, $\mu_{\mathbf{f}} = \otimes_{p<\infty}' \mu_p$ であり, c_{tS} は f の志村リフト $g := \mathrm{Sh}(f)$ の (tS)-*th* フーリエ係数である.

応用として, 例えば, 平方因子を持たない整数 $t \in \mathbb{Z}_{<-1}$ で $-t$ が実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-t})$ の基本判別式になっているものに対して, $w = (t, 0, \frac{1}{3}, 0)$ (m は $M(\mathbb{Q})$ の単位元のとき) を考えると,

$$C_w^{\mu_{\mathbf{f}}}(F_f)^2 = C(1)^2 c_t^2$$

となる. Kohnen-Zagier の公式 (2.2) より c_t^2 の部分は $L(k, f \otimes \chi_{\mathbb{Q}(\sqrt{-t})/\mathbb{Q}})$ と関係付けられるので, Petersson 内積 $\langle g, g \rangle$ と $\langle F_f, F_f \rangle$ とを結びつけることができれば, 上記 w に対して Gross 予想が Theorem 7.2 から従う.

主定理を $t = -1$, $S = 1$ として, 応用として次が得られる.

Corollary 7.3. $E_w \simeq \mathbb{Q}^3$ を満たす元 $w \in W(\mathbb{Q})$ に対して, $C_w^{\mu_{\mathfrak{f}}}(F_f)$ は非零定数と $L(k,f)$ との積である. 特に, そのような w に対しては $C_w^{\mu_{\mathfrak{f}}}(F_f) \neq 0$ である.

8. 今後の展望と関連する話題

主定理 (Theorem 7.2) は G_2 の場合の Arthur 予想を仮定することで, レベル N が squarefree の場合の $S_k(\Gamma_0(N))$, $k \geq 2$ に対する Gan-Gurevich リフトに対しても同様に証明される, それが [11] の主定理である. 他方, 最近 [1] において[6], CM form に対して, 同様の w に対して, Gross 予想が部分的に証明された. 我々の設定ではレベルは squarefree なので, CM form を含まない. よって, [1] との結果とは排反である.

残された問題は E_w が体の場合である. この場合は E_w は Galois cubic または non-Galois cubic のいずれかであり, それは $D := -q(w) > 0$ が平方数かどうかで決まる. 今, E_w への f の cubic base change を $f_{E_w} := \mathrm{BC}_{E_w}(f)$ とすると, f_{E_w} は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{E_w})$ 上の Hilbert cusp form となる. そこで, f_{E_w} の Gan-Gurevich リフトを $F_{f_{E_w}}$ とする. このとき, $E_w \otimes_{\mathbb{Q}} E_w$ は E_w^3 または $E_w \times E_w(\sqrt{D})$ となる. よって, 基礎体を cubic 拡大 E_w に挙げると基礎体が $\mathbb{Q}$ の場合の状況になる. そこで, index に対して, $F_{f_{E_w}}$ のフーリエ展開を調べることで間接的に Gross 予想を証明する方法を Henry H Kim 氏, 及び池田保氏と現在共同で考察中である. また, その中で池田氏により, Gross 予想の GGP 予想からの formulation も考察されており, 今後の進展を期待している.

他方, 四元数保型形式 F に対して展開 (4.7)

$$F = \sum_{t\in\mathbb{Q}} F_t = F_0 + \sum_{t\in\mathbb{Q}^\times} F_t, \quad F_t(g) := \int_{Z_N(\mathbb{Q})\backslash Z_N(\mathbb{A})} F(zg)\overline{\psi_t(z)}dz$$

を思い出すと, F_t, $t \neq 0$ のフーリエヤコビ展開を研究する問題は興味深い問題と思われる. 前述したように成田氏は [23] において F_t の楕円部分の解析を表現論的に行った. F_t の研究はこれから発展することを期待したい. 少なくとも, 最初の課題として種々の Eisenstein series に対してフーリエヤコビ展開がどのようなものであるかは完全に理解されるべきである. そのためにはフーリエ係数の明示公式 (cf. [15],[34],[12]) などが不分岐指標以外の場合にも必要であり, 今後この部分の研究が進展することを期待したい.

9. G_2 の研究についての回想

著者は 2019 年に Wee Teck Gan 氏により NUS に招待された際，Gross が David Pollack に宛てた手紙のコピーを，本研究に対する励ましの言葉とともに受け取った．その後，論文 [11] を執筆するに至るまで，Henry H. Kim 氏と何度も議論を重ねてきたが，G_2 に対する Ikeda type 構成については，どうしてもある段階で本質的な困難に直面し，試みは繰り返し失敗に終わった（ある時には，構成できたと思ったものが実際には 0 であったこともあった）．

こうした困難については，ここ数年，成田氏と問題点を共有しながら議論を重ねることで，どの辺りに問題の本質があるのかが徐々に見えてきた．その過程で，表現論的に捉えられる Gan–Gurevich リフトに注目し，少なくとも部分的にでもフーリエ展開を理解するという方向へと問題を転換したことが，一つの突破口となった．

[6]彼らは CM 楕円カスプ形式から $U(1)$ のユニタリ Hecke 指標を対応させ, それを先ず, テータリフトにより $PU(3)$ へリフトする. Cubic algebra E_w, $w \in W(\mathbb{Q})_{\geq 0}$ の型に応じて, リフトを例外 dual pair $PU(3)\times G_2 \subset E_6$ (E_6 は quasi-split adjoint group of type E_6) を用いて G_2 へリフトする. E_6 の $\mathbb{Q}$-rank は $E_w \simeq \mathbb{Q}^3$ なら 6 で (特に split), $E_w \simeq \mathbb{Q}\times K$ ($K/\mathbb{Q}$ は 2 次体) のときは 4.

10. 謝辞

この歴史ある集会において講演の機会をお与えくださったオーガナイザーの先生方に，心より感謝申し上げます．特に，平野 幹 先生，武田 秀一郎 先生，金子 昌信 先生には大変お世話になりました．ここに記して深く感謝の意を表します．

References

[1] P. Bakić, A. Horawa, S-D. Li-Huerta, N. Sweeting, Gross's conjecture: the dihedral case, arXiv:2510.03476.
[2] A. Borel and H. Jacquet, Automorphic forms and automorphic representations. With a supplement "On the notion of an automorphic representation" by R. P. Langlands. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, pp. 189–207, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.
[3] F. Diamond and J. Shurman, A first course in modular forms. Graduate Texts in Mathematics, 228. Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+436 pp.
[4] 土井 公二 三宅 敏恒, 保型形式と整数論, 紀伊国屋数学叢書 7, 紀伊国屋書店, 1976.
[5] W-T. Gan, B. Gross and G. Savin, *Fourier coefficients of modular forms on G_2*, Duke Math. J. **115** (2002), 105–169.
[6] W-T. Gan and N. Gurevich, *CAP representations of G_2 and the spin L-function of $PGSp_6$*, Israel J. Math. **170** (2009), 1-52.
[7] D. Ginzburg, A construction of CAP representations in classical groups. Int. Math. Res. Not. 2003, no. 20, 1123–1140.
[8] B. Gross, Letter to David Pollack, 2000.
[9] B. Gross and K. Keating, On the intersection of modular correspondences. Invent. Math. 112 (1993), no. 2, 225–245.
[10] B. Gross and N-R. Wallach, On quaternionic discrete series representations, and their continuations. J. Reine Angew. Math. 481 (1996), 73–123.
[11] Henry-H. Kim and T. Yamauchi, On the Fourier expansion of Gan-Gurevich lifts on the exceptional group of type G_2, arXiv:2411.16953.
[12] J. Hundley, Y-R. Vega, and V. Scharaschkin, On a Theorem of Jiang and Rallis, arXiv:2507.18757.
[13] T. Ikeda, *On the theory of Jacobi forms and Fourier-Jacobi coefficients of Eisenstein series*, J. Math. Kyoto Univ. **34** (1994), no. 3, 615–636.
[14] 石井 卓, 非正則 2 次ジーゲル保型形式のフーリエ展開に現れる特殊関数, 第 65 回 代数学シンポジウム, 2020 年 (9 月 1 日（火）〜9 月 4 日（金）).
[15] D. Jiang and S. Rallis, Fourier coefficients of Eisenstein series of the exceptional group of type G_2. Pacific J. Math. 181 (1997), no. 2, 281–314.
[16] N. Koblitz, Neal Introduction to elliptic curves and modular forms. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 97. Springer-Verlag, New York, 1993. x+248 pp.
[17] W. Kohnen, Class numbers, Jacobi forms and Siegel-Eisenstein series of weight 2 on $Sp_2(\mathbb{Z})$. Math. Z. 213 (1993), no. 1, 75–95.
[18] W. Kohnen and D. Zagier, Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip. Invent. Math. 64 (1981), no. 2, 175–198.
[19] S-S. Kudla, Algebraic cycles on Shimura varieties of orthogonal type. Duke Math. J. 86 (1997), no. 1, 39–78.
[20] T. Miyazaki, The generalized Whittaker functions for $Sp(2,\mathbb{R})$ and the gamma factor of the Andrianov L-function. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7 (2000), no. 2, 241–295.
[21] S. Nagaoka, A note on the Siegel-Eisenstein series of weight 2 on $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$. Manuscripta Math. 77 (1992), no. 1, 71–88.
[22] 長岡 昇勇, Weight の小さな Siegel-Eisenstein 級数について, 第 2 回整数論オータムワークショップ,「Eisenstein 級数について」, (1999), p.16-34. http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/ ibukiyam/proceedings.html より入手可能.
[23] H. Narita, *Fourier-Jacobi expansion of automorphic forms generating quaternionic discrete series*, preprint, November 24, 2024.

[24] S. Niwa, On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2. Nagoya Math. J. 121 (1991), 171–184.
[25] 織田 孝幸, 非正則な調和的保型形式 "入門", 第 5 回整数論サマースクール「Siegel 保型形式入門」 (1997) p.123-133. http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/ ibukiyam/proceedings.html より入手可能.
[26] ———, 保型形式の数論のための実解析, 雑誌数学, 1998 年 50 巻 4 号 p. 350-357.
[27] ———, 保型形式, 球関数, 量子可積分系, 数理科学 保型形式 数理物理における究極理論への鍵, 2000 年 1 月, p.43-50.
[28] ———, Lie 群上の特殊関数・局所対称空間の幾何・保型的 L 関数, 2003 年 2003 巻 Autumn-Meeting1 号 p. 8-21. J-Stage からオンライン上で入手可能.
[29] I-I. Piatetski-Shapiro, On the Saito-Kurokawa lifting. Invent. Math. 71 (1983), no. 2, 309–338.
[30] A. Pollack, The Fourier expansion of modular forms on quaternionic exceptional groups. Duke Math. J. 169 (2020), no. 7, 1209–1280.
[31] ———, Modular forms on G_2 and their standard L-function. Relative trace formulas, 379–427, Simons Symp., Springer, Cham, [2021], ©2021.
[32] A. Shankar, A. Södergren, and N. Templier, *Central values of zeta functions of non-Galois cubic fields*, Inventiones mathematicae https://doi.org/10.1007/s00222-025-01373-6.
[33] G. Vogel, Modular polynomials. Astérisque No. 312 (2007), 1–7.
[34] W. Xiong, On certain Fourier coefficients of Eisenstein series on G_2. Pacific J. Math. 289 (2017), no. 1, 235–255.
[35] 山内 卓也, 保型形式と代数幾何, ガロア表現 織田孝幸氏の哲学に魅せられて, ρ から観た π の世界, 数理科学 2021 年 02 月号.
[36] ———, 5 次 DWORK 族に付随する法 2 ガロア表現の保型性とある 5 次 3 項多項式の相互法則について (代数的整数論とその周辺). 数理解析研究所講究録. 2022, 2225: 149-162.

山内卓也
東北大学大学院 理学研究科
e-mail: yamauchi@math.tohoku.ac.jp

スーパー代数群の既約表現のパラメータ集合について

柴田 大樹（岡山理科大学 理学部）

1. はじめに

表現論の研究を行うにあたり「その既約表現の性質を調べよ」というのは極めて基本的な問いである．古典群（$\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}_{2n}$）を含む代数群の大きなクラスである連結・分裂簡約群は，Jantzen の教科書 [Jan03] でもメインの研究対象として扱われており，ルート・データで記述されとても扱いやすいクラスである．その表現論もまたルートの言葉で組み合わせ論的に記述され，現在に至るまでかなりのことが理解されてきている．例えば既約表現はトーラスの指標群の元（ウェイト）から実質的に誘導表現により構成され，これらの既約表現たちの集合のパラメータ付けも完全にルート系の条件として記述することができる．その結果として，ヤング図形のような組み合わせ的対象と深い関係があることが示唆される．

一方で，スーパー代数群においてルート・データである程度記述できるようなクラスは種々の具体例が以前から知られておりその表現論も個別に研究されていたが，[Shi20] にて dense big cell の理論の考え方を用いることで，既約表現の構成を統一的にすることができた．しかし，非スーパーのときのように既約表現の性質やパラメータ集合 $\Lambda^\flat$ の決定は（リー・スーパー代数のレベルにおいても）非常に難しい問題として現在もなお残っている．ただし，具体的ないくつかのスーパー代数群（$\mathbb{GL}_{m|n}, \mathbb{Q}_n, \mathbb{SpO}_{2n|\ell}$ など）に対しては，個々の特殊事情を上手く解析することでそれぞれ深い研究がなされてきており，例えばパラメータ集合 $\Lambda^\flat$ の決定は既になされてきている（[BruKuj03, BruKle03, ShuWan08]）．他にもある特殊な条件を満たすスーパー代数群に関しては，Kac 加群のようなよい “踏み台” があることで，非スーパーのときと並行した議論を行えることが分かっている [Shi21].

本稿では，スーパー代数群のうち “ルート系” がよく振舞うような（$\mathbb{GL}_{m|n}, \mathbb{Q}_n, \mathbb{SpO}_{2n|\ell}$ を含む）大きなクラスに対して，ルート系の言葉で書かれた（計算可能な）集合 $\Lambda^\star$ を定義し，個々の特殊事情を用いることなくパラメータ集合 $\Lambda^\flat$ がこの $\Lambda^\star$ に包含されることを示す．最後に具体的ないくつかの場合に等号 $\Lambda^\flat = \Lambda^\star$ が成り立つことをみていく．

謝辞. 第 70 回代数学シンポジウムにおいて，講演の機会を与えて下さった関係者の皆様にこの場を借りて御礼申し上げます．本研究は JSPS KAKENHI (22K13905) の助成を受けたものです．

2. 代数群とその既約表現

本稿を通して種々の代数系（代数・余代数・ホップ代数など）は固定した体 $\Bbbk$ 上で考える．

2.1. **代数群の定義と例.** 本稿ではアフィン代数群スキームのことを単に**代数群**という．すなわち代数群 G とは可換代数の圏 Alg から群の圏 Grp への表現可能関手であり，その表現対象 $\mathcal{O}(\mathrm{G})$ が有限生成であるもののことをいう．米田の補題により群構造を反映して $\mathcal{O}(\mathrm{G})$ には可換ホップ代数の構造が入り，ホップ代数の視点からも代数群を研究していくことが可能である．

例 2.1. 可換代数 R に対して，素朴には特殊線型群は $\mathrm{SL}_2(R)=\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathsf{Mat}_2(R)\;\middle|\;ad-bc=1\right\}$ という行列らからなる集合であり，これは行列の積によって群をなす．このようにして自然に関手 $\mathrm{SL}_2:\mathsf{Alg}\to\mathsf{Grp}$ を得たことになる．さらに

$$\mathrm{SL}_2(R)\to\mathsf{Alg}(\Bbbk[A,B,C,D]/(AD-BC),R);\quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\mapsto\big(A\mapsto a,B\mapsto b,C\mapsto c,D\mapsto d\big)$$

が全単射であることが分かるので，SL_2 は有限生成代数 $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)=\Bbbk[A,B,C,D]/(AD-BC)$ によって表現される関手であり SL_2 は代数群と分かる．そして SL_2 の群構造である積・単位元・逆元を反映して，$\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)$ には余積 $\Delta:\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)\to\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)\otimes\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)$・余単位射 $\varepsilon:\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)\to\Bbbk$・アンチポード $S:\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)\to\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)$ がそれぞれ定まり，明示的には

$$\begin{pmatrix}\Delta(A) & \Delta(B)\\ \Delta(C) & \Delta(D)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\otimes A+B\otimes C & A\otimes B+B\otimes D\\ C\otimes A+D\otimes C & C\otimes B+D\otimes D\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\varepsilon(A) & \varepsilon(B)\\ \varepsilon(C) & \varepsilon(D)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}S(A) & S(B)\\ S(C) & S(D)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D & -B\\ -C & A\end{pmatrix}$$

で与えられる．これで $\mathcal{O}(\mathrm{SL}_2)$ が実際に可換ホップ代数を成すことは容易に確かめられる． □

一般線型群は代数群の代表例であり

$$\mathrm{GL}_n(R):=\{g\in\mathsf{Mat}_n(R)\mid\mathsf{det}(g)\neq 0\}\qquad(R\text{ は可換代数})$$

で与えられる．ただし，群構造は通常の行列群のものを入れる．実際，表現対象は $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_n)=\Bbbk[T_{ij},D\mid 1\leqslant i,j\leqslant n]/(D.\mathsf{det}(T_{ij})-1)$ である．他にも代数群の大きなクラスの例としては，有限次元半単純リー代数とその忠実表現から構成される **Chevalley 群**（半単純代数群）と呼ばれるものがある．例えば，特殊線型群 $\mathrm{SL}_n(R)=\left\{g\in\mathrm{GL}_n(R)\;\middle|\;\mathsf{det}(g)=1\right\}$ や直交群 $\mathrm{SO}_n(R):=\left\{g\in\mathrm{SL}_n(R)\;\middle|\;{}^{\mathsf{t}}g\,J_n\,g=J_n\right\}$ や斜交群 $\mathrm{Sp}_{2n}(R):=\left\{g\in\mathrm{SL}_n(R)\;\middle|\;{}^{\mathsf{t}}g\,J'_{2n}\,g=J'_{2n}\right\}$ が Chevalley 群の例である．ここで ${}^{\mathsf{t}}g$ は g の転置行列であり，

$$J_{2m+1}=\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & O & I_m\\ 0 & I_m & O\end{array}\right),\quad J_{2m}=\left(\begin{array}{c|c}O & I_m\\ \hline I_m & O\end{array}\right),\quad J'_{2n}=\left(\begin{array}{c|c}O & I_n\\ \hline -I_n & O\end{array}\right)$$

とおいている（I_n は n 次単位行列）．単純リー代数のラベルに応じて，SL_{n+1} は $\mathtt{A}_n$ 型，SO_{2n+1} は $\mathtt{B}_n$ 型，Sp_{2n} は $\mathtt{C}_n$ 型，SO_{2n} は $\mathtt{D}_n$ 型と呼ばれている．

これら $\mathrm{GL},\mathrm{SL},\mathrm{SO},\mathrm{Sp}$ を含む概念として**連結・分裂簡約群**と呼ばれる，ルート・データと対応する良い代数群のクラスがある．以下で見ていくように，このクラスは表現論の結果をルートの言葉で記述できるため，例えば組み合わせ論との相性が非常に良い．

2.2. **代数群のリー代数とボレル部分群.** 代数群 G が与えられたとき，その表現対象 $\mathcal{O}(\mathrm{G})$ は可換ホップ代数をなすのであった．その余積を Δ とかくとき，線型双対 $\mathcal{O}(\mathrm{G})^*$ は積が $(f * g)(x) = \sum_i f(y_i)g(z_i)$ $(f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{G})^*, x \in \mathcal{O}(\mathrm{G})$ with $\Delta(x) = \sum_i y_i \otimes z_i)$，単位元が余単位 $\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathrm{G})^*$ であたえられる代数をなす．すると，代数 $\mathcal{O}(\mathrm{G})^*$ は $[f, g] := f * g - g * f$ $(f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{G}))$ によってリー代数をなすのであった．さて余単位の核を $\mathfrak{m} = \mathsf{Ker}(\varepsilon)$ とおくとき，$\mathcal{O}(\mathrm{G})$ が有限生成であることから商 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は有限次元になる．その線型双対 $\mathsf{Lie}(\mathrm{G}) := (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ は，自然に $\mathcal{O}(\mathrm{G})^*$ の一部とみてリー代数構造が入る．

例えば代数群を $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}_n$ などと，行列群の閉部分群として実現したとき（これはいつも可能），簡単な計算により

$$\mathsf{Lie}(\mathrm{G}) \overset{\mathrm{id}}{=} \mathsf{Ker}(\mathrm{G}(\Bbbk[T]/(T^2)) \xrightarrow{\overline{T} \mapsto 0} \mathrm{G}(\Bbbk)) \quad \subset \quad \mathsf{Mat}_n(\Bbbk)$$

と行列代数の部分リー代数として実現できる．例えば，$\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n$ の場合は $\mathsf{Lie}(\mathrm{GL}_n) = \mathsf{Mat}_n(\Bbbk)$ である．

例 2.2. 前のセクションで挙げた代数群のリー代数はそれぞれ

- $\mathsf{Lie}(\mathrm{SL}_n) = \left\{ X \in \mathsf{Mat}_n(\Bbbk) \,\middle|\, \mathsf{tr}(X) = 0 \right\}$
- $\mathsf{Lie}(\mathrm{SO}_n) = \left\{ X \in \mathsf{Lie}(\mathrm{SL}_n) \,\middle|\, {}^{\mathsf{t}}XJ_n + J_nX = 0 \right\}$
- $\mathsf{Lie}(\mathrm{Sp}_{2n}) = \left\{ X \in \mathsf{Lie}(\mathrm{SL}_n) \,\middle|\, {}^{\mathsf{t}}XJ'_{2n} + J'_{2n}X = 0 \right\}$

と（同型に）なる． □

定義から連結・分裂簡約群 G は分裂極大トーラス T をもつ．トーラス T は可換でありその指標群を $\Lambda := \mathsf{X}(\mathrm{T}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathsf{Hom}_{\mathsf{grp}}(\mathrm{T}, \mathrm{G}_{\mathsf{m}})$ とおくと，適当な自然数 ℓ で $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{\oplus \ell}$ と加法的に同一視することができるのであった．ここで $\mathrm{G}_{\mathsf{m}} = \mathrm{GL}_1$ は一次元乗法群.

