第69回 代数学シンポジウム報告集

於　筑波大学

2024年 8月 26日（月）～ 8月 29日（木）

第 69 回 代数学シンポジウム

日程：2024 年 8 月 26 日（月）〜 8 月 29 日（木）
会場：筑波大学　第１エリア１ D 棟 1D201 室
開催方法： 現地開催（オンライン配信なし）
主催：日本数学会代数学分科会
プログラム責任者：
[代数幾何] 大橋 久範 (東京理科大)・上原 北斗 (東京都立大学)
[環論] 上山 健太（信州大)・宮崎 誓（熊本大)
[群論・表現論] 三枝崎 剛（早稲田大)・土岡 俊介（東工大）
[数論] 伊藤 哲史（京都大)・並川 健一（東京電機大）
会場責任者：秋山 茂樹（筑波大学）
シンポジウム責任者：朝倉 政典（北海道大学、連絡責任評議員）

プログラム

8 月 26 日（月）

10:15–11:15 谷田川 友里（東京工業大学）

分岐理論と l 進層の特性サイクル

11:30–12:30 河野 隆史 （早稲田大学）

The Borel-type presentation of the equivariant quantum and classical K-theory of the flag manifold in type C

14:00–15:00 田坂 浩二（近畿大学）

多重ゼータ値代数のモジュラー現象について

15:15–16:15 Scott Carnahan （筑波大学）

Monstrous Moonshine for integral group rings

16:30–17:30 戸次 鵬人（Max Planck 研究所)

Eisenstein コサイクルとゼータ関数の特殊値

8 月 27 日（火）

*10:15–11:15 柏原 正樹 （京都大学）

Monoidal categories of modules over quiver Hecke algebras and quantum affine algebras, and cluster algebras

*11:30–12:30 平田 典子（日本大学）

Diophantine method in the O-minimality

*14:00–15:00　洞 彰人 （北海道大学）

　分岐律の向こうに見える確率的現象（特に対称群のスピン表現でのケーススタディー）

*15:15–16:15　栗原 将人（慶應義塾大学）

　zeta 関数の値と数論的加群の関係についての最近の発展

16:30–17:30　深澤 知 （山形大学）

　ガロア点理論とそれの群論, グラフ理論との関係

懇親会

8 月 28 日（水）

*10:15–11:15　橋本 光靖（大阪公立大学）

　Almost principal bundles and invariant theory of group schemes

*11:30–12:30　岡田 拓三（九州大学）

　3 次元ファノ多様体の双有理幾何

*14:00–15:00　宮地 淳一（東京学芸大学）

　Structures in triangulated categories and N-complexes

*15:15–16:15　大川 新之介（大阪大学）

　非可換 del Pezzo 曲面の幾何学

16:30–17:30　行田 康晃（東京大学）

　一般化マルコフ数について

8 月 29 日（木）

10:15–11:15　河上 龍郎（京都大学）

　Cartier 作用素を用いた微分形式の拡張可能性

11:30–12:30　村井 聡（早稲田大学）

　グラフの剛性に関わる凸多面体の構成問題

14:00–15:00　三井 健太郎（琉球大学）

　Deformation of α_p-actions to $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-actions on surfaces

15:15–16:15　小林 稔周（明治大学）

　1 次元局所環のトレースイデアルの集合について

16:30–17:30　平野 雄貴（東京農工大）

　連接層の導来圏の三角圏構造

「*」の付いた講演は、専門分野以外の方も対象とした、サーベイなどを含む講演です。

分岐理論と ℓ 進層の特性サイクル

谷田川友里 (東京科学大学理学院)

1　はじめに

k を標数 p の代数閉体とし、X を k 上のなめらかな代数多様体とする。このとき、X 上の ℓ 進層のオイラー数を層の分岐の不変量で計算するという問題を考える。X が曲線の場合には、X 上の ℓ 進層のオイラー数は Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式 ([SGA5]) により、層の分岐の不変量を用いて計算される。そこで X の次元がより高次元の場合に、層の分岐の不変量を用いたオイラー数の計算について考える。

本稿ではそのアプローチの 1 つとして、構成可能層の特性サイクル ([Sa3]) の層の分岐の普遍量を用いた計算について考える。以下、ℓ を p とは異なる素数とし、Λ を有限局所 $\mathbf{Z}_\ell$ 代数とする。X 上の自由 Λ 加群の構成可能層 $\mathcal{F}$ の特性サイクル $CC(\mathcal{F})$ は複素多様体の場合の特性サイクル ([KSc, 9.4]) の類似として、余接束 $T^*X = \operatorname{Spec} S^\bullet\Omega_X^{1\vee}$ 上の代数的サイクル ($=T^*X$ の閉部分多様体の $\mathbf{Z}$ 上の線形結合) として定義され T^*X の零切断 T^*_XX との交点数によりオイラー数を計算する。

定理 1 ([Sa3, Theorem 7.13])**.** X が k 上射影的なとき、X 上の自由 Λ 加群の構成可能層 $\mathcal{F}$ のオイラー数

$$\chi(X,\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X,\mathcal{F})$$

は X の余接束 T^*X の零切断 T^*_XX と特性サイクル $CC(\mathcal{F})$ との交点数 $(CC(\mathcal{F}), T^*_XX)_{T^*X}$ として

$$\chi(X,\mathcal{F}) = (CC(\mathcal{F}), T^*_XX)_{T^*X}$$

と計算できる。

この指数公式を介して、特性サイクルを層の分岐の不変量で計算することにより、オイラー数の層の分岐の不変量による計算を与えることができる。一方、この特性サイクルは消失輪体を用いて構成されており、複素多様体の場合のものに比べて構成が複雑であるため、直接的に具体的な計算をすることは一般的には難しい。そこで本稿では、層の分岐の不変量を用いて T^*X 上の代数的サイクルを構成し、特性サイクルと比較する。

X 上の構成可能層 $\mathcal{F}$ のオイラー数の計算は強型の特異点解消を認めることによって次の場合に帰着することができる。

(*) $\mathcal{F}$ は X 上の単純正規交叉因子 D の補集合 $U = X - D$ 上の自由 Λ 加群の局所定数構成可能層 $\mathcal{G}$ の零延長 $j_!\mathcal{G}$ である。ただし、$j\colon U \to X$ は自然な開埋め込みを表す。

具体的には、X のなめらかな局所閉部分代数多様体のからなる stratification を取ることで、層が局所定数構成可能層のコンパクト化への開埋め込みによる零延長である場合に帰着できる。オイラー数は境界上のブローアップによって不変であることから、ここでさらに強型の特異点解消を用いることで境界を単純正規交叉因子にすればよい。(ちなみに、特性サイク

ルの計算も、特性サイクルの distinguished triangle との可換性 ([Sa3, Lemma 5.13.1]) および閉埋め込みによる押し出しとの可換性 ([Sa3, Lemma 5.13.2]) により、層が局所定数構成可能層の零延長の場合までは帰着することができる。)

本稿では、講演内容に基づき、層の分岐について考えるのに適した設定である (*) のもとで、局所定数構成可能層 $\mathcal{G}$ の階数を 1 に制限した場合に、層 $\mathcal{G}$ の D に沿った分岐の不変量を用いた特性サイクルの計算を考える。そのために特性サイクル比較するための代数的サイクルを分岐の不変量を用いて構成し、特性サイクルと比較する。さらに、構成した代数的サイクルが余接束の零切断との交点数によりオイラー数を計算するかどうかも考える。簡単のため、本稿を通して k は代数閉体を表し、k 上の代数多様体とは k 上有限型であるような連結スキームを表すことにする。

2 特性サイクル

講演では特性サイクル ([Sa3]) の構成にはほとんど触れることはできなかったが、ここでは簡単に特性サイクルの定義と性質を確認する。X を代数閉体 k 上なめらかな代数多様体とする。k の標数を p とし、ℓ を p と異なる素数、Λ を有限局所 $\mathbf{Z}_\ell$ 代数とする。

X 上のベクトル束 E とその閉部分集合 C に対して、$\mathbf{G}_m$ の E への作用によって C が不変であるとき、C は**錐的**であるという。

定義 2. C を余接束 $T^*X = \operatorname{Spec} S^\bullet \Omega_X^{1\vee}$ の錐的な閉部分集合とし、$dh\colon T^*X \times_X W \to T^*W$, $df\colon T^*Y \times_Y W \to T^*W$ を k 上なめらかな代数多様体の間の射 $h\colon W \to X$, $f\colon W \to Y$ から定まる W 上のベクトル束の間の標準的な射とする。

(1) k 上のなめらかな代数多様体の間の射の組 (h, f) が 2 つの条件

(a) $dh^{-1}(T^*_W W) \cap h^*C \subset T^*_X X \times_X W$ (i.e. h は C-**横断的**)

(b) $df^{-1}(dh(h^*C)) \subset T^*_Y Y \times_Y W$

をともにみたすとき、組 (h, f) は C-**横断的**であるという。ただし、$h^*C = C \times_X W$ とする。

(2) w を W の閉点とし、$j\colon W - \{w\} \to W$ を自然な開埋め込みとする。組 (h, f) の $W - \{w\}$ への制限 $(h \circ j, f \circ j)$ が C-横断的であるとき、w は f **の高々**C**-特性点**であるという。

C-横断的であることの定義から、$C' \subset C$ をみたす 2 つの錐的な閉部分集合 $C, C' \subset T^*X$ に対して、C-横断的な射は C'-横断的でもあることがわかる。

すべてのコホモロジー層が構成可能層であり、有限個を除いて 0 であるような X 上の Λ 加群の複体を**構成可能複体**という。ここではさらに、Λ 加群の構成可能複体というときは、すべて Tor 次元が有限であるものを指すことにする。X 上の Λ 加群の構成可能複体 $\mathcal{F}$ に対して、次の条件 (S) をみたすような最小の錐的な閉部分集合 $C \subset T^*X$ が存在する ([Be, Theorem 1.3 (i)])。

(S) k 上なめらかな代数多様体の間の射の組 $(h\colon W \to X, f\colon W \to Y)$ が C-横断的であるとき、f は $h^*\mathcal{F}$ に関して局所非輪状 ([SGA4$\frac{1}{2}$, Definition 2.12]) である。

定義 3 ([Be, 1.3])**.** 錐的な閉部分集合 $C \subset T^*X$ が条件 (S) をみたすとき、$\mathcal{F}$ は C に**マイクロ台をもつ**といい、$\mathcal{F}$ が C にマイクロ台をもつような T^*X の最小の錐的な閉部分集合 $C \subset T^*X$ を $SS(\mathcal{F})$ と表し、$\mathcal{F}$ の**特異台**と呼ぶ。

X 上の構成可能複体 $\mathcal{F}$ の特異台 $SS(\mathcal{F})$ の任意の既約成分の次元は X の次元に等しくなる ([Be, Theorem 1.3 (ii)])。このとき、$\mathcal{F}$ の**特性サイクル** $CC(\mathcal{F})$ は特異台 $SS(\mathcal{F})$ の既約成分たちの $\mathbf{Z}$ 上の線型結合 (i.e. T^*X 上の $\dim X$ 次元の代数的サイクル) A で次のミルナー公式で特徴づけられるようなものをいう。

定理 4 ([Sa3, Theorems 5.9, 5.18])**.** $SS(\mathcal{F})$ の既約成分の $\mathbf{Z}$ 上の線型結合 A で、任意のエタール射 $h\colon W \to X$ と任意の k 上なめらかな曲線への射 $f\colon W \to Y$ の組 (h, f) および f の高々$SS(\mathcal{F})$-特性点であるような任意の閉点 $w \in W$ に対して、

$$\mathrm{dimtot}\, \phi_w(h^*\mathcal{F}, f) = (A, df)_{T^*W,w}$$

が成り立つようなものがただ1つ存在する。ここで、左辺の dimtot は全次元を、ϕ_w は消失輪体複体の w での茎を表す。右辺の df は T^*Y の基底から定まる T^*W の切断を、$(-,-)_{T^*W,w}$ は T^*W の w でのファイバーでの交点数を表す。

3　先行研究

ここでは特性サイクルの計算に関する先行研究を紹介する。まず、X が曲線の場合には、斎藤 [Sa3] により、X 上の Λ 加群の構成可能層 $\mathcal{F}$ の特性サイクルは、$U \subset X$ を $\mathcal{F}|_U$ が局所定数層となるような X の稠密な開部分多様体、$a_x(\mathcal{F})$ を閉点 $x \in X - U$ での $\mathcal{F}$ のアルティン導手、$T^*_x X$ を閉点 $x \in X - U$ でのファイバーとして、

$$CC(\mathcal{F}) = (-1)(\mathrm{rank}\, \mathcal{F} \cdot [T^*_X X] + \sum_{x \in X-U} a_x(\mathcal{F})[T^*_x X])$$

と計算できることが知られている ([Sa3, Lemma 5.11.3])。

次に、層の分岐の不変量を用いて構成された代数的サイクルと零切断との交点数としてのオイラー数の計算については、(*) の設定のもとで $\mathcal{G}$ の階数を 1 とした場合に、加藤 [K2] による対数的な特性サイクル $CC^{\log}_D(\mathcal{F})$ の指数公式が知られている ([Sa1, Corollary 3.8])。この対数的な特性サイクル $CC^{\log}_D(\mathcal{F})$ は層 $\mathcal{G}$ の D に沿った分岐が clean (6 章を参照) という仮定のもとで、D に沿って対数的な極をもつ X の対数的余接束 $T^*X = \mathrm{Spec}\, S^\bullet\Omega^1_{X/k}(\log D')^\vee$ 上の $\dim X$ 次元の代数的サイクルとして、4, 5 章で紹介する層 $\mathcal{G}$ の D に D に沿った対数的な分岐の不変量を用いて定義される。X が曲面の場合には、D 上の (閉) 点に沿ったブローアップを考えることで、層 $\mathcal{G}$ の D に沿った分岐が clean という条件を仮定しなくても対数的な特性サイクル $CC^{\log}_D(\mathcal{F})$ が $T^*X(\log D)$ 上の 2 次元の代数的サイクルとして定義できる。

X の次元が一般で、層 $\mathcal{G}$ の階数も一般の場合に、対数的な特性サイクルの非対数版 $CC^{\log}_\emptyset(\mathcal{F})$ が特性サイクル $CC(\mathcal{F})$ の計算を与えることも斎藤 [Sa3] によって示されている ([Sa3, Theorem 7.14])。具体的には、層 $\mathcal{G}$ の D に沿った分岐が強非退化 (6 章を参照) な場合に、対数的な特性サイクルの非対数類似として、4, 5 章で紹介する層 $\mathcal{G}$ の D に沿った非対数的な分岐の不変量 (5 章を参照) を用いて、余接束 T^*X 上に $\dim X$ 次元の代数的サイクル $CC^{\log}_\emptyset(\mathcal{F})$ が構成でき、特性サイクル $CC(\mathcal{F})$ に一致する。さらに、$\mathcal{G}$ の D に沿った分岐が順分岐 (e.g. k の標数が 0) であるとき、特性サイクル $CC(\mathcal{F})$ は

$$CC(\mathcal{F}) = (-1)^d \sum_{I' \in I} [T^*_{D_{I'}} X]$$

と計算できる ([Sa3, Theorem 7.14])。ただし、$I' \subset I$ に対して、$D_{I'} = \bigcap_{i \in I'} D_i$ ($I' = \emptyset$ なら $D_{I'} = X$) とし、$T^*_{D_{I'}} X = \mathrm{Spec}\, S^\bullet \mathcal{N}_{D_{I'}/X}$ で $D_{I'} \subset X$ の余正規束を表す。

層 $\mathcal{G}$ の D に沿った分岐が clean あるいは強非退化という条件は、X から適切な余次元 2 以上の閉部分多様体を取り除くことで実現できる。X が曲面かつ層 $\mathcal{G}$ の階数が 1 の場合には、対数的な特性サイクル $CC_D^{\log}(\mathcal{F})$ の T^*X への自然な持ち上げを、X から適切な余次元 2 以上の閉部分多様体を除いたところで $CC_\emptyset^{\log}(\mathcal{F})$ に等しくなるように適切に構成すると、それが閉点でのファイバーの重複度も含めて特性サイクルに等しくなることもわかっている ([Y2, Theorem 6.1])。すなわち、X が曲面の場合には、(*) の設定のもとで $\mathcal{G}$ の階数が 1 の場合の特性サイクル $CC(\mathcal{F}) = CC(j_!\mathcal{G})$ の層 $\mathcal{G}$ の分岐の不変量による計算がすでに得られている。本稿で説明する特性サイクルの計算 (定理 12) は、最終的に X が 2 次元の場合の特性サイクルの計算に帰着することで得られる、X が一般次元の場合の特性サイクルの計算である。その過程で特性サイクルと比較する代数的サイクルは、層 $\mathcal{G}$ の D に沿った分岐が clean あるいは強非退化という仮定よりも少しだけ弱い仮定のもとで構成される。そのため、この代数的サイクルの指数公式 (定理 9) は上記の対数的な特性サイクル $CC_D^{\log}(\mathcal{F})$ およびその非対数版 $CC_\emptyset^{\log}(\mathcal{F})$ の指数公式よりも少しだけ弱い仮定のもとで $\mathcal{F} = j_!\mathcal{G}$ のオイラー数の計算を与えるものになる。

4 完備離散付値体の分岐理論

次に特性サイクルの計算や特性サイクルと比較する代数的サイクルの構成に用いる分岐に関する不変量を導入する。

完備離散付値体 K に対して、$\mathcal{O}_K$ で K の付値環、$\mathfrak{m}_K \subset \mathcal{O}_K$ で極大イデアル、$F_K = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ で剰余体を表す。

$G_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ を K の絶対ガロア群とする。F_K が完全体のときには、[Se] によって K の有限次分離拡大の分岐を測る分岐群 $\{G^r_{K,\mathrm{cl}}\}_{r \in \mathbf{Q}_{\geq -1}}$ が定義されている。この分岐群は、G_K^{r+} を $\bigcup_{s>r} G_K^s$ の閉包とするとき、次をみたす。

(1) $\{G^r_{K,\mathrm{cl}}\}_{r \in \mathbf{Q}_{\geq -1}}$ は G_K の正規部分群からなる減少フィルトレーションである。すなわち、任意の $r \in \mathbf{Q}_{\geq -1}$ に対して $G^r_{K,\mathrm{cl}}$ は G_K の正規部分群であり、$r < s$ なら $G^r_{K,\mathrm{cl}} \supset G^s_{K,\mathrm{cl}}$ が成り立つ。

(2) K^{ur} を K の最大不分岐拡大とするとき、$G_K/G^0_{K,\mathrm{cl}} = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K)$ が成り立つ。

(3) K^{tr} を K の最大順分岐拡大とするとき、$G_K/G^{0+}_{K,\mathrm{cl}} = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{tr}}/K)$ が成り立つ。

(4) K'/K を分岐指数が e の有限次順分岐拡大とするとき、各 $r \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ に対して $G^{er}_{K',\mathrm{cl}} = G^r_{K,\mathrm{cl}}$ が成り立つ。

F_K が完全体とは限らないときには、G_K に対して、[Se] における分岐群の一般化であるような 2 種類の分岐群が Abbes-斎藤 [AS1] により一般に定義されている。$\{G^r_K\}_{r \in \mathbf{Q}_{\geq 1}}$ をそのうちの非対数的な分岐群、$\{G^r_{K,\log}\}_{r \in \mathbf{Q}_{\geq 0}}$ を対数的な分岐群とする。$r \in \mathbf{Q}_{\geq 1}$ に対して G_K^{r+} を $\bigcup_{s>r} G_K^s$ の閉包とし、$r \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ に対して $G^{r+}_{K,\log}$ を $\bigcup_{s>r} G^s_{K,\log}$ の閉包とすると、これらの 2 種類の分岐群は次をみたす ([AS1, Propositions 3.7 (1), 3.7 (3), 3.15 (1), 3.15 (2), 3.15 (4)])。

(a) 任意の $r \in \mathbf{Q}_{\geq 1}$ に対して $G^r \supset G^r_{\log} \supset G^{r+1}$ が成り立つ。

(b) K^{ur} を K の最大不分岐拡大とするとき、$G_K/G_K^1 = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K)$ が成り立つ。

(c) K^{tr} を K の最大順分岐拡大とするとき、$G_K/G_K^{1+} = G_K/G_{K,\log}^{0+} = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{tr}}/K)$ が成り立つ。

(d) K'/K を有限次不分岐拡大とするとき、任意の $r \in \mathbf{Q}_{\geq 1}$ に対して $G_{K'}^r = G_K^r$ が成り立つ。

(e) K'/K を分岐指数が e の有限次順分岐拡大とするとき、$r \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ に対して $G_{K',\log}^{er} = G_{K,\log}^r$ が成り立つ。

(f) F_K が完全体のとき、任意の $r \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ に対して $G_K^{r+1} = G_{K,\log}^r = G_{K,\mathrm{cl}}^r$ が成り立つ。

この分岐群に対しても [Se] における分岐群と同様に次の Hasse-Arf の定理が成り立つ。

定理 5 ([AS2, Corollaire 9.12], [KS, Theorem 1.3], [Y1, Theorem 3.1], [Sa4, Theorem 4.3.1.2])**.** L/K を有限次アーベル拡大とし、$r \in \mathbb{Q}$ とする。$r \geq 1$ のとき、任意の $s > r$ に対して $G_K^r/(G_L \cap G_K^r) \neq G_K^s/(G_L \cap G_K^s)$ が成り立つならば r は整数である。同様に、$r \geq 0$ のとき、任意の $s > r$ に対して $G_{K,\log}^r/(G_L \cap G_{K,\log}^r) \neq G_{K,\log}^s/(G_L \cap G_{K,\log}^s)$ が成り立つならば r は整数である。

次に G_K の連続表現に対する不変量を定義する。本稿では階数 1 の層しか考えないので、1 次表現のみを考える。$\chi\colon G_K \to \Lambda^\times$ を G_K の指標とする。このとき、χ の**全次元** $\mathrm{dt}(\chi)$ と**スワン導手** $\mathrm{sw}(\chi)$ をそれぞれ

$$\mathrm{dt}(\chi) = \min\{r \mid \chi(G_K^{r+}) = 1\}$$
$$\mathrm{sw}(\chi) = \min\{r \mid \chi(G_{K,\log}^{r+}) = 1\}$$

として定義する。このとき、上記の定理 5 より、χ の全次元 $\mathrm{dt}(\chi)$ とスワン導手 $\mathrm{sw}(\chi)$ はそれぞれ 1 以上、0 以上の整数になる。また、上で述べた分岐群の性質 (a), (c) により、$\mathrm{dt}(\chi) = 1$ であることと $\mathrm{sw}(\chi) = 0$ であることが同値であるということや、$\mathrm{dt}(\chi)$ が $\mathrm{sw}(\chi)$ あるいは $\mathrm{sw}(\chi) + 1$ のいずれかに等しいことがわかる。

次に代数的サイクルを構成する際に余接束の閉部分多様体を構成するために使用する、全次元 $\mathrm{dt}(\chi)$ およびスワン導手 $\mathrm{sw}(\chi)$ の精密化にあたる不変量について紹介する。本稿で考える完備離散付値体は代数多様体の余次元 1 の点での局所環の完備化から定まるものであることから、K が等標数 (i.e. K と F_K の標数が等しい) の場合のみを考える。簡単のため、K の標数は $p \neq 2$ であると仮定する。このとき、$m \in \mathbf{Z}_{>1}$ と $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して、G_K^m/G_K^{m+1}, $G_{K,\log}^n/G_{K,\log}^{n+1}$ は p 乗が単位群となるようなアーベル群であり ([Sa2, Corollary 2.28.1], [Sa1, Theorem 1.24])、単射群準同型

$$\mathrm{rsw}\colon \mathrm{Hom}(G_K^m/G_K^{m+1}, \mathbf{F}_p) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_K^m/\mathfrak{m}_K^{m+1}, \Omega^1_{\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_K} F_K)$$
$$\mathrm{char}\colon \mathrm{Hom}(G_{K,\log}^n/G_{K,\log}^{n+1}, \mathbf{F}_p) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{n+1}, \Omega^1_{\mathcal{O}_K}(\log) \otimes_{\mathcal{O}_K} F_K)$$

が存在する ([Sa2, Corollary 2.28.2], [Sa1, Corollary 1.25])。χ が $\mathrm{dt}(\chi) = m$, $\mathrm{sw}(\chi) = n$ をみたすとき、χ は $\mathrm{Hom}(G^m/G^{m+1}, \mathbf{F}_p)$ および $\mathrm{Hom}(G_{\log}^n/G_{\log}^{n+1}, \mathbf{F}_p)$ の元 $\bar{\chi}$ を定める。このとき、$(\mathfrak{m}_K^{-m}\Omega^1_{\mathcal{O}_K}) \otimes_{\mathcal{O}_K} F_K$ および $(\mathfrak{m}_K^{-n}\Omega^1_{\mathcal{O}_K}(\log)) \otimes_{\mathcal{O}_K} F_K$ に属する微分形式 $\mathrm{char}(\chi)$, $\mathrm{rsw}(\chi)$ で、上の単射準同型 rsw, char による $\bar{\chi}$ の像がそれぞれ $\mathrm{char}(\chi)$, $\mathrm{rsw}(\chi)$ との積で定まる準同型となるようなものを取ることができる。この微分形式 $\mathrm{char}(\chi) \in (\mathfrak{m}_K^{-m}\Omega^1_{\mathcal{O}_K}) \otimes_{\mathcal{O}_K} F_K$, $\mathrm{rsw}(\chi) \in (\mathfrak{m}_K^{-n}\Omega^1_{\mathcal{O}_K}(\log)) \otimes_{\mathcal{O}_K} F_K$ をそれぞれ χ の**特性形式**および**精密化されたスワン導手**という。

これらの不変量は K の標数が $p > 0$ である場合には次のように K のヴィットト環を用いて計算することができる。

例 6 ([AS2, Corollaire 9.12], [Y1, Theorem 3.1], cf. [Br, §1], [K1, §2, §3], [M, §3]). K の標数が $p>0$ であるとする。$\chi\colon G\to\Lambda^\times$ を G の指標とし、χ の p 部分の位数を p^s とする。F でヴィット環 $W_s(K)$ 上のフロベニウス写像

$$F\colon W_s(K)\to W_s(K)\ ;\ (a_{s-1},a_{s-2},\ldots,a_0)\mapsto(a_{s-1}^p,a_{s-2}^p,\ldots,a_0^p)$$

を表す。アルティン・シュライヤー・ヴィット理論による同型

$$W_s(K)/(F-1)W_s(K)\xrightarrow{\simeq}H^1(K,\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$$

と標準的な全射 $W_s(K)\to W_s(K)/(F-1)W_s(K)$ の合成による像が χ の p 部分になるような $a=(a_{s-1},a_{s-2},\ldots,a_0)\in W_s(K)$ のうち、

$$\operatorname{ord}_K(a)=\min_i\{p^i\operatorname{ord}_K(a_i)\}$$

が最大であるようなものを取る。ここで、$a_i\in K$ に対する $\operatorname{ord}_K(a_i)$ は K の正規付値による a_i の付値を表す。このように $a\in W_s(K)$ を取ると、

$$\operatorname{sw}(\chi)=\operatorname{ord}_K(a)$$

が成り立つ。$\operatorname{sw}(\chi)=0$ のときには分岐群の性質 (c) により $\operatorname{dt}(\chi)=1$ が成り立つ。$\operatorname{sw}(\chi)>0$ のときには、$\pi\in\mathcal{O}_K$ を素元とし、

$$F^{s-1}d\colon W_s(K)\to\Omega_K^1\ ;\ (a_{s-1},a_{s-2},\ldots,a_0)\mapsto\sum_{i=0}^{s-1}a_i^{p^i-1}da_i$$

とするとき、

$$\operatorname{dt}(\chi)=\begin{cases}\operatorname{sw}(\chi) & (F^{s-1}da\notin\mathfrak{m}_K^{\operatorname{ord}_K(a)-1}\Omega_{\mathcal{O}_K}^1)\\ \operatorname{sw}(\chi)+1 & (F^{s-1}da\in\mathfrak{m}_K^{\operatorname{ord}_K(a)-1}\Omega_{\mathcal{O}_K}^1)\end{cases}$$

が成り立つ。さらに、$\operatorname{char}(\chi)$, $\operatorname{rsw}(\chi)$ はそれぞれ $F^{s-1}d\in\Omega_K^1$ の $(\mathfrak{m}_K^{-m}\Omega_{\mathcal{O}_K}^1)\otimes_{\mathcal{O}_K}F_K$, $(\mathfrak{m}_K^{-n}\Omega_{\mathcal{O}_K}^1(\log))\otimes_{\mathcal{O}_K}F_K$ における像と等しくなる。

5 局所定数構成可能層の分岐理論

X を標数 p の代数閉体 k 上なめらかな代数多様体とし、$D\subset X$ を X 上の単純正規交叉因子とする。D の補集合 $U=X-D$ の、X への自然な開埋め込みを $j\colon U\to X$ で表す。ℓ を p と異なる素数とし、Λ を有限局所 $\mathbf{Z}_\ell$ 代数、$\mathcal{F}$ を U 上自由 Λ 加群の局所定数構成可能層とする。$\bar\eta=\operatorname{Spec}k(U)^{\mathrm{sep}}\to U$ を U の幾何的生成点とすると、$\mathcal{F}$ の $\bar\eta$ での茎 $\mathcal{F}_{\bar\eta}$ は U の数論的基本群 $\pi_1(U,\bar\eta)$ の Λ 上連続表現を定める。本稿の目的から、$\mathcal{F}$ の階数 $\operatorname{rank}\mathcal{F}_{\bar\eta}$ は 1 であるとし、連続表現 $\mathcal{F}_{\bar\eta}$ に対応する $\pi_1(U,\bar\eta)$ の指標を $\chi\colon\pi_1(U,\bar\eta)\to\Lambda^\times$ とする。

$\{D_i\}_{i\in I}$ を D の既約成分全体のなす族とし、$\mathfrak{p}_i$ を D_i の生成点として、局所環 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}_i}$ の完備化を $\mathcal{O}_{K_i}$、$\mathcal{O}_{K_i}$ の商体を K_i と表す。このとき、K_i は $\mathcal{O}_{K_i}$ を付値環とする完備離散付値体になる。スキームの間の標準的な射

$$\operatorname{Spec}K_i\to U$$

が定める数論的基本群の間の射

$$G_{K_i}=\operatorname{Gal}(\bar K_i/K_i)\to\pi_1(U,\bar\eta)$$

によって $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ から定まる絶対ガロア群 G_{K_i} の指標を $\chi_i\colon G_{K_i}\to\Lambda^\times$ と表す。
D の既約成分の添字集合 I の部分集合 $I'\subset I$ を取り、$D'=\bigcup_{i\in I'}D_i$ とする。$i\in I$ に対して

$$\mathrm{sw}_i^{D'}(\chi)=\begin{cases}\mathrm{sw}(\chi_i) & (i\in I')\\ \mathrm{dt}(\chi_i) & (i\in I-I')\end{cases}$$

とおき、$\mathcal{F}$ の分岐因子 $R_{\mathcal{F}}^{D'}$ を

$$R_{\mathcal{F}}^{D'}=\sum_{i\in I}\mathrm{sw}_i^{D'}(\chi)D_i$$

と定める。簡単のため、任意の $i\in I$ に対して $\mathrm{dt}(\chi_i)>1$ であること、あるいは同値な条件である $\mathrm{sw}(\chi_i)>0$ を仮定する。このとき、$R_{\mathcal{F}}^{D'}$ の台は D に等しくなる。
3 章で述べた先行研究により、$p=0$ のときには特性サイクルの計算がわかっているので、$p>0$ を仮定する。さらに、簡単のため、$p\neq 2$ を仮定する。このとき、4 章で導入した特性形式 $\mathrm{char}(\chi_i)$、精密化されたスワン導手 $\mathrm{rsw}(\chi_i)$ は貼り合せによって $\Omega_X^1(\log D')(R_{\mathcal{F}}^{D'})|_D=\Omega_X^1(\log D')(R_{\mathcal{F}}^{D'})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_D$ の大域切断

$$\mathrm{char}^{D'}(\chi)\in\Gamma(D,\Omega_X^1(\log D')(R_{\mathcal{F}}^{D'})|_D)$$

を定める。D の既約成分 D_i の生成点 $\mathfrak{p}_i$ での $\Omega_X^1(\log D')(R_{\mathcal{F}}^{D'})|_D$ の茎 $\Omega_X^1(\log D')(R_{\mathcal{F}}^{D'})|_{D,\mathfrak{p}_i}$ は、$i\in I'$ のときには $(\mathfrak{m}_{K_i}^{-\mathrm{sw}(\chi_i)}\Omega^1_{\mathcal{O}_{K_i}}(\log))\otimes_{\mathcal{O}_{K_i}}F_{K_i}$ と等しくなり、$i\in I-I'$ のときには $(\mathfrak{m}_{K_i}^{-\mathrm{dt}(\chi_i)}\Omega^1_{\mathcal{O}_{K_i}})\otimes_{\mathcal{O}_{K_i}}F_{K_i}$ と等しくなっていることに注意する。すなわち、$\mathrm{char}^{D'}(\chi)$ は D の既約成分 D_i の生成点 $\mathfrak{p}_i$ での芽が $i\in I'$ のときには $\mathrm{rsw}(\chi_i)$ と等しくなり、$i\in I-I'$ のときには $\mathrm{char}(\chi_i)$ と等しくなるようなただ 1 つの $\Omega_X^1(\log D')(R_{\mathcal{F}}^{D'})|_D$ の大域切断である。この大域切断 $\mathrm{char}^{D'}(\chi)$ を $\mathcal{F}$ の D' に関して対数的な**特性形式**とよぶ。この特性形式はヴィット環の層を考えることで例 6 での特性形式、精密化されたスワン導手の計算と同じようにして大域的に構成することができる ([Y3, 1.2])。

6 部分的に対数的な特性サイクルの構成

5 章で構成した分岐の不変量を用いて、特性サイクルと比較するための代数的サイクルを構成する。記号は 5 章のままとし、X の次元を d とする。また、$\mathcal{F}$ の階数は引き続き 1 (すなわち $\dim\mathcal{F}_{\bar{\eta}}=1$) であるとする。
特性サイクルと比較するための代数的サイクルの構成のアイデアは、対数的な極を D と $\emptyset$ の間に部分的に取ることで、3 章で述べた加藤 [K2] における対数的な特性サイクルと、[Sa3] における対数的な特性サイクルの非対数版の類似でありかつ、2 つのサイクルのもつ長所をあわせもったものを構成し、X の余接束 T^*X への引き戻しを考えることである。このアイデアにおいて、結果的に本質的な対数的な極となるものは、D の部分因子

$$D_{\mathrm{mix}}=\bigcup_{i\in I_{\mathrm{mix}}}D_i,\quad I_{\mathrm{mix}}=\{i\in I\mid \mathrm{dt}(\chi_i)=\mathrm{sw}(\chi_i)+1\}$$

である。この対数的な極は、松田 [M] によって、加藤 [K2] による対数的な特性サイクルの指数公式と Deligne[D] によって提唱された曲面上の層のオイラー数の公式との比較の際に考えられたものである。
構成について、まず、代数的サイクルを構成する際の仮定となる条件を定義する。以下でも、簡単のため $p\neq 2$ であることと、任意の $i\in I$ に対して $\mathrm{dt}(\chi_i)>1$ であることを仮定する。

定義 7. 5 章で定義した特性形式 $\mathrm{char}^{D'}(\chi)$ が任意の $x \in D$ に対して

$$\mathrm{char}^{D'}(\chi)_x \notin \mathfrak{m}_x \Omega^1_X(\log D')(R^{D'}_{\mathcal{F}})|_{D,x}$$

をみたすとき、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は D' **に関して対数的に clean** であるという。

定義 7 で定めた条件は $D' = D$ なら、3 章での加藤 [K2] による対数的な特性サイクルを定義する際の仮定である、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が clean であるという条件と同じ条件である。$D' = \emptyset$ なら、3 章での斎藤 [Sa3] による対数的な特性サイクルの非対数版を構成する際の仮定である、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が強非退化であるという条件と同値になる。任意の $D' \subset D$ に対して、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean なら層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は D_{mix} に関して対数的に clean になる ([Y3, Lemma 1.35])。この意味で、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D_{mix} に関して対数的に clean になるという条件は、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean になるという条件の中で最も弱い条件になる。

層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean であるとき、各 $i \in I$ に対して部分層

$$\Omega^1_X(-R^{D'}_{\mathcal{F}})|_{D_i} \cdot \mathrm{char}^{D'}(\chi) \subset \Omega^1_{X/k}(\log D')|_{D_i} = \Omega^1_{X/k}(\log D') \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D_i}$$

は、$\Omega^1_{X/k}(\log D')|_{D_i}$ の局所直和成分となり、D' に沿って対数的な極をもつ X の対数的な余接束 $T^*X(\log D')$ の D_i 上への制限 $T^*X(\log D') \times_X D_i$ の部分線束 $L^{D'}_{i,\mathcal{F}}$ を定める。この $L^{D'}_{i,\mathcal{F}}$ を用いて、特性サイクルの計算の候補を与える代数的サイクルを次のように定義する。

定義 8. 層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean であるとき、$j_!\mathcal{F}$ の D' **に関して対数的な特性サイクル** $\mathrm{Char}^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ を、D' に沿って対数的な極をもつ X の対数的余接束 $T^*X(\log D')$ 上の d 次元の代数的サイクルとして

$$CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F}) = (-1)^d([T^*_X X(\log D')] + \sum_{i \in I} \mathrm{sw}^{D'}_i(\chi)[L^{D'}_{i,\mathcal{F}}])$$

と定義する。ただし、$T^*_X X(\log D')$ は $T^*X(\log D')$ の零切断を表す。

この部分的に対数的な特性サイクル $CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ は、$D' = D$ のときには、3 章で述べた加藤 [K2] による対数的な特性サイクルに等しい。$D' = \emptyset$ のときには、3 章で述べた斎藤 [Sa3] による対数的な特性サイクルの非対数版 $CC^{\log}_{\emptyset}(j_!\mathcal{F})$ に一致する。さらに、この代数的サイクル $CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ は加藤 [K2] による対数的な特性サイクルや斎藤 [Sa3] による特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ と同様に次の指数公式をみたす。

定理 9 ([Y4, Theorem 4.4], cf. [Sa1, Corollary 3.8], [Sa3, Theorem 7.14])**.** $p \neq 2$ とする。X が k 上固有的であり、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean であるとき、$j_!\mathcal{F}$ のオイラー数 $\chi(X, j_!\mathcal{F})$ は $CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ と $T^*X(\log D')$ の零切断 $T^*_X X(\log D')$ との交点数 $(CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F}), T^*_X X(\log D'))_{T^*X(\log D')}$ として

$$\chi(X, j_!\mathcal{F}) = (CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F}), T^*_X X(\log D'))_{T^*X(\log D')}$$

と計算できる。

$SS^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ で $CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ の台を表す。$CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ が $CC^{\log}_{D}(j_!\mathcal{F})$ と $CC^{\log}_{\emptyset}(j_!\mathcal{F})$ の長所をあわせもっているということについて説明する。まず、$D' = \emptyset$ の場合には、$CC^{\log}_{\emptyset}(j_!\mathcal{F})$ と特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ はどちらも T^*X 上の代数的サイクルなので、T^*X 上の 2 つの代数的サイクルとして比較ができる。一方、$CC^{\log}_{\emptyset}(j_!\mathcal{F})$ が定義される条件である、層 $\mathcal{F}$ の D に

沿った分岐が $\emptyset$ に関して対数的に clean であるという条件はあまり一般的な条件ではない。実際、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D に関して対数的に clean であるという条件が X の次元が、X が曲面の場合には、D 上の (閉) 点に沿ったブローアップを繰り返すことにより実現可能な条件である ([K2, Theorem 4.1]) であることに対し、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が $\emptyset$ に関して対数的に clean であるという条件はこれをみたさない。

$D' = D$ の場合には、$CC_D^{\log}(j_!\mathcal{F})$ は $T^*X(\log D)$ 上の代数的サイクルで、その T^*X への引き戻し (i.e. X 上のベクトル束の標準的な射 $\tau\colon T^*X \to T^*X(\log D')$ が定める Gysin 準同型 ([F, 6.6]) による像) が T^*X 上の d 次元の代数的サイクルを定めれば、T^*X 上の 2 つの代数的サイクルとして、特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ との比較が可能になるが、これもいつでも成り立つことではない。実際、上記の D_{mix} が D と異なる場合には、$\tau\colon T^*X \to T^*X(\log D)$ による $SS_D^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の逆像の次元は X の次元 d よりも真に大きくなる。一方で、X が曲面の場合に成り立つと述べた、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D に関して対数的に clean であるという条件が D 上の閉部分多様体に沿ったブローアップを繰り返すことで実現できるという主張は X の次元がより高次元の場合においてもまだ反例は見つかっていない。

D 上の閉部分多様体に沿ったブローアップはオイラー数

$$\chi_c(U,\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \dim H_c^i(U,\mathcal{F})$$

を変えないため、オイラー数の計算を目的とした特性サイクルの計算において、D 上の閉部分多様体に沿ったブローアップを許すことはまあまあ合理的である。上述のように、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D に関して対数的に clean であるならば層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は D_{mix} に関しても対数的に clean であるということから、D 上の閉部分多様体に沿ったブローアップを繰り返すことで層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D に関して対数的に clean であるという条件が実現できれば、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D_{mix} に関して対数的に clean であるという条件も実現される。さらに、X 上のベクトル束の標準的な射 $T^*X \to T^*X(\log D')$ による引き戻しに関して以下が成り立つ。

命題 10 ([Y3, Corollary 4.32])**.** $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean であるとする。このとき、D 上の閉部分スキームに沿ったブローアップを有限回繰り返すことにより、次の条件をすべてみたすような固有的かつ双有理的な射 $f\colon X' \to X$ が得られる。

(1) f は同型 $f^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} U$ を誘導する。(以下の条件ではこの同型により $f^{-1}(U)$ と U を同一視する。)

(2) $\mathcal{F}$ の f^*D に沿った分岐は $(f^*D)_{\mathrm{mix}}$ に関して対数的に clean である。

(3) $j'\colon U \to X'$ を自然な開埋め込みとする。このとき、X' 上のベクトル束の標準的な射

$$\tau_{(f^*D)_{\mathrm{mix}}}\colon T^*X' \to T^*X'(\log(f^*D)_{\mathrm{mix}})$$

による台 $SS^{\log}_{(f^*D)^{\log}_{\mathcal{F}}}(j'_!\mathcal{F})$ の逆像 $\tau^{-1}_{(f^*D)_{\mathrm{mix}}}(SS^{\log}_{(f^*D)^{\log}_{\mathcal{F}}}(j'_!\mathcal{F}))$ の任意の既約成分の次元は X の次元 d に等しい。

以下、

$$\tau_{D'}\colon T^*X \to T^*X(\log D')$$

で X 上のベクトル束 T^*X から $T^*X(\log D')$ の標準的な射を表すことにする。以下では、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が $D' = D_{\mathrm{mix}}$ に関して対数的に clean であるという仮定のもとで、層のオイラー数の計算を目的とした特性サイクルの計算を考える。命題 10 により、D 上の閉部

分多様体に沿ったブローアップを許すことで、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が $D' = D_{\mathrm{mix}}$ に関して対数的に clean であるという仮定に加えて命題 10 においてブローアップを取ることで達成される条件である、$\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$ の任意の既約成分の次元が X の次元 d であることを認めてよい。このとき、対数的な特性サイクル $CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の $\tau_{D'}$ が定める Gysin 準同型による像 $\tau_{D'}^!CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ が T^*X 上の代数的サイクルとして定まる。そのため、この代数的サイクルと特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ を T^*X 上の 2 つの代数的サイクルとして比較する。

予想 11 ([Y3, Conjecture 4.35])**.** $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean であるとする。さらに、$\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$ の任意の既約成分の次元は X の次元 d に等しいとする。このとき、等号

$$CC(j_!\mathcal{F}) = \tau_{D'}^!(CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$$

が成立する。

7 特性サイクルの計算

最後に、前章の最後に述べた予想 11 に関する結果とその証明の概略について説明する。記号や仮定については前章と同じとする。すなわち、簡単のため、$p \neq 2$ であることと任意の $i \in I$ に対して $\mathrm{dt}(\chi_i) > 1$ であることを仮定する。

定理 12 ([Y3, Theorem 5.6])**.** $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は D' に関して対数的に clean であるとし、$\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$ の任意の既約成分の次元は X の次元 d に等しいとする。このとき、X の閉部分集合 $\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})) \cap T_X^*X$ の余次元が 2 以下であれば、予想 11 が成立する。すなわち、特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ は 5 章で導入した層 $\mathcal{F}$ の分岐の不変量を用いて、$CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の構成と T^*X への引き戻しの計算により計算することができる。

この定理と $\tau_{D'}^!CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の台が $\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$ であること、および自由 Λ 加群の局所定数構成可能層のアフィン開埋め込みによる零延長の特性サイクルの台が特異台に一致すること ([BBD, Examples 4.0, Corollaire 4.1.10 (i)], [Sa3, Proposition 5.14.2]) により、特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ の層の分岐の不変量による計算に関しても次のことがわかる。

系 13 ([Y3, Corollary 5.12])**.** 定理 12 の仮定の下で、等号

$$SS(j_!\mathcal{F}) = \tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$$

が成り立つ。

定理 12 の証明の概略を説明する。$d = 1$ の場合には、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は D に関して対数的に clean であることがわかるので、斎藤 [Sa3] による特性サイクルの計算 [Sa3, Theorem 7.14] と $\tau_{D'}^!CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の計算とを比較することにより定理 12 が証明できる。

$d > 1$ の場合には、3 章で述べた斎藤 [Sa3] による余次元 2 以上の閉部分集合を除いたところでの特性サイクルの計算と $\tau_{D'}^!CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の計算により、$SS(j_!\mathcal{F}) \cup \tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$ の既約成分 C_a のうち X の閉部分集合 $C_a \cap T_X^*X$ の X での余次元が 2 であるようなものに対して、$CC(j_!\mathcal{F})$ および $\tau_{D'}^!CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ における重複度が等しいことを示せばよいことがわかる。この C_a の重複度が等しいことを示すために、2 つの代数的サイクルを X の 2 次元のなめらかな閉部分多様体の余接束上に引き戻し、その引き戻しを比較する。

引き戻しを考えるために、まず、$CC(j_!\mathcal{F})$ および $\tau_{D'}^!CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の台について考える。

命題 14 ([Y3, Theorem 4.21]). $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は D' に関して対数的に clean であるとする。このとき、

$$SS(j_!\mathcal{F}) \subset \tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})) \cup \bigcup_{i \in I-I'} T^*_{D_i}X \tag{7.1}$$

が成り立つ。

命題 14 における包含関係 (7.1) の右辺の集合を $S_{D'}(j_!\mathcal{F})$ とおく。命題 14 は、後ほど定理 12 の証明を X の次元がより低い場合に帰着する際に必要になる。定理 12 の証明の概略という本題からは少しずれるが、この命題 14 の証明では、5, 6 章の議論を D が X の正規単純交叉因子という仮定のもとから D の任意の既約成分がなめらかであるという仮定のもとへ拡張する必要がある。その拡張された設定のもとで、任意の分離的かつ $S_{D'}(j_!\mathcal{F})$-横断的な射 $h\colon W \to X$ に対して、$h^*D = D \times_X W$ はなめらかな因子 $h^*D_i = D_i \times_X W$ を既約成分とする W の因子であり、層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に clean なら、層の引き戻し $h^*\mathcal{F}$ も h^*D に沿った分岐が h^*D' に関して対数的に clean になるということが成り立つ ([Y3, Propositions 4.6, 4.7 (1)])。これに加えて、次の 2 つの命題を用いることで命題 14 が得られる。D の任意の既約成分がなめらかであるという仮定のもとへの 5, 6 章の議論の拡張は、命題 16 の (2) の条件を命題 15 を用いて確かめるために必要になる。

命題 15 ([Y3, Proposition 2.9 (2)]). 層 $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐が D' に関して対数的に *clean* であるとき、標準的な射 $j_!\mathcal{F} \to Rj_*\mathcal{F}$ は同型になる。

命題 16 ([Sa3, Propositions 8.8.1, 8.13]). $C \subset T^*X$ を錐的な閉部分集合とし、標準的な射 $j_!\mathcal{F} \to Rj_*\mathcal{F}$ が同型であるとする。このとき次は同値である。

(1) $SS(j_!\mathcal{F}) \subset C$.

(2) 任意の k 上なめらかな代数多様体の間の分離的かつ C-横断的な射 $h\colon W \to X$ と自然な開埋め込み $j'\colon h^*U = U \times_X W \to X$ に対して、標準的な射 $j'_!h^*\mathcal{F} \to Rj'_*h^*\mathcal{F}$ は同型である。

定理 12 の証明の概略に戻り、次に、$CC(j_!\mathcal{F})$ および $\tau^!_{D'}CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})$ を曲面の余接束上に整合的に引き戻す射について考える。このとき、特性サイクルの射の存在と引き戻しとの整合性に関して次の 2 つの命題が成り立つ。ここで、任意の既約成分の次元がそれぞれ e と d であるような k 上なめらかな代数多様体 W, Y と任意の既約成分の次元が Y の次元 d に等しいような錐的な閉部分集合 $C \subset T^*Y$ に対して、k 上の代数多様体の間の射 $h\colon W \to Y$ が C-横断的でありかつ $h^*C = C \times_Y W$ の任意の既約成分の次元が e であることを h は**正しく** C-横断的であるという ([Sa3, Definition 7.1.2])。

命題 17 ([Sa3, Theorem 7.6]). X の任意の既約成分の次元は d であるとし、Y を任意の既約成分の次元が e であるような k 上なめらかな代数多様体とする。$\mathrm{pr}_1\colon T^*X \times_X Y \to T^*X$ を第一射影とするとき、pr_1 は正則閉埋め込みである。$dh\colon T^*X \times_X Y \to T^*Y$ を h から定まる Y 上のベクトル束の標準的な射として $h^! = (-1)^{d-e}dh_* \circ \mathrm{pr}_1^!$ とすると、$h\colon Y \to X$ が正しく $SS(j_!\mathcal{F})$-横断的なら、T^*X 上の代数的サイクルとして等式

$$h^!CC(j_!\mathcal{F}) = CC(h^*j_!\mathcal{F})$$

が成り立つ。

命題 18 ([Y3, Corollary 5.10]). X は k 上準射影的かつ X の任意の既約成分の次元は d であるとする。加えて、$\mathcal{F}$ の D に沿った分岐は D' に関して対数的に clean であるとし、$\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$ の任意の既約成分の次元は X の次元 d に等しいとする。e を d 以下の正の整数とするとき、任意の既約成分が e 次元であるような k 上なめらかなある代数多様体 Y からの正しく $\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$-横断的な正則閉埋め込み $h\colon Y \to X$ で、各 $i \in I$ に対して $h^*D_i = D_i \times_X Y$ が Y の因子になり、$h^*D = D \times_X Y$ が Y の単純正規交叉因子になるようなものが存在する。

特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ はエタール局所的に定義されており、$\tau_{D'}^{!}CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ も分岐の不変量を使ったその構成からザリスキ局所的に定義されているため、$CC(j_!\mathcal{F})$ と $\tau_{D'}^{!}CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の間の等号を示すにあたっては、X の適当なアフィン開被覆を取ることにより X は k 上準射影的かつ任意の既約成分が d 次元であるとしてよい。d 以下であるような正の整数 e を取る。命題 18 で取った、正しく $\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$-横断的な正則閉埋め込み $h\colon Y \to X$ は、各 $i \in I$ に対して h^*D_i が X 上のなめらかな因子であるということから、正しく $\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})) \cup \bigcup_{i \in I'} T_{D_i}^* X$-横断的でもある ([Sa3, Lemma 3.4.5])。このとき、引き戻し $h^!\tau_{D'}^{!}CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ が T^*X 上の代数的サイクルとして定義でき、$j'\colon h^*U = U \times_X Y \to Y$ を自然な開埋め込みとすると、計算により、

$$h^!\tau_{D'}^{!}CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}) = CC_{h^*D'}^{\log}(j'_!h^*\mathcal{F})$$

が成り立つことがわかる ([Y3, Proposition 4.10 (2)])。さらに、命題 14 より、h は正しく $SS(j_!\mathcal{F})$-横断的でもあるので、命題 17 より、

$$h^!CC(j_!\mathcal{F}) = CC(j'_!h^*\mathcal{F})$$

が成り立つ。

(7.1) の右辺 $S_{D'}(j_!\mathcal{F})$ の既約成分 C_a のうち、$C_a \cap T_X^*X$ の X での余次元が 2 であるものについて、$CC(j_!\mathcal{F})$ および $\tau_{D'}^{!}CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ における重複度が等しくなることを確かめようとしていた。そこで、$\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$ について調べると、$\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))$ の既約成分 C_a のうちで X の閉部分集合 $C_a \cap T_X^*X$ の X での余次元が e であるようなものは互いに異なる X の閉部分集合 $C_a \cap T_X^*X$ をもつことがわかる。そのため、さらに X の適当なアフィン開被覆を取ることにより、$S_{D'}(j_!\mathcal{F})$ の既約成分 C_a で、$C_a \cap T_X^*X$ の X での余次元が 2 であるものは高々1 つであるとしてよい。このとき、上記の T^*X への引き戻しとの整合性により、C_a の $CC(j_!\mathcal{F})$ および $\tau_{D'}^{!}CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ における重複度はそれぞれ、$h^![C_a]$ の $CC(j'_!h^*\mathcal{F})$ および $CC_{h^*D'}^{\log}(j'_!h^*\mathcal{F})$ における重複度に等しくなる。よって、等号

$$CC(j'_!h^*\mathcal{F}) = CC_{h^*D'}^{\log}(j'_!h^*\mathcal{F})$$

が示せれば C_a の $CC(j_!\mathcal{F})$ および $\tau_{D'}^{!}CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ における重複度は等しくなることがわかる。今考えているのは $C_a \cap T_X^*X$ の X での余次元が 2 であるような C_a なので、$e = 2$ として良い。すなわち、X の次元 d が 2 である場合に定理 12 を示せば良い。$d = 2$ である場合には、3 章で述べた曲面の場合の特性サイクルの計算 [Y2, Theorem 6.1] と $\tau_{D'}^{!}CC_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})$ の計算を比較することによって定理 12 を示すことができ、これによって定理 12 の証明が完了する。

補足 19. 上述した定理 12 の証明より、定理 12 の「X の閉部分集合 $\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F})) \cap T_X^*X$ の X での余次元が 2 以下であれば」という仮定は、特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ の計算が X の次元が 2 以下のときにしかわかっていないことによっている。すなわち、特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ の計算を X が e 次元の場合に与えることができれば、上記の証明と同じ議論により、定理

12 の仮定を「X の閉部分集合 $\tau_{D'}^{-1}(SS_{D'}^{\log}(j_!\mathcal{F}))\cap T^*_X X$ の X での余次元が e 以下であれば」とした上で定理 12 が成り立つかどうかを確かめることができる。

最後に定理 12 を用いた特性サイクル $CC(j_!\mathcal{F})$ の計算の例を与える。

例 20. $X=\mathbf{A}^3_k=\operatorname{Spec} k[x_1,x_2,x_3]$ とする。$i=1,2$ に対して $D_i=(x_i=0)$、$D=D_1\cup D_2$ として、$D'=D_1$ とおく。また、n を p と互いに素な正の整数とする。$\mathcal{F}$ に対応する指標 $\chi\colon \pi_1(U,\bar\eta)\to\Lambda^\times$ の p 部分 χ' の位数は p であるとして、$\chi'\in H^1_{\text{ét}}(U,\mathbf{F}_p)$ がアルティン・シュライヤー理論によって定まる射

$$\Gamma(U,\mathcal{O}_U)=k[x_1^{\pm1},x_2^{\pm1},x_3]\to H^1_{\text{ét}}(U,\mathbf{F}_p)$$

による $\dfrac{x_3}{x_1^n x_2^p}\in k[x_1^{\pm1},x_2^{\pm1},x_3]$ の像であるとする。このとき、

$$-da=-d\left(\frac{x_3}{x_1^n x_2^p}\right)=\frac{nx_3 d\log x_1-dx_3}{x_1^n x_2^p}\in\Omega^1_U$$

であることと例 6 より、χ_1 に対して

$$\operatorname{dt}(\chi_1)=n+1,\ \operatorname{sw}(\chi_1)=n$$

および

$$-da=\begin{cases}\dfrac{nx_3 d\log x_1-dx_3}{x_1^n x_2^p}=\operatorname{rsw}(\chi_1)\in x_1^{-n}\Omega^1_{K_1}(\log)\otimes_{\mathcal{O}_{K_1}}F_{K_1},\\[2ex] \dfrac{nx_3dx_1-x_1dx_3}{x_1^{n+1}x_2^p}=\operatorname{char}(\chi_1)\in x_1^{-(n+1)}\Omega^1_{K_1}\otimes_{\mathcal{O}_{K_1}}F_{K_1}\end{cases}$$

が得られる。χ_2 についても

$$\operatorname{dt}(\chi_2)=p,\ \operatorname{sw}(\chi_2)=p$$

および

$$-da=\begin{cases}\dfrac{nx_3dx_1+0\cdot d\log x_2-x_1dx_3}{x_1^{n+1}x_2^p}=\operatorname{rsw}(\chi_2)\in x_2^{-p}\Omega^1_{K_2}(\log)\otimes_{\mathcal{O}_{K_2}}F_{K_2},\\[2ex] \dfrac{nx_3dx_1+0\cdot dx_2-x_1dx_3}{x_1^{n+1}x_2^p}=\operatorname{char}(\chi_2)\in x_2^{-p}\Omega^1_{K_2}\otimes_{\mathcal{O}_{K_2}}F_{K_2}\end{cases}$$

が得られる。

$D'=D_1$ なので、

$$\begin{aligned}R_\chi^{D'}&=R_\chi^{D_1}=\operatorname{sw}(\chi_1)D_1+\operatorname{dt}(\chi_2)D_2=nD_1+pD_2,\\ \operatorname{rsw}^{D'}(\chi)&=\frac{nx_3d\log x_1-dx_3}{x_1^nx_2^p}\in\Gamma(D,\Omega^1_X(\log D')(R_\chi^{D'})|_D),\\ CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})&=-([T^*_X X(\log D')]+n[\langle nx_3d\log x_1-dx_3/D_1\rangle]\\ &\qquad p[\langle nx_3d\log x_1-dx_3/D_2\rangle])\end{aligned}$$

であり、$D_3=(x_3=0)$ とするとき、定理 12 より

$$\begin{aligned}CC(j_!\mathcal{F})&=\tau_{D'}^!CC^{\log}_{D'}(j_!\mathcal{F})\\ &=-([T^*_XX]+n([T^*_{D_1}X]+[T^*_{D_1\cap D_3}X])+p[\overline{\langle nx_3dx_1-x_1dx_3/D_2^\circ\rangle}])\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、$D_2^\circ=D_2-D_1$ として、$[\overline{\langle nx_3dx_1-x_1dx_3/D_2^\circ\rangle}]$ で直和成分

$$\mathcal{O}_{D_2^\circ}\cdot(nx_3dx_1-x_1dx_3)\subset\Omega^1_X|_{D_2^\circ}$$

が定める $T^*X\times_X D_2^\circ$ の部分線束の T^*X における閉包を表す。

謝辞

第 69 回代数学シンポジウムの関係者の方々、特に、講演の機会を与えてくださったプログラム責任者の伊藤哲史先生、並川健一先生、ならびにシンポジウム責任者の朝倉政典先生、会場責任者の秋山茂樹先生に心より感謝申し上げます。 本研究は JSPS 科研費 JP21K13769 の助成を受けたものです。

参考文献

[AS1] A. Abbes and T. Saito, *Ramification of local fields with imperfect residue fields*, Am. J. Math. **124** (5) (2002), 879–920.

[AS2] A. Abbes and T. Saito, *Analyse micro-locale ℓ-adique en caractéristique $p > 0$: le cas d'un trait*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **45** (2009), no. 1, 25–74.

[Be] A. Beilinson, *Constructible sheaves are holonomic*, Selecta Math. (N.S.) 22 (2016), no. 4, 1797–1819.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne, Faisceaux pervers, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers* I, Astérisque, 100, *Soc. Math. France, Paris*, 1982.

[Br] J. L. Brylinski, *Théorie du corps de classes de Kato et revêtements abéliens de surfaces*, Ann. Inst. Fourier **33** (1983), no. 3, 23–38.

[D] P. Deligne, Letter to Illusie, 1976.

[SGA4$\frac{1}{2}$] P. Deligne, *Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ-adique, Cohomologie étale SGA* $4\frac{1}{2}$, Springer Lecture Notes in Math. 569, 233–251 (1977).

[F] W. Fulton, *Intersection Theory, 2nd ed*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 2, Berlin, Springer, 1988.

[SGA5] A. Grothendieck, rédigé par L. Illusie, *Formule de Lefschetz*, exposé III, Séminaire de géométrie algébrique 5, Lecture Notes in Mathematics, Volume 589, pp. 73–137 (Springer, 1977).

[KSc] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag, Grundlehren der Math. Wissenschaften, vol. 292. Springer, Berlin (1990).

[K1] K. Kato, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, Algebraic K-theory and algebraic number theory, Contemp. Math. **83** (1989), 101–131.

[K2] K. Kato, *Class field theory, $\mathcal{D}$-modules, and ramification on higher dimensional schemes, part I*, Am. J. of Math. Vol. **116**, No. 4 (1994), 757–784.

[KSa] K. Kato and T. Saito, *Coincidence of two Swan conductors of abelian characters*, Épijournal Géom. Algébrique 3 (2019), Art. 15, 16 pp.

[M] S. Matsuda, *On the Swan conductor in positive characteristic*, Am. J. of Math. Vol. **119**, No. 4 (1997), 705–739.

[Sa1] T. Saito, *Wild ramification and the characteristic cycle of an ℓ-adic sheaf*, J. Inst. Math. Jussieu, 8 (2009), no. 4, 769–829.

[Sa2] T. Saito, *Wild Ramification and the Cotangent Bundle*, J. of Alg. Geom., 26 (2017), 399–473.

[Sa3] T. Saito, *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, Invent. Math. 207 (2017), no. 2, 597–695.

[Sa4] T. Saito, *Graded quotients of ramification groups of local fields with imperfect residue fields*, Amer. J. Math. 145(2023), no. 5, 1389–1464.

[Se] J.-P. Serre, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics 67, Springer, 1979.

[Y1] Y. Yatagawa, *Equality of Two Non-Logarithmic Ramification Filtrations of Abelianized Galois Group in Positive Characteristic*, Doc. Math. 22 (2017), 917–952.

[Y2] Y. Yatagawa, *Characteristic cycle of a rank 1 sheaf and ramification theory*, J. of Alg. Geom., 29 (2020), 471–545.

[Y3] Y. Yatagawa, *Singular support and characteristic cycle of a rank one sheaf in codimension two*, arXiv:2206.02989

[Y4] Y. Yatagawa, *Partially logarithmic characteristic cycles*, preprint.

The Borel-type presentation of the equivariant quantum and classical K-theory of the flag manifold in type C

早稲田大学 基幹理工学部応用数理学科
河野 隆史

概要

本稿では，C 型旗多様体の同変量子 K 環を，ある Laurent 多項式環の明示的な剰余環として表示する．また，同変量子 K 環の Borel 型表示において，Schubert 類と対応する Laurent 多項式を求めるためのアルゴリズムを与える．この計算を応用して，同変 K 環の Borel 表示において，Schubert 類を表す Laurent 多項式を明示する．本稿は，「第 69 回代数学シンポジウム」における筆者の講演のまとめである．本稿は，内藤聡氏 (東工大理学院) との共同研究に基づく．また，本稿の一部は，論文 [KN] に基づくものである．

1　一般旗多様体の量子 K 理論

G を連結かつ単連結な複素単純代数群とし，$T \subset G$ をその極大トーラス，$R(T)$ を T の表現環とする．G の Borel 部分群 B $(T \subset B \subset G)$ をとるとき，多様体 G/B を**旗多様体**という．旗多様体 G/B の T-同変 K 環を $K_T(G/B)$ とするとき，G/B の T-同変**量子 K 環** $QK_T(G/B)$ ([Giv], [Lee]) は，$R(T)$-加群として

$$QK_T(G/B) := K_T(G/B) \otimes_{R(T)} R(T)[\![Q_1, \dots, Q_n]\!]$$

で定義される．また，量子 K 環 $QK_T(G/B)$ における積は K 理論的 Gromov–Witten 不変量を用いて定義される．

W を G の Weyl 群とし，$B^- \subset G$ を G の opposite Borel 部分群とするとき，各 $w \in W$ に対して, 旗多様体 G/B の **Schubert 部分多様体** X^w が $X^w := \overline{B^- wB/B}$ で定義される．X^w の構造層を $\mathcal{O}^w$ と書くとき，各 $w \in W$ に対応する **Schubert 類** $[\mathcal{O}^w] \in K_T(G/B) \subset QK_T(G/B)$ が定まる．このとき, 集合 $\{[\mathcal{O}^w] \mid w \in W\}$ は, 量子 K 環 $QK_T(G/B)$ の $R(T)[\![Q_1, \dots, Q_n]\!]$-加群としての基底をなす．そこで, Schubert calculus においては, 各 $v, w, u \in W$，$\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対して，展開式

$$[\mathcal{O}^v] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{\substack{u \in W \\ \boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n}} c_{v,w}^{u,\boldsymbol{i}} Q_1^{i_1} \cdots Q_n^{i_n} [\mathcal{O}^u]$$

で定まる **Schubert 構造定数** $c_{v,w}^{u,\boldsymbol{i}} \in R(T)$ を組合せ論的に記述することが 1 つの主問題となる．

本研究では，この問題にアプローチするために，次の手順で考察をする．

[Step 1] 量子 K 環 $QK_T(G/B)$ を，比較的簡単な環として表示する．
[Step 2] 求めた環において，Schubert 類に対応する元を計算する．

この [Step 1] における表示が **Borel 型表示**である．$R(T)^W \subset R(T)$ を，$R(T)$ の元であって，W の作用で不変なものの全体からなる部分環とする．このとき，(通常の) T-同変 K 環 $K_T(G/B)$ の **Borel 表示**は，環同型

$$K_T(G/B) \simeq R(T) \otimes_{R(T)^W} R(T) \tag{1.1}$$

として記述される (例えば [PR] 参照)．ここでは，とくに G が C_n 型の単純代数群 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ のときに，Borel 表示をより詳しく記述する．G のウェイト格子 P およびその標準基底 $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ をとり，T の表現環 $R(T)$ の標準的な基底 $\{\mathbf{e}^\lambda \mid \lambda \in P\}$ (ただし，$\lambda, \mu \in P$ に対して $\mathbf{e}^\lambda \cdot \mathbf{e}^\mu = \mathbf{e}^{\lambda+\mu}$) をとる．このとき，$T$ の表現環 $R(T)$ は，n 変数 Laurent 多項式環と環同型である．実際

$$R(T) = \mathbb{Z}[\mathbf{e}^{\pm\varepsilon_1}, \ldots, \mathbf{e}^{\pm\varepsilon_n}] \simeq \mathbb{Z}[z_1^{\pm1}, \ldots, z_n^{\pm1}]$$

が成り立つ．そこで，$1 \leq k \leq n$ に対して，$e_k(x_1, \ldots, x_{2n})$ を $(2n)$-変数 k 次基本対称多項式とし，n 変数 Laurent 多項式環 $R(T)[z_1^{\pm1}, \ldots, z_n^{\pm1}]$ の

$$\{e_k(z_1, \ldots, z_n, z_n^{-1}, \ldots, z_1^{-1}) - e_k(\mathbf{e}^{\varepsilon_1}, \ldots, \mathbf{e}^{\varepsilon_n}, \mathbf{e}^{-\varepsilon_n}, \ldots, \mathbf{e}^{-\varepsilon_1}) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

で生成されるイデアルを I と定めると，Borel 表示 (1.1) は，環同型

$$K_T(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B) \simeq R(T)[z_1^{\pm1}, \ldots, z_n^{\pm1}]/I \tag{1.2}$$

で記述される．

本研究の目的は，G が C_n 型の場合に，この Borel 表示の “量子版” を記述することである．すなわち，次の 2 つの問題を考察する．

1. Laurent 多項式 $R(T)[\![Q_1, \ldots, Q_n]\!][z_1^{\pm1}, \ldots, z_n^{\pm1}]$ のイデアル I^Q であって，環同型
$$QK_T(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B) \simeq R(T)[\![Q_1, \ldots, Q_n]\!][z_1^{\pm1}, \ldots, z_n^{\pm1}]/I^Q \tag{1.3}$$
が成り立つものを明示する．
2. 各 $w \in W$ に対して，Laurent 多項式 $G^w \in R(T)[\![Q_1, \ldots, Q_n]\!][z_1^{\pm1}, \ldots, z_n^{\pm1}]$ であって，環同型 (1.3) において Schubert 類 $[\mathcal{O}^w]$ と剰余類 $G^w + I^Q$ が 1 対 1 に対応するものを求める．

問題 1 について，G が A 型の場合は，Lenart–前野 ([LM]) によって (非同変版) Borel 型表示の記述が予想されていたが，前野–内藤–佐垣 ([MNS1]) によって解決された．また，問題 2 について，G が A 型の場合は，同じく前野–内藤–佐垣 ([MNS2]) によって，量子二重 Grothendieck 多項式が Schubert 類と対応することが証明された．本研究では，C 型の場合にこの問題を考察し，Borel 型表示の明示的な記述や，Schubert 類に対応する Laurent 多項式の記述を得ることを目標とする．

2 Borel 型表示

G が C_n 型のときの量子 K 環 $QK_T(G/B)$ の Borel 型表示を明示的に与える．以下，$G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ とする．また，$[1,\overline{1}] := \{1 < 2 < \cdots < n < \overline{n} < \cdots < \overline{2} < \overline{1}\}$ とする．まずは，主定理の Borel 型表示を述べるために，記号の準備をする．

定義 2.1 ([KN, Definition 3.1])**.** $I \subset [1,\overline{1}]$ とする．

(1) $1 \leq j \leq n$ に対して，$\zeta_I(j) \in \mathbb{Z}[\![Q_1,\ldots,Q_n]\!]$ を

$$\zeta_I(j) := \begin{cases} 1 - Q_j & j \in I \text{ かつ } j+1 \notin I \text{ のとき} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

で定める．ただし，$n+1 := \overline{n}$ と約束する．

(2) $2 \leq j \leq n$ に対して，$\zeta_I(\overline{j}) \in \mathbb{Z}[\![Q_1,\ldots,Q_n]\!]$ を

$$\zeta_I(\overline{j}) := \begin{cases} 1 + \dfrac{Q_{j-1}\cdots Q_n}{1-Q_{j-1}} & I = \{\cdots < j-1 < \overline{j-1} < \cdots\} \text{ のとき} \\ 1 - Q_{j-1} & \overline{j} \in I \text{ かつ } \overline{j-1} \notin I \text{ のとき} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

で定める．

(3) $\zeta_I(\overline{1}) \in \mathbb{Z}[\![Q_1,\ldots,Q_n]\!]$ を $\zeta_I(\overline{1}) := 1$ で定める．

例 2.2. $n = 3$ とする．$\zeta_{\{1,\overline{2}\}}(j)$ $(1 \leq j \leq \overline{1})$ は以下の通りに計算される．

j	1	2	3	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
$\zeta_{\{1,\overline{2}\}}(j)$	$1-Q_1$	1	1	1	$1-Q_1$	1

表 1　$\zeta_{\{1,\overline{2}\}}(j)$ の計算結果

また，$\zeta_{\{2,\overline{2}\}}(j)$ $(1 \leq j \leq \overline{1})$ は以下の通りに計算される．

j	1	2	3	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
$\zeta_{\{2,\overline{2}\}}(j)$	1	$1-Q_2$	1	$1+\dfrac{Q_2Q_3}{1-Q_2}$	$1-Q_1$	1

表 2　$\zeta_{\{2,\overline{2}\}}(j)$ の計算結果

以下，$1 \leq j \leq n$ に対して，$z_{\overline{j}} := z_j^{-1}$ と定める．

定義 2.3 ([KN, Definition 3.3])**.** $1 \leq k \leq n$ に対して，$F_k \in R(T)[\![Q_1, \dots, Q_n]\!][z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ を

$$F_k := \sum_{\substack{I \subset [1, \overline{1}] \\ |I| = k}} \left(\prod_{1 \leq j \leq \overline{1}} \zeta_I(j) \right) \left(\prod_{j \in I} z_j \right)$$

で定める．

例 2.4. $n = 3$ とする．例 2.2 をもとに，F_k の定義に現れる項をいくつか計算する．

(1) $I = \{1, \overline{2}\}$ のとき

$$\left(\prod_{1 \leq j \leq \overline{1}} \zeta_I(j) \right) \left(\prod_{j \in I} z_j \right) = (1 - Q_1)^2 z_1 z_2^{-1}$$

となる．

(2) $I = \{2, \overline{2}\}$ のとき

$$\begin{aligned} \left(\prod_{1 \leq j \leq \overline{1}} \zeta_I(j) \right) \left(\prod_{j \in I} z_j \right) &= \left((1 - Q_2) \cdot \left(1 + \frac{Q_2 Q_3}{1 - Q_2} \right) \cdot (1 - Q_1) \right) \cdot (z_2 \cdot z_2^{-1}) \\ &= (1 - Q_2 + Q_2 Q_3)(1 - Q_1) \end{aligned}$$

となる．

定義 2.5 ([KN, Definition 3.5])**.** $R(T)[\![Q_1, \dots, Q_n]\!][z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ のイデアルであって

$$\{F_k - e_k(\mathbf{e}^{\varepsilon_1}, \dots, \mathbf{e}^{\varepsilon_n}, \mathbf{e}^{-\varepsilon_n}, \dots, \mathbf{e}^{-\varepsilon_1}) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

で生成されるものを I^Q と書く．

以上の準備をもとに，本稿の主定理を述べる．各 $\lambda \in P$ に対して，$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B$ 上の λ に対応する直線束の類を $[\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B}(\lambda)] \in QK_T(G/B)$ と書く．また，以下の定理では $Q_0 := 0$ と約束する．

定理 2.6 (K.–内藤, [KN, Theorem 3.6, Corollary 6.10])**.** 環同型

$$\Psi^Q : R(T)[\![Q_1, \dots, Q_n]\!][z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]/I^Q \xrightarrow{\sim} QK_T(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B)$$

であって

$$\begin{aligned} \Psi^Q(z_j) &= \frac{1}{1 - Q_j} [\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B}(-\varepsilon_j)], \\ \Psi^Q(z_j^{-1}) &= \frac{1}{1 - Q_{j-1}} [\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B}(\varepsilon_j)] \end{aligned}$$

を満たすものが存在する．

この環同型を **Borel 型表示**と呼ぶ．定理 2.6 の証明では，**半無限旗多様体**の K 群における**逆 Chevalley 公式**が鍵となる．次節では，この逆 Chevalley 公式を用いた証明のアイディアについて述べる．

本節の最後に，量子 K 環の Borel 型表示と，通常の K 環の Borel 表示の関係について述べる．定理 2.6 において，$Q_1 = \cdots = Q_n = 0$ と特殊化する．この特殊化によって，I^Q の生成系は

$$\{e_k(z_1, \ldots, z_n, z_n^{-1}, \ldots, z_1^{-1}) - e_k(\mathbf{e}^{\varepsilon_1}, \ldots, \mathbf{e}^{\varepsilon_n}, \mathbf{e}^{-\varepsilon_n}, \ldots, \mathbf{e}^{-\varepsilon_1}) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

となるから，環同型 Ψ^Q は環同型

$$\Psi : R(T)[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]/I \xrightarrow{\sim} K_T(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B)$$

を誘導する．これは，Borel 表示 (1.2) と一致する．

3 半無限旗多様体

定理 2.6 の証明では，半無限旗多様体の K 群における逆 Chevalley 公式を用いる．本節では，これらについて簡単に説明し，証明の流れについて述べる．半無限旗多様体に関する詳細は [MNS1, §3.1] (cf. [Kat, §1.4 and §1.5]) を参照すること．しばらくの間，G を C_n 型とは限らない一般の連結かつ単連結な複素単純代数群とする．

N を Borel 部分群 B のべき単根基とする．このとき，**半無限旗多様体** $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ は，$\mathbb{C}$-値点全体の集合が $G(\mathbb{C}(\!(z)\!))/(T \cdot N(\mathbb{C}(\!(z)\!)))$ である無限型 ind-スキームである．

次に，旗多様体の T-同変 K 群を導入する．これは，本来であれば $G(\mathbb{C}[\![z]\!])$ の岩堀部分群の作用および $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の loop rotation 作用に関する同変 K 群から作られるものであるが，本稿ではその過程を省略し，議論に必要な部分だけを述べる．$Q^\vee$ を G の余ルート格子とし，$\alpha_i^\vee$ $(1 \leq i \leq n)$ を単純余ルートとする．このとき，G のアフィン Weyl 群 W_{af} は

$$W_{\mathrm{af}} = \{wt_\xi \mid w \in W,\ \xi \in Q^\vee\} \simeq W \ltimes Q^\vee$$

と表される．各 $x \in W_{\mathrm{af}}$ に対して，通常の旗多様体の Schubert 部分多様体と同様に，**半無限 Schubert 部分多様体** $\mathbf{Q}_G(x) \subset \mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ が定義される．そこで，その構造層を $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ と書く．とくに，x が W_{af} の単位元 e であるとき，$\mathbf{Q}_G(e)$ を単に $\mathbf{Q}_G$ と書く．いま，W_{af} の非負部分 $W_{\mathrm{af}}^{\geq 0}$ を

$$W_{\mathrm{af}}^{\geq 0} := \left\{ wt_\xi \;\middle|\; w \in W,\ \xi \in Q^{\vee,+} = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^\vee \right\} \simeq W \times Q^{\vee,+}$$

で定めると，$\mathbf{Q}_G$ の **T-同変 K 群** $K_T(\mathbf{Q}_G)$ は

$$K_T(\mathbf{Q}_G) = \left\{ \underbrace{\sum_{x \in W_{\mathrm{af}}^{\geq 0}} c_x [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]}_{\text{無限和}} \;\middle|\; \text{各 } x \in W_{\mathrm{af}}^{\geq 0} \text{ に対して } c_x \in R(T) \right\}$$

で表される．

この T-同変 K 群は，旗多様体の量子 K 環と密接に関係する．以下，各 $\xi = \sum_{i\in I} c_i \alpha_i^\vee$ に対して $Q^\xi := \prod_{i\in I} Q_i^{c_i}$ とおく．

定理 3.1 ([Kat, Theorems 3.11 and 4.17])**.** 加群の同型

$$\Phi : K_T(\mathbf{Q}_G) \xrightarrow{\sim} QK_T(G/B)$$

であって，$\Phi(\mathbf{e}^\mu[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(wt_\xi)}]) = \mathbf{e}^{-\mu}Q^\xi[\mathcal{O}^w]$ $(\mu \in P,\, w \in W,\, \xi \in Q^{\vee,+})$ を満たすものが存在する．

イデアル I^Q の生成元を得るために，$QK_T(G/B)$ 内で成り立つ関係式を十分多く求める必要がある．そこで，定理 3.1 を利用して，以下の手順で $QK_T(G/B)$ における関係式を求める．

1. $K_T(\mathbf{Q}_G)$ において成立する関係式を十分多く求める．
2. 同型 Φ を用いて，1. の関係式を $QK_T(G/B)$ 内の関係式に読み替える．

この 1. の手順で用いるものが，次に導入する逆 Chevalley 公式である．$\mathbf{Q}_G$ 上の，$\nu \in P$ に対応する直線束を $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\nu)$ で表し，半無限 Schubert 多様体の構造層 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ と直線束 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\nu)$ のテンソル積 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\nu)$ を $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\nu)$ で表す．このとき，明示的な展開式

$$\mathbf{e}^\mu[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] = \sum_{y\in W_{\mathrm{af}}^{\geq 0},\ \nu\in P} d_{x,\mu}^{y;\nu}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}(\nu)]$$

を**逆 Chevalley 公式**という．G が A, D, E 型のときは，河野–内藤–Orr–佐垣 ([KNOS]) や Lenart–内藤–Orr–佐垣 ([LNOS]) によって，右辺の組合せ論的な表示が得られている．また，G が C 型のときは，河野–内藤–Orr ([KNO]) によって，一部の場合に組合せ論的な表示が得られている．ここでは，Borel 型表示に必要な形の逆 Chevalley 公式を紹介する．これ以降，再び $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ とする．$s_1, \ldots, s_n \in W$ を単純鏡映とする．

定理 3.2 (K.–内藤, [KN, Theorems 4.3, 4.4])**.** (1) $1 \leq k \leq n$ とする．$K_T(\mathbf{Q}_G)$ において，以下の展開式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{\varepsilon_1}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_1s_2\cdots s_k)}] = {} & [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_1s_2\cdots s_k)}(\varepsilon_{k+1})] - [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_1s_2\cdots s_{k+1})}(\varepsilon_{k+1})] \\ & + \sum_{j=1}^{k}\left[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G\left(s_1s_2\cdots s_{j-1}t_{\alpha_j^\vee+\alpha_{j+1}^\vee+\cdots+\alpha_k^\vee}\right)}(\varepsilon_j)\right] \\ & - \sum_{j=1}^{k}\left[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G\left(s_1s_2\cdots s_j t_{\alpha_j^\vee+\alpha_{j+1}^\vee+\cdots+\alpha_k^\vee}\right)}(\varepsilon_j)\right].\end{aligned}$$

(2) $1 \leq k \leq n$ とする．$K_T(\mathbf{Q}_G)$ において，以下の展開式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}^{\varepsilon_1}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_1\cdots s_{n-1}s_n s_{n-1}\cdots s_k)}] \\
&= [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_1\cdots s_{n-1}s_n s_{n-1}\cdots s_k)}(-\varepsilon_k)] - [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_1\cdots s_{n-1}s_n s_{n-1}\cdots s_{k-1})}(-\varepsilon_k)] \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{n} \left[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G\left(s_1\cdots s_{n-1}s_n s_{n-1}\cdots s_j t_{\alpha_k^\vee+\alpha_{k+1}^\vee+\cdots+\alpha_{j-1}^\vee}\right)}(-\varepsilon_j)\right] \\
&\quad - \sum_{j=k+1}^{n} \left[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G\left(s_1\cdots s_{n-1}s_n s_{n-1}\cdots s_{j-1} t_{\alpha_k^\vee+\alpha_{k+1}^\vee+\cdots+\alpha_{j-1}^\vee}\right)}(-\varepsilon_j)\right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \left[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G\left(s_1 s_2\cdots s_{j-1} t_{\alpha_j^\vee+\alpha_{j+1}^\vee+\cdots+\alpha_n^\vee}\right)}(\varepsilon_j)\right] \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} \left[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G\left(s_1 s_2\cdots s_j t_{\alpha_j^\vee+\alpha_{j+1}^\vee+\cdots+\alpha_n^\vee}\right)}(\varepsilon_j)\right].
\end{aligned}$$

これらの式を用いると，半無限 Schubert 類 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_1\cdots s_k)}]$ $(1 \leq k \leq n)$，$[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_1\cdots s_n\cdots s_k)}]$ $(1 \leq k \leq n)$ を直線束の和として表すことができる．こうして得られた式を出発点として，$K_T(\mathbf{Q}_G)$ 内の関係式を構成することができる．詳細は [KN, §5] を参照していただきたい．

4 nil-DAHA 作用と Schubert 類

続いて，各 $w \in W$ に対して，量子 K 環における Schubert 類 $[\mathcal{O}^w]$ に Borel 型表示のもと対応する Laurent 多項式 $G^w \in R(T)[\![Q_1,\ldots,Q_n]\!][z_1^{\pm1},\ldots,z_n^{\pm1}]$ を計算する方法を考察する．すなわち，$G^w \in R(T)[\![Q_1,\ldots,Q_n]\!][z_1^{\pm1},\ldots,z_n^{\pm1}]$ であって，$\Psi^Q(G^w + I^Q) = [\mathcal{O}^w]$ を満たすものを求める方法を述べる．

半無限旗多様体 $\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}}$ に対しても, T-同変 K 群 $K_T(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}})$ を定義できる．すると, 旗多様体の量子 K 環 $QK_T(G/B)$ の適切な局所化 $QK_T(G/B)_{\mathrm{loc}}$ との間に加群同型 $QK_T(G/B)_{\mathrm{loc}} \simeq K_T(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}})$ が成り立つ ([Kat])．$K_T(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}})$ へは，**べき零二重アフィンヘッケ環** (nil-DAHA) という代数が作用する ([KNS], [O])．この作用を用いると，同型 $QK_T(G/B)_{\mathrm{loc}} \simeq K_T(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}})$ を通して，量子 K 環 $QK_T(G/B)$ の Schubert 類を計算することができる．ここでは，nil-DAHA に関する詳細は省略し，Schubert 類の計算に必要な作用について述べる．

Schubert 類の計算では，nil-DAHA に含まれる **Demazure 作用素** D_i $(0 \leq i \leq n)$ を用いる．α_i $(1 \leq i \leq n)$ を G の単純ルートとし，θ を G の最高ルートとする．このとき，Demazure 作用素 D_i $(0 \leq i \leq n)$ は，Schubert 類に以下のように作用することが知られている ([KNS], [O])：

$$D_i[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] = \begin{cases} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_i x)}] & \text{if } s_i x <_{\frac{\infty}{2}} x, \\ [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] & \text{if } s_i x >_{\frac{\infty}{2}} x, \end{cases}$$

$$D_i(\mathbf{e}^{\mu}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\nu)]) = \frac{\mathbf{e}^{\mu} - \mathbf{e}^{\alpha_i}\mathbf{e}^{s_i(\mu)}}{1-\mathbf{e}^{\alpha_i}}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\nu)] \quad (i \neq 0),$$

$$D_0(\mathbf{e}^{\mu}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\nu)]) = \frac{\mathbf{e}^{\mu} - \mathbf{e}^{s_\theta(\mu)}}{1-\mathbf{e}^{-\theta}}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\nu)] + \mathbf{e}^{s_\theta(\mu)}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_\theta t_{-\theta^\vee})}(\nu)]$$

ただし，$<_{\frac{\infty}{2}}$ は半無限 Bruhat 順序と呼ばれる W_{af} 上の半順序である．

W_{af} の部分集合 W_{af}^0 を

$$W_{\mathrm{af}}^0 := \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid xs_k > x \ (k \neq 0)\}$$

で定める．すべての $x \in W_{\mathrm{af}}^0$ に対して，その最短表示 $x = s_{i_r} s_{i_{r-1}} \cdots s_{i_1}$ をとると

- $i_1 = 0$,
- $e >_{\frac{\infty}{2}} s_{i_1} >_{\frac{\infty}{2}} s_{i_2} s_{i_1} >_{\frac{\infty}{2}} \cdots >_{\frac{\infty}{2}} s_{i_r} s_{i_{r-1}} \cdots s_{i_1} = x$

である．また，すべての $w \in W$ に対して，ある $\xi \in Q^\vee$ が存在して $wt_\xi \in W_{\mathrm{af}}^0$ となる．よって，次の手順で半無限 Schubert 類 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(w)}]$ $(w \in W)$ を直線束の式で記述することができる：

1. $\xi \in Q^\vee$ であって，$wt_\xi \in W_{\mathrm{af}}^0$ となるものを 1 つ求める．
2. wt_ξ の最短表示 $wt_\xi = s_{i_r} s_{i_{r-1}} \cdots s_{i_1}$ を 1 つ求める．
3. $\mathsf{t}_{-\xi}(D_{i_r} D_{i_{r-1}} \cdots D_{i_1}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}])$ を計算する．ただし，$\mathsf{t}_{-\xi}$ は $\mathsf{t}_{-\xi}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] := [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(xt_{-\xi})}]$ $(x \in W_{\mathrm{af}})$ で定義される作用素である．

定理 2.6 より，Borel 型表示における未知数 $z_j^{\pm 1}$ は直線束 $[\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B}(\mp\varepsilon_j)]$ の定数倍と対応していた．よって，以上のように半無限 Schubert 類を直線束の式で記述する方法を，同型 $QK_T(G/B)_{\mathrm{loc}} \simeq K_T(\mathbf{Q}_G^{\mathrm{rat}})$ を通して $QK_T(G/B)_{\mathrm{loc}}$ 内の計算に読み替えることで，多項式 G^w を計算することができる．

Demazure 作用素を $QK_T(G/B)_{\mathrm{loc}}$ 上の作用素と読み替える際に，半無限 Schubert 類 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(s_\theta)}]$ に対応する多項式 G^{s_θ} をあらかじめ 1 つ固定する必要がある．しかし，実は逆 Chevalley 公式を用いて Borel 型表示を得る途中で，この G^{s_θ} を得ることができる．

定義 4.1 ([KN, Definition 5.5])**.** $1 \leq k \leq 2n-1$ に対して，$F_k^{\overline{1}} \in R(T)[\![Q_1, \ldots, Q_n]\!][z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ を

$$F_k^{\overline{1}} := \sum_{\substack{I \subset [1,\overline{2}] \\ |I| = k}} \left(\prod_{1 \leq j \leq \overline{1}} \zeta_I(j) \right) \left(\prod_{j \in I} z_j \right)$$

で定める．

定義 4.2. $G^{s_\theta} \in R(T)[\![Q_1, \ldots, Q_n]\!][z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ を

$$G^{s_\theta} := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k F_k^{\overline{1}} \mathbf{e}^{k\varepsilon_1}$$

で定める．

定理 4.3 (K.–内藤, [KN, Corollary 6.15])**.** 等式 $\Psi^Q(G^{s_\theta} + I^Q) = [\mathcal{O}^{s_\theta}]$ が成り立つ．

この G^{s_θ} を用いて，以下のように $R(T)(\!(Q_1, \ldots, Q_n)\!)[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ 上に Demazure 作用素を定義する．

定義 4.4. $R(T)(\!(Q_1,\dots,Q_n)\!)[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]$ 上の **Demazure 作用素** D_i $(0\le i\le n)$ を

$$D_i(\mathbf{e}^\mu Q^\xi z_1^{c_1}\cdots z_n^{c_n}) := \frac{\mathbf{e}^\mu - \mathbf{e}^{-\alpha_i}\mathbf{e}^{s_i(\mu)}}{1-\mathbf{e}^{-\alpha_i}} Q^\xi z_1^{c_1}\cdots z_n^{c_n} \quad (i\neq 0),$$
$$D_0(\mathbf{e}^\mu Q^\xi z_1^{c_1}\cdots z_n^{c_n}) := \frac{\mathbf{e}^\mu - \mathbf{e}^{s_\theta(\mu)}}{1-\mathbf{e}^{\theta}} Q^\xi z_1^{c_1}\cdots z_n^{c_n} + \mathbf{e}^{s_\theta(\mu)}Q^\xi Q_1^{-1}\cdots Q_n^{-1} z_1^{c_1}\cdots z_n^{c_n} G^{s_\theta}$$

で定める．

この Demazure 作用素を用いて，Laurent 多項式 $G^w \in R(T)(\!(Q_1,\dots,Q_n)\!)[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]$ $(w\in W)$ を次の手順で定義する．

1. $\xi\in Q^\vee$ であって，$wt_\xi \in W_{\mathrm{af}}^0$ となるものを 1 つ求める．
2. wt_ξ の最短表示 $wt_\xi = s_{i_r}s_{i_{r-1}}\cdots s_{i_1}$ を 1 つ求める．
3. $G^w = G^w_{(i_r,\dots,i_1)} := (D_{i_r}D_{i_{r-1}}\cdots D_{i_1}1)Q^{-\xi}$ と定める．

この G^w は，最短表示 $s_{i_r}s_{i_{r-1}}\cdots s_{i_1}$ のとり方に依存することに注意する．ただし，剰余類 $G^w + I^Q$ は最短表示のとり方によらない．

定理 4.5 (K.–内藤)**.** 各 $w\in W$ に対して，$\Psi^Q(G^w + I^Q) = [\mathcal{O}^w]$ が成り立つ．

ここまでの考え方を応用すると，T-同変 K 環 $K_T(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B)$ の Borel 表示において Schubert 類と対応する Laurent 多項式を計算することができる．

定義 4.6. (1) $G_{\mathrm{cl}}^{w_\circ} \in R(T)[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]$ を

$$G_{\mathrm{cl}}^{w_\circ} := (-1)^{n(n+1)/2}\mathbf{e}^{-\sum_{k=1}^n \varepsilon_k}\prod_{m=2}^n z_m^{-m+1}\prod_{1\le p<q\le n}(z_q - \mathbf{e}^{\varepsilon_p})$$
$$\times \prod_{1\le r<s\le n}(z_s - \mathbf{e}^{-\varepsilon_r})\prod_{l=1}^n\left(\prod_{i=1}^l z_i - \mathbf{e}^{-\sum_{j=1}^{l-1}\varepsilon_j+\varepsilon_l}\right)$$

で定める．

(2) 各 $w\in W$ および最短表示 $ww_\circ = s_{i_r}\cdots s_{i_1}$ に対して，$G_{\mathrm{cl}}^w \in R(T)[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]$ を

$$G_{\mathrm{cl}}^w := D_{i_r}\cdots D_{i_1}G_{\mathrm{cl}}^{w_\circ}$$

で定める．

このとき，実は G_{cl}^w は最短表示 $s_{i_r}\cdots s_{i_1}$ のとり方によらずに決まることがわかる．この G_{cl}^w が，Borel 表示において Schubert 類と対応する Laurent 多項式である．

定理 4.7 (K.–内藤)**.** Borel 表示

$$\Psi(=\Psi|_{Q=0}) : R(T)[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]/I \xrightarrow{\sim} K_T(\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B)$$

において，$\Psi(G_{\mathrm{cl}}^w + I) = [\mathcal{O}^w]$ が成り立つ．

謝辞

第 69 回代数学シンポジウムにて貴重な講演の機会を頂き，ありがとうございました．本研究において，筆者は JSPS 科研費 22J00874，22KJ2908，24K22842 の助成を受けています．また，共同研究者の内藤聡氏は JSPS 科研費 (C) 21K03198 の助成を受けています．

参考文献

[Giv] A. Givental, On the WDVV equation in quantum K-theory, *Michigan Math. J.* **48** (2000), 295–304.

[Kat] S. Kato, Loop structure on equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds, arXiv:1805.01718.

[KN] T. Kouno and S. Naito, Borel-type presentation of the torus-equivariant quantum K-ring of flag manifolds of type C, arXiv:2410.10575.

[KNO] T. Kouno, S. Naito, and D. Orr, Identities of inverse Chevalley type for the graded characters of level-zero Demazure submodules over quantum affine algebras of type C, *Algebr. Represent. Theory* **27** (2024), no. 1, 429–460.

[KNOS] T. Kouno, S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Inverse K-Chevalley formulas for semi-infinite flag manifolds, I: minuscule weights in ADE type, *Forum Math. Sigma* **9** (2021), Paper No. e51, 25 pp.

[KNS] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds and the Pieri–Chevalley formula, *Duke Math. J.* **169** (2020), no. 13, 2421–2500.

[Lee] Y.-P. Lee, Quantum K-theory, I: Foundations, *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 3, 389–424.

[LM] C. Lenart and T. Maeno, Quantum Grothendieck Polynomials, arXiv:math/0608232.

[LNOS] C. Lenart, S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Inverse K-Chevalley formulas for semi-infinite flag manifolds, II: arbitrary weights in ADE type, *Adv. Math.* **423** (2023), Paper No. 109037, 63 pp.

[MNS1] T. Maeno, S. Naito, and D. Sagaki, A presentation of the torus-equivariant quantum K-theory ring of flag manifolds of type A, Part I: the defining ideal, arXiv:2302.09485.

[MNS2] T. Maeno, S. Naito, and D. Sagaki, A presentation of the torus-equivariant quantum K-theory ring of flag manifolds of type A, Part II: quantum double Grothendieck polynomials, arXiv:2305.17685, accepted for publication in *Forum Math. Sigma.*

[O] D. Orr, Equivariant K-theory of the semi-infinite flag manifold as a nil-DAHA module, *Selecta Math. (N.S.)* **29** (2023), no. 3, Paper No. 45, 26 pp.

[PR] H. Pittie and A. Ram, A Pieri–Chevalley formula in the K-theory of a G/B-bundle, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **5** (1999), 102–107.

多重ゼータ値代数のモジュラー現象

田坂 浩二 (近畿大学 理工学部)

1　はじめに

多重ゼータ値のなす $\mathbb{Q}$ 代数の深さフィルトレーション構造の記述に，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の楕円モジュラー形式が現れる現象を**モジュラー現象**[1]という。講演[2]では，モジュラー現象に関わる研究の進捗を自身の結果とともに紹介した。あらすじは以下である。前半は，重さ k 深さ 2 の多重ゼータ値 (2 重ゼータ値) で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の次元と，重さ k の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の楕円モジュラー形式の空間の次元との関係を記述した Zagier [28, 29] による次元予想を出発点とした。この次元予想については，複シャッフル関係式およびモジュラー形式の周期多項式から構成される 2 重ゼータ値の関係式 (モジュラー関係式) により “肯定的な”解決が得られている ([8] の仕事)。講演では，2 重 Eisenstein 級数を用いる方法でモジュラー関係式の説明を与えた。今の所，3 重以上の場合にモジュラー関係式の拡張は得られていない。深さ一般の場合のモジュラー現象は，Broadhurst-Kreimer 予想 [3] と呼ばれる次元予想 (Zagier の次元予想の深さ次数化) から示唆される。モジュラー形式の次元が随所に現れる予想であり，その大部分は依然として未解決なままである。講演の後半では，Brown [6] によるモチビック Lie 代数を使った Broadhurst-Kreimer 予想の別の定式化を紹介し，関連する話題として，Brown による純希多重ゼータ値の次元予想に関する著者の結果に触れた。モジュラー関係式の一般化を狙うものであるが，満足のゆく結果は得られていない。

本稿は，上述の講演内容に基づく構成となっている。まず，§2 で多重ゼータ値に関する基本的な用語をまとめる。§3 では，Broadhurst-Kreimer [3] による次元予想をいくつかの具体例とともに説明し，その進展を紹介する。§4 では，深さ 2 の場合のモジュラー現象である「モジュラー関係式」に関する既知の結果を概観する。これについて，尖点形式由来のモ

[1]モジュラー現象 (modular phenomena) という言葉は，少なくとも F. Brown による arXiv 論文 [5] の第 1 版 (2014 年) の冒頭に現れる。これがこの言葉の初出かは不明だが，その後の改訂版では削除されていることも考えると，あまり共通言語ではないのかもしれない。単に，筆者の好みで使い続けている。

[2]2024 年に開催された第 69 回代数学シンポジウムの報告集である。

ジュラー関係式の特徴付けに関する著者の結果を§5で述べる。§6では，Brown [6] によるモチビック Lie 代数を用いた Broadhurst-Kreimer 予想の別の定式化を与える。これはモチーフ論を用いた Broadhurst-Kreimer 予想の見通しの良い説明を与えるだけでなく，§7において導入される純奇多重ゼータ値の研究動機にもなり得る。純奇多重ゼータ値については，Brown [6] による次元予想に関する自身の関連結果を§7にまとめた。純奇多重ゼータ値の研究の一つのゴールは，モジュラー関係式の一般化であるが，その野望はいまだ成し遂げられていない。これについて，最後の§8において，これまでの共同研究で得られたいくつかの観察を述べる。

2 基本用語

自然数 $k_1,\ldots,k_d$ (ただし，収束のため $k_d \geq 2$) に対し，多重級数

$$\zeta(k_1,\ldots,k_d)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_d}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_d^{k_d}}$$

により定義される実数を**多重ゼータ値** (multiple zeta values) という。多重ゼータ値は，3点抜き射影直線 $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ 上の反復積分による表示をもつ。たとえば，$\zeta(1,2)=\int_{0<t_1<t_2<t_3<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\frac{dt_3}{t_3}$ などである ($\frac{1}{1-t}=\sum_{n\geq 0}t^n$ として項別積分)。この二つの表示を通して，多重ゼータ値は数学や物理の様々な局面に現れる。

我々の研究対象である多重ゼータ値代数 $\mathcal{Z}$ を定義する。$k_d \geq 2$ に対し，自然数の組み $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)$ を**収束インデックス**という。$\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k_1+\cdots+k_d$ を**重さ**，$\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=d$ を**深さ**という。重さ k の (収束インデックスを持つ) 多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ の形式直和空間 $\mathcal{Z}:=\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{Z}$ を**多重ゼータ値代数**という[3]。ただし，$\mathcal{Z}_0=\mathbb{Q}$ とする。二つの多重ゼータ値の積は多重ゼータ値の $\mathbb{Z}$ 係数一次結合で表すことができるため，ベクトル空間 $\mathcal{Z}$ は $\mathbb{Q}$ 代数となる。積構造は，級数表示において和の領域を分割することから得られる**調和積**と，二つの積分領域を全順序に分割することにより得られる**シャッフル積**がある。たとえば，調和積は $\zeta(r)\zeta(s)=\sum_{m,n>0}\frac{1}{m^rn^s}=\left(\sum_{0<n<m}+\sum_{0<m<n}+\sum_{0<n=m}\right)\frac{1}{m^rn^s}=\zeta(r,s)+\zeta(s,r)+\zeta(r+s)$ と計算される。調和積による一次結合による表

[3]異なる重さの多重ゼータ値の間には線形関係式がないことを仮定している。実際にそういった関係式がないことは証明されていない (Goncharov 予想)。

示を $\zeta(\boldsymbol{k})\zeta(\boldsymbol{k}') = \zeta(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{k}')$ と書く。もう一方のシャッフル積は $\zeta(\boldsymbol{k})\zeta(\boldsymbol{k}') = \zeta(\boldsymbol{k} \sqcup\!\sqcup \boldsymbol{k}')$ と書く。たとえば，$\zeta((2) \sqcup\!\sqcup (2)) = 4\zeta(1,3) + 2\zeta(2,2)$ である。

3　深さ次数化多重ゼータ値

多重ゼータ値代数 $\mathcal{Z}$ の部分空間

$$\mathfrak{D}^d\mathcal{Z} := \bigoplus_{k\geq 0}\langle \zeta(\boldsymbol{k}) \mid \mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) = k, \mathrm{dep}(\boldsymbol{k}) \leq d\rangle_{\mathbb{Q}}, \quad d \geq 0$$

の列から定まるフィルトレーションを**深さフィルトレーション** (depth filtration) とよぶ。ただし，$\mathfrak{D}^0\mathcal{Z} := \mathbb{Q}$ とする。調和積およびシャッフル積により $\mathfrak{D}^d\mathcal{Z} \cdot \mathfrak{D}^{d'}\mathcal{Z} \subset \mathfrak{D}^{d+d'}\mathcal{Z}$ となる。Broadhurst-Kreimer [3] により，$\mathbb{Q}$ 代数 $\mathcal{Z}$ の深さ次数化代数の次元に関する予想が提唱されており，そこにモジュラー形式の次元が現れる。

ここでは簡単のため，$\zeta(2)$ で生成されるイデアルで割った商代数 $\overline{\mathcal{Z}} := \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ における深さ次数化

$$\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}} := \bigoplus_{d\geq 0}\mathfrak{D}^d\overline{\mathcal{Z}}/\mathfrak{D}^{d-1}\overline{\mathcal{Z}}$$

における重さ k 深さ r 斉次部分空間についての次元予想を述べる。ただし，$\mathfrak{D}^{-1}\overline{\mathcal{Z}} = \{0\}$ とする。やや記号が重たいが，$\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}$ における $\zeta(k)$ を代表とする同値類を $\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k}) \in \mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}$ と表記し，これを**深さ次数化多重ゼータ値** (depth-graded multiple zeta value) と呼ぶことにする (cf. [6])。バーは modulo $\zeta(2)\mathcal{Z}$ による商代数の元であることを意味し，添字の $\mathfrak{D}$ は低い深さを modulo した商空間にいることを意味する。たとえば，Euler の公式により，$\overline{\zeta}(2n) = 0$ となる。また，$k = k_1 + k_2 \geq 3$ が奇数のとき，2 重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2)$ に関する Zagier の明示公式 [30]

$$\zeta(k_1,k_2) = \sum_{\substack{l_1+l_2=k\\ l_1\geq 3:\mathrm{odd}\\ l_2\geq 2}} c\binom{l_1,l_2}{k_1,k_2}\zeta(l_1)\zeta(l_2) + \tau(k_1,k_2)\zeta(k) \tag{3.1}$$

から $\overline{\zeta}(k_1,k_2) = \tau(k_1,k_2)\overline{\zeta}(k)$ および $\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2) = 0$ がわかる。ただし，

$c\binom{l_1,l_2}{k_1,k_2}$ は (8.1) で定義される整数であり，

$$\tau(k_1,k_2)=\frac{(-1)^{k_1+1}}{2}\left((-1)^{k_1}+\binom{k-1}{k_1-1}+\binom{k-1}{k_2-1}\right)$$

である。一般に，$\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})\not\equiv\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})\bmod 2$ ならば，いわゆる parity result [25] によって，$\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k})=0$ が成り立つ。

さて，**Broadhurst-Kreimer 予想**を述べ，モジュラー形式との関係を説明しよう。重さ k 深さ d の深さ次数化多重ゼータ値で生成される $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}$ の部分空間を $\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,d}$ とおく。

$$\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,d}:=\langle\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k})\mid\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k,\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=d\rangle_{\mathbb{Q}}\cong\mathfrak{D}^d\overline{\mathcal{Z}}_k/\mathfrak{D}^{d-1}\overline{\mathcal{Z}}_k.$$

parity result より，$k\not\equiv d\bmod 2$ ならば $\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,d}=0$ である。

予想 3.1 (Broadhurst-Kreimer 予想 [3])**.**

$$\sum_{k,d\geq 0}\dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,d}x^k y^d\overset{?}{=}\frac{1}{1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2-\mathbb{S}(x)y^4}.$$

ただし，$\mathbb{O}(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$ および $\mathbb{S}(x)=\frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)}$ である。

母関数 $\mathbb{S}(x)$ は，群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の**尖点形式** (cusp form) のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の次元の母関数と一致する。

$$\mathbb{S}(x)=\sum_{k\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))x^k$$

ゆえに，予想 3.1 によって，深さ次数化多重ゼータ値と尖点形式との関係が示唆されるのである。ちなみに $y=1$ とすると，重さ k の多重ゼータ値で生成される空間の次元予想，いわゆる，Zagier 予想 [28] (modulo $\zeta(2)\mathcal{Z}$ した場合) と同値な主張になる。

予想 3.1 の両辺の係数比較 (右辺は $x=y=0$ で展開する) から各深さごとの次元予想が得られる。たとえば，y^1,y^2,y^3 の係数はそれぞれ

$$\mathbb{O}(x),\quad\mathbb{O}(x)^2-\mathbb{S}(x),\quad\mathbb{O}(x)^3-2\mathbb{O}(x)\mathbb{S}(x)$$

となっている。母関数 $\mathbb{O}(x)^d=\sum_{k\geq 0}|\mathbb{I}_{k,d}|x^k$ の x^k の係数は，重さ k 深さ d のインデックスであって，各成分が 3 以上の奇数であるようなものの個

数である。

$$\mathbb{I}_{k,d} = \{\boldsymbol{k} \in (2\mathbb{N}+1)^d \mid \mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) = k\}$$

したがって，係数比較から

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}} \overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,1} &\overset{?}{=} |\mathbb{I}_{k,1}| = \begin{cases} 1 & k : \mathrm{odd}, \\ 0 & k : \mathrm{even}, \end{cases} \\
\dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}} \overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,2} &\overset{?}{=} \begin{cases} 0 & k : \mathrm{odd}, \\ |\mathbb{I}_{k,2}| - \dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) & k : \mathrm{even}, \end{cases} \\
\dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}} \overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,3} &\overset{?}{=} \begin{cases} |\mathbb{I}_{k,3}| - 2\sum_{\ell=12}^{k-3} \dim_{\mathbb{C}} S_\ell(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) & k : \mathrm{odd}, \\ 0 & k : \mathrm{even} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

が得られる。最初の等式は $\overline{\zeta}(2n+1) \neq 0$，すなわち，$\zeta(2n+1)$ が π^2 と重さ $2n-1$ の多重ゼータ値の積では表せないことと同値である (どうやったら示せるだろうか)。二つ目の等式は Zagier による 2 重ゼータ値の次元予想 [12, 28, 29]

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{D}^2 \mathcal{Z}_k \overset{?}{=} \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 - \dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), \quad \forall k \geq 3$$

と同値な主張である。実際，k が偶数なら，$|\mathbb{I}_{k,2}| = \frac{k}{2} - 2$ であり，k が奇数なら (3.1) より，$\mathfrak{D}^2 \overline{\mathcal{Z}}_k = \mathfrak{D}^1 \overline{\mathcal{Z}}_k$ である。

次元予想 (3.2) の $d = 2, 3$ の場合については，Goncharov [9] や井原-金子-Zagier [10]，井原-落合 [11] などの仕事により，右辺が次元の上限を与えることがわかっている。深さ 4 以上については未解決で，予想の信憑性そのものを疑う声もある (ただし，深さ 4 の場合が正しいことは多くの研究者が信じていると思われる)。

4 深さ 2 の場合

ここでは，$k \geq 6$ を偶数とし，Gangl-金子-Zagier [8] による不等式 $\dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}} \overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,2} \leq |\mathbb{I}_{k,2}| - \dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の証明方針を概観する。説明を簡単にするために省いた結果や本稿の記号に合わせて微修正した部分もあるが，おおむね論文 [8] と同じ証明方針であることを申し添えておく。

まず，3 以上の奇数を成分に持つインデックスの集合 $\mathbb{I}_{k,2}$ をから得ら

れる深さ次数化 2 重ゼータ値たち $\{\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,2}\}$ **がベクトル空間** $\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,2}$ **を生成する**ことを示す。使うのは (正規化) 複シャッフル関係式 $\zeta((k_1)*(k_2)) = \zeta((k_1)\sqcup(k_2))$ である (cf. [10])。深さ 2 の場合は，自然数 $k_1, k_2 \geq 1$ $(k_1+k_2 \geq 3)$ に対し，

$$\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2)+\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(k_2,k_1)=\sum_{\substack{l_1+l_2=k_1+k_2\\ l_1,l_2\geq 1}}\left(\binom{l_2-1}{k_1-1}+\binom{l_2-1}{k_2-1}\right)\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(l_1,l_2)$$

となる。ただし，$\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(k,1)$ $(k \geq 2)$ は任意の定数としておく (左辺から右辺を引くと打ち消され，実際の寄与はない)。この関係式は，母関数 $Z_k(x_1,x_2) = \sum_{k_1+k_2=k}\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2)x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}$ を使って，

$$Z_k(x_1,x_2)+Z_k(x_2,x_1)=Z_k(x_2,x_1+x_2)+Z_k(x_1,x_1+x_2)$$

と表すことができる (以降，和 $\sum_{k_1+k_2=k}$ は $k_1, k_2 \geq 1$ をわたるものとする)。すると，多項式 $H(x_1,x_2) \in \bigoplus_{l=0}^{k/2-1}\mathbb{Q}(x_1^l x_2^{k-2-l}+x_1^{k-2-l}x_2^l)$ に対し，$H(x_2,x_1+x_2)-H(x_1,x_2)=\sum_{k_1+k_2=k}\binom{k-2}{k_1-1}a_{k_1,k_2}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}$ により有理数たち $\{a_{k_1,k_2}\} \subset \mathbb{Q}$ を定めると，$\sum_{k_1+k_2=k}a_{k_1,k_2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2)=0$ が成り立つことが確かめられる。これにより，$H(x_1,x_2)$ をうまく選ぶことで，偶数や 1 を成分にもつ深さ次数化 2 重ゼータ値が $\{\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,2}\}$ の一次結合であることが示せる (そのような H の取り方は [8, §4] を参照せよ)。

生成系 $\{\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,2}\}$ のおかげで，ひとまず不等式 $\dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,2} \leq |\mathbb{I}_{k,2}|$ が従う。次元予想によれば，生成系 $\{\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,2}\}$ の間には $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の次元分だけ $\mathbb{Q}$ 線形関係式が存在するはずである。これを尖点形式，より正確には，偶周期多項式と結びつけて構成したのが Gangl-金子-Zagier によるモジュラー関係式である。多項式 $P(x_1,x_2) \in \mathbb{Q}[x_1,x_2]$ が**偶周期多項式** (even period polynomial) であるとは，$P(x_1,x_2)=P(-x_1,x_2)$ かつ

$$P(x_1,x_2)-P(x_1+x_2,x_2)+P(x_1+x_2,x_1)=0$$

をみたすことをいう。偶数 $w \geq 0$ に対し，斉次 w 次の偶周期多項式からなる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を W_w^{ev} とおく。$P \in W_w^{\mathrm{ev}}$ とすると，一つ目の条件から $P \in \bigoplus_{l=0}^{w/2}\mathbb{Q}x_1^{2l}x_2^{w-2l}$ である。また，二つ目の条件から $P(x_1,x_2) = -P(x_2,x_1)$ がすぐにわかるので，$P \in \bigoplus_{l=0}^{[w/4]}\mathbb{Q}(x_1^{2l}x_2^{w-2l}-x_2^{w-2l}x_1^{2l})$ となっている。偶周期多項式の例として，$x_1^w - x_2^w \in W_w^{\mathrm{ev}}$ がある。また，$W_w^{\mathrm{ev},0}=\{P \in W_w^{\mathrm{ev}} \mid P(x_1,0)=0\}$ とおくと，$W_w^{\mathrm{ev}}=\mathbb{Q}(x_1^w-x_2^w)\oplus W_w^{\mathrm{ev},0}$

が示せる。たとえば，W_{10}^{ev} の基底の 1 組として，$\{x_1^{10}-x_2^{10}, x_1^2x_2^2(x_1^2-x_2^2)^3\}$ がとれる。

Gangl-金子-Zagier [8] による**モジュラー関係式**を復習しよう。この証明も，先に述べた $H(x_1,x_2)$ の取り方に帰着することでなされる (つまり，複シャッフル関係式の組合せで証明される)。

定理 4.1. $k \geq 4$ を偶数とする。偶周期多項式 $P \in W_{k-2}^{\mathrm{ev}}$ に対し，$\{q_{k_1,k_2}\} \subset \mathbb{Q}$ を $\sum_{k_1+k_2=k} \binom{k-2}{k_1-1} q_{k_1,k_2} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2-1} = P(x_1+x_2, x_1)$ で定める。このとき，$q_{2l,k-2l} = q_{k-2l,2l}$ $(1 \leq l \leq [k/4])$ および

$$
\begin{aligned}
&3 \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1\geq 1, k_2 \geq 3:\mathrm{odd}}} q_{k_1,k_2} \zeta(k_1,k_2) \\
&= \sum_{l=1}^{k/2-1} q_{2l,k-2l} \zeta(2l, k-2l) + \left(\sum_{k_1+k_2=k} (-1)^{k_1} q_{k_1,k_2} \right) \zeta(k)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

定理 4.1 の右辺は，調和積 $\zeta(2l,k-2l)+\zeta(k-2l,2l) = \zeta(k-2l)\zeta(2l) - \zeta(k)$ により，modulo $\zeta(2)\mathcal{Z}$ で 0 となっている。したがって，偶周期多項式 $P \in W_{k-2}^{\mathrm{ev}}$ ごとに，$\mathbb{Q}$ 線形関係式

$$
\sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1\geq 1, k_2 \geq 3:\mathrm{odd}}} q_{k_1,k_2} \overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(k_1,k_2) = 0
$$

が得られる。たとえば，$P = x_1^{k-2} - x_2^{k-2} \in W_{k-2}^{\mathrm{ev}}$ とすると，$\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(1,k-1) + \overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,k-3) + \cdots + \overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(k-3,3) = 0$ である (制限和公式といったりする)。$P \in W_{k-2}^{\mathrm{ev},0}$ ならば $q_{1,k-1} = 0$ であることに注意すると，定理 4.1 の重要な帰結として，$W_{k-2}^{\mathrm{ev},0}$ の次元分だけ $\{\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,2}\}$ の間の一次独立な線形関係式が得られることがわかる。たとえば，$P = x_1^2x_2^2(x_1^2-x_2^2)^3 \in W_{10}^{\mathrm{ev},0}$ から

$$
14\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,9) + 75\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(5,7) + 84\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(7,5) = 0 \tag{4.1}
$$

が得られる。

以上のことから，不等式 $\dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}} \overline{\mathcal{Z}}\right)_{k,2} \leq |\mathbb{I}_{k,2}| - \dim_{\mathbb{Q}} W_{k-2}^{\mathrm{ev},0}$ が証明されたわけだが，偶周期多項式と尖点形式の対応の説明がまだである。も

ちろん，不変式という見方から

$$\dim_{\mathbb{Q}} W_{k-2}^{\mathrm{ev},0} = \dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$$

を示すこともできるが，あとで尖点形式とモジュラー関係式の対応を述べるときにも使うため，**Eichler-志村理論**の帰結 (cf. [15, 16]) を思い出しておこう。それは，尖点形式 $f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ に対し，その L 関数の critical value $L_f^*(s) := \int_0^\infty f(it)t^{s-1}dt$ $(s = 1, 2, \ldots, k-1)$ の母関数である周期多項式 $r_f(x_1, x_2) := \int_0^{i\infty} f(\tau)(x_1 - x_2\tau)^{k-2}d\tau$ の偶部分 $r_f^{\mathrm{ev}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(r_f(x_1, x_2) + r_f(-x_1, x_2))$ を対応させる写像 $r^{\mathrm{ev}} : S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to \mathbb{C}[x_1, x_2]$ の像が，$W_{k-2}^{\mathrm{ev}} \otimes \mathbb{C}$ に余次元 1 で埋め込まれることを主張する (この主張に適した W_w^{ev} を定める自然な定義関係式がある)。

$$r^{\mathrm{ev}} : S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \longrightarrow W_{k-2}^{\mathrm{ev}} \otimes \mathbb{C},\ f \longmapsto r_f^{\mathrm{ev}}(x_1, x_2).$$

したがって，$\dim_{\mathbb{Q}} W_{k-2}^{\mathrm{ev}} = \dim_{\mathbb{C}} S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) + 1$ である。

尖点形式から得られる定理 4.1 の例も一つ与えておこう。最初の非自明な尖点形式として知られる**判別式関数** $\Delta(\tau) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24} \in S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ について[4]，その偶周期多項式 r_Δ^{ev} は

$$-\frac{36}{691}(x_1^{10} - x_2^{10}) + x_1^2x_2^2(x_1^2 - x_2^2)^3 \in W_{10}^{\mathrm{ev}}$$

と定数倍の違いを除いて一致する。これを定理 4.1 に適用すると，

$$\begin{aligned}&22680\zeta(1,11) + 13006\zeta(3,9) - 29145\zeta(5,7) - 35364\zeta(7,5) + 22680\zeta(9,3)\\&= 7560\zeta(2,10) - 2114\zeta(4,8) - \frac{42965}{3}\zeta(6,6) - 2114\zeta(8,4) + 7560\zeta(10,2)\\&- 1382\zeta(12).\end{aligned}$$

5　2 重 Eisenstein 級数

定理 4.1 において，$W_{k-2}^{\mathrm{ev}} \otimes \mathbb{C}$ の部分空間 $r^{\mathrm{ev}}\big(S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))\big)$ から得られる関係式 (適当な補正で $\mathbb{Q}$ 上の関係式にすることも可能) は，ある意味で尖点形式由来のモジュラー関係式といえるものである。ここでは，尖点形式から得られるモジュラー関係式の 2 重 Eisenstein 級数を用いた特徴付けに関する著者の論文 [22] の結果を述べる。

[4]以降，$q = e^{2\pi i\tau}$ とする。

複素上半平面上の正則関数である Eisenstein 級数の級数表示の多重化である多重 Eisenstein 級数を定義する。アイデアは，多重ゼータ値の定義において $n_1,\dots,n_r$ が走る領域 $\mathbb{Z}$ を，格子 $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}\subset\mathbb{C}$ に置き換えるという素朴なものになっている (以降，τ は複素上半平面の元とする)。これには格子点の間の順序関係が必要になるが，それは以下のようにする。$m\tau+n\in\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$ に対し，$m>0$ または $m=0$ ならば $n>0$ をみたすとき，$m\tau+n$ は正であるといい，$m\tau+n>0$ と書く。さらに $(m-m')\tau+(n-n')>0$ を満たすとき，$m\tau+n>m'\tau+n'$ と定義すると，格子点の集合 $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$ に全順序関係が定まる。これを使って，**多重 Eisenstein 級数**を自然数 $k_1,\dots,k_d$ に対し，

$$G_{k_1,\dots,k_d}(\tau):=\sum_{\substack{0<\lambda_1<\cdots<\lambda_d\\ \lambda_1,\dots,\lambda_d\in\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}}\frac{1}{\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_d^{k_d}}$$

により定義する。2 重の場合に Gangl-金子-Zagier [8] によって最初に導入されたものである。

基本的な事実として，関数 $G_{k_1,\dots,k_d}(\tau)$ は，$k_1,\dots,k_{d-1}\geq 2, k_d\geq 3$ のときに絶対収束し，複素上半平面上の正則関数となる。また，この関数の Fourier 展開 (q 展開) $G_{\boldsymbol{k}}(\tau)=\zeta(\boldsymbol{k})+\sum_{n\geq 1}a_{n,\boldsymbol{k}}q^n$ の定数項は多重ゼータ値となる。多重 Eisenstein 級数の関係式から多重ゼータ値の関係式が得られるだけでなく，多重ゼータ値の関係式の多重 Eisenstein 級数への持ち上げが，定数項のない q 級数になっているという視点が尖点形式との関係を彷彿する (尖点形式の q 展開も定数項は 0 である)。q 展開の計算方法は [1, 8] を参照されたい。定義級数の適切な分解と，部分分数分解および Lipschitz 公式 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-k}=\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n\geq 1}q^n$ $(k\geq 2)$ の組合せにより計算される。