いま T はリー代数 $\mathfrak{g} := \mathsf{Lie}(\mathrm{G})$ へ共役により作用するが，T-不変部分空間を $\mathfrak{h}$ とかくとき $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \triangle\ (\subset \Lambda)} \mathfrak{g}^{\alpha}, \qquad \mathfrak{g}^{\alpha} = \left\{ X \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \forall H \in \mathfrak{h},\ [H, X] = \alpha(H)X \right\}$$

とルート空間に分解する．

いわゆる “単純” ルート系を一つとり固定することで，ルート全体の集合 $\triangle$ に順序をいれることができ，それに即して非交和に分解することができる $\triangle = \triangle^- \sqcup \triangle^+$ with $\triangle^- = -\triangle^+$ のであった．単純ルート系 $\Pi \subset \triangle$ は “線型独立” なものたちからなり $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Pi := \{\sum_i c_i\alpha_i \in \Lambda \mid c_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \alpha_i \in \Pi\}$ とおくとき $\triangle^+ = \triangle \cap (\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Pi)$ を満たす．

さらに G の閉部分群たち B, B^+ であって，そのリー代数がそれぞれ $\triangle^-, \triangle^+$ に “対応する” ようなものがとれるのであった．これらは G の**ボレル部分群**と呼ばれ，適当なユニポテント部分群 U, U^+ によってそれぞれ $\mathrm{B} \cong \mathrm{U} \rtimes \mathrm{T}, \mathrm{B}^+ \cong \mathrm{U}^+ \rtimes \mathrm{T}$ と分解される．

例 2.3. $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n$ の場合を考える．トーラス T として対角行列全体からなるものをとり，その指標群を加法的に $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\epsilon$ とみる．ここで

$$\epsilon_i : \mathrm{T} \longrightarrow \Bbbk^\times; \quad \mathsf{diag}(t_1, \ldots, t_n) \longmapsto t_i.$$

ルート系は $\triangle = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$ となる．例えば標準的なボレル部分群 B として下三角行列全体がとれるが，これは

$$\triangle^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}, \qquad \triangle^- = -\triangle^+$$

としたときのものである．ユニポテント部分群 U は対角成分がすべて 1 である下三角行列全体である． □

2.3. **既約表現の構成.** このセクションでも連結・分裂簡約群 G とその分裂極大トーラス T とボレル部分群たち $\mathrm{B} \cong \mathrm{U} \rtimes \mathrm{T}, \mathrm{B}^+ \cong \mathrm{U}^+ \rtimes \mathrm{T}$ をとり固定する．

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，一次元空間 $\Bbbk_\lambda$ を λ を通した T-表現とみる．明らかに T-既約表現の（同型を除く）全体は $\{\Bbbk_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で与えられる．座標環の言葉でいえば $\mathcal{O}(\mathrm{T})$ が群様元で張られる空間であることから従う．

分解 $\mathrm{B} \cong \mathrm{U} \rtimes \mathrm{T}$ があることと U がユニポテントであるということは，座標環の言葉でいえば $\mathcal{O}(\mathrm{T})$ が $\mathcal{O}(\mathrm{B})$ の $\mathcal{O}(\mathrm{U})$-余不変部分 $\mathcal{O}(\mathrm{B})^{\mathrm{co}\mathcal{O}(\mathrm{U})}$ と同型であることと $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ が余代数として既約であることに対応している．従って，B-既約表現の（同型を除く）全体もまた $\{\Bbbk_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で与えられることが分かる．ここで $\Bbbk_\lambda$ への B-作用は，分解に即した射影 $\mathrm{B} \cong \mathrm{U} \rtimes \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ を用いていれている．

包含 $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}$ を用いれば B-表現を自然に G-表現とみることができる（いわゆる誘導表現）．座標環の言葉でいえば，各右 $\mathcal{O}(\mathrm{B})$-余加群 M に対して，商ホップの自然な商射 $\mathcal{O}(\mathrm{G}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{B})$ により $\mathcal{O}(\mathrm{G})$ を左 $\mathcal{O}(\mathrm{B})$-余加群とみたときの**コテンソル**

$$\mathsf{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(M) := M \,\square_{\mathcal{O}(\mathrm{B})}\, \mathcal{O}(\mathrm{G})$$

を自然に右 $\mathcal{O}(\mathrm{G})$-余加群とみたものである．これは標数ゼロの場合のリー代数の方（双対の方）の対応物でいえば，おおよそヴァーマ加群 $M \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ に相当する．

さて，これで既約 B-表現 $\Bbbk_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ を G-表現に持ち上げた $\mathsf{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\Bbbk_\lambda)$ を考え，

$$\Lambda^+ := \left\{ \lambda \in \Lambda \;\middle|\; \mathsf{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\Bbbk_\lambda) \neq 0 \right\}$$

とおき，各 $\lambda \in \Lambda^+$ に対して，$\mathsf{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\Bbbk_\lambda)$ の G-台 (socle) を $L(\lambda)$ とかく．すると，積 $\mathrm{B} \times \mathrm{B}^+ \to \mathrm{G}$ の双対の $\mathcal{O}(\mathrm{G}) \to \mathcal{O}(\mathrm{B}) \otimes \mathcal{O}(\mathrm{B}^+)$ が単射であるということから，次の結果を得る．

命題 2.4. 既約 G-表現の（同型を除く）全体は $\{L(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda^+}$ で与えられる．

これでひとまず（抽象的だが）G の既約表現を得ることができたのだが，その構造に関して次元や指標の決定などを行うためには，もっと深い表現論を展開する必要がある．そこで構造の研究はいったん後にして，次のセクションではパラメータ集合 Λ^+ についてみていく．

2.4. **既約表現のパラメータ.** パラメータ集合 Λ^+ の決定をする方法としては，いったん $\Bbbk$ が代数閉体の場合を考え，誘導表現を

$$\mathsf{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\Bbbk_\lambda) \overset{\mathrm{id}}{=} \left\{ f : \mathrm{G} \to \Bbbk \;\middle|\; \forall g \in \mathrm{G}, b \in \mathrm{B},\ f(gb) = \lambda(b)^{-1} f(g) \right\}$$

と同一視し，G の Bruhat 分解を用いるなどの技を用いることで G 上定義された非ゼロな関数を構成し，それが $\mathsf{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\Bbbk_\lambda)$ の元になる条件を調べる，という手法がある（例えば [Jan03, Part II, Proposition 2.6] 参照）．その結果，非ゼロな関数が作れるための必要十分条件を書き下すことができ，

$$\mathsf{ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\Bbbk_\lambda) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \alpha \in \triangle^+,\ 0 \leqslant \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$$

とルート系の言葉で記述することができる．これは支配的整ウェイトとでも呼ばれるべき条件である．条件の $\triangle^+$ はもちろん単純ルート系に置き換えてもよい．ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は自然なペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathsf{X}(\mathrm{T}) \times \mathsf{X}_*(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathbb{Z};\ \ (\lambda, \varphi) \longmapsto \lambda \circ \varphi\ \in \mathsf{End}_{\mathsf{grp}}(\mathrm{G}_{\mathsf{m}}) \cong \mathbb{Z} \quad (\mathsf{X}_*(\mathrm{T}) := \mathsf{Hom}_{\mathsf{grp}}(\mathrm{G}_{\mathsf{m}}, \mathrm{T}))$$

であり，$\alpha^\vee$ は α の双対ルートで $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ をみたす．本稿ではこの同値，つまり

$$\Lambda^+ = \left\{ \lambda \in \Lambda \;\middle|\; \forall \alpha \in \triangle^+,\ 0 \leqslant \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \right\}$$

を認めることにして次のセクションで具体例をいくつかみていくことにする．

2.4.1. $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n$ の場合（A 型）．まず $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n$ の場合を考える．例 2.3 の記号 $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i$ などを自由に使う．各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して，

$$\eta_i : \mathrm{G}_{\mathsf{m}} \to \mathrm{T}; \quad r \mapsto \mathsf{diag}(1, \ldots, 1, \overset{\overset{i}{\vee}}{r}, 1, \ldots, 1)$$

とおくとき，$\mathsf{X}_*(\mathrm{T}) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\eta_i$ となり，ペアリングは $\langle \epsilon_i, \eta_j \rangle = \delta_{i,j}$（クロネッカーのデルタ）となっている．この記号のもと，ルート $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j\ (i < j)$ の双対ルートは

$$\alpha^\vee = \eta_i - \eta_j : \mathrm{G}_{\mathsf{m}} \to \mathrm{T}; \quad r \mapsto \mathsf{diag}(1, \ldots, 1, \overset{\overset{i}{\vee}}{r}, 1, \ldots, 1, \overset{\overset{j}{\vee}}{r^{-1}}, 1, \ldots, 1)$$

となる．

すると各 $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_i \in \Lambda\ (\lambda_i \in \mathbb{Z})$ に対して，正ルート $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j\ (i < j)$ の双対とのペアリングは $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \lambda_i - \lambda_j$ となる．従って，既約表現のパラメータ集合は $\Lambda \overset{\mathrm{id}}{=} \mathbb{Z}^{\oplus n}$ の同一視のもと

$$\Lambda^+ = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n\}$$

となる．

一方で $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_n$ の場合は，GL_n の場合の話をすべて $\mathsf{det} = 1$ という条件で縛れば良いだけなので，例えば $\mathsf{X}(T) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i / \mathbb{Z}(\sum_{i=1}^n \epsilon_i)$ などとなって，まったく同様にして

$$\Lambda^+ = \{(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n) \in \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}(1, \ldots, 1) \mid \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n\}$$

となる．

2.4.2. SO_{2n+1} の場合（B 型）．この場合，トーラスを $\mathrm{T} = \{\mathsf{diag}(1, t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{G}_{\mathsf{m}}\}$ ととっておく．すると，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して，$\epsilon_i \in \mathsf{X}(\mathrm{T}), \eta_i \in \mathsf{X}_*(\mathrm{T})$ をそれぞれ

$$\epsilon_i : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathsf{m}}; \quad \mathsf{diag}(1, t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) \longmapsto t_i,$$

$$\eta_i : \mathrm{G}_{\mathsf{m}} \longrightarrow \mathrm{T}; \quad r \longmapsto \mathsf{diag}(1, \ldots, 1, \overset{\substack{i+1 \\ \vee}}{r}, 1, \ldots, 1, \overset{\substack{n+i+1 \\ \vee}}{r^{-1}}, 1, \ldots, 1)$$

と定めれば，$\mathsf{X}(\mathrm{T}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i, \mathsf{X}_*(\mathrm{T}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\eta_i$ となり，またペアリングは $\langle \epsilon_i, \eta_j \rangle = \delta_{i,j}$ となっている．

リー代数 $\mathsf{Lie}(\mathrm{SO}_{2n+1})$ のルート分解を考えればルート系が

$$\triangle = \{\pm\epsilon_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{s\epsilon_i + t\epsilon_j \mid s, t \in \{\pm 1\},\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$$

で与えられるとこが分かる．その単純ルート系として $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \epsilon_n\}$ を取ることができ，このもとで既約表現のパラメータ集合は

$$\Lambda^+ = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0\}$$

と，ヤング図形の集合と同一視される．

2.4.3. Sp_{2n} の場合 (C 型)．この場合，トーラスを $\mathrm{T} = \{\mathsf{diag}(t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{G}_{\mathsf{m}}\}$ ととっておく．すると，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して，$\epsilon_i \in \mathsf{X}(\mathrm{T}), \eta_i \in \mathsf{X}_*(\mathrm{T})$ をそれぞれ

$$\epsilon_i : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathsf{m}}; \quad \mathsf{diag}(t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) \longmapsto t_i,$$

$$\eta_i : \mathrm{G}_{\mathsf{m}} \longrightarrow \mathrm{T}; \quad r \longmapsto \mathsf{diag}(1, \ldots, 1, \overset{\substack{i \\ \vee}}{r}, 1, \ldots, 1, \overset{\substack{n+i \\ \vee}}{r^{-1}}, 1, \ldots, 1)$$

と定めれば，$\mathsf{X}(\mathrm{T}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i, \mathsf{X}_*(\mathrm{T}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\eta_i$ となり，またペアリングは $\langle \epsilon_i, \eta_j \rangle = \delta_{i,j}$ となっている．

リー代数 $\mathsf{Lie}(\mathrm{Sp}_{2n})$ のルート分解を考えればルート系が

$$\triangle = \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{s\epsilon_i + t\epsilon_j \mid s, t \in \{\pm 1\},\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$$

で与えられるとこが分かる．その単純ルート系として $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, 2\epsilon_n\}$ を取ることができ，このもとで既約表現のパラメータ集合は

$$\Lambda^+ = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0\}$$

となる．

2.4.4. SO_{2n} の場合 ($\mathbb{D}$ 型). この場合，トーラスを $\mathrm{T} = \{\mathsf{diag}(t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{G_m}\}$ ととっておく．すると，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して，$\epsilon_i \in \mathsf{X}(\mathrm{T}), \eta_i \in \mathsf{X}_*(\mathrm{T})$ をそれぞれ

$$\epsilon_i : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{G_m}; \quad \mathsf{diag}(t_1, \ldots, t_n, t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) \longmapsto t_i,$$

$$\eta_i : \mathrm{G_m} \longrightarrow \mathrm{T}; \quad r \longmapsto \mathsf{diag}(1, \ldots, 1, \overset{\overset{i}{\vee}}{r}, 1, \ldots, 1, \overset{\overset{n+i}{\vee}}{r^{-1}}, 1, \ldots, 1)$$

と定めれば，$\mathsf{X}(\mathrm{T}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i, \mathsf{X}_*(\mathrm{T}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\eta_i$ となり，またペアリングは $\langle \epsilon_i, \eta_j \rangle = \delta_{i,j}$ となっている．

リー代数 $\mathsf{Lie}(\mathrm{Sp}_{2n})$ のルート分解を考えればルート系が

$$\triangle = \{s\epsilon_i + t\epsilon_j \mid s, t \in \{\pm 1\},\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$$

で与えられるとこが分かる．その単純ルート系として $\{\epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n\}$ を取ることができ，このもとで既約表現のパラメータ集合は

$$\Lambda^+ = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant |\lambda_n|\}$$

となる．最後の “絶対値” は条件から $\lambda_{n-1} \geqslant \pm\lambda_n$ が出てくるので，これを一つにまとめて書くためにそうしている．

3. スーパー代数群とその既約表現

スーパーとは次数 2 の群 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ で次数付けられた対象であって，スーパー対称性と呼ばれる非自明な対称性

$$V \otimes W \longrightarrow W \otimes V; \quad v \otimes w \longmapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v$$

が考慮された世界のことである．ここで $v \in V, w \in W$ は斉次元で $|v| \in \{0, 1\}$ はその次数．スーパー対称性が非自明にならないように，スーパーを扱うときは基礎体 $\Bbbk$ の標数は 2 ではないとする．例えば可換スーパー代数とは $\mathbb{Z}_2$ で次数付けられた代数 $R = R_0 \oplus R_1$ であり，元に関するスーパー可換性

$$ab = \begin{cases} -ba & \text{if } a, b \in R_1, \\ ba & \text{otherwise} \end{cases}$$

を満たすもののことである．

スーパー化された（ルート系で記述されるような良いクラスの）代数群においても「既約表現を調べよ」というのは自然であり基本的な問題である．実は非スーパーの状況の類似の議論をすることで，既約表現を全て構成することは可能である．そこで次の問題として，非スーパーのときと同様に「既約表現のパラメータ集合をルート系で記述せよ」という問いが生じる．いくつかの具体的なスーパー代数群に対しては，それぞれ固有の手法により具体的なパラメータ集合の記述が知られている．本研究では個別の特殊性を用いずに，一般的手法からどこまで形決定に迫れるかを考察する．

3.1. **定義と例.** 非スーパーのときと同様にして，**スーパー代数群** $\mathbb{G}$ を，可換スーパー代数の圏から群の圏への表現可能関手であって，表現対象 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ がスーパー代数として有限生成であるものとして定義する．その "定義域" を可換代数の圏に制限したもの $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ は通常の代数群になり，その**偶部**と呼ぶことにする．座標環の言葉で書けば $\mathcal{O}(\mathbb{G}_{\mathsf{ev}})$ は，$\mathcal{O}(\mathbb{G})$ をその 1-part $\mathcal{O}(\mathbb{G})_1$ の生成するイデアルで割ったものである．代表的なスーパー代数群の例を以下に挙げる．

例 3.1. 以下で $R = R_0 \oplus R_1$ を可換スーパー代数とする．

- **一般線型スーパー群**

$$\mathbb{GL}_{m|n}(R) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathsf{Mat}_{m+n}(R) \;\middle|\; \begin{array}{c} A \in \mathrm{GL}_m(R_0), D \in \mathrm{GL}_n(R_0), \\ B \in \mathsf{Mat}_{m,n}(R_1), C \in \mathsf{Mat}_{n,m}(R_1) \end{array} \right\}$$

- **Queer スーパー群**

$$\mathbb{Q}_n(R) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) \in \mathbb{GL}_{n|n}(R) \right\}$$

- Kac [Kac77] により分類された有限次元単純リー・スーパー代数（$\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \ldots$）と，その忠実表現から構成される **Chevalley スーパー群**と呼ばれるスーパー代数群．例えば，**特殊線型スーパー群**

$$\mathbb{SL}_{m|n}(R) = \left\{ g \in \mathbb{GL}_{m|n}(R) \;\middle|\; \mathsf{sdet}(g) = 1 \right\}$$

  や，**直交斜交スーパー群** (**ortho-symplectic supergroups**)

$$\mathbb{SpO}_{2n|\ell}(R) = \left\{ g \in \mathbb{SL}_{2n|\ell}(R) \;\middle|\; {}^{\mathsf{st}}g\, J_{2n|\ell}\, g = J_{2n|\ell} \right\}$$

  がその代表例である．ここで，

$$\mathsf{sdet} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) := \mathsf{det}(A)\mathsf{det}(D - CA^{-1}B)^{-1}, \qquad {}^{\mathsf{st}}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) := \left(\begin{array}{c|c} {}^{\mathsf{t}}A & {}^{\mathsf{t}}C \\ \hline -{}^{\mathsf{t}}B & {}^{\mathsf{t}}D \end{array} \right)$$

  は，それぞれスーパー行列式（または Berezinian），スーパー転置と呼ばれるもので，さらに

$$J_{2n|2m+1} := \left(\begin{array}{cc|ccc} O & I_n & O & O & 0 \\ -I_n & O & O & O & 0 \\ \hline O & O & O & I_m & 0 \\ O & O & I_m & O & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \qquad J_{2n|2m} := \left(\begin{array}{cc|cc} O & I_n & O & O \\ -I_n & O & O & O \\ \hline O & O & O & I_m \\ O & O & I_m & O \end{array} \right)$$

  と置いている．

（注意）$\mathbb{SL}_{m+1|n+1}$ は $\mathtt{A}(m|n)$ 型，$\mathbb{SpO}_{2n|2m+1}$ (with $n \geqslant 0$) は $\mathtt{B}(m|n)$ 型，$\mathbb{SpO}_{2n|2}$ は $\mathtt{C}(n)$ 型，$\mathbb{SpO}_{2n|2m}$ (with $m \geqslant 2$) は $\mathtt{D}(m|n)$ 型に対応するが，文献によってパラメータの取り方・書き方が違うことに注意する． □

さてスーパー代数群 $\mathbb{G}$ に対して，非スーパーのときと同様に

$$\mathsf{Lie}(\mathbb{G}) := (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*, \qquad \mathfrak{m} := \mathsf{Ker}(\varepsilon : \mathcal{O}(\mathbb{G}) \to \Bbbk)$$

とおくことで，これも自然にリー・スーパー代数をなす．行列スーパー代数

$$\mathsf{Mat}_{m|n}(\Bbbk) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathsf{Mat}_{m+n}(\Bbbk) \;\middle|\; \begin{array}{c} A \in \mathsf{Mat}_m(\Bbbk), D \in \mathsf{Mat}_n(\Bbbk), \\ B \in \mathsf{Mat}_{m,n}(\Bbbk), C \in \mathsf{Mat}_{n,m}(\Bbbk) \end{array} \right\}$$

は（次数付けは対角が 0 で非対角が 1）結合スーパー代数なので，自然なブラケット積 $[X, Y] := XY - (-1)^{|X||Y|} YX$ ($X, Y \in \mathsf{Mat}_{m|n}(\Bbbk)$) によってリー・スーパー代数をなすのであった．非スーパーのときと同様にして，$\mathbb{G} \subset \mathbb{GL}_{m|n}$ とみることで，自然に $\mathsf{Lie}(\mathbb{G}) \subset \mathsf{Mat}_{m|n}(\Bbbk)$ と行列スーパー代数の部分リー・スーパー代数として実現できることに注意する．

例 3.2. 例 3.1 のスーパー代数群たちのリー・スーパー代数はそれぞれ

- $\mathbb{G} = \mathbb{GL}_{m|n}$ の場合
$$\mathsf{Lie}(\mathbb{GL}_{m|n}) = \mathsf{Mat}_{m|n}(\Bbbk)$$
- $\mathbb{G} = \mathbb{Q}_n$ の場合
$$\mathsf{Lie}(\mathbb{Q}_n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right) \in \mathsf{Mat}_{2n}(\Bbbk) \;\middle|\; A \in \mathsf{Mat}_n(\Bbbk), B \in \mathsf{Mat}_n(\Bbbk) \right\}$$
- $\mathbb{G} = \mathbb{SL}_{m|n}$ の場合
$$\mathsf{Lie}(\mathbb{SL}_{m|n}) = \left\{ X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathsf{Mat}_{m|n}(\Bbbk) \;\middle|\; \mathsf{str}(X) := \mathsf{tr}(A) - \mathsf{tr}(D) = 0 \right\}$$
- $\mathbb{G} = \mathbb{SpO}(2n|\ell)$ の場合
$$\mathsf{Lie}(\mathbb{SpO}_{2n|\ell}) = \left\{ X \in \mathsf{Lie}(\mathbb{SL}_{2n|\ell}) \;\middle|\; {}^{\mathsf{st}}X\, J_{2n|\ell} + J_{2n|\ell}\, X = 0 \right\}$$

となっている． □

3.2. **リー・スーパー代数とルート系．** スーパー代数群 $\mathbb{G}$ は，その偶部 $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ が連結・分裂簡約群になっている（= ルートデータで記述される）ときに **連結・分裂準簡約スーパー群** と呼ぶことにする．このとき $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ の分裂極大トーラス $\mathbb{T}$ がとれるが，非スーパーのときと同様にして $\mathbb{G}$ のリー・スーパー代数 $\mathfrak{g} := \mathsf{Lie}(\mathbb{G})$ に共役で作用し，次数付けを保つようなウェイト分解を引き起こす：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{g}_0^{\alpha}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\delta \in \Lambda} \mathfrak{g}_1^{\delta}\Big)$$

ここで $\mathfrak{h}$ は T-不変部分で，$\Lambda := \mathsf{X}(\mathrm{T})$ とおいている．各 $\epsilon \in \{0,1\}$ に対して，$\triangle_\epsilon := \{\alpha \in \Lambda \mid \mathfrak{g}_\epsilon^\alpha \neq 0\}$ とおき，

$$\triangle := \begin{cases} \triangle_0 \cup \triangle_1 & \text{if } \mathfrak{h}_1 = 0 \\ \triangle_0 \cup \triangle_1 \cup \{\mathbf{0}\} & \text{if } \mathfrak{h}_1 \neq 0 \end{cases}$$

と（形式的に）おいておき，これを $\mathbb{G}$ のルート系と（公理的な特徴付けを与えず）いってしまうことにする．

以下で群準同型 $\Upsilon : \mathbb{Z}\triangle \to \mathbb{R}$ であって $\Upsilon(\alpha) \neq 0$ for all $\alpha \in \triangle$ をとり固定する．すると $\triangle^\pm := \{\alpha \in \triangle \mid \pm\Upsilon(\alpha) > 0\}$ として（非ゼロ）ルートに正負が入る．一般に $\triangle \neq \triangle^+ \sqcup \triangle^-$ だし $\triangle^- \neq -\triangle^+$ であるような例が存在することに注意する．

例 3.3. 例 3.2 のリー・スーパー代数のルート系をみていく．トーラスとしてはいずれも対角行列からなるものをとるが，その成分の添え字を $\mathsf{diag}(t_{-m}, \ldots, t_{-1}, t_1, \ldots, t_n)$ のように中央のカナメを境に正負で区別することにする（queer は関係ない）．

(1) $\mathbb{G} = \mathbb{GL}_{m|n}$ の場合，非スーパーのときと同様にして $\Lambda = \bigoplus_{-m \leqslant i \leqslant n, i \neq 0} \mathbb{Z}\epsilon_i$ と同一視したとき，$\triangle = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid -m \leqslant i \neq j \leqslant n \text{ with } i,j \neq 0\}$ で与えられ，$\triangle = \triangle_0 \sqcup \triangle_1$ と非交和に分解し

$$\triangle_0 = \{\epsilon_i - \epsilon_j \in \triangle \mid -m \leqslant i \neq j \leqslant -1 \text{ or } 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$$

となっている．

(2) $\mathbb{G} = \mathbb{Q}_n$ の場合，$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i$ であり，$\triangle = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\} \sqcup \{\mathbf{0}\}$ で与えられ，$\triangle_0 = \triangle_1$ となっている（パリティーがつぶれている）．

(3) $\mathbb{G} = \mathbb{SL}_{m|n}$ の場合は $\mathbb{GL}_{m|n}$ のときと同様なので略．

(4) $\mathbb{G} = \mathbb{SpO}_{2n|2m+1}$ の場合，$\Lambda = \bigoplus_{-n \leqslant i \leqslant m, i \neq 0} \mathbb{Z}\epsilon_i$ であり，$\triangle = \triangle^+ \sqcup (-\triangle^+)$ with

$$\triangle_0^+ = \{2\epsilon_i \mid -n \leqslant i \leqslant -1\} \cup \{\epsilon_k \mid 1 \leqslant k \leqslant m\} \cup \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid -n \leqslant i \neq j \leqslant m \text{ with } i,j \neq 0\},$$
$$\triangle_1^+ = \{\epsilon_i \mid -n \leqslant i \leqslant -1\} \cup \{\epsilon_i \pm \epsilon_k \mid -n \leqslant i < 0 < k \leqslant m\}$$

で与えられる．

(5) $\mathbb{G} = \mathbb{SpO}_{2n|2m}$ の場合，$\Lambda = \bigoplus_{-n \leqslant i \leqslant m, i \neq 0} \mathbb{Z}\epsilon_i$ であり，$\triangle = \triangle^+ \sqcup (-\triangle^+)$ with

$$\triangle_0^+ = \{2\epsilon_i \mid -n \leqslant i \leqslant -1\} \cup \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid -n \leqslant i \neq j \leqslant m \text{ with } i,j \neq 0\},$$
$$\triangle_1^+ = \{\epsilon_i \pm \epsilon_k \mid -n \leqslant i < 0 < k \leqslant m\}$$

で与えられる．

以上で ϵ_i は非スーパーの時と同じ意味の記号として用いている． □

一般のスーパー代数に対して，少なくとも現時点では公理的にそのルート系の “単純ルート系” を考えないことにする（$\triangle_0 = \triangle_1$ など厄介な状況があるから）．ただし，表現論を展開するにあたりどうしても “単純ルート系” は便利なので，個々の具体例においては積極的

に考えられている．例えば，$\mathbb{G} = \mathbb{GL}_{m|n}$ のときはブロック分割を忘れて GL_{m+n} だと思ったときの単純ルート系を考えればよい．

例 3.4. $\mathbb{G} = \mathbb{SpO}_{2n|\ell}$ の場合，例 3.3 の正ルート系の取り方に対して，“単純ルート系” Ψ はそれぞれ以下のようになる．

(1) B 型 $\ell = 2m+1$ の場合．$\ell = 1$ のとき

$$\Psi = \{\epsilon_{-n} - \epsilon_{-n+1}, \dots, \epsilon_{-2} - \epsilon_{-1}, \epsilon_{-1}\},$$

$\ell = 2m+1$ with $m \neq 1$ のとき

$$\Psi = \{\epsilon_{-n} - \epsilon_{-n+1}, \dots, \epsilon_{-2} - \epsilon_{-1}, \epsilon_{-1} - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \epsilon_m\}.$$

(2) C 型 $\ell = 2$ の場合

$$\Psi = \{\epsilon_{-1} - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, 2\epsilon_n\}.$$

(3) D 型 $\ell = 2m$ with $m \geqslant 2$ の場合

$$\Psi = \{\epsilon_{-n} - \epsilon_{-n+1}, \dots, \epsilon_{-2} - \epsilon_{-1}, \epsilon_{-1} - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \epsilon_{m-1} + \epsilon_m\}.$$

もちろん単純ルート系という言葉は厳密に定義していないが，非スーパーのときと同じような意味で用いている． □

3.3. **既約表現の構成．** ここでも連結・分裂準簡約スーパー群 $\mathbb{G}$ をとり，$\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ の分裂極大トーラス T をとり固定しておく．

各 $\epsilon \in \{0,1\}$ に対して，$\triangle^{\pm}_{\epsilon} := \triangle^{\pm} \cap \triangle_{\epsilon}$ とおき，$\mathfrak{u} := \bigoplus_{\alpha \in \triangle^-} \mathfrak{g}^{\alpha}$ とおく．構成から $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ のユニポテント群 U であって $\mathsf{Lie}(\mathrm{U}) = \mathfrak{u}_0$ をみたすものが取れる．

実は，$\mathbb{G}$ の閉スーパー部分群たち $\mathbb{T}, \mathbb{U}$ であって

$$\mathbb{T}_{\mathsf{ev}} = \mathrm{T}, \quad \mathbb{U}_{\mathsf{ev}} = \mathrm{U}, \quad \mathsf{Lie}(\mathbb{T}) = \mathfrak{h}, \quad \mathsf{Lie}(\mathbb{U}) = \mathfrak{u}$$

を満たすものが構成できる．この $\mathbb{T}$ を**スーパー・トーラス**と呼ぶことにする．非スーパーのときと同様にして自然な作用で $\mathbb{T}$ は $\mathbb{U}$ を normalize しており，**ボレル・スーパー部分群** $\mathbb{B}$ を積写像 $\mathbb{U} \rtimes \mathbb{T} \to \mathbb{G}$ の “像” として定義する．

非スーパーの時と同様にして G の既約表現の構成方法は，スーパー対称性を考慮してもまったく同様に成り立つことがすぐ分かる．そして上記の $\mathbb{T}, \mathbb{U}, \mathbb{B}, \mathbb{G}$（とそのプラスの方 $\mathbb{U}^+, \mathbb{B}^+$）が設定を満たすことが分かるので，既約表現があっという間に構成できる．ただし，最初に $\mathcal{O}(\mathbb{T})$ の既約余加群を列挙する必要があるが，これはクリフォード理論を拝借すればよく，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$\mathbb{T}$ の既約表現 $\mathfrak{u}(\lambda)$ を得ることができ，さらにこれら $\{\mathfrak{u}(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が全てを尽くしていることが分かる．構成から，T-表現としては $\mathfrak{u}(\lambda) \cong \Bbbk_{\lambda}^{\oplus n_{\lambda}}$ for some $n_{\lambda} \in \mathbb{N}$ と最高ウェイトを重ねただけになっている．

従って，あとは非スーパーの時と同じように $\{\mathfrak{u}(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ たちを自然に $\mathbb{B}$-表現とみて，さらに $\mathbb{G}$-表現へと誘導

$$H^0_{\mathbb{B}}(\lambda) := \mathsf{ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{B}}(\mathfrak{u}(\lambda)) = \mathfrak{u}(\lambda)\,\square_{\mathcal{O}(\mathbb{B})}\,\mathcal{O}(\mathbb{G})$$

すれば，次が成り立つ [Shi20].

命題 3.5. 既約 $\mathbb{G}$-表現の（同型を除いた）全体は $\{L(\lambda) := \mathsf{soc}_{\mathbb{G}}(H^0_{\mathbb{B}}(\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda^\flat\}$ で与えらえる．ここで $\Lambda^\flat := \{\lambda \in \Lambda \mid H^0_{\mathbb{B}}(\lambda) \neq 0\}$ とおいている．

3.4. **既約表現のパラメータ（先行研究）**. 上述のように既約 $\mathbb{G}$-表現の構成は非スーパーのときとまったく同様にすることができ，パラメータ集合 $\Lambda^\flat$ もまったく同じ形式で得られた．次の目標はこのパラメータ集合の形を決定することになろう．

比較的簡単な考察により，T-表現の単射

$$H^0_{\mathbb{B}}(\lambda) \quad\hookrightarrow\quad H^0_{\mathbb{B}_{\mathsf{ev}}}(\lambda)^{\mathsf{dim}(\mathfrak{u}(\lambda))} \otimes \bigwedge(\mathfrak{g}_1)^*$$

があることが分かる．ここで $H^0_{\mathbb{B}_{\mathsf{ev}}}(\lambda) := \mathsf{ind}^{\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}}_{\mathbb{B}_{\mathsf{ev}}}(\Bbbk_\lambda)$ とおいている．すると

$$\Lambda^\flat \quad\subset\quad \Lambda^+ \quad=\quad \left\{\lambda \in \Lambda \;\middle|\; \forall\alpha \in \triangle^+_0,\ 0 \leqslant \langle\lambda, \alpha^\vee\rangle\right\} \tag{3.1}$$

という包含を得る．つまり少なくとも $\Lambda^\flat$ は「$\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ の支配的整ウェイト (with respect to $\mathbb{B}_{\mathsf{ev}}$) たちで書かれている」ということが分かる．

一般論ではこれ以上詳しいことは難しそうなので，以下ではひとまず知られている結果を列挙することにする．以下の例では $\Bbbk$ を代数閉体とし，標数を $p := \mathrm{char}(\Bbbk)$ とおく．注意として，非スーパーのときと同様にして，もし $p = 0$ であれば $\mathbb{G}$ の表現論と $\mathsf{Lie}(\mathbb{G})$ の “可積分” 表現論は一致するので（表現圏が一緒），我われスーパー代数群の研究の立場においては正標数のときの表現論が気になっている．

3.4.1. 一般線型スーパー群 $\mathbb{GL}_{m|n}$ の場合．まずスーパー・トーラス $\mathbb{T}$ として $\mathbb{G} = \mathbb{GL}_{m|n}$ の対角行列全体がとれる（単純にブロック分割を忘れて GL_{m+n} だと思う）．これは $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}} = \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ の標準的な分裂極大トーラス T に他ならない：$\mathbb{T} = \mathrm{T}$．正ルート系として

$$\triangle^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \in \triangle \mid -m \leqslant i < j \leqslant n\}$$

を選んだとき，ユニポテント $\mathbb{U}$ は $\mathbb{G}$ の下三角行列で対角が 1 のもの全体であり，ボレル・スーパー部分群 $\mathbb{B}$ は $\mathbb{G}$ の下三角行列となる．

既約 $\mathbb{G}$-表現のパラメータ集合は Brundan–Kujawa [BruKuj03] によって（主に正標数）決定されており，その結果，偶部 $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ の Λ^+ (with respect to $\mathbb{B}_{\mathsf{ev}}$) に一致することが示されている：

$$\Lambda^\flat = \Lambda^+ = \left\{(\lambda_{-m}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{m+n} \;\middle|\; \lambda_{-m} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{-1},\ \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n\right\}.$$

注意 3.6. 実は [Shi20] により，連結・分裂準簡約スーパー群 $\mathbb{G}$ が "良いパラボリック・スーパー部分群 $\mathbb{P}$" を持てば，具体的なルート系の挙動などを考察することなくやや一般的に $\Lambda^\flat = \Lambda^+$ が成り立つことが示されている．いまの $\mathbb{G} = \mathbb{GL}_{m|n}$ の場合は，

$$\mathbb{P}(R) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathbb{GL}_{m|n}(R) \right\} \qquad (R \text{ は可換スーパー代数})$$

を取ればよい．他にも本稿では定義を省略するが **periplectic スーパー群**も同様に良いパラボリックをもつので，$\Lambda^\flat = \Lambda^+$ が成り立つことが分かっている．

3.4.2. *Queer* スーパー群 $\mathbb{Q}_n$ の場合．まず $\mathbb{G} = \mathbb{Q}_n$ のスーパー・トーラス $\mathbb{T}$ として

$$\mathbb{T}(R) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) \in \mathbb{Q}_n(R) \;\middle|\; A, B \text{ は対角行列} \right\} \qquad (R \text{ は可換スーパー代数})$$

がとれる．もちろん $\mathrm{T} = \mathbb{T}_{\mathsf{ev}}$ は $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}} = \mathrm{GL}_n$ の対角行列全体であるので，$\mathbb{T} \neq \mathrm{T}$ に注意する．正ルート系として

$$\triangle^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \in \triangle \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

を選んだとき，$\mathbb{G}$ のボレル・スーパー部分群 $\mathbb{B}$ は

$$\mathbb{B}(R) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) \in \mathbb{Q}_n(R) \;\middle|\; A, B \text{ は下三角行列} \right\} \qquad (R \text{ は可換スーパー代数})$$

となる．

既約 $\mathbb{G}$-表現のパラメータ集合は Brundan–Kleshchev [BruKle03] によって（主に正標数）決定されており，

$$\Lambda^\flat = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+ \;\middle|\; \lambda_i = \lambda_{i+1} \Longrightarrow p \mid \lambda_i \right\},$$
$$\text{where } \Lambda^+ = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n\}.$$

となっている．もちろん Λ^+ は $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}} = \mathrm{GL}_n$ の支配的整ウェイト (with respect to $\mathbb{B}_{\mathsf{ev}}$) 全体の集合．これは $p = 0$ のときも $p \mid \lambda_i \Leftrightarrow \lambda_i = 0$ と解釈して成立する．

このように基礎体の標数に依存しているところが非スーパーとの大きな違いである．

3.4.3. 直交斜交スーパー群 $\mathbb{S}_{\mathbb{P}}\mathbb{O}_{2n|\ell}$ の場合．まず偶部が

$$(\mathbb{S}_{\mathbb{P}}\mathbb{O}_{2n|\ell})_{\mathsf{ev}} \;=\; \mathrm{Sp}_{2m} \times \mathrm{SO}_\ell$$

となることに注意する（これが名前の由来であろう）．するとスーパー・トーラス $\mathbb{T}$ は $\mathrm{Sp}_{2m}, \mathrm{SO}_\ell$ それぞれの分裂極大トーラスを並べればよく，$\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathsf{ev}}$ をみたす．例 3.3 で与えたルート系の順序 $\triangle^+ = \triangle_0^+ \cup \triangle_1^+$ に応じたボレル・スーパー部分群 $\mathbb{B}$ を考えることができる．

既約 $\mathbb{G}$-表現のパラメータ集合は Shu–Wang [ShuWan08] によって（主に正標数）決定されている．先に結果を提示すると，$\ell = 2m+1$ の場合は,

$$\Lambda^\flat = \left\{ (\lambda_{-n}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda^+ \;\middle|\; \lambda_{-1} \geqslant \mathrm{J}_p(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \right\},$$
$$\Lambda^+ = \left\{ (\lambda_{-n}, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^{n+m} \;\middle|\; \lambda_{-n} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{-1} \geqslant 0,\ \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m \geqslant 0 \right\}$$

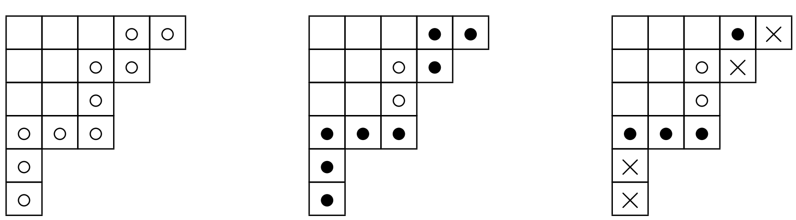
であり，$\ell = 2m$ の場合は,

$$\Lambda^\flat = \left\{ (\lambda_{-n}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda^+ \;\middle|\; \lambda_{-1} \geqslant \mathrm{J}_p(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, |\lambda_m|) \right\},$$
$$\Lambda^+ = \left\{ (\lambda_{-n}, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}^{n+m} \;\middle|\; \lambda_{-n} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{-1} \geqslant 0,\ \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{m-1} \geqslant |\lambda_m| \right\}$$

となる．もちろん Λ^+ は $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}} = \mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SO}_\ell$ の支配的整ウェイト全体 (with respect to $\mathbb{B}_{\mathsf{ev}}$) である．

上記で，分割 μ に対して $\mathrm{J}_p(\mu)$ は，$p = 0$ のときは μ の長さ $\ell(\mu)$ とし，$p > 0$ のときは μ の中の **p-removable cell** の個数としている．ここで p-removable cell とは，次で定義されるものである：まず μ をヤング図形でみたときに右下側の端の箱たちを rim というが，その一番下から始めて p 個の箱たちを第一 p-segment と呼び，第一 p-segment の終わりから strictly に右側の一番下から始めて p 個の箱たちを第二 p-segment と呼ぶ．これを繰り返すことで p-segments が得られる．ただし最後は箱の個数が p 個より少なくても構わないものとする．その各 p-segments の箱の中で「列の終わりに位置しているが，p-segment の p 個目ではない」ものを p-removable cell と呼ぶ．

例 3.7. ここでは $\mu = (5,4,3,3,1,1)$ のときを考える．もし $p = 0$ ならば定義から $\mathrm{J}_p(\mu) = \ell(\mu) = 6$ である．もし $p = 5$ ならば，μ の rim $\circ$，p-segments $\bullet$，p-removable cells $\times$ は，それぞれ（段階的に）以下のようになる：



よって，この場合は $\mathrm{J}_p(\mu) = 4$ となる． □

3.4.4. 例外型 *Chevalley* スーパー群の場合. Kac による有限次元単純リー・スーパー代数の分類のうち例外型と呼ばれる $\mathtt{D}(2,1;\alpha), \mathtt{F}(3|1), \mathtt{G}(3)$ から構成される（simply-connected な）Chevalley スーパー群の表現論は [CheShuWan19] でされており，それぞれの場合で $\Lambda^\flat$ を具体的に書き下すことができている．

3.5. **奇鏡映**. 非スーパーの場合，簡約群の表現論（既約表現のパラメータ集合の決定を含む）を研究するあたり，そのワイル群（ルート系による鏡映のなす群）の作用は重要なツール・記述言語となるのであった．対してスーパーの場合は，一般的なスーパー代数群の設定（例えば我われの連結・分裂準簡約スーパー群など）ではワイル群のような便利な言語は未だ見つかっていない．ただし，個別の具体的なスーパー代数群に対しては，例えばワイル亜群のようなものを考えることができ，これを用いて表現論を展開することができている．例えば前セクション 3.4 の各スーパー代数群 $\mathbb{G}$ の既約表現のパラメータの決定では，その偶部 $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ のワイル群に**奇鏡映**と呼ばれる operation を追加しその “作用” による挙動を調べることが本質的役割を果たしていた．

ここで奇鏡映とは，複素数体上定義された basic リー・スーパー代数 $\mathfrak{g}$ に対して定義される次の操作のことである．ルート系 $\triangle$ の一つ固定した単純ルート系 Ψ をとるとき，奇単純ルート $\gamma \in \Psi \cap \triangle_1$ であって等方的なもの（i.e., $(\gamma, \gamma) = 0$ なもの，言い換えれば $2\gamma \notin \triangle$ なもの）に対して，

$$\Psi_\gamma := \{-\gamma\} \cup \{\alpha \in \Psi \setminus \{\gamma\} \mid (\alpha, \gamma) = 0\} \cup \{\alpha + \gamma \mid \alpha \in \Psi, (\alpha, \gamma) \neq 0\}$$

とおくとき，これがまた $\triangle$ の単純ルート系になることが知られている．正ルートの方も，Ψ に対応する正ルート系を $\triangle^+$ とかくとき，Ψ_γ に対応する正ルート系は $\triangle^+_\gamma := \{-\gamma\} \cup \triangle^+ \setminus \{\gamma\}$ となる．伴ってボレルも $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \triangle^+} \mathfrak{g}^\alpha$ が $\mathfrak{b}_\gamma := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \triangle^+_\gamma} \mathfrak{g}^\alpha$ へとうつる．この操作

$$r_\gamma(\Psi) = \Psi_\gamma, \qquad r_\gamma(\triangle^+) = \triangle^+_\gamma, \qquad r_\gamma(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_\gamma$$

を奇鏡映と呼ぶ．もちろん定義から $-\gamma \in \Psi_\gamma$ であって $r_{-\gamma}(r_\gamma(\Psi)) = \Psi$ が成り立つ．際立った性質として次の結果が知られている [CheWan12, Proposition 1.32].