若干脱線するが，多重 Eisenstein 級数の正規化について触れておく。まず，多重 Eisenstein 級数の定義級数を有界な領域における格子点での和に置き換え，その後，領域を広げるという極限操作により定義し直すことで，多重 Eisenstein 級数は $k_d\geq 2$ においても正則関数として定義でき，$G_{\boldsymbol{k}}(\tau)=\zeta(\boldsymbol{k})+\sum_{n\geq 1}a_{n,\boldsymbol{k}}q^n$ なる q 展開をもつ。この定義をもってして，すべての成分が 2 以上のインデックス $\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ について，多重 Eisenstein 級数が調和積 $G_{\boldsymbol{k}}(\tau)G_{\boldsymbol{l}}(\tau)=G_{\boldsymbol{k}*\boldsymbol{l}}(\tau)$ を満たすことが確かめられる。一方，(q 展開の定数項が満たす) シャッフル積については，積の展開に 1 をもつインデックスが出てくるため，素朴には成り立たない。これに対し，1 を含む

一般のインデックス $\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ についても，適切な q 級数をあてがうことにより，シャッフル積 $G^{ш}_{\boldsymbol{k}}(\tau)G^{ш}_{\boldsymbol{l}}(\tau)=G^{ш}_{\boldsymbol{k}ш\boldsymbol{l}}(\tau)$ をみたす q 級数，シャッフル正規化多重 Eisenstein 級数 $G^{ш}_{\boldsymbol{k}}(\tau)$ が構成されている (cf. [1, 8])。この構成には，金子昌信および Stephanie Belcher が独立に指摘していた Goncharov 余積 Δ と多重 Eisenstein 級数の Fourier 展開の対応 [1, Theorem 1.1] が重要な役割を果たす (この対応に深い意味があるのかはまだわかっていない)。q 級数 $G^{ш}_{\boldsymbol{k}}(\tau)$ は，インデックスの成分がすべて 2 以上であれば，$G_{\boldsymbol{k}}(\tau)$ と等しいことも知られており，そこから (制限された) 複シャッフル関係式が得られる [1, Theorem 1.2]。なお，2 重の場合の $G^{ш}_{k_1,k_2}(\tau)$ は，金子 [12] による正規化 (q 展開で再定義する方法) と (偶然にも) 同じものとなる。

尖点形式から得られるモジュラー関係式の特徴付けに関する結果に戻ろう。ここでは，$k_1+k_2\geq 3$ となる $k_1,k_2\geq 1$ に対し，$G_{(k_1)*(k_2)}(\tau)=G_{(k_1)ш(k_2)}(\tau)$ をみたす 2 重 Eisenstein 級数の正規化 (Gangl-金子-Zagier [8] によるもの) を使う。モジュラー関係式は複シャッフル関係式のみで示せるので，定理 4.1 は彼らの意味での 2 重 Eisenstein 級数についても成り立つことがわかる。この関係式と，Kohnen-Zagier [15] による尖点形式の L 関数の critical value に関する特別な関係式および Popa [18] による 2 つの Eisenstein 級数の積和の公式を組み合わせることで，次の結果が得られる。

定理 5.1. [22, Theorem 1] Hecke 固有形式 $f\in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ に対し，$\sum_{k_1+k_2=k}\binom{k-2}{k_1-1}q^f_{k_1,k_2}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1}=r_f^{\mathrm{ev}}(x_1+x_2,x_1)$ により $\{q^f_{k_1,k_2}\}\subset\mathbb{C}$ を定める。このとき，

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1\geq 1,k_2\geq 3:\mathrm{odd}}} q^f_{k_1,k_2}\left(G_{k_1,k_2}(\tau)+\frac{1}{2}G_k(\tau)\right)=\frac{L_f^*(1)}{4(k-2)!}f(\tau)$$

が成り立つ。ただし，$L_f^*(s):=\int_0^\infty f(it)t^{s-1}dt$ である。

定理 5.1 を判別式関数 $\Delta(\tau)$ の場合に適用すると，適当な定数倍によって

$$\begin{aligned}\frac{1}{680}\Delta(\tau)&=22680G^{\frac{1}{2}}_{9,3}(\tau)-35364G^{\frac{1}{2}}_{7,5}(\tau)-29145G^{\frac{1}{2}}_{5,7}(\tau)\\&\quad+13006G^{\frac{1}{2}}_{3,9}(\tau)+22680G^{\frac{1}{2}}_{1,11}(\tau)\end{aligned}$$

を得る。ただし，$G^{\frac{1}{2}}_{k_1,k_2}(\tau)=G_{k_1,k_2}(\tau)+\frac{1}{2}G_k(\tau)$ とおいた[5]。ここからもわ

[5] 山本 [26] による t 補間多重ゼータ値から記号を採用している。

かるように，定理 5.1 は Hecke 固有形式の新しいタイプの明示公式を与えている。なお，Vandermonde 行列式を使う方法 [12] により，$\{G^{\frac{1}{2}}_{\ell,k-\ell}(\tau) \mid 1 \le \ell \le k-3 : \mathrm{odd}\}$ は一次独立であることが示せる。これと Gangl-金子-Zagier の結果をあわせると，この集合が重さ k の 2 重 Eisenstein 級数で生成される $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathcal{DE}_k$ の基底の 1 組であることがわかる。さらに，重さ k のモジュラー形式の空間は $\mathcal{DE}_k$ の部分空間であるため，重さ k の尖点形式はこの基底の一次結合として一意的に表示できる。それゆえ，定理 5.1 は，f が Hecke 固有形式の場合に，一意的に決まる係数 $q^f_{k_1,k_2}$ を critical value の一次結合を使って表示した公式となっている。

定理 5.1 の右辺は f について '2 次式' であるため，Hecke 固有形式であるという仮定をはずすことはできない (実際に，Popa [18] の結果を適用する際に必要な仮定となる)。一方，定理 5.1 の定数項の比較から生じる 2 重ゼータ値の関係式については，線形性により，Hecke 固有形式である必要はない[6]。

系 5.2. [17, Theorem 3.1] 尖点形式 $f \in S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ に対し，$\sum_{k_1+k_2=k}\binom{k-2}{k_1-1}q^f_{k_1,k_2}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1} = r_f^{\mathrm{ev}}(x_1+x_2,x_1)$ により $\{q^f_{k_1,k_2}\} \subset \mathbb{C}$ を定める。このとき，

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1\ge 1,k_2\ge 3:\mathrm{odd}}} q^f_{k_1,k_2}\zeta^{\frac{1}{2}}(k_1,k_2) = 0.$$

ただし，$\zeta^{\frac{1}{2}}(k_1,k_2) = \zeta(k_1,k_2) + \frac{1}{2}\zeta(k_1+k_2)$ である。

たとえば，判別式関数の場合の公式から $22680\zeta^{\frac{1}{2}}(9,3) - 35364\zeta^{\frac{1}{2}}(7,5) - 29145\zeta^{\frac{1}{2}}(5,7) + 13006\zeta^{\frac{1}{2}}(3,9) + 22680\zeta^{\frac{1}{2}}(1,11) = 0$ が得られる。

ちなみに Eisenstein 級数に対応するモジュラー関係式は，すでに述べた制限和公式である。Eisenstein 級数に付随する周期多項式 $\int_0^{i\infty} G_k(\tau)(x_1 - x_2\tau)^{k-2}d\tau$ は素朴には定義できていない (発散する) のだが，Zagier [27] による Laurent 多項式を用いた設定や，Brown [5] による Deligne の接基点理論を使った反復積分の正規化 (したがって，1 重はごく特別な場合だが) の 2 通りの構成があって，いずれの場合も，Eisenstein 級数に付随する周期多項式の偶部分は $x_1^{k-2} - x_2^{k-2}$ の定数倍となるからである。

[6] 系 5.2 は文字通り，定理 5.1 ([22]) の結果から得られるが，この公式を最初に示したのは論文 [17] においてである。モチビック 2 重ゼータ値を使う証明となっている。

6　モチビック Lie 代数

予想 3.1 の Brown [6] による Lie 代数を使った別の定式化を外観する。Brown は線形化複シャッフル Lie 代数 $\mathfrak{ls}$ と深さ次数化モチビック Lie 代数 $\mathfrak{d}^{\mathfrak{m}}$ の各々について，“同値”[7]な主張を与えているが，ここでは後者についてのみ言及する。以下，紙面節約のため，Lie 代数 $\mathfrak{d}^{\mathfrak{m}}$ をモチビック多重ゼータ値から構成するが，これは [6] とは異なる設定であることに注意しておく。

自然数の組み $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ に対し，Brown の論文 [4] で用いられたモチビック多重ゼータ値を $\zeta^{\mathfrak{m}}(k_1, \ldots, k_d)$ と表記し，すべてのモチビック多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}$ とおく ([4] では $\mathcal{H}$ と表記)。定義の詳細は [4] に譲り，基本的な事実をまとめよう。まず，モチビック多重ゼータ値 $\zeta^{\mathfrak{m}}$ に多重ゼータ値 ζ を対応させる写像 (周期写像) $\mathrm{per} : \mathcal{Z}^{\mathfrak{m}} \to \mathcal{Z}$ は全射な代数射となる。この写像 per は同型写像であると予想されており，すなわち，多重ゼータ値とモチビック多重ゼータ値はまったく同じ関係式を満たすと期待されている。また，我々の研究対象である商代数 $\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}} := \mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}/\zeta(2)^{\mathfrak{m}}\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}$ には ([4] では $\mathcal{A}$ と表記)，シャッフル積と Goncharov 余積 Δ により，Hopf 代数の構造が入る。さらに，重さに関する次数付き環となっている。これらは，数である多重ゼータ値では (今の所) 証明できないことで，モチビックを使う大きなメリットと言える。

さて，モチビック版の深さ次数化多重ゼータ値代数 $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}}$ を考えよう。これは，シャッフル積に関する 2 重次数付き代数であるだけでなく，Goncharov 余積 Δ が誘導する余積 $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\Delta$ により，再び Hopf 代数となる。余積 Δ が深さを保つことがポイントである。Hopf 代数 $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}}$ を座標環とする $\mathbb{Q}$ 上のアファイン群スキームを $U = \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}})$ とおき，その Lie 代数 $\mathrm{Lie}(U)$ を $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ と書いて，**深さ次数化モチビック Lie 代数** (depth-graded motivic Lie algebra) とよぶ[8]。重さと深さによる 2 重次数付き Lie 代数となる。一方，U は副冪単代数群なので，U の座標環と $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の完備化普遍崩落環の双対空間は同型である:

$$\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}} \cong \widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}})^{\vee}. \tag{6.1}$$

[7] $\mathfrak{d}^{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{ls}$ である。“等号成立”が予想されている。

[8] 論文 [6] では，$\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏の淡中基本群 (モチビック Galois 群) の冪単部分の Lie 代数として定義されるモチビック Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$ に，深さフィルトレーションの双対から誘導されるフィルトレーションで次数化したものとして $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ を定義している。確かめたわけではないが，Brown による Lie 代数と我々の深さ次数化モチビック Lie 代数は同型であると思われる。

もしくは，$\mathcal{L}:=\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}}_{>0}\right)/\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}}_{>0}\right)^2$ とおくと，$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}\cong\mathcal{L}^{\vee}$ である。同型 (6.1) により，Lie 代数 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の生成系やそれらの関係式などが全て記述できれば，あとは Lie 代数の一般論から $\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}}\right)_{k,d}$ の次元を計算することができる。これが Brown による Broadhurst-Kreimer 予想の別の定式化の出発点となる。

まず，Lie 代数 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の多項式を使った表示方法を説明する (cf. [6])。多項式環 $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_d]$ の斉次 w 次多項式からなる部分空間を $V_{w,d}$ とおく。Brown [6] の結果より，$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}=\bigoplus_{k,d}\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ から多項式空間 $V=\bigoplus_{w,d}V_{w,d}$ への埋め込みが存在する。重さ k 深さ d の斉次部分空間 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ のこの埋め込みによるの像は $V_{k-d,d}$ に属する。この像も $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ と書いて，$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}\subset V_{k-d,d}$ とみなすことにする。$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ の計算方法は以下である。いま，$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ と双対同型である $\mathcal{L}_{k,d}$ の基底 $\{\xi_1,\dots,\xi_a\}$ を一つ決める。ただし，$\mathcal{L}$ における $\overline{\zeta}^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k})$ が属する類を $\zeta^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k})$ とかくと， $\mathcal{L}_{k,d}=\{\zeta^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k})\mid \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k,\ \mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=d\}$ である。次に，基底を使って $\sum_{k_1+\cdots+k_d=k}\zeta^{\mathfrak{l}}_{\mathfrak{D}}(k_1,\dots,k_d)x_1^{k_1-1}\cdots x_d^{k_d-1}=\xi_1F_1(x_1,\dots,x_d)+\cdots+\xi_aF_a(x_1,\dots,x_d)$ と書き直す。すると，この表示に現れる多項式たち $\{F_1,\dots,F_a\}\subset V_{k-d,d}$ は部分空間 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ の基底の 1 組となる。以上の方法で，重さが 20 ぐらいまでならモチビック多重ゼータ値が満たす具体的な関係式族を使って，ベクトル空間 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ の基底を明示的に与えることもできる (が，一般には難しい)。

Lie 代数 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の構造を記述するために，多項式表示における Lie 括弧積の明示公式を一つ与える。$f(x_1,\dots,x_r)\in V_{w_1,r}$ および $g(x_1,\dots,x_s)\in V_{w_2,s}$ に対し，斉次多項式 $(f\,\underline{\circ}\,g)(x_1,\dots,x_{r+s})\in V_{w_1+w_2,r+s}$ を次で定める。

$$
\begin{aligned}
&(f\,\underline{\circ}\,g)(x_1,\dots,x_{r+s})\\
&=\sum_{i=0}^{s}f(x_{i+1}-x_i,\dots,x_{i+r}-x_i)g(x_1,\dots,x_i,x_{i+r+1},\dots,x_{r+s})\\
&+(-1)^{w_1+r}\sum_{i=1}^{s}f(x_{i+r-1}-x_{i+r},\dots,x_i-x_{i+r})g(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+r},\dots,x_{r+s})
\end{aligned}
$$

ただし，$x_0=0$ とする。たとえば，$x_1^{w_1}\,\underline{\circ}\,x_1^{w_2}=x_1^{w_1}x_2^{w_2}+(x_2-x_1)^{w_1}x_1^{w_2}+(-1)^{w_1+1}(x_1-x_2)^{w_1}x_2^{w_2}$ である。この記号のもと，$\{f,g\}:=f\,\underline{\circ}\,g-g\,\underline{\circ}\,f$ で定義される $\mathbb{Q}$ 双線形写像 $\{,\}$ を**伊原括弧積**という。伊原括弧積は $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の Lie 代数構造を定める。すなわち，$(f,g)\in\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k_1,d_1}\times\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k_2,d_2}$ ならば $\{f,g\}\in\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k_1+k_2,d_1+d_2}$ が成り立つ。

以上の記号のもと，Lie 代数 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の生成元や関係式ついて知られている

ことをまとめる。まず，深さ 1 について，

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,1} = \begin{cases} 1 & k \geq 3 : \text{odd}, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

である。これは，$\mathbb{Q}$ 上のアファイン群スキーム $\mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}})$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$ が，重さ $2n+1$ $(n \geq 1)$ の元 σ_{2n+1} で生成される自由 Lie 代数と同型であることから従う。奇数 $k \geq 3$ に対し，深さ 1 の空間の基底として $B_{k,1} = \{x_1^{k-1}\} \subset \mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,1}$ をとる。このとき，$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ は 2 重次数付き Lie 代数なので，$B_{k,2} = \{\{x_1^{k_1-1}, x_1^{k_2-1}\} \mid k_1, k_2 \geq 3 : \text{odd},\ k_1+k_2 = k\}$ は $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,2}$ の部分集合となる。同様に，深さ 1 の基底に伊原括弧積を $d-1$ 回施すことにより作られる $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ の部分集合を $B_{k,d}$ とおく。このとき，$d = 2, 3$ に対し，$B_{k,d}$ は $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,d}$ を生成していることが知られている。基底ではないことも知られている。それは，**伊原-高尾関係式**と呼ばれる次の 2 次関係式が存在するためである (cf. [19]): 有理数 $\{a_{k_1,k_2}\} \subset \mathbb{Q}$ に対し，

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1>k_2\geq 3:\text{odd}}} a_{k_1,k_2}\{x_1^{k_1-1}, x_2^{k_2-1}\} = 0 \\ \Longleftrightarrow &\sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1>k_2\geq 3:\text{odd}}} a_{k_1,k_2}(x_1^{k_1-1}x_2^{k_2-1} - x_1^{k_2-1}x_2^{k_1-1}) \in W^{\mathrm{ev}}_{k-2}. \end{aligned}$$

深さ 2 および 3 については，伊原-高尾関係式以外の関係式は存在せず，

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,2} = \begin{cases} 0 & k : \text{odd}, \\ \left[\frac{k-2}{6}\right] & k : \text{even}, \end{cases}$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,3} = \begin{cases} \left[\frac{(k-3)^2-1}{48}\right] & k : \text{odd}, \\ 0 & k : \text{even} \end{cases}$$

であることが知られている。以上から $d \leq 3$ に対する $\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}^{\mathfrak{m}}}\right)_{k,d}$ の次元公式が得られるが，それらは (3.2) の右辺と一致する。

深さ 4 のとき，$B_{k,4}$ で生成される $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,4}$ の部分空間の次元 (伊原-高尾関係式以外の関係式は存在しないという仮定のもとで計算)，Broadhurst-Kreimer 予想の深さ 4 の場合から得られる次元と異なり，ちょうど $\mathbb{S}(x)$ に相当する次元のずれが生じる。示唆されることは，**$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}_{k,4}$ の生成系は $B_{k,4}$ 以外に $\dim S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 個の独立な元を含まなくてはならない**ということであ

る。これに対し，Brown [6] は well-defined な $\mathbb{Q}$ 線形写像 $c: W_{k-2}^{\mathrm{ev},0} \to \mathfrak{dg}_{k,4}^{\mathfrak{m}}$ を構成し，その像 $c(W_{k-2}^{\mathrm{ev},0})$ が不足している生成系を与えるであろうことを予想している[9]。

これら既知の結果と期待される次元 (Broadhurst-Kreimer 予想) をあわせて，Brown [6] は次の Lie 代数 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ のホモロジーに関する予想を提唱している。

予想 6.1. [6, Conjecture 1]

$$H_1(\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}};\mathbb{Q}) \cong \langle x_1^{k-1} \mid k \geq 3 : \mathrm{odd}\rangle_{\mathbb{Q}} \oplus c(W_{\bullet}^{\mathrm{ev},0}),$$
$$H_2(\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}};\mathbb{Q}) \cong W_{\bullet}^{\mathrm{ev},0},$$
$$H_i(\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}};\mathbb{Q}) = 0 \quad \text{for all } i \geq 3.$$

ただし，$W_{\bullet}^{\mathrm{ev},0} := \bigoplus_{k\geq 12} W_{k-2}^{\mathrm{ev},0}$ である。

大雑把に説明すると，1 次ホモロジー $H_1(\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}};\mathbb{Q})$ は $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の生成元を記述し，2 次ホモロジー $H_2(\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}};\mathbb{Q})$ は生成元の間の関係式 (今の場合，伊原-高尾関係式) を記述している。3 次以上は関係式の関係式などを記述するが，それはないという予想になっている。予想 6.1 を仮定して，$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の普遍崩落環の次元を計算すると，モチビック版の Broadhurst-Kreimer 予想に出てくる次元が得られるという筋書きである。

7 純奇多重ゼータ値

予想 6.1 を信じるなら，$\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m}}$ の深さ 1 の生成系で生成される部分 Lie 代数 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}} := \mathrm{Lie}[x_1^{2n} \mid n \geq 1]$ について，重さ k 深さ d の部分空間の次元が

$$1 + \sum_{k,d\geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{dg}_{k,d}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}} x^k y^d \overset{?}{=} \frac{1}{1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2}$$

となるはずである。尖点形式との関係が期待できるという意味では，Lie 代数 $\mathfrak{dg}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}$ の普遍崩落環と同型になる深さ次数化多重ゼータ値代数 $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}$ の部分代数を決定するという問題には意義があるだろう。そこにモジュラー関係式の一般化が埋もれている可能性もある。部分代数の候補とし

[9] この写像 c が単射かどうかは未解決である。一方，Brown [6] はこれとは異なる $\mathbb{Q}$ 線形写像 $e: W_{k-2}^{\mathrm{ev},0} \to \mathfrak{ls}_{k,4}$ を構成しており，これについては単射性や像 $e(W_{k-2}^{\mathrm{ev},0})$ と $B_{k,4}$ の独立性までを示している。一方，$e(W_{k-2}^{\mathrm{ev},0}) \subset \mathfrak{dg}_{k,4}^{\mathfrak{m}}$ が未解決である。

て，Brown [6] は純奇多重ゼータ値を導入している。以下，Brown による新たな次元予想，およびその予想に関する著者の論文 [23] の結果を紹介する。

インデックスのすべての成分が 3 以上の奇数である深さ次数化多重ゼータ値 (以下，モチビックとする) $\overline{\zeta}^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,d})$ を**純奇多重ゼータ値**といい，すべての純奇多重ゼータ値で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}$ と表記する。部分空間 $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}$ は，$\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m}}$ の部分 Hopf 代数である (cf. [6, Proposition 11.1])。Brown はさらにいくつかの考察を加えて，この Hopf 代数 $\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}$ を座標環とするアファイン群スキームの Lie 代数が $\mathfrak{g}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}$ と同型となることを期待し，次の問題を提唱している。

予想 7.1. [6, Conjecture 6]

$$\sum_{k,d\geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}\right)_{k,d} x^k y^d \overset{?}{=} \frac{1}{1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2}.$$

ただし，$\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}\right)_{k,d} := \langle \overline{\zeta}^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,d}\rangle_{\mathbb{Q}}$ は重さ k 深さ d の純奇多重ゼータ値で生成されるベクトル空間である。

純奇多重ゼータ値の空間 $\left(\mathrm{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}\right)_{k,d}$ の生成元の個数が $|\mathbb{I}_{k,d}|$ であることに注意すると，予想 7.1 は純奇多重ゼータ値の関係式が尖点形式由来のものに限ることを示唆している。たとえば，(3.2) で求めた $d \leq 3$ の右辺の次元の列を思い出すと，深さ $d=2$ における予想 7.1 は，純奇 2 重ゼータ値の関係式の個数と尖点形式の次元が一致することを意味する (そしてこの一致はモジュラー関係式で説明できる)。

いまのところ，純奇多重ゼータ値の関係式を尖点形式と直接結びつけることはできていない。これに対し，著者は [23] において，ある種の双対側と偶周期多項式との対応を見つけている。これを述べよう。まず，Brown による純奇多重ゼータ値の関係式を探す手法を紹介する。ただし，この手法はホモロジー予想 6.1 が正しいことを仮定しなければならないことを注意しておく (今の所，unconditional に証明できるかは不明)。$d \geq 2$ および $\boldsymbol{l} \in \mathbb{I}_{k,d}$ に対し，$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d} c\binom{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}} x_1^{k_1-1}\cdots x_d^{k_d-1} = x_1^{l_1-1} \,\underline{\circ}\, (\cdots \underline{\circ}\, (x_1^{l_{d-1}-1} \,\underline{\circ}\, x_1^{l_d-1})\cdots)$ の展開係数として，整数 $c\binom{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}}$ を定義する。この係数を使って，$|\mathbb{I}_{k,d}|$ 次正方行列 $C_{k,d}$ を

$$C_{k,d} = \left(c\binom{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}}\right)_{\substack{\boldsymbol{l}\in\mathbb{I}_{k,d}\\ \boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{k,d}}}$$

で定める。ただし，行および列は $\boldsymbol{l} \in \mathbb{I}_{k,d}$ および $\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,d}$ で添字付けられ

るものとする。このとき，

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{k,d}} q_{\boldsymbol{k}}\overline{\zeta}^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{k})=0 \Longleftrightarrow (q_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{k,d}}\cdot {}^tC_{k,d}=\mathbf{0}$$

が成り立つ。つまり，行列 $C_{k,d}$ の右零化ベクトルによって，重さ k 深さ d の純奇多重ゼータ値たちのすべての関係式が記述できるのである。このことから，$\operatorname{rank} C_{k,d}=\dim_{\mathbb{Q}}\left(\operatorname{gr}^{\mathfrak{D}}\overline{\mathcal{Z}}^{\mathfrak{m},\mathrm{odd}}\right)_{k,d}$ が従う (ただし，冒頭から予想 6.1 を仮定している)。

行列 $C_{k,d}$ の右零化ベクトルからなる空間 $\ker {}^tC_{k,d}$ を尖点形式と結びつけることが究極のゴールといえる。$d=2$ の場合は，Gangl-金子-Zagier によるモジュラー関係式により，$C_{k,2}$ の右零化ベクトル $(q_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{k,2}}$ と偶周期多項式 $P\in W^{\mathrm{ev},0}_{k-2}$ との間の一対一対応が得られている (これは定理 4.1 よりも強い主張である)。いまのところ，$d\geq 3$ について知られていることはない。

すこし発想を変えて，行列 $C_{k,d}$ の左零化ベクトルを考える。正方行列ゆえに $\dim\ker {}^tC_{k,d}=\dim\ker C_{k,d}$ が成り立つため，少なくとも次元の計算には使える。この発想は Baumard-Schneps [2] による先行結果から来ている。彼らは $C_{k,2}$ の左零化ベクトルと $W^{\mathrm{ev},0}_{k-2}$ の偶周期多項式との間に一対一対応があることを示している: 偶数 $k\geq 12$ に対し，

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{ev},0}_{k-2} &\longrightarrow \ker C_{k,2}, \\ \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{k,2}} a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}-1} &\longmapsto (a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{k,2}} \end{aligned} \tag{7.1}$$

は同型写像となる。ただし，$\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)$ に対し，$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}-1}:=x_1^{k_1-1}\cdots x_d^{k_d-1}$ とおいた。これは，伊原-高尾関係式と同値な主張になっている。いずれにせよ，右零化ベクトルでは偶周期多項式 P の変数変換後 $P(x_1+x_2,x_1)$ の係数との対応であったが，左零化ベクトルはそのままの係数が対応するという構図である。(7.1) を $d\geq 3$ に (弱く) 一般化したのが [23] の主結果である。主張を述べるための準備から始めよう。

各 $j=1,\ldots,d-1$ に対し，d 変数の偶周期多項式の空間 $W^{(j)}_{w,d}$ を用意する。まず，$V^{\mathrm{ev},0}_{w,d}:=\langle \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}-1}\mid \boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{w+d,d}\rangle_{\mathbb{Q}}\subset V_{w,d}$ とおく。$V^{\mathrm{ev},0}_{w,d}$ の多項式は $x_1^2\cdots x_d^2$ で割れなければならないので，$2d>w$ ならば $V^{\mathrm{ev},0}_{w,d}=\{0\}$ である。$P\in V^{\mathrm{ev},0}_{w,d}$ であって，x_j,x_{j+1} の変数については偶周期多項式となるものからなる部分空間を $W^{(j)}_{w,d}$ と表記する。すなわち，$P\in W^{(j)}_{w,d}$ ならば $P(\ldots,x_j,x_{j+1},\ldots)-P(\ldots,x_j+x_{j+1},x_{j+1},\ldots)+P(\ldots,x_j+$

$x_{j+1},x_j,\ldots)=0$ をみたす。たとえば，$W_{14,3}^{(1)}=\mathbb{Q}x_1^2x_2^2(x_1^2-x_2^2)^3x_3^4$ となる。一般に，$W_{w,d}^{(j)}\cong\bigoplus_{10\le\ell\le w-2d+4}W_\ell^{\mathrm{ev},0}\otimes V_{w-\ell,d-2}^{\mathrm{ev},0}$ が成り立つ。この記号の元，次が成り立つ。

定理 7.2. [23, Proposition 3.1] $|\mathbb{I}_{k,d}|\neq 0$ をみたす k,d に対し，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d-1}W_{k-d,d}^{(j)}&\longrightarrow\ker C_{k,d},\\ \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{k,d}}a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}-1}&\longmapsto(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{k,d}}\end{aligned}\tag{7.2}$$

は well-defined である。

定理 7.2 のアイデアを $d=3$ の場合に説明しておく。まず，偶周期多項式の係数から得られる関係式 $\sum a_{k_1,k_2}x_1^{k_1-1}\,\underline{\circ}\,x_1^{k_2-1}=0$ (伊原-高尾関係式) をとる。このとき，奇数 $k_1\ge 3$ に対し，$\sum a_{k_2,k_3}x_1^{k_1-1}\,\underline{\circ}(x_1^{k_2-1}\,\underline{\circ}\,x_1^{k_3-1})=0$ であるが，$C_{k,3}$ は $x_1^{k_1-1}\,\underline{\circ}(x_1^{k_2-1}\,\underline{\circ}\,x_1^{k_3-1})$ の展開係数であったので，$W_{w,3}^{(2)}$ が $\ker C_{k,3}$ に寄与することがわかる。一方，$\sum a_{k_1,k_2}(x_1^{k_1-1}\,\underline{\circ}\,x_1^{k_2-1})\,\underline{\circ}\,x_1^{k_3-1}=0$ も成り立つが，これは $W_{w,3}^{(1)}$ の $\ker C_{k,3}$ への寄与を生む。結合法則が成り立たないので，この部分の証明はかなり技術的な計算を要するが，大雑把にはこのような理屈で周期多項式から $\ker C_{k,d}$ のベクトルが作られる。

定理 7.2 を次元の評価に応用する。写像 (7.2) は明らかに単射なので，$\sum_{j=1}^{d-1}W_{k-d,d}^{(j)}$ の次元を計算することにより，$\dim_{\mathbb{Q}}\ker C_{k,d}=|\mathbb{I}_{k,d}|-\mathrm{rank}\,C_{k,d}$ の下からの評価が得られる。和空間 $\sum_{j=1}^{d-1}W_{k-d,d}^{(j)}$ の次元は，$W_{w,3}^{(1)}\cap W_{w,3}^{(2)}=\{0\}$ ([7] の結果) を使うと計算でき，

$$\sum_{k,d\ge 2}\dim_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^{d-1}W_{k-d,d}^{(j)}\right)x^ky^d=\frac{\mathbb{S}(x)y^2}{(1-\mathbb{O}(x)y)(1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2)}$$

となる。系として，次が得られる。

系 7.3. [23, Theorem 1.2]

$$1+\sum_{\substack{k,d\geq 1\\ |\mathbb{I}_{k,d}|\neq 0}} \operatorname{rank} C_{k,d}x^k y^d \leq \frac{1}{1-\mathbb{O}(x)y+\mathbb{S}(x)y^2}$$

を得る。ただし，$\sum_{k,d} a_{k,d}x^k y^d \leq \sum_{k,d} b_{k,d}x^k y^d$ はすべての k,d に対し，$a_{k,d}\leq b_{k,d}$ が成り立つことを意味する。

なお，写像 (7.2) の全射性がいえると，(ホモロジー予想 6.1 の仮定の元) 予想 7.1 は正しいことが言える。

8 続・モジュラー関係式

深さ d の純奇多重ゼータ値の関係式の中には，深さ $d-1$ 以下の純奇多重ゼータ値が満たす関係式の調和積による持ち上げがあることに注意する。まずは (低い深さの関係式から来ない) 新しい関係式を抽出する方法を述べたあと，その新しい関係式に関する考察を紹介する。これらはモジュラー関係式の一般化を目指した考察である。

自然数 $l_1,\dots,l_d,k_1,\dots,k_d$ に対し，整数 $e\binom{l_1,\dots,l_d}{k_1,\dots,k_d}$ を

$$e\binom{l_1,\dots,l_d}{k_1,\dots,k_d}=\delta\binom{l_1,\dots,l_d}{k_1,\dots,k_d}+\sum_{j=1}^{d-1}\delta\binom{l_2,\dots,l_j,l_{j+2},\dots,l_d}{k_1,\dots,k_{j-1},k_{j+2},\dots,k_d}b^{l_1}_{k_j,k_{j+1}}$$

で定める。ただし，$b^l_{k,k'}=(-1)^k\binom{l-1}{k-1}+(-1)^{k'-l}\binom{l-1}{k'-1}$ であり，Kronecker 記号 $\delta\binom{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}}$ は $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{l}$ のとき 1 でそれ以外は 0 である。たとえば，

$$e\binom{l_1,l_2}{k_1,k_2}=\delta\binom{l_1,l_2}{k_1,k_2}+b^{l_1}_{k_1,k_2} \tag{8.1}$$

である。整数 $e\binom{l_1,\dots,l_d}{k_1,\dots,k_d}$ は $x_1^{k_1-1}\,\underline{\circ}\,x_1^{k_2-1}\cdots x_{d-1}^{k_d-1}$ の展開係数に現れる (ゆえに，$d=2$ のときは $c\binom{l_1,l_2}{k_1,k_2}=e\binom{l_1,l_2}{k_1,k_2}$ となる)。自然数 k,d と $2\leq j\leq d$ に対し，正方行列 $E^{(j)}_{k,d}$ を

$$E^{(j)}_{k,d}=\left(\delta\binom{l_1,\dots,l_{d-j}}{k_1,\dots,k_{d-j}}\cdot e\binom{l_{d-j+1},\dots,l_d}{k_{d-j+1},\dots,k_d}\right)_{\substack{(l_1,\dots,l_d)\in\mathbb{I}_{k,d}\\ (k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{I}_{k,d}}}$$

により定義する。この記号のもと，$C_{k,d}=E^{(2)}_{k,d}\cdots E^{(d-1)}_{k,d}E^{(d)}_{k,d}$ が成り立つ [21, Proposition 3.3]。行列 $C_{k,d}$ の右零化ベクトルが重さ k 深さ d の純奇多

重ゼータ値の関係式と一対一対応していたことを思い出す(ホモロジー予想6.1を仮定した)。すると，$C_{k,d}$ の積表示から右端の $E_{k,d}^{(d)}$ の右零化ベクトルも関係式を与えることがわかる。そこで，低い深さの $E_{k',d'}^{(d')}$ の右零化ベクトルから得られる純奇多重ゼータ値の関係式に $\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{l})$ $(\boldsymbol{l} \in \mathbb{I}_{k-k',d-d'})$ を乗じて調和積で展開して得られる $C_{k,d}$ の右零化ベクトルを考えると，これは $E_{k,d}^{(d)}$ の右零化ベクトルではないことがわかる[10]。それゆえ，$E_{k,d}^{(d)}$ の右零化ベクトルは新しい関係式となるはずである。

たとえば，$(k,d) = (15,3)$ のとき，$\dim_{\mathbb{Q}} \ker {}^tC_{15,3} = 2$ であるが，そのうちの一つは，重さ12深さ2の関係式(4.1)に $\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3)$ を乗じて(調和積で)展開して得られる関係式である。もう一つは，$E_{15,3}^{(3)}$ の右零化ベクトルから得られる関係式

$$-14\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,3,9) + 15\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,5,7) + 6\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,7,5) + 36\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(5,5,5) = 0$$

となっており，この二つが $\ker {}^tC_{15,3}$ の基底と対応する。次に，$(k,d) = (18,4)$ を考える。$\dim_{\mathbb{Q}} \ker C_{18,4} = 3$ であり，そのうちの二つは $E_{12,2}^{(2)}$ および $E_{15,3}^{(3)}$ の右零化ベクトルの調和積による持ち上げで得られる。$E_{18,4}^{(4)}$ の右零化ベクトルからは

$$-14\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,3,3,9) + 15\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,3,5,7) + 6\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,3,7,5) - \frac{36}{5}\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,5,5,5) = 0$$

が得られ，これら3つの関係式(の係数ベクトル)が $\ker {}^tC_{18,4}$ の基底となる。

現状，行列 $E_{k,d}^{(d)}$ の左零化ベクトルの空間 $\ker E_{k,d}^{(d)}$ について，写像

$$W_{k-d,d}^{(1)} \longrightarrow \ker E_{k,d}^{(d)}, \quad \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,d}} a_{\boldsymbol{k}} x^{\boldsymbol{k}-1} \longmapsto (a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_{k,d}} \cdot (E_{k,d}^{(d)} - I_{k,d})$$

がwell-definedであることが示されている[21, Theorem 3.6]。ただし，$I_{k,d}$ は $|\mathbb{I}_{k,d}|$ 次単位行列である。定理7.2とは様子が違うことに注意しておく。次元の比較から，この写像は全単射であることが期待される[11]。一方，$E_{k,d}^{(d)}$ の右零化ベクトルと尖点形式との関係はなにもわかっていない。ここでは $E_{k,d}^{(d)}$ の右零化ベクトルの特徴的な現象(モジュラーは出てこない)を少し紹介する。

[10]「わかる」と書いたが，一般の場合にはまだ確かめていないように思う。$d \leq 4$ の場合には[21, 20]で確かめている(が，今論文を見返しても非常にわかりにくい)。

[11]論文[21]は単射を主張するが，実際には示せておらず，訂正論文が出されている。

すでに $d=2,3,4$ の場合に登場した行列 $E^{(d)}_{12+3(d-2),d}$ の右零化ベクトルを，一般の深さで考えてみよう。$W^{(1)}_{12+3(d-2),d}=\mathbb{Q}x_1^2x_2^2(x_1^2-x_2^2)^3x_3^2\cdots x_d^2$ なので，左零化ベクトルの議論から $\ker{}^tE^{(d)}_{12+3(d-2),d}$ の次元は 1 となることが期待される。これに対し，その 1 次元分の関係式は $d\geq 4$ のとき

$$\begin{aligned}0\overset{?}{=}&-14\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\{3\}^{d-2},3,9)+15\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\{3\}^{d-2},5,7)\\&+6\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\{3\}^{d-2},7,5)-\frac{36}{5}\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(\{3\}^{d-3},5,5,5)\end{aligned}\tag{8.2}$$

で与えられることが観察できる。これは当時 (2013 年) 博士学生だった H. Bachmann を九州大学に招聘したときに，共同で見つけたものである。その後，研究は頓挫していたが，2018 年に MaxPlanck 数学研究所を滞在しているおりに，H. Gangl と話す機会があり，彼のいくつかの興味深い観察をきっかけに，再びこの話題に興味を持った。その一つは次のようなものである。上述の深さ 3，深さ 4 の関係式の係数が等しいインデックスに注目し，集合 $\mathbb{I}_{12+3(d-2),d}$ の部分集合

$$T_{12,d}=\{(\{3\}^{d-2},3,9),(\{3\}^{d-2},5,7),(\{3\}^{d-2},7,5),(\{3\}^{d-2},9,3)\}$$

を考える。$T_{12,d}$ に属するインデックスの係数からなるベクトルで生成される空間を $\mathbf{T}_{12,d}:=\langle(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in T_{12,d}}\mid(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{12+3(d-2),d}}\in\ker{}^tE_{12+3(d-2),d}\rangle_{\mathbb{Q}}$ とおく。この係数は関係式の一部分しか見ていないわけだが，(8.2) によれば，$d\geq 3$ のとき $\mathbf{T}_{12,d}$ の基底は $(-14,15,6,0)$ となる。Gangl が指摘したことは，$\mathbf{T}_{12,3}=\mathbf{T}_{12,4}=\mathbf{T}_{12,5}=\cdots$ となるであろう，というものである。これが $\ker{}^tE^{(d)}_{k,d}$ の特徴づけに役立つかはわからないが，なにかしらの構造が見え隠れしているようにも思える。

$(k,d)=(16+3(d-2),d)$ の場合も言及しておこう。

$$\sum_{d\geq 2}\dim_{\mathbb{Q}}\ker{}^tE^{(d)}_{16+3(d-2),d}y^d=y^2+2y^3+4y^4+7y^5+11y^6+\cdots$$

である。先ほどとは次元の振る舞いが異なることに注意しておく。今度は，$T_{16,d}=\{(\{3\}^{d-2},3,13),(\{3\}^{d-2},5,11),(\{3\}^{d-2},7,9),(\{3\}^{d-2},9,7),(\{3\}^{d-2},11,5),(\{3\}^{d-2},13,3)\}$ とし，$\mathbf{T}_{16,d}:=\langle(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in T_{16,d}}\mid(a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{I}_{16+3(d-2),d}}\in\ker{}^tE_{16+3(d-2),d}\rangle_{\mathbb{Q}}$ とおく。やや記号が重たいが，添え字の 16 は一次元空間 $S_{16}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の基底に対応しており，その尖点形式から得られる (と期待される) 関係式のつもりである。この場合も，等号 $\mathbf{T}_{16,4}=\mathbf{T}_{16,5}=\mathbf{T}_{16,6}=$

$\cdots$ が観察される。特に，次の 4 つのベクトルが $\mathbf{T}_{16,4}$ の基底の 1 組になるようである。

$$\begin{aligned}
v_1 =&(-4066953, -6020415, 11572142, 3697230, 1238292, 0),\\
v_2 =&(-17429313, 8019285, 10919182, 10995330, 5302332, 0),\\
v_3 =&(301389, 175170, -517721, -273990, -22896, 0),\\
v_4 =&(-35937, -15285, 51068, 32670, -2332, 0).
\end{aligned}$$

空間が等しくなる深さが一つ上がったのが気になるが，おおよそ同じような構図となる。ちなみに，重さ 16 深さ 2 の関係式は

$$66\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(3,13) + 375\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(5,11) + 686\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(7,9) + 675\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(9,7) + 396\overline{\zeta}_{\mathfrak{D}}(11,5) = 0$$

であるが，この係数ベクトルは $\mathbf{T}_{16,4}$ の基底の一次結合で表せる:

$$\begin{aligned}
&16010v_1 + 1519v_2 + 1333755v_3 + 1642323v_4\\
&= -210468300(66, 375, 686, 675, 396, 0)
\end{aligned}$$

深さ 3 の 2 次元分の関係式の係数ベクトルについても同様のことが言えて，$\mathbf{T}_{16,4} \supset \mathbf{T}_{16,2} + \mathbf{T}_{16,3}$ となる。これは $\mathbf{T}_{12,2} \neq \mathbf{T}_{12,d}$ $(d \geq 3)$ とは異なる状況である。

以上のように，モジュラー関係式の深さ一般化という研究にはまだまだ見通しがついていない状況である。一方，深さ 2 の場合にレベル付きへの一般化という方向で，ごく最近になってさまざまな進展が得られている。これら結果の一覧は，昨年 (2023 年)，RIMS 講究録 [24] にまとめた。ただ，今年 (2024 年) に入って，レベル 4 の 2 重 Eisenstein 級数に関する喜納の結果 [14]，およびレベル N の多重 Eisenstein 級数の Fourier 展開と Goncharov 余積との関係を明らかにした菅野の結果 [13] などが出てきている。本稿の内容と関連深い結果となっている。

参考文献

[1] H. Bachmann, K. Tasaka, *The double shuffle relations for multiple Eisenstein series*, Nagoya Math. J., **230** (2018), 180–212.

[2] S. Baumard, L. Schneps, *Period polynomial relations between double zeta values*, Ramanujan J. **32** (2013), no. 1, 83–100.

[3] D. Broadhurst, D. Kreimer, *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*, Phys. Lett. B **393** (1997), no. 3-4, 403–412.

[4] F. Brown, *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, Ann. of Math. **175** (2012), no. 2, 949–976.

[5] F. Brown, *Multiple Modular Values and the relative completion of the fundamental group of* $M_{1,1}$, preprint (arXiv:1407.5167).

[6] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, Compos. Math. **157** (2021), no. 3, 529–572.

[7] B. Enriquez, P. Lochak, *Homology of depth-graded motivic Lie algebras and koszulity*, J. Théor. Nombres Bordeaux **28** (2016), no. 3, 829–850.

[8] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions, In:Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.

[9] A.B. Goncharov, *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$, Duke Math. J., **110**(3) (2001), 397–487.

[10] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[11] K. Ihara, H. Ochiai, *Symmetry on linear relations for multiple zeta values*, Nagoya Math. J. **189** (2008), 49–62.

[12] M. Kaneko, 二重ゼータ値, 二重 Eisenstein 級数，およびモジュラー形式，京大数理研短期共同「多重ゼータ値の研究」報告集，(2004).

[13] H. Kanno, *Shuffle regularization for multiple Eisenstein series of level* N, arXiv:2405.04770.

[14] K. Kina, *Double Eisenstein series and modular forms of level* 4, to appear in Ramanujan J.

[15] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods*, Modular forms (Durham, 1983), Ellis Horwood (1984), 197–249.

[16] S. Lang, *Introduction to Modular Forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, No. 222. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[17] D. Ma, K. Tasaka, *Relationship between multiple zeta values of depths 2 and 3 and period polynomials*, Isr. J. Math., **242**(1) (2021.04), 359–400.

[18] A.A. Popa, *Rational decomposition of modular forms*, Ramanujan J., **26** (2011), 419–435.

[19] L. Schneps, *On the Poisson bracket on the free Lie algebra in two generators*, J. Lie Theory **16**(1) (2006), 19–37.

[20] K. Tasaka, *Multiple zeta values, multiple Eisenstein series, and period polynomials*, RIMS Kôkyûroku Bessatau, **B53** (2015), 199–218.

[21] K. Tasaka, *On linear relations among totally odd multiple zeta values related to period polynomials*, Kyushu J. Math. **70**(1) (2016), 1–28.

[22] K. Tasaka, *Hecke eigenform and double Eisenstein series*, Proc. Amer. Math. Soc., **148**(1) (2020), 53–58.

[23] K. Tasaka, *Note on totally odd multiple zeta value*, Math. J. Okayama Univ., **64** (2022), 63–73.

[24] K. Tasaka, *Catalogue of modular relations for double zeta values*, "Zeta functions and their representations", RIMS Kôkyûroku, **2267**, 100–121 (2023)

[25] H. Tsumura, *Combinatorial relations for Euler–Zagier sums*, Acta Arith. **111** (2004), 27–42.

[26] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. Algebra **385** (2013), 102–114.

[27] D. Zagier, *Periods of modular forms and Jacobi theta functions*, Invent. Math. **104** (1991), no. 3, 449–465.

[28] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel (1994), 497–512.

[29] D. Zagier, *Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values*, in Hokei-keishiki to L-kansuu no kenkyuu (= Research on Automorphic Forms and L-Functions), RIMS Kokyuroku **843** (1993), 162–170.

[30] D. Zagier, *Evaluation of the multiple zeta values* $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$, Ann. of Math., **175** (2012), no. 2, 977–1000.

A unification of Monstrous Moonshine with Modular Moonshine

Scott Carnahan

December 23, 2024

1 Introduction

Monstrous Moonshine is a phenomenon connecting the representation theory of the Monster simple group to the theory of modular functions. The original Monstrous Moonshine Conjecture was solved in 1992 by Richard Borcherds, but new phenomena have been discovered, and new conjectures have been proposed. One of these is Modular Moonshine, which is concerned with forming modular functions from mod p representations of certain subquotients of the monster. Together with S. Urano, I have proposed a conjecture that unifies Monstrous Moonshine with Modular Moonshine and generalizes both. Furthermore, we have produced positive solutions in some simple cases.

2 Monstrous Moonshine - short history

One of the triumphs of 20th century mathematics is the classification of finite simple groups, asserting that they are organized into the following classes:

1. Cyclic groups of prime order
2. Alternating groups of degree at least 5.
3. Groups of Lie type (16 infinite families).
4. 26 sporadic groups

The monster group $\mathbb{M}$, constructed in [Griess 1982], is the largest of the sporadic groups, with order about 8×10^{53}. It has 194 irreducible linear representations, with dimensions starting with $1, 196883, 21296876, \ldots$.

The other ingredient in our story is the theory of modular functions. $SL_2(\mathbb{R})$ acts on the complex upper half-plane $\mathfrak{H}$ by linear fractional transformations, and the discrete group $SL_2(\mathbb{Z})$ is generated by the transformations $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : z \mapsto z + 1$ and $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) : z \mapsto -1/z$.

The quotient space $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ is complex-analytically isomorphic to the complex line. In particular, the quotient is a genus zero curve, so its field of functions meromorphic at infinity is generated by a single function. One such generator is the normalized J-function, with Fourier expansion $q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$, with $q = e^{2\pi i z}$. Because of this generating property, we say that J is a Hauptmodul (or principal modulus) for $SL_2(\mathbb{Z})$.

Monstrous Moonshine started in 1978 when McKay pointed out that the dimension 196883 of the smallest nontrivial representation of $\mathbb{M}$ is very close to the coefficient 196884 in the Fourier series of J. Computations by Thompson [Thompson 1979] showed that the other small-degree coefficients of J are simple combinations of irreducible representations of $\mathbb{M}$:

$$\begin{aligned}
196884 &= 1 + 196883 \text{ (McKay, 1978)} \\
21493760 &= 1 + 196883 + 21296876 \text{ (Thompson, 1979)} \\
864299970 &= 2 \times 1 + 2 \times 196883 + 21296876 + 842609326 \text{ (ibid.)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

This formed numerical evidence for the existence of a natural faithful graded representation $\bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ of $\mathbb{M}$ such that $\sum \dim V_n q^{n-1} = J$. This question, later called the "McKay-Thompson conjecture", was solved with the following progression.

1. In [Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985], the "Moonshine module" $V^\natural = \bigoplus_{n\geq 0} V_n^\natural$ is constructed. $V^\natural$ has a faithful $\mathbb{M}$-action, and $\sum_{n\geq 0}(\dim V_n^\natural)q^{n-1} = J$.

2. In [Borcherds 1986] vertex algebras are introduced, and Borcherds claims that $V^\natural$ is a vertex algebra with $\mathbb{M}$ symmetry.

3. In [Frenkel-Lepowsky-Meurman 1988] $V^\natural$ is shown to have the structure of a vertex operator algebra (a vertex algebra with extra structure and finiteness properties) and that $\operatorname{Aut} V^\natural = \mathbb{M}$.

However, in [Thompson 1979], Thompson also suggested that one may get interesting power series by replacing graded dimension with graded traces of non-identity elements of the monster. Conway and Norton computed candidate functions for all 194 conjugacy classes, and found that, like the J-function, each generates the field of meromorphic functions on the upper half-plane invariant under some discrete subgroup of $SL_2(\mathbb{R})$. That is, they proposed the following:

Monstrous Moonshine conjecture [Conway-Norton 1979] There is a faithful graded representation $V = \bigoplus_{n\geq 0} V_n$ of the monster $\mathbb{M}$ such that for all $g \in \mathbb{M}$, the series $T_g(\tau) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{Tr}(g|V_n)q^{n-1}$ is the q-expansion of a Hauptmodul.

To get an idea of Conway and Norton's candidate functions, consider the top left corner of the character table of $\mathbb{M}$:

	$1A$	$2A$	$2B$	$3A$	$3B$	$\cdots$
χ_1	1	1	1	1	1	$\cdots$
χ_2	196883	4371	275	782	53	$\cdots$
χ_3	21296876	91884	-2324	7889	-130	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

We obtain series:

- $g = 1 : T_g(\tau) = q^{-1} + 196884q + \cdots$ $SL_2(\mathbb{Z})$ Hauptmodul
- $g \in$ 2A: $T_g(\tau) = q^{-1} + 4372q + 96256q^2 + \cdots$ $\Gamma_0(2)^+$ Hauptmodul
- $g \in$ 2B: $T_g(\tau) = q^{-1} + 276q - 2048q^2 + \cdots$ $\Gamma_0(2)$ Hauptmodul
- $g \in$ 3A: $T_g(\tau) = q^{-1} + 783q + 8672q^2 + \cdots$ $\Gamma_0(3)^+$ Hauptmodul
- $g \in$ 3B: $T_g(\tau) = q^{-1} + 54q - 76q^2 + \cdots$ $\Gamma_0(3)$ Hauptmodul

In [Borcherds 1992], Borcherds proved the Monstrous Moonshine conjecture for $V^\natural$. Specifically, he showed that for each $g \in \mathbb{M}$, the series $T_g(\tau) = \sum_n Tr(g|V_n^\natural)q^{n-1}$ is equal to the Hauptmodul for g proposed by Conway and Norton.

3 Modular Moonshine

Modular Moonshine is a phenomenon involving mod p representations of certain finite groups. One distinguishing feature of mod p representations is that characters carry less information than they do in characteristic zero. For example, the trace of identity only gives the dimension modulo p. A partial solution to this problem is the Brauer character: for p-regular elements g (i.e., $(p, |g|) = 1$), we lift eigenvalues of g to roots of unity in $\mathbb{C}$, and take the sum.

Alternatively, for $R \to k$ mixed characteristic, and a kG-module M, choose an RG-module $\tilde{M}$ such that $\tilde{M} \otimes_R k \sim M$ (isomorphic semisimplification), and take traces in R.

In [Ryba 1996], Ryba proposed the Modular Moonshine conjecture, based on two observations:

- For each $p| |\mathbb{M}|$ and g in conjugacy class pA, there seems to be a mod p analogue of the Griess algebra, with an action of the subquotient $C_{\mathbb{M}}(g)/\langle g \rangle$. Note that for small primes, these subquotients are sporadic simple groups: $p = 2 \Rightarrow \mathbb{B}$, $p = 3 \Rightarrow Fi'_{24}$, $p = 5 \Rightarrow HN$, $p = 7 \Rightarrow He$, $p = 11 \Rightarrow M_{12}$.

- Brauer characters of p-regular elements h in $C_{\mathbb{M}}(g)/\langle g \rangle$ "look like" ordinary characters of $g\tilde{h} \in \mathbb{M}$ (for $\tilde{h}$ a lift of h).

Conjecture: For each $p| |\mathbb{M}|$ and g in conjugacy class pA, there is a mod p vertex algebra with faithful action of $C_{\mathbb{M}}(g)/\langle g \rangle$, such that the graded Brauer character of any p-regular element h equals the graded trace T_{gh} on $V^\natural$.

Proposed object: Suppose there is a self-dual integral form $V^\natural_{\mathbb{Z}}$ of $V^\natural$. Then, we take the fixed points $(V^\natural_{\mathbb{Z}})^g$ under the action of g, and reduce mod p to get a vertex algebra $(V^\natural_{\mathbb{Z}})^g/p(V^\natural_{\mathbb{Z}})^g$ over $\mathbb{F}_p$ with a possibly singular invariant bilinear form. The radical of the bilinear form is an ideal, so we take the quotient $((V^\natural_{\mathbb{Z}})^g/p(V^\natural_{\mathbb{Z}})^g)/\operatorname{rad}(,)$. It is a vertex algebra over $\mathbb{F}_p$ with nondegenerate invariant bilinear form, and a natural action of $C_{\mathbb{M}}(g)/\langle g \rangle$.

Minor problem: No one had constructed a self-dual integral form of $V^\natural$.

However, Borcherds and Ryba observed that a self-dual $\mathbb{Z}[1/2]$ form could be constructed by the same methods as in [Frenkel-Lepowsky-Meurman 1988]. For g of odd prime order, this $\mathbb{Z}[1/2]$-form produces a quotient that is isomorphic to the proposed object. This form was then used to solve the conjecture for odd primes in a series of papers [Borcherds-Ryba 1996] [Borcherds 1998] [Borcherds 1999]. Here is an outline of their argument:

Let p be an odd prime, and let g lie in conjugacy class pA in $\mathbb{M}$.

1. Ryba's object is isomorphic to 0th Tate cohomology: $\hat{H}^0(g, V^\natural_{\mathbb{Z}[1/2]})$.
2. Total Tate cohomology $\hat{H}^0(g, V^\natural_{\mathbb{Z}[1/2]}) \oplus \hat{H}^1(g, V^\natural_{\mathbb{Z}[1/2]})$ is a vertex superalgebra over $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ with natural $\mathbb{C}_M(g)/\langle g \rangle$ action.
3. Brauer supercharacters of total Tate cohomology match with ordinary characters (easy).
4. $\hat{H}^1(g, V^\natural_{\mathbb{Z}[1/2]}) = 0$ (hard).

The construction of a self-dual integral form of $V^\natural$ required some additional technology that was not available in the 1990s.

Theorem ([Carnahan 2017]): There exists a self-dual integral form $V^\natural_{\mathbb{Z}}$ of $V^\natural$ with $\mathbb{M}$ symmetry.

Corollary ([Carnahan 2017]): Modular Moonshine for $p = 2$.

Corollary ([Carnahan 2017]): There is a positive-definite unimodular lattice of rank 196884 with faithful $\mathbb{M}$ action.

4 Unification conjectures

With Monstrous Moonshine, we have:

- A vertex operator algebra $V^\natural$ over $\mathbb{C}$ with $\mathbb{M}$-symmetry.

- The trace of $g \in \mathbb{M}$ on $V^\natural$ is a Hauptmodul T_g (i.e., it generates the function field of an upper half-plane quotient).

In fact, there is a generalization to functions that take pairs of commuting elements:

Theorem (Generalized Moonshine [Carnahan 2016], conjectured in [Norton 1987]): There is a rule that assigns to each element $g \in \mathbb{M}$ a graded projective representation $V^\natural(g) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Q}} V^\natural(g)_n$ of $C_\mathbb{M}(g)$, and to each pair (g, h) of commuting elements of $\mathbb{M}$ a holomorphic function $Z(g, h; \tau)$ on the complex upper half-plane, satisfying the following properties:

- For any commuting pair (g, h), there is a lift $\tilde{h}$ of h to a linear transformation on $V^\natural(g)$, such that $Z(g, h; \tau) = \sum_{n\in\mathbb{Q}} Tr(\tilde{h}|V^\natural(g)_n)q^{n-1}$.
- $Z(g, h; \tau)$ is invariant up to a constant under simultaneous conjugation of (g, h) in $\mathbb{M}$.
- $Z(g, h; \tau)$ is a Hauptmodul or a constant function.
- For any $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$, $Z(g, h; \frac{a\tau+b}{c\tau+d})$ is proportional to $Z(g^a h^c, g^b h^d; \tau)$.
- $Z(1, 1, \tau) = J(\tau)$.

A somewhat surprising fact is that for g in conjugacy class pA in $\mathbb{M}$, the graded dimension of the g-twisted $V^\natural$-module $V^\natural(g)$ from Generalized Moonshine is (up to some rescaling) equal to the graded dimension of the mod p vertex algebra from Modular Moonshine, and both have projective actions of $C_\mathbb{M}(g)$. To explain this, a unifying conjecture was proposed in [Borcherds 1998]:

Conjecture: For all $g \in \mathbb{M}$, there exists a graded supermodule V_g over $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/|g|}]$ with projective $C_\mathbb{M}(g)$-action, satisfying the following properties.

- $V_g \otimes \mathbb{Z}/|g|\mathbb{Z} \cong \hat{H}^*(g, V^\natural_\mathbb{Z})$ (from Modular Moonshine).
- For $|g|$-regular $h \in C_\mathbb{M}(g)$, $\hat{H}^*(h, V_g) \cong V_{gh} \otimes \mathbb{Z}/|h|\mathbb{Z}$.
- V_g is purely even when T_g has no negative coefficients (i.e., T_g is "Fricke-invariant", or "g is Fricke"). In this case, $V_g \otimes \mathbb{C} \cong V^\natural(g)$ (irreducible g-twisted $V^\natural$-module from Generalized Moonshine).
- Other conditions (e.g., "V_g is sometimes a vertex superalgebra")

This was very appealing, because the $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/|g|}]$-modules V_g would unify the finite characteristic objects from Modular Moonshine with the characteristic zero twisted modules from Generalized Moonshine. However, a counterexample was found in [Urano 2020]: Borcherds's conjecture implies $\hat{H}^1(g, V^\natural) = 0$ for all Fricke g, but Urano found that for g in the Fricke class 8A,

$$\text{length}\, \hat{H}^0(g, V^\natural_2) - \text{length}\, \hat{H}^1(g, V^\natural_2) = -256.$$

Here, "length" refers to the composition series of a finite abelian group.

There is an additional problem: Tate cohomology is not so well-behaved in general: When $|g|$ is prime, we have $\hat{H}^*(g, V \otimes W) \cong \hat{H}^*(g, V) \otimes \hat{H}^*(g, W)$ as supermodules. However, when $|g|$ is composite, we have no such isomorphism.

We spent some time looking for ways to fix or replace Borcherds's conjecture, and eventually decided that the key point in Borcherds's proof of Modular Moonshine for "large primes" [Borcherds 1998] was the tensor product isomorphism that fails in the composite case. This property implies Tate cohomology for prime order g induces a ring homomorphism from a representation ring. Thus, we chose to consider ring homomorphisms, rather than work directly with Tate cohomology.

Definition ([Benson-Parker 1984]) Let $\underline{\mathrm{Rep}}_R G$ denote the tensor category of RG-modules that are R-free of finite rank. The **Green ring** $\mathrm{Rep}_R G$ of G is the commutative ring that is the group completion of isomorphism classes in $\underline{\mathrm{Rep}}_R G$. A **species** for RG is a ring homomorphism from the Green ring to $\mathbb{C}$.

From [Benson-Parker 1984] Lemma 6.4, species form a linearly independent set, so when $R = \mathbb{C}$, character orthogonality implies all species are traces of elements. It is important here that we consider rings other than $\mathbb{C}$ and do not take the semisimplification of the category, so we can detect information lost to characters.

Conjecture [Carnahan-Urano 2021] Let R be a subring of $\mathbb{C}$, and G a subgroup of $\mathbb{M}$. For any species ϕ for RG, the power series

$$T_\phi(\tau) := \sum_{n \geq 0} \phi(V^\natural_{n,R}) q^{-n-1}$$

is the q-expansion of a Hauptmodul.

We have the following previously established cases:

- When $R = \mathbb{C}$, we have $\phi = \mathrm{Tr}\, g$ for some $g \in \mathbb{M}$, so this is Monstrous Moonshine.
- When $R \cong \mathbb{Z}_p$ and $G \cong \mathbb{Z}/pk\mathbb{Z}$ for $(p, k) = 1$ and ϕ is either Brauer supercharacter, or "total Brauer character", we essentially get Modular Moonshine.

5 Species

5.1 Classical reduction results

There are several classical results that help us reduce the problem of classifying species.

Theorem [Reiner 1967] Let R be a subring of a number field, let G be a finite group, and let R' be the ring given by inverting all prime ideals that are coprime to $|G|$. Then the base change homomorphism $\mathrm{Rep}_R G \to \mathrm{Rep}_{R'} G$ is equal to the quotient by the torsion ideal.

Since we are only interested in homomorphisms to $\mathbb{C}$, the torsion ideal is irrelevant to us. In particular, the problem of classifying species over R is equivalent to that of classifying species over the semi-local ring R'.

Theorem (Commutative algebra - semilocal rings) Two $R'G$-modules are isomorphic if and only if they are isomorphic over the local rings R'_P for all prime ideals P in R'.

This means it suffices to classify over the local rings over primes dividing $|G|$, then "glue". From now on, we will write $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} | (b, p) = 1\}$, and $\mathbb{Z}_p$ for the p-adic integers.

Theorem [Maranda 1953] Two $\mathbb{Z}_{(p)}G$-modules M, N that are $\mathbb{Z}_{(p)}$-free of finite rank are isomorphic if and only if $M \otimes \mathbb{Z}_p \cong N \otimes \mathbb{Z}_p$. More specifically, if $|G|/p^{k_0}$ is a unit, then equivalence is determined mod p^k for any $k > k_0$.

Theorem [Reiner 1961] The Krull-Schmidt theorem holds for $\mathbb{Z}_pG$-modules that are $\mathbb{Z}_p$-free of finite rank, i.e., we have unique decomposition into indecomposables.

This means if we classify indecomposables over $\mathbb{Z}_p$ for $p|G$, it suffices to work out which extensions are definable over $\mathbb{Z}_{(p)}$. The remaining difficulty is that if G has either:

- a non-cyclic Sylow p-subgroup, or
- an order p^3 cyclic subgroup

then there are infinitely many indecomposable $\mathbb{Z}_p G$-modules that are $\mathbb{Z}_p$-free of finite rank. [Heller-Reiner 1962], [Heller-Reiner 1963]

This result essentially means it is unreasonable to try to classify the indecomposable modules for sufficiently complicated finite groups. One may hope that perhaps only finitely indecomposable $\mathbb{Z}_p G$-modules appear in $V^\natural$. However, we don't have any explicit evidence for this. For now, we consider only small subgroups of $\mathbb{M}$.

5.2 Species for cyclic groups

Let $G = \langle g \rangle$ be cyclic of order p^2, for a prime p. By independent work of [Roiter 1960], [Knee 1962], [Troy 1961] there are $4p+1$ indecomposable $\mathbb{Z}_p G$-modules that are $\mathbb{Z}_p$-free of finite rank. All are definable over $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Tensor products were worked out for $p = 2$ in [Reiner 1965], and all p in [Jones-Michler 1984]. Here is a rough outline of the species classification:

1. The group ring satisfies $\mathbb{Z}_p G \otimes X \cong \mathbb{Z}_p G^{\oplus \operatorname{rank} X}$ for all modules X, so $\phi(\mathbb{Z}_p G)$ is either p^2, or zero. The only species ϕ with $\phi(\mathbb{Z}_p G) = p^2$ is "rank".
2. Now, assume $\phi(\mathbb{Z}_p G) = 0$. Let $E = \mathbb{Z}_p(G/pG))$. Then, $E^{\otimes 2} = E^{\oplus p}$, so $\phi(E)$ is either p or zero. Let $C = \mathbb{Z}_p[\zeta_{p^2}]$. Then, $C^{\otimes 2} = \mathbb{Z}_p G^{\oplus p^2 - 2p} \oplus E^{\oplus p}$. When $\phi(E) = p$, we have $\phi(C) = \pm p$, given by $\dim \hat{H}^*(g^p, -)$, resp. $\operatorname{Tr}(g^p)$.
3. When $\phi(E) = 0$, we can compute tensor products modulo $\mathbb{Z}_p G, E, C$. We get lots of messy cases, but for $p = 2$, we get 7 total species.

Now, let G be a cyclic group of square-free order. In this case, integral representations were worked out in [Levy 1985] using a diagram calculus. In our case, indecomposables over $\mathbb{Z}'$ can be parametrized by connected subgraphs of a hypercube graph, where the dimension of the hypercube is equal to the number of prime factors of the order.

We find that the representation ring is generated by the mod p augmentation ideal for each prime p dividing $|G|$, and any species takes this module to $p-1$, 1, or -1. From this, we get 3^n species for n prime factors.

5.3 Species for semidirect products of cyclic groups

We now consider nonabelian semidirect products $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ for primes p, q such that $p \equiv 1 \pmod{q}$.

Irreducible modules were classified in the mid-1960s:

- [Lee 1964] $q = 2$ (dihedral) case: There are $7h_p + 3$ indecomposable modules over $\mathbb{Z}$, and 10 over $\mathbb{Z}'$. Here, h_p is the order of the ideal class group of $\mathbb{Z}[\zeta_p]$.
- [Pu 1965] General case: $2^q + 2^{q-1} + q + 2$ indecomposable modules over $\mathbb{Z}'$.

We note that there is a subgroup of $\mathbb{M}$ with $p = 59, q = 29$, so we are faced with the somewhat daunting task of considering $\sim 8 \cdot 10^8$ indecomposable representations. However, they are highly linearly dependent in a way that makes them controllable.

Tensor products over $\mathbb{Z}'$ were computed in [Charlap-Vasquez 1979] for the dihedral case and in [Urano 2023] for the general case.

Theorem: (Classification of species [Urano 2023]) Let $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ be the unique nonabelian group, for $p \cong 1 \pmod{q}$. Then, there are $3q$ species for $\mathbb{Z}_p[G]$, which restrict to $2q + 2$ over $\mathbb{Z}_{(p)}$, and 4 species for $\mathbb{Z}_q[G]$ (trace of 1, a, b, and $\dim \hat{H}^*(b, -)$). Over $\mathbb{Z}'$, we get $2q + 3$ species (5 from Modular Moonshine).

We would like to apply this theorem to our new moonshine conjecture. However, for the $2(q-1)$ new species ϕ, the series T_ϕ is hard to control. We don't know how to decompose $V^\natural$ into indecomposables, and decomposition is non-unique anyway.

6 Positive results

We have verified our conjecture explicitly in the following cases:

Theorem: For g in class 4A, any species ϕ for $\langle g \rangle$ is the trace of 1, g^2 or g, so T_ϕ is a McKay-Thompson series. For g square-free order, T_ϕ is equal to the McKay-Thompson series of some $g' \in \mathbb{M}$.

We also have the following generalization of the cohomological vanishing results in Modular Moonshine:

Theorem: For $|g|$ square-free, if all multiplies of g have Fricke-invariant McKay-Thompson series, then $\hat{H}^1(g, V^\natural_\mathbb{Z}) = 0$.

However, we are left with the following problem: It is hard to calculate T_ϕ for non-trace species ϕ in general for large G.

7 Quasi-replicability

One potential solution to the difficulty of computation is to prove a general Hauptmodul result without explicit computation, using the structure of $V^\natural_\mathbb{Z}$. This was done for Monstrous Moonshine by combining the results of [Borcherds 1992] and [Cummins-Gannon-1997]. Specifically, the part of Borcherds's solution of Monstrous Moonshine up to the explicit calculation in section 9 implies trace functions are completely replicable. Then, the main result of [Cummins-Gannon-1997] is that nondegenerate completely replicable functions are hauptmoduls.

In order to make such an argument work, we need the following ingredients:

1. The self-dual integral form $V^\natural_\mathbb{Z}$ of the monster VOA. [Carnahan 2017]
2. Integral form of the monster Lie algebra $\mathfrak{m}$. [Carnahan-Urano 2021]
3. A no-ghost theorem over $\mathbb{Z}$. [Borcherds 1999]
4. Analysis of Lie algebra homology over $\mathbb{Z}$. [Carnahan-Urano 2021]
5. Replicability? (Still open)

7.1 The Monster Lie algebra over the integers

The original construction of the monster Lie algebra $\mathfrak{m}$ followed the following pattern:

Let P^1 be the subspace of **weight 1 primary vectors** in $V^\natural \otimes V_{II_{1,1}}$, i.e.,

$$P^1 = \{v \in V^\natural \otimes V_{II_{1,1}} | L_0 v = v, \forall i > 0, L_i v = 0\}$$

The vertex algebra $V^\natural \otimes V_{II_{1,1}}$ has a natural invariant inner product. The monster Lie algebra is the quotient $\mathfrak{m} = P^1 / \operatorname{rad}(,)$, with Lie bracket $[a, b] := a_0 b$.

The same construction works over $\mathbb{Z}$: use $V^\natural_\mathbb{Z}$ and the self-dual integral form of the lattice vertex algebra $V_{II_{1,1}}$. The resulting object is a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-graded Lie algebra over $\mathbb{Z}$ with self-dual invariant form.

We then need to compare the root spaces with the graded pieces of $V^\natural_{\mathbb{Z}}$, and we use a generalization of the no-ghost theorem of [Goddard-Thorn-1972]. From Theorem 5.1 of [Borcherds 1992] we have an $\mathbb{M}$-equivariant identification over $\mathbb{C}$:

$$\mathfrak{m}_{m,n} \cong V^\natural_{mn+1} \qquad (m,n) \neq (0,0)$$

and in [Borcherds 1999], this was enhanced to work over some rings of integers.

Theorem: For any subring $R \subseteq \mathbb{C}$, we have an $\mathbb{M}$-module isomorphism

$$\mathfrak{m}_{m,n,R} \cong V^\natural_{mn+1,R}$$

when $\gcd(m,n) \in R^\times$.

This is mostly useful when we invert all p coprime to $|G|$.

7.2 Harmonic analysis on Borcherds-Kac-Moody Lie algebras

Consider the "positive subalgebra" $\mathfrak{n}_R = \bigoplus_{m>0, n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{m}_{m,n,R}$, and the Chevalley-Eilenberg complex $(\bigwedge^* \mathfrak{n}_R, \delta)$ of the trivial representation. The differential δ has an adjoint d with respect to the contravariant form inherited from $\mathfrak{m}_R$. These obey the following identities: d and δ are square zero, $d\delta x = 0 \Rightarrow \delta x = 0$ and $\delta d x = 0 \Rightarrow dx = 0$. We find that the Laplacian $\Delta = d\delta + \delta d$ acts by the scalar $(m-1)n$ on the homogeneous component $(\bigwedge^* \mathfrak{n}_R)_{m,n}$.

The last result is a generalization of Kostant's 1961 homological interpretation of Borel-Weil-Bott, to Borcherds-Kac-Moody Lie algebras over commutative rings.

It is useful, because when the Laplacian acts by a unit on $(\bigwedge^* \mathfrak{n}_R)_{m,n}$, then all Lie algebra homology in degree (m,n) vanishes.

Theorem: Let G be a subgroup of $\mathbb{M}$. If $(m-1)n$ is coprime to $|G|$, then $H^i(\mathfrak{n}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})_{m,n}$ lies in the torsion ideal of $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}}(G)$. In particular, $\phi(H^i(\mathfrak{n}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})_{m,n}) = 0$ for any species $\phi : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}}(G) \to \mathbb{C}$.

To relate this vanishing with the G-module structure of $V^\natural_{\mathbb{Z}}$, we employ Adams operations. For X any R-torsion-free $R[G]$-module of finite rank, define

$$\bigwedge_{-q} X := \bigoplus_{n\geq 0} (-q)^n \bigwedge^n X \in \mathrm{Rep}_R(G)[q].$$

and define the Adams operations $\psi^i : \mathrm{Rep}_R(G) \to \mathrm{Rep}_R(G)$ by setting $\psi^i(X)$ to be the $q^i \frac{dq}{q}$ coefficient of $d\log \bigwedge_{-q} X$. We note that after tensoring with $\mathbb{Q}$, we get the standard formula:

$$\bigwedge_{-q} X = \exp\left(-\sum_{i>0} \frac{\psi^i(X) q^i}{i}\right).$$

Theorem: (Twisted denominator identity) Let $R \subseteq \mathbb{C}$ be a subring, $G \subseteq \mathbb{M}$ be a subgroup, and let $\phi : \mathrm{Rep}_R(G) \to \mathbb{C}$ be a species. Let R' be given by inverting all primes in R coprime to $|G|$. Then, for any $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ for which $(a-1)b$ is a unit in R', the coefficient of $p^a q^b$ in

$$\exp\left(-\sum_{i\geq 0} \frac{1}{i} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-1}^{\infty} \phi(\psi^i(\mathfrak{m}_{m,n,R})) p^{im} q^{in}\right)$$

vanishes.

This identity yields infinitely many relations between coefficients of:

$$T_\phi(\tau) := \sum_{n\geq 0} \phi(V^\natural_{n,R}) q^{-n-1}.$$

We call these relations "quasi-replicability". If we were able to remove the conditions that $\gcd(m,n) \in R^\times$ in the identification $\mathfrak{m}_{m,n,R} \cong V^\natural_{mn+1,R}$ and $(a-1)b$ is a unit in the twisted denominator identity, then we would have "replicability" and could use the methods of [Carnahan 2008] to conclude that we have either a Hauptmodul or a degenerate function. Unfortunately, we have not been able to extend the methods to allow for our weaker hypotheses.

8 Remaining questions

Our conjecture is an interesting unification of Monstrous Moonshine and Modular Moonshine. However, it is still somewhat limited in scope: For example it does not explain the phenomenon that inspired Borcherds's conjecture, namely the matching dimensions of $V^\natural(g)$ (over $\mathbb{C}$) and $\hat{H}^0(g, V^\natural_\mathbb{Z})$ (over $\mathbb{F}_p$) for g in conjugacy class pA.

One may also speculate on the possibility of a theory of ϕ-twisted modules for a general species ϕ.

References

[Benson-Parker 1984] D. J. Benson, R. A. Parker, *The Green ring of a finite group* J. Algebra **87** (1984) 290–331.

[Borcherds 1986] R. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **83** no. 10 (1986) 3068–3071.

[Borcherds 1992] R. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras* Invent. Math. **109** (1992) 405–444.

[Borcherds 1998] R. Borcherds, *Modular moonshine III* Duke Math. J. **93** no. 1 (1998) 129–154.

[Borcherds 1999] R. Borcherds, *The fake monster formal group* Duke Math. J. **100** no. 1 (1999) 139–165.

[Borcherds-Ryba 1996] R. Borcherds, A. Ryba, *Modular moonshine II* Duke Math. J. **83** (1996) no. 2, 435–459.

[Carnahan 2008] S. Carnahan, *Generalized Moonshine I: Genus-zero functions* Algebra and Number Theory **4**:6 (2010) 649–679.

[Carnahan 2016] S. Carnahan, *Generalized Moonshine IV: Monstrous Lie algebras* ArXiv preprint: https://arxiv.org/abs/1208.6254

[Carnahan 2017] S. Carnahan, *A self-dual integral forms of the moonshine module* SIGMA **15** (2019), 030, 36 pages. Available as: https://arxiv.org/abs/1710.00737

[Carnahan-Urano 2021] S. Carnahan, S. Urano *Monstrous moonshine for integral group rings* Int. Math. Res. Not. **2024** no. 4 (2024) 2748-–2789. Available at https://arxiv.org/abs/2111.09404

[Charlap-Vasquez 1979] L.S. Charlap, A.T. Vasquez, *Multiplication of integral representations of some dihedral groups* J. Pure and Applied Algebra **14** no. 3 (1979) 233–252.

[Conway-Norton 1979] J. Conway, S. Norton, *Monstrous Moonshine* Bull. Lond. Math. Soc. **11** (1979) 308–339.

[Cummins-Gannon-1997] C. Cummins, T. Gannon, *Modular equations and the genus-zero property of modular functions* Invent. Math. **129** (1997) 413–443.

[Frenkel-Lepowsky-Meurman 1985] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, *A moonshine module for the Monster* In "Vertex operators in mathematics and physics" (Berkeley, Calif., 1983), Math. Sci. Res. Inst. Publ., *3* Springer, New York (1985) 231–273.

[Frenkel-Lepowsky-Meurman 1988] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster* Pure and Applied Mathematics **134** Academic Press, Inc., Boston, MA, (1988).

[Goddard-Thorn-1972] P. Goddard, C. Thorn, *Compatibility of the dual pomeron with unitarity and the absence of ghosts in the dual resonance model* Physics Letters **40B** no. 2, (1972) 235–238.

[Griess 1982] R. L. Griess, Jr, *The Friendly Giant* Inventiones Mathematicae **69** (1982) 1–102.

[Heller-Reiner 1962] A. Heller, I. Reiner, *Representations of Cyclic Groups in Rings of Integers, I* Annals of Mathematics, Second Series, **76** no. 1 (1962) 73–92.

[Heller-Reiner 1963] A. Heller, I. Reiner, *Representations of Cyclic Groups in Rings of Integers, II* Annals of Mathematics, Second Series, **77** no. 2 (1963) 318–328.

[Jones-Michler 1984] A. Jones, G. O. Michler, *On the structure of the integral Green ring of a cyclic group of order* p^2 In "Representation Theory II Groups and Orders" (Ottawa, Canada 1984) Springer Lecture Notes in Mathematics **1178** 98–108.

[Knee 1962] D. Knee, *The indecomposable integral representations of finite cyclic groups* Ph.D. Dissertation, MIT (1962).

[Lee 1964] M. P. Lee *Integral representations of dihedral groups of order 2p* Trans. Amer. math. Soc., **110** (1964) 213–231.

[Levy 1985] L. Levy, *Modules over Dedekind-like rings* J. Algebra **93** (1985) 1–116.

[Maranda 1953] J. Maranda, *On* $\mathfrak{P}$*-adic integral representations of finite groups* Canad. J. Math. **5** (1953) 344–355.

[Norton 1987] S. Norton, *Generalized moonshine* Proc. Sympos. Pure Math. **47** Part 1, The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), 209–210, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987).

[Pu 1965] L. C. Pu, *Integral representations of non-abelian groups of order pq* Michigan. Math. J. **12** (1965) 231–246.

[Reiner 1961] I. Reiner, *The Krull-Schmidt theorem for integral group representations* Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961) 365–367.

[Reiner 1965] I. Reiner, *The integral representation ring of a finite group* Michigan Math. J. **12** (1965) 11–22.

[Reiner 1967] I. Reiner, *Representation rings* Michigan Math. J. **14** (1967) 385–391.

[Roiter 1960] A. V. Roiter, *On the representations of the cyclic group of fourth order by integral matrices* Vestnik Leningrad. Univ. **15** no. 19 (1960) 65–74.

[Ryba 1996] A. Ryba, *Modular Moonshine?* In"Moonshine, the Monster, and related topics", edited by Chongying Dong and Geoffrey Mason. Contemporary Mathematics **193** American Mathematical Society, Providence, RI (1996) 307–336.

[Thompson 1979] J. Thompson, *Some numerology between the Fischer-Griess Monster and the elliptic modular function* Bull. London Math. Soc. *11* no. 3 (1979) 352–353.

[Troy 1961] A. Troy, *Integral representations of cyclic groups of order* p^2 Ph. D. Dissertation, University of Illinois (1961).

[Urano 2020] S. Urano, *A Composite Order Generalization of Modular Moonshine* SIGMA **17** (2021), 110, 15 pages

[Urano 2023] S. Urano, *Monstrous moonshine and indecomposable modules for integral group rings* Ph.D. Dissertation, University of Tsukuba (2023)

EISENSTEIN コサイクルとゼータ関数の特殊値

戸次 鵬人

Abstract. 本稿は第 69 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演内容に基づく.

1. Introduction

ゼータ関数[1]とは，様々な数論的対象（代数体，代数多様体，Galois 表現，保型形式・表現，モチーフ, etc.）に付随して定まる（あるいは定まると予想される）解析関数である．そして，その整数点での値（特殊値と呼ばれる）はそれらの数論的対象についての様々な性質を反映していることが知られて（あるいは予想されて）おり，数論における非常に重要な研究対象となっている．これらゼータ関数の特殊値の代数的・数論的な性質を調べる基本的な手法として，ゼータ関数の積分表示とその代数的解釈を利用する，というものが挙げられる．本稿では，その中でも，特に Eisenstein 級数と呼ばれる保型形式を用いた代数体のゼータ関数[2]の積分表示とその代数的解釈，そして応用などについて，筆者の研究[3]に絡めて解説する．

より具体的に述べると，そのような代数的解釈を可能にするものとして，Eisenstein コサイクルと呼ばれる特別な $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 群コサイクルが存在し，総実代数体や CM 体のゼータ関数の臨界的特殊値の代数性の研究に豊富な応用を持つことが知られていた．一方，総実代数体や CM 体のゼータ関数であっても非臨界的な特殊値の場合や，より一般の代数体のゼータ関数の特殊値については，そのような良い代数的解釈の理論が知られていなかった．本研究の動機は,『Eisenstein コサイクルの理論を一般の代数体のゼータ関数の（全ての）特殊値へと拡張できるか』という問題であり，本稿では，そのような拡張の候補を与える新しい Eisenstein コサイクルである，Shintani-Barnes コサイクル [Bek23] について，そのアイデアや構成法の概略を述べることを目的とする．

2. 謝辞

この度第 69 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会を下さった責任者の先生方，特に数論分野のプログラム責任者の伊藤哲史先生，並川健一先生，会場責任者の秋山茂樹先生，そしてシンポジウム責任者の朝倉政典先生に，心より感謝申し上げます．

3. 代数体のゼータ関数とその特殊値

3.1. Riemann ゼータ関数. 有理数体 $\mathbb{Q}$ に付随するゼータ関数は Riemann ゼータ関数と呼ばれており，以下で定義される:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

これは $s \in \mathbb{C}$ の有理型関数に解析接続され，$s = 1$ にただ一つの一位の極を持つ．そして，Riemann ゼータ関数の特殊値について，以下が知られている．

[1]広く “ゼータ関数” と呼ばれる関数の中に，“L 関数” と呼ばれる特別なクラスがあり，以下の文中の所々で “ゼータ関数” より “L 関数” を用いた方がの方が適切な部分があるが，本稿では “L 関数” ではないゼータ関数も扱うため，“ゼータ関数” に統一する．

[2]後で正確に述べるが，部分ゼータ関数を考えている．

[3]筑波大学の坂本龍太郎氏との共同研究 [BS24] も含む．

Theorem 3.1 (Euler)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$B_k \in \mathbb{Q}$ を k 番目の *Bernoulli* 数とする．

(1) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!} \in \mathbb{Q}\,\pi^{2k}$.

(2) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k} \in \mathbb{Q}$.

s	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\zeta(s)$	$\cdots$	$-\frac{1}{252}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$	pole	$\frac{\pi^2}{6}$	?	$\frac{\pi^4}{90}$	?	$\frac{\pi^6}{945}$	$\cdots$

Table 1. $\zeta(s)$ の特殊値

Remark 3.2.

(1) $\zeta(s)$ は，関数等式 $\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)\cos(\pi s/2)}\zeta(1-s)$ を満たし，$s=k$ での値と $s=1-k$ での値（正確には先頭項）に対応がある．

(2) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$\zeta(2k), \zeta(1-2k)$ は Bernoulli 数 $B_{2k} \neq 0$ を用いた統一的で綺麗な表示を持ち，これらは臨界的な特殊値（あるいは臨界値）と呼ばれる．

(3) 一方，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$\zeta(2k+1)$ は臨界値のような簡明な表示はないと予想されており，$\zeta(3)$ を除いては無理性も未知である．関数等式で対応する $s=-2k$ での値は $\zeta(-2k)=0$ となって消えており，実際には微分値 $\zeta'(-2k)$ が $\zeta(2k)$ で記述される．これらは非臨界的な特殊値（非臨界値）と呼ばれ，より謎の多い特殊値である．

臨界値だけでなく，非臨界値も含めて統一的に成立する興味深い公式の例として，多重ゼータ値との関係を述べる．多重ゼータ値は Riemann ゼータ関数の特殊値の拡張で，次で定義される:

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \sum_{0<n_1<n_2<\cdots<n_r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{n_r}}, \quad (k_1, k_2, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r, k_r \geq 2.$$

このとき，次が知られている:

Theorem 3.3 (和公式, Granville [Gra97], Zagier)**.** $k, r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，次が成立する*:*

$$\zeta(k) = \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^r, k_r \geq 2 \\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_r).$$

例えば,

$$\begin{aligned} \zeta(3) &= \zeta(1,2), \\ \zeta(4) &= \zeta(1,3) + \zeta(2,2), \\ \zeta(5) &= \zeta(1,4) + \zeta(2,3) + \zeta(3,2) \end{aligned}$$

などを得る．

3.2. **Dedekind ゼータ関数・部分ゼータ関数.** Riemann ゼータ関数の代数体への一般化として，Dedekind ゼータ関数というものがある．F を n 次代数体（$\mathbb{Q}$ の n 次拡大体），$\mathcal{O}_F \subset F$ を F の整数環とする．このとき，F の Dedekind ゼータ関数は次で定義される:

$$\zeta_F(s) := \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_F} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

ただし，和は $\mathcal{O}_F$ の全ての非零整イデアル $\mathfrak{a}$ をわたり，$N\mathfrak{a} = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$ はイデアル $\mathfrak{a}$ のノルムである．Riemann ゼータ関数の時と同様に，$s \in \mathbb{C}$ の有理型関数に解析接続され，$s=1$ にただ一つの一位の極を持つ．

さらに，Dedekind ゼータ関数を F のイデアル類ごとに分解したものとして，部分ゼータ関数と呼ばれるものがある．ここでは，少し一般に，F の整環（整数環の指数有限な部分環）のイデアル類に付随する部分ゼータ関数を考える．(逆に簡単のため導手は自明な場合を考える．) すなわち，$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_F$ を F の整環，$Cl_{\mathcal{O}}^{+}$ を $\mathcal{O}$ の狭義イデアル類群，$\mathcal{A} \in Cl_{\mathcal{O}}^{+}$ を狭義イデアル類としたとき，付随する部分ゼータ関数 $\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s)$ が

$$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s) \coloneqq \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}, \mathfrak{a} \in \mathcal{A}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

で定まる．ただし，和は $\mathcal{A}$ に属する $\mathcal{O}$ の非零整イデアル $\mathfrak{a}$ をわたる．これまでと同様に，$s \in \mathbb{C}$ の有理型関数に解析接続され，$s = 1$ にただ一つの一位の極を持つ．

Remark 3.4.

(1) $\chi\colon Cl_{\mathcal{O}}^{+} \to \mathbb{C}^{\times}$ を Hecke 指標（i.e., 群準同型）としたとき，付随する Hecke L 関数は，

$$L(\chi, s) = \sum_{\mathcal{A} \in Cl_{\mathcal{O}}^{+}} \chi(\mathcal{A})\, \zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s)$$

表せる．逆に，部分ゼータ関数は，Hecke L 関数を用いて，

$$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s) = \frac{1}{\# Cl_{\mathcal{O}}^{+}} \sum_{\chi} \chi(\mathcal{A})^{-1} L(\chi, s)$$

となっている．ただし，和は全ての Hecke 指標をわたる．

(2) 部分ゼータ関数は一般には単純な関数等式は満たさないが，Hecke L 関数 $L(\chi, s)$ は綺麗な関数等式を満たし，特殊値に関する多くの定理や予想の定式化は Hecke L 関数を用いて行われる．一方，部分ゼータ関数は，次の具体的な表示を持つことなどから，実際に特殊値を調べる際には有用となる．

(3) $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}^{-1}$ をとる．すなわち，$\mathfrak{a} \subset F$ は $\mathcal{A}^{-1}$ に属する固有分数 $\mathcal{O}$ イデアルである．$\mathfrak{a}_{+}$, $\mathcal{O}_{+}^{\times}$ でそれぞれ $\mathfrak{a}$, $\mathcal{O}^{\times}$ の総正部分を表し，$N_{F/\mathbb{Q}}\colon F \to \mathbb{Q}$ でノルム写像を表す．このとき次が成立する．

$$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s) = N\mathfrak{a}^s \sum_{x \in \mathfrak{a}_{+}/\mathcal{O}_{+}^{\times}} \frac{1}{N_{F/\mathbb{Q}}(x)^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

代数体の部分ゼータ関数の特殊値についても Theorem 3.1 の一般化が知られている．

Theorem 3.5 (Klingen–Siegel)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, 1-k) \in \mathbb{Q}$.

Example 3.6. (1) 実 2 次体 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ の場合を考える．この場合，狭義イデアル類群 $Cl_{\mathcal{O}}^{+}$ は自明であり，$\mathcal{A} = [1] \in Cl_{\mathcal{O}}$ を自明なイデアル類とすると，Dedekind ゼータ関数と $\mathcal{A}$ に付随する部分ゼータ関数は一致する，i.e., $\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s) = \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$．このとき，小さな $|s|$ に対する $\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s)$ の特殊値は以下のようになっている (Table 2).

s	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s)$	$\cdots$	$\frac{67}{630}$	0	$\frac{1}{60}$	0	$\frac{1}{30}$	0	pole	$\frac{2\pi^4}{75\sqrt{5}}$	?	$\frac{4\pi^8}{16875\sqrt{5}}$	?	$\frac{536\pi^{12}}{221484375\sqrt{5}}$	$\cdots$

TABLE 2. $\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s) = \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$ の特殊値

(2) 虚 2 次体 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathcal{O}=\mathcal{O}_F=\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ の場合を考える．この場合も，狭義イデアル類群 $Cl_{\mathcal{O}}^{+}$ は自明であり，$\mathcal{A}=[1]\in Cl_{\mathcal{O}}$ を自明なイデアル類とすると，Dedekind ゼータ関数と $\mathcal{A}$ に付随する部分ゼータ関数は一致する, i.e., $\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},s)=\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s)$. このとき，小さな $|s|$ に対する $\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},s)$ の特殊値は以下のようになっている (Table 3).

s	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},s)$	$\cdots$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	pole	?	?	?	?	?	$\cdots$

Table 3. $\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},s)=\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s)$ の特殊値

Remark 3.7. (1) Riemann ゼータ関数のとき（Table 1）と同様に “?” で記した部分は，π と代数的数だけの組み合わせでは書けないと考えられている非臨界的な特殊値が現れる部分である．[4]

(2) より一般に，総実代数体（すなわち，全ての無限素点が実素点の代数体）の部分ゼータ関数の特殊値は，典型的に Example 3.6 (1) と同様の状況になっている．すなわち，負の整数点では零と非零の有理数が “混ざって” 現れ（全て非零の場合もある），2 以上の整数点では臨界値（π 冪の代数的数倍）と非臨界値が “混ざって” 現れる．[5]

(3) 一方，総実ではない代数体の部分ゼータ関数の特殊値は，典型的に Example 3.6 (2) と同様の状況になっており，負の整数点での値は全て零となり，2 以上の整数点ではすべて非臨界的な特殊値値となる．

Goal: 以下，本稿では，

- Eisenstein コサイクルを用いた部分ゼータ関数の負の整数点での特殊値（$\fallingdotseq$ 臨界値）の研究,
- Eisenstein コサイクルの理論を部分ゼータ関数の正の整数点での特殊値（臨界値も非臨界値も現れる）に拡張する試み,
- 今後の課題や関連する話題,

について論じる．

4. Eisenstein コサイクル

本節では，Eisenstein コサイクルの理論の典型として，部分ゼータ関数の負の整数点での特殊値の代数的解釈と有理性への応用について，主に実 2 次体の場合を通して概説する．

4.1. **Hecke の積分公式.** 一般に，ゼータ関数の特殊値を研究する際の基本的な手法の一つとして，特殊値の積分表示とその代数的解釈を用いる，というものが挙げられる．本稿で述べる Eisenstein コサイクルの理論も，そのような手法の一つである．より具体的には，その名前が示唆するとおり，我々は Eisenstein 級数を用いた積分表示とそのコホモロジー論的解釈を考える．

以下，$\Gamma:=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とおき，$\mathbb{H}:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ で Poincaré 上半平面を表す．Γ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ および $\mathbb{H}$ に一次分数変換で作用する, i.e., $\gamma z=\frac{az+b}{cz+d}$ for $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma$. このとき，$k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し，（レベル 1）重さ $2k$ の Eisenstein 級数 $G_{2k}(z)$ $(z\in\mathbb{H})$ が次で定義される:

$$G_{2k}(z)\;:=\;\zeta(1-2k)\;+\;2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)\,q^n,\quad q=e^{2\pi iz}.$$

[4]本稿ではこれらの特殊値を非臨界値と一括りにしてしまっているが，実際にはその理解の進み具合や難しさにはばらつきがある．

[5]Hecke L 関数を用いずに述べているために曖昧な表現となってしまっているが，本来臨界値・非臨界値は，Hecke L 関数の特殊値に対して定まる概念であり，部分ゼータ関数の特殊値には Remark 3.4 (1) を通して混ざって現れる．

ここで，$\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{0<d|n} d^{2k-1}$ である．よく知られているように，$G_{2k}(z)$ は（レベル 1）重さ $2k$ のモジュラー形式となる．

一方，F を実 2 次体，$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_F$ を整環としたとき，その狭義イデアル類 $\mathcal{A} \in Cl^+_{\mathcal{O}}$ に対し，双曲元 $\gamma_0 \in \Gamma$ (i.e., $|\operatorname{trace}(\gamma)| > 2$) および不定値二次形式 $Q_{\gamma_0}(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ が以下のように定まる: 狭義イデアル類 $\mathcal{A}$ の代表元 $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ を $\mathfrak{a} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \subset F$ ととる．このとき，$\alpha - \alpha' > 0$ (α' は α の $\mathbb{Q}$ 上の共役) となるようにできる．すると，Dirichlet の単数定理から，Γ の α 固定部分群

$$\operatorname{Stab}_\Gamma(\alpha) \coloneqq \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\alpha = \alpha\}$$

は，ある双曲元 $\gamma_0 \in \Gamma$ を用いて，$\operatorname{Stab}_\Gamma(\alpha) = \{\pm\gamma_0^l \mid l \in \mathbb{Z}\}$ と書けることがわかる．場合によっては γ_0 を γ_0^{-1} に取り替えることで，γ_0 は α が吸引的不動点（i.e., $\lim_{l\to\infty} \gamma_0^l \tau = \alpha$ for all $\tau \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \smallsetminus \{\alpha'\}$）であるようにとる．今，$\gamma_0 = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ であるとすると，$Q_{\gamma_0}(X,Y)$ を次のように定める:

$$Q_{\gamma_0}(X,Y) \coloneqq -\frac{\operatorname{sgn}(a+d)}{\gcd(a-d,b,c)}(cX^2 - (a-d)XY - bY^2).$$

このとき，次の古典的な公式が知られている．

Theorem 4.1 (Hecke's integral formula). *$k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする．任意の $\tau \in \mathbb{H}$ に対し，次が成立する:*

$$\int_\tau^{\gamma_0\tau} Q_{\gamma_0}(z,1)^{k-1}\, G_{2k}(z)\, dz \;=\; (-1)^k\, \zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, 1-k).$$

証明は，Eisenstein 級数の二重数表示

$$G_{2k}(z) \;=\; \frac{(2k-1)!}{(2\pi i)^{2k}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{0\}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

と，いわゆる積分と無限級数の unfolding を用いて行われる (cf. [BS24, Proposition 9.10])．

この公式の重要な点として，以下に述べるコホモロジー論的解釈を持つことが挙げられる．

4.2. **コホモロジー論的解釈.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，Γ 加群 $\mathcal{M}_{2k-2}$ を $\mathcal{M}_{2k-2} \coloneqq \operatorname{Sym}^{2k-2}\mathbb{Z}^2$ で定める．以下では，$\mathcal{M}_{2k-2}$ を次数 $2k-2$ の斉次多項式の空間と同一視する, i.e.,

$$\mathcal{M}_{2k-2} \;=\; \{P(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y] \mid \text{homogeneous of degree } 2k-2\}.$$

Γ は $\mathcal{M}_{2k-2}$ に,

$$(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)P)(X,Y) \;=\; P((X,Y)^t\gamma^{-1}) \;=\; P(dX - by, -cX + aY), \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$$

によって作用する．

このとき，$\mathcal{M}_{2k-2}$ の 1 次の Γ 群ホモロジーは,

$$\begin{aligned} I &\coloneqq \ker\Big(\mathbb{Z}[\Gamma] \longrightarrow \mathbb{Z};\ \sum_\gamma c_\gamma[\gamma] \mapsto \sum_\gamma c_\gamma\Big) \\ &= \Big\langle [\gamma] - [\mathrm{id}] \;\Big|\; \gamma \in \Gamma \Big\rangle_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

($\mathbb{Z}[\Gamma]$ は Γ の群環) を用いて,

(4.1) $$H_1(\Gamma, \mathcal{M}_{2k-2}) \simeq \ker\Big(\mu:\ I \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]} \mathcal{M}_{2k-2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2k-2};\ ([\gamma] - [\mathrm{id}]) \otimes P \mapsto \gamma P - P\Big)$$

と計算できる．そこで，§4.1 の記号のもと，$H_1(\Gamma, \mathcal{M}_{2k-2})$ の元 $\mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A})$ を

$$\mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A}) \coloneqq ([\gamma] - [\mathrm{id}]) \otimes Q_{\gamma_0}(X,Y)^{k-1} \in H_1(\Gamma, \mathcal{M}_{2k-2})$$

により定める．（構成から，$\gamma_0 Q_{\gamma_0} = Q_{\gamma_0}$ が確かめられる．）この元 $\mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A})$ が Theorem 4.1 における係数つき積分路 "$\int_\tau^\gamma Q_{\gamma_0}(z,1)^{k-1}$" の代数的解釈となる．

一方，$\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{C}} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{2k-2},\mathbb{C})$ を $\mathcal{M}_{2k-2}$ の $\mathbb{C}$ 上の双対 Γ 加群としたとき，$\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{C}}$ の 1 次の Γ 群コホモロジーは，(4.1) における μ の双対写像 $\mu^{\vee}$ を用いて，

$$H^1(\Gamma,\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{coker}\Big(\mu^{\vee}:\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{2k-2},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]}\mathcal{M}_{2k-2},\mathbb{C})\Big)$$

と計算でき，Eisenstein 級数 $G_{2k}(z)$ が重さ $2k$ のモジュラー形式であることから，$H^1(\Gamma,\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{C}})$ の元 Eis'_{2k-2}[6]が

$$\Big(\mathrm{Eis}'_{2k-2}:\ ([\gamma]-[\mathrm{id}])\otimes P(X,Y) \mapsto \int_{\tau}^{\gamma\tau} P(z,1)\,G_{2k}(z)\,dz\Big) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I\otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma]}\mathcal{M}_{2k-2},\mathbb{C})$$

により定まる[7]．この Eis'_{2k-2} が $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合の Eisenstein コサイクル[8]の例となる．

このとき，$\mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A})$ および Eis'_{2k-2} を用いて，Theorem 4.1 は以下のように言い換えられる．

Theorem 4.2 (Cohomological interpretation of Hecke's integral formula)**.** 記号は以前の通りとする．$k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ とすると，自然なペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle:\ H_1(\Gamma,\mathcal{M}_{2k-2})\times H^1(\Gamma,\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

のもと，次が成立する:

$$\langle \mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A}), \mathrm{Eis}'_{2k-2}\rangle = (-1)^k\,\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},1-k).$$

Remark 4.3. これによって，$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},1-k)$ の代数的な性質の研究が，$\mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A})$, Eis'_{2k-2} の代数的性質の研究に帰着される．

4.3. 有理性.

例えば次の事実が古典的に知られている．

Theorem 4.4 (Eis'_{2k-2} の有理性)**.**

$$\mathrm{Eis}'_{2k-2}\in H^1(\Gamma,\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{Q}})\subset H^1(\Gamma,\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{C}}).$$

ただし，$\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{Q}} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_{2k-2},\mathbb{Q})$ である．

結果として次が従う．

Corollary 4.5 (Theorem 3.5 for real quadratic fields)**.** 記号は引き続き §4.1 の通りとする．このとき，$k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し，$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},1-k)\in\mathbb{Q}$.

4.4. 整性（分母）.

$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},1-k)$ の整性や p 進補完については，Coates-Sinnott [CS74], [CS77] や Deligne-Ribet [DR80] による理論が存在するが，ここでは，少し別の角度からの整性について論じる．より正確には，$k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し，$\mathcal{O},\mathcal{A}$ を動かした際の $\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},1-k)$ の "普遍分母" の集合を

$$\mathscr{D}_k \coloneqq \Big\{ J\in\mathbb{Z}\ \Big|\ J\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A},1-k)\in\mathbb{Z} \text{ for all } (F,\mathcal{O},\mathcal{A})\Big\}$$

により定める．ただし，$(F,\mathcal{O},\mathcal{A})$ は全ての実 2 次体 F，その整環 $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}_F$，そしてその狭義イデアル類 $\mathscr{A}\in Cl^{+}_{\mathcal{O}}$ をわたる．このとき，この集合（$\mathbb{Z}$ のイデアル）が決定できるかを考える．

この問題は，Zagier [Zag77] において部分的に論じられていたが，近年 Duke [Duk23] によって，次が予想された．

Conjecture 4.6 (Duke)**.** $\zeta(1-2k)=\frac{N_{2k}}{J_{2k}}$ $(N_{2k},J_{2k}\in\mathbb{Z},\ J_{2k}>0)$ を $\zeta(1-2k)\in\mathbb{Q}$ の既約分数表示とする．このとき，$J_{2k}\in\mathscr{D}_k$.

---

[6]この Eis'_{2k-2} は [Har] や [BS24] で扱っている Eis_{2k-2} と正規化が異なるため，$'$ をつけて区別している．

[7]より一般に，実際には重さ $2k$ のモジュラー形式の空間から $H^1(\Gamma,\mathcal{M}^{\vee}_{2k-2,\mathbb{C}})$ への写像が定まっており，Eichler-Shimura 写像と呼ばれる．

[8]この場合 Eis'_{2k-2} はコサイクルというよりもコホモロジー類なので Eisenstein 類と呼ぶ方が適切である．しかし，より一般の Eisenstein コサイクルの理論において，コサイクルとコホモロジー類の間の用語の乱用が起こっており，本稿では Eis'_{2k-2} もその一例と見ているため，あえて Eisenstein コサイクルという呼称を採用する．

坂本龍太郎氏との共同研究 [BS24] では，より精密に次を示した．

Theorem 4.7 ([BS24])**.** *Duke の予想 (Conjecture 4.6) は正しく，さらに Duke の与えた普遍分母は* $\mathscr{D}_{2k}$ *を生成する，i.e.,*

$$\mathscr{D}_k = \mathbb{Z}J_{2k}.$$

Remark 4.8. Duke の予想は O'Sullivan [O'S24] によっても別の方法で示されている．

証明には，$\mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A})$ および Eis'_{2k-2} の整構造の解析を用いるが，まず，Eis'_{2k-2} の整性に関しては，Harder による次の（未出版の）結果[9]を用いた．

Theorem 4.9 (Harder [Har], cf. also [BS24])**.** Eis'_{2k-2} *の分母* $\Delta(\mathrm{Eis}'_{2k-2})$ *を次で定める:*

$$\Delta(\mathrm{Eis}'_{2k-2}) := \left\{ J \in \mathbb{Z} \;\middle|\; J\mathrm{Eis}'_{2k-2} \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\vee_{2k-2})/(\mathrm{tor}) \right\}.$$

このとき，$\Delta(\mathrm{Eis}'_{2k-2}) = \mathbb{Z}J_{2k}$ *が成り立つ．あるいは同値な言い換えとして，次が成立する．*

$$\mathrm{image}\Big(\langle\ ,\mathrm{Eis}'_{2k-2}\rangle : H_1(\Gamma, \mathcal{M}_{2k-2}) \longrightarrow \mathbb{Q}\Big) = \frac{1}{J_{2k}}\mathbb{Z}.$$

ただし，$\langle\ ,\mathrm{Eis}'_{2k-2}\rangle$ *は* Eis'_{2k-2} *とのペアリングをとる写像である．*

一方，$\mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A})$ の整構造については，以下を示した．

Theorem 4.10 ([BS24] + work in progress)**.** p *を素数とする．このとき，*$H_1(\Gamma, \mathcal{M}_{2k-2}\otimes\mathbb{Z}_p)$ *には Hecke 作用素* T_p *が作用しており，*$e_p := \lim_{n\to\infty} T_p^{n!}$ *を* p *通常射影子とする．このとき，*

$$e_p\Big\langle \mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A}) \;\Big|\; (F,\mathcal{O},\mathscr{A}) \Big\rangle_{\mathbb{Z}_p} = e_p H_1(\Gamma, \mathcal{M}_{2k-2}\otimes\mathbb{Z}_p).$$

ただし，$(F,\mathcal{O},\mathcal{A})$ *は全ての実 2 次体* F*，その整環* $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}_F$*，そしてその狭義イデアル類* $\mathscr{A}\in Cl^+_{\mathcal{O}}$ *をわたる．すなわち，実 2 次体から定まる* $\mathfrak{z}_{\mathcal{O},k}(\mathcal{A})$ *たちは* $H_1(\Gamma, \mathcal{M}_{2k-2}\otimes\mathbb{Z}_p)$ *の* p *通常商を生成する．*

Remark 4.11. [BS24] においては，これより少し弱い主張をを示していたが，その後上の主張も得られた．

Theorem 4.7 は，Theorem 4.2 と Theorem 4.9，Theorem 4.10 から従う．

以上が，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合の Eisenstein コサイクルの定義と，部分ゼータ関数の負の整数点での特殊値への応用の典型的な例となる．そして，Eis'_{2k-2} の拡張にあたる $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ の特別な群コホモロジーの元（やはり Eisenstein コサイクルと呼ばれる）を用いることで，以上の（ような）話は一般の総実体の部分ゼータ関数の負の整数点での特殊値へと一般化されている．（正確には，§4.4 で述べたような分母の話の一般化はあまり知られていないと思われるが，Coates-Sinnott の意味での整性や p 進補間の話は総実体に拡張されている．）例えば，[Scz93], [Nor95], [CDG15], [VZ13], [BCG20], [BHYY23] などを参照されたい．

Question. では，そのような Eisenstein コサイクルの理論を（より一般の代数体の）ゼータ関数の正の整数点での特殊値へと拡張することはできるか？

次の節では，そのような拡張の候補を与える新しい Eisenstein コサイクル（Shintani-Barnes コサイクル）について述べる．

[9]未出版の本の中にスケッチされている結果．[BS24] には証明の詳細も記述した．

5. Shintani-Barnes コサイクル

本節では, 一般の代数体の部分ゼータ関数の 2 以上の全ての整数点での特殊値を記述する Eisenstein コサイクルである Shintani-Barnes コサイクル [Bek23] について，その概観を説明する.

Aim. 我々が目標とするのは以下を満たすように Theorem 4.2 を拡張することである:

(1) 部分ゼータ関数の 2 以上の全ての整数点での値を記述できる.
(2) 総実体だけでなく全ての代数体の部分ゼータ関数を扱える.

Remark 5.1. 例えば, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ の実解析的 Eisenstein 級数を用いると, (1), (2) を満たす Theorem 4.1 の類似が得られることが知られているが, (1), (2) を満たす Theorem 4.2 は知られていなかった.

[Bek23] では，実 2 次体の場合に (1), (2) を満たす Theorem 4.1 の類似を与える [VZ13] のアイデアと [CDG15] や [BHYY23] によって用いられていた Shintani コサイクルの技術を応用することで，この目標を達成した.

5.1. **Shintani-Barnes コサイクルの構成のアイデア.** 以下，$n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする．Remark 5.1 で述べた通り，実解析的 Eisenstein 級数を用いても所望の代数的解釈を得るのは難しく，一方，Theorem 4.2 においては Eisenstein 級数 $G_{2k}(z)$ の正則性が重要となっていた．従って，n 次代数体の場合にも，正則 Eisenstein 級数 $G_{2k}(z)$ の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ への一般化を用いれば良さそうだと考えられる．しかし，よく知られているように，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ の正則 Eisenstein 級数というものは存在しない．実際，例えば，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の Eisenstein 級数

$$G_{2k}(z) = \frac{(2k-1)!}{(2\pi i)^{2k}} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\smallsetminus\{0\}} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

の素朴な拡張として，$k \in \mathbb{Z}_{\geq n+1}$ に対し，以下の無限級数を考える:

$$\psi_k(y) := \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}^n\smallsetminus\{0\}} \frac{1}{(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^k}, \quad y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{C}^n\smallsetminus\{0\}.$$

このとき，$\psi_k(y)$ は

- $n=2$, k: even, $y=(z,1)$ $(z\in\mathbb{H})$ の場合は，元々の Eisenstein 級数（の定数倍）に他ならない, i.e., $\psi_k(y) = \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}G_k(z)$．しかし，
- $n \geq 3$ の場合は，任意の $y \in \mathbb{C}^n \smallsetminus \{0\}$ で発散することが確かめられる.

Main Idea: Shintani-Barnes コサイクルの構成の主なアイデアは，この発散級数 $\psi_k(y)$ を，Shintani コサイクルの技法を用いて，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 同変コサイクルとして実現する，ということとなる.

ここで，Shintani コサイクルの技法というのは，Solomon [Sol98] や Hill [Hil07] などによって考えられ始めた，$\mathbb{R}^n$ の錐の間の細分関係式から $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 群コサイクルを構成する手法である．また，Bannai-Hagihara-Yamada-Yamamoto [BHYY23] は，この Shintani コサイクルの手法を Čech コサイクルによって解釈することに成功した．Shintani-Barnes コサイクルの構成においては，これらのアイデアを用いた.

より具体的には，有理ベクトルの組 $I=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ $(\alpha_i\in\mathbb{Q}^n\smallsetminus\{0\})$ に対し，錐 $C_I\subset\mathbb{R}^n$ を $C_I := \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{>0}\alpha_i$ で定め，発散級数 $\psi_k(y)$ の錐 C_I へ制限

$$\psi_{k,I}(y) := \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in C_I\cap\mathbb{Z}^n\smallsetminus\{0\}} \frac{1}{(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^k}$$

を考える[10]．すると，$\psi_{k,I}(y)$ は $\mathbb{C}^n\smallsetminus\{0\}$ の開集合

$$U_I := \{y\in\mathbb{C}^n \mid \exists\lambda\in\mathbb{C}^\times, \forall i\in\{1,\ldots,n\}, \mathrm{Re}(\langle\alpha_i,y\rangle)>0\}$$

[10] この級数は Barnes ゼータ関数と呼ばれるものの組み合わせで書ける．これが Shintani-Barnes コサイクルの名前の由来である.

上で広義一様に絶対収束する．ただし，$\langle x, y\rangle = x_1y_1 \cdots + x_ny_n$ はドット積を表す．この $\psi_{k,I}(y)$ は，元々の発散級数 $\psi_k(y)$ を錐に沿って分解した断片のようなものとなるが，これを全ての組 $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Q}^n \smallsetminus \{0\})^n$ にわたって寄せ集めたもの $(\psi_{k,I})_I$ は，元々の ψ_k を実現しているであろう，というのが大雑把なアイデアである．そして，このアイデアを $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 同変コホモロジーの言葉で定式化したものが，Shintani-Barnes コサイクルとなる．

5.2. **Shintani-Barnes コサイクルの構成.** 構成を説明するために，いくつか記号を準備する．(詳細は [Bek23] を参照されたい．) まず，$Y^\circ := \mathbb{C}^n \smallsetminus \sqrt{-1}\,\mathbb{R}^n$ とおき，$\pi_{\mathbb{C}}\colon Y^\circ \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ で射影空間への自然な商写像を表す．次に，Y° 上の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 同変層を，$\mathscr{V}_k := \pi_{\mathbb{C}}^{-1}\mathscr{O}(-k)$ で定める．ただし，$\mathscr{O}(-k)$ は $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ 上の構造層のの Serre ツイストである．また，

$$\Xi := \{Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \mid \text{minimal polynomial of } Q \text{ is irreducible over } \mathbb{Q}\}$$

とおき，$\mathscr{V}_k^{\Xi}$ を Ξ にわたる $\mathscr{V}_k$ の直積層とする．$\mathscr{V}_k^{\Xi}$ にも自然な $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 同変構造が定まる．このとき，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 同変コホモロジー $H^{n-1}\big(Y^\circ, \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \mathscr{V}_k^{\Xi}\big)$ が，今回 Shintani-Barnes コサイクルを定義する空間となる[11][12].

そのために，以下，天下り式とはなるが，この $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 同変コホモロジーの計算方法を述べる．$q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ および有理ベクトルの組 $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q+1}) \in (\mathbb{Q}^n \smallsetminus \{0\})^{q+1}$ に対し，

$$\mathcal{C}^q_{k,I} := \{f : U_I \to \mathbb{C} : \text{ holomorphic } \mid f(\lambda y) = \lambda^{-k} f(y), \forall \lambda \in \mathbb{C}^\times\} \simeq \Gamma(\pi_{\mathbb{C}}(U_I), \mathscr{O}(-k)),$$

とおく．このとき，$I \subset I'$ が定める自然な包含 $U_I \supset U_{I'}$ が誘導する関数の制限によって，

$$\mathcal{C}^\bullet_k := \prod_{I \in (\mathbb{Q}^n \smallsetminus \{0\})^{\bullet+1}} \mathcal{C}^\bullet_{k,I}$$

は $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 加群の複体となる．また，その直積複体 $\mathcal{C}^{\bullet,\Xi}_k := \prod_{\Xi} \mathcal{C}^\bullet_k$ もまた，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 加群の複体となる．このとき，以下が成り立つ．

Proposition 5.2 ([Bek23, Corollary 4.3.4])**.** *$\mathcal{C}^{\bullet,\Xi}_k$ の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 不変部分 $(\mathcal{C}^{\bullet,\Xi}_k)^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})}$ は $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 同変コホモロジー $H^q\big(Y^\circ, \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \mathscr{V}_k^{\Xi}\big)$ を計算する, i.e.,*

$$H^q(Y^\circ, \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \mathscr{V}_k^{\Xi}) \simeq H^q\big((\mathcal{C}^{\bullet,\Xi}_k)^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})}\big).$$

証明は，$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 同変コホモロジー $H^q\big(Y^\circ, \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \mathscr{V}_k^{\Xi}\big)$ の Čech 複体を用いた計算を用いる．

いま，§5.1 で述べたことから，

$$(\psi_{k,I})_{I \in (\mathbb{Q}^n \smallsetminus \{0\})^n} \in (\mathcal{C}^{n-1}_k)^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})}$$

が分かる．しかし，錐の面に起因する技術的な問題によって，$(\psi_{k,I})_I$ はコサイクル条件を "わずかに" 満たさない．そこで，$(\psi_{k,I})_I$ を修正して $(\mathcal{C}^{\bullet,\Xi}_k)^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})}$ のコサイクルを作る．具体的には，各 $I \in (\mathbb{Q}^n \smallsetminus \{0\})^n$, $Q \in \Xi$ に対し，錐 C_I を "Q 摂動" によって修正した C_I^Q を次で定める:

$$C_I^Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\delta, \forall\varepsilon \in (0, \delta), \exp(\varepsilon Q)x \in C_I\}.$$

すなわち，C_I^Q は，$\exp(\varepsilon Q)$ $(0 < \varepsilon$: small$)$ による "摂動" によって C_I に入る点たちの集合であるが，有限個の開有理錐の和で書けることが示せる． この操作は，総実体の場合の Colmez 摂動 (cf. [CDG15]) の類似となっている．このとき，$\psi_{k,I}$ の修正 $\psi^Q_{k,I}$ を

$$\psi^Q_{k,I}(y) := \mathrm{sgn}(I) \sum_{(x_1,\dots,x_n) \in C_I^Q \cap \mathbb{Z}^n \smallsetminus \{0\}} \frac{1}{(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^k}$$

[11] Ξ にわたる直積は錐の面の処理に関わる技術的な理由から必要となった．しかし現在進行中の研究でこの直積を回避することを試みている．

[12] [Bek23] では微分形式の層を用いているが本稿の $\mathscr{V}_k$ と同型であるので本稿ではこちらを使う

で定める．ただし，$\mathrm{sgn}(I) \in \{0, \pm 1\}$ は，$I \in M_n(\mathbb{Q})$ と見なした際の $\mathrm{sgn}(\det(I))$ のことである．$\psi_{k,I}^{Q}$ もまた，U_I 上で広義一様に絶対収束することがわかり，$\psi_{k,I}^{Q} \in \mathcal{C}_k^{n-1}$ となっている．さらに次が示せる．

Theorem 5.3 ([Bek23, Theorem 6.2.5])**.** $\mathcal{C}_k^{n-1,\Xi}$ の元 Ψ_k を

$$\Psi_k \ := \ (\psi_{k,I}^{Q})_{I \in (\mathbb{Q}^n \smallsetminus \{0\})^n, Q \in \Xi} \in \mathcal{C}_k^{n-1,\Xi}$$

で定める．このとき，Ψ_k は $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 不変コサイクルとなり*, i.e.,*

$$\Psi_k \in \ker\left(\mathrm{d}\colon (\mathcal{C}_k^{n-1,\Xi})^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})} \longrightarrow (\mathcal{C}_k^{n,\Xi})^{\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})}\right),$$

コホモロジー類 $[\Psi_k] \in H^{n-1}(Y^\circ, \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \mathscr{V}_k^{\Xi})$ を定める．

Definition 5.4 ([Bek23, Theorem 6.2.1])**.** この Ψ_k を（あるいは用語の乱用により $[\Psi_k]$ も）Shintani-Barnes コサイクルと呼ぶ．

5.3. **代数体の部分ゼータ関数の特殊値.** 目標としていた，Theorem 4.2 の拡張について述べる．

Theorem 5.5 ([Bek23, Theorem 8.3.2])**.** *F を n 次代数体，$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_F$ を整環，$\mathcal{A} \in Cl_{\mathcal{O}}^{+}$ を $\mathcal{O}$ の狭義イデアル類，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする．このとき，コホモロジーの間の自然な写像*

$$\int_{F,\mathcal{O},\mathcal{A},k} : \ H^{n-1}(Y^\circ, \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \mathscr{V}_{nk}^{\Xi}) \ \to \ H^{n-1}((F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^\times / \mathcal{O}_+^\times, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$$

が（積分を使って複体のレベルで）定義でき，次が成立する:

$$\int_{F,\mathcal{O},\mathcal{A},k} ([\Psi_{nk}]) = \frac{((k-1)!)^n \sqrt{D_{\mathcal{O}}}}{(nk-1)!} \zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, k).$$

ただし, $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^\times$, $\mathcal{O}_+^\times$ はそれぞれ $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times$, $\mathcal{O}^\times$ の総正部分を表し, $H^{n-1}((F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^\times / \mathcal{O}_+^\times, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ は $H^{n-1}((F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^\times / \mathcal{O}_+^\times, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ の基本類を固定することで定義される同型であり，$D_{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{O}$ の判別式である．

写像の定義は割愛するが，定義ができると，$[\Psi_{nk}]$ の像の計算自体は，Feynman parametrization を用いて，Theorem 4.1, Theorem 4.2 とパラレルに行われる．

6. 今後の課題

6.1. **Shintani-Barnes コサイクルの定式化の整備.** 本定式化の整備は今後の課題である．例えば，Shintani-Barnes コサイクルの定義に現れる Q 摂動および Ξ にわたる直積は本構成では技術的に必要となるものの，本質的ではない可能性が高いと考えており，現在進行中の研究において回避する構成法を検討中である．

6.2. **ゼータ関数の特殊値への応用.** これまでに，間接的な応用として，Shintani-Barnes コサイクルの構成や Theorem 5.5 の証明に用いた計算を応用することで，総実体の部分ゼータ関数の 2 以上の任意の整数点での値の非自明な記述を得た [Bek24]．具体的には，総実体の部分ゼータ関数の 2 以上の任意の整数点での値が，conical ゼータ値と呼ばれる別の種類のゼータ関数の特殊値を用いて記述できることを示した．例えば，Example 3.6 (1) で論じた $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ のゼータ関数の場合だと，次のような公式を得る．

Theorem 6.1 (B.[Bek24], Duke [Duk23])**.** *$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，*

$$\zeta_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}}(k_1, k_2) \ := \sum_{\substack{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}_{>0}^2 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} n_1 < n_2 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} n_1}} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2}}$$

と定める．このとき，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し，次が成立する:

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(k) \in \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k_1+k_2=2k} \mathbb{Q}\,\zeta_{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(k_1,k_2).$$

例えば,

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2) &= \frac{1}{5\sqrt{5}}\left(4\,\zeta_{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(1,3) + 3\,\zeta_{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(2,2)\right),\\
\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(3) &= \frac{1}{25\sqrt{5}}\left(12\,\zeta_{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(1,5) + 18\,\zeta_{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(2,4) + 11\,\zeta_{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(3,3)\right).
\end{aligned}$$

となっている．

これらの記述は, Theorem 3.3 の類似と見ることもできる．また, これらの記述を Shintani-Barnes コサイクルの枠組みで説明することも今後の課題である.