事実 3.8. 任意の単純ルート系たち Ψ, Ψ' に対して，上手い（偶）鏡映たちと奇鏡映たち $r_1, \dots, r_\ell$ が存在して $\Psi' = r_1 \cdots r_\ell(\Psi)$ が成り立つ．

この事実により，通常のワイル群と奇鏡映をあわせれば単純ルート系（= ボレル）の全ての取り替えが可能になることが分かる．

例 3.9. 例えば $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}(\mathbb{S}\mathbb{p}\mathbb{O}_{2n|2m+1})$ with $m = n = 2$ の場合を考える．正ルート系としては例 3.3 のもの

$$\triangle^+_0 = \{\epsilon_{-2} \pm \epsilon_{-1}, \epsilon_1 \pm \epsilon_2,\ 2\epsilon_{-2}, 2\epsilon_{-1},\ \epsilon_1, \epsilon_2\},$$
$$\triangle^+_1 = \{\epsilon_{-2} \pm \epsilon_1, \epsilon_{-2} \pm \epsilon_2, \epsilon_{-1} \pm \epsilon_1, \epsilon_{-1} \pm \epsilon_2,\ \epsilon_{-2}, \epsilon_{-1}\}$$

をとる．このときの単純ルート系は $\Psi := \{\epsilon_{-2} - \epsilon_{-1}, \gamma := \epsilon_{-1} - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2\}$ となり，$\gamma = \epsilon_{-1} - \epsilon_1$ がこの中の唯一の等方的な単純奇ルートである．ただし（スーパー対称性が考慮さ

れた）ペアリングは

$$(\epsilon_i, \epsilon_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } -n \leqslant i = j \leqslant -1, \\ -1 & \text{if } 1 \leqslant i = j \leqslant m, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である．この γ で奇鏡映を行えば，

$$\Psi_\gamma = r_\gamma(\Psi) = \{\gamma' := \epsilon_{-2} - \epsilon_1, -\gamma, \gamma'' := \epsilon_{-1} - \epsilon_2, \epsilon_2\}$$

となることが分かる．ここでは $-\gamma, \gamma', \gamma''$ が等方的な単純奇ルートになるので，らさに γ', γ'' で新しい奇鏡映を行うことができる（もちろん $-\gamma$ で奇鏡映をすると Ψ に戻る）．その結果は

$$\Psi_{\gamma\gamma'} = r_{\gamma'}(\Psi_\gamma) = \{-\gamma', \epsilon_{-2} - \epsilon_{-1}, \gamma'', \epsilon_2\}, \quad \Psi_{\gamma\gamma''} = r_{\gamma''}(\Psi_\gamma) = \{\gamma', \epsilon_1 - \epsilon_2, -\gamma'', \epsilon_2\}$$

となる．それぞれ γ'', γ' で奇鏡映ができるが，その結果は

$$\Psi_{\gamma\gamma'\gamma''} = r_{\gamma''}(\Psi_{\gamma\gamma'}) = r_{\gamma'}(\Psi_{\gamma\gamma''}) = \{-\gamma', \gamma''' := \epsilon_{-2} - \epsilon_2, -\gamma'', \epsilon_{-1}\}$$

と一致する．最後にこれを γ''' で奇鏡映すると

$$\Psi_{\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''} = r_{\gamma'''}(\Psi_{\gamma\gamma'\gamma''}) = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, -\gamma''', \epsilon_{-2} - \epsilon_{-1}, \epsilon_{-1}\}$$

を得る．これで全てのパターンが尽くされたことになり，それらを並べれば

$$\begin{tikzcd} & & \Psi_{\gamma\gamma''} \arrow[dr, "r_{\gamma'}"] & & \\ \Psi \arrow[r, "r_\gamma"] & \Psi_\gamma \arrow[ur, "r_{\gamma''}"] \arrow[dr, "r_{\gamma'}"'] & & \Psi_{\gamma\gamma'\gamma''} \arrow[r, "r_{\gamma'''}"] & \Psi_{\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''} \\ & & \Psi_{\gamma\gamma'} \arrow[ur, "r_{\gamma''}"'] & & \end{tikzcd}$$

という図形を得たことになる． □

通常の（偶）鏡映とこの奇鏡映という操作を考えることで，単純ルート系を全てのパターンで取り換えられるということは，リー・レベルでのヴァーマ加群において最高ウェイトの条件を可能な限り全ていじることができるということになる．より詳しく述べると，ボレル $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ をとり固定するとき，ヴァーマ加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \Bbbk_\lambda$ の単純商を $V_{\mathfrak{b}}(\lambda)$ とかくとき，このボレルに対応する単純ルート系の中で等方的な単純奇ルート γ をとれば，

$$V_{\mathfrak{b}}(\lambda) \cong \begin{cases} V_{\mathfrak{b}_\gamma}(\lambda - \gamma) & \text{if } (\lambda, \gamma) \neq 0, \\ V_{\mathfrak{b}_\gamma}(\lambda) & \text{if } (\lambda, \gamma) = 0 \end{cases}$$

なる同型が存在する．本質的にこの手法を用いることで，前セクション 3.4 の結果が証明されている（もちろん基礎体の標数がゼロのときは既に知られていた）．

例 3.10. 例 3.9 の設定・記号のもとで，もしウェイト $\lambda = (\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2)$ が「$(\lambda, \gamma), (\lambda - \gamma, \gamma'), (\lambda - \gamma - \gamma', \gamma''), (\lambda - \gamma - \gamma' - \gamma'', \gamma''')$ がすべてゼロではない」という条件をみたしたら（一番最悪のケースを考えている），上の事実から

$$V_{\mathfrak{b}}(\lambda) \cong V_{\mathfrak{b}_\gamma}(\lambda - \gamma) \cong V_{\mathfrak{b}_{\gamma\gamma'}}(\lambda - \gamma - \gamma') \cong V_{\mathfrak{b}_{\gamma\gamma'\gamma''}}(\lambda - \gamma - \gamma' - \gamma'') \cong V_{\mathfrak{b}_{\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''}}(\lambda - \gamma - \gamma' - \gamma'' - \gamma''')$$

という同型の列を得る．最右辺のウェイトを書き下せば

$$\lambda - (\gamma + \gamma' + \gamma'' + \gamma''') = (\lambda_{-2} - 2, \lambda_{-1} - 2, \lambda_1 + 2, \lambda_2 + 2)$$

となるので，ここで最高ウェイト条件を考えれば，新しい条件として $\lambda_{-1} - 2 \geqslant 0$ つまり $\lambda_{-1} \geqslant 2$ が出てくる．この 2 が $\jmath_p(\lambda_1, \lambda_2)$ の正体である． □

3.6. **主結果.** 本研究ではリー・レベルの話を経由せずに，直接的に誘導表現の挙動を奇鏡映により把握するという手法を取り，既約表現のパラメータ集合 $\Lambda^\flat$ をルート系の言葉で記述することを目標とする．そのために誘導表現への奇鏡映の “作用” がどうなるかを知らなければならない．

その記述のためには扱うスーパー代数群のクラスを連結・分裂準簡約スーパー群からさらに絞る必要がある．具体的には，扱う対象は連結・分裂準簡約スーパー群 $\mathbb{G}$ であって，“単純” ルート系が考えられる状況であり，(i) $\gamma \in \triangle_1, \mathsf{dim}(\mathfrak{g}^\gamma) = 1$ をみたし，(ii) $-\triangle^+ = \triangle^-$ をみたし，$\bigoplus_{\alpha \in \triangle \setminus \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha \ \ (\subset \mathfrak{g} = \mathsf{Lie}(\mathbb{G}))$ の “良い”Chevalley 基底

$$\{X_\alpha \ \ (\in \mathfrak{g}_0^\alpha)\}_{\alpha \in \triangle_0} \ \ \cup \ \ \{Y_\gamma \ \ (\in \mathfrak{g}_1^\gamma)\}_{\gamma \in \triangle_1}$$

が存在することなど，ルート系に常識的な条件を課す．これまでの $\mathbb{GL}_{m|n}, \mathbb{Q}_n, \mathbb{SpO}_{2n|\ell}$ などはこの条件を満たす．(i) の条件から，Y_γ はスカラー倍を除き一つに決まることに注意する．また (ii) の条件から，各 $\gamma \in \triangle_1$ に対して $Y_{\pm\gamma}$ を考えることができる．これで

$$K_\gamma := [Y_\gamma, Y_{-\gamma}] \ \ \in \mathfrak{h}_0$$

とおく．

この準備のもとで次の主張を示すことができている [S.] (in progress).

定理 3.11. 固定した正ルート系 $\triangle^+$ と対応するボレル・スーパー部分群 $\mathbb{B}$ について．任意の等方的単純奇ルート $\gamma \in \triangle_1$ に対して，同型

$$H^0_{\mathbb{B}}(\lambda) \cong \begin{cases} H^0_{\mathbb{B}_\gamma}(\lambda - \gamma) & \text{if } \lambda(K_\gamma) \neq 0 \text{ in } \Bbbk, \\ H^0_{\mathbb{B}_\gamma}(\lambda) & \text{if } \lambda(K_\gamma) = 0 \text{ in } \Bbbk. \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，$\mathbb{B}_\gamma$ は γ による $\mathbb{B}$ の**奇隣接**するボレル・スーパー部分群である．つまり，$\mathbb{B}_\gamma$ に対応する正ルート系が $\triangle^+_\gamma = \{-\gamma\} \cup \triangle^+ \setminus \{\gamma\}$ で与えられるようなものである．

このとき，定義から $\triangle_0^+ = (\triangle_\gamma^+)_0$ かつ $\mathbb{B}_{\mathsf{ev}} = (\mathbb{B}_\gamma)_{\mathsf{ev}}$ が成り立っている（つまり偶部は不変）ことに注意する．

いま包含 $\Lambda^\flat \subset \Lambda^+$ が言えていたことを思い出せば，これは十分に偶部 $\mathbb{G}_{\mathsf{ev}}$ のワイル群の作用（偶鏡映）から来る条件は考慮されていると理解できる．従って，あとは奇鏡映から来る条件で削れば（少なくとも）よいのではないか，と考えるのは自然である．そこで，考えられる限りの全ての奇鏡映のパターンで条件を削ることをやってみる．

以下で $\mathbb{G}$ のボレル・スーパー部分群 $\mathbb{B}$ を一つとり固定する．これに対応する単純ルート系から始め，考えられる奇鏡映の一つの列

$$\mathbb{B} \overset{\gamma_1}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_1 \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_2 \overset{\gamma_3}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{\gamma_N}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_N.$$

を $\mathcal{S}(\mathbb{B})$ と書くことにする．ウェイト $\lambda \in \Lambda$ をとり固定する．この $\mathcal{S}(\mathbb{B})$ に対して，再帰的に以下の量を定義する：

$$\lambda^{(0)} := \lambda, \quad c_\lambda^{(0)} := 0, \quad \lambda^{(i):=\lambda^{(i-1)}} - c_\lambda^{(i)}\gamma_i, \quad c_\lambda^{(i)} := \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda^{(i-1)}(K_{\gamma_i}) \neq 0 \text{ in } \Bbbk, \\ 0 & \text{if } \lambda^{(i-1)}(K_{\gamma_i}) = 0 \text{ in } \Bbbk. \end{cases}$$

すると定理 3.11 から，同型の列 $H^0_{\mathbb{B}}(\lambda) \cong H^0_{\mathbb{B}_1}(\lambda^{(1)}) \cong \cdots \cong H^0_{\mathbb{B}_N}(\lambda^{(N)})$ を得る．従って，もし $\lambda \in \Lambda^\flat$ ならば，奇鏡映が偶部を変えていなかったことと $\Lambda^\flat \subset \Lambda^+$ を思い出せば，新しい条件

$$1 \leqslant \forall r \leqslant N, \quad \forall \alpha \in \triangle_0^+, \quad \langle \lambda - \sum_{i=1}^{r} c_\lambda^{(i)} \gamma_i, \alpha^\vee \rangle \geqslant 0.$$

を得たことになる．

そこで，$\mathbb{B}$ から始まる奇鏡映の列 $\mathcal{S}(\mathbb{B}) = (\mathbb{B} \overset{\gamma_1}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_1 \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{\gamma_N}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_N)$ に対して，

$$\Lambda^{\mathcal{S}(\mathbb{B})} := \left\{ \lambda \in \Lambda^+ \;\middle|\; 1 \leqslant \forall r \leqslant N, \quad \forall \alpha \in \triangle_0^+, \quad \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geqslant \sum_{i=1}^{r} c_\lambda^{(i)} \langle \gamma_i, \alpha^\vee \rangle \right\}$$

とおくことで，次の結果が従う．

定理 3.12. 既約表現のパラメータ集合 $\Lambda^\flat$ は $\Lambda^\star := \bigcap_{\mathcal{S}(\mathbb{B})} \{\Lambda^{\mathcal{S}(\mathbb{B})} \mid \mathcal{B}$ は $\mathbb{B}$ から始まる奇鏡映の列$\}$ の部分集合である．ここで $\mathcal{S}(\mathbb{B})$ は奇鏡映の列のうち "最長" の道を動く．

このようにひとまずは奇ルートの情報をすべて使うような条件で書き下すことができた．今後は適切なスーパー代数群のクラスを設定し，そのクラスでパラメータ集合と $\Lambda^\star$ が等しいか否かを精査する（条件を精査する）必要がある．

3.7. **簡単な例.** 以下では基礎体 $\Bbbk$ を標数 $p = 0$ の代数閉体とする．このセクションでは具体例を通して，定理 3.12 で $\Lambda^\flat = \Lambda^\star$ であることをみる．

3.7.1. $\mathbb{SpO}_{2n|2m+1}$ *with* $n = m = 2$ の場合. 例 3.9 の設定を使う．つまり単純ルート系として $\Psi = \{\epsilon_{-2} - \epsilon_{-1}, \gamma := \epsilon_{-1} - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2\}$ をとる．この場合，ちょっとした考察から，奇鏡映の列として重複の無い一番最長なもの

$$\mathcal{S}(\mathbb{B}) = (\mathbb{B} \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_\gamma \overset{\gamma'}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_{\gamma\gamma'} \overset{\gamma''}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_{\gamma\gamma'\gamma''} \overset{\gamma'''}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_{\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''})$$

をとれば $\Lambda^\star = \Lambda^{\mathcal{S}(\mathbb{B})}$ になることが分かる．

各 $-n \leqslant i, j \leqslant m$ with $i, j \neq 0$ に対して，マイナスの位置は中央のカナメから数えるという意味にしておき行列単位を $E_{i,j}$ と書くことにする．これで $\gamma = \epsilon_i - \epsilon_j$ with $i = -1, j = 1$ に対して，その Chevalley 基底として

$$Y_\gamma := E_{j+m,i} + E_{i-n,j} = E_{3,-1} + E_{-3,1} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ \hline 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

がとれ，マイナスの方は $Y_{-\gamma} = E_{j,i-n} - E_{i,j+m} = E_{1,-3} - E_{-1,3}$ が取れる（see [ShuWan08, §3.3]）．すると，計算により

$$K_\gamma = [Y_\gamma, Y_{-\gamma}] = \mathsf{diag}(0, 1, 0, -1 \mid 1, 0, -1, 0, 0)$$

とわかる．

以下でウェイト $\lambda = (\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^\star$ をとり固定する．少なくとも $\lambda \in \Lambda^+$ なので，$\lambda_{-2} \geqslant \lambda_{-1} \geqslant 0$ かつ $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant 0$ が成り立っていることに注意する．目標は $\lambda \in \Lambda^\flat$ を示すことである．ただし $\Lambda^\flat$ はセクション 3.4.3 の結果を知っているという立場をとる．つまり，目標を示すためには条件

$$\lambda_{-1} \;\; \geqslant \;\; \ell(\lambda_1, \lambda_2) \;\; (= \jmath_{p=0}(\lambda_1, \lambda_2)) \tag{3.2}$$

を示せば十分である．実直に場合分けをたくさん行う．

(1) まず $\lambda(K_\gamma) = \lambda_{-1} + \lambda_1$ であることに注意する．もし $\lambda(K_\gamma) = 0$ であったら，条件から $\lambda_{-1} = \lambda_1 = 0$ でなくてはならない．従って，特に $\lambda_2 = 0$ を強いるので，このとき $\ell(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ となり，条件 (3.2) は OK と分かる．

(2) 以下で $\lambda(K_\gamma) \neq 0$ の場合を考える．まず $\gamma' := \epsilon_{-2} - \epsilon_1 \in \Psi_\gamma$ の Chevalley 基底を考えて（γ のときと同様）計算すれば $K_{\gamma'} = [Y_{\gamma'}, Y_{-\gamma'}] = \mathsf{diag}(1, 0, -1, 0 \mid 1, 0, -1, 0, 0)$ となり，

$$(\lambda - \gamma)(K_{\gamma'}) \;\; = \;\; \lambda_{-2} + \lambda_1 + 1$$

となる．いま $\lambda_{-2}, \lambda_1 \geqslant 0$ なのでこれはゼロになりえない．そこでさらに進めて，$\gamma'' := \epsilon_{-1} - \epsilon_2 \in \Psi_{\gamma\gamma'}$ の Chevalley 基底を考えて計算すれば $K_{\gamma''} = [Y_{\gamma''}, Y_{-\gamma''}] = \mathsf{diag}(0,1,0,-1 \mid 0,1,0,-1,0)$ となり，

$$(\lambda - \gamma - \gamma')(K_{\gamma''}) \;=\; \lambda_{-1} - 1 + \lambda_2$$

となる．

(3) もし $(\lambda - \gamma - \gamma')(K_{\gamma''}) = 0$ であったら，条件から $\lambda_{-1} = 1$ かつ $\lambda_2 = 0$ でなくてはならない．従って，$\ell(\lambda_1, \lambda_2) = \ell(\lambda_1) \leqslant 1 = \lambda_{-1}$ と分かり，条件 (3.2) は OK.

(4) 以下で $(\lambda-\gamma-\gamma')(K_{\gamma''}) \neq 0$ の場合を考える．まず $\gamma''' := \epsilon_{-2}-\epsilon_2 \in \Psi_{\gamma\gamma'\gamma''}$ の Chevalley 基底を考えて計算すれば $K_{\gamma'''} = [Y_{\gamma'''}, Y_{-\gamma'''}] = \mathsf{diag}(1,0,-1,0 \mid 0,1,0,-1,0)$ となり，

$$(\lambda - \gamma - \gamma' - \gamma'')(K_{\gamma'''}) \;=\; \lambda_{-2} + \lambda_2 - 2$$

となる．

(5) もし $(\lambda - \gamma - \gamma' - \gamma'')(K_{\gamma'''}) = 0$ なら，$\mathbb{B} \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_\gamma \overset{\gamma'}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_{\gamma\gamma'} \overset{\gamma''}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_{\gamma\gamma'\gamma''}$ で奇鏡映の列が止まったということになる．このときの $\Lambda^{\mathcal{S}(\mathbb{B})}$ の条件は $\forall \alpha \in \triangle_0^+$ に対して，$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geqslant \langle \gamma + \gamma' + \gamma'', \alpha^\vee \rangle$ となる．値を具体的に入れてチェックしてみると，新しい条件として $2\lambda_{-1} \geqslant 4$（$\alpha = 2\epsilon_{-1}$ の箇所）を得る．従って，$\lambda_{-1} \geqslant 2 \geqslant \ell(\lambda_1, \lambda_2)$ となり，条件 (3.2) は OK.

(6) もし $(\lambda - \gamma - \gamma' - \gamma'')(K_{\gamma'''}) \neq 0$ なら，奇鏡映の列は $\mathbb{B} \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_\gamma \overset{\gamma'}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_{\gamma\gamma'} \overset{\gamma''}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_{\gamma\gamma'\gamma''} \overset{\gamma'''}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}_{\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''}$ の全て動いたことになる．この場合でも上記と同様に不等号で比較を行えば良いのだが，新しい条件は出てこず，この場合も条件 (3.2) は OK と分かる．

以上の考察から，$\Lambda^\flat = \Lambda^\star$ が成り立つことが分かった．

3.7.2. $\mathbb{Q}_3$ の場合. セクション 3.4.2 の設定を使う．この場合，偶・奇のルートが一致しているので正確には定義をせねばならないが，ひとまずは “単純ルート系” として

$$\Psi := \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3\} \;\subset\; \triangle_0^+ = \triangle_1^+ = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_3, \epsilon_2 - \epsilon_3\}$$

をとる．これで $\gamma := \epsilon_1 - \epsilon_2$ に対する “奇鏡映” を形式的に考えると，$\Psi_\gamma = \{-\gamma, \gamma' := \epsilon_1 - \epsilon_3\}$ を得る．これは通常の GL_3 での鏡映を考えていることに他ならない．さらに γ' での “奇鏡映” をすれば $\Psi_{\gamma\gamma''} = \{\epsilon_2 - \epsilon_3, -\gamma'\}$ を得る．

さて，任意に $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda^\star$ をとり固定する．もちろん $\lambda \in \Lambda^+$ だから $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ に注意する．これが $\lambda \in \Lambda^\flat$ になることを，セクション 3.4.2 の $\Lambda^\flat$ の結果を用いて示してみる．いまの場合は，条件の対偶でみて例えば，$\lambda_1 \neq 0 \Longrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ がいえたらよい（他も同様）．計算により

$$\lambda(K_\gamma) = \lambda_1 + \lambda_2$$

と分かる．もし $\lambda(K_\gamma)=0$ であれば，$\lambda_1\neq 0$ と仮定していたので，これは $\lambda_1\neq\lambda_2$ を意味するので OK．そうでない場合 $\lambda(K_\gamma)\neq 0$ は，ここまでの $\Lambda^{\mathcal{B}}$ の条件を考えることで，

$$\lambda_1-\lambda_2 \;=\; \langle\lambda,(\epsilon_1-\epsilon_2)^\vee\rangle \;\geqslant\; \langle\lambda,(\epsilon_1-\epsilon_2)^\vee\rangle \;=\; 2$$

を得る．従ってこの場合も $\lambda_1\neq\lambda_2$ と分かる．

さらに奇鏡映を行ってもこれ以上条件が出てこないことが確かめられるので，結局 $\lambda\in\Lambda^\flat$ であることが分かった．以上から，$\Lambda^\flat=\Lambda^\star$ が示された．

References

[BruKle03] J. Brundan and A. Kleshchev, *Modular representations of the supergroup $Q(n)$. I*, J. Algebra **260** (2003), no. 1, pp. 64–98.

[BruKuj03] J. Brundan and J. Kujawa, *A new proof of the Mullineux conjecture*, J. Algebraic Combin. **18** (2003), no. 1, 13–39.

[CheWan12] S.-J. Cheng and W. Wang. *Dualities and representations of Lie superalgebras*, volume **144** of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[CheShuWan19] Shun-Jen Cheng, Bin Shu, and Weiqiang Wang, *Modular representations of exceptional supergroups*, Math. Z. **291** (2019), no. 1-2, 635–659.

[FioGav12] R. Fioresi and F. Gavarini, *Chevalley supergroups*, Mem. Amer. Math. Soc. **215** (2012), no. 1014, vi+64.

[Jan03] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups, second ed.*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. **107**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Kac77] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Advances in Math, **26**, no. 1, pp. 8–96, 1977.

[Shi20] T. Shibata, *Borel-Weil theorem for algebraic supergroups*, J. Algebra **547** (2020), pp. 179–219.

[Shi21] T. Shibata, *Algebraic Supergroups and Their Representations*, Proceedings of the International Workshop on Hopf Algebras and Tensor Categories, AMS Contemp. Math. vol. **771**, 2021.

[ShuWan08] Bin Shu and Weiqiang Wang, *Modular representations of the ortho-symplectic supergroups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 251–271.

(Taiki Shibata) 〒 700-0005 岡山県岡山市北区理大町 1-1 岡山理科大学 理学部応用数学科

Department of Applied Mathematics, Okayama University of Science, 1-1 Ridai-cho Kita-ku Okayama-shi, Okayama 700-0005, JAPAN

Email address: shibata@ous.ac.jp

ユニタリ群上の Whittaker 周期の市野-池田型公式について

森本　和輝
(神戸大学大学院理学研究科)

概 要

Lapid と Mao は Whittaker 周期と随伴 L 関数の特殊値とを結ぶ明示公式 (市野-池田型公式) を予想した。本稿では、Lapid-Mao 予想のユニタリ群の場合の証明について説明する。

1　イントロダクション

タイトルにある市野-池田型公式とは、L 関数の特殊値と保型形式の周期とを結ぶ明示公式の定式化の一つである。Lapid-Mao 予想では、Whittaker 周期と呼ばれる周期についての市野-池田型公式を予想している。この章では、 Lapid-Mao 予想の元となった正則モジュラー形式の内積と L 関数の特殊値とを結ぶ明示公式について振り返っておく。

f を重さ k、レベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の正則モジュラー形式とする。つまり、f は $\mathcal{H} := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ 上の正則関数で次の条件を満たす

- $f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}$ の形の Fourier 展開をもつ

さらに、$a_f(0) = 0$ の時、f をカスプ形式と呼ぶ。重さ k、レベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の正則モジュラー形式全体を $M_k(1)$、またカスプ形式全体を $S_k(1)$ と書く。$M_k(1)$ には Hecke 環と呼ばれる多元環が作用する。$f \in M_k(1)$ がすべての Hecke 環の元に関して固有形式となるとき、f を Hecke 固有形式とよぶ。Hecke 固有形式の Fourier 係数 $a_f(1)$ はゼロでないので、$a_f(1) = 1$ となるように正規化できる。

$f \in S_k(1)$ からはさまざまな L 関数が定義できる。例えば、f の標準 L 関数 $L(s, f)(s \in \mathbb{C})$ は次で定義される

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)}{n^s}.$$

L 関数 $L(s, f)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し、全平面に正則関数に解析接続できる。さらに、f が正規化された Hecke 固有形式の場合には、L 関数は次の無限積表示を持つ

$$L(s, f) = \prod_p (1 - a_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

また、一般的に L 関数は適当な関数等式を満たす。今の場合には、$\Lambda(s, f) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s, f)$ とおくと、

$$\Lambda(s, f) = (\sqrt{-1})^k \Lambda(k - s, f)$$

という関数等式を満たす。この L 関数を標準 L 関数と呼ぶ理由を説明しておく。以下 $f \in S_k(1)$ は正規化された Hecke 固有形式とする。今、L 関数の局所因子を次のように分解しておくと

$$1 - a_f(p)p^{-s} + p^{k-1-2s} = (1 - \alpha_f(p)p^{\frac{k-1}{2}-s})(1 - \alpha_f(p)^{-1}p^{\frac{k-1}{2}-s}) \qquad a_f(p) \in \mathbb{C}^\times,$$

L 関数は次のように書ける

$$L(s,f)=\prod_p \det\left(I_2-p^{\frac{k-1}{2}-s}\mathrm{std}\left(\begin{pmatrix}\alpha_f(p) & \\ & \alpha_f(p)^{-1}\end{pmatrix}\right)\right)^{-1}.$$

ここで、std は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の標準表現である。$L(s,f)$ の定義では、$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の表現として標準表現を用いたため標準 L 関数と呼ばれる。一般的には、$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の表現を取り替えることで f の様々な L 関数が定義される。本稿では随伴表現を用いて定義される随伴 L 関数について考える。具体的には、以下のようにして f の随伴 L 関数が定義できる。まず、正規化された Hecke 固有形式 $f,g\in S_k(1)$ の Rankin-Selberg$L$ 関数を次で定義する

$$L(s,f\times g)=\prod_p \det\left(I-p^{k-1-s}\mathrm{std}\otimes\mathrm{std}\left(\left(\begin{smallmatrix}\alpha_f(p) & \\ & \alpha_f(p)^{-1}\end{smallmatrix}\right)\otimes\left(\begin{smallmatrix}\alpha_g(p) & \\ & \alpha_g(p)^{-1}\end{smallmatrix}\right)\right)\right)^{-1}$$

この L 関数も $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で絶対収束し、$\mathbb{C}$ 全体に有理型関数に解析接続される。また、

$$\Lambda(s,f\times g)=2^2(2\pi)^{-2s+k-1}\Gamma(s)\Gamma(s-k+1)L(s,f\times g)$$

とおくと、次の関数等式を満たす

$$\Lambda(s,f\times g)=\Lambda(2k-1-s,f\times g).$$

この時、$L(s,f\times f)=L(s,f,\mathrm{Ad})$ と書き、f の随伴 L 関数と呼ぶ。

本稿ではモジュラー形式の一般化である保型形式の言葉で主張を述べるため、(L^2-) 保型形式の定義とモジュラー形式との関係について簡単に説明しておく。

Definition 1.1. F を数体とし、F のアデール環を $\mathbb{A}_F$ と書く。G を F 上定義された簡約代数群, Z を G の中心とし、ω を $Z(F)\backslash Z(\mathbb{A}_F)$ のユニタリ指標とする。この時、

$$L^2(G,\omega)=\left\{\varphi\in L^2(Z(\mathbb{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)),\mid \varphi(zg)=\omega(z)\varphi(g),\varphi\text{ は滑らか}\right\}$$

の元を中心指標 ω の L^2-保型形式 *(*または、単に保型形式*)* と呼ぶ。さらに、G の任意の真の放物型部分群を取り、その冪単根基を U と書いたとき、条件

$$\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A}_F)}\varphi(ug)\,du=0\qquad \text{任意の } g\in G(\mathbb{A}_F) \tag{1.0.1}$$

を満たすなら $\varphi\in L^2(G,\omega)$ を中心指標 ω の L^2-カスプ形式と呼ぶ。中心指標 ω の L^2-カスプ形式のなす空間を $L^2_0(G,\omega)$ と書く。また、$L^2_0(G)=\bigoplus_\omega L^2_0(G,\omega)$ とおいた時、$L^2_0(G)$ の元を L^2-カスプ形式 *(*または、単にカスプ形式*)* と呼ぶ。$G(\mathbb{A}_F)$ の右移動により $L^2_0(G)$ への作用が定まり、この表現の既約成分を既約カスピダル保型表現と呼ぶ。

$f\in S_k(1)$ からは中心指標が自明な L^2-カスプ形式が次のように定義できる。解析同相

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\ni\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})g\mapsto\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times g\mathrm{GL}(2,\hat{\mathbb{Z}})\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\mathrm{GL}(2,\hat{\mathbb{Z}})$$

を用いると、$g\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ に対し、$g\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times g_\infty\mathrm{GL}(2,\hat{\mathbb{Z}})$ となる $g_\infty=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ をとることができる。この時、

$$\varphi_f: g\mapsto f\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right)(ci+d)^{-k}$$

により、$\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の関数が定義できる。この φ_f が $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の L^2-カスプ形式の例である。f の Fourier 係数 $a_f(n)$ は φ_f の積分によって次のように書くことができる。指標 $\psi_\mathbb{Q}:\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}\to\mathbb{C}^\times$ を次で定義する

$$\psi_\mathbb{Q}:\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}\xrightarrow{\sim}(\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{Z}})/\mathbb{Z}\ni(x_\infty,x_f)\mapsto\exp(2\pi i x_\infty)$$

この時、$g_\infty = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ と $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \varphi_f\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} g_\infty\right) \psi_{\mathbb{Q}}^{-1}(mu)\, du = a_f(m)\exp(-2m\pi y)(ci+d)^{-k}$$

が成り立つ。ここで、$x+iy = \frac{ai+b}{ci+d}$、du は $\mathrm{vol}(\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}, du) = 1$ となる Haar 測度。特に、任意の $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ に対して、

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \varphi_f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0$$

が成り立ち、φ_f が条件 (1.0.1) を満たすことがわかる。より一般に $\psi : \mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^\times$ を非自明な指標とした時、$\varphi \in L_0^2(\mathrm{GL}(2))$ に対して、

$$W_\psi(\varphi) = \int_{F\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}\right) \psi^{-1}(x)\, dx$$

を φ の (ψ-)Whittaker 周期と呼ぶ。上の議論により、これはモジュラー形式における Fourier 係数の一般化となっている。次章では、ユニタリ群の場合に類似の積分により Whittaker 周期を定義する。

ρ を右移動としたとき

$$V_f := \langle \rho(g)\varphi_f : g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \rangle_{\mathbb{C}}$$

とおくと、$f \in S_k(1)$ が Hecke 固有形式の場合には V_f は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約表現を与える。この表現を (π_f, V_f) と書くと、(π_f, V_f) は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約カスピダル保型表現である。π_f の各素数 p の局所成分 $\pi_{f,p}$ は、佐武パラメータと呼ばれる $\mathbb{C}$ の元に一意的定まる。今の場合には、L 関数の定義で用いた $\alpha_f(p)$ が佐武パラメータである。従って、π_f の佐武パラメータという表現論的情報により、L 関数 $L(s,f)$ が定義できる。ただし、保型表現 π_f から定義される L 関数 $L(s,\pi_f)$ は関数等式が変換 $s \mapsto 1-s$ に対して成り立つように定義される。つまり、今の場合

$$L(s,\pi_f) := L\left(s + \frac{k-1}{2}, f\right)$$

である。π_f の随伴 L 関数も同様に定義でき、$L(s,\pi_f,\mathrm{Ad})$ と書く。また、$\Lambda(s,\pi_f,\mathrm{Ad})$ も $\Lambda(s,f,\mathrm{Ad})$ と同様に定義する。この時、次の等式が知られている。

Theorem 1.1. *$f \in S_k(1)$ を正規化された Hecke 固有形式とする。この時、次の等式が成り立つ*

$$\langle f, f \rangle = 2^{-k} \cdot \mathrm{Res}_{s=1}\Lambda(s,\pi_f,\mathrm{Ad}). \tag{1.0.2}$$

ここで、$f, g \in S_k(1)$ に対し、内積 $\langle f, g \rangle$ を次で定義する

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}} f(z)\overline{g(z)} y^k \frac{dxdy}{y^2}.$$

$\varphi, \varphi' \in L_0^2(\mathrm{GL}(2))$ に対して、内積を

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle = \mathrm{vol}(Z(\mathbb{A})\mathrm{GL}(2,F)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_F))^{-1} \cdot \int_{Z(\mathbb{A})\mathrm{GL}(2,F)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_F)} \varphi(g)\overline{\varphi'(g)}\, dg$$

により定義すると、

$$\langle f, f \rangle = \frac{\pi^2}{3}\langle \varphi_f, \varphi_f \rangle$$

という関係が成り立つ。従って、(1.0.2) は

$$\langle \varphi_f, \varphi_f \rangle = c \cdot \mathrm{Res}_{s=1} L(s,\pi_f,\mathrm{Ad})$$

と書くことができる。ただし、c は有理数の積と π の冪で表される明示的な定数。より一般に、φ_f を π_f の任意の元に拡張することを考える。まず、f が正規化されていない場合には、

$$\langle \varphi_f, \varphi_f \rangle = |a_f(1)|^2 \cdot c \cdot \mathrm{Res}_{s=1} L(s, \pi_f, \mathrm{Ad}).$$

が得られる。この明示公式を

$$\frac{|a_f(1)|^2}{\langle \varphi_f, \varphi_f \rangle} = \frac{c}{\mathrm{Res}_{s=1} L(s, \pi_f, \mathrm{Ad})} \tag{1.0.3}$$

と書き直しておくと、この式は f のスカラー倍によらない形になっている。この明示公式において φ_f を一般の π_f の元、$a_f(1)$ を Whittaker 周期へと一般化した明示公式がこの場合の Lapid-Mao 予想である。次節では、ユニタリ群の場合に Lapid-Mao 予想の正確な主張を与える。

2 Lapid-Mao 予想

Lapid と Mao [5] は数体上定義された任意の準分裂代数群とメタプレクティック群に対して、Whittaker 周期と随伴 L 関数の特殊値とを結ぶ明示公式を予想した。この章では、ユニタリ群の場合の Lapid-Mao 予想の主張を説明する。

Remark 2.1. 準分裂という条件は、*Whittaker* 周期を定義するために必要な条件である。

2.1 Whittaker 周期

F は数体とし、E を F の 2 次拡大とする。$\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元による E への作用を $E \ni x \mapsto \bar{x}$ と書く。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、F 上定義された準分裂ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ を次で定義する

$$\mathrm{U}(n) = \left\{ g \in \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n \ : \ {}^t\overline{g} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \right\}.$$

また、$\mathrm{U}(n)$ の部分群 N を

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n) \right\}$$

で定義する。この時、$\mathrm{U}(n)$ の上三角行列全体からなる部分群は $\mathrm{U}(n)$ の Borel 部分群であり、N はその冪単根基である。今、ψ_N を $N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)$ の非退化な指標とする。ここで、$\mathrm{U}(n)(F)$ の対角行列の共役により $N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)$ の指標全体に作用が定まるが、この作用による固定部分群が $\mathrm{U}(n)(F)$ の中心と一致するような指標を非退化と呼ぶ。Whittaker 周期は以下のように定義される。

Definition 2.1. φ を $\mathrm{U}(n)(\mathbb{A}_F)$ のカスプ形式とする。この時、

$$W_{\psi_N}(\varphi) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \varphi(n)\psi_N^{-1}(n)\, dn$$

を φ の ψ_N*-Whittaker* 周期、または単に *Whittaker* 周期と呼ぶ。(π, V_π) を $\mathrm{U}(n)(\mathbb{A}_F)$ の既約カスピダル保型表現とした時、$W_{\psi_N}(\cdot)$ が V_π 上恒等的にゼロでないなら、(π, V_π) は ψ_N*-generic (*または、単に *generic)* であるという。

(π, V_π) を $\mathrm{U}(n)(\mathbb{A}_F)$ の既約カスピダル保型表現とする。線形写像 $V_\pi \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto W_{\psi_N}(\varphi)$ は

$$\mathrm{Hom}_{N(\mathbb{A}_F)}(\pi, \psi_N)$$

の元を与える。この時、F の任意の素点 v に対し、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{N(F_v)}(\pi_v, \psi_{N,v}) \leq 1$$

が成り立つ。ここで、F_v を F の v での局所化、π_v、$\psi_{N,v}$ は π と ψ の v-成分である。π_v が generic な時、つまり $\mathrm{Hom}_{N(F_v)}(\pi_v, \psi_{N,v}) \neq 0$ である時、Frobenius の相互律により、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(n)(F_v)}(\pi_v, \mathrm{Ind}_{N(F_v)}^{\mathrm{U}(n)(F_v)} \psi_{N,v}) = 1$$

が成り立つ。従って、$\mathrm{Ind}_{N(F_v)}^{\mathrm{U}(n)(F_v)} \psi_{N,v}$ における π_v の一意的な実現が存在する。この π_v の実現を $\mathbb{W}^{\psi_{N,v}}(\pi_v)$ と書き、π_v の $(\psi_{N,v}$-$)$Whittaker モデルと呼ぶ。また、局所的な一意性から

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{N(\mathbb{A}_F)}(\pi, \psi_N) \leq 1$$

が従う。この重複度 1 定理により、次章で定義する (正規化された) 局所 Whittaker 周期を用いると、次を満たす定数 $C_\pi \in \mathbb{C}$ が存在することがわかる：

$$|W_{\psi_N}(\varphi)|^2 = C_\pi \cdot \prod_v (\varphi_v \text{ の (正規化された) 局所 Whittaker 周期}) \tag{2.1.1}$$

が任意の $\varphi = \otimes \varphi_v \in V_\pi$ に対して成り立つ。Lapid-Mao 予想では、$W_{\psi_N}(\cdot)$ が V_π 上で恒等的にゼロでない (π, V_π) に対して、この C_π が明示的な定数と L 関数の特殊値で書けることを予想している。次章では、正規化された局所 Whittaker を定義することで Lapid-Mao 予想の主張を正確に述べる。

Remark 2.2. $\mathrm{SO}(n+1)$ のカスプ形式を $\mathrm{SO}(n)$ に制限し、$\mathrm{SO}(n)$ のカスプ形式との内積をとることで定義される周期は Gross-Prasad 周期と呼ばれる。この周期についての重複度 1 定理により、(2.1.1) のような局所周期への分解が成り立つ。市野篤史氏と池田保氏 [4] は、緩増加なカスピダル保型表現に対して局所 Gross-Prasad 周期を定義し、この時の C_π が L-関数の特殊値と明示的な定数により記述できることを予想した。周期と L 関数の特殊値とを結ぶ明示公式は様々な形で証明されていたが、このように大域的な周期の局所周期への分解の定数倍に L 関数の特殊値が現れるという形の定式化が [4] において初めて与えられた。Lapid と Mao の予想はこの市野-池田予想の Whittaker 周期の場合の類似である。

2.2 局所 Whittaker 周期

v を F の素点とする。$(-,-)_v \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(n)(F_v)}(\pi_v \otimes \pi_v^\vee, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(n)(F_v)}(\pi_v \otimes \overline{\pi_v}, \mathbb{C})$ を π_v の行列係数とする。v が有限素点の時、次のようにして $\varphi_v \in \pi_v$ の局所 Whittaker 周期を定義する

$$W_v(\varphi_v) := \int_{N(F_v)}^{st} (\pi_v(n)\varphi_v, \varphi_v)_v \psi_{N,v}^{-1}(n)\, dn.$$