6.3. 正則量子モジュラー形式との関係. 正則量子モジュラー形式は Zagier によって，三次元トポロジーと数論の間の関係についての研究の中で見出され定義された新しいモジュラー性を持つ関数（あるいは通常のモジュラー性の崩れを捉える概念）であり，近年活発に研究されている対象である（cf. [Zag10], [Zag20], [Whe23], [GZ24]）．$n = 2$ の場合に Shintani-Barnes コサイクルを構成した $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 同変コホモロジー $H^1(Y^\circ, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathscr{V}_k^{\Xi})$ は，正則量子モジュラー形式の空間と密接に関わっていることが観察されており，これらの関係についても現在考察している．

6.4. 楕円ガンマ関数との関係. 楕円ガンマ関数は, 2 重無限積として定まる解析関数で近年 Bergeron-Charollois-Garcia [BCG23] によって，複素三次体の Stark 単数の構成に関する予想の定式化に用いられた対象である．この楕円ガンマ関数も，ある Eisenstein 級数の積分を記述しており，また，スタック $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \smallsetminus \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 上の $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ 同変コホモロジーを用いた解釈も知られている [FHRZ08]．従って，Shintani-Barnes コサイクルは楕円ガンマ関数とも類似の幾何学的背景を有していると考えられ，これらの間の関係も興味深いと考えている．

References

[BCG20] Nicolas Bergeron, Pierre Charollois, and Luis E. Garcia, *Transgressions of the Euler class and Eisenstein cohomology of* $\mathrm{GL}_N(\mathbf{Z})$, Jpn. J. Math. **15** (2020), no. 2, 311–379. MR 4120422

[BCG23] Nicolas Bergeron, Pierre Charollois, and Luis E. García, *Elliptic units for complex cubic fields*, 2023.

[Bek23] Hohto Bekki, *Shintani-Barnes cocycles and values of the zeta functions of algebraic number fields*, Algebra Number Theory **17** (2023), no. 6, 1153–1208. MR 4593764

[Bek24] ———, *On the conical zeta values and the Dedekind zeta values for totally real fields*, Acta Arith. **216** (2024), no. 2, 177–196. MR 4819576

[BHYY23] Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Kazuki Yamada, and Shuji Yamamoto, *Canonical equivariant cohomology classes generating zeta values of totally real fields*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B **10** (2023), 613–635. MR 4583122

[BS24] Hohto Bekki and Ryotaro Sakamoto, *Harder's denominator problem for* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *and its applications*, arXiv:2403.05800, 2024.

[CDG15] Pierre Charollois, Samit Dasgupta, and Matthew Greenberg, *Integral Eisenstein cocycles on* $\mathbf{GL}_n$*, II: Shintani's method*, Comment. Math. Helv. **90** (2015), no. 2, 435–477. MR 3351752

[CS74] J. Coates and W. Sinnott, *On p-adic L-functions over real quadratic fields*, Invent. Math. **25** (1974), 253–279. MR 354615

[CS77] ———, *Integrality properties of the values of partial zeta functions*, Proc. London Math. Soc. (3) **34** (1977), no. 2, 365–384. MR 439815

[DR80] Pierre Deligne and Kenneth A. Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. **59** (1980), no. 3, 227–286. MR 579702

[Duk23] William Duke, *Higher rademacher symbols*, Experimental Mathematics **0** (2023), no. 0, 1–20.

[FHRZ08] Giovanni Felder, André Henriques, Carlo A. Rossi, and Chenchang Zhu, *A gerbe for the elliptic gamma function*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 1, 1–74. MR 2372147

[Gra97] Andrew Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic number theory (Kyoto, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 95–101. MR 1694987

[GZ24] Stavros Garoufalidis and Don Zagier, *Knots, perturbative series and quantum modularity*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **20** (2024), Paper No. 055, 87. MR 4761922

[Har] Günter Harder, *Cohomology of Arithmetic Gruops*, available on Harder's webpage, http://www.math.uni-bonn.de/people/harder/Manuscripts/buch/.

[Hil07] Richard Hill, *Shintani cocycles on* GL_n, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 6, 993–1004. MR 2392823

[Nor95] Madhav V. Nori, *Some Eisenstein cohomology classes for the integral unimodular group*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 690–696. MR 1403969

[O'S24] Cormac O'Sullivan, *Integrality of the higher Rademacher symbols*, Adv. Math. **455** (2024), Paper No. 109876, 22. MR 4783901

[Scz93] Robert Sczech, *Eisenstein group cocycles for* GL_n *and values of* L*-functions*, Invent. Math. **113** (1993), no. 3, 581–616. MR 1231838

[Sol98] David Solomon, *Algebraic properties of Shintani's generating functions: Dedekind sums and cocycles on* $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q})$, Compositio Math. **112** (1998), no. 3, 333–362. MR 1631700

[VZ13] Maria Vlasenko and Don Zagier, *Higher Kronecker "limit" formulas for real quadratic fields*, J. Reine Angew. Math. **679** (2013), 23–64. MR 3065153

[Whe23] Campbell Wheeler, *Modular* q*–difference equations and quantum invariants of hyperbolic three–manifolds*, Thesis (2023).

[Zag77] Don Zagier, *Valeurs des fonctions zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs*, Journées Arithmétiques de Caen (Univ. Caen, Caen, 1976), Astérisque No. 41–42, Soc. Math. France, Paris, 1977, pp. pp 135–151. MR 441925

[Zag10] ———, *Quantum modular forms*, Quanta of maths, Clay Math. Proc., vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 659–675. MR 2757599

[Zag20] ———, *Holomorphic quantum modular forms*, Talk at the Hausdorff Trimester Program "Dynamics: Topology and Numbers": Conference on "Transfer operators in number theory and quantum chaos" (2020).

Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
Email address: bekki@mpim-bonn.mpg.de

Monoidal categories of modules over quiver Hecke algebras and quantum affine algebras

柏原 正樹 (京都大学高等研究院・数理解析研究所)

1 序

この講演では、箙ヘッケ環と量子アフィン環の有限次元表現からなる二つのモノイダル圏についてお話します。これらのモノイダル圏は、非可換ですが、その Grothendick 環は可換です。また、R 行列の存在により、その非可換性がある程度解析できるところに特徴があります。さらに、そのいろいろな部分圏の Grothendick 環がクラスター代数の構造を持つことも知られています。その意味で興味深いモノイダル圏です。

又、この2 つの圏は無関係ではなく、(一般化された）Schur-Weyl duality により結び付いています。

なお、この講演は、 Seok-Jin Kang, Myungho Kim, Sejin Oh, Euiyong Park との共同研究に基づいています。

2 考察するモノイダル圏

ここでは、次の二つのアーベルモノイダル圏を考察します。

一つは、箙 Hecke 環の有限次元次数付き加群のつくる圏 R-gmod、もう一つは、アフィン量子群の integrable 有限次元加群のつくる圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ です。

これらの圏 $\mathcal{C}$ には共通な性質が数多くあります。

(i) $\mathcal{C}$ は、アーベル圏で、各元は長さ有限。

(ii) $\mathcal{C}$ はモノイダル圏で、テンソル積 $\otimes$ は完全。

(iii) $\mathcal{C}$ は非可換、即ち、$M \otimes N \simeq N \otimes M$ は一般には成り立たない。

(iv) $\mathcal{C}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{C})$ は、$\otimes$ によって環の構造を持つが、それは可換環と

なる。[*1]

(v) R 行列 $R_{M,N}\colon M\otimes N\to N\otimes M$ がある。但し、これは、同型から程遠い。(0 となることもある.) [*2]

(vi) $\mathcal{C}$ の対象 M に対してそのアフィン化 (M, z) を考えることが重要である。M は、$\mathcal{C}$(を拡大した圏）の対象で、$z\in\mathrm{End}(\mathsf{M})$ は単射で、$\mathsf{M}/z\mathsf{M}\simeq M$ となるものである。

3 箙 Hecke 代数

3.1 定義

箙 Hecke 代数 (quiver Hecke algebra) あるいは、Kovanov-Lauda-Rouquier 代数 (KLR algebra) は、Kovanov-Lauda と Rouquier により導入されました。この代数は、量子群を、圏化することに特徴があります。

$\mathsf{C}=(\mathsf{c}_{i,j})_{i,j\in I}$ を (一般化された)Cartan 行列とします。これは対称化可能 (即ち $\mathsf{d}_i\in\mathbb{Z}_{>0}$ があって、$\mathsf{d}_i\mathsf{c}_{i,j}=\mathsf{d}_j\mathsf{c}_{j,i}$). Q (root lattice とよばれる) を $\mathsf{Q}=\oplus_{\imath\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ とし。その内積を $(\alpha_i,\alpha_j)=2\mathsf{d}_i\mathsf{c}_{i,j}$ で与えます。

$\mathbf{k}$ を基礎体とします。

$\{Q_{ij}(u,v)\}_{i,j\in I}$ を $\mathbf{k}$ の元を係数とする 2 変数多項式の族で次の条件を満たすものとします (箙 Hecke データと呼ばれる)。

(a) $Q_{i,j}(u,v)=Q_{j,i}(v,u)$,

(b) $i=j$ なら、$Q_{i,j}(u,v)=0$,

---

*1 $\mathcal{C}$ が R-gmod の場合は、次数シフト作用 q が作用しており、$K(\mathcal{C})$ は可換ではないが、$K(\mathcal{C})/(q-1)K(\mathcal{C})$ は可換となる。即ち次数を忘れれば、Grothendieck 環は可換である。

*2 $\mathcal{C}$ が、アフィン量子群に付随した $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ の場合は、R 行列は無限和で、“normalize” する必要がある。

(c) $i \neq j$ となる $i, j \in I$ にたいして、ある $a_{p,q} \in \mathbf{k}$ があって、

$$Q_{i,j}(u,v) = \sum_{p.q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \quad 2\mathsf{d}_i p + 2\mathsf{d}_i q = -2\mathsf{d}_i \mathsf{c}_{i,j}} a_{p,q} u^p v^q$$

しかも、$p = 0$ か $q = 0$ の時, $a_{p.q} \neq 0$.

箙 Hecke データ $\{Q_{ij}(u,v)\}_{i,j \in I}$ に付随した箙 Hecke 環 $R(n)$ は、

$e(\nu)$ $(\nu \in I^n)$, x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, τ_l $(1 \leqslant l \leqslant n-1)$ で生成され、次の定義関係式を満す $\mathbf{k}$ 代数として定義されます。

$$\begin{aligned}
& e(\nu)e(\nu') = \delta_{\nu,\nu'} e(\nu), \\
& \sum_{\nu \in I^n} e(\nu) = 1, \\
& x_k x_l = x_l x_k, \\
& x_k e(\nu) = e(\nu) x_k, \\
& \tau_l e(\nu) = e(s_l(\nu)) \tau_l, \\
& \tau_k \tau_l = \tau_l \tau_k \quad \text{if } |k-l| > 1, \\
& \tau_k^2 e(\nu) = Q_{\nu_k, \nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}) e(\nu), \\
& (\tau_k x_l - x_{s_k(l)} \tau_k) e(\nu) = \begin{cases} -e(\nu) & \text{if } l = k,\ \nu_k = \nu_{k+1}, \\ e(\nu) & \text{if } l = k+1,\ \nu_k = \nu_{k+1}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\
& (\tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1} - \tau_k\tau_{k+1}\tau_k) e(\nu) = \begin{cases} \overline{Q}_{\nu_k,\nu_{k+1}}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) e(\nu) & \text{if } \nu_k = \nu_{k+2}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

但し、$\overline{Q}_{i,j}(u,v,w) := \dfrac{Q_{ij}(u,v) - Q_{ij}(w,v)}{u-w}$.

これは、次のようにして次数付き代数となります:

$$\deg\bigl(e(\nu)\bigr) = 0,\ \deg\bigl(x_k e(\nu)\bigr) = (\alpha_{\nu_k}, \alpha_{\nu_k}),\ \deg\bigl(\tau_l e(\nu)\bigr) = -(\alpha_{\nu_l}, \alpha_{\nu_{l+1}}).$$

$R(n)$ には、ψ という、生成元 $e(\nu)$, x_k, τ_l をそれ自身に移す自己反同型があります。これによって、右加群と左加群は互いに移りあいます。左加群 M に対して、対応する右加群を M^ψ と書きます。

さて自然なやり方で、代数の準同型

$$R(m) \otimes R(n) \longrightarrow R(m+n)$$

があります ($x_k \otimes 1 \mapsto x_k,\ 1 \otimes x_k \mapsto x_{k+m}$, etc.)。

そこで、$R(m)$ 加群 M と $R(n)$ 加群 N に対して、その積 $M \circ N$ を

$$R(m+n) \underset{R(m) \otimes R(n)}{\otimes} (M \otimes N)$$

で定義します。したがって、これは $R(m+n)$ 加群となります。

さて、$R(n)$-gMod を次数つき (左)$R(n)$-加群の作るアーベル圏とします。また、$R(n)$-gproj を有限生成射影次数つき (左)$R(n)$-加群の作るその部分加法圏、また、$R(n)$-gmod を有限次元次数つき加群の作る部分アーベル圏とします。これらは次数付圏となります。即ち、次数ずらし関手 q が、

$$(qM)_n = M_{n-1}$$

により定義できます。さらに、

$$R\text{-gproj} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{ge0}} R(n)\text{-gproj} \quad R\text{-gmod} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{ge0}} R(n)\text{-gmod}$$

とおきます。

積 $\circ$ により、R-gproj と R-gmod はモノイダル圏となります。したがって、それらの Grothendieck 群は環 (Grothendieck 環) となります。しかも q が作用しますから、$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 代数の構造を持ちます。

さらに、Grothendieck 群は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群として自由加群となります。また、$K(R\text{-gproj})$ と $K(R\text{-gmod})$ の間には、

$$K(R\text{-gproj}) \times K(R\text{-gmod}) \to \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$$

という完全 coupling があります。$P \in R$-gproj と $M \in R$-gmod に対して、$([P],[M]) := \dim_q(P^{\psi} \otimes_R M)$ を対応させる対応です。但し有限次元次数付ベクトル

空間 X に対して、

$$\dim_q(X) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^n \dim(X_n) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$

これにより、$K(R\text{-gproj})$ と $K(R\text{-gmod})$ は、互いに双対となります。

定理 3.1 (Khovanov-Lauda, Rouquier)**.** 次の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccc}
K(R\text{-gproj}) & \xrightarrow{\sim} & U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} & \xrightarrow{q\to 1} & U(\mathfrak{n}) \\
\updownarrow \text{双対} & & \updownarrow \text{双対} & & \updownarrow \text{双対} \\
K(R\text{-gmod}) & \xrightarrow{\sim} & A_q(\mathfrak{n}) & \xrightarrow{q\to 1} & \mathbb{C}[\mathfrak{n}]
\end{array}$$

但し、(ここでは詳述しないが) $\mathfrak{n}$ は *Cartan* 行列 C に対応する *Kac-Moody Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の極大冪零環、$\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ はその座標環、$U(\mathfrak{n})$ は $\mathfrak{n}$ の普遍展開環, $U_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}$ はその q 類似、$A_q(\mathfrak{n})$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{n}]$ の q 類似である。

3.2 R 行列と affinizations

さて $\varphi_a \in R(n)$ $(1 \leqslant a < n)$ を

$$\varphi_a e(\nu) = \begin{cases} \big(\tau_a x_a - x_a \tau_a\big) e(\nu) \\ \qquad = \big(x_{a+1}\tau_a - \tau_a x_{a+1}\big) e(\nu) \\ \qquad\quad = \big(\tau_a(x_a - x_{a+1}) + 1\big) e(\nu) \\ \qquad\qquad = \big((x_{a+1} - x_a)\tau_a - 1\big) e(\nu) & \text{if } \nu_a = \nu_{a+1}, \\ \\ \tau_a e(\nu) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定義する。これは intertwiner と呼ばれ、次の性質をみたす。

補題 3.2.

(i) $\varphi_a^2 e(\nu) = \big(Q_{\nu_a,\nu_{a+1}}(x_a, x_{a+1}) + \delta_{\nu_a,\nu_{a+1}}\big) e(\nu).$

(ii) $\{\varphi_k\}_{1 \leqslant k < n}$ は *braid relation* を満たす、即ち、$\varphi_a \varphi_b = \varphi_b \varphi_a$ $(|a-b| > 1)$, $\varphi_a \varphi_{a+1} \varphi_a = \varphi_{a+1} \varphi_a \varphi_{a+1}$.

(iii) w を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元, $w = s_{a_1} \cdots s_{a_\ell}$ を w の最短表示 とするとき、$\varphi_w := \varphi_{a_1} \cdots \varphi_{a_\ell}$ は、最短表示の取り 方に依らない。

(iv) $w \in \mathfrak{S}_n$ と $1 \leqslant k \leqslant n$ に対して, $\varphi_w x_k = x_{w(k)} \varphi_w$ が成り 立つ。

(v) $w \in \mathfrak{S}_n$ と $1 \leqslant k < n$ が $w(k+1) = w(k) + 1$ を満たせば, $\varphi_w \tau_k = \tau_{w(k)} \varphi_w$ が成り 立つ。

(vi) $\varphi_{w^{-1}} \varphi_w e(\nu) = \displaystyle\prod_{\substack{a<b, \\ w(a)>w(b)}} (Q_{\nu_a,\nu_b}(x_a, x_b) + \delta_{\nu_a,\nu_b}) e(\nu)$.

さて $m, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ に対して、$\mathfrak{S}_{m+n}$ の元 $w[m,n]$ を

$$w[m,n](k) = \begin{cases} k+n & \text{if } 1 \leqslant k \leqslant m, \\ k-m & \text{if } m < k \leqslant m+n. \end{cases} \tag{3.1}$$

で定義する。さらに、$R(m)$-加群 M と $R(n)$-加群 N に対して、$M \otimes N \to N \otimes M$ を

$$u \otimes v \longmapsto \varphi_{w[n,m]}(v \otimes u)$$

で与えると、これは $R(m) \otimes R(n)$-準同型になり 、$R(m+n)$-加群の準同型

$$R^{\mathrm{univ}}_{M,N} \colon M \circ N \longrightarrow N \circ M. \tag{3.2}$$

に拡張される。(ここでは次数ずらしを無視している。) これを 普遍 R 行列と 呼びます。

これは、次の図式が可換という 性質をもちます:

$$\begin{array}{ccc} L \circ M \circ N & \xrightarrow{R_{L,M}} & M \circ L \circ N \\ & \searrow^{R_{L,M \circ N}} & \downarrow{\scriptstyle R_{L.N}} \\ & & M \circ N \circ L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} L \circ M \circ N & \xrightarrow{R_{M,N}} & L \circ N \circ M \\ & \searrow^{R_{L \circ M,N}} & \downarrow{\scriptstyle R_{L.N}} \\ & & N \circ L \circ M\,. \end{array}$$

従って、$R^{\mathrm{univ}}_{M,N}$ は Yang-Baxter 関係式を満たす。即ち、次の図式が可換です:

$$\begin{array}{ccc} & L\circ M\circ N & \\ {}^{R_{L,M}}\swarrow & & \searrow^{R_{M,N}} \\ M\circ L\circ N & & L\circ N\circ M \\ {\scriptstyle R_{L,N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R_{L,N}} \\ M\circ N\circ L & & N\circ L\circ M \\ {}_{R_{M,N}}\searrow & & \swarrow_{R_{L,M}} \\ & N\circ M\circ L\,. & \end{array} \tag{3.3}$$

3.3 Affinizations

しかし、$R^{\mathrm{univ}}_{M,N}$ は同型には程遠く、0 になることさえあります。これを補うのが affinization です。

以下、簡単の為に、箙 Hecke データ $Q_{i,j}(u,v)$ が $u-v$ の多項式であると仮定します。この時、R は対称であると言います。

従って、Cartan 行列 C は対称行列であり、$Q_{i,j}(u,v)=\delta_{i,j}(u-v)^{-\mathsf{c}_{i,j}}$ (定数倍を除いて) となる。$(\alpha_i,\alpha_j)=\mathsf{c}_{i,j}$ とする、従って、z を次数 2 の不定元として、$\mathbf{k}[z]\otimes R(n)$ は、

$$e(\nu)\mapsto e(\nu),\quad x_k\mapsto x_k+z,\ \tau_l\mapsto\tau_l$$

という自己同型をもちます。M を $R(n)$-加群としたとき、$\mathbf{k}[z]\otimes M$ には、上の自己同型でひねった加群構造が入る: 特に、

$$x_k(f(z)\otimes u)=\big(zf(z)\big)\otimes u+f(z)\otimes(x_ku)\qquad(f(z)\in\mathbf{k}[z],\,u\in M).$$

これを、M の affinization とよび、M_z と書く。[*3]

命題 3.3. $M,N\in R$-gmod とするとき、$R^{\mathrm{univ}}_{M_z,N}\colon M_z\circ N\longrightarrow N\circ M_z$ は、$\mathbf{k}[z^{\pm1}]\otimes_{\mathbf{k}[z]}\bullet$ を施すと、同型となる。

[*3] 箙 Hecke 環が対称でないときは、既約 R 加群の affinization は存在するとは限りません。また存在したとしても一意的ではありません (cf. [10])。

R 行列と affnization の存在から次の興味深い結果が得られます。

R-gmod の既約な加群 M は、$M \circ M$ も既約の時、real と呼ばれます。

定理 3.4 ([2]). M, N を R-gmod に属する既約な加群とします。さらに、M か N は *real* と仮定します。そのとき、

(i) $\dim \mathrm{H\scriptstyle{OM}}(M \circ N, N \circ M) = 1$. 但し $\mathrm{H\scriptstyle{OM}}(M, N) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(q^n M, N)$ は、次数を忘れた M から N への R-準同型のつくる線形空間。

(ii) $\mathbf{r}_{M,N}$ を $\mathrm{H\scriptstyle{OM}}(M \circ N, N \circ M)$ の 0 でない元とするとき、$\mathrm{Im}(\mathbf{r}_{M,N} \colon M \circ N \to N \circ M)$ は、既約で、$M \circ N$ の *head* であり、また $N \circ M$ の *socle* でもある。

加群 M の socle とは、M の最大半単純部分加群であり $\mathrm{soc}(M)$ と書かれ、M の head とは、M の最大半単純商加群であり $\mathrm{hd}(M)$ と書かれる。

$\mathrm{hd}(M \circ N)$ を $M \nabla N$ と書き、$\mathrm{soc}(M \circ N)$ を $M \Delta N$ と書く。

この定理を証明する際、次の性質が重要な役割を果たします。

Definition 3.5. モノイダルアーベル圏 $\mathcal{C}$ は、次ことが成り立つとき、quasi-rigid という。

> M_1, M_2, M_3 を $\mathcal{C}$ の 3 つの対象とする。$X \subset M_1 \otimes M_2$, $Y \subset M_2 \otimes M_3$ が $X \otimes M_3 \subset M_1 \otimes Y$ を満たせば、ある $Z \subset M_2$ が存在して、$X \subset M_1 \otimes Z$, $Z \otimes M_3 \subset Y$ を満たす。

Definition 3.6. M, N を定理 3.4のような既約加群とし、$\mathbf{r}_{M,N}$ を (ii) で与えられたものとする。$\mathbf{r}_{M,N}$ の次数を $\Lambda(M,N)$ とかく。さらに、

$$\mathfrak{d}(M,N) := \big(\Lambda(M,N) + \Lambda(N,M)\big)/2$$

とおく。

$\mathfrak{d}(M,N)$ は非負整数である。

この不変量は、次の補題から分かるように、M と N との可換性を与えるものと言える。

補題 3.7. M，$N \in R$-gmod を既約とし、どちらかは *real* としよう。その時、

(i) $\mathfrak{d}(M,N)=0$ なら、 $M \circ N \simeq N \circ M$ で、これは既約。逆に、$M \circ N \simeq N \circ M$ なら $\mathfrak{d}(M,N)=0$。

(ii) $\mathfrak{d}(M,N)=1$ なら、 $M \circ N$ は長さ 2 で、

$$0 \to M \mathbin{\Delta} N \to M \circ N \to M \mathbin{\nabla} N \to 0$$

は、完全列。

一方、不変量 $\Lambda(M,N)$ は次の性質を満たす。

補題 3.8. (i) L, M, N を既約加群とする。$\Lambda(L, M \mathbin{\nabla} N) \leqslant \Lambda(L,M)+\Lambda(L,N)$. もし、$L$ と M が可換なら、等号が成り立つ。

(ii) M は *real* とする。

(a) $\Lambda(M, M \mathbin{\nabla} N) = \Lambda(M,N)$,

(b) S を $\mathrm{Ker}(M \circ N \to \mathrm{M} \mathbin{\nabla} N)$ の既約部分商とする。そのとき $\Lambda(M,S) < \Lambda(M,N)$.

特に、$M \mathbin{\nabla} N$ は $M \circ N$ の組成列に *1* 度しか現れない。

4 アフィン量子群

4.1 定義

アフィン量子群については、例えば [1] を参照されたい。

アフィン型 Cartan 行列 $\mathsf{C} = (\mathsf{c}_{i,j})_{i,j \in I}$ をとり、$U_q'(\mathfrak{g})$ をそれに対応するアフィン量子群とする。これは、$e_i, f_i, t_i^{\pm 1}$ $(i \in I)$ を生成元とする $K := \bigcup_{m>0} \mathbb{C}(q^{1/m})$ 上定義された代数である。$\delta = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i \in \mathsf{Q}_+$ を imaginary root, $c = \sum_{i \in I} a_i^\vee h_i \in \mathsf{P}^*$ を中心元とする。

$U'_q(\mathfrak{g})$ の有限次元加群 M は、

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathsf{P}} M_\lambda \quad (\text{但し、}M_\lambda := \{u \in M \mid t_i u = q^{(\alpha_i,\lambda)}u| \text{ for any } i \in I\} \text{ は weight 空間}).$$

と分解するとき、integrable をよばれる。$\mathcal{C}_\mathfrak{g}$ を有限次元 integrable $U'_q(\mathfrak{g})$-加群のつくる、アーベル圏とする。これはモノイダル圏となる。しかも、rigid である；即ち、任意の加群は、左双対と右双対をもつ。rigid なモノイダルアーベル圏は quasi-rigid であることに注意しよう。

4.2 affinizarion と R 行列

$U'_q(\mathfrak{g})$ は、$e_i \mapsto z^{\delta 0,i} e_i,\ f_i \mapsto z^{-\delta 0,i} f_i,\ t_i \mapsto t_i$ という自己同型がある。但し、z は不定元。したがって、任意の $U'_q(\mathfrak{g})$-加群 M に対して、$M_{\mathrm{aff}} := K[z^{\pm 1}] \otimes_K M$ は、

$$\begin{aligned}&e_i(z^m \otimes v) = (z^{m+\delta_{i,0}}) \otimes (e_i v),\ f_i(z^m \otimes v) = (z^{m-\delta_{i,0}}) \otimes (f_i v),\\ &t_i(z^m \otimes v) == z^m \otimes (t_i v)\end{aligned}$$

によって $U'_q(\mathfrak{g})$-加群となる。これを M の affinization という。

$U_q^+(\mathfrak{g})$ を $\{e_i\}_{i\in I}$ で $U_q^-(\mathfrak{g})$ を $\{f_i\}_{i\in I}$ で生成された $U'_q(\mathfrak{g})$ の部分環とする。

ある $U_q^+(\mathfrak{g})$ と $U_q^-(\mathfrak{g})$ の間の非退化双対型式に対する双対基底 $P_\nu \in U_q^+(\mathfrak{g})$ と $Q_\nu \in U_q^-(\mathfrak{g})$ をとると、

$$R^{\mathrm{univ}}_{M_z,N_w} : M_z \otimes N_w \to N_w \widehat{\otimes} M_z := K[[w/z]] \underset{K[w/z]}{\otimes} N_w \otimes M_z$$

は次のように定義される：

$$R^{\mathrm{univ}}_{M_z,N_w}(u \otimes v) = q^{(\mathrm{wt}(u),\mathrm{wt}(v))} \sum_\nu P_\nu v \otimes Q_\nu u \in N_w \widehat{\otimes} M_z \quad (u \in M, v \in N).$$

R^{univ} は、$U'_q(\mathfrak{g})$ 線形同型を与える。この定義式は無限和なので、形式的冪級数環 $K[[w/z]]$ まで広げて意味を持つ。R^{univ} を、(Drinfeld の) 普遍 R-行列と呼ぶ。

さらに、ある $c_{M,N}(z) \in \mathbf{k}((z))$ で、

$$R^{\mathrm{ren}}_{M_z,N_w} = c_{M,N}(z) R^{\mathrm{univ}} \tag{4.1}$$

が、$M_z \otimes N_w \to N_w \otimes M_z$ をあたえ、かつ $R^{\mathrm{ren}}_{M_z,N_w}|_{z=a,w=b}$ がいかなる $a, b \in K^\times$ に対しても 0 とならないようなものがある。さらに、この $c_{M,N}(z)$ は定数倍を除いて一意的である。$R^{\mathrm{ren}}_{M_z,N_w}$ を renormalized R 行列とよぶ。

この R 行列と affinization を用いて箙 Hecke 環の場合と同様に、次の定理が成り立つ。

既約 $U_q'(\mathfrak{g})$-加群 M は、$M \otimes M$ も既約の時、real と呼ばれる。

定理 4.1 ([2]). *M, N を $\mathcal{C}_\mathfrak{g}$ に属する既約な加群とする。さらに、M か N は real と仮定するとき、*

(i) $\dim \mathrm{Hom}(M \otimes N, N \otimes M) = 1$.

(ii) $\mathbf{r}_{M,N}$ を $\mathrm{Hom}(M \otimes N, N \otimes M)$ の 0 でない元とするとき、$Im(\mathbf{r}_{M,N} \colon M \otimes N \to N \otimes M)$ は、既約で、$M \otimes N$ の *head* であり、また $N \otimes M$ の *socle* でもある。

4.3 既約表現の対に対応した不変量

(4.1) に定義した $c_{M,N}(z)$ は、特殊なクラスの関数となります。

$$\widetilde{p} := q^{2\langle c,\rho\rangle}, \quad \varphi(z) = \prod_{s \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} (1 - \widetilde{p}^s z) \in K[[z]].$$

とおきます。さらに、

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &:= \left\{ f(z) \in K((z))^\times \;\middle|\; f(z)/f(\widetilde{p}z) \in K(z) \right\} \\ &= \left\{ c z^m \prod_{a \in K^\times}^{\text{有限積}} \varphi(az)^{m_a} \;\middle|\; c \in K^\times,\ m \in \mathbb{Z}, m_a \in \mathbb{Z} \right\}\end{aligned}$$

と定義すると、$c_{M,N}(z)$ は $\mathcal{G}$ に属します。

Definition 4.2. 二つの群準同型 Deg, $\mathrm{Deg}^\infty\colon \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ を次にように定義します。

$$\mathrm{Deg}(f(z)) = \sum_{a\in \widetilde{p}^{\,\mathbb{Z}_{\leqslant 0}}} m_a - \sum_{a\in \widetilde{p}^{\,\mathbb{Z}_{>0}}} m_a,$$
$$\mathrm{Deg}^\infty(f(z)) = \sum_{a\in \widetilde{p}^{\,\mathbb{Z}}} m_a.$$

ここに、$\widetilde{p}^S = \{\widetilde{p}^n \mid n \in S\}$ とおきました。

この定義は人工的に見えるかも知れませんが、次の性質を要請すると自然に現れます:

任意の有理関数 $f(z) \in K(z)^\times \subset \mathcal{G}$ に対して、

$$\mathrm{Deg}(f(z)) = \deg_{z=1} f(z), \quad \mathrm{Deg}^\infty f(z) = 0.$$

但し、$\deg_{z=1}$ は、$z = 1$ における零点の位数。

Definition 4.3. $\mathcal{C}_\mathfrak{g}$ に属する既約加群 M, N にたいする不変量 Λ, Λ^∞, $\mathfrak{d}$ を次に様に定義する:

$$\Lambda(M,N) = \mathrm{Deg}\big(c_{M,N}(z)\big) \in \mathbb{Z},$$
$$\Lambda^\infty(M,N) = \mathrm{Deg}^\infty\big(c_{M,N}(z)\big) \in \mathbb{Z},$$
$$\mathfrak{d}(M,N) = \Big(\Lambda(M,N) + \Lambda(N,M)\Big)/2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

$\Lambda(M,N)$ と $\mathfrak{d}(M,N)$ は、箙 Hecke 環で現れた不変量の類似となります。

$\Lambda^\infty(M,N)$ は箙 Hecke 環における $-(\mathrm{wt}(M),\mathrm{wt}(N))$ に対応します。

定理 4.4. L, M, N を既約加群とします。

(i) その時、 $M \otimes N$ の任意の既約部分商 S にたいして、

$$\Lambda^\infty(L,S) = \Lambda^\infty(L,M) + \Lambda^\infty(L,N) \quad \text{かつ} \quad \Lambda^\infty(S,L) = \Lambda^\infty(M,L) + \Lambda^\infty(N,L),$$

$$\Lambda(L,S) \leqslant \Lambda(L,M) + \Lambda(L,N) \quad \text{かつ} \quad \Lambda(S,L) \leqslant \Lambda(M,L) + \Lambda(N,L),$$

$$\mathfrak{d}(S,L) \leqslant \mathfrak{d}(M,L) + \mathfrak{d}(N,L).$$

が成り立つ。

(ii) さらに L が *real,* かつ M か N が *real* と仮定する。そのとき、

$$\Lambda(L, M \nabla N) = \Lambda(L,M) + \Lambda(L,N)$$

は、次のいずれかが成り立つ時成立する*:*

(a) M と N が可換、即ち $M \otimes N \simeq N \otimes M$*,*

(b) L と M が可換。

箙 Hecke 環にはなかった現象として、

$$\Lambda(M,N) = \Lambda(N, \mathscr{D}M)$$

が任意の既約 $U_q'(\mathfrak{g})$ 加群 M, N に対して成り立つ。但し、$\mathscr{D}M$ は M の右双対。

4.4 アフィン量子群に付随した有限型 root 系

不変量 Λ^∞ をもちいて、任意のアフィン量子群に対して、有限 ADE 型の root 系を対応させることができます。

$\mathrm{Irr}(U_q'(\mathfrak{g}))$ を $\mathcal{C}_\mathfrak{g}$ の既約加群の同型類のつくる集合とする。

任意の既約加群 M に対して、$\mathrm{W{\scriptstyle T}}(M)$ を

$$\mathrm{Irr}(U_q'(\mathfrak{g})) \ni N \longmapsto \Lambda^\infty(M,N) \in \mathbb{Z}$$

で定義される $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Irr}(U_q'(\mathfrak{g})), \mathbb{Z})$ の元としよう。$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Irr}(U_q'(\mathfrak{g})), \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}$-加群となるが、$\{\mathrm{W{\scriptstyle T}}(M) \mid M \text{ は既約 } U_q'(\mathfrak{g}) \text{ 加群}\}$ で生成された $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Irr}(U_q'(\mathfrak{g})), \mathbb{Z})$

の部分加群を $\mathsf{Q}(U_q'(\mathfrak{g}))$ とする。すると

$$(\mathrm{W{\scriptstyle T}}(M), \mathrm{W{\scriptstyle T}}(M')) = -\Lambda^\infty(M, M')$$

によって $\mathsf{Q}(U_q'(\mathfrak{g}))$ に内積 $(\bullet, \bullet)\colon \mathsf{Q}(U_q'(\mathfrak{g})) \times \mathsf{Q}(U_q'(\mathfrak{g})) \to \mathbb{Z}$ が入ります。

定理 4.5. この内積は次の性質を持つ。

(i) この内積は正定値。

(ii) $\Delta(U_q'(\mathfrak{g})) := \{\beta \in \mathsf{Q}(U_q'(\mathfrak{g})) \mid (\beta, \beta) = 2\}$ と定義すると、$\Delta(U_q'(\mathfrak{g}))$ は *root* 系である。即ち、$\Delta(U_q'(\mathfrak{g}))$ のある部分集合 $\Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))$ を含み、$\mathsf{Q}_0(U_q'(\mathfrak{g}))$ を $\Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))$ の生成する $\mathsf{Q}(U_q'(\mathfrak{g}))$ の $\mathbb{Z}$ 部分加群とすると、

(a) $\big(\mathsf{Q}_0(U_q'(\mathfrak{g})), \Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))\big)$ は *ADE* 型の *root* 系

(b) $\Delta(U_q'(\mathfrak{g})) = \sqcup_{a \in A} \Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))_a$ と分解する、但し、A は、$K^\times$ のある部分集合で、$\Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))_a = \{\mathrm{W{\scriptstyle T}}(M_a) \mid \mathrm{W{\scriptstyle T}}(M) \in \Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))\}$.

(c) $\mathsf{Q}_0(U_q'(\mathfrak{g}))_a$ を $\Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))_a$ の生成する $\mathbb{Z}$ 部分加群とすると、$\mathsf{Q}(U_q'(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{a \in A} \mathsf{Q}_0(U_q'(\mathfrak{g}))_a$ は $\mathsf{Q}(U_q'(\mathfrak{g}))$ の直交分解。

次の表に、各々のアフィン量子群に対応する root 系を記する。

Type of $\mathfrak{g}$	$A_n^{(1)}$ $(n \geqslant 1)$	$B_n^{(1)}$ $(n \geqslant 2)$	$C_n^{(1)}$ $(n \geqslant 3)$	$D_n^{(1)}$ $(n \geqslant 4)$	$A_{2n}^{(2)}$ $(n \geqslant 1)$	$A_{2n-1}^{(2)}$ $(n \geqslant 2)$	$D_{n+1}^{(2)}$ $(n \geqslant 3)$
対応する root 系 $\Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))$	A_n	A_{2n-1}	D_{n+1}	D_n	A_{2n}	A_{2n-1}	D_{n+1}

Type of $\mathfrak{g}$	$E_6^{(1)}$	$E_7^{(1)}$	$E_8^{(1)}$	$F_4^{(1)}$	$G_2^{(1)}$	$E_6^{(2)}$	$D_4^{(3)}$
対応する root 系 $\Delta_0(U_q'(\mathfrak{g}))$	E_6	E_7	E_8	E_6	D_4	E_6	D_4

文献

[1] Masaki Kashiwara, *On level zero representations of quantum affine algebras*, Duke. Math. J. **112** (2002), 117–175.

[2] Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, Myungho Kim, and Se-jin Oh, *Simplicity of heads and socles of tensor products*, Compos. Math. **151** (2015), no. 2, 377–396.

この論文で初めて定理 3.4, 定理 4.1が証明された。この原型はアフィン量子群の基本表現に対して用いた論法だったが、その後一般的な証明を得ることができた。

[3] Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara and Myungho Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras*, Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 591–685.

この論文で Schur-Weyl 対応により、箙 Hecke 環とアフィン量子群を関係付けた。

[4] ———, *Monoidal categorification of cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), no. 2, 349–426.

箙 Hecke 環をもちいてクラスター代数の categorification を与えた。

[5] Masamki Kashiwara, Myungho Kim, Se-jin Oh, and Euiyong Park, *Localizations for quiver Hecke algebras*, Pure Appl. Math. Q. **17** (2021), no. 4, 1465–1548.

[6] ———, *Monoidal categorification and quantum affine algebras*, Compos. Math. **156** (2020), no. 5, 1039–1077.

[7] ———, *Localizations for quiver Hecke algebras II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **127** (2023), no. 4, 1134–1184.

[8] ———, *Monoidal categorification and quantum affine algebras II*, Invent. Math. **236** (2024), no. 2, 837–924.

この論文で、箙 Hecke 環とアフィン量子群の詳細な関係を明らかにし、$\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ のいろいろな部分モノイダル圏の Grothendieck 環がクラスター代数の構造をもつことを証明している。これまでの、箙 Hecke 環とアフィン量子群に関する、KKOP の論文の集大成とも言える。

[9] ———, *Affinizations, R-matrices and reflection functors*, Adv. Math. **443** (2024), Paper No. 109598, 83 pp.

この論文ではテンソル積の単純性 (定理 3.4,4.1) を一般的な枠組みで議論して

いる。

[10] Masaki Kashiwara, Euiyong Park, *Affinizations and R-matrices for quiver Hecke algebras*, J. Eur. Math. Soc. **20** (2018), no. 5, 1161–1193.

Diophantine method in the O-minimality
(O-minimalityの枠組に現れるディオファントス近似の手法について)

2024年8月代数学シンポジウム

Noriko Hirata-Kohno (平田(河野)典子)

1 概要

O-minimality (順序極小を意味する order-minimality の略) に関するサーベイは沢山ある．例えば

1) van den Dries, Lec Notes series 248, London Math Soc. (1998) [14]

2) A. Wilkie, Sémi. Bourbaki, Astérisque 326 (2009)[29]

3) T. Scanlon, A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic (after Pila,Wilkie and Zannier), Sém. Bourbaki, Astérisque 348 (2012)[26]

4) G. O. Jones and A. Wilkie, O-minimality and Diophantine Geometry, Lec Notes series 421, London Math. Soc. (2015) [16]

5) 川口 周, 城崎代数幾何学シンポジウム, Kyoto 紅 2022-01
http://hdl.handle.net/2433/268258[17]

6) J. Pila, Cambridge Tracts in Math. 228 (2022)[24]

などである．

本稿では，O-minimality の枠組に現れる課題に応用されたディオファントス近似とその証明法について簡潔に述べる．O-minimality という概念が近年に脚光を浴びた理由は，André-Oort 予想の解決に向けて扱いやすい枠組を与えたためと言われる．査読付誌には，正式に掲載されていないにせよ，2022年に投稿された J. Pila, A. N. Shankar, J. Tsimerman (Hélène Esnault, M. Groechenig による付録あり)[25] によって，André-Oort 予想は完全解決されたと言われているが，まだ相当部分が ineffective であると言われる．

残念ながら筆者の非力のため，André-Oort 予想の上記の証明 [25] の詳説は本稿では述べないが，この成果に到るまでのディオファントス近似に負う手法で点の数え上げ問題等における貢献を与えることを，いくつかの典型的な例を辿ることによって紹介したい.

なお O-minimality に関連する研究の一環として，Weizmann Institute の Gal Binyamini 氏，明治学院大学の川島 誠氏と筆者との共同研究において，この枠組を踏襲した点の数え上げを行なっている.

2 Effectivity

Definition 2.1 (Effective). 与えられた情報を用いて有限時間内に終了可能な feasible algorithm によって，対象物が計算できる状態であることを指す.

計算量が非常に大きいものであっても，その計算が理論的に実行可能なものであれば，effective と称する.

Definition 2.2 (高さ). $p/q \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p,q) = 1$ に対して p/q の高さを $H(p/q) := \max\{|p|, |q|\}$ とする. この定義は，数論的な点ではなくとも，絶対値が定められる対象ならば通用する.

2.1 Ineffective な結果

ディオファントス近似の手法のメリットは，対象物を effective に決定できることである. しかしそうでない，即ちまだ ineffective な証明のみが存在する場合も多い. 以下はその代表例である.

Theorem 2.3 (Thue-Siegel-Roth). d 次の実代数的数 α を考える. このとき
$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{H(p/q)^{2+\varepsilon}}$ を満たす $p/q \in \mathbb{Q}$ は有限個である.

Corollary 2.4 (Thue 方程式). $F(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ は同次式で次数 ≥ 3 であり，$F(X,1) = 0$ の根が *distinct*, また $0 \neq \delta \in \mathbb{Z}$ とする. このとき (*Thue-Siegel-Roth* の近似から) 方程式 $F(x,y) = \delta$ の整数解 $x, y \in \mathbb{Z}$ は有限個になる.

$\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が，ある特殊な値であるときに，上記と似ているが effective な結果を与えるディオファントス近似もある. ここで effective とは，以下の q_0 が effective に定まることを意味する. 例えば θ が多重対数のときなどである [12][13].

Definition 2.5 (Padé 近似によるディオファントス近似). θ に依存する $\mu > 0$ が存在して以下を満たす．effective な $\exists q_0 > 0$ が存在し，$\forall p/q \in \mathbb{Q}, \forall q \geq q_0$ に対して

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^\mu}.$$

上記の Thue 方程式の解の有限性であるが， A. Baker 登場前は ineffective 即ち決定できないものであった．W. M. Schmidt の部分空間定理 [27] と呼ばれる，K. F. Roth の近似の多変数版に相当するディオファントス近似があるが，この部分空間定理を経由しなければ証明できないものは，現在でも全て ineffective である．

C. L. Siegel は近似を代数体 K に拡張し, $0 \neq \alpha, \beta \in K$ のときの 2 変数の単数方程式 $\alpha x + \beta y = 1$ ($x, y \in$ 単数群 U_K) の解の有限性を得た．この結果は Baker の対数一次形式によって effective に決定しうる（ただし 3 以上の個数の変数をもつ単数方程式は，まだ ineffective）．つまり単数を有限生成乗法群の元と考え，$\alpha x + \beta y$ を同次式と看做して，因数分解を行うことで，2 変数の Thue 方程式の求解を経由して，Baker の対数一次形式 [3] に持ち込むのである．

このように effective な結果を与える手法を O-minimality の枠組で用いることにより，André-Oort 予想に関連する問題における結果に付加価値を与える例を，以下に述べる．

2.2 対数一次形式

数論的対象を effective に決定するには，現時点でこれが最良の方法であろう．K を $\mathbb{Q}$ 上 d 次の代数体，任意の $x \geq 0$ に対して $\log^+ x = \log\max\{x, 1\}$ とおく．A. Baker の対数一次形式は $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ が乗法的独立 $\Rightarrow$ $1, \log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_n$ が 1 次独立/$\overline{\mathbb{Q}}$ であるが，代数的数の累乗の積の差に対する下記の形がしばしば有用である．

Definition 2.6 (Height (高さ) projective ではない). $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対し，primitive な最小多項式を $a_0 \prod_{j=1}^d (x - \alpha_j) \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 > 0$ として，$\mathrm{h}(\alpha) = \frac{1}{d}\Big(\log a_0 + \sum_{j=1}^d \max\{0, \log|\alpha_j|\}\Big)$, $H(\alpha) = e^{h(\alpha)}$, $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ に対し $H(\underline{x}) = \max\{H(x_1), \cdots, H(x_n)\}$ と定める．

Theorem 2.7 (E. M. Matveev (2000)). $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t \in K \setminus \{0, 1\}$ とする．$\forall b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し，$B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_t|, 3\}, \Theta = \prod_{i=1}^t \eta_i^{b_i} - 1$ とおく．正実数 $V_1, \ldots, V_t \in \mathbb{R}$ を $V_j \geq \max\{dh(\eta_j), |\log\eta_j|, 1\}$ $(j = 1, \ldots t)$ を満たすもの，$V_0 = \prod_{j=1}^t V_j$ とおく．

このとき，$\Theta \neq 0$ ならば以下が成立する．

$$\log|\Theta| > -3 \cdot 30^{t+4}(t+1)^{5.5}d^2V_0(1+\log d)(1+\log(tB)).$$

この肝要な点は，右辺が $\log(B)$ であって，B ではないことである．

3　点の数え上げとディオファントス近似

O-minimality の枠組においてディオファントス近似を用いた，uniform な点の数え上げ証明法を列記する．

1) W. M. Schmidt (1985) 数の幾何学による証明

2) E. Bombieri -J. Pila (1989) Determinant Method：平均値の定理に負う [9]

3) A. J. Wilkie による別証明： Analytic Thue-Siegel に負う (引出し論法)

4) Pila -Wilkie (2006) O-minimal 構造における definable set の点の数え上げ

5) L. Kühne[18] 及び Y. Bilu-D. Masser-U. Zannier[4] による André の定理 (André-Oort 予想の basic case) の対数一次形式による effective 版の証明（Brauer-Siegel による ineffective な部分を回避したもの）

6) 関数体版の代数的独立性に関する Ax-Schanuel の定理による証明などである．

以下，記号を導入する．

Definition 3.1 (Dilation (拡大)). $X \subset \mathbb{R}^n$ を考える．$t \geq 1$ に対し, X の t 倍の拡大を $tX = \{(tx_1, \cdots, tx_n) \in \mathbb{R}^n : \ (x_1, \cdots, x_n) \in X\}$ と定める．

$X(\mathbb{Z}) = X \cap \mathbb{Z}^n$, $X(\mathbb{Q}) = X \cap \mathbb{Q}^n$ とおき，最初に W. M. Schmidt による点の数え上げを紹介しよう．$N \geq 1$, $f \in C^3([0,\ N])$ を real-valued function, $|f(x)| \leq N$，$f''(x)$ が存在して広義単調だが, 少なくとも 1 回は $f''(x) = 0$ となることを仮定する．今，グラフ $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ を考える．

数えたい対象は, 1 辺 $N \geq 1$ の正方形に含まれるグラフ Γ 上の整数点の個数 $\#\Gamma(\mathbb{Z})$ であるが (N に依存) f に無関係な uniform な結果を与えることを目標とする．まず，以下が成立する．

Theorem 3.2 (W. M. Schmidt). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\exists c_1(\varepsilon) > 0$ *(f に無関係な定数)* が存在して次を満たす*:*

$$\#\Gamma(\mathbb{Z}) \leq c_1(\varepsilon)N^{3/5+\varepsilon}.$$

Swinnerton-Dyer (1974) の結果: $\leq c_2(\varepsilon, \Gamma)t^{3/5+\varepsilon}$ を改良したものである，即ち $c_2(\varepsilon, \Gamma)$ は Γ つまり f に依存するが $c_1(\varepsilon)$ は, uniform である．

REMARK 3.3. Schmidt の $c_1(\varepsilon)$ は，絶対定数にはできない (Bombieri-Pila の Appendix に述べられた反例である).

3.1 Bombieri - Pila による Integer Points の数え上げ

$f \in C^D([0,\ N])$, $|f(x)| \leq N$, $|f'(x)| \leq 1$, $f^{(D)} \neq 0$ on $[0,\ N]$ とする．

THEOREM 3.4 (Bombieri - Pila (1989)). *$\varepsilon > 0$ に対して, $\exists c_3(\varepsilon, D) > 0$ が存在して次を満たす:*

$$\#\Gamma(\mathbb{Z}) \leq c_3(\varepsilon, D)N^{1/2+\varepsilon}.$$

W. M. Schmidt によって指数 1/2 で予想されていたものである．さらに次が証明された．

THEOREM 3.5 (Bombieri - Pila). *$f \in C^\infty([0,\ 1])$ が strictly convex ならば*

$$\#t\Gamma(\mathbb{Z}) \leq c_4(\varepsilon, f)t^{1/2+\varepsilon}$$

これは P. Sarnak によって予想されていたものである．但し定数 $c_4(\varepsilon, f)$ は f に依存する． $f(x) = \sqrt{x}$ を考えると exponent は best possible である．

3.2 Bombieri - Pila, analytic transcendental 関数の場合

f を有限の閉区間上の関数として，再び $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ を考える．

THEOREM 3.6 (Bombieri - Pila). *$f(x)$ を real analytic かつ transcendental function と仮定. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\exists c_5(\varepsilon, f) > 0$ が存在して， $\forall t \geq 1$ に対し*

$$\#t\Gamma(\mathbb{Z}) \leq c_5(\varepsilon, f)t^{\varepsilon} \quad \text{が成立する.}$$

証明は effective である．

REMARK 3.7. *“transcendental set”*(後で定義) は few rational points しか含まないという主張が成立するか? という疑問が生ずる．これは通常の数論におけるディオファントス近似ではなく，O-minimality の枠組においてこそ，自然な考察ができるのである．

Remark 3.8. なお，K. Weierstarass 及び P. Stäckel (1895) は，整関数になる transcendental function で代数的数で常に代数的な値をとる例を構成した (K. Mahler の Springer LNM 546 参照).

3.3 Bombieri - Pila による Rational Points の数え上げ

以後は整数点ではなく, 有理点を考える.

Definition 3.9. f を $[0,\ 1] \to \mathbb{R}$ で定められた analytic function とする．そのグラフ上の有理点 $\Gamma(\mathbb{Q}) = \Gamma \cap \mathbb{Q}^2$ を考え，さらに $T \geq 1$ に対して $\Gamma(\mathbb{Q}, T) := \{\underline{x} = (x, y) \in \Gamma(\mathbb{Q}), H(\underline{x}) \leq T\}$ とおく (resp. $\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}, g, T) := \{P \in \Gamma(\overline{\mathbb{Q}}), \max\{\deg x, \deg y\} \leq g, H(\underline{x}) \leq T\}$).

ここで $N(\Gamma, T) := \#\Gamma(\mathbb{Q}, T)$ とおく (resp. $N(\Gamma, g, T) := \#\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}, g, T)$).

Theorem 3.10 (Bombieri - Pila). $f(x)$ を *real analytic transcendental function* と仮定し, グラフ Γ を考える.

任意の $\varepsilon > 0$ をとる．このとき $\exists c_6(\varepsilon, \Gamma) > 0$ が存在して, $\forall T \geq 1$ に対し,

$$N(\Gamma, T) \leq c_6(\varepsilon, \Gamma) T^{\varepsilon} \quad \text{が成立する.}$$

Remark 3.11. $c_6(\varepsilon, \Gamma)$ は Γ に依存．この定数は計算可能である (個数の上界なので quantitative を意味するが O-minimality 周辺の Point counting では, 定数は effective と記述していて，若干の文化の違いがある).

4 Pila-Wilkie (2006) による Rational Points の数え上げ

Jones-Wilkie, Pila の言語に従い, 簡単に O-minimality の言葉を紹介するが, まず結果を先に述べよう.

Theorem 4.1 (Pila-Wilkie). $Z \subset \mathbb{R}^n$ を *O-minimal* 構造における *definable set* とする.

$\varepsilon > 0$ とする. $\exists c_7(Z, \varepsilon) > 0$ が存在して $\forall T \geq 1$ に対して, 以下が成立:

$$N(Z^{trans}, T) \leq c_7(Z, \varepsilon) T^{\varepsilon}.$$

Remark 4.2. これは，transcendental set が few rational points しか含まないと言う主張に相当する，いわゆる Wilkie の予想の始まりにあたるものである．ちなみにこの定数 $c_7(Z,\varepsilon)$ は ineffective である．

以後，対象を $\mathbb{R}^n$ 内で考える．また, 高さとしては (projective ではない) affine 版を常に考える.

4.1 Semi-algebraic set

Definition 4.3 (basic semi-algebraic · semi-algebraic subset). $Z \subset \mathbb{R}^n$ とする．Z が basic semi-algebraic subset とは，**或る**多項式 $P(X) = P(X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, \cdots, X_n]$ に対し, Z が集合 $\{a := (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n : P(a) > 0\}$ として表されるときに言う.

その族 semi-algebraic subset $\mathcal{A}_n$ は以下のように帰納的に定義される:

1. 全ての basic semi-algebraic subset of $\mathbb{R}^n$ は $\mathcal{A}_n$ に属する.
2. もし $X \in \mathcal{A}_n$ ならば $\mathbb{R}^n \setminus X \in \mathcal{A}_n$.
3. もし $X, Y \in \mathcal{A}_n$ ならば $X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{A}_n$ (not infinitely many times).
4. Nothing else is in $\mathcal{A}_n$. つまり Boolean closure.

Remark 4.4. 即ち $\mathcal{A}_n$ は minimal(極小) であり，次のことが知られている．

1. Direct product で閉じている ($X \in \mathcal{A}_n, Y \in \mathcal{A}_m \Longrightarrow X \times Y \in \mathcal{A}_{n+m}$).
2. Projection で閉じている ($X \in \mathcal{A}_{n+m} \Longrightarrow \pi_n^{n+m}(X) \in \mathcal{A}_n$) ：Tarski-Seidenberg の定理に負う証明で，極めて非自明.
3. $X \in \mathcal{A}_n \Longrightarrow \overline{X} \in \mathcal{A}_n$ (この $\overline{X}$ は通常 norm による topological closure).
4. $X \in \mathcal{A}_n \Longrightarrow X^\circ \in \mathcal{A}_n$ (X° は通常の X の内点集合).

4.2 Examples

Remark 4.5. $X \subset \mathbb{R}$ とする. $X \in \mathcal{A}_1 \Longleftrightarrow X$ は有限個の open intervals $\subset \mathbb{R}$ 及び, 有限個の点 $\in \mathbb{R}$ の和集合.

Remark 4.6. $(a,\ b) \subset \mathbb{R}$ は $\mathcal{A}_1$ に属する．また, $[a,\ b] = (a,\ b) \cup \{a\} \cup \{b\} \subset \mathbb{R} \in \mathcal{A}_1$ である.

Definition 4.7 (semi-algebraic function). f を $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の関数とする．そのグラフ $\in \mathbb{R}^{n+1}$ が semi-algebraic set ならば,

f を semi-algebraic function と称する.

いわゆる ordered field を O-minimality の枠組で捉え直すことは L. van den Dries により考察され，uniform な有限性評価が述べられることが多い.

しかし, effectivity はしばしば失われる.

我々はむしろ O-minimality の枠組における証明を可能な限り uniform かつ effective に実行することを考えたい.

4.3 Constructible sets

$\mathbb{C}^n$ に対しては, constructible sets という概念を導入する.

Definition 4.8 (constructible set). $Z \subset \mathbb{C}^n$ Zariski closed set とする．即ち, 或る多項式 $P(z) \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ に対して $Z = Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n := P(z_1, \cdots, z_n) = 0\}$ を考える.

その族 $\mathcal{C}_n =$ 上記の Zariski closed subsets $\subset \mathbb{C}^n$ は以下のように帰納的に定義される:

1. 全ての constructible subset $\subset \mathbb{C}^n$ は $\mathcal{C}_n$ に属する.
2. もし $Z \in \mathcal{C}_n$ ならば $\mathbb{C}^n \setminus Z \in \mathcal{C}_n$.
3. もし $X, Y \in \mathcal{C}_n$ ならば $X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{C}_n$ (not infinitely many times).
4. Nothing else is in $\mathcal{C}_n$ つまり Boolean closure.

Remark 4.9. 即ち $\mathcal{C}_n$ は minimal(極小) である．また，Direct product 及び Projection で閉じている (Chevally の定理に負う).

4.4 Structure/Definable set

Definition 4.10 (Structure). $A \neq$ 空集合を考える．各 $n \geq 1$ に対して A^n の部分集合の族 $\mathcal{S}_n$ が与えられたとき, $\mathcal{S} = \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{S}_n$ を disjoint union とする．$\mathcal{S}$ を structure (on A) と言う.

Definition 4.11 (Definable). Structure $\widetilde{\mathcal{S}} := \bigsqcup_{n\geq 1} \widetilde{\mathcal{S}}_n$ が definable とは，以下のように帰納的に定義されるときに言う．

1. $\mathcal{S}_n \subset \widetilde{\mathcal{S}}_n$. また $X \in \widetilde{\mathcal{S}}_n$ は A^n の部分集合. さらに $a \in A$, $\{a\} \in \widetilde{\mathcal{S}}_1$.
2. 各 $1 \leq i, j \leq n$ に対して集合 $\{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n : a_i = a_j\} \in \widetilde{\mathcal{S}}_n$ である．
3. $X, Y \in \widetilde{\mathcal{S}}_n \Longrightarrow X \cup Y, X \cap Y \in \widetilde{\mathcal{S}}_n$, $X \in \widetilde{\mathcal{S}}_n, Y \in \widetilde{\mathcal{S}}_m \Longrightarrow X \times Y \in \widetilde{\mathcal{S}}_{n+m}$.
4. $X \in \widetilde{\mathcal{S}}_{n+m} \Longrightarrow \pi_n^{n+m}(X) \in \widetilde{\mathcal{S}}_n$.
5. Nothing else is in $\widetilde{\mathcal{S}}$ ($\widetilde{\mathcal{S}}$ に属する集合も definable と呼ぶ).

Remark 4.12. $A = \mathbb{C}$, $\mathcal{S}_n = \{Z(P) : P(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]\}$ のとき，
$\widetilde{\mathcal{S}}_n$ は constructible sets から成る．$\widetilde{\mathcal{S}}_n$ は，$\mathcal{S}_n$ の Boolean closure. また，$A = \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n = \{Z(P) : P(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]\}$ のとき，$\widetilde{\mathcal{S}}_n \supset \overline{\mathbb{Q}}$ である．

4.5 Restricted analytic function and O-minimality

Definition 4.13 (Restricted analytic function). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が restricted analytic 関数とは compact $K \subset \mathbb{R}^n$, real analytic g (open set $\supset K$ で定義) が存在し $f(x) = g(x)$ ($x \in K$), $f(x) = 0$ ($x \notin K$) のときにいう．

Definition 4.14 (O-minimal: semi-algebraic subset の族の拡張). Structure on $\mathbb{R}$ である $\mathcal{S}$ が O-minimal とは，every definable set $X \in \widetilde{\mathcal{S}}_1$ (not for one $\mathcal{S}_1$) が open intervals 及び有限個の点の有限の和集合であるときにいう．

例えば $e^{\overline{x}} = (e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}) \in \mathbb{R}^n$ 及び $A = \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{A}_n^{exp} := \{Z(F) : F(\overline{x}) = P(\overline{x}, e^{\overline{x}})$ for some $P(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}[\overline{x}, \overline{y}]\}$ を考える．また，

$\mathcal{A}_n^{an} := \widetilde{\mathcal{S}}_n$, Boolean closure of $\mathcal{A}_n$ = 全ての restricted analytic functions の semi-algebraic sets を考える．ここで $\mathcal{A}_n^{an,exp} := \mathcal{A}_n^{an} \cup \mathcal{A}_n^{exp}$ とおくと，やっと次の定理が成立する．

Theorem 4.15 (L. van den Dries-C. Miller). $\widetilde{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{A}_1$ が成立する．そして $\mathcal{A}_n^{an}$, $\mathcal{A}_n^{exp}$, $\mathcal{A}_n^{an,exp}$ は *O-minimal* である．

4.6 Algebraic set/Transcendental set

Definition 4.16 (Algebraic or transcendental set). $Z \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $Z^{alg} \subset \mathbb{R}^n$ とは connected, positive dimensional semi-algebraic である全ての subsets $\subset Z$ の和集合とする. $Z^{trans} := Z \setminus Z^{alg}$ とおく.