ここで、$\int^{st}$ は安定積分、つまり、十分大きな $N(F_v)$ のコンパクト開部分群 N_0 で, 任意の $N_0 \subset N_1$ となる $N(F_v)$ のコンパクト開部分群 N_1 に対して、

$$\int_{N_0} (\pi_v(n)\varphi_v, \varphi_v)_v \psi_{N,v}^{-1}(n)\, dn = \int_{N_1} (\pi_v(n)\varphi_v, \varphi_v)_v \psi_{N,v}^{-1}(n)\, dn$$

となるものが存在する時、この共通の値を $\int^{st}$ で表す。安定積分が定義されることは Lapid-Mao [5, Proposition 2.3] で証明されている。一方で、v がアルキメデス素点の場合には、まず π_v を二乗可積分表現 σ_v による放物型誘導表現の部分表現とみなす。この時、Jacquet 積分により π_v の Whittaker モデルは σ_v の Whittaker モデ

ルにより構成できる。また、σ_v については上記の積分は絶対収束するため、このことから σ_v の局所 Whittaker 周期を上記のように定義でき、Jacquet 積分と組み合わせることで π_v の局所 Whittaker 周期を定義される。詳細についてはLapid-Mao[5, Section 2] を参照してもらいたい。また、$\mathrm{Hom}_{N(F_v)}(\pi_v, \psi_{N,v}) \neq 0$ なら、$W_v(\cdot)$ が恒等的にゼロでないことが [5, Proposition 2.10, Section 2.5] で示されている。

上記で説明したように局所 Whittaker 周期の無限積を考えるので、収束性が問題となるが次の事実によりそれは可能である。

Proposition 2.1 (Proposition 2.14 in [5])**.** v は 2 を割らない有限素点とし、E_v は F_v の不分岐二次拡大、または $E_v = F_v \oplus F_v$ とする。π_v は *generic* であるとする。また、$\pi_v, \psi_{N,v}$ は不分岐、つまり最大コンパクト部分群により不変なゼロでないベクトルを持つとする。$\varphi_v^\circ \neq 0$ を最大コンパクト部分群により不変なベクトルとした時、

$$W_v(\varphi_v^\circ) = \frac{\prod_{j=1}^n L(j, \chi_{E_v}^j)}{L(1, \pi_v, \mathrm{Ad})}(\varphi_v^\circ, \varphi_v^\circ)$$

が成り立つ。ただし、$L(1, \pi_v, \mathrm{Ad})$ は π_v の局所随伴 L-因子、χ_{E_v} は局所類体論により E_v/F_v に対応する $F_v^\times$ の指標、dn は $\mathcal{O}_v$ を F_v の整数環とした時、$\mathrm{vol}(N(\mathcal{O}_v)) = 1$ となるように正規化した測度。

$0 \neq \varphi_v \in \pi_v$ に対し、正規化された局所 Whittaker 周期を

$$W_v^\#(\varphi_v) = \frac{L(1, \pi_v, \mathrm{Ad})}{\prod_{j=1}^n L(j, \chi_{E_v}^j)} \cdot \frac{W_v(\varphi_v)}{(\varphi_v, \varphi_v)_v}$$

で定義する。generic な π を考えた時、この Proposition により任意のゼロでない元 $\varphi = \otimes_v \varphi_v \in V_\pi$ に対し、ほとんどすべての素点 v で $W_v^\#(\varphi_v) = 1$ が成り立つ。従って、局所周期の無限積

$$\prod_v W_v^\#(\varphi_v)$$

が定義できる。ユニタリ群の場合の Lapid-Mao 予想の主張は次のように述べられる。

Conjecture 2.1. (π, V_π) を $\mathrm{U}(n)(\mathbb{A}_F)$ の既約カスピダル保型表現で、ψ_N-*generic* であるとする、つまり $W_{\psi_N}(\cdot)$ が V_π 上の非自明なものとする。π の内積 $(-,-)$ を

$$(\varphi, \varphi') = \mathrm{vol}(\mathrm{U}(n)(F)\backslash \mathrm{U}(n)(\mathbb{A}_F))^{-1} \cdot \int_{\mathrm{U}(n)(F)\backslash \mathrm{U}(n)(\mathbb{A}_F)} \varphi(g)\overline{\varphi'(g)}\, dg, \qquad \varphi, \varphi' \in V_\pi$$

で定義する。また、$(-,-)_v$ を $(-,-) = \prod_v (-,-)_v$ となるように選ぶ。この時、任意のゼロでない $\varphi = \otimes \varphi_v \in \pi$ に対して、

$$\frac{|W_{\psi_N}(\varphi)|^2}{(\varphi, \varphi)} = 2^{1-k} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n L(j, \chi_E^j)}{L(1, \pi, \mathrm{Ad})} \prod_v W_v^\sharp(\varphi_v)$$

が成り立つ。ここで、k は π から定まる或る自然数、$N(\mathbb{A}_F)$ には玉河測度を、$N(F_v)$ には局所玉河測度を用いる。

Remark 2.3. Π を π の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_E)$ へのベースチェンジリフトとする。この時、適当な $\mathrm{GL}(n_i, \mathbb{A}_E)$ の既約カスピダル保型表現 Π_i を用いて、$\Pi = \boxplus_{i=1}^k \Pi_i$ と書ける。ここで、現れる k が予想における k である。

Remark 2.4. 式 (1.0.3) と同様の明示公式を得るためには、局所 Whittaker 周期 $W_v^\sharp(\varphi_v)$ を具体的に計算すれば良い。ただし、直接的にこの積分を計算することは容易ではない。例えば、Chen-市野 [2] は $\mathrm{GSp}(4)$ の場合に、π が $\mathrm{Sp}(4, \widehat{\mathbb{Z}})$-不変なベクトルを持つときに、(1.0.3) の類似の明示公式を証明している。彼らは、Lapid-Mao 予想とは異なる形の明示公式を証明し、直接計算を避けてエンドスコピックな場合への還元を用いることにより、実素点での局所積分を計算し明示公式を証明している。

Lapid と Mao [5] は F 上の任意の準分裂代数群とメタプレクティック群について、同様の予想を定式化している。次の場合にこの予想は知られている。

- $\mathrm{U}(1), \mathrm{U}(2), \mathrm{SO}(3), \mathrm{SO}(4), \mathrm{GL}(n)$ (Lapid-Mao [5])
- $\mathrm{U}(2n+1)$、π が緩増加 (Beuzart–Plessis-Chaudouard [1])
- $\mathrm{U}(2n)$, F は総実、π_∞ は二乗可積分表現、有限分裂素点では π_v は不分岐、または二乗可積分表現 ([9])
- $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n)$, F は総実、π_∞ は二乗可積分表現 (Lapid-Mao [7])
- $\mathrm{GSp}(4)$, (古澤-森本 [3]. [3] では緩増加な場合にのみ証明しているが、一般の場合に簡単に拡張できる)

本稿の主定理は次の結果である。

Theorem 2.1 ([11]). *ψ_N-generic* な $\mathrm{U}(n)$ の任意の既約カスピダル保型表現に対して *Conjecture 2.1* は成り立つ。

Remark 2.5. n が奇数で π が緩増加の場合には、この結果は Beuzart–Plessis-Chaudouard [1] によりすでに証明されていたが、Theorem 2.1 では、奇数の場合でも緩増加の仮定は必要としない。ただし、一般化 Ramanujan 予想を仮定すると、ψ_N-generic な既約カスピダル保型表現は緩増加なので、この仮定の下では、奇数の場合の Theorem 2.1 は [1] に含まれる。

3　Theorem 2.1 の証明の概略

この章では、Theorem 2.1 の証明の概略を説明する。

3.1　局所等式への還元

Lapid と Mao [6] は、Conjecture 2.1 が局所体上の適当な等式へと帰着できることを証明した。この章では、この局所等式への帰着について説明する。

Lapid と Mao [6] は志村型積分と呼ばれる π_v の局所ゼータ積分を用いて、$\mathbb{W}^{\psi_{N,v}}(\pi_v)$ 上の内積を定義した。この内積を $[-,-,]_v$ と書く。この時、Whittaker モデルの一意性により、適当な $c_{\pi_v} \in \mathbb{C}^\times$ が存在して、次を満たす

$$\int_{N(F_v)}^{st} [\pi_v(n)W_v, W'_v]_v \psi_{N,v}^{-1}(n)\, dn = c_{\pi_v} W_v(e)\overline{W'_v(e)}, \qquad W_v, W'_v \in \mathbb{W}^{\psi_{N,v}}(\pi_v).$$

ただし、$[-,-,]_v$ の定義に用いられる測度や dn は ψ_N から定まる良い測度を選ぶ ([9, Section 2.4] を参照)。Lapid と Mao は保型降下法と呼ばれる保型表現の構成法を用いることで次を証明した。

Theorem 3.1 (Theorem 5.5(n が偶数)、Theorem 8.6(n が奇数) in [6]). *Conjecture 2.1* と同じ記号を用いる。この時、ほとんどすべての素点 v において、$c_{\pi_v} = 1$ が成り立つ。また

$$\frac{|W_{\psi_N}(\varphi)|^2}{(\varphi, \varphi)} = \left(\prod_v c_{\pi_v}^{-1}\right) \cdot 2^{1-k} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n L(j, \chi_E^j)}{L(1, \pi, \mathrm{Ad})} \prod_v W_v^\natural(\varphi_v)$$

が任意のゼロでない $\varphi = \otimes_v \varphi_v \in V_\pi$ に対して成り立つ。

Theorem 3.1 により、$\left(\prod_v c_{\pi_v}^{-1}\right) = 1$ が成り立てば、Conjecture 2.1 が π に対して成り立つ。より詳しく、Lapid と Mao は次の等式を予想した。

Conjecture 3.1. 任意の素点 v に対し、$c_{\pi_v} = \omega_{\pi_v}(-1)$ が成り立つ。

Conjecture 3.1 が示されれば、$\left(\prod_v c_{\pi_v}^{-1}\right) = 1$ がわかる。実際、n が偶数の場合には、Theorem 2.1 は次の定理から従う。

Theorem 3.2 ([9, 11]). *n を偶数とする。任意の有限素点と実素点において、Conjecture 3.1 が成り立つ。また、複素素点 v においては、$c_{\pi_v} c_{\pi_{\bar{v}}} = \omega_{\pi_v}(-1)\omega_{\pi_{\bar{v}}}(-1)$ が成り立つ。特に、$\left(\prod_v c_{\pi_v}^{-1}\right) = 1$ が成り立つ。*

3.2 Theorem 3.2 と Theorem 2.1 の証明の概略

最初に次数が $2n$ の場合を考える。v が有限素点の場合には、証明は [7] の類似の議論により与えられる。もう少し詳しく説明すると、収束性の問題を無視した場合、Conjecture 3.1 は Fourier 逆変換を繰り返し用いることにより証明できる。また、この議論はモデルの変換公式 ([8, 10]) と呼ばれる積分の関係式を用いることにより正当化できる。

v が無限素点の場合には異なる手法を用いる。簡単のために、v が分裂実素点の場合にアイデアを説明する。この場合には、π_v は次のように書ける

$$\pi_v = \chi_1 \times \cdots \times \chi_r \times (\xi_1|\cdot|^{s_1} \times \xi_1^{-1}|\cdot|^{-s_1}) \times \cdots \times (\xi_k|\cdot|^{s_k} \times \xi_k^{-1}|\cdot|^{-s_k}).$$

ここで、$a \times b$ は a, b を Levi 部分群の表現にもつ放物型誘導表現を表す、ξ は $\mathbb{R}^\times$ のユニタリ指標、χ_i は $\mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$ または $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 (の極限), $s_i \in \mathbb{C}$ は $|\mathrm{Re}(s_i)| < \frac{1}{2}$ を満たす。この時、次が示せる。

Lemma 3.1. $|\mathrm{Re}(s_i)| < \frac{1}{2}$ を動かした時、c_{π_v} と $\omega_{\pi_v}(-1)$ は s_i に関して正則である。

従って、十分多くの s_i に対して、Conjecture 3.1 を示せばよい。そのために、$a_i \in \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ の表現 $\pi_v[a_1,\ldots,a_k]$ を考える

$$\pi_v[a_1,\ldots,a_k] := \chi_1 \times \cdots \times \chi_r \times (\xi_1|\cdot|^{\sqrt{-1}a_1} \times \xi_1^{-1}|\cdot|^{-\sqrt{-1}a_1}) \times \cdots \times (\xi_k|\cdot|^{\sqrt{-1}a_k} \times \xi_k^{-1}|\cdot|^{-\sqrt{-1}a_k}).$$

この表現の多くは次のように大域化可能である。

Lemma 3.2. *$F = \mathbb{Q}$, E を $\mathbb{Q}$ の実二次拡大とする。この時、ψ_N-generic な $\mathrm{U}(2n)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の緩増加な既約カスピダル保型表現 (=:$\pi'[a_1,\ldots,a_k]$) でその実素点での成分が $\pi_v[a_1,\ldots,a_k]$ となるものが存在するような $(a_1,\ldots,a_k)$ の集合は $\mathbb{R}^k$ の稠密な部分集合である。*

この補題により、$\pi' := \pi'[a_1,\ldots,a_k]$ について Conjecture 2.1 が成り立てば、Theorem 3.1 により

$$\prod_v c_{\pi'_v} = 1$$

が成り立つ。さらに、有限素点の場合の結果を用いることで

$$(\prod_{v\neq\infty} \omega_{\pi'_v}(-1)) \times c_{\pi'_\infty} = 1$$

がわかる。つまり、

$$c_{\pi'_\infty} = \omega_{\pi'_\infty}(-1)$$

が成り立つ。従って、上で述べたように s_i についての正則性から

$$c_{\pi_v} = \omega_{\pi_v}(-1)$$

が成り立つ。以上から、 Theorem 3.2 の証明は、π' についての Conjecture 2.1 へと帰着された。さらに、テータリフトと呼ばれる保型表現の構成方法を用いると次が証明できる。

Proposition 3.1. *π' の $\mathrm{U}(2n+1)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ へのテータリフト π'_0 は適当なデータを取れば、緩増加な既約カスピダル保型表現を与える。またその時、π' に対して Conjecture 2.1 が成り立つことと、π'_0 に対して Conjecture 2.1 が成り立つことは同値である。*

Proposition 3.1 により、Theorem 3.2 の証明は π'_0 についての Conjecture 2.1 へと帰着されるが、前章で述べたようにこの場合は Beuzart-Plessis と Chaudouard [1] により証明されているため、Theorem 3.2 の証明が完了する。複素素点においても同様の議論により Theorem 3.2 が証明でき、n が偶数の場合の Theorem 2.1 の証明が完了する。最後に、$2n+1$ の場合の Theorem 2.1 は、Proposition 3.1 と同様の議論により $2n+2$ の場合へと帰着できるので、いま証明した偶数の場合から従う。

謝辞

第 70 回代数学シンポジウムにて講演の機会を与えてくださったプログラム責任者の武田秀一郎先生、古庄英和先生、シンポジウム責任者の平野幹先生、会場責任者の小林真一先生に心より感謝いたします。

References

[1] R. Beuzart-Plessis and P-H. Chaudouard, *The global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups. II. From Eisenstein series to Bessel periods.* Forum Math. Pi **13** (2025), Paper No. e16, 98 pp.

[2] S.-Y. Chen and A. Ichino, *On Petersson norms of generic cusp forms and special values of adjoint L-functions for* GSp(4). Amer. J. of Math. **145** (2023), 899–993.

[3] M. Furusawa and K. Morimoto, *On Gross-Prasad conjecture for* $(\mathrm{SO}(5), \mathrm{SO}(2))$ *and its refinement.* Compos. Math. **160** (2024), 2115–2202

[4] A. Ichino, and T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture.* Geom. Funct. Anal. **19** (2010), no. 5, 1378–1425.

[5] E. Lapid and Z. Mao, *A conjecture on Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms.* J. Number Theory **146** (2015), 448–505.

[6] E. Lapid and Z. Mao, *On Whittaker-Fourier coefficients of automorphic forms on unitary groups : reduction to a local conjecture.* Advances in the theory of automorphic forms and their L-functions, 295–320, Contemp. Math., **664**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[7] E. Lapid and Z. Mao, *On an analogue of the Ichino-Ikeda conjecture for Whittaker coefficients on the metaplectic group.* Algebra Number Theory **11** (2017), no. 3, 713–765.

[8] K. Morimoto, *Model transition for representations of unitary type.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2020, no. 4, 1112–1203.

[9] K. Morimoto, *On a certain local identity for Lapid-Mao's conjecture and formal degree conjecture: even unitary group case.* J. Inst. Math. Jussieu **21** (2022), no. 4, 1107–1161.

[10] K. Morimoto, *Model transition for certain Langlands quotients of* GL_{4n}. to appear in Forum Math.

[11] K. Morimoto, *On Ichino-Ikeda type formula of Whittaker periods for unitary groups.* preprint, arXiv:2403.19166

アソシエーションスキームや対称空間に付随する多変数多項式について

栗原　大武
山口大学大学院創成科学研究科

1　はじめに

アソシエーションスキームは，有限集合 X とある種の正則性をもつ $X \times X$ の分割からなる組合せ構造である．アソシエーションスキームの例として，Hamming スキームや Johnson スキームとよばれるものがあり，これらは古典的な符号理論やデザイン理論と深いかかわりがある．そしてこれらのアソシエーションスキームは P かつ Q 多項式性と呼ばれる性質をもつ．P かつ Q 多項式アソシエーションスキームには，Askey-Wilson 多項式系（およびその極限）が付随することが知られている．これまで，多変数版の Askey-Wilson 多項式系の関する研究は多く行われてきたが，P および Q 多項式アソシエーションスキームの多変数化（高階数化）に関する枠組みは確立されていなかった．しかし近年，Bernard-Crampé-d'Andecy-Vinet-Zaimi [3] によって 2 変数の場合の定義が提案され，この流れを汲み，筆者と坂内英一氏（九州大学名誉教授），Da Zhao 氏（East China University of Science and Technology），Yan Zhu 氏（Shanghai University for Science and Technology）との共同研究 [2] により，一般の単項式順序を用いることで，より自然で扱いやすい形でアソシエーションスキームの多変数 P および Q 多項式性を定義した．またこの定義に基づき，これまで知られていた多くのアソシエーションスキームが多変数 P および Q 多項式アソシエーションスキームになることを示した．さらに，筆者と東谷章弘氏（大阪大学）との共同研究 [10] でアソシエーションスキームが非原始的という条件を単項式順序の言葉で特徴付けることができた．またごく最近，コンパクト対称空間が [2] の定義の意味で多変数 Q 多項式性をもつことが明らかになったため，この点についても本稿の最後に少しではあるが言及する．

2　アソシエーションスキーム

2.1　アソシエーションスキームの定義と例

まずはアソシエーションスキームの基本的事項を与える．詳しくは坂内-坂内-伊藤 [21] を参照されたい．なお，過去の代数学シンポジウムでもアソシエーションスキームについての講演がいくつか行われている．2004 年以降の報告集は web から容易にアクセスができるので花木 [22, 28]，坂内 [23, 30]，田中 [24, 29]，伊藤 [27, 31]，吉田 [25]，水川 [26] も是非参照していただきたい．

$X, \mathcal{I}$ を有限集合とし，$\mathcal{R}\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を全射な写像とする．各 $i \in \mathcal{I}$ に対して，関係行列 A_i を次で定める: A_i の行と列は X によって添え字づけられた $|X|$ 次正方行列で，A_i の各成分は

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \mathcal{R}(x,y) = i \text{ のとき;} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である．このとき $\mathcal{R}$ が全射であることから

(A1) $\sum_{i \in \mathcal{I}} A_i = J_X$ (J_X: 全 1 行列)，$A_{i_1} \circ A_{i_2} = \delta_{i_1 i_2} A_{i_1}$ ($\circ$: 成分毎積)

が成り立つことに注意する．

定義 2.1. $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R}, \mathcal{I}) = (X, \mathcal{R}) = (X, \{A_i\}_{i \in \mathcal{I}})$ が以下の条件を満たすとき，$\mathfrak{X}$ をアソシエーションスキームという：

(A2) $A_{i_0} = I_X$（I_X は単位行列）を満たす $i_0 \in \mathcal{I}$ が存在する;

(A3) 各 $i \in \mathcal{I}$ に対して，$A_i^T = A_{i^T}$ を満たす $i^T \in \mathcal{I}$ が存在する;

(A4) 各 $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$ に対して，$A_{i_1} A_{i_2} = \sum_{i_3 \in \mathcal{I}} p_{i_1 i_2}^{i_3} A_{i_3}$ を満たす非負整数 $p_{i_1 i_2}^{i_3}$ が存在する;

(A4) の整数 $\{p_{i_1 i_2}^{i_3}\}_{i_1, i_2, i_3 \in \mathcal{I}}$ を $\mathfrak{X}$ の交叉数という．また定数 $d := |\mathcal{I}| - 1$ のことを $\mathfrak{X}$ のクラスという．さらに

(A5) 各 $i_1, i_2 \in \mathcal{I}$ に対して，$A_{i_1} A_{i_2} = A_{i_2} A_{i_1}$（つまり $p_{i_1 i_2}^{i_3} = p_{i_2 i_1}^{i_3}$）を満たすとき，$\mathfrak{X}$ は可換であるという．

(A6) 各 $i \in \mathcal{I}$ に対して，$i^T = i$（つまり A_i は対称行列）を満たすとき，$\mathfrak{X}$ は対称であるという．なお，$\mathfrak{X}$ は対称ならば可換であることは容易に示される．

定義 2.2. 2 つのアソシエーションスキーム $\mathfrak{X}_1 = (X_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{I}_1)$ と $\mathfrak{X}_2 = (X_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{I}_2)$ に対して，以下の条件を満たす 2 つの全単射 $f\colon X_1 \to X_2$ と $g\colon \mathcal{I}_1 \to \mathcal{I}_2$ が存在するとき，$\mathfrak{X}_1$ と $\mathfrak{X}_2$ は同型であるという：

$$\text{任意の } x, y \in X_1 \text{ に対して}, \mathcal{R}_2(f(x), f(y)) = g(\mathcal{R}_1(x, y)).$$