このとき，いよいよ次の数え上げ定理が成立する.

Theorem 4.17 (Pila-Wilkie, the first version). $Z \subset \mathbb{R}^n$ を *definable set* とする. $\varepsilon > 0$ をとる. このとき $\exists c_7(Z, \varepsilon) > 0$ が存在し, $\forall T \geq 1$ に対して

$$N(Z^{trans}, T) \leq c_7(Z, \varepsilon) T^{\varepsilon}$$

が成り立つ.

この評価は一般的には改良できないが, いくつかの場合には改良できるというのが以下の予想であった. つまり今までの定義の範疇での点の数え上げ問題においては，超越的な点は，少ししか存在しないということである.：

Conjecture 4.18 (Wilkie, 2006). $Z \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^{exp}$ において definable と仮定する.
このとき $\exists$Constants $c_8(Z), c_9(Z) > 0$ Z にのみ依る定数が存在し $\forall T \geq e$ に対し

$$N(Z^{trans}, g, T) \leq c_8(Z) \Big(\log T \Big)^{c_9(Z)}.$$

この結果は，G. Binyamini, D. Novikov, B. Zack [8] により解決された.

Z^{trans} が restricted sub-Pfaffian という条件を満たすときは，定数は effective になるが, 一般の場合は ineffective な定数として残っている（現在調べている最中である）.

では André-Oort 予想におけるディオファントス近似の貢献について，以下に要約する.

5 André-Oort 予想における effective cases

以下の effective cases が対数一次形式などを用いて証明されている.

1. André-Oort 予想 (Pila-Shankar-Tsimerman が最も一般の場合を state している) は部分的に effective であるが，まだ全面的ではない.

2. L. Kühne (2012): modular curve 2 個の直積の場合は effective (最初に André が証明した場合) を 対数一次形式によって証明し直した [18].

3. Bilu-Masser-Zannier (2013) は O-minimality を避け, 対数一次形式で, 最も簡単な場合の André-Oort 予想を effective に証明し直した [4]：その証明は，V: irreducible affine algebraic curve $/\overline{\mathbb{Q}}$ で，座標が CM invariant である無限個の点を含む $\Longrightarrow$ either horizontal or vertical line を含むか, もしくは, V 自身が modular curve $Y_0(n)$ であるかのいずれかに限る，という構想に沿ったものであり，完全に effective に証明した (André の証明は, 一部分が ineffective であった).

4. L. Kühne はこのために, 対数一次形式で $j(\tau_1)+j(\tau_2)=1$ を満たす虚 2 次の τ_1, τ_2 は有限個に限ることを示した [19].

5. Bilu-Masser-Zannier は $j(\tau_1)\times j(\tau_2)=1$ を満たす虚 2 次 τ_1, τ_2 は存在しないことも証明. 対数一次形式に加えて, Puiseux 級数の表示も援用した [4].

筆者らは ineffective な部分を，現在調べている最中である．

6 代数的独立性 (関数体版) の応用との関連

超越的な点があまり多くない，という述べ方ができる枠組で問題を考える状況ならば，超越性や代数的独立性が既知である関数もしくは数に関する定理そのものが，点の数え上げに使えるはずである．

Conjecture 6.1 (Schanuel 予想 (関数体版ではない場合は，$n=1$ 以外は未解決である)). 複素数 $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ を考える．$z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ は $\mathbb{Q}$ 上で 1 次独立を仮定する．このとき, 体 $\mathbb{Q}(z_1,\ldots,z_n,\exp(z_1),\ldots,\exp(z_n))$ の超越次元は次を満たす.

$$tr\ \deg_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z_1,\ldots,z_n,\exp(z_1),\ldots,\exp(z_n))\geq n.$$

Remark 6.2. $n=1$ のときは, Hermite-Lindemann の定理になっているので，$n=1$ の場合のみ証明済みである：$\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ ならば, $\exp(\alpha)\notin\overline{\mathbb{Q}}$.

Theorem 6.3 (Lindemann-Weierstrass (1885, 関数体版ではない場合で，証明済)). 代数的数 $z_1,\ldots,z_n\in\overline{\mathbb{Q}}$ を考え, $z_1,\ldots,z_n\in\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 上で 1 次独立を仮定する．このとき, 体 $\mathbb{Q}(z_1,\ldots,z_n,\exp(z_1),\ldots,\exp(z_n))$ の超越次元は以下の数に等しく,

$$tr\ \deg_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\exp(z_1),\ldots,\exp(z_n))\geq n \text{ を満たす.}$$

Remark 6.4. 驚くべきことかもしれないが，Lindemann-Weierstrass の定理の p 進版は未解決である．

6.1 Ax-Schanuelの定理

以下のAx-Schanuelの定理は，Schanuel予想の関数体版で，証明済である．易しい場合を述べよう．

Theorem 6.5 (Ax-Schanuel (1971, Schanuel予想の関数体版)). $y_1, \ldots, y_n \in t\mathbb{C}[[t]]$ を *formal power series* で,$\mathbb{Q}$ 上で1次独立を仮定する.

このとき, 体 $\mathbb{C}(t)(y_1, \ldots, y_n, \exp(y_1), \ldots, \exp(y_n))$ の超越次元は, 以下を満たす.

$$tr\ \deg_{\mathbb{C}(t)} \mathbb{C}(t)(y_1, \ldots, y_n, \exp(y_1), \ldots, \exp(y_n)) \geq n.$$

このAx-Schanuelには，多くの拡張がある.

O-minimalityの枠組でこの証明をAndré-Oort予想に役立てるには, 微分体はもちろん, 様々な場合に拡張できることが必要であって，最も肝要なmodular関数及びその拡張については, Pila-J. Tsimermanの仕事(j-関数等に関する2016年, 2014年の結果)がある．つまり登場する概念がuniformに扱えるか否か，が鍵であったと言われる（J. Pila, A. N. Shankar, J. TsimermanによるAndré-Oort予想の証明では，この部分を非常に上手に切り抜けた）.

References

[1] Y. André, *G-functions and geometry*, Aspects of Math. E13, Vieweg, 1989.

[2] Y. André, *Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algébrique plane non modulaire*, J. reine angew. Math. 505, (1998), 203–208.

[3] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, 1975, Cambridge Univ. Press.

[4] Y. Bilu, D. Masser and U. Zannier, *An effective "Theorem of André" for CM-points on a plane curve*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 154 (2013), 145–152.

[5] Y. Bilu, L. Kühne, *Linear equations in singular moduli*, Int. Math. Res. Notices, 2020 (21), 7617–7643.

[6] G. Binyamini and D. Novikov. *Wilkie's conjecture for restricted elementary functions*, Ann. of Math. (2), 186(1), (2017), 237–275.

[7] G. Binyamini and D. Novikov. *Complex cellular structures*, Ann. of Math. (2), 190(1), (2019), 145–248.

[8] G. Binyamini, D. Novikov and B. Zack, *Wilkie's conjecture for Pfaffian structures*, Ann. of Math. (2), 199(2), (2024), 795–821.

[9] E. Bombieri and J. Pila, *The number of integral points on arcs and ovals*, Duke Math. J., 59 (2), (1989), 337–357.

[10] Y. Bugeaud, *Linear forms in Logarithms and Applications*, IRMA Lectures in Math. and Theoretical Physics, 28, Europ. Math. Society.

[11] G. V. Chudnovsky, *On the method of Thue-Siegel*, Ann. of Math., 117, (1983), 325–382.

[12] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent?*, Moscow J. Combinatorics and Number Theory, 9, no. 4, (2020), 389–406.

[13] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear Forms in Polylogarithms*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., series 5, 23, no. 3, (2022), 1447–1490.

[14] L. van den Dries, *Tame Topology and O-minimal structures*, 248, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, 1998.

[15] P. Habegger, *Diophantine approximations on definable sets*, Selecta Math. (N.S.), 24(2), (2018), 1633–1675.

[16] G. O. Jones and A. J. Wilkie, *O-minimality and diophantine geometry*, 421, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, 2015.

[17] 川口 周, 城崎代数幾何学シンポジウム, Kyoto 紅 2022-01, http://hdl.handle.net/2433/268258.

[18] L. Kühne, *An effective result of André-Oort type*, Annals Math. 176 (2012), 651–671.

[19] L. Kühne, *Logarithms of algebraic numbers*, J. Théorie de Nombres Bordeaux, 27 (2015), 499–535.

[20] Yu. Nesterenko and P. Phillipon, *Introduction to Algebraic Independence Theory*, Lecture Notes in Math., 1752, Springer.

[21] P. Philippon, *Critères pour l'indepéndance algébrique*, Publications Math. l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 64, (1986), 5–52.

[22] J. Pila, *Integer points on the dilation of a subanalytic surface*, Q. J. Math., 55(2), (2004), 207–223.

[23] J. Pila, *Counting rational points on a certain exponential-algebraic surface*, Ann. Inst. Fourier, 60(2), (2010), 489–514.

[24] J. Pila, *Point-Counting and the Zilber-Pink Conjecture*, Cambridge Tracts in Math., 228, Cambridge, 2022.

[25] J. Pila, A. N. Shankar, J. Tsimerman (Hélène Esnault, M. Groechenig), https://arxiv.org/abs/2109.08788 (2022).

[26] T. Scanlon, A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic (after Pila,Wilkie and Zannier), Sém. Bourbaki, exp. no 1037, Astérisque 348 (2012), 299–315.

[27] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math., 785, 1980, Springer.

[28] M. Waldschmidt, *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups*, *Grund. Math. Wiss.*, 2000, Springer.

[29] A. Wilkie, Sémi. Bourbaki, exp. no 985, Astérisque 326, (2009), 131–142.

[30] A. J. Wilkie, *Rational points on definable sets*, In *O-minimality and diophantine geometry*, 421, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 41–65, Cambridge Univ. Press, 2015.

分岐律の向こうに見える確率的現象
— 特に対称群のスピン表現でのケーススタディ — *

洞　彰人 (HORA Akihito) †

はじめに

有限群の帰納的な系列において, 既約表現の制限と誘導の既約分解 (分岐律) を次々と考えることによって, 無限に延びる分岐グラフが得られる．この由緒正しくも複雑な枝わかれのくり返しをずっと先の方まで眺めたときに何が見えてくるかというのが, 本稿のテーマである．裏表の出方がくり返されるコイン投げは, たいへん単純なモデルであるが, 汲めども尽きぬ味わいもある．コイン投げの枝わかれは Pascal 三角形で記述される．対称群の既約表現の分岐律の場合, 通常表現の分岐グラフは Young グラフと呼ばれ, スピン表現の方はしばしば Schur グラフと呼ばれる．これらのグラフがこれからの話の舞台になる．このような分岐グラフの遠くの状況, すなわち分岐律の漸近挙動を観察するのに, 確率論のさまざまな階層の極限定理が役に立つ．倍率を変えると見える景色も違ってくる．本稿では, もっとも直観的にわかりやすい大数の法則が支配する現象について述べる．講演では, 代数学の研究者にも興味を感じてもらえるように紹介してみようと思ったが, 結果やいかに．なお, 副題にあるスピン表現を扱うことの格別な意義はここでは特になく, たまたま筆者が現在進行形で作業をしているからにすぎない．以下、おおよそ講演の内容に沿って報告をまとめる．

1　序

$\mathbb{C}$ 上の有限次元半単純代数の系列

$$\mathbb{C}1 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

を考える．A_n の既約表現の同値類全体 $\widehat{A}_n$ (のラベルづけ) を $\mathbb{G}_n$ で表す．$\mathbb{G} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{G}_n$ を頂点集合とし, 次の分岐律 (1.1) によって辺のつながりを定めたグラフ (分岐グラフ) を頂点集合と同じ記号 $\mathbb{G}$ で表す．π^γ を $\gamma \in \widehat{A}_n$ に属する A_n の既約表現とする:

$$\mathrm{Res}^{A_n}_{A_{n-1}} \pi^\beta \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{G}_{n-1}} \kappa(\alpha, \beta) \pi^\alpha. \tag{1.1}$$

---

* This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22K03346.

† 北海道大学大学院理学研究院数学部門; hora@math.sci.hokudai.ac.jp

$\alpha \in \mathbb{G}_{n-1}$, $\beta \in \mathbb{G}_n$ に対し, $\kappa(\alpha,\beta) > 0$ のときに $\beta \searrow \alpha$ または $\alpha \nearrow \beta$ と書き, 辺 (α,β) が重み $\kappa(\alpha,\beta)$ をもつとみなす. 制限のかわりに誘導の既約分解を考えてもよいが, いずれにせよ Frobenius の相互律から, 重みは辺の向きによらない.

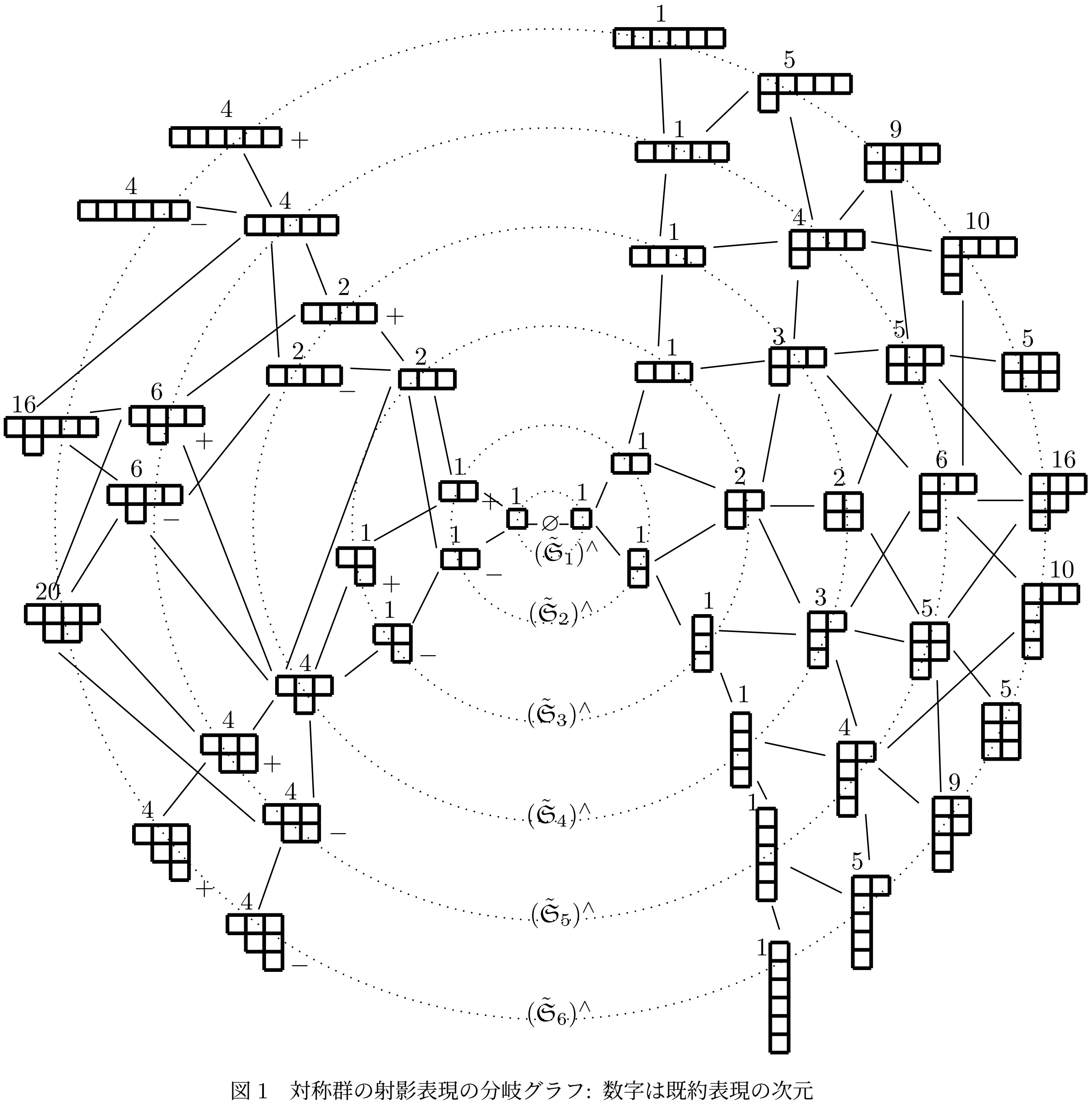


図 1　対称群の射影表現の分岐グラフ: 数字は既約表現の次元

たとえば:

1. $A_n = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ のとき, $\mathbb{G}_n$ は自然数 n の分割全体にとることができ, $\mathbb{G}$ は Young 束 (グラフ) $\mathbb{Y}$ とみなせる.
2. $\{A_n\}$ として岡田代数の系列をとれば, $\mathbb{G}$ は Young–Fibonacci 束 (グラフ) $\mathbb{YF}$ である.

3. 対称群の射影表現を考えて, $\mathfrak{S}_n$ の表現群 (の 1 つ) を $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ で表し, $A_n = \mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{S}}_n]$ とおく. 分岐グラフ (図 1) は, 通常表現の部分 (右半分) は Young グラフと同一であり, スピン表現の部分 (左半分) はしばしば Schur グラフと呼ばれる.
4. $A_n = \mathbb{C}[T^n \rtimes \mathfrak{S}_n]$ (環積) の場合は, 各頂点が複数個 ($\#\widehat{T}$ 個) の Young 図形の組でできるいわゆる multi-diagram モデルになる.

なお, 1., 2., 3. では $\kappa(\alpha, \beta) \in \{0, 1\}$ で無重複となり, 分岐グラフは多重辺をもたない. 一方, 4. で T が非可換群ならば, 多重辺が生じる.

分岐律の向こうに見える風景として, 1 つの大きなテーマは $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$ (帰納極限群) の指標の分類と計算 (指標公式) である. 調和解析の観点からは, これはグラフ $\mathbb{G}$ の Martin 境界の決定と等価である. 本稿の話題は, Young 図形の「形」にこだわった少しマニアックなものであり, A_∞ の指標を浮かび上がらせる研究とは異なる域のスケール極限を扱う (つまり倍率が違う). さらに, 統計力学の視点では, 「動的」なモデルが主眼である.

自然数 n の分割全体 $\{\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ を $\mathcal{P}_n$ で表す. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ のとき, $|\lambda| = n$ と書き, λ のパートの個数 (行数) を $l(\lambda)$ で表す. $\mathcal{P}_n$ の部分集合の厳格分割 (つまりパートの長さがすべて異なる分割) 全体を $\mathcal{SP}_n$ で表す. 分割 λ の Young 図形による表示を $Y(\lambda)$ とし, $Y(\lambda)$ を図 2 左のように xy 平面に陳列する. $y = |x|$ でできた器の中に箱を上から落として積んでいく感じである. 箱の頂点が格子点になる方が好都合なので, 箱の 1 辺の長さを $\sqrt{2}$ にしておく. Young 図形 $Y(\lambda)$ は, 図 2 左の太線部分 (プロファイルと呼ばれる) で特徴づけられ, xy 平面のグラフ $y = Y(\lambda)(x)$ とみなす. 箱 1 つの面積が 2 なので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Y(\lambda)(x) - |x|)\, dx = 2n, \qquad \lambda \in \mathcal{P}_n$$

が成り立つ. 箱数を増やすとともに縦横 $1/\sqrt{n}$ でスケール変換 (正規化) すれば,

$$Y(\lambda)^{\sqrt{n}}(x) := \frac{1}{\sqrt{n}} Y(\lambda)(\sqrt{n}x) \qquad \text{so that} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \big(Y(\lambda)^{\sqrt{n}}(x) - |x|\big)\, dx = 2 \tag{1.2}$$

をみたし, $n \to \infty$ で Young 図形のなんらかの「形状」が残ると期待できる.

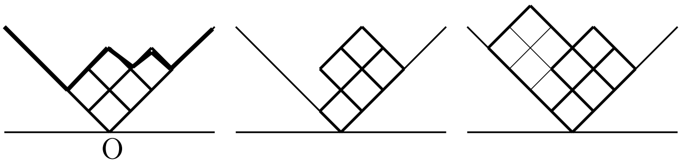


図 2　分割 $\lambda = (3, 2) \in \mathcal{SP}_5$,　左 $Y(\lambda)$,　中 $S(\lambda)$,　右 $D(\lambda)$

Young 図形の $n \to \infty$ での漸近的な挙動としてよく知られている例を 1 つ述べる. 図 3 のグラフは Vershik 曲線と呼ばれ,

$$\Omega_{\mathrm{V}}(x) = \frac{2\sqrt{6}}{\pi} \log\Big(e^{\frac{\pi}{2\sqrt{6}}x} + e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{6}}x}\Big) \tag{1.3}$$

で与えられる. 簡単な計算から, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_{\mathrm{V}}(x) - |x|)\, dx = 2.$

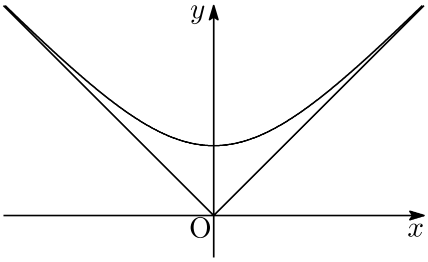


図 3　Vershik 曲線

$\mathcal{P}_n$ 上の一様な確率測度を $M_{\mathrm{U}}^{(n)}$ と書く．これは $\mathcal{P}_n$ からでたらめに 1 つ λ をとりだす試行を与える．このとき, 次の結果が成り立つ (Vershik [16]): $\forall\epsilon > 0$ に対し,

$$M_{\mathrm{U}}^{(n)}\Big(\Big\{\lambda \in \mathcal{P}_n \,\Big|\, \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|Y(\lambda)^{\sqrt{n}}(x) - \Omega_{\mathrm{V}}(x)\big| > \epsilon\Big\}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1.4}$$

つまり, サイズのそろった膨大な数の Young 図形の中からでたらめに 1 個をとりだすと, いつもそれはおおよそ (1.3) のような形をしているということになる．確率的な集中現象を記述する 1 つの形態として, (1.4) のタイプの主張を大数の弱法則 (weak law of large numbers, wLLN) と呼ぶ．本稿に現れる極限定理はすべてこのタイプである．

2　対称群における Plancherel 成長過程

対称群の分岐律にしたがって箱を 1 つずつ積む Young 図形のランダムな成長を考える．$Y(\lambda)$ に箱を 1 個つけ加えて $Y(\mu)$ ができるとき, $\lambda \nearrow \mu$ と書く．誘導表現の既約分解の次元に着目すると,

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}\pi^\lambda \cong \bigoplus_{\mu\in\mathcal{P}_{n+1}:\lambda\nearrow\mu}\pi^\mu, \qquad (n+1)\dim\lambda = \sum_{\mu\in\mathcal{P}_{n+1}:\lambda\nearrow\mu}\dim\mu \tag{2.1}$$

となるので,

$$P^{\uparrow}_{\lambda\mu} = \frac{\dim\mu}{(|\lambda|+1)\dim\lambda}, \qquad \lambda \nearrow \mu \tag{2.2}$$

で定義される行列 $P^{\uparrow}$ の成分が λ から μ への推移確率を与える．したがって, (2.2) は分割全体 $\mathcal{P} := \bigsqcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n$ あるいは Young 図形全体 $\mathbb{Y} := \bigsqcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Y}_n$ の上の Markov 連鎖を定める．ただし, $\mathcal{P}_0 := \{\varnothing\}$, $\mathbb{Y}_0 := \{\varnothing\}$．各 n において Young 図形を $1/\sqrt{n}$ 圧縮すれば, (1.2) により, 面積は 2 に保たれる．

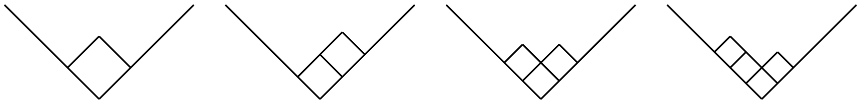


図 4　成長と圧縮 $(1/\sqrt{n})$　$n = 1, 2, 3, 4$

講演では, Markov 連鎖の超ミニコースとして次の事実を説明した．可算集合 S 上の Markov 連鎖は, $\{0, 1, 2, \dots\}$ を離散的な時間パラメーターにもつ S 値の確率変数の列 $\{Z_k\}$ で表され, Z_k は

S 上を (ランダムに) 動く点の時刻 k での位置を示すと解釈される. Markov 連鎖は, 初期分布と呼ばれる S 上の確率 $\mu = (\mu_x)_{x\in S}$ と推移行列と呼ばれる確率行列 $P = (p_{xy})_{x,y\in S}$ の 2 つのデータから決まる. ここで,

$$\mu_x \geqq 0, \quad \sum_{x\in S} \mu_x = 1; \qquad p_{xy} \geqq 0, \quad \sum_{y\in S} p_{xy} = 1.$$

決まり方は, 条件つき確率の記号 $\mathbb{P}(A \,|\, B)$ (後ろの事象が条件) を用いて

$$\mathbb{P}(Z_0 = x) = \mu_x, \quad \mathbb{P}(Z_{k+1} = y \,|\, Z_k = x) = p_{xy}$$

で与えられる. このとき, 時刻 k での分布は行列の積によって計算される (μ は横ベクトル):

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z_1 = y, Z_0 = x) = \mathbb{P}(Z_0 = x)\mathbb{P}(Z_1 = y \,|\, Z_0 = x) = \mu_x p_{xy}, \\ &\mathbb{P}(Z_2 = z, Z_1 = y, Z_0 = x) = \mathbb{P}(Z_1 = y, Z_0 = x)\underbrace{\mathbb{P}(Z_2 = z \,|\, Z_1 = y, Z_0 = x)}_{\text{未来 } (Z_2) \text{ が過去 } (Z_0) \text{ に依存しない}} \\ &= \mu_x p_{xy}\,\mathbb{P}(Z_2 = z \,|\, Z_1 = y) = \mu_x p_{xy} p_{yz}. \end{aligned}$$

したがって帰納的に

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z_k = x_k, Z_{k-1} = x_{k-1}, \cdots, Z_1 = x_1, Z_0 = x_0) = \mu_{x_0} p_{x_0x_1} \cdots p_{x_{k-1}x_k}, \\ &\mathbb{P}(Z_k = x) = \sum_{x_0,\cdots,x_{k-1}\in S} \mu_{x_0} p_{x_0x_1} \cdots p_{x_{k-1}x} = (\mu P^k)_x. \end{aligned} \tag{2.3}$$

定常状態は不変分布 ν_{inv} によって記述される: $\nu_{\mathrm{inv}} = \nu_{\mathrm{inv}} P$. Markov 連鎖の定常状態への収束 (漸近挙動) がしばしば問題になる:

$$\mu P^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \nu_{\mathrm{inv}}? \qquad \text{How ?}$$

さて, $\mathbb{Y}$ ($\cong \mathcal{P}$) 上の Markov 連鎖 $\{Z_k\}_{k\in\{0,1,2,\cdots\}}$ として, 初期分布 $\mu = \delta_\varnothing$ と (2.2) の推移行列 $P = P^\uparrow = (P^\uparrow_{\lambda\mu})$ から定まるものを考える. (2.3) によって

$$\mathbb{P}(Z_k = \lambda) = (\delta_\varnothing P^\uparrow)_\lambda = \begin{cases} (\dim\lambda)^2/k!, & |\lambda| = k \\ \ \ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.4}$$

を得る. 実際, λ までの経路 $\varnothing = \lambda_0 \nearrow \lambda_1 \nearrow \cdots \nearrow \lambda_k = \lambda$ によらず $\prod_{j=1}^k P^\uparrow_{\lambda_{j-1}\lambda_j} = \dfrac{\dim\lambda}{k!}$ となり, 経路は $\dim\lambda$ 個ある. (2.4) の確率分布は Plancherel 測度と呼ばれ, 対称群に関わる調和解析で頻繁に登場する. あらためて $\mathcal{P}_n$ 上の Plancherel 測度 $M^{(n)}_{\mathrm{Pl}}$ とは

$$M^{(n)}_{\mathrm{Pl}}(\{\lambda\}) = \frac{(\dim\lambda)^2}{n!}, \qquad \lambda \in \mathcal{P}_n. \tag{2.5}$$

一様分布 $M^{(n)}_{\mathrm{U}}$ に関する (1.4) と同様に, Plancherel 測度 $M^{(n)}_{\mathrm{Pl}}$ に関しても次のような大数の法則が成立する (Vershik–Kerov [17], Logan–Shepp [13]): $\forall\epsilon > 0$ に対し,

$$M^{(n)}_{\mathrm{Pl}}\left(\left\{\lambda \in \mathcal{P}_n \,\middle|\, \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|Y(\lambda)^{\sqrt{n}}(x) - \Omega_{\mathrm{VKLS}}(x)\right| > \epsilon\right\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2.6}$$

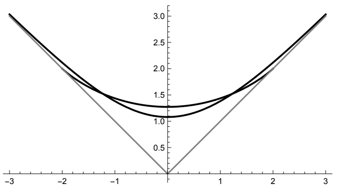


図 5　Vershik–Kerov–Logan–Shepp 曲線 (2.7) と Vershik 曲線 (1.3)

ただし,

$$\varOmega_{\mathrm{VKLS}}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\Bigl(x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}\Bigr), & |x|\leqq 2\\ |x|, & |x|>2\end{cases} \tag{2.7}$$

は Vershik–Kerov–Logan–Shepp 曲線と呼ばれる C^1 級の曲線で, $\varOmega=\varOmega_{\mathrm{VKLS}}$ は次式をみたす:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\varOmega(x)-|x|)\,dx=2,\quad \varOmega'(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}\ (|x|\leqq 2),\quad \varOmega''(x)=\frac{2}{\pi\sqrt{4-x^2}}\ (|x|<2).$$

対称群にまつわる漸近的表現論についての情報を得るには, [11] がよい. Young 図形の形状 (とその極限移行) をとらえる道具として, その著者にちなんだ Kerov 推移測度が有用である ([4] に解説あり). $\lambda\in\mathcal{P}$ に対し, $Y(\lambda)$ のプロファイルの谷座標 (x_i) と山座標 (y_i) は

$$x_1<y_1<\cdots<y_{r-1}<x_r,\qquad \sum_{i=1}^{r}x_i=\sum_{i=1}^{r-1}y_i$$

をみたす. そうすると, 有理関数の部分分数分解

$$\frac{(z-y_1)\cdots(z-y_{r-1})}{(z-x_1)\cdots(z-x_r)}=\frac{w_1}{z-x_1}+\cdots+\frac{w_r}{z-x_r},\qquad z\in\mathbb{C}$$

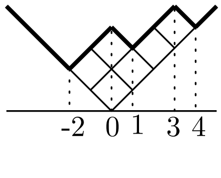
において $w_i>0,\ \sum_{i=1}^{r}w_i=1$ が成り立つので, $\mathbb{R}$ 上の確率測度

$$\mathfrak{m}_{Y(\lambda)}=\sum_{i=1}^{r}w_i\delta_{x_i}\qquad (x_i\text{に重み }w_i) \tag{2.8}$$

が得られる. (2.8) を λ の Kerov 推移測度という. $\lambda\nearrow\mu$ のとき, 箱 μ/λ のコンテントを $c(\mu/\lambda)$ とおくと, $c(\mu/\lambda)$ は $Y(\lambda)$ の谷座標になる. フック公式を用いて

$$\mathfrak{m}_{Y(\lambda)}(\{c(\mu/\lambda)\})=\frac{\dim\mu}{(|\lambda|+1)\dim\lambda} \tag{2.9}$$

を示すことができる. (2.9) は (2.2) の $P^{\uparrow}_{\lambda\mu}$ に一致している.



$$\frac{z(z-3)}{(z+2)(z-1)(z-4)}=\frac{5/9}{z+2}+\frac{2/9}{z-1}+\frac{2/9}{z-4}$$

$$\mathfrak{m}_{Y(\lambda)}=\frac{5}{9}\delta_{-2}+\frac{2}{9}\delta_1+\frac{2}{9}\delta_4$$

図 6　$\lambda=(4,2)$ のときの $Y(\lambda)$ のプロファイルと推移測度 $\mathfrak{m}_{Y(\lambda)}$

3　対称群のスピン表現

本稿では, スピン表現に関する用語や記号はおおむね [2] にしたがう. 有限群 G に対して G の表現群と呼ばれる有限群 $\widetilde{G}$ が存在し, G の射影表現 (G から $PGL(V)$ への準同型) は $\widetilde{G}$ の線形表現にもちあがる. $\widetilde{G}$ は G の中心拡大である:

$$\{e\} \longrightarrow Z \longrightarrow \widetilde{G} \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} G \longrightarrow \{e\}.$$

$n \geqq 4$, $n \neq 6$ ならば, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は 2 つの表現群をもつ. 生成元 $z, r_1, \cdots, r_{n-1}$ と関係式

$$z^2 = e, \quad zr_i = r_i z, \quad r_i^2 = e, \quad (r_i r_{i+1})^3 = e, \quad r_i r_j = z r_j r_i \ (|i-j| \geqq 2) \tag{3.1}$$

によって定まる $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ は, そのうちの 1 つである. $\Phi(r_i)$ は $\mathfrak{S}_n$ の隣接互換 s_i である. もう 1 つの $\widetilde{S}_n$ は, 生成元 $z, r'_1, \cdots, r'_{n-1}$ と関係式

$$z^2 = e, \quad zr'_i = r'_i z, \quad r'^2_i = z, \quad (r'_i r'_{i+1})^3 = z, \quad r'_i r'_j = z r'_j r'_i \ (|i-j| \geqq 2)$$

によって定まる. 両者の既約表現には「(r'_k の表現行列) $= i$(r_k の表現行列)」という対応があるので, 一方のみ扱えば十分である. 本稿では $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ を扱う. 中心元 z の作用は id または $-id$ であり, 前者の場合を通常表現, 後者の場合をスピン表現と呼ぶことにする. $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ の既約表現の同値類は

$$(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge = (\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{ord}} \sqcup (\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}} \tag{3.2}$$

と分けられる. $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{ord}}$ は $\mathfrak{S}_n^\wedge$ と同一視され, n の分割全体 $\mathcal{P}_n$ でパラメトライズされる. $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}$ の元はおおよそ n の厳格分割に対応するが, 自己同伴でない (つまり符号表現をかければ同値でなくなる) 場合は同値でない 2 つにわかれる. 今,

$$\mathcal{SP}_n^+ = \{\lambda \in \mathcal{SP}_n \,|\, n - l(\lambda) \text{ が偶数 }\}, \quad \mathcal{SP}_n^- = \{\lambda \in \mathcal{SP}_n \,|\, n - l(\lambda) \text{ が奇数 }\}$$

とおく. 集合 $\{(\lambda, \gamma) \,|\, \lambda \in \mathcal{SP}_n,\ \gamma = \pm 1\}$ を「$(\lambda, 1) \sim (\lambda, -1) \iff \lambda \in \mathcal{SP}_n^+$」という関係 $\sim$ で割ったものが, $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}$ をパラメトライズする. このとき, [15] にちなんで (λ, γ) を $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ のスピン既約表現の Nazarov パラメータと呼ぶ. 図 1 では, (3.2) に対応して右半分が $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{ord}}$, 左半分が $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}$ を表示している. (λ, γ) に対応する既約表現を $\tau_{\lambda,\gamma}$ と書くことにする. また, 記号として $\lambda \searrow \mu \iff \mu \nearrow \lambda$ とする. λ が長さ 1 の行をもつとき, それをとりのぞいたものを λ^- で表す. 対称群のスピン既約表現の分岐律は, 次のようにまとめられる (図 1 参照):

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathcal{SP}_n^+, \qquad & \mathrm{Res}^{\widetilde{\mathfrak{S}}_n}_{\widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1}} \tau_{\lambda,\pm 1} \cong \bigoplus_{\mu \in \mathcal{SP}_{n-1}^- :\, \lambda \searrow \mu} (\tau_{\mu,1} \oplus \tau_{\mu,-1}) \ \oplus \delta_{1,\lambda_{l(\lambda)}} \tau_{\lambda^-,\pm 1}\,; \\
\lambda \in \mathcal{SP}_n^-, \qquad & \mathrm{Res}^{\widetilde{\mathfrak{S}}_n}_{\widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1}} \tau_{\lambda,1} \cong \bigoplus_{\mu \in \mathcal{SP}_{n-1}^+ :\, \lambda \searrow \mu} \tau_{\mu,\pm 1} \ \oplus \delta_{1,\lambda_{l(\lambda)}} \tau_{\lambda^-,1}\,, \\
& \mathrm{Res}^{\widetilde{\mathfrak{S}}_n}_{\widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1}} \tau_{\lambda,-1} \cong \bigoplus_{\mu \in \mathcal{SP}_{n-1}^+ :\, \lambda \searrow \mu} \tau_{\mu,\pm 1} \ \oplus \delta_{1,\lambda_{l(\lambda)}} \tau_{\lambda^-,-1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$\mathfrak{S}_n$ の群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の元

$$J_k = (1\ k) + (2\ k) + \cdots + (k-1\ k), \qquad J_1 = 0$$

は Jucys–Murphy 元と呼ばれ, 対称群の表現論を展開する上で重要な役割を演じる. 特に, 分岐律が Jucys–Murphy 元の作用のスペクトル分解としてとらえられる. 対称群の Jucys–Murphy 元のスピン版を導入しよう ([12] 参照).

(3.1) の生成元を用いて $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ における互換を

$$[i\ j] = z^{j-i-1} r_{j-1} \cdots r_{i+1} r_i r_{i+1} \cdots r_{j-1} = z[j\ i], \qquad 1 \leqq i < j \leqq n$$

で定める. r-サイクルは

$$[i_1\ \cdots\ i_r] = [i_{r-1}\, i_r] \cdots [i_2\, i_r][i_1\, i_r], \qquad 1 \leqq i_1, i_2, \ldots, i_r \leqq n$$

とする. そして $\mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{S}}_n]$ の Jucys–Murphy 元を

$$\widetilde{J}_k = [1\ k] + [2\ k] + \cdots + [k-1\ k] \quad (2 \leqq k \leqq n), \qquad \widetilde{J}_1 = 0 \tag{3.4}$$

で定める. Jucys–Murphy 元は次の性質をもつ:

- $\widetilde{J}_k \widetilde{J}_l = z \widetilde{J}_l \widetilde{J}_k \quad (k \neq l)$,
- $\widetilde{J}_k^2$ と $\widetilde{J}_l^2$ が可換,
- r_i と $\widetilde{J}_k^2$ が可換 $\quad (k \neq i,\ i+1)$.

分岐律との関係を見るために,

$$\Gamma_{\lambda,\gamma} = \{(\mu,\delta) \in (\widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1})^\wedge_{\text{spin}} \,|\, (\lambda,\gamma) \searrow (\mu,\delta)\}, \qquad (\lambda,\gamma) \in (\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\text{spin}}$$

とおく. $(\lambda,\gamma) \in (\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\text{spin}}$ に対応する既約表現 (の表現空間) を $V_{\lambda,\gamma}$ とすると,

$$V_{\lambda,\gamma} = \bigoplus_{(\mu,\delta)\in\Gamma_{\lambda,\gamma}} W_{\mu,\delta}, \qquad W_{\mu,\delta} \cong V_{\mu,\delta} \qquad (\lambda \in \mathcal{SP}_n,\ \mu \in \mathcal{SP}_{n-1}).$$

このとき, 作用素 $\tau_{\lambda,\gamma}(\widetilde{J}_n^2)$ は各 $W_{\mu,\delta}$ 上ではスカラー $\dfrac{1}{2} c(\lambda/\mu)\big(c(\lambda/\mu)+1\big)$ で作用する. $c(\lambda/\mu)$ は箱 λ/μ のコンテントであった. このことから, Kerov 推移測度との関係を導くことができる.

$\mathfrak{S}_n$ の場合は Biane [1] による次の結果が成り立つ ([4] にも解説あり): $\mathfrak{S}_n$ の外を消す (0 に写す) 線型作用素 $E : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ を考えて

$$\frac{\chi^\lambda(E J_{n+1}^k)}{\dim \lambda} = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{n+1}\,:\,\mu \searrow \lambda} c(\mu/\lambda)^k \mathfrak{m}_{Y(\lambda)}\big(\{c(\mu/\lambda)\}\big) = M_k(\mathfrak{m}_{Y(\lambda)}) \qquad (\lambda \in \mathcal{P}_n,\ k \in \mathbb{N})$$

ただし, M_k は測度の k 次モーメントを表す: $M_k(\mathfrak{m}_{Y(\lambda)}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^k\, \mathfrak{m}_{Y(\lambda)}(dx)$.

$\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ の場合, Kerov 推移測度を考えるには, 厳格分割 $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ のシフト対称図形 (またはダブル) と呼ばれる $D(\lambda) \in \mathbb{Y}_{2n}$ を導入するのが便利である. $S(\lambda)$ から $D(\lambda)$ を作る方法は, 図 7(図 2 の

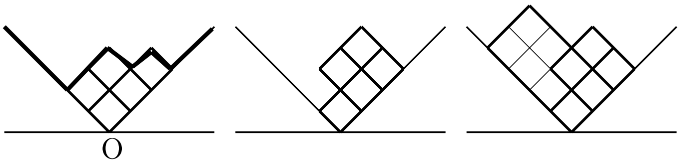


図 7　分割 $\lambda=(3,2)\in\mathcal{SP}_5$,　左 $Y(\lambda)$, 中 $S(\lambda)$, 右 $D(\lambda)$

再掲) 右図から類推してほしい. [3] 参照. ただし, [3] にある定義とは左右の貼りあわせが少しずれている. $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ の外を消す作用素を $\widetilde{E}:\mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{S}}_{n+1}]\longrightarrow\mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{S}}_n]$ とする. 分岐律 (3.3), Jucys–Murphy 作用素のスペクトル分解, 既約表現の次元 $\dim(\lambda,\gamma)$ に関するフック公式のスピン版などを用いて, 次の等式が示される.

命題 3.1 ([8])　$\lambda\in\mathcal{SP}_n$, $k\in\mathbb{N}$ に対し, (3.4) の Jucys–Murphy 元 $\widetilde{J}_{n+1}\in\mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{S}}_{n+1}]$ は

$$\frac{\chi^{(\lambda,\gamma)}\bigl(\widetilde{E}\widetilde{J}_{n+1}^{\,2k}\bigr)}{\dim(\lambda,\gamma)}=\sum_{\mu\in\mathcal{SP}_{n+1}:\,\mu\searrow\lambda}\Bigl(\frac{c(\mu/\lambda)\bigl(c(\mu/\lambda)+1\bigr)}{2}\Bigr)^k\mathfrak{m}_{D(\lambda)}\bigl(\{c(\mu/\lambda),-c(\mu/\lambda)-1\}\bigr) \tag{3.5}$$

をみたす.

(3.5) の右辺は, $D(\lambda)$ のプロファイルを $1/\sqrt{2}$ 縮小したもの ((1.2) 参照) の推移測度 $\mathfrak{m}_{D(\lambda)^{\sqrt{2}}}$ の $2k$ 次モーメントにだいたい等しい. $D(\lambda)$ が左右対称でないので, 少しずれる.

Plancherel 測度に関する大数の法則 (2.6) のスピン版を考えよう. $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}$ 上の確率 M と $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$ 上の正規化されたスピン中心的正定値関数 f とが

$$f(x)=\sum_{\xi\in(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}}M(\{\xi\})\frac{\chi^\xi(x)}{\dim\xi} \tag{3.6}$$

によって対応する. ただし, 関数 f がスピンであるとは, $f(zx)=-f(x)$ をみたすことを意味し, 正規化は $f(e)=1$ のことである. (3.6) は f の Fourier 展開にほかならない. 表現論的なアンサンブルでは, 確率測度よりもむしろ (3.6) でつながった正定値関数が明示的にわかっていることも多い. 今, n に依存した確率の列 $\{M^{(n)}\}$ あるいは関数の列 $\{f^{(n)}\}$ があるとし, $M^{(n)}$ に関する期待値を $\mathbb{E}^{(n)}$ で表すと, (3.5) と (3.6) から,

$$\frac{1}{n^k}f^{(n)}\bigl(\widetilde{E}\tilde{J}_{n+1}^{\,2k}\bigr)\fallingdotseq\mathbb{E}^{(n)}\Bigl[M_{2k}\bigl(\mathfrak{m}_{D(\lambda)^{\sqrt{2n}}}\bigr)\Bigr] \tag{3.7}$$

が得られる. このアンサンブルでしかるべき大数の法則が成り立つとすれば, $D(\lambda)^{\sqrt{2n}}$ が $n\to\infty$ で極限形状 ω に収束し, $\mathfrak{m}_\omega$ の $2k$ 次モーメントが (3.7) の右辺の極限値として計算される. 一方, (3.7) の左辺については, $\widetilde{E}\tilde{J}_{n+1}^{\,2k}$ を共役類で展開し, 関数 $f^{(n)}$ の情報や $\widetilde{\mathfrak{S}}_{n+1}$ の共役類の構造を用いた組合せ論的考察が機能する可能性がある.

例として, スピン Plancherel 測度を見てみよう. $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}$ 上の Plancherel 測度と, 対応する $\widetilde{\mathfrak{S}}_n$

上のスピン正定値関数は

$$M^{(n)}_{\mathrm{Pl,spin}}\bigl(\{(\lambda,\gamma)\}\bigr)=\frac{\{\dim(\lambda,\gamma)\}^2}{n!}\quad\longleftrightarrow\quad f^{(n)}(x)=\begin{cases}1, & x=e\\ -1, & x=z\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

で与えられる．このとき, スピン Plancherel 測度に対する次の大数の弱法則が成り立つ (Ivanov [9], [10]; Matsumoto–Śniady [14]): $\forall\epsilon>0$,

$$M^{(n)}_{\mathrm{Pl,spin}}\Bigl(\Bigl\{(\lambda,\gamma)\in(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}\Bigm|\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|D(\lambda)^{\sqrt{2n}}(x)-\Omega_{\mathrm{VKLS}}(x)\bigr|>\epsilon\Bigr\}\Bigr)\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{3.8}$$

Ω_{VKLS} は (2.7) のとおり．意外にも, 極限形状は通常表現と同じ Ω_{VKLS} (の右半分) である．

4 制限誘導過程 — 通常, スピン

本稿の主眼である動的なモデルに進もう．(2.1) を有限群 G とその部分群 H に一般化する．$\xi\in\widehat{G}$ と $\eta\in\widehat{H}$ に対して $[\mathrm{Res}^G_H\xi:\eta]=[\mathrm{Ind}^G_H\eta:\xi]=c_{\xi\eta}$ とおくと,

$$\mathrm{Res}^G_H\xi\cong\bigoplus_{\eta\in\widehat{H}}[c_{\xi\eta}]\,\eta,\qquad \mathrm{Ind}^G_H\eta\cong\bigoplus_{\xi\in\widehat{G}}[c_{\xi\eta}]\,\xi.$$

この既約分解に付随して 2 つの確率行列 $P^\downarrow=(P^\downarrow_{\xi\eta})_{\xi,\eta}$, $P^\uparrow=(P^\uparrow_{\eta\xi})_{\eta,\xi}$:

$$P^\downarrow_{\xi\eta}=\frac{c_{\xi\eta}\dim\eta}{\dim\xi},\qquad P^\uparrow_{\eta\xi}=\frac{c_{\xi\eta}\dim\xi}{[G:H]\dim\eta} \tag{4.1}$$

が生じる．その積 $P=P^\downarrow P^\uparrow$ も確率行列であり, P を推移確率行列にもつ $\widehat{G}$ 上の Markov 連鎖が考えられる．これを制限誘導連鎖と呼ぶことにする (かわりに $P^\uparrow P^\downarrow$ なら $\widehat{H}$ 上の誘導制限連鎖). $\widehat{G}$ 上の Plancherel 測度 $M_{\mathrm{Pl}}(\{\xi\})=(\dim\xi)^2/|G|$ (対称群では (2.5)) は P からできるこの Markov 連鎖の不変分布になっている．

$G=\widetilde{\mathfrak{S}}_n$, $H=\widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1}$ のとき, P はブロック対角行列

$$P=\begin{pmatrix}P_{\mathrm{ord}} & O\\ O & P_{\mathrm{spin}}\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

であることがわかり, P_{ord} は $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{ord}}$ ($\cong\mathcal{P}_n\cong\mathbb{Y}_n$) 上の Markov 連鎖 $\{Z^{(n)\,\mathrm{ord}}_k\}_{k\in\{0,1,2,\dots\}}$, P_{spin} は $(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}$ 上の Markov 連鎖 $\{Z^{(n)\,\mathrm{spin}}_k\}_{k\in\{0,1,2,\dots\}}$ をそれぞれ誘導する．

これらはともに, 時刻 $k\to\infty$ で分布が Plancherel 測度に収束する：

$$\mathbb{P}(Z^{(n)}_k=\xi)\xrightarrow[k\to\infty]{}M^{(n)}_{\mathrm{Pl}}(\{\xi\}),\qquad \xi\in(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge.$$

一方, 大数の法則 (2.6) と (3.8) から, 通常表現・スピン表現ともに, サイズ $n\to\infty$ での極限形状 Ω_{VKLS} への収束

$$Y(\lambda)^{\sqrt{n}},\ D(\lambda)^{\sqrt{2n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\Omega_{\mathrm{VKLS}}\qquad\qquad (M^{(n)}_{\mathrm{Pl}}\ \text{に関する確率収束})$$

がわかっている．そうすると, n (系の大きさ) と k (時間) のバランスを保ったスケール極限を考察することにより, 途中の時刻の極限形状がつかまるのではないかという問が生じる．そのためには, Markov 連鎖を連続時刻 s に修正したモデル (Markov 過程) を扱う方が便利なので, その要領を簡単に紹介する．直観的には, Markov 連鎖が推移行列で指定される推移確率にしたがってジャンプするタイミングを, 時刻 $0, 1, 2, \ldots$ ではなく, 連続な待ち時間を導入してランダムにしてやればよい．独立な確率変数列で, Markov 連鎖 $\{Z_k\}$ とも独立かつそれぞれが同一の指数分布にしたがうような列 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ を用意する．j 回めのジャンプまでの待ち時間を $\tau_1 + \cdots + \tau_j$ とし, 図 8 のような階段関数を標本にもつ確率過程 $\{N_s\}_{s \geqq 0}$ ができる．$\{N_s\}$ を Poisson 過程と呼ぶ．各 N_s は Poisson 分布にしたがう:

$$\mathbb{P}(N_s = k) = \frac{e^{-s} s^k}{k!}, \qquad k \in \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

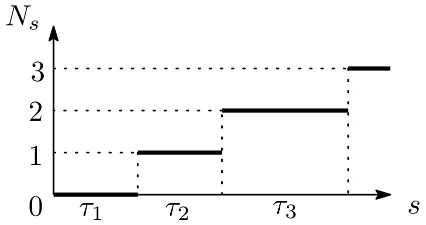


図 8　Poisson 過程 N_s の標本

そうして $s \geqq 0$ に対して $X_s = Z_{N_s}$ とおけば, $\{X_s\}_{s \geqq 0}$ が求める連続時刻の Marov 過程である．なお, 待ち時間の分布を指数分布としたのは, Markov 性を得るためには必然であった．もとの Markov 連鎖 $\{Z_k\}$ を定めた初期分布 μ と推移行列 P のデータを用いて, Markov 過程 $\{X_s\}$ の時刻 s における分布が

$$\mathbb{P}(X_s = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{N_s} = x, N_s = k) = \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu P^k)_x \frac{e^{-s} s^k}{k!} = (\mu e^{s(P-I)})_k$$

で与えられる．I は単位行列であり, μ は横ベクトル扱いである．

さて, (4.1), (4.2) から定まる制限誘導連鎖をサイズ n も明示して $\{Z_k^{(n)}\}_{k \in \{0,1,2,\ldots\}}$ と書き, 時刻に Poisson 過程 N_s を代入して $X_s^{(n)} = Z_{N_s}^{(n)}$ によって制限誘導過程 $\{X_s^{(n)}\}_{s \geqq 0}$ を考える．通常表現あるいはスピン表現上だけで考えるときは, $X_s^{(n)\,\mathrm{ord}}$ や $X_s^{(n)\,\mathrm{spin}}$ で表す．$X_s^{(n)}$ の分布を $M_s^{(n)}$ とする： $\mathbb{P}(X_s^{(n)} = \xi) = M_s^{(n)}(\{\xi\})$. 系のサイズを無限大にもっていったときに, 大数の法則によって動的な極限形状への集中が起こるかどうかを次のように定式化する.

解釈　t を巨視的時刻とし, s を微視的時刻として, $s = tn$ のもとで t を固定して $n \to \infty$ の極限をとる．空間方向は $1/\sqrt{n}$ の縮尺なので, 拡散的なスケール極限と言える．もし集中現象が起これば, t に依存した極限形状 $\omega = \omega(t, x)$ が得られるであろう．こうして, 微視的には Markov 過程で記述されるランダムな運動が, スケール極限をとおして, 巨視的には決定論的な時間発展として観察されることになる.

定理 4.1（[5], [6], [7], [8] **ただし, 以下の主張は若干不正確**）　制限誘導過程 $\{X_s^{(n)}\}_{s\geqq 0}$ において $X_s^{(n)}$ の分布を $M_s^{(n)}$ とする．初期時刻 $t=0$ で次の状況を仮定する．

仮定　初期分布 $M_0^{(n)}$ に関して大数の法則が成り立つとする：　$\forall\epsilon>0$ に対し,

$$M_0^{(n)\,\mathrm{ord}}\left(\left\{\lambda\in(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{ord}}\;\middle|\;\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|Y(\lambda)^{\sqrt{n}}(x)-\omega_0(x)\right|>\epsilon\right\}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0, \tag{4.3}$$

$$M_0^{(n)\,\mathrm{spin}}\left(\left\{(\lambda,\gamma)\in(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}\;\middle|\;\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|D(\lambda)^{\sqrt{2n}}(x)-\omega_0(x)\right|>\epsilon\right\}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{4.4}$$

ω_0 はそれぞれの初期形状である．さらにあと少し, 技術的な細かい条件を課すが, ここでは省略する．このとき,

結論　巨視的時刻 $t>0$ に集中現象が伝播する．すなわち, $M_{tn}^{(n)}$ に関して大数の法則が成り立つ：$\forall\epsilon>0$ に対し,

$$M_{tn}^{(n)\,\mathrm{ord}}\left(\left\{\lambda\in(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{ord}}\;\middle|\;\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|Y(\lambda)^{\sqrt{n}}(x)-\omega_t(x)\right|>\epsilon\right\}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0, \tag{4.5}$$

$$M_{tn}^{(n)\,\mathrm{spin}}\left(\left\{(\lambda,\gamma)\in(\widetilde{\mathfrak{S}}_n)^\wedge_{\mathrm{spin}}\;\middle|\;\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|D(\lambda)^{\sqrt{2n}}(x)-\omega_t(x)\right|>\epsilon\right\}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{4.6}$$

ω_t はそれぞれの巨視的な形状である．$t\to\infty$ で ω_t は $\varOmega_{\mathrm{VKLS}}$ に一様収束する．

通常表現, スピン表現のそれぞれの主張は独立している．すなわち, (4.3) から (4.5) が導かれ, (4.4) から (4.6) が導かれる．

連続時刻にすると, たとえば t についての微分が考えられる．Kerov 推移測度は極限形状にも自然に定義が拡張され, その Stieltjes 変換が考えられる:

$$G(t,z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z-x}\,\mathfrak{m}_{\omega_t}(dx),\qquad z\in\mathbb{C}^+. \tag{4.7}$$

定理 4.2　(4.5) と (4.6) の極限形状 ω_t はともに, (4.7) で与えられる Kerov 推移測度の Stieltjes 変換 $G=G(t,z)$ が方程式

$$\frac{\partial G}{\partial t}=-G\,\frac{\partial G}{\partial z}+G+\frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial z} \tag{4.8}$$

をみたす．

なお, $\omega=\omega_t(x)=\omega(t,x)$ に対する方程式は得られていない．(4.8) のほかに, 自由確率論の概念 (自由たたみこみ, 自由キュムラントなど) を用いた ω_t の時間発展の記述が可能である．

参考文献

[1] P. Biane, Characters of symmetric groups and free cumulants, In A.M.Vershik (ed.): Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics, Lect. Notes Math. Vol.1815, pp.185–200, Springer, 2003.

[2] 平井武, 群のスピン表現入門 — 初歩から対称群のスピン表現 (射影表現) を越えて, 数学の杜 5, 数学書房, 2018.

[3] P.N.Hoffman, J.F.Humphreys, Projective Representations of the Symmetric Groups, Oxford Math. Monographs, Oxford Science Publications, 1992.

[4] 洞彰人, 対称群の表現とヤング図形集団の解析学 — 漸近的表現論への序説, 数学の杜 4, 数学書房, 2017.

[5] A. Hora, A diffusive limit for the profiles of random Young diagrams by way of free probability, Publ. RIMS Kyoto Univ. 51 (2015), 691–708.

[6] A. Hora, The Limit Shape Problem for Ensembles of Young Diagrams, Springer Briefs in Math. Phys., vol.17, Springer, 2016.

[7] A. Hora, Effect of microscopic pausing time distributions on the dynamical limit shapes for random Young diagrams, Electron. J. Probab. 25 (2020), article no. 70, 1–21.

[8] A. Hora, Dynamical spin limit shape of Young diagram and spin Jucys–Murphy elements for symmetric groups, arXiv:2309.06059v2, 2024.

[9] V.N. Ivanov, Gaussian limit for projective characters of large symmetric groups, J. Math. Sci. Vol.121, No.3 (2004), 2330–2344.

[10] V. Ivanov, Plancherel measure on shifted Young diagrams, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol.217 (2006), 73–86.

[11] S.V. Kerov, Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and Its Applications in Analysis, Transl. Math. Monographs Vol.219, Amer. Math. Soc. 2003.

[12] A. Kleshchev, Linear and Projective Representations of Symmetric Groups, Cambridge Tracts in Math.163, Cambridge UP, 2005.

[13] B.F. Logan, L.A. Shepp, A variational problem for random Young tableaux, Advances Math. 26 (1977), 206–222.

[14] S. Matsumoto, P. Śniady, Random strict partitions and random shifted tableaux, Selecta Math. (2020) 26; 10, 1–59.

[15] M.L. Nazarov, Young's orthogonal form of irreducible projective representations of the symmetric group, J. London Math. Soc. (2) 42 (1990), 437–451.

[16] A.M. Vershik, Statistical mechanics of combinatorial partitions, and their limit shapes, Funct. Anal. Appl. 30 (1996), 90–105.

[17] A.M. Vershik, S.V. Kerov, Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables, Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 527–531.

Recent development of the relationship between arithmetic modules and zeta values

栗原 将人 (慶應義塾大学理工学部)

1　はじめに

最近、Samit Dasgupta は、M. Kakde, K. Ventullo, J. Silliman, J. Wang らと共に次々と大予想を証明している。Gross-Stark 予想 (p 進 L 関数が自明な零点を持つときの leading term と複素 L 関数の値との関係についての予想)、Brumer-Stark 予想 (以下で述べる)、総実代数体上の Hilbert の第 12 問題 (類体の構成問題)、CM 拡大に対する乗法群についての同変玉河数予想 (cf. §5) といった具合で、今まで手がつけられないと思われてきた予想が次々と解決されている。本稿では、彼らの仕事を紹介するが、それらは、筆者ならびに筆者と共同研究者の研究と深く結びついている。

まず、Brumer-Stark 予想について述べる。19 世紀の終わりに Stickelberger は Gauss 和の素イデアル分解を記述することに成功して、Stickelberger 元というものが abel 体のイデアル類群を消すことを証明した。Stickelberger 元は同変 zeta 関数の $s=0$ での値と考えることができ、Brumer は Stickelberger の定理を総実代数体上の CM 拡大に一般化する予想を提起した。その後、一般的な Stark 予想の枠組みで考えると、類群より射類群について考える精密化が成立すべきということ (Brumer-Stark 予想) がわかってきた。K/k を有限次 abel 拡大で、K を CM 体、k を総実代数体とする。$G=\mathrm{Gal}(K/k)$ とおく。T を K/k で不分岐な k の有限素点の空でない有限集合とするとき、Stickelberger 元は

$$\theta_{K/k}^{T}=\prod_{v\in T}(1-\mathrm{Frob}_v^{-1}N(v))\sum_{\sigma\in G}\zeta(0,\sigma)\sigma^{-1}$$

と定義される。ここに、$\mathrm{Frob}_v\in G$ は v の Frobenius 置換、Nv はイデアル v のノルム, $\zeta(s,\sigma)$ は K/k の部分 zeta 関数である。$\theta_{K/k}^{T}\in\mathbb{Z}[G]$ であることが知られている (Deligne Ribet [11] および Cassou-Noguès [6])。T_K を T の上にある K の素点の集合として、K の $\prod_{w\in T_K}w$ 射類群を T 射類群と呼び、$\mathrm{Cl}^T(K)$ と書くことにする。T を §2.1 の条件をみたすように取るとき、Brumer-Stark 予想は

$$\theta_{K/k}^{T}\in\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}^T(K)) \tag{1}$$

と定式化される。この予想は、Tate [20] IV §6 にあるように、abel 拡大の構成とも関係する。

Dasgupta, Kakde [8] の証明の核心は、彼らが keystone theorem と呼んだ Burns, Kurihara, Sano の主予想の CM 拡大の場合 (Theorem 3.1 参照) である。そこで、本稿では Burns, Kurihara, Sano の主予想 (§2 参照) を中心にして解説を行う。

(1) の証明では $\mathrm{Cl}^T(K)$ の Fitting イデアルではなく、その Pontryagin 双対の Fitting イデアルを考える必要がある。Dasgupta と Kakde は、筆者が [14] で提示した予想を解決し、$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}^T(K)^\vee)$ を 2 成分を除いて完全に決定した (定理 3.2)。

Burns, Kurihara, Sano の主予想は通常の岩澤主予想よりも強い予想であるが、そのことをはっきりさせるために、§4 では、定理 3.1 が総実代数体上の同変岩澤主予想を導くことを示す。

§5 では、同変玉河数予想の最近の発展について述べる。Dasgupta, Kakde, Silliman は、自分達が証明した CM 体に対する Burns, Kurihara, Sano の主予想 (定理 3.2, 特に (8)) を base camp にして、ついに CM 拡大に対する同変玉河数予想も証明した。[4] で筆者らは、同変玉河数予想から Burns, Kurihara, Sano の主予想が従うことを証明したのだが、この方向を逆向きにさかのぼることに成功したのである。§5 でこのことについて述べる。

2　Stark 予想と Burns Kurihara Sano の主予想

この節の目標は、(乗法群に対する) Burns Kurihara Sano の主予想 ([4] Conjecture 7.3) を紹介することである。この予想は、Stark 予想、Rubin-Stark 予想の精密化であり、さらに、通常の岩澤主予想や同変岩澤主予想を、その特別な場合として含んでいる。Dasgupta, Kakde, Silliman, Wang は Burns Kurihara Sano の主予想を CM 拡大の場合に証明したのだが ($p > 2$ のとき [8], $p = 2$ のとき [10])、この予想はもっと一般に、**任意の代数体の有限次 abel 拡大**に対して定式化されている。それを述べるために、まずは Stark 予想、Rubin-Stark 予想から簡潔に述べて行きたいと思う。

2.1　Stark 予想、Rubin-Stark 予想

K/k を有限次 abel 拡大として、$G = \mathrm{Gal}(K/k)$ と書く。S_∞ を k の無限素点全体からなる集合、S を S_∞ を含む k の素点の有限集合、G の指標 χ に対して、$L_S(s,\chi)$ を S-truncated L 関数、すなわち

$$L_S(s,\chi) = \prod_{v \notin S} (1 - \chi(\mathrm{Frob}_v) N v^{-s})^{-1}$$

とする。また、$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を得るために、T を S と交わらない k の素点の有限集合とし、$L_S^T(s,\chi)$ を "T-smoothed" した L 関数、すなわち

$$L_S^T(s,\chi) = (\prod_{v\in T}(1-\chi(\mathrm{Frob}_v)Nv^{1-s}))L_S(s,\chi)$$

と定義する。K/k の (S,T) 同変 L 関数を

$$\theta_{K/k,S}^T(s) = \sum_{\chi\in\hat{G}} L_S^T(s,\chi^{-1})e_\chi$$

と定義する。ここに、$e_\chi = (\#G)^{-1}\Sigma_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\sigma^{-1}$ である。

以下、Stark 予想を述べるときの通常の仮定をおく。まず、S は K/k で分岐する素点全体の集合 $S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ を含むとする。また、$r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を非負整数として、S の r 個の素点 $v_1,\ldots,v_r\in S$ は K/k で完全分解するとする。このとき、$\mathrm{ord}_{s=0}\, L_S^T(s,\chi)\geq r$ であり、

$$\theta_{K/k,S}^{(r),T} = \lim_{s\to 0} s^{-r}\theta_{K/k,S}^T(s)$$

とおく。$\theta_{K/k,S}^{(r),T}\in\mathbb{R}[G]$ となる。S, T の上にある K の素点を S_K, T_K と書き、$w\in T_K$ に対してその剰余体を $\kappa(w)$ と書く。$\mathcal{O}_{K,S}$ を S_K の外の素点では整な K の元たちがなす環とし、$(\mathcal{O}_{K,S}^T)^\times := \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{K,S}^\times \to \bigoplus_{w\in T}\kappa(w)^\times)$ が $\mathbb{Z}$-torsion free となるように T を取る。これは緩い条件で、たとえば、T に剰余標数が異なる 2 つの素点が属せばみたされる。

$Y_{K,S} = \bigoplus_{q\in S_K}\mathbb{Z}$ とおき、$Y_{K,S}\to\mathbb{Z}$ を $(n_w)_{w\in S_K}\mapsto \sum n_w$ として、$X_{K,S} = \mathrm{Ker}(Y_{K,S}\to\mathbb{Z})$ とおく。Dirichlet regulator 写像

$$\lambda_{K,S} : \mathcal{O}_{K,S}^\times\otimes\mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} X_{K,S}\otimes\mathbb{R}$$

を $\lambda_{K,S}(x) = -\sum_{w\in S_K}\log|x|_w w$ で定義する。$\lambda_{K,S}$ は同型

$$\lambda_{K,S} : (\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r (\mathcal{O}_{K,S}^T)^\times)\otimes\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r X_{K,S})\otimes\mathbb{R}$$

を誘導するので、これも $\lambda_{K,S}$ と書く。$i=1,\ldots,r$ に対して、w_i を v_i の上にある K の素点とし、$v_0\in S$ を $v_1,\ldots,v_r$ 以外の k の素点で、その上にある K の素点 w_0 もひとつ取る。このとき、

$$\lambda_{K,S}(\eta_{K/k,S}^T) = \theta_{K/k,S}^{T,(r)}\wedge_{i=1}^r (w_i - w_0)$$

となる $\eta_{K/k,S}^T\in(\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r(\mathcal{O}_{K,S}^T)^\times)\otimes\mathbb{R}$ を Stark 元あるいは Rubin-Stark 元と呼ぶ。

Stark 予想は、この状況で、

$$\eta_{K/k,S}^T \in (\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r \mathcal{O}_{K,S}^\times)\otimes\mathbb{Q} = (\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r (\mathcal{O}_{K,S}^T)^\times)\otimes\mathbb{Q} \qquad (2)$$

と定式化される。$\eta^T_{K/k,S} \in \bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]}(\mathcal{O}^T_{K,S})^\times$ は一般には成り立たず、$\eta^T_{K/k,S}$ の integral な性質は次に述べる Rubin-Stark 予想で定式化される。$\phi_1,...,\phi_r \in \mathrm{Hom}_G((\mathcal{O}^T_{K,S})^\times, \mathbb{Z}[G])$, $m_1,...,m_r \in (\mathcal{O}^T_{K,S})^\times$ に対して

$$(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_r)(m_1 \wedge ... \wedge m_r) = \det(\phi_i(m_j)) \in \mathbb{Z}[G]$$

と定義する。これを線型に延長して、任意の $\Phi \in \bigwedge^r \mathrm{Hom}_G((\mathcal{O}^T_{K,S})^\times, \mathbb{Z}[G])$ と $x \in (\bigwedge^r_{\mathbb{Z}[G]}(\mathcal{O}^T_{K,S})^\times) \otimes \mathbb{Q}$ に対して、$\Phi(x) \in \mathbb{Q}[G]$ が定義される。

Rubin-Stark 予想は、任意の $\Phi \in \bigwedge^r \mathrm{Hom}_G((\mathcal{O}^T_{K,S})^\times, \mathbb{Z}[G])$ に対して、

$$\Phi(\eta^T_{K/k,S}) \in \mathbb{Z}[G] \tag{3}$$

となることを主張する。

たとえば、$k = \mathbb{Q}$ であれば、円単数や Gauss 和を用いて Stark 元は構成され、上の予想 (2), (3) は証明されている。

2.2 Exterior bidual 加群

R を可換環、M を R 加群とするとき、$\mathrm{Hom}_R(M,R)$ を R^* と書くことにする。このとき、$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、Exterior bidual 加群 $\bigcap^r_R M$ を

$$\bigcap_R^r M = (\bigwedge_R^r M^*)^*$$

で定義する。

$x \in M$ に対して、x から自然に決まる R のイデアル $I(x)$ が

$$I(x) = \{\Phi(x) \mid \Phi \in \bigwedge_R^r M^*\}$$

で定義される。

外積との関係については、自然な写像

$$\bigwedge_R^r M \longrightarrow \bigcap_R^r M$$

が $x \mapsto (\Phi \mapsto \Phi(x))$ によって定義されるが、この写像は一般に単射でも全射でもない。R が体のとき、あるいは体の直和のとき、この写像は同型である。従って、$\bigcap^r_{\mathbb{Q}[G]}(\mathcal{O}^T_{K,S})^\times \otimes \mathbb{Q} = (\bigwedge^r_{\mathbb{Q}[G]}(\mathcal{O}^T_{K,S})^\times) \otimes \mathbb{Q}$ であり、

$$\bigcap_{\mathbb{Z}[G]}^r (\mathcal{O}^T_{K,S})^\times \to \bigcap_{\mathbb{Q}[G]}^r (\mathcal{O}^T_{K,S})^\times \otimes \mathbb{Q} = (\bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^r (\mathcal{O}^T_{K,S})^\times) \otimes \mathbb{Q}$$

なる写像が定義できる。この写像は単射であることが示せ、$\bigcap^r_{\mathbb{Z}[G]}(\mathcal{O}^T_{K,S})^\times$ を $(\bigwedge^r_{\mathbb{Q}[G]}(\mathcal{O}^T_{K,S})^\times) \otimes \mathbb{Q}$ の部分加群と見ることができる。したがって、Stark

予想 (2) が正しければ $\bigwedge^r_{\mathbb{Q}[G]}(\mathcal{O}^T_{K,S})^\times \otimes \mathbb{Q}$ の元である $\eta^T_{K/k,S}$ に対して、Rubin-Stark 予想 (3) は

$$\eta^T_{K/k,S} \in \bigcap^r_{\mathbb{Z}[G]} (\mathcal{O}^T_{K,S})^\times$$

と書き直すことができる。

2.3 BKS の主予想

Rubin-Stark 予想が正しければ、$\eta^T_{K/k,S}$ に伴うイデアル $I(\eta^T_{K/k,S}) \subset \mathbb{Z}[G]$ がどのようなものか知ることは、最も重要な問題となる。このイデアルは数論的加群の情報が含まれており、それを記述するのが Burns Kurihara Sano の主予想 (以下では BKS の主予想と略す) である。

まず、Burns, Sano と筆者による [4] に従って、2 つの Selmer 加群を導入する。S, T は §2.1 の条件をみたす素点の有限集合とする。

$$(K^T)^\times = \{x \in K^\times \,|\, \mathrm{ord}_w(x-1) > 0 \text{ for all } w \in T_K\}$$

とおいて、

$$\mathrm{Sel}^T_S(K) = \mathrm{Coker}(\prod_{w \notin S_K \cup T_K} \mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((K^T)^\times, \mathbb{Z}))$$

(ここに、上の写像は、$(x_w)_w \mapsto (a \mapsto \sum_w \mathrm{ord}_w(a)x_w)$) と定義する。

このとき、$\mathrm{Cl}^T_S(K)$ を $\mathcal{O}_{K,S}$ の T 射類群とすると、

$$0 \to \mathrm{Cl}^T_S(K)^\vee \to \mathrm{Sel}^T_S(K) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((\mathcal{O}^T_{K,S})^\times, \mathbb{Z}) \to 0 \tag{4}$$

なる完全系列が存在する ([4] Proposition 2.2)。ここに、$\mathrm{Cl}^T_S(K)^\vee$ は $\mathrm{Cl}^T_S(K)$ の Pontryagin 双対である。

もうひとつの加群は Ritter-Weiss 加群 $\nabla^T_S(K)$ である。この加群の定義は、ここでは述べない。類体論で現れる大域 fundamental class, 局所 fundamental class を用いて定義することもできるが ([16], [14] §2, [8] Appendix A 参照), [4] Definition 2.6 にあるように "Weil-étale cohomology complex" のコホモロジーとして定義することもできる。この加群は、

$$0 \to \mathrm{Cl}^T_S(K) \to \nabla^T_S(K) \to X_{K,S} \to 0 \tag{5}$$

なる完全系列をみたす ([4] Remark 2.7)。

一般に可換環 R と有限表示 R 加群 M に対して、R 加群の完全系列 $R^m \to R^n \to M \to 0$ を取り、$R^m \to R^n$ の行列表示を A として、A の $n-i$ 次小行列式全体で生成される R のイデアルを i 次 Fitting イデアルと呼び、$\mathrm{Fitt}_{i,R}(M)$ と書く (i は 0 以上の整数)。このイデアルは、上の完全系列の取り方によらない。$i=0$ のとき、$\mathrm{Fitt}_{0,R}(M)$ を単に $\mathrm{Fitt}_R(M)$ と書くことにする。

予想 2.1. (Burns Kurihara Sano の主予想) S, T を §2.1 で述べたように取るとき、

$$\mathrm{Fitt}_{r,\mathbb{Z}[G]}(\nabla_S^T(K)) = I(\eta_{K/k,S}^T) \tag{6}$$

$$\mathrm{Fitt}_{r,\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Sel}_S^T(K)) = I(\eta_{K/k,S}^T)^{\#} \tag{7}$$

が成り立つ。ここに $x \mapsto x^{\#}$ は $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ ($\sigma \in G$) が誘導する $\mathbb{Z}[G]$ の involution である。

(6) と (7) は同値であることが示せる ([4] Lemma 2.8)。

$V = \{v_1, ..., v_r\}$ とおく。$Y_{K,V}$ は階数 r の自由 $\mathbb{Z}[G]$ 加群であり、$0 \to X_{K,S\setminus V} \to X_{K,S} \to Y_{K,V} \to 0$ という完全系列が存在する。写像 $\nabla_S^T(K) \to X_{K,S}$ に関する $X_{K,S\setminus V}$ の逆像を $\nabla_{S,V}^T(K)$ と書くことにする。このとき、$0 \to \mathrm{Cl}_S^T(K) \to \nabla_{S,V}^T(K) \to X_{K,S\setminus V} \to 0$ なる完全系列が存在する。この加群 $\nabla_{S,V}^T(K)$ を用いると、予想 2.1 は

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]}(\nabla_{S,V}^T(K)) = I(\eta_{K/k,S}^T)$$

とも書き換えられる。

3 CM 拡大の場合

3.1 Dasgupta, Kakde, Silliman, Wang の keystone theorem

§2 で考えた代数体の有限次 abel 拡大 K/k が CM 拡大であるとする。すなわち、K が CM 体で k が総実代数体であるとする。さらに、$r = 0$ と取る (すなわち V が空集合)。このとき、$\nabla_S^T(K)$ および $\mathrm{Sel}_S^T(K)$ は正方表示を持つ、つまり $\mathbb{Z}[G]^n \to \mathbb{Z}[G]^n \to \nabla_S^T(K) \to 0$ という形の完全系列が存在する ($\mathrm{Sel}_S^T(K)$ についても同様)。したがって、$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]}(\nabla_S^T(K))$ は単項イデアルになる。

$$\theta_{K/k,S}^T = \theta_{K/k,S}^T(0) = \prod_{v \in T}(1 - \mathrm{Frob}_v^{-1} N(v)) \sum_{\sigma \in G} \zeta_S(0, \sigma)\sigma^{-1}$$

とおく。Deligne, Ribet [11] および Pierrette Cassou-Noguès [6] により、$\theta_{K/k,S}^T \in \mathbb{Z}[G]$ となることが知られている。

CM 拡大に対する BKS の主予想は

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]}(\nabla_S^T(K)) = (\theta_{K/k,S}^T)$$

となる。

$\rho \in G$ を複素共役とし、$\mathbb{Z}[G]$ 加群 M に対して、$M_- = M/(1+\rho)$ とおく。M_- は $\mathbb{Z}[G]_- = \mathbb{Z}[G]/(1+\rho)$ 加群である。次の定理 3.1 を証明するには、

$\otimes \mathbb{Z}_p$ して、各素数 p に対して、$\mathbb{Z}_p[G]_-$ 上で証明すればよいが、このことは $p > 2$ に対しては Dasgupta, Kakde [8], $p = 2$ に対しては Dasgupta, Kakde, Silliman, Wang [10] によって証明された。なお、$p > 2$ であれば $\mathbb{Z}_p[G]$ 加群 M に対して、M_- は ρ の -1 固有空間、つまり $M_- = \{x \in M \mid \rho(x) = -x\}$ ともみなせることに注意しておく。

定理 3.1. (Dasgupta, Kakde, Silliman, Wang, [8], [10]) S, T を §2.1 で述べた条件をみたす素点の有限集合とするとき、

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(\nabla_S^T(K)_-) = \theta_{K/k,S}^T\,\mathbb{Z}_p[G]_-,$$

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(\mathrm{Sel}_S^T(K)_-) = (\theta_{K/k,S}^T)^{\#}\,\mathbb{Z}_p[G]_-$$

が成立する。

正確に述べると、[8], [10] で証明されているのは、次の定理である。Σ を K/k で分岐する p の上の素点の集合と S_∞ の合併 (Σ は $S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ の部分集合)、Σ' を K/k で分岐する p と素な素点の集合と T との合併とする。Dasgupta, Kakde, Silliman, Wang は

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(\nabla_\Sigma^{\Sigma'}(K)_-) = \theta_{K/k,\Sigma}^{\Sigma'}\,\mathbb{Z}_p[G]_- \tag{8}$$

を "keystone theorem" として証明している (このような Σ, Σ' を取るというのも Dasgupta, Kakde の巧妙な工夫である)。(8) 式のような (Σ, Σ') 版の式から定理 3.1 のような (S, T) 版の式を導くには、簡単に言うと、(Σ, Σ') から (S, T) に変更したときに生じる両辺のずれが同じであることを示すのである。このことはたとえば、[9] Lemma 6 の証明で詳しく説明されている。

(8) の証明には、さまざまなことが必要である。特に、群環係数の Hilbert 保形型式の理論 (肥田理論の有限版のようなもの) を構成する。そして、Eisenstein 級数のあらゆる cusp での定数項を計算し、定数項写像の全射性を示す (これは Silliman だが、このためには polarization を固定しない moduli 空間を考える必要あり)。また、(雑な言い方だが) $\nabla_\Sigma^{\Sigma'}(K)_-$ が保形型式に伴う表現で作れるものよりも十分に大きいことを言うのである (不分岐拡大を保形型式に伴う表現から作るという Ribet の方法の $\nabla_\Sigma^{\Sigma'}(K)_-$ への一般化)。N を十分大きく取り、$k \equiv 1 \pmod{p^N(p-1)}$ をみたす重さ k の保形型式を用いて証明を行う。このように、岩澤理論のような無限次拡大は使わず、代数体上ですべて証明するので、岩澤理論を使うと必要になる $\mu = 0$ の仮定や trivial zero についての条件などは、必要なくなり、仮定が何も必要ない無条件の定理が得られるのである。Gross-Stark 予想の証明 [7] で使われた手法も役に立っている。

$p = 2$ を扱う [10] では、基本方針は同じだが、多くの困難が続出する。$\mathbb{F}_2$ 上の 2 次元表現の半単純化に現れる 1 次指標を見るとき、偶指標と奇指標の区別ができないという大問題がある。それ以前に根本的な問題として、$\mathbb{Z}_2[G]$

加群 M から M_- を取るという操作は完全系列を保たないという問題がある。このような多くの問題を乗り越えて、[10] では、上記の結果が得られている。

§3.1 の最後に定理 3.1 から直ちに得られる 2 つの定理を述べておく。

(I) χ を k の 1 次の奇指標 ($\chi(\rho) = -1$) で、その位数が素数 p と素であるとする。$K = K_\chi$ を $\mathrm{Ker}\,\chi$ に Galois 理論で対応する CM 体とし、$S = S_{\mathrm{ram}}(K/k)$, T は上の条件をみたすように取る。$A^T(K)$ を K の T 射類群、$G = \mathrm{Gal}(K/k)$, $O_\chi = \mathbb{Z}_p[\mathrm{Image}\ \chi]$ とする。このとき、$A^T(K)$ の χ 成分 $A^T(K)^\chi = A^T(K) \otimes_{\mathbb{Z}_p[G]} O_\chi$ (O_χ は G が χ を通じて作用する G 加群) の位数は

$$\# A^T(K)^\chi = \#(O_\chi / L_S^T(0, \chi^{-1})) \tag{9}$$

となる。

これは、$X_{K,S}^\chi = 0$ から $A^T(K)^\chi \simeq A_S^T(K)^\chi = \nabla_S^T(K)^\chi$ が得られ、$\theta_{K/k,S}^T$ の χ 成分が $L_S^T(0, \chi^{-1})$ であることを用いると、定理 3.1 から直ちに従う。次の §3.2 で一般の CM 拡大 K/k に対する $A^T(K)$ に関する、もっと一般の定理を述べる。

(II) K_∞/K を円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大、K_n を $[K_n : K] = p^n$ なる中間体とする。S は p の上の素点をすべて含むとする。このとき、$\nabla_S^T(K_n) \otimes \mathbb{Z}_p$ の自然な写像による射影極限を $\nabla_S^T(K_\infty)_p$ と書くことにする。Stickelberger 元については、$(\theta_{K_n/k,S}^T)$ は $n \gg 0$ で射影系をなし、$\Lambda_{K_\infty} := \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/k)]$ の元を定める。この元を $\theta_{K_\infty/k,S}^T$ と書く。このとき、定理 3.1 から、

$$\mathrm{Fitt}_{(\Lambda_{K_\infty})_-}((\nabla_S^T(K_\infty)_p)_-) = (\theta_{K_\infty/k,S}^T) \tag{10}$$

が得られる。このように、同変的な岩澤主予想が、極限を取れば直ちに得られる。(K_∞/K のイデアル類群のマイナス成分の μ に関して) $\mu = 0$ であれば、上の (10) は Dasgupta, Kakde らの前に知られていた (たとえば、[5] Theorem 3.16) ことであり、定理 3.1 は上の (10) より、ずっと強い結果である ((10) で $\mu = 0$ の仮定が不要になったことにも注意する)。これは、イデアル類群 (K_∞ の不分岐 abel 拡大の Galois 群) のマイナス商にかかわる同変岩澤主予想であるが、総実代数体についての同変岩澤主予想は §4 で述べることにする。

3.2 イデアル類群の Fitting ideal

§3.1 で述べたように、Stickelberger 元 $\theta_{K/k,S}^T$ に対しては、$\nabla_S^T(K), \mathrm{Sel}_S^T(K)$ という Galois 加群が対応していることがわかる。§2.3 で述べた 2 つの完全系列 (4), (5) が示すように、これらの加群は (S,T) イデアル類群 $\mathrm{Cl}_S^T(K)$ の情報を含んでいる。しかしながら、(S,T) で修正しない、もともとのイデアル

類群そのものの情報は、Stickelberger 元から得られないのだろうか。ここでは、S に属する素点を削らない $\mathrm{Cl}^T(K)$ (T 射類群) の Fitting イデアルに関する定理について述べる。$\mathrm{Cl}^T(K)$ は Brumer-Stark 予想に現れる加群であるから重要であるし、$\mathrm{Cl}^T(K) \to \mathrm{Cl}(K)$ という自然な全射が存在するから、$\mathrm{Cl}^T(K)$ がわかれば $\mathrm{Cl}(K)$ の情報も得られる。古典的なイデアル類群 $\mathrm{Cl}(K)$ の Fitting イデアルについては、[15] を参照してほしい。

$S = S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ のとき、$\theta^T_{K/k,S_{\mathrm{ram}}(K/k)}$ を単に $\theta^T_{K/k}$ と書くことにする。

S_∞ を k の無限素点全体の集合としたことを思い出そう。$v \in S_{\mathrm{ram}}(K/k) \setminus S_\infty$ として、I_v を v の惰性群 ($\subset G = \mathrm{Gal}(K/k)$)、$N_{I_v} = \Sigma_{\sigma \in I_v} \sigma \in \mathbb{Z}[G]$ を I_v のノルム元とする。$S_{\mathrm{ram}}(K/k) \setminus S_\infty$ の任意の部分集合 J に対して、K_J をすべての $v \in J$ に対して I_v で生成される G の部分群で固定される K の部分体とする。したがって、K_J は J のすべての素点で不分岐な K/k の最大の中間体である。$N_J = \prod_{v \in J} N_{I_v} \in \mathbb{Z}[G]$ とおく。J が空集合のときは、$K_J = K$, $N_J = 1$ と定義する。このとき、N_J 倍写像は

$$N_J : \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(K_J/k)] \longrightarrow \mathbb{Z}[G]$$

を誘導するが、これもまた N_J と表すことにする。この写像は、K/K_J のノルム写像ではなく、その定数倍となることに注意する。このとき、$\mathbb{Z}[G]$ のイデアル $\Theta(K/k)^T$ を、すべての $J \subset S_{\mathrm{ram}}(K/k) \setminus S_\infty$ に対して

$$\{N_J(\theta^T_{K_J/k,S_{\mathrm{ram}}(K/k)\setminus J}) \mid J \subset S_{\mathrm{ram}}(K/k) \setminus S_\infty\}$$

で生成されるイデアルと定義する (このイデアルは Sinnott-Kurihara イデアルと呼ばれる)。

次の定理は、筆者が予想し ([14] Conjecture 3.2)、同変玉河数予想から導かれることを示したものだが、Dasgupta と Kakde は [8] で無条件に完全な証明を与えた。これが、[8] の主定理である。

定理 3.2. (Dasgupta, Kakde [8]) p を奇素数とする。$A^T(K) = \mathrm{Cl}^T(K) \otimes \mathbb{Z}_p$ とおき、$(A^T(K))^\vee$ を Pontryagin 双対とする。このとき、

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(A^T(K)^\vee_-) = (\Theta(K/k)^T \otimes \mathbb{Z}_p)^\#_-$$

が成立する。

定義により、$\theta^T_{K/k} \in \Theta(K/k)^T$ であるから、上の定理から、直ちに次の Strong Brumer-Stark 予想が得られる。

系 3.3. (Strong Brumer-Stark 予想)

$$\theta^{T,\#}_{K/k} \in \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(A^T(K)^\vee_-)$$

$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(A^T(K)^\vee_-) \subset \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(A^T(K)^\vee_-)$ であるから、系 3.3 は $\theta^{T,\#}_{K/k} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(A^T(K)^\vee_-)$ を導き、Brumer-Stark 予想の p 成分

$$\theta^T_{K/k} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(A^T(K))$$

が得られる ($\theta^T_{K/k}$ の + 成分は 0 なので、上で − 成分を取る必要はない)。なお、一般に有限 $\mathbb{Z}[G]$ 加群 M に対して、$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(M^\vee) = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(M)^\#$ であるが、Fitting イデアルについては、$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]}(M^\vee) \neq \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[G]}(M)^\#$ である。実際、K/k がある条件をみたす場合には、$\theta^T_{K/k} \notin \mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(A^T(K)_-)$ となる ([12])。したがって、Brumer-Stark 予想の証明のためには、イデアル類群の Pontryagin 双対を考える必要があったのである。

$p = 2$ については、定理 3.2 にあたる結果は知られていないし、予想も筆者の知る限り作られていない。しかしながら、(8) を用いて、$\theta^T_{K/k} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]_-}(A^T(K)_-)$ は $p = 2$ に対しても証明できる。Dasgupta, Kakde, Silliman, Wang はもっと強く、$d = [k : \mathbb{Q}]$ として、

$$\frac{1}{2^{d-1}}\theta^T_{K/k} \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(A^T(K))$$

を証明している ([10] Theorem 2.4)。

すべての素数 p についての結果を合わせて、Brumer-Stark 予想 (1) が得られる。

4 総実代数体の同変岩澤主予想と岩澤主予想

この節では、総実代数体上の同変岩澤主予想を証明する。Dasgupta, Kakde, Silliman, Wang は総実体上の同変岩澤主予想については何も述べていない。Johnston と Nickel は Dasgupta, Kakde [8] の結果を用いて、同変岩澤主予想を ($p > 2$ として) 証明した。本稿では任意の素数 p に対して、CM 拡大に対する BKS の主予想 (定理 3.1) から、同変岩澤主予想が、簡潔に導けることを示す。

F/k を総実代数体の有限次 abel 拡大とし、p を任意の素数、F_∞/F を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする。S を F_∞/k で分岐する素点と無限素点をすべて含む k の素点の有限集合とする。したがって、S は p の上の素点をすべて含む。

F_n を $[F_n : F] = p^n$ となる F_∞/F の中間体として、$R\Gamma_c(\mathcal{O}_{F_n,S}, \mathbb{Z}_p(1))$ を Burns と Flach の [2] Proposition 1.20 にある perfect complex とする (この複体は $p = 2$ に対しても使うことができる)。$R\Gamma_c(\mathcal{O}_{F_\infty,S}, \mathbb{Z}_p(1))$ を $R\Gamma_c(\mathcal{O}_{F_n,S}, \mathbb{Z}_p(1))$ の射影極限とする。

$M_{F_\infty,S}/F_\infty$ を S の外不分岐な最大 pro p abel 拡大とし、$\mathcal{X}_{F_\infty,S}$ をその Galois 群 $\mathrm{Gal}(M_{F_\infty,S}/F_\infty)$ とする。弱 Leopoldt 予想 (証明されている) を用いると、$R\Gamma_c(\mathcal{O}_{F_\infty,S}, \mathbb{Z}_p(1))$ のコホモロジー H^i は、$i = 2, 3$ 以外は 0 で、

$H^2 = \mathcal{X}_{F_\infty,S}$, $H^3 = \mathbb{Z}_p$ となる。したがって、$\Lambda_{F_\infty} = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_\infty/k)]]$ とおくと、H^i はねじれ Λ_{F_∞} 加群である。

次に Deligne Ribet の p 進 L 関数を導入する。$K = F(\mu_{2p})$, $K_\infty = F_\infty(\mu_{2p})$, $\Lambda_{K_\infty} = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/k)]]$ とおく。また、$\Lambda^{\sim}_{K_\infty}$ を Serre [19] の意味で $\mathrm{Gal}(K_\infty/k)$ の pseudo-measure からなる加群とする。すなわち、全商環 $Q(\Lambda_{K_\infty})$ の中で $xI_{\mathrm{Gal}(K_\infty/k)} \subset \Lambda_{K_\infty}$ をみたす $x \in Q(\Lambda_{K_\infty})$ 全体を $\Lambda^{\sim}_{K_\infty}$ とする。ここに、$I_{\mathrm{Gal}(K_\infty/k)}$ は Λ_{K_∞} の augmentation イデアルである。

$\kappa : \mathrm{Gal}(K_\infty/k) \to \mathbb{Z}_p^\times$ を円分指標とし、位数有限の指標 ψ に対して、L 関数 $L_S(s,\psi)$ を考える。Deligne Ribet の p 進 L 関数は、このような任意の ψ, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、

$$\kappa^n\psi(g_{K_\infty/k,S}) = L_S(1-n,\psi)$$

をみたす $g_{K_\infty/k,S} \in \Lambda^{\sim}_{K_\infty}$ である ([19])。ここに、$\kappa^n\psi : \mathrm{Gal}(K_\infty/k) \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を環準同型 $\Lambda_{K_\infty} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ に、また $\Lambda^{\sim}_{K_\infty} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ に延長している (pseudo-measure による積分)。

$c : \Lambda^{\sim}_{K_\infty} \to \Lambda^{\sim}_{F_\infty}$ を制限写像から誘導される写像とし、$g_{F_\infty/k,S} = c(g_{K_\infty/k,S})$ と定義する。

$\det : D^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{tors}}(\Lambda_{F_\infty}) \to Q(\Lambda_{F_\infty})$ を Λ_{F_∞} 加群の perfect complex でコホモロジーがねじれ Λ_{F_∞} 加群となるものが作る導来圏から $Q(\Lambda_{F_\infty})$ への determinant 関手とする。このとき本稿では、同変岩澤主予想を次のように定式化する (K 群を用いた定式化もよく知られている)。

定理 4.1. (同変岩澤主予想)

$$\det(R\Gamma_c(\mathcal{O}_{F_\infty,S}, \mathbb{Z}_p(1)))^{-1} = g_{F_\infty/k,S}\Lambda_{F_\infty}$$

この定理は、$p > 2$, $\mu = 0$ の仮定の下で Ritter と Weiss によって証明されていた ([17])。Johnston と Nickel は [13] において $p > 2$ の場合に Dasgupta, Kakde の結果 [8] を用いた証明を与えたが、ここでは CM 体に対する BKS の主予想 (定理 3.1) を用いた簡潔な証明を与える。以下の証明は、$p = 2$ にも適用できる。

Proof. まず、定理の主張の functoriality から $F = K^+$ (最大実部分体) として証明すれば十分である ($K = F(\mu_{2p})$ と取っていることを思い出す)。これを仮定して、$[K:F] = 2$ と考える。$K_n = F_n(\mu_{2p})$ とおき、T が空集合のときの $\mathrm{Sel}^{\emptyset}_S(K_n)$ を $\mathrm{Sel}_S(K_n)$ と書き、$\mathrm{Sel}_S(K_\infty)_p = \varprojlim \mathrm{Sel}_S(K_n) \otimes \mathbb{Z}_p$ とおく。また、T を §2 のように取り、$\mathrm{Sel}^T_S(K_\infty)_p = \varprojlim \mathrm{Sel}^T_S(K_n) \otimes \mathbb{Z}_p$ とおく。

$$R\Gamma_c(\mathcal{O}_{K_\infty,S}, \mathbb{Z}_p) \to R\Gamma_{c,T}(\mathcal{O}_{K_\infty,S}, \mathbb{Z}_p) \to \bigoplus_{w \in T_{K_\infty}} \mathbb{Z}_p(-1)[-2] \to$$

という distinguished triangle ([4] Proposition 2.4 (i)) のコホモロジーを取って、完全系列

$$0 \to \mathrm{Sel}_S(K_\infty)_p \to \mathrm{Sel}_S^T(K_\infty)_p \to \bigoplus_{w \in T_{K_\infty}} \mathbb{Z}_p(-1) \to \mathbb{Z}_p(-1) \to 0 \qquad (11)$$

が得られる ([4] Proposition 2.4 (iii))。§2.3 で与えた $\mathrm{Sel}_S^{\emptyset}(K_n)$ の定義から、$\mathrm{Sel}_S(K_\infty)_p$ の Pontryagin 双対は、$H^1_{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_{K_\infty,S}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))$ となる。

$\Delta = \mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)$ とおく。

$$H^1_{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_{K_\infty,S}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))^{\rho=-1} = H^1_{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_{K_\infty,S}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\Delta}(1)$$

と $H^1_{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_{F_\infty,S}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1) = \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_{F_\infty,S}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1)$ には有限のずれしかない ($p > 2$ なら同型)。よって、$\mathrm{Sel}_S(K_\infty)_{p,-}(1)$ と $\mathcal{X}_{F_\infty,S}$ には有限のずれしかない。

定理の主張を示すには、Λ_{F_∞} のすべての高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ で局所化したもの

$$\det(R\Gamma_c(\mathcal{O}_{F_\infty,S}, \mathbb{Z}_p(1))_{\mathfrak{p}})^{-1} = g_{F_\infty/k,S}(\Lambda_{F_\infty})_{\mathfrak{p}} \qquad (12)$$

を示せば十分である ([3] Lemma 6.1)。局所化すれば有限のずれは問題にならないので、完全系列 (11) から

$$0 \to (\mathcal{X}_{F_\infty,S})_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Sel}_S^T(K_\infty)_{p,-}(1)_{\mathfrak{p}} \to (\bigoplus_{w \in T_{K_\infty}} \mathbb{Z}_p)_{\mathfrak{p}} \to (\mathbb{Z}_p)_{\mathfrak{p}} \to 0 \qquad (13)$$

という完全系列が得られる。

$\tau : Q(\Lambda_{K_\infty}) \to Q(\Lambda_{K_\infty})$ を、任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_\infty/k)$ に対して $\tau(\sigma) = \kappa(\sigma)^{-1}\sigma$ から誘導される twist automorphism とする。定理 3.1 により、

$$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(\mathrm{Sel}_S^T(K_\infty)_{p,-}(1)) = c(\tau((\theta^T_{K_\infty/k,S})^{\#}))\Lambda_{F_\infty}$$

となる。$\theta^T_{K_\infty/k,S}$ は

$$\theta^T_{K_\infty/k,S} = \prod_{v \in T}(1 - \mathrm{Frob}_v^{-1} N(v))\theta_{K_\infty/k,S}$$

と書け、Deligne Ribet の p 進 L 関数 $g_{K_\infty/k,S}$ と Stickelberger 元 $\theta_{K_\infty/k,S}$ との関係は

$$\tau(\theta^{\#}_{K_\infty/k,S}) = g_{K_\infty/k,S}$$

で与えられることに注意する。$I_{\mathrm{Gal}(F_\infty/k)}$ を Λ_{F_∞} の augmentation イデアルとする。$\mathfrak{p} \neq I_{\mathrm{Gal}(F_\infty/k)}$ であれば、$(\mathbb{Z}_p)_{\mathfrak{p}} = 0$ だから、完全系列 (13) と上で述べたことから、$\mathrm{Fitt}_{(\Lambda_{F_\infty})_{\mathfrak{p}}}((\mathcal{X}_{F_\infty,S})_{\mathfrak{p}}) = (g_{F_\infty/k,S})$ となり、$\mathfrak{p} = I_{\mathrm{Gal}(F_\infty/k)}$ であれば、$\mathrm{Fitt}_{(\Lambda_{F_\infty})_{\mathfrak{p}}}((\mathcal{X}_{F_\infty,S})_{\mathfrak{p}}) = ((\gamma - 1)g_{F_\infty/k,S})$ となる。ここに γ は $\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ の生成元である。この結果は (12) を導く。 □

$\mathcal{X}_{F_\infty,S}$ の指標成分の特性イデアルに関する通常の岩澤主予想が上と同じように導かれることは、明瞭であろう。このように、BKS の主予想は、同変岩澤主予想や通常の岩澤主予想をその特別な場合に含むのである。なお、任意の代数体の有限次 abel 拡大 K/k に対して、拡大 K_∞/k に対する岩澤主予想を [5] では定式化している。

5 同変玉河数予想

以上、Dasgupta, Kakde による画期的な論文 [8] に始まる最近の発展を述べてきたが、彼ら (及び Bullach, Burns, Daoud, Seo) はつい最近、CM 拡大のマイナス成分に関する同変玉河数予想まで証明した。最後にこのことについて述べたいと思う。

まずは、同変玉河数予想を [4] の方法で説明する。L 関数 $L_S^T(s,\chi)$ を用いた定式化を述べる。BKS の主予想は $\theta_{K/k,S}^{(r),T}$ についての予想であったが、同変玉河数予想は leading term に関する予想である。$r_{\chi,S} = \mathrm{ord}_{s=0} L_S^T(s,\chi)$ とおき、$L_S^{T,*}(0,\chi) = \lim_{s\to 0} s^{-r_{\chi,S}} L_S^T(s,\chi)$ と書き、

$$\theta_{K/k,S}^{T,*}(0) = \sum_{\chi\in\hat{G}} L_S^{T,*}(0,\chi^{-1})e_\chi$$

とおく。[4] では $\mathbb{Z}[G]$ 加群の perfect complex $R\Gamma_T((\mathcal{O}_{K,S})_W,\mathbb{G}_m)$ が定義されている。この複体のコホモロジー H^i は $i=0,\ 1$ 以外は 0 で、$H^0 = (\mathcal{O}_{K,S}^T)^\times$, $H^1 = \nabla_S^T(K)$ となる。§2.1 の Dirichlet regulator 写像

$$\lambda_{K,S} : (O_{K,S}^T)^\times \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} X_{K,S}\otimes\mathbb{R} = \nabla_S^T(K)\otimes\mathbb{R}$$

により、$\lambda_{K,S} : \det R\Gamma_T((\mathcal{O}_{K,S})_W,\mathbb{G}_m)\otimes\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}[G]$ が定義されるが、この写像も $\lambda_{K,S}$ と書くことにする。zeta 元 $z_{K/k,S}^T \in \det R\Gamma_T((\mathcal{O}_{K,S})_W,\mathbb{G}_m)\otimes\mathbb{R}$ を $\lambda_{K,S}(z_{K/k,S}^T) = \theta_{K/k,S}^{T,*}(0)$ をみたす元とすると、**同変玉河数予想**は

$$\det R\Gamma_T((\mathcal{O}_{K,S})_W,\mathbb{G}_m) = z_{K/k,S}^T\,\mathbb{Z}[G] \tag{14}$$

と定式化される。この予想からは、zeta 関数の数論的意味についてのほぼすべての予想が導かれ、究極の予想であると考えられている。

最近の発展は次の通りである。Bullach, Burns, Daoud, Seo は [1] において、Euler 系のような元の系列はめったにないものであることを用いて、それが zeta 元と関係しなければならないという定理を示した。特に CM 拡大の場合に、Dasgupta Kakde が証明した Strong Brumer-Stark 予想 (系 3.3) を用いて、同変玉河数予想のマイナス成分を証明した (正確には、奇素数 p に対する p 成分)。

Dasgupta, Kakde, Silliman は、彼らが証明した BKS の主予想 (定理 3.1, 正確には (8)) を出発点にして、K を含む多くの CM 拡大 L/k に対しても

BKS の主予想 が成立しているということを用いて、同変玉河数予想のマイナス成分の別証明を与えた ($p = 2$ もこめて)。彼らが証明した同変玉河数予想は、筆者が [14] Conjecture 3.4 で定式化した version である。p 成分を取って、マイナス成分を考える、という部分は省略して、$\mathbb{Z}[G]$ を用いて説明する。§3 で述べたように、$\nabla_S^T(K)$ に対して、$A_S^T(K) \to B_S^T(K) \to \nabla_S^T(K) \to 0$ なる完全系列が存在する。ここに、$A_S^T(K)$, $B_S^T(K)$ は fundamental class などを用いて定義される、同じ階数の自由 $\mathbb{Z}[G]$ 加群である。$A_S^T(K) \to B_S^T(K)$ の行列式が、unit のずれを除いて $\theta_{K/k,S}^T$ となるというのが、定理 3.1 である。したがって、$A_S^T(K)$, $B_S^T(K)$ の基底をうまく取れば、$A_S^T(K) \to B_S^T(K)$ の行列式は、$\theta_{K/k,S}^T$ に一致する。$B_S^T(K)$ には自然な基底の取り方がある。K を K/k の中間体 M に変更し、S を S に含まれる素点の集合 S' に変更して、$A_{S'}^T(M)$, $B_{S'}^T(M)$ を考えたとき、$A_S^T(K)$ の基底で、そこから決まる $A_{S'}^T(M)$, $B_{S'}^T(M)$ の基底を用いた $A_{S'}^T(M) \to B_{S'}^T(M)$ の行列式が $\theta_{M/k,S'}^T$ となるようなものが存在すること (つまり中間体を取ったり、素点の集合を変更してもうまく動く基底の存在) が同変玉河数予想と同値であり ([14] Conjecture 3.4 参照)、このことを [9] では証明している。すべての CM 拡大で定理 3.1 が成り立つことを用いて、Euler 系 と類似の性質をみたす元の系列を構成し、上記のことを証明している。

参考文献

[1] D. Bullach, D. Burns, A. Daoud, and S. Seo, Dirichlet L-series at $s = 0$ and the scarcity of Euler systems, arXiv:2111.14689.

[2] D. Burns and M. Flach, Motivic L-functions and Galois module structures, Math. Ann., **305** (1) (1996), 65-102.

[3] D. Burns and C. Greither, On the Equivariant Tamagawa Number Conjecture for Tate motives, Invent. math. **153** (2003), 303-359.

[4] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On zeta elements for $\mathbb{G}_m$, Doc. Math. **21** (2016) 555-626.

[5] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On Iwasawa theory, zeta elements for $\mathbb{G}_m$, and the equivariant Tamagawa number conjecture, Algebra and Number Theory **11** (7) (2017), 1527-1571.

[6] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Invent math. **51** (1979), 29-59.

[7] S. Dasgupta and M. Kakde, K. Ventullo, On the Gross-Stark Conjecture, Annals of Mathematics **188** (2018), 833-870.

[8] S. Dasgupta and M. Kakde, On the Brumer-Stark conjecture, Annals of Mathematics **197** (2023), 289-388.

[9] S. Dasgupta, M. Kakde, and J. Silliman, On the equivariant Tamagawa number conjecture, arXiv:2312.09849.

[10] S. Dasgupta, M. Kakde, J. Silliman and J. Wang, The Brumer-Stark conjecture over $\mathbb{Z}$, arXiv:2310.16399.

[11] P. Deligne and K. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Invent math. **59** (1979), 227-286.

[12] C. Greither and M. Kurihara, Stickelberger elements, Fitting ideals of class groups of CM fields, and dualisation, Math. Zeitschrift **260** (2008), 905-930.

[13] H. Johnston and A. Nickel, An unconditional proof of the abelian equivariant Iwasawa main conjecture and applications, arXiv:2010.03186.

[14] M. Kurihara, Notes on the dual of the ideal class groups of CM-fields, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **33** (2021), 971-996.

[15] M. Kurihara, On class groups and Iwasawa modules of CM-fields, to appear in EMS series of congress reports.

[16] J. Ritter and A. Weiss, A Tate sequence for global units, Compos. Math. **102** (1996), 147-178.

[17] J. Ritter and A. Weiss, Towards equivariant Iwasawa theory, manuscripta math **109**, 131-146.

[18] J. Ritter and A. Weiss, On the "main conjecture" of equivariant Iwasawa theory, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), 1015-1050.

[19] J.-P. Serre, Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, **287** (1978), Série A, 183-188.

[20] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$*, Progress in Math. **47**, Birkhäuser 1984.

ガロア点理論とそれの群論, グラフ理論との関係

深澤 知（山形大学理学部）

1. はじめに

本稿は, 筑波大学で開催された「第 69 回代数学シンポジウム」(2024 年 8 月 26 日から 8 月 29 日) において "ガロア点理論とそれの群論, グラフ理論との関係" と題して発表した内容を基にしている.

ガロア点の概念は関数体の部分体を研究する目的で, 1996 年に吉原久夫氏により導入された. ガロア点理論の重要な成果のひとつは, ガロア点の配置により, 代数多様体の分類結果が得られていることである. 今日では, ガロア点理論は代数幾何における研究対象であることに留まらず, 符号理論・有限幾何など他分野との関連も見出され, 広がりをもって発展している. 今回はそのなかでも発展性の高いと思われる「群論」「グラフ理論」との関係に注目して述べることで, **ガロア点理論の有効性**を説明したい.

ガロア点研究創始者の思想や問題意識については, 三浦–吉原 [15], 吉原 [18, 19] を, ガロア点の個数研究に注目した解説は深澤 [3, 5] をご覧頂きたい. 代数幾何における具体的問題については, 未解決問題集 [20] を見られるとよい. これには, ガロア点関係の文献がほとんど網羅されている. 符号理論や有限数学との関連については, 深澤 [5, 6, 7, 8] が参考になると思われる. ガロア点研究に必要な知識を知りたい場合は, ガロア点テキスト [10] をお薦めする.

2. ガロア点理論の紹介

k を複素数体 $\mathbb{C}$ であるとし, $C \subset \mathbb{P}^2$ を次数 $d \geq 4$ の既約平面代数曲線とする. 曲線 C の特異点集合を $\mathrm{Sing}(C)$ で表し, 関数体を $k(C)$ で表す. 平面 $\mathbb{P}^2$ 内の 2 点 $P \neq Q$ を通る直線を $\overline{PQ}$ とかく. $P \in \mathbb{P}^2$ を点とする. このとき, 点 P からの射影 (とよばれる有理写像)

$$\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1;\ Q \mapsto \overline{PQ}$$

を考えることができる. この射影により, 関数体の拡大

$$k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$$

を得る. この拡大は有限次代数拡大である. 1996 年, 吉原久夫氏は次の定義を与えた ([3, 15, 18]).

定義 1 (Yoshihara)**.** 関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ がガロアであるとき, P を C の**ガロア点**という.

本研究は, 日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究 (C)(JP19K03438, JP22K03223) の援助を受けている.

例 1. $P=(1:0:0)$ とすると, $\pi_P(X:Y:Z)=(Y:Z)$ ($Z\neq 0$ 上では $\pi_P(x:y:1)=(y:1)$) と計算される．このとき, 得られる関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^*k(\mathbb{P}^1)$ は $k(x,y)/k(y)$ と一致する．

C が $X^3Z+Y^4+Z^4=0$ で定義される平面曲線のとき, 拡大 $k(x,y)/k(y)$ は $x^3+y^4+1=0$ で定義され, ガロア拡大である．C が $X^d+Y^d+Z^d=0$ で定義される平面曲線のとき, 拡大 $k(x,y)/k(y)$ は $x^d+y^d+1=0$ で定義され, ガロア拡大である．

いずれの場合も, P はガロア点となっている．

注意 1. $\pi_P: C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ を点 $P\in\mathbb{P}^2$ からの射影とする．このとき, 次が成り立つ．

(1) $Q\in C\setminus(\mathrm{Sing}(C)\cup\{P\})$ ならば, Q での分岐指数 e_Q と, 交差重複度 $I_Q(C,\overline{PQ})$ は等しい:

$$e_Q = I_Q(C,\overline{PQ}).$$

(2) P がガロア点で, $Q,R\in C\setminus(\mathrm{Sing}(C)\cup\{P\})$ について $\pi_P(Q)=\pi_P(R)$ がみたされるならば,

$$e_Q = e_R$$

である．

したがって, ざっくりと言うと,「ガロア点は多重接線の交点である」と言える．次は, ガロア点理論の基本問題といえる．

問題 1. 平面曲線 $C\subset\mathbb{P}^2$ に対し, ガロア点の個数はいくつか?

$C\setminus\mathrm{Sing}(C)$ に含まれるガロア点を内ガロア点, $\mathbb{P}^2\setminus C$ に含まれるガロア点を外ガロア点という．内ガロア点, 外ガロア点の個数をそれぞれ $\delta(C)$, $\delta'(C)$ と表す．また, ガロア点 P に付随するガロア群を G_P と表す．

非特異平面曲線の場合には, ガロア点理論の基本問題は次のように解決されている．

事実 1 (Yoshihara–Miura [15], Yoshihara [18])**.** $C\subset\mathbb{P}^2$ は非特異であるとする．このとき, 次が成り立つ．

(1) $\delta(C)=0,1$ または 4 である．$\delta(C)=4$ であることの必要十分条件は C が

$$X^3Z+Y^4+Z^4=0$$

で定義される曲線と射影同値であることである．

(2) $\delta'(C)=0,1$ または 3 である．$\delta'(C)=3$ であることの必要十分条件は C が

$$X^d+Y^d+Z^d=0$$

で定義される曲線と射影同値であることである．

この事実の証明にはガロア点理論の思想や考え方が凝縮されているように思われるので, この証明を解説する[1]．非特異平面曲線の場合には, 次の事実が重要な役割を果たす．

---

[1]特異曲線の場合には別の新しいアイデアが必要という意味で, ガロア点理論がこの定理ですべて言い尽くされるわけではない．

事実 2. $C \subset \mathbb{P}^2$ は非特異で, 次数 $d = \deg C \geq 4$ とする. 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(C)$ に対して, ある $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) = \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ が存在して

$$\tilde{\sigma}|_C = \sigma$$

がみたされる.

これをガロア点に適用すると次が得られる.

系 1. $C \subset \mathbb{P}^2$ は非特異とし, P は内ガロア点 (resp. 外ガロア点) とする. このとき, $\phi \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ が存在して次がみたされる:

- $\phi(P) = (1 : 0 : 0)$;
- 次の行列で表現される生成元 $\sigma \in G_{\phi(P)}$ が存在する:

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  ここで, ζ は 1 の原始 $(d-1)$ 乗根 (resp. d 乗根) である.

とくに, G_P は巡回群である.

初期のガロア点研究において, 事実 1(1) は概ね次のように証明された:

(1) 系 1 から次がわかる:
  (1-1) $P \in C$ がガロア点ならば, $I_P(C, T_P C) = d$;
  (1-2) 各ガロア点 $P \in C$ に対して, $I_Q(C, T_Q C) = d - 1$ となる点 $Q \in C$ が d 点必要である;
  (1-3) $P_1, P_2 \in C$ がガロア点ならば, すべての $\sigma \in G_{P_1}$ に対して $\sigma(P_2)$ はガロア点である (つまり, $\delta(C) \geq 2 \Rightarrow \delta(C) \geq d$ が示される).
(2) 変曲点の数え上げ: $\sum_{Q \in C} (I_Q(C, T_Q C) - 2) = 3d(d-2)$
(3) (1) と (2) を合わせて, $\delta(C) \geq 2$ ならば, 不等式

$$d((d-2) + d(d-3)) \leq 3d(d-2)$$

  を得る. これは $d = 4$ を意味する.

3. ガロア点理論と群論

群論に注目した, 事実 1(1) の別証明を説明する. $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$ はガロア点であると仮定する. $\ell = \overline{P_1 P_2}$ とする.

(1) 系 1 より, 準同型

$$\varphi : \langle G_{P_1}, G_{P_2} \rangle \to \mathrm{Aut}(\ell) \cong \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C});\ \sigma \mapsto \sigma|_\ell$$

  が得られる. 像 $\varphi(\langle G_{P_1}, G_{P_2} \rangle)$ は位数 $d-1$ の巡回群を d 個含むことに注意する.
(2) $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群の分類により, $\varphi(\langle G_{P_1}, G_{P_2} \rangle) \cong A_4$, S_4 or A_5.
(3) $\varphi(\langle G_{P_1}, G_{P_2} \rangle)(P_1)$ を P_1 の安定化群とすると,

$$d - 1 = |G_{P_1}| \leq |\varphi(\langle G_{P_1}, G_{P_2} \rangle)(P_1)| \leq 5$$

  を得る.

(4) S_4 と A_5 の部分群をみつつ, orbit-stabilizer theorem を使えば,

$$d-1=|G_{P_1}|=3 \quad \text{かつ} \quad \varphi(\langle G_{P_1}, G_{P_2}\rangle)\cong A_4$$

とわかる.

上記の別証明は, ガロア点を一般化した「準ガロア点」の研究において, 事実 1 を一般化することにより得られた. 著者, 三浦敬氏, 高橋剛氏は 2015 年頃, 次のように「準ガロア点」の概念を導入した.

定義 2 (F–Miura–Takahashi [12]). $C\subset\mathbb{P}^2$ を既約平面曲線とし, $P\in\mathbb{P}^2$ とする. このとき,

$$G[P]:=\{\tau\in \mathrm{Bir}(C) \mid \pi_P\circ\tau=\pi_P\}$$

と定める. $|G[P]|\geq 2$ がみたされるとき, P は**準ガロア点**であるという.

P がガロア点であることと, $|G[P]|=\deg\pi_P$ が成り立つことは同値である. $|G[P]|=n$ をみたす点 $P\in C\setminus \mathrm{Sing}(C)$ (resp. $P\in\mathbb{P}^2\setminus C$) の個数を $\delta[n]$ (resp. $\delta'[n]$) とあらわす. 事実 1(1) の別証明とほぼ同様にして, 次が証明される:

定理 1 (F–Miura–Takahashi [13], Harui[2]). $C\subset\mathbb{P}^2$ を非特異とし, $n\geq 3$ とする. このとき,

$$\delta[n]=0,1 \text{ または } 4$$

が成り立つ. さらに, $\delta[n]=4$ ならば $n=3$ である.

(準) ガロア点理論と群論との関係について補足する. 次のように群論のトピックと関係がある[3]:

(1) Mitchell [14] は $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ の有限部分群を分類しており, その方法は, $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群の分類を利用したものである. 定理 1 (および事実 1(1) の別証明) と下にある定理 2 における手法は, Mitchell の手法に非常に近い.

(2) P が準ガロア点であるとき, $G[P]$ の生成元は "鏡映"

$$\begin{pmatrix}\zeta & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

で表現される. 群

$$G_n(C):=\langle G[P] \mid P: \text{ quasi-Galois with } |G[P]|=n\rangle$$

は "finite unitary reflection group" に関係する. これらの群は Shephard–Todd [16] により研究されている.

---

[2]春井岳氏の結果は, 2023 年 2 月の第 27 回 代数曲面ワークショップで発表された (著者らのプレプリント [13] が arXiv に公開された若干後). 著者らの結果と主張自体は同じであるが, 証明の手法は異なるようである.

[3]以下のトピックと関係があり, 我々の証明は, 群論での既知の証明と重なる箇所が少なくない. しかしながら, 群論の結果を使っているわけではなく,「代数曲線に作用している」ときに (準ガロア点理論として) どのような証明であるべきか, という立場にたって証明を始めから行っている.

例 2. $C \subset \mathbb{P}^2$ を

$$X^6 + Y^6 + Z^6 - 10(X^3Y^3 + Y^3Z^3 + Z^3X^3) = 0$$

で定義される 6 次曲線であるとする．このとき, 次が成り立つ:

(1) (well-known) $\mathrm{Aut}(C)$ は位数 216 の Hessian group H_{216} と同型である;
(2) $\delta'[3] = 12$;
(3) $G_3(C) = \mathrm{Aut}(C)$.

定理 2 (F–Miura–Takahashi [13], Harui)**.** $n \geq 3$ のとき, $\delta'[n]$ の可能性は次のように絞られる:

- $n \geq 6 \Rightarrow \delta'[n] \leq 3$.
- $\delta'[5] = 0, 1, 2, 3$ or 12.
- $\delta'[4] = 0, 1, 2, 3, 6$ or 7.
- $\delta'[3] = 0, 1, 2, 3, 4, 8, 12$ or 20.

4. ガロア点理論とグラフ理論

グラフ理論におけるガロア点について解説する．この成果により, ガロア点理論が代数幾何を飛び出し, グラフ理論でも展開できることが明らかになった．このセクションの内容は, 著者の記事 [9] と重複が大きい．

Baker–Norine [1] により, グラフ上の因子とその線形系が導入され, 有限グラフのリーマン・ロッホの定理が証明されている．その後, 代数曲線に対する種々の結果のグラフ類似が得られている．特に, 浦川 [17] により導入されたグラフの harmonic morphism (及びその一般化) は, グラフ間の被覆のフルヴィッツ公式を与えるのに用いられている．また, 代数曲線のガロア被覆に対応する概念として, harmonic group action が Corry [2] によって導入された．

ここで, グラフ上の因子とその線形系の定義 (ならびに関連する諸概念) を確認する．以下, 本稿では, グラフ G は有限, 無向で単純であるとする．頂点の集合を $V(G)$, 辺の集合を $E(G)$ と表す．G の頂点によって生成される自由アーベル群

$$\mathrm{Div}(G) := \bigoplus_{P \in V(G)} \mathbb{Z} \cdot P = \left\{ \sum_{P \in V(G)} a_P P \;\middle|\; a_P \in \mathbb{Z} \right\}$$

の元を因子 (divisor) という．因子 $D = \sum_{P \in V(G)} a_P P \in \mathrm{Div}(G)$ に対して,

$$\deg(D) := \sum_{P \in V(G)} a_P, \; D(P) := a_P,$$

と定める．任意の $P \in V(G)$ に対して $D(P) \geq 0$ であるとき, D は有効因子 (effective divisor) であるといい, $D \geq 0$ と表す．写像 $f : V(G) \to \mathbb{Z}$ に対して

$$\Delta(f) := \sum_{P \in V(G)} \sum_{\overline{PQ} \in E(G)} (f(P) - f(Q))P$$

と定め, $\Delta(f)$ を主因子 (principal divisor) という. 2 つの因子 D, D' に対して写像 $f: V(G) \to \mathbb{Z}$ が存在して

$$D - D' = \Delta(f)$$

と表されるとき, D と D' は線形同値 (linearly equivalent) であるといい, $D \sim D'$ と表す. 因子 D に対して

$$|D| := \{E \in \mathrm{Div}(G) \mid E \geq 0, E \sim D\}$$

と定め, $|D|$ を線形系 (linear system) という. さらに,

$$\max\{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \text{任意の } E\ (E \geq 0, \deg E = s) \text{ に対して } |D - E| \neq \emptyset\}$$

を $r(D)$ と定め, D のランクという. $|D| = \emptyset$ のときは, $r(D) = -1$ と定める.

harmonic group action については便利な言い換えがあるので, 定義を述べる代わりに, その言い換えを述べておく.

命題 1. $\Gamma < \mathrm{Aut}(G)$ をグラフ G の自己同型群の部分群とする. Γ が G に harmonically に作用することの必要十分条件は, 任意の頂点 $P \in V(G)$ に対して, 安定化群 Γ_P が P を通る辺集合に freely に作用することである.