このとき，2 つのアソシエーションスキームについて

$$\text{任意の } i_1, i_2, i_3 \in \mathcal{I}_1 \text{ に対して}, p_{g(i_1)g(i_2)}^{g(i_3)} = p_{i_1 i_2}^{i_3} \tag{1}$$

が成り立ち，交叉数は同型により保存される．一方で，(1) を満たす全単射 g が存在するとき，$\mathfrak{X}_1$ と $\mathfrak{X}_2$ は代数的に同型であるという．一般的に代数的に同型であっても同型とは限らない．これについて後の例 2.7 で具体例を挙げる．

以下でアソシエーションスキームの例をいくつか挙げる．

例 2.3 (Hamming スキーム)**.** q, n を自然数とする．また F を q 元集合とし，$X := F^n$ とおく．$\mathcal{I} = \{0, 1, \ldots, n\}$ とするとき，全射 $\mathcal{R}\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{R}(x, y) = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i \neq y_i\}| \quad (\textit{Hamming}\text{ 距離})$$

このとき，$\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R}, \mathcal{I})$ は対称アソシエーションスキームになり，これを Hamming スキーム $H(n, q)$ と呼ぶ．

例 2.4 (Johnson スキーム)**.** n, k を $n \geq 2k$ をみたす自然数とし，X を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の k 元部分集合からなる集合とする．$\mathcal{I} = \{0, 1, \ldots, k\}$ とするとき，全射 $\mathcal{R}\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{R}(x, y) = k - |x \cap y| \quad (\text{差集合距離})$$

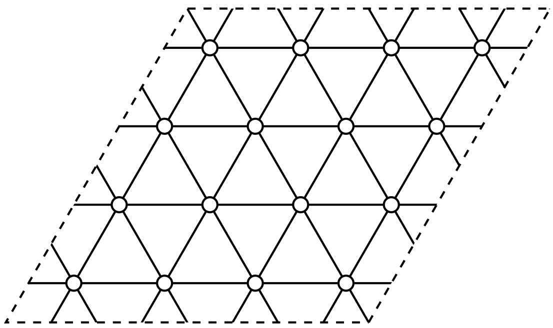
このとき，$\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R}, \mathcal{I})$ は対称アソシエーションスキームになり，これを Johnson スキーム $J(n, k)$ と呼ぶ．

例 2.5 (群アソシエーションスキーム)**.** G を有限群とし，$\{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ を G の共役類 ($\mathcal{I}$ は G の共役類を表すラベルの集合) とする．全射 $\mathcal{R}\colon G \times G \to \mathcal{I}$ を $y^{-1}x \in C_i$ のとき $\mathcal{R}(x, y) = i$ と定める．このとき，$\mathfrak{X} = (G, \mathcal{R}, \mathcal{I})$ は可換アソシエーションスキームになり，これを群アソシエーションスキームと呼ぶ．

例 2.6 (Schur 的アソシエーションスキーム)**.** G を有限群とし，G は有限集合 X に推移的に作用しているものとする．このとき，G は $X \times X$ にも $g(x, y) := (gx, gy)$ により自然に作用する．この G による $X \times X$ の軌道

分解を $X \times X = \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} R_i$ とする．全射 $\mathcal{R}\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を $(x, y) \in R_i$ のとき $\mathcal{R}(x, y) = i$ と定める．このとき，$\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R}, \mathcal{I})$ はアソシエーションスキームになり，これを Schur 的アソシエーションスキームと呼ぶ．なお，固定した $x_0 \in X$ に対して $K := \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$ とおくとき，X のことを等質空間として G/K と表すこともある．$\mathfrak{X} = (G/K, \mathcal{R}, \mathcal{I})$ が可換であるとき，(G, K) を Gelfand 対という．例 *2.3, 2.4, 2.5* で与えたアソシエーションスキームはすべて *Schur* 的アソシエーションスキームであり，それぞれ *Gelfand* 対 $(\mathfrak{S}_q \wr \mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n)$，$(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$，$(G \times G, \mathrm{diag}(G))$ に対応する．

例 2.7 (Shrikhande グラフ)**.** 最後の例として，*Schur* 的アソシエーションスキームでないものを挙げる．以下のグラフはトーラス上に実現されたものとし，これを *Shrikhande* グラフと呼ぶ．



このグラフは直径が 2 であり，以下のようにしてできるアソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \partial, \mathcal{I})$ は非 *Schur* 的であることが知られている*:* グラフの頂点集合（*16* 頂点からなる）を X とし，$\partial\colon X \times X \to \mathcal{I} := \{0, 1, 2\}$ をグラフの距離関数とする．

なお，このアソシエーションスキームは *Hamming* スキーム $H(2, 4)$ と代数的には同型であるが，同型ではない．

2.2 Bose-Mesner 代数と指標表

この節では，アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R}, \mathcal{I})$ は常に可換であるとする．$\mathfrak{X}$ の $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ で生成される代数を *Bose-Mesner* **代数**といい，$\mathfrak{A}$ で表す．このとき，$\mathfrak{A}$ の自然な基底として $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ がとれるが，行列の可換性 (A5) より $\mathfrak{A}$ は原始冪等元からなる別の基底 $\{E_j\}_{j \in \mathcal{J}}$（$\mathcal{J}$ は添え字集合）を持ち，さらに $E_{j_0} = \frac{1}{|X|} J_X$ となる $j_0 \in \mathcal{J}$ が存在する．なお $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ と $\{E_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ は $\mathfrak{A}$ の基底なので，$|\mathcal{I}| = |\mathcal{J}|$ が成り立つことに注意する．また (A1) より $\mathfrak{A}$ は成分毎積 $\circ$ で閉じる．従って $(|X|E_{j_1}) \circ (|X|E_{j_2}) =$

$\sum_{j_3\in\mathcal{J}} q^{j_3}_{j_1 j_2}|X|E_{j_3}$ を満たす実数（実は非負になる）$q^{j_3}_{j_1 j_2}$ が存在する．この $q^{j_3}_{j_1 j_2}$ を $\mathfrak{X}$ の *Krein* **数**という．

$\mathfrak{X}$ の Bose-Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ の 2 つの基底 $\{A_i\}_{i\mathcal{I}}$ と $\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ の変換

$$A_i = \sum_{j\in\mathcal{J}} P_i(j)E_j, \qquad |X|E_j = \sum_{i\in\mathcal{I}} Q_j(i)A_i$$

の係数から得られる正方行列 $P = (P_i(j))$，$Q = (Q_j(j))$ をそれぞれ**第 1 固有行列**，**第 2 固有行列**と呼ぶ．慣例的に P の一番左の列を i_0 に関する列とし，一番上の行を j_0 に関する行とする．同様に，Q の一番左の列を j_0 に関する列とし，一番上の行を i_0 に関する行とする．

$\mathfrak{X}$ が群アソシエーションスキームであるとき，P は「本質的に」G の指標表と等しい．これより一般的な可換アソシエーションスキームについても P のことを指標表ということもある．

2.3 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキーム

P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームは Delsarte [8] により符号理論やデザイン理論を統一して扱うために導入された．主要なアソシエーションスキームの多くは **P かつ Q 多項式アソシエーションスキーム**になっている．

定義 2.8. クラス d の対称アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{A_i\}_{i\in\mathcal{I}})$ が P 多項式アソシエーションスキームであるとは次を満たすことである: $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ の添え字集合 $\mathcal{I}$ を $\{0, 1, \ldots, d\}$ におきかえて $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ とするとき，各 $i \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}$ に対して，$A_i = v_i(A_1)$ を満たす次数 i の 1 変数多項式 $v_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ が存在する．

同様に，クラス d の対称アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{A_i\}_{i\in\mathcal{I}})$ の原始冪等元の基底を $\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ とするとき，$\mathfrak{X}$ が Q 多項式アソシエーションスキームであるとは次を満たすことである: $\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ の添え字集合 $\mathcal{J}$ を $\{0, 1, \ldots, d\}$ におきかえて $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$ とするとき，各 $j \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}$ に対して，$|X|E_j = v^*_j(|X|E_1)$（積は成分毎積 $\circ$）を満たす次数 j の 1 変数多項式 $v^*_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ が存在する．

例 2.9 (Hamming スキーム)**.** *Hamming* スキーム $H(n, q)$ はクラス n の P かつ Q 多項式アソシエーションスキームである．$\{v_i\}_{i=0}^n$ と $\{v^*_i\}_{i=0}^n$ は等しくなり，この多項式系は *Krawtchouk* 多項式と呼ばれている．

例 2.10 (Johnson スキーム)**.** *Johnson* スキーム $J(n, k)$ はクラス k の P かつ Q 多項式アソシエーションスキームである．$\{v_i\}_{i=0}^k$ は双対 *Hahn* 多項式，$\{v^*_i\}_{i=0}^k$ は *Hahn* 多項式と呼ばれている．

P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームにはいくつかの同値条件が知られている．以下では P 多項式アソシエーションスキームの同値条件を与える．Q 多項式アソシエーションスキームの同値条件については，$\{A_i\}_{i=0}^d$ を $\{E_j\}_{j=0}^d$ に，P を Q に置き換えれば同様のことが言える．

命題 2.11. クラス d の対称アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{A_i\}_{i=0}^d)$ に対して以下は同値である．

(*i*) $\mathfrak{X}$ は P 多項式アソシエーションスキームである．

(*ii*) 各 i に対して次の 3 項間漸化式が成り立つ:

$$A_1 A_i = p_{1i}^{i-1} A_{i-1} + p_{1i}^{i} A_i + p_{1i}^{i+1} A_{i+1} \tag{2}$$

なお，$i = 0, d$ のときに現れる $p_{10}^{-1} A_{-1}$ や $p_{1d}^{d+1} A_{d+1}$ は 0 とみなす．

(*iii*) $\mathfrak{X}$ の第 1 固有行列 P の第 1 列の成分を $P_1(j) = \theta_j$（$j \in \mathcal{J}$）とおくとき，$j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ が $j_1 \neq j_2$ ならば，$\theta_{j_1} \neq \theta_{j_2}$ であり，P の第 i 列（$i = 0, 1, \ldots, d$）の成分が i 次多項式 v_i を用いて $P_i(j) = v_i(\theta_j)$（$j \in \mathcal{J}$）と書ける．

(iii) の同値条件こそが，「P 多項式」の由来である．また (ii) の 3 項間漸化式 (2) から $\{A_i\}_{i=0}^d$ が A_1 を隣接行列にもつ有限グラフの距離行列と一致することもわかる．このようなグラフを (X, A_1) を**距離正則グラフ**という．

P 多項式アソシエーションスキームの定義より A_1 は $d+1$ 個の相異なる固有値 $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_d$ を持つ．また A_1 の最小多項式 w_{d+1} の次数は $d+1$ であり，

$$w_{d+1}(A_1) = \prod_{i=0}^{d} (A_1 - \theta_i I_X) = 0 \tag{3}$$

を満たす．

P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームに付随する多項式 $\{v_i\}_{i=0}^d$ および $\{v_j^*\}_{j=0}^d$ は 3 項間漸化式 (2) から直交多項式系になる．特に P かつ Q 多項式アソシエーションスキームの $\{v_i\}_{i=0}^d$, $\{v_j^*\}_{j=0}^d$ は 1 変数 Askey-Wilson 直交多項式系と呼ばれる由緒正しい多項式系（およびその親戚）であることが知られている．1 変数 Askey-Wilson 直交多項式系を拡張した多変数 Askey-Wilson 直交多項式系もいくつか知られている．例えば先行研究として，Mizukawa–Tanaka [13]，Gasper–Rahman [9]，Iliev–Terwillger [12]，Tratnik [15, 16, 17, 18] などがある．自然な流れとして，多変数 Askey-Wilson 直交多項式系が付随しているアソシエーションスキームの定義をどのように与えればよいかという問題が考えられ，その答

えが長年渇望されていた．2024 年に Bernard, Crampé, d'Andecy, Vinet, Zaimi [3] が (a,b)-compatible という概念を導入し，(a,b) 型の 2 変数 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームの定義を提唱した．また [3] では多くのアソシエーションスキームが 2 変数 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームになっていることも示した．この研究に触発されて，Bannai, Kurihara, Zhao, Zhu [2] では一般的な形で多変数 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームの定義が与えられた．次の節でこれらの定義について述べていく．

3　多変数多項式アソシエーションスキーム

この節ではまず単項式順序について簡単に説明し，その後，[2] による単項式順序 $\leq$ に関する多変数 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームの定義を与える．なお，[3] による (a,b) 型の 2 変数 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームの定義も重要であるが，この原稿では割愛する．

$\mathbb{N}^\ell := \{(n_1,n_2,\ldots,n_\ell) \mid n_i$ は非負整数 $\}$ とし，$\epsilon_i \in \mathbb{N}^\ell$ を第 i 成分のみ 1，それ以外の成分は 0 のベクトルとする．$\mathbb{N}^\ell$ 上の**単項式順序** $\leq$ とは，以下の 3 条件を満たすものである．

(*i*) $\leq$ は全順序である．

(*ii*) $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}^\ell$ に対して，$\alpha \leq \beta$ ならば，$\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$ が成り立つ．

(*iii*) $\leq$ は整列順序である．すなわち任意の空でない $\mathbb{N}^\ell$ の部分集合は $\leq$ に関して最小元を持つ．

単項式順序の例として，辞書式順序 $\leq_{\mathrm{lex}}$，重み付き辞書式順序 $\leq_{\mathrm{grlex}}$ などがある．

定義 3.1 ([2])**.** $\epsilon_i \in \mathbb{N}^\ell$ を i 番目の成分のみ 1，それ以外の成分は 0 のベクトルとする．$\mathcal{D}$ を $\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_\ell$ を含む $\mathbb{N}^\ell$ の部分集合とし，$\leq$ を $\mathbb{N}^\ell$ 上の単項式順序とする．可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}=(X,\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}})$ が $\mathcal{D}$ 上の $\leq$ に関する ℓ 変数 P 多項式アソシエーションスキームであるとは次を満たすことである*:*

(*i*) $(n_1,n_2,\ldots,n_\ell) \in \mathcal{D}$ かつ $0 \leq m_i \leq n_i$（$i=1,2,\ldots,\ell$）ならば，$(m_1,m_2,\ldots,m_\ell) \in \mathcal{D}$ である．

(*ii*) $\mathfrak{X}$ の隣接行列 $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ の添え字集合を $\mathcal{D}$ におき換えて $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{D}}$ とするとき，各 $\alpha \in \mathcal{D}$ に対して，$A_\alpha = v_\alpha(A_{\epsilon_1},A_{\epsilon_2},\ldots,A_{\epsilon_\ell})$ を満たす $\leq$ に関して最高次数 α の ℓ 変数多項式 $v_\alpha(\boldsymbol{x})$ が存在し，さらに $v_\alpha(\boldsymbol{x})$ の各単項式 $\boldsymbol{x}^\beta$ は $\beta \in \mathcal{D}$ を満たす．

(iii) 各 $\alpha \in \mathcal{D}$ と $i = 1, 2, \ldots, \ell$ に対して，$A_{\epsilon_i} A_\alpha$ ((ii) より最高次数 $\alpha + \epsilon_i$ の多項式）は $\{A_\beta \mid \beta \in \mathcal{D},\ \beta \leq \alpha + \epsilon_i\}$ の一次結合で表せる．

上の定義において，$\ell = 1$ とすると，自動的に $\mathcal{D}$ は (i) より $\{0, 1, \ldots, d\}$ の形になり，(ii) は A_i は 1 変数の i 次の多項式 $v_i(x)$ で表されることを意味する．これは定義 2.8 の P 多項式アソシエーションスキームの定義と一致する．また P 多項式アソシエーションスキームの場合，(iii) は (3) より自動的に成り立つ．したがって定義 3.1 は P 多項式アソシエーションスキームの定義を拡張したものであることがわかる．以降，多変数 P 多項式アソシエーションスキームの観点から，P 多項式アソシエーションスキームのことを 1 変数 P 多項式アソシエーションスキームと呼ぶこともある．

ℓ 変数 Q 多項式アソシエーションスキームの定義は定義 3.1 において隣接行列を原始冪等元に置き換えたものとして与えられる．

以下では一番簡単な多変数多項式アソシエーションスキームの例として，直積アソシエーションスキームについて述べる．

例 3.2. $k = 1, 2, \ldots, \ell$ に対して，$\mathfrak{X}^{(k)} = (X^{(k)}, \{A_i^{(k)}\}_{i \in \mathcal{I}^{(k)}})$ をクラス d_k の可換アソシエーションスキームとする．$\mathfrak{X}^{(k)}$ の直積を関係行列が $\mathfrak{X}^{(k)}$ のクロネッカー積

$$A_{(n_1, n_2, \ldots, n_\ell)} := A_{n_1}^{(1)} \otimes A_{n_2}^{(2)} \otimes \cdots \otimes A_{n_\ell}^{(\ell)} \quad \textit{for } (n_1, n_2, \ldots, n_\ell) \in \mathcal{D}$$

（ただし $\mathcal{D} := \mathcal{I}^{(1)} \times \mathcal{I}^{(2)} \times \cdots \times \mathcal{I}^{(\ell)}$ とする）により定まるアソシエーションスキームとし，$\bigotimes_{k=1}^{\ell} \mathfrak{X}^{(k)}$ と書く．このとき次が成り立つ:

(i) $\mathfrak{X}^{(k)}$ がすべて P 多項式アソシエーションスキームならば，$\bigotimes_{k=1}^{\ell} \mathfrak{X}^{(k)}$ は $\mathbb{N}^\ell$ 上の任意の単項式順序 $\leq$ に関する ℓ 変数 P 多項式アソシエーションスキームである．

(ii) $\mathfrak{X}^{(k)}$ がすべて Q 多項式アソシエーションスキームならば，$\bigotimes_{k=1}^{\ell} \mathfrak{X}^{(k)}$ は $\mathbb{N}^\ell$ 上の任意の単項式順序 $\leq$ に関する ℓ 変数 Q 多項式アソシエーションスキームである．

注意 3.3. すべての可換アソシエーションスキームは多変数 P（*resp.* Q）多項式アソシエーションスキームの構造をもつ．$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=0,1,\ldots,d})$ に対して，例えば $\mathcal{D} = \{o, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_d\}$, $A_0 = A_o$，$A_i = A_{\epsilon_i}$ とおく．このとき $\mathfrak{X}$ は $\mathcal{D}$ 上の重み付き辞書的順序 $\leq_{\mathrm{grlex}}$ についての d 変数 P 多項式アソシエーションスキームになる．$\mathfrak{X}$ を d 変数 Q 多項式アソシエーションスキームと見なす方法も同様である．したがって多変数多項式アソシエーションスキームの構造はできるだけ ℓ の値が小さいものがよいといえる．

多変数 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームの例は，例 3.2 や注意 3.3 のように直ちに確かめられるものがあるが，一般的に，与えられたアソシエーションスキームがどのような多変数 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームになるかどうかを判定するのは難しい．[2] や [1] において，[3] の例をすべて含む形で多くアソシエーションスキームが多変数多項式アソシエーションスキームになることを示した．詳細は [2, 1] を参照していただきたい．ここでは n 拡張 Hamming スキームと非 2 元ジョンソンスキームの定義を述べ，どのような多変数 P 多項式・Q 多項式アソシエーションスキームの構造を紹介する．

例 3.4 (n 拡張 Hamming スキーム)**.** n, ℓ を自然数とし，$\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R}, \mathcal{I} = \{0, 1, \ldots, \ell\})$ をクラス ℓ の可換アソシエーションスキームとする．$Z := X^n$，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots y_n) \in Z$ と $i \in \mathcal{I}$ に対して $n_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\{k \mid \mathcal{R}(x_k, y_k) = i\}|$ とおく．$\mathcal{D} := \{(n_1, n_2, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_i n_i \leq n\}$ とするとき，$\mathcal{S}\colon Z \times Z \to \mathcal{D}$ を

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (n_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), n_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ldots, n_\ell(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$$

で定めると $H(n, \mathfrak{X}) := (Z, \mathcal{S}, \mathcal{D})$ は可換アソシエーションスキームになり，これを $\mathfrak{X}$ に関する n 拡張 Hamming スキームという．*[2]* において，$H(n, \mathfrak{X})$ は重み付き辞書式順序 $\leq_{\mathrm{grlex}}$ に関する $\mathcal{D}$ 上の ℓ 変数 P かつ Q 多項式アソシエーションスキームであることが示された．

なお，$\mathfrak{X}$ が完全グラフ K_q（つまりクラス 1 のアソシエーションスキーム）のとき $H(n, K_q)$ は通常の *Hamming* スキーム $H(n, q)$ であるので，この結果は *Hamming* スキームが *1* 変数 P かつ Q 多項式アソシエーションスキームであることを含意する．

例 3.5 (非 2 元 Johnson スキーム)**.** r を 2 以上の自然数とし, $K = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ とおく．$0 \leq k \leq n$ を満たす整数 n, k を固定したとき，$\boldsymbol{x} \in K^n$ に対して $w(\boldsymbol{x}) := |\{i \mid x_i \neq 0\}|$，$X = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid w(\boldsymbol{x}) = k\}$ とする．$\mathcal{D} := \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq k - j,\ 0 \leq j \leq \min\{k, n-k\}\}$ とおき，写像 $\mathcal{R}\colon X \times X \to \mathcal{D}$; $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (i, j)$ であることを

$$|\{i \mid x_i \neq 0,\ y_i \neq 0\}| = k - j, \quad |\{i \mid x_i = y_i \neq 0\}| = k - i - j$$

として定めると，$\mathfrak{X} = (X, \mathcal{R}, \mathcal{D})$ は対称アソシエーションスキームになる．これを非 2 元ジョンソンスキームという．*[3]* において，この $\mathfrak{X}$ は型 $(1, 0)$ の *2* 変数 P 多項式アソシエーションスキームになること，*[2]* において，$\mathfrak{X}$ が $\leq_{\mathrm{grlex}}$ に関する *2* 変数 P 多項式アソシエーションスキームになることが示された．さらに *[6]* において，$n \geq 2k - 1$ のとき型 $(0, 1/2)$ の *2* 変数 Q 多項式アソシエーションスキームになることも示された．*[1]* におい

て，全ての n, k に対して $\mathfrak{X}$ が定義 *3.1* の意味で $\leq_{\mathrm{grlex}}$ に関する *2* 変数 Q 多項式アソシエーションスキームになることが示された.

なお，この結果は多項式順序を $\leq_{\mathrm{grlex}}$ を $\leq_{\mathrm{lex}}$ に取り換えても同様に成立する.

この節の最後に多変数多項式アソシエーションスキームに関するいくつかの関連する問題を挙げる.

問題 3.6. *アソシエーションスキーム* $\mathfrak{X}$ *は高々 2 つまでしか 1 変数* P（*resp.* Q）*多項式アソシエーションスキームの構造を持たないことが知られている．一方で,* $\mathfrak{X}$ *に多変数* P（*resp.* Q）*多項式アソシエーションスキームの構造を入れるとき,* ℓ, $\mathcal{D}$, $\leq$ *の選び方があり，一般的に多くの可能性があるが，ある意味で構造の分類はできるのだろうか.*

問題 3.7. *2.3 節で 1 変数* P *かつ* Q *多項式アソシエーションスキームに付随する直交多項式系は Askey-Wilson 多項式系列により分類できることを述べたが,* ℓ *変数多項式* P *かつ* Q *多項式アソシエーションスキームに付随する多変数多項式列も Askey-Wilson 多項式系列のように分類できるのだろうか？*

問題 3.8. *問題 3.6 と 3.7 が解決されたとき,* ℓ *変数多項式* P *かつ* Q *多項式アソシエーションスキームの分類できるのだろうか？なお，この問題は 1 変数* P *かつ* Q *多項式アソシエーションスキームの場合でもいまだに未解決である.*

4　多変数多項式アソシエーションスキームの同値条件

命題 2.11 では，1 変数 P 多項式アソシエーションスキームの同値条件を示した．この結果の拡張として，多変数 P 多項式アソシエーションスキームの同値条件が [2] や Higashitani-Kurihara [10] において示された．以下，$\mathcal{D}$ と書けば $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}^{\ell}$ のことで，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_\ell \in \mathcal{D}$ であり，定義 3.1 (i) を満たすとする．また $\mathbb{N}^{\ell}$ 上の単項式順序 $\leq$ を固定しておく.

4.1　隣接関係式を用いた多変数多項式アソシエーションスキームの同値条件

まず P 多項式アソシエーションスキームの 3 項間漸化式 (2) という性質について，多変数 P 多項式アソシエーションスキームについて拡張した結果について述べる.

命題 4.1 ([2])**.** 可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{D}})$ について以下は同値である．

(*i*) $\mathfrak{X}$ は $\mathcal{D}$ 上の $\leq$ に関する ℓ 変数 P 多項式アソシエーションスキームである．

(*ii*) 各 $i = 1, 2, \ldots, \ell$ と $\alpha \in \mathcal{D}$ に対して，$p^{\beta}_{\epsilon_i,\alpha} \neq 0$ ならば $\beta \leq \alpha + \epsilon_i$ が成り立つ．さらに $\alpha + \epsilon_i \in \mathcal{D}$ のとき，$p^{\alpha+\epsilon_i}_{\epsilon_i,\alpha} \neq 0$ が成り立つ．

命題 4.1 の交叉数を Krein 数に取り換えることで，多変数 Q 多項式アソシエーションスキームの同値条件を得ることに注意する．

注意 4.2. 命題 *4.1* の (*ii*) の交叉数 $p^{\beta}_{\epsilon_i,\alpha}$ の条件は

$$A_{\epsilon_i}A_\alpha = \sum_{\beta\in\mathcal{D},\beta\leq\alpha+\epsilon_i} p^{\beta}_{\epsilon_i,\alpha}A_\beta \tag{4}$$

と同値である．なお $\mathfrak{X}$ が対称かつ $\ell = 1$ の場合，これらの条件 (4) と $\mathfrak{X}$ の対称性から P 多項式アソシエーションスキームの *3* 項間漸化式 (2) が導かれる．

4.2 固有行列を用いた多変数多項式アソシエーションスキームの同値条件

次に第 1 固有行列 P を用いた多変数 P 多項式アソシエーションスキームの同値条件を述べる．

命題 4.3 ([10])**.** 可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X} = (X, \{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{D}})$ に対して，$\mathfrak{X}$ の *Bose-Mesner* 代数の原始冪等元の基底を $\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ とする．$i = 1, 2, \ldots, \ell$ と $j \in \mathcal{J}$ に対して，$\theta_{\epsilon_i}(j) := P_{\epsilon_i}(j)$ とおく．このとき次は同値：

(*i*) $\mathfrak{X}$ は $\mathcal{D}$ 上の $\leq$ に関する ℓ 変数 P 多項式アソシエーションスキームである．

(*ii*) 次が成り立つ：

(*a*) 各 $\alpha \in \mathcal{D}$ と $j \in \mathcal{J}$ に対して，

$$P_\alpha(j) = v_\alpha(\theta_{\epsilon_1}(j), \theta_{\epsilon_2}(j), \ldots, \theta_{\epsilon_\ell}(j))$$

を満たす $\leq$ に関して最高次数 α の ℓ 変数多項式 $v_\alpha(\boldsymbol{x})$ が存在し，さらに $v_\alpha(\boldsymbol{x})$ の各単項式 $\boldsymbol{x}^\beta$ は $\beta \in \mathcal{D}$ を満たす．

(*b*) $\alpha+\epsilon_i \notin \mathcal{D}$ である $\alpha \in \mathcal{D}$，$i=1,2,\ldots,\ell$ と $j \in \mathcal{J}$ に対して，$w_{\alpha+\epsilon_i}(\theta_{\epsilon_1}(j),\theta_{\epsilon_2}(j),\ldots,\theta_{\epsilon_\ell}(j))=0$ を満たす $\le$ に関して最高次数 $\alpha+\epsilon_i$ の ℓ 変数多項式 $w_{\alpha+\epsilon_i}(\boldsymbol{x})$ が存在し，さらに $w_{\alpha+\epsilon_i}(\boldsymbol{x})$ の最高次数以外の各単項式 $\boldsymbol{x}^\beta$ は $\beta \in \mathcal{D}$ を満たす．

(a) の意味としては，P の ϵ_i 列（$i=1,2,\ldots,\ell$）と次数 α の多変数多項式 v_α を使って P の α 列を表現できるものと言うことである．また，(b) は $\ell=1$ の場合は自動的に満たされるので 1 変数 P 多項式アソシエーションスキームの同値条件には現れない．なおこのとき，$\alpha+\epsilon_i \notin \mathcal{D}$ となる $\alpha+\epsilon_i$ は $d+1$ のことであり，$w_{d+1}(x)$ は (3) に現れる A_1 の最小多項式と一致する．

最後に命題 4.3 の P を Q に取り換えれば多変数 Q 多項式アソシエーションスキームの同値条件が同様に得られることにも注意する．

5　アソシエーションスキームと Gröbner 基底・消去理論

$\mathfrak{X}=(X,\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{D}})$ を $\le$ に関する $\mathcal{D}$ 上の ℓ 変数 P 多項式アソシエーションスキームとする．命題 4.3 (ii) (b) で定まる多項式からなる集合を

$$\mathcal{G} := \{w_{\alpha+\epsilon_i}(\boldsymbol{x}) \mid \alpha \in \mathcal{D},\ i=1,2,\ldots,\ell,\ \alpha+\epsilon_i \notin \mathcal{D}\}$$

とおくと，$\mathcal{G}$ は $\mathbb{C}$ 上の ℓ 変数多項式環 $\mathbb{C}[x_1,x_2,\ldots,x_\ell]=\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ の部分集合である．$I \subset \mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ を $\mathcal{G}$ で生成されるイデアルとする．

命題 5.1 ([2])**.** 次が成立する：

(*i*) $\mathcal{G}$ は $\le$ に関する I の *Gröbner* 基底である．

(*ii*) $\mathfrak{X}$ の *Bose-Mesner* 代数 $\mathfrak{A}$ は代数として $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]/I$ と同型である．

ℓ 変数 Q 多項式アソシエーションスキームに対しても，命題 5.1 は同様に成立する．

最近 Higashitani-Kurihara [10] において，非原始的アソシエーションスキームと消去理論の関係が示された．まず原始的および非原始的アソシエーションスキームの定義を与える．アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}=(X,\mathcal{R},\mathcal{I})$ に対して，ある空でない真部分集合 $\mathcal{C}\subset\mathcal{I}$ が X 上の同値関係 $\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{C})$ を定めるとき，$\mathfrak{X}$ は**非原始的**であるといい，そうでないとき，$\mathfrak{X}$ は**原始的**であるという．次に連立方程式の消去理論で重要な役割を果たす s 消去型単項式順序の定義を与える．$1\le s<\ell$ を満たす自然数 s に対して $\mathbb{N}^\ell$ 上の単項式順序 $\le$ が s **消去型**であるとは，$\alpha\in\mathbb{N}^s$ が $\alpha\neq\mathbf{0}$ である

とき，任意の $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}^{\ell-s}$ に対して，$(\alpha, \beta_1) > (\mathbf{0}, \beta_2)$ が成り立つことである．s 消去型単項式順序の代表例として，辞書式順序 $\leq_{\mathrm{lex}}$ がある．

定理 5.2 ([10])**.** 可換アソシエーションスキーム $\mathfrak{X}$ に対して，次は同値である．

(i) $\mathfrak{X}$ は非原始的である．

(ii) $\mathfrak{X}$ はある $\mathcal{D} \subset \mathbb{N}^\ell$ と s 消去型単項式順序 $\leq$ に関する ℓ 変数 P 多項式アソシエーションスキームの構造をもつ．

定理 5.2 から以下の系が従う．

系 5.3 ([10])**.** $d_1, \ldots, d_\ell$ を自然数とし，$\mathcal{D} := \{0, 1, \ldots, d_1\} \times \cdots \times \{0, 1, \ldots, d_\ell\}$ とする．また $\mathfrak{X} = (X, \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}})$ を可換アソシエーションスキームとする．このとき次は同値である．

(i) $\mathfrak{X}$ はクラス d_i の可換 P 多項式アソシエーションスキーム（$i = 1, 2, \ldots, \ell$）の直積と同型である．

(ii) $\mathfrak{X}$ は $\mathbb{N}^\ell$ 上の任意の単項式順序 $\leq$ に関する ℓ 変数 P 多項式アソシエーションスキームである．

なお，この系において (i) $\Longrightarrow$ (ii) の部分はすでに例 3.2 で示されており，(ii) $\Longrightarrow$ (i) の部分が定理 5.2 から得られるものである．

6　その他関連すること

6.1　m 距離正則グラフ

[2] の定義を用いて，最近 Bernard, Crampé, Vinet, Zaimi, Zhang [4] によって，距離正則グラフの多変数多項式版である m 距離正則グラフの概念が定義された．これは，従来の距離正則グラフの概念を，複数の「距離」を持つように一般化したものである．

有限グラフの辺集合を m 個の集合 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ に分割する（辺の色の塗分けと思ってもよい）．このとき 2 頂点間の m **距離**を，各 Γ_i の辺を何本通るかの組 $(n_1, \ldots, n_m)$ で定義する．

定義 6.1 ([4])**.** 連結無向グラフが m 距離正則であるとは，その辺の m 分割 $\{\Gamma_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ と単項式順序が存在し，全ての m 距離の集合 $\mathcal{D}$ において $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ が含まれ，かつ対応するアソシエーションスキームが m 変数 P 多項式となるときをいう．

なお，[4] では m 距離正則グラフの例もいくつか与えられており，m 距離正則グラフと m 変数 P 多項式アソシエーションスキームが一対一に対応することが示されている．

距離正則グラフの理論は非常に豊かであり，多くの深い結果が知られている．例えば，Brouwer-Cohen-Neumaier [5] には距離正則グラフに関する多くの結果がまとめられている．これらの結果が m 距離正則グラフに対してどこまで一般化されるのかは興味深い問題である．

問題 6.2. m 距離正則グラフに対して，通常の距離正則グラフで成り立つことがどこまで一般化されるのか？例えば，以下のような問題が考えられる．

(i) 自然数列 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ を固定したとき，次数 $\boldsymbol{k}$ をもつ m-距離正則グラフは高々有限個か？

(ii) 次数 $\{k_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}}$ は多項式順序 $\leq$ に関して *unimodality* が成り立つか？

6.2 A_2-Leonard 対

特別な 2 変数多項式アソシエーションスキームと A_2-Leonard 対の関係を述べる．A_2-Leonard 対は liev-Terwilliger [12] により導入された Leonard 対の 2 変数化版である．ここでは A_2-Leonard 対の定義については触れない．詳しくは [12] を参考にしてほしい．[12] では A_2-Leonard 対の例をいくつか紹介し，論文中に他にも A_2-Leonard 対の例はあるのだろうかという問いを残していた．[1] では次の定理を得た．

定理 6.3 ([1])**.** 非 2 元 *Johnson* スキームと *attenuated spaces* から得られるアソシエーションスキームから A_2-*Leonard* 対は得られる．

上記の定理に現れるアソシエーションスキームの 2 変数多項式系はいずれも Tratnik 型の直交多項式系である．その後，Crampé-Zaimi [7] によって Tratnik 型の直交多項式系をもつ 2 変数多項式アソシエーションスキームと A_2-Leonard 対の関係が調べられた．なお，Tratnik 型の直交多項式系をもつ 2 変数多項式アソシエーションスキームの単項式順序として，辞書式順序が入るので，定理 5.2 が適用でき，これらのアソシエーションスキームは非原始的であることが分かる．

6.3 対称空間と多変数多項式アソシエーションスキーム

以前より P かつ Q 多項式アソシエーションスキームは階数 1 のコンパクト対称空間の有限集合版として対応すると考えられてきた．なお，逆に

コンパクト対称空間を含むコンパクトな連続空間を連続版のアソシエーションスキームとして扱う試みもある．詳しくは Voit [19] や Nakada [14] を参照されたい．

Vretare [20], Hoogenboom [11] によって，以下のような階数 ℓ のコンパクト対称空間 U/K の球関数に付随する多変数多項式の研究が行われた．

命題 6.4. 単連結などいくつかの条件をつけた階数 ℓ のコンパクト対称空間 U/K の *fundamental weight* を $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ とする．最高ウエイト $\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \mu_i$ に対する球関数 φ_λ は自然な単項式順序に関して次数 $\alpha = (m_1, \ldots, m_\ell)$ の多項式 P_α を用いて $\varphi_\lambda = P_\alpha(\varphi_{\mu_1}, \ldots, \varphi_{\mu_\ell})$ と表せる．

例えば, 単位球面 S^n の場合は P_α は Gegenbauer 多項式に対応し, Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_\ell(\mathbb{K}^n)$ の場合は一般 Jacobi 多項式に対応する．[20] や [11] では，命題 6.4 の P_α の項の情報が詳細に記述されているため，それをもとに以下のような多変数 Q 多項式アソシエーションスキームの関係性が導かれる．

定理 6.5. 上記の U/K の球関数は ℓ 変数 Q 多項式アソシエーションスキームの同値条件である命題 *4.3 (ii) (a)* を満たす．

なお, U/K の球関数 P_α の添え字 α は $\mathbb{N}^\ell$ 全体を動くため, U/K は命題 4.3 (ii) (b) を自動的に満たす．よって上記の定理により，U/K は有限集合ではないが，連続版の $\mathbb{N}^\ell$ 上の ℓ 変数 Q 多項式アソシエーションスキームとみなせることが分かる．

一方で，階数 ℓ のコンパクト対称空間 U/K を「連続版の ℓ 変数 P 多項式アソシエーションスキーム」とみなすことはできるだろうか．U/K に対して，$\mathcal{R}\colon U/K \times U/K \to \mathcal{I}$ として，像 $\mathcal{I}$ が $\mathbb{R}^\ell$ のコンパクトな部分集合となるようなものが自然に定義できる．これは例えば，単位球面 S^n の場合 $\mathcal{R}(x, y)$ は内積 $x \cdot y \in [-1, 1]$ に対応し，Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_\ell(\mathbb{K}^n)$ の場合 $\mathcal{R}(x, y)$ は principal angles $(\theta_1, \ldots, \theta_\ell) \in [0, 1]^\ell$ に対応する．このとき，$\mathcal{I}$ は離散的な集合ではないため，[2] の多変数 P 多項式アソシエーションスキーム定義にそのまま当てはめることはできない．したがって「連続版の多変数 P 多項式アソシエーションスキーム」の適切な定義が望まれる．

謝辞

第 70 回代数学シンポジウムの関係者の方々，特に，講演の機会を与えてくださったプログラム責任者の小寺諒介先生，安部利之先生，ならびにシンポジウム責任者の平野幹先生，会場責任者の小林真一先生に心より感

謝申し上げます． 本研究は JSPS 科研費 JP24K06830 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] E. Bannai, H. Kurihara, D. Zhao, and Y. Zhu, Bivariate Q-Polynomial Structures for the Nonbinary Johnson Scheme and the Association Scheme Obtained from Attenuated Spaces, *Journal of Algebra*, **657**:421–455, 2024.

[2] E. Bannai, H. Kurihara, D. Zhao, and Y. Zhu, Multivariate P-and/or Q-polynomial association schemes, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **213**: 106025, 2025.

[3] P. Bernard, N. Crampé, L. d'Andecy, L. Vinet, and M. Zaimi, Bivariate P-polynomial association schemes, *Algebraic Combinatorics*, **7**:361–382, 2024.

[4] P. Bernard, N. Crampé, L. Vinet, M. Zaimi, and X. Zhang, m-distance-regular graphs and their relation to multivariate P-polynomial association schemes, *Discrete Mathematics*, **347**:114179, 2024.

[5] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[6] N. Crampé, L. Vinet, M. Zaimi, and X. Zhang, A bivariate Q-polynomial structure for the non-binary Johnson scheme, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **202**:105829, 2024.

[7] N. Crampé, and M. Zaimi, Factorized A_2-Leonard pair. *The Ramanujan Journal*, **66**: 25, 2025.

[8] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. *Philips Res. Rep. Suppl.*, **10**:vi+97, 1973.

[9] G. Gasper, and M. Rahman, Some systems of multivariable orthogonal q-Racah polynomials, *Ramanujan J*, **13**:389–405, 2007.

[10] A. Higashitani, and H. Kurihara, Imprimitive association schemes and elimination theory, in preparation.

[11] B. Hoogenboom, Intertwining Functions on Compact Lie Groups, CWI tract,**5**, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1984.

[12] P. Iliev, and P. Terwilliger, The Rahman polynomials and the Lie algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **364**:4225–4238, 2012.

[13] H. Mizukawa, and H. Tanaka, $(n+1, m+1)$-hypergeometric functions associated to character algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:2613–2618, 2004.

[14] A. Nakada, On a compact generalization of association schemes, arXiv:2511.02385, 2025.

[15] M. V. Tratnik, Multivariable Wilson polynomials, *Journal of Mathematical Physics*, **30**:2001–2011, 1989.

[16] M. V. Tratnik, Multivariable biorthogonal continuous-discrete Wilson and Racah polynomials, *Journal of Mathematical Physics*, **31**:1559–1575, 1990.

[17] M. V. Tratnik, Some multivariable orthogonal polynomials of the Askey tableau—Continuous families, *Journal of Mathematical Physics*, **32**:2337–2342, 1991.

[18] M. V. Tratnik, Some multivariable orthogonal polynomials of the Askey tableau—Continuous families, *Journal of Mathematical Physics*, **32**:2065–2073, 1991.

[19] M. Voit, Continuous association schemes and hypergroups, *J. Aust. Math. Soc.*, **106**:361–426, 2019.

[20] L. Vretare, Elementary Spherical Functions on Symmetric Spaces, *Mathematica Scandinavica*, **39**:343–358, 1976.

[21] 坂内英一, 坂内悦子, 伊藤達郎, 代数的組合せ論入門. Tōkyō: 共立出版, 2016.

[22] 花木章秀. アソシエーションスキームのブロック. 第 49 回代数学シンポジウム, 2004.

[23] 坂内英一. Sphere Packings, Lattices, Groups, and Association Schemes. 第 51 回代数学シンポジウム, 2006.

[24] 田中太初. Terwilliger 代数に基づく符号の半正定値計画限界. 第 51 回代数学シンポジウム, 2006.

[25] 吉田知行. 分割表の列挙問題への有限群論と組合せ論の応用. 第 52 回代数学シンポジウム, 2007.

[26] 水川裕司. 有限群上の調和解析. 第 54 回代数学シンポジウム, 2009.

[27] 伊藤達郎. tridiagonal pair と q-Onsager algebra. 第 55 回代数学シンポジウム, 2010.

[28] 花木章秀. Association schemes and their standard modules. 第 60 回代数学シンポジウム, 2015.

[29] 田中太初. 距離正則グラフの Terwilliger 代数の拡張について. 第 63 回代数学シンポジウム, 2018.

[30] 坂内英一. 有限群，デザイン，量子情報—特に unitary t-groups と unitary t-designs について. 第 64 回代数学シンポジウム, 2019.

[31] 伊藤達郎. The Weisfeiler-Leman stabilization revisited from the viewpoint of Terwilliger algebras. 第 65 回代数学シンポジウム, 2020.