代数幾何における射影や関数体のガロア拡大についても, 因子の線形系や自己同型群の言葉を用いて言い換えが可能である. そのことと, グラフに対して因子の線形系と harmonic group action が導入されていることを鑑み, 著者と三枝崎剛氏は次の定義を与えた.

定義 3 (F–Miezaki [11])**.** G を 2-edge-connected なグラフとし, D を $r(D) = 2$ をみたす因子とする. 次の 3 つの条件がみたされるとき, 頂点 $P \in V(G)$ は線形系 $|D|$ に関する**ガロア点**であるという:

(1) $r(D - P) = 1$,
(2) 任意の $Q \in V(G)$ に対して ($Q = P$ の場合も含む), $r(D - P - Q) = 0$ が成り立つ,
(3) 位数 $\deg(D) - 1$ の部分群 $H < \mathrm{Aut}(G)$ と 2 つの因子 $E_1, E_2 \in |D - P|$ が存在して次をみたす:
 (i) $|V(G/H)| > 1$,
 (ii) H は G に harmonically に作用する,
 (iii) 任意の $\sigma \in H$ に対し, $\sigma(E_1) = E_1,\ \sigma(E_2) = E_2$ が成り立つ.

注意 2. 各条件の, 代数幾何における意味について補足する. $r(D) = 2$ という条件は, 非特異射影代数曲線 X から射影平面 $\mathbb{P}^2$ への有理写像 $\varphi_{|D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ が定まることと対応している. 条件 (1) は, $\varphi_{|D|}$ が点 P で定義されていることに対応し, 同時に X から射影直線 $\mathbb{P}^1$ への有理写像 $\varphi_{|D-P|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ が定まることを意味する. 条件 (2) は, 点 $\varphi_{|D|}(P)$ が平面曲線 $\varphi_{|D|}(X)$ の非特異点であることに対応し, 同時に $\varphi_{|D-P|}$ が ($\varphi_{|D|}$ と射影 $\pi_{\varphi_{|D|}(P)}$ の) 合成写像 $\pi_{\varphi_{|D|}(P)} \circ \varphi_{|D|}$ と一致することを意味する. 条件 (3) は, 射影 $\pi_{\varphi_{|D|}(P)} : \varphi_{|D|}(X) \to \mathbb{P}^1$ がガロア拡大を呈することから来ている.

ガロア点が存在するグラフの例として, 完全グラフと車輪グラフがある. それらのグラフについては, 次のことがわかった.

命題 2. K_n を n 個の頂点からなる完全グラフとし, $n \geq 3$ とする. $V(K_n) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $D = P_1 + \cdots + P_n$ とする. このとき, 次が成り立つ:

(a) $r(D) = 2$,
(b) 任意の $P \in V(K_n)$ に対して, $r(D-P) = 1$ である,
(c) 任意の $P, Q \in V(K_n)$ に対して, $r(D-P-Q) = 0$ である,
(d) 任意の $P \in V(K_n)$ は $|D|$ に関するガロア点である.

命題 3. W_n を n 個の頂点からなる車輪グラフとし, $n \geq 5$ とする. つまり,

$$\begin{aligned} V(W_n) &= \{P_1, \ldots, P_n\}, \\ E(W_n) &= \{\overline{P_1P_i} \mid i \in \{2, \ldots, n\}\} \cup \{\overline{P_iP_{i+1}} \mid i \in \{2, \ldots, n-1\}\} \\ &\quad \cup \{\overline{P_nP_2}\} \end{aligned}$$

とする. $D = P_1 + \cdots + P_n$ とするとき, 次が成り立つ:

(a) $r(D) = 2$,
(b) 任意の $P \in V(W_n)$ に対して, $r(D-P) = 1$ である,
(c) 任意の $P, Q \in V(W_n)$ に対して, $r(D-P-Q) = 0$ である,
(d) 頂点 P_1 は $|D|$ に関するガロア点である,
(e) 頂点 $P_2, \ldots, P_n$ は $|D|$ に関してガロア点ではない.

特に, $|D|$ に関するガロア点はちょうど 1 個である.

代数幾何と同じようにして, ガロア点が「グラフの分類」に利用できると期待される. その方向性の第一歩として, 次のような完全グラフの特徴づけを与えることに成功した:

定理 3 (F–Miezaki [11])**.** G を 2-edge-connected なグラフとし, $V(G) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $D = P_1 + \cdots + P_n$ とする. $n \geq 3$ とするとき, 次は同値である:

(1) グラフ G は完全グラフ K_n と一致する,
(2) $r(D) = 2$ であり, $|D|$ に関する 2 つのガロア点が存在する.

特にこのとき, すべての頂点がガロア点である.

ガロア点の個数に注目すれば, 次が得られる.

系 2. G を 2-edge-connected なグラフとし, $n \geq 3$, $V(G) = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $D = P_1 + \cdots + P_n$ とする. $r(D) = 2$ を仮定する. このとき, $|D|$ に関するガロア点の個数は 0, 1 または n のいずれかである. さらに, 個数が n であるための必要十分条件は $G = K_n$ であることである.

References

[1] M. Baker and S. Norine, Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph, Adv. Math. **215** (2007), 766–788.
[2] S. Corry, Genus bounds for harmonic group actions on finite graphs, IMRN **19** (2011), 4515–4533.
[3] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Geom. Dedicata **139** (2009), 211–218.
[4] S. Fukasawa, Complete determination of the number of Galois points for a smooth plane curve, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **129** (2013), 93–113.
[5] 深澤知, 平面曲線のガロア点配置と応用, 2015 年度 第 60 回代数学シンポジウム報告集, pp.89–102.
[6] 深澤知, 代数曲線に対するガロア点を 2 つもつ判定法とその拡張, 応用, 都の西北 代数幾何学シンポジウム 2019 報告集, pp.133–143.
[7] 深澤知, 代数曲線に対するガロア点を 2 つもつ判定法とその拡張, 応用, 2019 第 17 回代数曲線論シンポジウム報告集, pp.103–114.

[8] 深澤知, Galois points and rational functions with small value sets, 早稲田整数論研究集会 2022 報告集, pp.1–11.
[9] 深澤知, グラフのガロア点について, 有限群, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **2287**, pp.55–59.
[10] 深澤知, 東根一樹, ガロア点理論入門, 2018.
[11] S. Fukasawa and T. Miezaki, Galois points for a finite graph, preprint, arXiv:2308.05293.
[12] S. Fukasawa, K. Miura and T. Takahashi, Quasi-Galois points, I: Automorphism groups of plane curves, Tohoku Math. J. **71** (2019), 487–494.
[13] S. Fukasawa, K. Miura and T. Takahashi, Quasi-Galois points, II: Arrangements, preprint, arXiv:2211.16033.
[14] H. H. Mitchell, Determination of the ordinary and modular ternary linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. **12** (1911), 207–242.
[15] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226** (2000), 283–294.
[16] G. C. Shephard and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, Canad. J. Math. **6** (1954), 274–304.
[17] H. Urakawa, A discrete analogue of the harmonic morphism and Green kernel comparison theorems, Glasg. Math. J. **42** (2000), 319–334.
[18] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340–355.
[19] 吉原久夫, 研究紹介, available at http://hyoshihara.web.fc2.com/report.html
[20] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, available at
https://sites.google.com/sci.kj.yamagata-u.ac.jp/fukasawa-lab/open-questions-english

Email address: `s.fukasawa@sci.kj.yamagata-u.ac.jp`

概主束と群スキームの不変式論

橋本　光靖 (大阪公立大学)

Abstract

有限群の不変式論において、群が pseudo-reflection を持たないことは多くの結果をもたらす重要な条件であり、たとえば、渡辺敬一の定理の逆向き（non-modular な有限群の作用による不変式環が Gorenstein ならば, GL_n の有限部分群は実は SL_n の部分群) のためには, pseudo-reflection を持たないことを仮定する必要がある. この概念を有限群から次元の高い代数群や、被約とは限らない群スキームに一般化するものが almost principal bundle (quasitorsor) の概念であり, 特に最近、有限群スキームについて, Liedtke, Yasuda, Carvajal-Rojas, 講演者などによっていくつかの結果が得られている. 定義や基本性質から始めて, 講演者の研究内容とその周辺に関する概説を行う.

1. Introduction

不変式論において商の概念は重要である. なぜかというと, 不変式というのは, 直感的には商空間の上の関数であり, 不変式環を調べることと商空間を調べることは大体同じだからである. 商には圏論的商, 幾何学的商, 代数的商, 主束など, いくつか違った種類の同値ではない定義が存在するが, この原稿の目的は概主束という, これらとはまた違った商について概観することである. 筆者の専門は可換環論なので, 不変式環の環論的性質について興味を持って調べているが, この観点から見て特に有用であると考えている.

主束とは, (fppf 位相について) 局所的に自明バンドルであるような商であり, 群 G の作用を受ける空間 X の上の準連接 $(G, \mathcal{O}_X)$ 加群全体の圏 $\mathrm{Qch}(G, X)$ と商空間 Y の上の準連接層全体 $\mathrm{Qch}(Y)$ の間に圏同値が存在し, 環論的にはまことに理想的な商であるといえる (たとえば [Vis]). しかしながら, 代数群 G が作用する可換環 B に対して, 商写像 $\pi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G$ が主束になることは, 興味を持って調べたい B に対してはまずないといえる. たとえば, k が体, V が有限次元 k ベクトル空間で G が k 上の線形代数群で V に線型に作用し, $B = k[V]$ はその座標環 (多項式環) とすると, $\pi : V = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = V/\!/G$ が G 主束になる必要十分条件は G が自明群であることである.

主束の条件を緩め, X および Y から余次元 2 以上の小さい (G の作用で安定な) 閉集合を取り除いた残りの開集合上で主束になっている G 射を概主束 (almost principal bundle) という. X, Y が正規な状況では, 余次元 2 以上の閉集合を取り除いても反射的層の情報は失われないので, 反射的層を用いて定義される環論的性質, たとえば因子

類群や (準) Gorenstein 性などを論じるのに適している. 有限群 $G \subset GL(V)$ の V への自然な作用の場合, 商写像 $\pi : V = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = V/\!/G$ が G 概主束になる必要十分条件は G が擬鏡映 (pseudo-reflection) を持たないことである. この条件は有限群の不変式論では頻出の概念であり, その意味で概主束は由緒正しい概念の一般化であり, このように定義することで, 次元の高い代数群はおろか, 代数的な群スキームの作用にまで概念を一般化し, それなりの応用があって, Carvajal-Rojas が quasi-torsor の名で使用するなど浸透しはじめている.

今回の代数学シンポジウムでの講演を実現して下さった評議員の朝倉政典先生, プログラム委員の宮崎誓先生, 世話人の皆様, 旅費のサポートをしてくださった藏野和彦先生, そして, 台風の接近する中で熱心に聞いて下さった参加者の皆様に感謝申し上げます.

2. 定義と基本性質・因子類群

(2.1) k は代数閉体, G は有限型アフィン k 群スキーム, N は G の正規な閉部分群スキーム, $H = G/N$ とし, X および Y は有限型の k スキームとする.

(2.2) G スキームの間の G 射 $f : X \to Y$ が G **豊富化された主** N **束** (G-enriched principal N-bundle) (**または** N **トーサー** (N-torsor)) であるとは, 条件

(1) N は Y に自明に作用する;

(2) f は忠実平坦;

(3) $\Phi : N \times X \to X \times_Y X$ ($\Phi(n, x) = (nx, x)$) は同型

が成立することをいう. もし $G = N$ のときには単に主 G 束という.

(2.3) (1) が成立する下で, (2)+(3) は

(4) ある忠実平坦で有限型な k 射 $Y' \to Y$ であって, base change $f' : X' \to Y'$ が自明な N 束 $N \times Y' \to Y'$ と同型となる.

と同値になる.

(2.4) $f : X \to Y$ は主 G 束とする. 有限型アフィン群スキーム $G \to \operatorname{Spec} k$ はいつでもアフィン射でかつ local complete intersection (以下 l.c.i.) 射となる (l.c.i. になることは, 例えば [Has2, (31.14)] 参照). するとその底変換 $G \times X \cong X \times_Y X \to X$ もそう. 平坦降下で, $f : X \to Y$ もアフィンかつ l.c.i. さらに G が k-smooth, k 上エタール, または k 上有限なら f もそうなる.

定理 2.5 (Grothendieck)**.** $f : X \to Y$ は G 豊富化された主 N 束とする. このとき, $f^* : \mathrm{Qch}(H, Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は圏同値. $(f_*(-))^N : \mathrm{Qch}(G, X) \to \mathrm{Qch}(H, Y)$ がその準逆.

証明はたとえば [Vis] 参照. もし $G = N$ で $H = G/N$ が自明なら, $\mathrm{Qch}(Y)$ は $\mathrm{Qch}(G, X)$ に同値. 準連接な $(G, \mathcal{O}_X)$ 加群を調べることが Y 上の準連接層を調べることになる.

(2.6)　$\Phi : G \times X \to X \times_Y X$ が $(g, x) \mapsto (gx, x)$ で与えられる射とするとき, 対角線 $\Delta_X \subset X \times_Y X$ の Φ による引き戻し $\mathcal{S}_X = \Phi^{-1}(\Delta_X)$ は $G \times X$ の部分群スキームである. $\mathcal{S}_X$ を G の X への作用の**安定化群**という. G 不変射 $f : X \to Y$ が主束である簡単な必要条件として, 安定化群が自明なことが挙げられる (定義からすぐに分かる).

(2.7)　序文で触れたように, G は有限群, $X = V = k^n$ は G 加群, $Y = X/\!/G = \operatorname{Spec} k[X]^G$ は X の作用による商とし, $\pi : X \to Y$ は商写像とすると, G が自明群で無い限り, π は主 G 束ではない. これは, 線型な作用だから, G の作用で原点が固定されるからである.

(2.8)　N が有限で, $\pi : X \to Y$ は N に関して代数的商 (すなわち, π はアフィンで, N 不変射で, $\mathcal{O}_Y \to (\pi_*\mathcal{O}_X)^N$ は同型) であるような G 射とする. $\mathcal{U}_X = \{x \in X \mid N_x$ は自明群$\}$ とおくと, $\mathcal{U}_X \subset X$ は G 安定な開集合で, $\pi(\mathcal{U}_X)$ は H 安定な Y の開集合で, $\mathcal{U}_X$ は $\pi : U \to \pi(U)$ が主 N 束であるような N 安定な X の開集合 U の中で最大のものである.

定義 2.9 ([Has4, (10.2)])**.** G スキームの図式

$$X \xleftarrow{\ i\ } U \xrightarrow{\ \rho\ } V \xrightarrow{\ j\ } Y$$

は以下の条件が成立するとき, G **豊富化された有理概主** N **束** (G-enriched rational almost principal N-bundle) であるという.

(1) N は Y に自明に作用する.

(2) i は開埋入で, $\operatorname{codim}(X \setminus i(U), X) \geq 2$.

(3) j は開埋入で, $\operatorname{codim}(Y \setminus j(V), Y) \geq 2$.

(4) ρ は (G 豊富化された) 主 N 束.

有理の名は, X が代数多様体の場合に, X から Y への有理写像になっているからである. この定義をする一番の理由は次の定理にある. 証明は Grothendieck の定理を認めればほぼ自明である.

定理 2.10 ([Has4, (11.2)])**.**

$$X \xleftarrow{\ i\ } U \xrightarrow{\ \rho\ } V \xrightarrow{\ j\ } Y$$

は G 豊富化された有理概主 N 束とせよ. $\operatorname{Ref}(H, Y)$ は連接 $(H, \mathcal{O}_Y)$ 加群で $\mathcal{O}_Y$ 加群として反射的であるものの全体とする. $\operatorname{Ref}(G, X)$ も同様に定義. このとき,

$$i_*\rho^*j^* : \operatorname{Ref}(H, Y) \to \operatorname{Ref}(G, X)$$

は圏同値で, その準逆は

$$(j_*\rho_*i^*-)^N : \operatorname{Ref}(G, X) \to \operatorname{Ref}(H, Y).$$

で与えられる.

これらの圏同値は加群層の階数を保つ. またモノイダル構造 (テンソルしてダブル・デュアルが積) を保つ.

例 2.11. $n \geq 1$ とし, $Y \subset \mathbb{P}^n$ は多項式環 $S = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ の斉次素イデアル P で定義された射影多様体とする. 1 次元トーラス $T = \mathbb{G}_m$ は S に $\deg x_i = 1$ $(i = 0, \ldots, n)$ で作用するとし, $X = \operatorname{Spec} S/P$, $U = X \setminus \{x_0\}$ (x_0 は原点), $V = Y$ とする. このとき,

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xrightarrow{=} Y$$

は概主 T 束である.

例 2.12. 上記の例の例として, $V = Y = \mathbb{P}^1$, $S = k[x_0, x_1]$, $X = \operatorname{Spec} S$, $U = X \setminus \{x_0\}$ の場合を考える. $Y = \mathbb{P}^1$ 上の可逆層 (つまり局所自由層) の全体は T 同変な反射的な X 上の連接層全体と圏同値. $S = k[x_0, x_1]$ なので, 反射的な S 加群は自由加群で, T 同変 (準) 連接とは, $\mathbb{Z}$-graded と同じこと. だからこれは単に $\mathbb{Z}$-graded な有限生成自由 S 加群全体と同じことである. ところで, $\mathbb{Z}$-graded な有限生成自由 S 加群はさまざまな i に関する $S(i)$ の直和. よって, Horrocks の有名な定理**任意の $\mathbb{P}^1$ 上の局所自由層は様々な $\mathcal{O}(i)$ の直和である**. を得る.

有理概主束の中で特に射になっているものが次の概主束である.

定義 2.13. $f : X \to Y$ は G 射とせよ. f が G **豊富化された概主 N 束** (G-enriched almost principal N-bundle であるとは, N は Y に自明に作用し, ある H 安定な Y の開部分集合 V と, ある G 安定な $f^{-1}(V)$ の開部分集合 U であって,

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{f} V \xhookrightarrow{j} Y$$

が有理概主 N 束となるものが存在することをいう.

(2.14) G は有限 k 群スキーム, X は豊富な G 線型化された可逆層を持つ G の作用する代数多様体とする. G の X への作用が **小さい** (small) とは, $\operatorname{codim}(X \setminus \mathcal{U}_X, X) \geq 2$ であることをいう. 定義から, 商 $\pi : X \to X/\!/G$ が概主 G 束である必要十分条件は, G の X への作用が小さいことである.

小さい作用を有限群の線型作用に関して考えると, 不変式論において良く知られた概念が登場することになる.

$V = k^n$ とし, G は $GL(V)$ の有限部分群とする. G 作用の自由跡 $\mathcal{U}_V$ は

$$\mathcal{U}_V = V \setminus \bigcup_{g \neq e} \operatorname{Ker}(1_V - g)$$

で与えられる. つまり, $\mathcal{U}_V$ は $g \neq e$ の固有値 1 の固有空間の和集合の補集合である.

定義 2.15. $g \in GL(V)$ が擬鏡映 (pseudo-reflection) であるとは, $\dim V - \operatorname{Ker}(1_V - g) = 1$, つまり, $\operatorname{rank}(1_V - g) = 1$ であることをいう. 擬鏡映で生成される $GL(V)$ の (有限) 部分群を鏡映群という.

G の V への作用が小さいための必要十分条件は, G が擬鏡映を含まないことである. 実際, $\mathcal{U}_V = V \setminus \bigcup_{g \neq e} \mathrm{Ker}(1_V - g)$ の余次元が 2 以上ある必要十分条件は, すべての $g \in G \setminus \{e\}$ に対して, $\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(1_V - g), V) \geq 2$, つまり, $\mathrm{rank}(1_V - g) \geq 2$ となることである.

有限部分群 $G \subset GL(V)$ が鏡映群で $|G|$ が $\mathrm{char}(k)$ で割れなければ, $k[V]^G$ は多項式環である (Shephard–Todd, Chevalley, Serre).

有理概主束に関する反射的層の圏の対応から, 次が得られる.

補題 2.16 ([Has4, (11.3)]). $f : X \to Y$ は G 豊富化された概主 N 束で,

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xhookrightarrow{j} Y$$

(ただし, $\rho = f|_U$ は f の制限) は有理概主 N 束であるものとする. X は正規代数多様体で, Y は代数多様体とする. このとき, Y が正規であるための条件は, $\mathcal{O}_Y \to (f_*\mathcal{O}_X)^G$ が同型であることである. このとき, 圏同値 $(j_*\rho_*(-))^N i^* : \mathrm{Ref}(X) \to \mathrm{Ref}(Y)$ は $f_*(-)^N$ と同値 (つまり自然同型で結ばれる). また, その準逆 $i_*\rho^*j^*$ は $(f^*(-))^{\vee\vee}$ と同値. ここに, $(-)^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{O}_X)$.

正規代数多様体の反射的層で記述できるものとして, 因子類群がある. X は正規な G-variety とする. このとき, G 因子類群 $\mathrm{Cl}(G, X)$ は階数 1 の反射的な連接 $(G, \mathcal{O}_X)$ 加群の同型類全体のことである. $\mathrm{Cl}(G, X)$ の加法は, $[\mathcal{M}] + [\mathcal{N}] = [(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})^{\vee\vee}]$ で定まる.

G が自明の時, $\mathrm{Cl}(G, X)$ は通常の因子類群 (Weil 因子全体を線型同値で割ったもの) $\mathrm{Cl}(X)$ と同型である.

定理 2.17 ([Has4, (11.4)]). $f : X \to Y$ は G 豊富化された概主 N 束とする. このとき, $f^\# : \mathrm{Cl}(H, Y) \to \mathrm{Cl}(G, X)$ を $f^\#[\mathcal{M}] = [(f^*\mathcal{M})^{\vee\vee}]$ で定めると, アーベル群の同型である.

注意 2.18. $X = \mathbb{A}^n$ のとき, $\mathrm{Cl}(G, X) \cong \mathcal{X}(G)$ (G の指標群) である.

例 2.19. $X = V = k^n$, $r \geq 1$ とし, 有限群スキーム $G = \boldsymbol{\mu}_r = \mathrm{Spec}\, k[t]/(t^r - 1)$ は V にスカラー行列として作用するとする. すると, $Y = V/\!/G$ は $\mathrm{Spec}\, k[V]^{(r)}$, ただし,

$$k[V]^{(r)} = k[x_1, \ldots, x_n]^{(r)} = k[x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid \sum a_i = r]$$

はベロネーゼ部分環. $\mathcal{U}_V = V \setminus \{0\}$ であるから, $n \geq 2$ である限りは作用は小さい. 従ってこのとき, $\mathrm{Cl}(Y) = \mathcal{X}(\boldsymbol{\mu}_r) = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$.

例 2.20. $k = \mathbb{C}$ とする. $X = V = \mathbb{C}^n$ とし, $G \subset GL(V)$ は有限部分群とする. N は G の擬鏡映全部で生成される G の部分群とする. N は正規部分群であり, $H = G/N$ とおく. このとき, H の $Y = V/\!/N = \mathbb{A}^n$ への作用は小さい. 従って, $\mathrm{Cl}(V/\!/G) = \mathrm{Cl}(H, Y) = \mathcal{X}(H)$. 特に, G が擬鏡映を含まない場合, $\mathrm{Cl}(V/\!/G) = \mathrm{Cl}(Y) = \mathcal{X}(G)$.

例 2.21. $G \subset \mathfrak{S}_n$ は $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ に $\sigma x_i = x_{\sigma i}$ で作用する置換群とする. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が擬鏡映であるための条件は, σ が互換であることである. 交代群 $G = \mathfrak{A}_n$ $(n \geq 5)$ とすると G は互換を持たず, 非自明な指標も持たない. よってこのとき, $A = S^{\mathfrak{A}_n}$ は UFD. $\operatorname{char} k \neq 2$ のとき, $A = k[e_1, e_2, \ldots, e_n, \Delta]$, ここに $e_r = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$ は基本対称式, $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ は最簡交代式.

3. Knop 指標と渡辺型定理

渡辺敬一 [Wat1, Wat2] は, $GL(V)$ の有限部分群 G について, G が擬鏡映を持たないとき, $k[V]^G$ が Gorenstein である (これは $A = k[V]^G$ の標準加群 ω_A が A と同型であることと同値) 必要十分条件は, $G \subset SL(V)$ であることと同値であることを示している. $G \subset SL(V)$ という条件は $\det_V$ が自明であることと同値で, これはまた, $\omega_S = S \otimes_k \det_V$ だから, (G, S) 加群として $\omega_S \cong S$ であることとも同値である. 実際, この場合, $\omega_S^G \cong S^G = A$ なのである.

正規代数多様体 X の標準層 ω_X は反射的である. そこで有限とは限らないアフィン代数的群スキーム G が X に作用し, $\pi : X \to Y$ が概主 G 束のとき, 圏同値 $(\pi_* -)^G \operatorname{Ref}(G, X) \to \operatorname{Ref}(Y)$ によって ω_X に対応する $(\pi_* \omega_X)^G$ が ω_Y なのではないかと期待したくなるが, そうはなっていないことは, (当時概主束の概念があった訳ではないのだが) Knop [Kno] が $\mathbb{C}$ 上の簡約群の作用について, $\bigwedge^{\mathrm{top}} \mathfrak{g}$ (ここに $\mathfrak{g}$ は随伴表現 $\operatorname{Lie} G$) が関与していることに気付いたことで明らかとなった. 一般の群スキームの場合には, 次のように一般化される.

定義 3.1. G は N に共役で作用する. よって, 標準層 ω_N は N 上の G 線型化された可逆層. 単位元 $e : \operatorname{Spec} k \to N$ は G 安定な閉埋入で, $\lambda_N = H^0(\operatorname{Spec} k, e^* \omega_N)$ は 1 次元の G 加群. λ_N を N **の** Knop **指標**と呼ぶ.

定理 3.2 (一般化された渡辺の定理, [Has4, (11.22)])**.** $f : X \to Y$ は G 豊富化された概主 N 束とする. X と Y は正規とする. このとき, $\omega_Y \cong (f_* \omega_X \otimes_k \lambda_N^*)^N$, $\omega_X \cong f^*(\omega_Y \otimes_k \lambda_N)^{\vee\vee}$ である. ここに, $(-)^\vee = \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{O}_X)$.

正規代数多様体の間の概主束 $\pi : X \to Y$ について, 一般には $(\pi_* \omega_X)^G$ は ω_Y と同型とは限らない訳であるが, Knop 指標 λ_N が自明であれば, そうなっている.

系 3.3. 定理において, λ_N が自明な G 加群 k と同型とする. Y 上の H 線型化された可逆層 L について, 次は同値.

1. $\omega_Y \cong L$.

2. $\omega_X \cong f^* L$.

では, いつ λ_N が自明となるかであるが, $G = N$ が連結簡約群ならばそうである.

例 3.4. 1. もし N が k-smooth とすると, $\omega_{k[N]} = \bigwedge^n \Omega_{k[N]/k}$ $(n = \dim N)$. よって, $\lambda_N = (\bigwedge^n \mathfrak{n})^*$, ここに $\mathfrak{n} = \operatorname{Lie} N$ は N の随伴表現.

2. もしさらに $G = N$ で G が連結簡約とすると, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ とルート分解し (ただし, G の極大トーラス T と G のルート系 Φ を適当に決めている), 各 $\alpha \in \Phi$ について, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. よって, λ_G^* はウェート $\sum_{\alpha\in\Phi} \alpha$ を持つ G の 1 次元表現. $\Phi = -\Phi$ だから和は 0 であり, λ_G は自明となる.

3. (Knop) $\operatorname{char} k \neq 2$ で $G = N = O_2$ (2 次の直交群) とすると, λ_N は非自明である.

4. もし N が G の中心に含まれるとき, G の N への共役による作用は自明であり, λ_N も自明表現となる.

有限群 G の場合には, λ_G は自明である. 実際, G は 0 次元 smooth なので, $\lambda_G = (\bigwedge^0 \mathfrak{g})^* = k$. ここでは, 被約でない有限群スキームについて最近分かったことを述べる.

定義 3.5. Λ 有限次元 k 代数とする.

1. Λ が **対称** とは, 両側加群 ${}_\Lambda\Lambda_\Lambda$ が双対加群 $({}_\Lambda\Lambda_\Lambda)^*$ と (Λ, Λ) 両側加群として同型であることをいう.

2. Λ が *Frobenius* とは右加群 Λ_Λ が $({}_\Lambda\Lambda)^*$ と右 Λ 加群として同型であることをいう.

3. Λ が **自己入射的**とは, Λ_Λ が入射的 Λ 加群であることをいう.

対称的 ⇒Frobenius⇒ 自己入射的である. また, 各条件は左右対称な条件 (つまり, Λ が条件をみたすことと, Λ^{op} が条件をみたすことは同値) である. また, ベーシックで自己入射的ならば Frobenius であるが, Frobenious は一般には森田同値で保たれない.

命題 3.6. Γ は有限次元 k-Hopf 代数とする.

1. Γ は (k 代数として) Frobenius 代数であるが, 一般には対称代数とは限らない.

2. もし Γ が対称代数とすると, Γ は unimodular (つまり, 左積分と右積分の概念が一致する). もし $s^2 = \mathrm{id}$ (s は Γ の antipode) とすると, unimodular ならば対称代数. 特に Γ が余可換で unimodular ならば, Γ は対称代数.

これらについては, [SY], [LS], [Hum], [Rad], [Suz] をご覧ください. G が有限群スキームのとき, 座標環 $k[G]$ は有限次元で可換な k-Hopf 代数であるから, その双対 $k[G]^*$ は余可換な有限次元 k-Hopf 代数である. これについて, 次が成立する.

定理 3.7. N が k 上有限で $G = N \times H$ のとき, 次は同値である.

1. G 加群として $\lambda_N \cong k$.

2. N 加群として $\lambda_N \cong k$.

3. $k[N]^*$ は k-algebra として対称的.

4. $k[N]^*$ は k-Hopf algebra として unimodular.

この判定法により, 次を得る.

系 3.8. N が k 上有限で $G = N \times H$ とする. 以下の場合には λ_N は自明である.

1. N は可換.
2. N の単位連結成分 N° は線形簡約 (つまり, 任意の表現が simisimple).
3. N は線形簡約.
4. N は k 上エタール ($\Leftrightarrow N^\circ$ が自明群).
5. N は有限で constant (つまりふつうの有限群).

λ_G が自明な場合には次が成立する.

定理 3.9. N は簡約 k 群スキーム, V n 次元 $(n < \infty)$ の N 加群で $V \to V/\!/N = \operatorname{Spec} k[V]^N$ は概主 N 束, λ_N は自明とする. $H = \mathbb{G}_m$ は 1 次元トーラス, V の各元は次数 -1 として H 加群 (言い換えると $\mathbb{Z}$-graded な k ベクトル空間) とする. $S = k[V] = \operatorname{Sym} V^*$, $A = S^N$, $G = N \times H$ とおく. すると,

(i) (H, A) 加群として $\omega_A \cong \omega_S^G$.

(ii) A の S. Goto – K.-i. Watanabe の a 不変量 について, $a(A) \leq a(S) = -n$ が成立する.

さらに以下は同値である.

(1) 作用 $N \to GL(V)$ は $SL(V)$ を経由する.

(2) (G, S) 加群として $\omega_S \cong S(-n)$.

(3) S 加群として $\omega_S \cong S$.

(4) (H, A) 加群として $\omega_A \cong A(-n)$.

(5) A 加群として $\omega_A \cong A$.

(5′) A は quasi-Gorenstein (つまり, A の各素イデアル $\mathfrak{p}$ について $A_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ の canonical module).

(6) $a(A) = -n$.

注意 3.10. N がふつうの有限群の場合, 系 3.8 によって λ_N は自明となる. このときの (1)⇔(5) は, 渡辺敬一 (non-modular な場合) [Wat1, Wat2], Braun [Bra], Fleischmann–Woodcock [FW] (一般の場合) による. G が有限で線型簡約の場合も λ_N が自明だが, この場合の (1)⇔(5) は Liedtke–Yasuda [LY] による. G がふつうの有限群の場合の (1)⇔(6) は Goel–Jeffries–Singh [GJS] による.

定理 3.9 で λ_N が自明である, という仮定は外せないことを示そう.

例 3.11. k は標数 p, ℓ は $p(p-1)$ を割らない素数,

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} t & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \boldsymbol{\mu}_\ell, \ \alpha \in \boldsymbol{\alpha}_p \right\}$$

とする. ここに, $\boldsymbol{\alpha}_p = \operatorname{Spec} k[a]/(a^p) \subset \operatorname{Spec} k[a] = \mathbb{G}_a$, $\boldsymbol{\mu}_\ell = \operatorname{Spec} k[T]/(T^\ell - 1) \subset \operatorname{Spec} k[T, T^{-1}] = \mathbb{G}_m$ とし, $W = k^2$ は $G \subset GL_2$ の自然なベクトル表現, $V = W \oplus W^*$ とする. すると V は small で $G \subset SL(V)$. よって, $S = k[V] = \operatorname{Sym} V^*$, $A = S^G$ とするとき, $\omega_S = S \otimes \det_V = S$. よって, $\omega_A = (\omega_S \otimes_k \lambda_G)^G$. しかし,

$$\omega_{k[G_{\mathrm{ad}}]} = \operatorname{Hom}_k(k[G_{\mathrm{ad}}], k).$$

よって,

$$\lambda_G = \operatorname{soc}^*_{k[G_{\mathrm{ad}}]} = (a^{p-1} \cdot k)^*.$$

$$\begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t^{-1}a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なので, 自然な埋め込み $\boldsymbol{\mu}_\ell \hookrightarrow \mathbb{G}_m$ から来る $\boldsymbol{\mu}_\ell$ の 1 次元表現を χ として, $\lambda_G = \chi^{p-1}$ を得る. ℓ は $p-1$ を割らず, λ_G は自明ではない. 仮に $\omega_A = A$ とすると, $S \cong \omega_S \cong S \otimes \lambda_G$ から $\lambda_G \cong k$ となり矛盾. A は quasi-Gorenstein ではない.

4. Determinantal varieties の例とその他の応用

これまで見て来た概主束の例はどれも群が有限群スキームだったが, 高次元の群でも興味深い例がある. m, n, t は整数で $2 \le t \le m \le n$ とし, $E = k^{t-1}$, $N = k^n$, $M = k^m$, $X = V = \operatorname{Hom}(E, M) \times \operatorname{Hom}(N, E)$ とする. $Y = Y_t = \{h \in \operatorname{Hom}(N, M) \mid \operatorname{rank} h < t\}$ とおく (determinantal variety).

定理 4.1 (De Concini–Procesi [DP], H [Has1])**.** $\pi : X \to Y$ は $\pi(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ で与えられる射とする. このとき π は $GL(M) \times GL(E) \times GL(N)$ 豊富化された概主 $GL(E)$ 束である.

この事実は, よく知られているいくつかの古典的な事実の再証明を与える.

系 4.2. $\pi : X \to Y = Y_t$ は上の通りとする.

(1) (Bruns [Bru]) $\operatorname{Cl}(Y_t) = \mathcal{X}(GL(E)) = \mathbb{Z}$.

(2) $\omega_{Y_t} = (k[X] \otimes (\bigwedge^{\mathrm{top}} E)^{\otimes(m-n)})^{GL(E)}$.

(3) (Svanes [Sva]) Y_t が Gorenstein である必要十分条件は $m = n$ (大前提として $2 \le t \le m \le n$ であるとして).

A. Lascoux [Las] と W. Bruns–J. Herzog は $a(k[Y_t]) = -2n(t-1) \leq -(m+n)(t-1) = a(k[X])$ であることを示している．等号成立は $m = n$ のときに限り，定理と合っている．

ここから $\mathrm{char}(k) = p > 0$ とする．$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ は positively graded (i.e., $R_0 = k$) な有限生成可換 k 代数とする．$F^e : R \to {}^eR = R$ は e 番目の Frobenius ($F^e(r) = {}^e(r^{p^e})$) とする．${}^eR$ は (F^e を通して) 有限 R 加群であり，斉次元 $r \in R$ について $\deg({}^e r) = (\deg r)/p^e$ として ${}^eR$ も次数がついて F^e は次数を保つ．

$\mathbb{Q}$-graded な有限生成 R 加群の圏 $\mathbb{Q}\mathrm{grmod}$ は Krull–Schmidt なので，

$$ {}^eR = M_{e,1} \oplus \cdots \oplus M_{e,s_e} $$

で $M_{e,j}$ は直既約と一意的に分解する． R が**有限 F 表現型** *(Finite F-Representation Type, FFRT)* を持つとは，ある有限個の $\mathbb{Q}\mathrm{grmod}$ の直既約な対象 $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{Q}\mathrm{grmod}$ が存在して，各 e, j に対して，ある番号 u と $c \in \mathbb{Q}$ が存在して $M_{e,j} \cong N_u(c)$ であることをいう．

$G \subset GL(V)$ は擬鏡映を持たない有限部分群とする．$S = k[V] = \mathrm{Sym}\, V^*$, $A = S^G$ とおく．すると $(-)^G : \mathrm{Ref}(G, S) \to \mathrm{Ref}(A)$ は圏同値だったが，$({}^eS)^G = {}^eA$ である．${}^eA$ の分解を調べる代わりに ${}^eS$ を (G, S) 加群として調べることで次を得た．

定理 4.3 (H – A. Singh [HSi])**.** $A = S^G$ が有限 F 表現型を持たない V の例．ただし，k は素体上超越的とする．

$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ は $R_0 = k$ が標数 p の代数閉体である有限生成次数付き環とする．$\mathrm{Ob}(\mathbb{Q}\mathrm{grmod}\, R)$ の各元を基底に持つ $\mathbb{R}$ ベクトル空間を $\mathcal{W}$ とし，$\mathcal{V}(R) = \mathcal{W}/(([M]-[L]-[N] \mid M \cong L \oplus N) + ([M] - [M(c)] \mid c \in \mathbb{Q}))$ とおく．$\mathbb{Q}\mathrm{grmod}\, R$ の直既約加群の次数を無視した同型類全体 $\mathcal{I}$ が $\mathcal{V}(R)$ の $\mathbb{R}$ 基底．$\alpha = \sum_{M \in \mathcal{I}} c_{\alpha,M}[M]$ ($c_{\alpha,M} \in \mathbb{R}$) に対して，$\|\alpha\| = \sum_M |c_{\alpha,M}| \mu_R(M)$, ただし μ_R は生成元の個数，とすると，$(\mathcal{V}(R), \|-\|)$ はノルム空間．そこで，

$$ \mathrm{FL}(\alpha) = \lim_{e \to \infty} \frac{1}{p^{de}} \sum_{M \in \mathcal{I}} c_{\alpha,M}[{}^eM], $$

と (右辺の極限が存在する限り) 定義する．ここに $d = \dim R$.

以下は少しずつ定理として拡張されたが，いずれも本質的には概主束の考えを用いて示された．

定理 4.4 (H–Y. Nakajima [HN], H–P. Symonds [HSy], H–F. Kobayashi [HK])**.** G は $GL(V)$ の有限な閉部分群スキーム，$S = k[V]$, $A = S^G$ とする．$k = V_1, \ldots, V_r$ は単純 G 加群全体，P_i は V_i の projective cover, $M_i = (P_i \otimes_k S)^G$ とする．このとき，$\mathcal{V}(S^G)$ において

$$ \mathrm{FL}(S^G) = \frac{1}{\dim_k k[G]}[S] = \frac{1}{\dim_k k[G]} \sum_{i=1}^{r} (\dim V_i)[M_i]. $$

系 4.5. 1. (K.-i. Watanabe–K.-i. Yoshida [WY], Broer [Bro], T. Yasuda [Yas], J. Carvajal-Rojas [C-R], F. Kobayashi–H [HK]) S^G の F-signature は $[A]$ の $\mathrm{FL}([A])$

における係数である．よって, G が線形簡約なら ($M_1 \cong A$ ゆえ) $1/\dim_k k[G]$ で, それ以外なら 0 である．特に, A が強 F 正則である条件は G が線型簡約であることである.

2. S^G の Hilbert–Kunz 重複度 $e_{\mathrm{HK}}(S^G)$ は $\mu_{S^G}(S)/\dim_k k[G]$.

以下の疑問を掲げて, この概説を終えたい.

疑問 4.6. 1. Determinantal ring $k[Y_t]$ は一般に FFRT を持つか?

2. k が素体 $\overline{\mathbb{F}_p}$ の代数閉包として, 有限部分群 $G \subset GL(V)$ で $k[V]^G$ が FFRT を持たないものはあるか?

References

[Bra] A. Braun, On the Gorenstein property for modular invariants, *J. Algebra* **345** (2011), 81–99.

[Bro] The direct summand property in modular invariant theory, *Trnansform. Groups* **10** (2005), 5–27.

[Bru] W. Bruns, Die Divisorenklassengruppe der Restklassenringe von Polynomringen nach Determinantenidealen, *Revue Roumanie Math. Pur. Appl.* **20** (1975), 1109–1111.

[BH] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings. 2nd ed.*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **39**, Cambridge University Press, 1998.

[C-R] J. Carvajal-Rojas, Finite torsors over strongly F-regular singularities, Épijournal Géom. Algébrique **6** (2022), Art. 1, 30pp.

[DP] C. de Concini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, *Adv. Math.* **21** (1976), 330–354.

[FW] P. Fleischmann and C. Woodcock, Relative invariants, ideal classes and quasi-canonical modules of modular rings of invariants, *J. Algebra* **348** (2011), 110–134.

[GJS] K. Goel, J. Jeffries, and A. Singh, Local cohomology of modular invariants, `arXiv:2306.14279v1`

[Has1] M. Hashimoto, Another proof of theorems of De Concini and Procesi, *J. Math. Kyoto Univ.* **45** (2005), 701–710.

[Has2] M. Hashimoto, Equivariant twisted inverses, *Foundations of Grothendieck Duality for Diagrams of Schemes* (J. Lipman, M. Hashimoto), Lecture Notes in Math. **1960**, Springer (2009), pp. 261–478.

[Has3] M. Hashimoto, Classification of the linearly reductive finite subgroup schemes of SL_2, *Acta Math. Vietnam.* **40** (2015), 527–534.

[Has4] M. Hashimoto, Equivariant class group. III. Almost principal fiber bundles, `arXiv:1503.02133`

[HK] M. Hashimoto and F. Kobayashi, Generalized F-signatures of the rings of invariants of finite group schemes, `arXiv:2304.12138v3`

[HN] M. Hashimoto and Y. Nakajima, Generalized F-signature of invariant subrings, *J. Algebra* **443** (2015), 142–152.

[HSi] M. Hashimoto and A. Singh, Frobenius representation type for invariant rings of finite groups, *Adv. Math.* **458** (2024), Paper No. 109978, 17 pp.

[HSy] M. Hashimoto and P. Symonds, The asymptotic behavior of Frobenius direct images of rings of invariants, *Adv. Math.* **305** (2017), 144–164.

[Hum] J. E. Humphreys, Symmetry for finite dimensional Hopf algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **68** (1978), 143–146.

[Jac] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover, 1979.

[Kno] F. Knop, Der kanonische Modul eines Invariantenrings, *J. Algebra* **127** (1989), 40–54.

[LS] R. G. Larson and M. E. Sweedler, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras, *Amer. J. Math.* **91** (1969), 75–94.

[Las] A. Lascoux, Syzygies des variétés déterminantales, *Adv. Math.* **30** (1978), 202–237.

[LY] C. Liedtke and T. Yasuda, Non-commutative resolutions of linearly reductive quotient singularities, `arXiv:2304.14711v2`

[Rad] D. E. Radford, The trace function and Hopf algebras, *J. Algebra* **163** (1994), 583–622.

[SY] A. Skowroński and K. Yamagata, *Frobenius Algebras. I. Basic Representation Theory*, European Mathematical Society, 2012.

[Suz] S. Suzuki, Unimodularity of finite dimensional Hopf algebras, *Tsukuba J. Math.* **20** (1996), 231–238.

[Sva] T. Svanes, Coherent cohomology on Schubert subschemes of flag schemes and applications, *Adv. Math.* **14** (1974), 369–453.

[Swe1] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, 1969.

[Swe2] M. E. Sweedler, Connected fully reducible affine group schemes in positive characteristic are Abelian, *J. Math. Kyoto Univ.* **11-1** (1971), 51–70.

[Vis] A. Vistoli, Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory, *Fundamental Algebraic Geometry,* B. Fantechi et al. (eds.), AMS (2005), pp. 1–104.

[Wat1] K. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein. I. *Osaka Math. J.* **11** (1974), 1–8.

[Wat2] K. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein. II. *Osaka Math. J.* **11** (1974), 379–388.

[WY] K.-i. Watanabe and K.-i. Yoshida, Minimal relative Hilbert–Hunz multiplicity, *Illinois J. Math.* **48** (2004), 273–294.

[Yas] T. Yasuda, Pure subrings of regular local rings, endomorphism rings and Frobenius morphisms, *J. Algebra* **370** (2012), 15–31.

Mitsuyasu Hashimoto
Department of Mathematics
Osaka Metropolitan University
Sumiyoshi-ku, Osaka 558–8585, JAPAN
e-mail: `mh7@omu.ac.jp`

3 次元ファノ多様体の双有理幾何

九州大学数理学研究院　岡田拓三

代数多様体は複素数体上定義されているものとする.

1　はじめに

代数多様体, 特にファノ多様体の有理性を判定する問題を背景として, 1971 年に Iskovskikh と Manin により次の結果が示された.

定理 1.1 (Iskovskikh–Manin [14])**.** X と X' を $\mathbb{P}^4$ の非特異 4 次超曲面とする. このとき, X から X' への双有理写像は同型写像である. 特に, 非特異 4 次超曲面の自己双有理写像群は自己同型群に一致する.

$\mathbb{P}^4$ の非特異 4 次超曲面の自己同型群が有限群である（[19]）こと, $\mathbb{P}^3$ の自己双有理写像群（つまり, 3 次クレモナ群）が無限群であること, および双有理写像群が双有理不変量であることから, $\mathbb{P}^4$ の非特異 4 次超曲面の非有理性が従う.

この結果はおよそ半世紀前の結果である. 現在では双有理剛性やそれをさらに拡張した概念（birational solidity）へと理論が発展し, 様々な結果が得られてきた. この報告書では, 3 次元のファノ重み付き超曲面に対象を絞って, これまでに得られてきた結果について概説をしたいと思う.

2　双有理剛性とその拡張

後になって上記の定理 1.1 において, 双有理写像のターゲット X' をより一般の対象である森ファイバー空間に取り替えても同様の結論が得られることがわかった. ここに, 森ファイバー空間 $\pi\colon X \to S$ とは, $\mathbb{Q}$ 分解的かつ高々端末特異点しか持たない射影多様体 X から射影多様体 S への連結ファイバーを持つ射であり, 相対ピカール数 $\rho_{X/S}$ が 1, $\dim X > \dim S$ かつ $-K_X$ が π-豊富になっているものを指す. 簡単に説明すれば, ファノ多様体のファイブレーションの構造を持つ多様体のことである. 典型例はピカール数 1 のファノ多様体である. なお, 本報告書において, ファノ多様体とは $\mathbb{Q}$ 分解的かつ高々端末特異点しかもない射影多様体で, その反標準因子が豊富なものを指す.

極小モデル理論により, 単線織多様体（有理曲線で覆われる多様体のクラス）は森ファイバー空間と双有理同値になる．しかしながら, 固定された双有理同値類の中には一般に森ファイバー空間は複数, 特に無数に, 存在し得る．例えば射影空間がその例として挙げられる.[*1] ピカール数 1 のファノ多様体 X を考えよう．上述の通り, この X は（構造射 $X \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ によって）森ファイバー空間とみなされる．X の双有理同値類の中に存在する森ファイバー空間が同型を除いてただ 1 つ[*2]の時に, X は**双有理剛的**（**birationally rigid**）であるという．

双有理剛性はピカール数 1 のファノ多様体の間の双有理不変な性質であり, さらに射影空間は明らかに双有理剛的でない．よって, 双有理剛性が非有理性を導くことがわかる．Shokurov [24] や Ahmadinezhad–岡田 [2] によって, 非有理性を導く性質を保持しながら双有理剛性をより弱めることで birational solidity なる概念が導入された．ピカール数 1 のファノ多様体は, 狭義森ファイバー空間と双有理同値にならないときに**双有理堅固的**（**birationally solid**）[*3]であるという．ここに, **狭義森ファイバー空間**とは, 底空間が正の次元を持つ森ファイバー空間のことであり, 非自明な森ファイバー空間とも呼ばれる．自明な森ファイバー空間はピカール数 1 のファノ多様体に他ならない．次の関係がある：

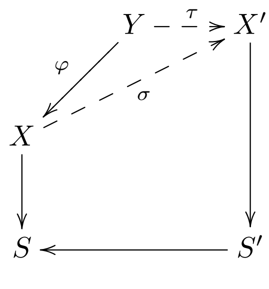
$$\text{双有理剛的} \implies \text{双有理堅固的} \implies \text{非有理的.}$$

3　Sarkisov プログラム

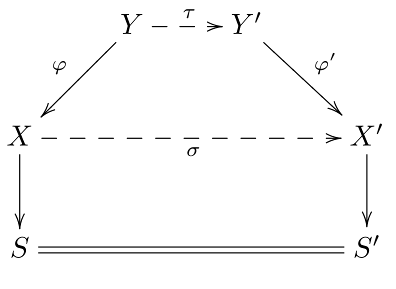
ファノ多様体の双有理剛性・堅固性を考察する上で基本的な枠組みである Sarkisov プログラムについて概観しておく．詳細については, 例えば [7] を参照されたい．

2 つの森ファイバー空間 X/S 及び X'/S' の間の双有理写像 $\sigma\colon X \dashrightarrow X'$ として基本的なものである**基本リンク**と呼ばれるものは, 次の 4 つのタイプからなる：

（I 型）



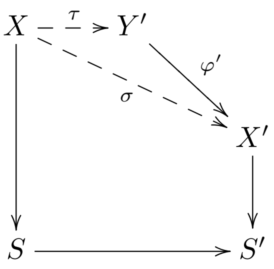
（II 型）

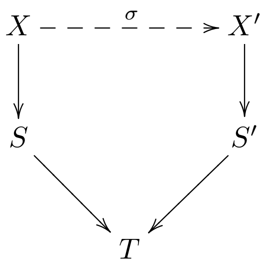


[*1] 3 次元以上においては, 有理的森ファイバー空間が（非自明な）族として存在する．つまり, 3 次元以上の射影空間の双有理同値類の中には, 非加算濃度の互いに同型でない森ファイバー空間が存在する．

[*2] 要するに X のみ, ということ

[*3] Shokurov はこれを primitive と呼んでいる．

（III 型） 

（IV 型） 

上図式にあらわれる φ および φ' は（端末的カテゴリーにおける）因子収縮射[*4]であり, τ は余次元 1 で同型な双有理写像[*5]である．また, IV 型の図式において, T は $\rho(S) = \rho(S') = \rho(T) + 1$ を満たす正規射影多様体である．

定理 3.1 (Sarkisov プログラム, Corti [7], Hacon–M^cKernan [10])**.** 森ファイバー空間の間の双有理写像は, 基本リンクの合成へと分解される．

注意 3.2. X/S が自明な森ファイバー空間, つまり X がピカール数 1 のファノ多様体のときは, X からの基本リンクは I 型あるいは II 型のものしかない．従って, ピカール数 1 のファノ多様体からの基本リンクは必ず因子収縮射を経由する．I 型および II 型の基本リンクのことを因子収縮射 φ から始まる基本リンクと呼ぶことがある．ピカール数 1 のファノ多様体 X への因子収縮射 $\varphi\colon Y \to X$ が与えられたとき, この φ から始まる基本リンクは存在すればただ一つであることが知られている[*6].

ここからは X をピカール数 1 のファノ多様体とする．X と双有理同値な森ファイバー空間は, 順次基本リンクを辿っていくことで得られる．特に X が双有理剛的でない場合には, X からの基本リンクでその像が X と非同型なものが存在することになる．また, 注意 3.2 により, X からの基本リンクを開始する因子収縮射が存在することになる．このような因子収縮射を特定することが重要となる．

定義 3.3. $\mathcal{L}$ を X 上の線形系とし, $r > 0$ を有理数とする．双有理写像 $\psi\colon W \to X$ およびその例外素因子 $G \subset W$ に対して, 不等式

$$r\,\mathrm{mult}_G\,\psi^*\mathcal{L} \le a_G(K_X)$$

が成立するときに, 組 $(X, r\mathcal{L})$ は G において**標準的**であるという．ここに, $a_G(K_X)$ は K_X の G における食い違い係数を表す．X 上空の任意の例外素因子において標準的であるときに, 組 $(X, r\mathcal{L})$ は**標準的**であるという．

[*4] 本報告書では, 端末的なカテゴリーにおける K-負な端的収縮射であり因子を潰すもののことを単に**因子収縮射**と呼ぶ．

[*5] 正確には, τ は同型射であるかあるいはフリップ, フロップ, 逆フリップの合成写像のことである．

[*6] Y のピカール数が 2 であるので, いわゆる 2-ray geme と呼ばれる一意的な操作から基本リンクが（存在する場合には）定まる．

定義 3.4. $\varphi\colon Y \to X$ を因子収縮射とし, E をその例外因子とする. X 上の可動線形系 $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} -nK_X$（$n > 0$ は有理数）が存在して, 組 $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ が E において標準的でないときに φ は**極大特異収縮射**であるという.

X の部分多様体 Γ は, Γ を中心とする極大特異収縮射が存在するときに**極大特異中心**であるという.

因子収縮射 $\varphi\colon Y \to X$ から始まる基本リンク $\sigma\colon X \dashrightarrow X'$ が存在するとき, 誘導される双有理写像 $Y \dashrightarrow X'$ を定める線形系を X へと推進することで得られる可動線形系を $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} -nK_X$ とすると, 組 $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ は φ の例外因子において標準的でないことが示される. これにより次が得られる.

補題 3.5 ([20, Lemma 2.5])**.** $\varphi\colon Y \to X$ を因子収縮射とする. φ から始まる基本リンク σ が存在するならば φ は極大特異収縮射である.

定理 3.6. ピカール数 1 のファノ多様体が双有理剛的であることと, 次が成立することが同値である：各因子収縮射 $\varphi\colon Y \to X$ に対して,

(1) φ は極大特異収縮射ではない, あるいは
(2) φ から始まる基本リンク σ が存在し, それが自己双有理写像である.

注意 3.7. 双有理剛性をより強めた概念である双有理超剛性も導入されている：ピカール数 1 のファノ多様体は, 双有理剛的かつ $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}(X)$[*7]が成立するときに**双有理超剛的**（**birationally superrigid**）であるという. これは, X 上に極大特異中心が存在しないことと同値となる. 定理 1.1 における $\mathbb{P}^4$ の非特異 4 次超曲面は双有理超剛的である.

4　3 次元ファノ重み付き超曲面の分類

4 次元の重み付き射影空間

$$\mathbb{P} \coloneqq \mathbb{P}(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \coloneqq \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x, y, z, t, w]^{*8}$$

は, どの 4 つの重みの最大公約数も 1 となるときに **well-formed** であるという. 任意の重み付き射影空間に対してそれと同型である well-formed な重み付き射影空間が存在する. X を $\mathbb{P}$ の超曲面とし,（重み $\mathrm{wt}(x) = a_0, \dots, \mathrm{wt}(w) = a_4$ に関する）次数 d の斉次多項式 $F = F(x, y, z, t, w)$ により定義されているとする. アフィン錐

$$C_X \coloneqq \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y, z, t, w]/(F)$$

---

*7 $\mathrm{Bir}(X)$ は X の自己双有理写像群である.

*8 $\mathbb{C}[x, y, z, t, w]$ は重み $\mathrm{wt}(x) = a_0, \dots, \mathrm{wt}(z) = a_4$ の次数付き環とみなしている.

が原点を除いてスムースであるときに X は**擬スムース**であるという．擬スムースな重み付き超曲面 X に対して, $\mathrm{Sing}(X)=\mathrm{Sing}(\mathbb{P})\cap X$ となり, X は高々巡回商特異点しかもたない．容れ物の重み付き射影空間 $\mathbb{P}$ が well-formed であり, かつ $\mathbb{P}$ の特異点集合 $\mathrm{Sing}(\mathbb{P})$ の任意の余次元 2 の成分が X に含まれないときに X は **well-formed** であるという．Well-formed かつ擬スムースな X に対して, 随伴公式 $(K_{\mathbb{P}}+X)|_X = K_X$ が成立し, 同型 $\mathcal{O}(K_X)\cong\mathcal{O}_X(d-\sum a_i)$ が得られる．擬スムースかつ well-formed な重み付き超曲面 $X\subset\mathbb{P}$ がファノ多様体であるとする, つまり $-K_X$ は豊富かつ高々端末特異点しか持たないものとする．このとき,

$$\iota_X := -d+\sum_{i=0}^{4} a_i > 0$$

を X の**ファノ指数**と呼ぶ．因子類群 $\mathrm{Cl}(X)$ は $\mathbb{Z}$ と同型であるので, $-K_X$ が $\mathrm{Cl}(X)$ の生成元（$\mathcal{O}_X(1)$ に対応する因子）の ι_X 倍になっている．

Reid, Iano-Fletcher, Brown, 鈴木らにより, 3 次元の擬スムースかつ well-formed なファノ重み付き超曲面の分類が次のとおりに得られている．

定理 4.1 (Iano-Fletcher [12], Brown–Suzuki [3], [4])**.** 擬スムースかつ well-formed な 3 次元ファノ重み付き超曲面は 130 族からなる．このうち, ファノ指数が 1 のものは 95 族からなり, ファノ指数が 2 以上のものは 35 族からなる．

なお, 上記の 130 族が実際に全てを尽くしていることは, 指数 1 の場合は [6] あるいは [15] により, 指数 2 の場合は [23, Theorem 2.11] により示されている．具体的なリストは, 指数 1 の 95 族については [12, Table 5] に, 指数 2 以上の 35 族については [22, Table 1] に記載されている．また, 各族は重み付き射影空間の重み $a_0\le\cdots\le a_4$ 及び超曲面の次数 d で指定されることになり, 自然数の組 (ファノ指数, $a_0,\dots,a_4,d$) の辞書式順序により番号付けされ, 族 № i（$1\le i\le 130$）などと呼ばれる．

5　3 次元ファノ重み付き超曲面の双有理剛性

5.1　ファノ指数 1 の場合

まずはファノ指数が 1 の場合の結果を紹介する．

- 非特異 4 次超曲面 $X_4\subset\mathbb{P}^4$ は双有理超剛的である (Iskovskikh-Manin [14]).
- 非特異 6 次超曲面 $X_6\subset\mathbb{P}(1,1,1,1,3)$ は双有理超剛的である (Iskovskikh [13]).
- ファノ指数 1 の 95 族の各族に属する一般メンバーは双有理剛的である (Corti–Pukhlikov–Reid [9]).

上記の研究を経て, ファノ指数 1 の場合の双有理剛性の研究は次のとおり完全に解決された.

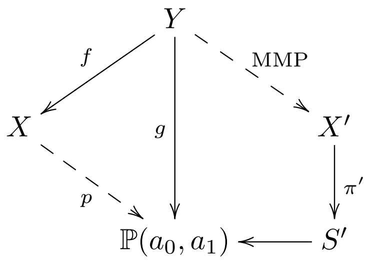
定理 5.1 (Cheltsov–Park [5]). ファノ指数 1 の擬スムースかつ well-formed な 3 次元ファノ重み付き超曲面は双有理剛的である.

上記定理の証明において, 実際には次が示された：X をファノ指数 1 の擬スムースかつ well-formed な 3 次元ファノ重み付き超曲面とする. このとき, 任意の極大特異収縮射 $\varphi\colon Y \to X$ に対し, φ から始まる基本リンク σ が存在し, それは自己双有理写像 $\sigma\colon X \dashrightarrow X$ である[*9]. よって, X からの基本リンクは全て自己双有理写像であるので, X は双有理剛的となることが従うわけである.

5.2 ファノ指数が 2 以上の場合

ファノ指数 ι_X が 2 以上の場合に話を進めることにする. まずは Abban–Cheltsov–Park [1] による議論及び結果を紹介する. 以下の議論の詳細については [1, §2, §3] を参照されたい. $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_4)$ をファノ指数が 2 以上の擬スムースかつ well-formed なファノ重み付き超曲面とする. 以下では常に $a_0 \leq \cdots \leq a_4$ であるものとする.

最初に $\mathrm{lcm}(a_0, a_1) < \iota_X$[*10]の場合を考察する. この条件は 30 族に対して満たされる. 射影 $p\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}(a_0, a_1) \cong \mathbb{P}^1$, $(x\!:\!y\!:\!\cdots\!:\!w) \mapsto (x\!:\!y)$, の不確定点及び X の特異点を解消する双有理同値モデル $f\colon Y \to X$ を選ぶ. 射影 p から誘導される射を $g\colon Y \to \mathbb{P}(a_0, a_1)$ とおく. 仮定された不等式 $\mathrm{lcm}(a_0, a_1) < \iota_X$ から, g の一般ファイバーが単線織的であることがわかる. 従って, Y から開始する $\mathbb{P}(a_0, a_1)$ 上の極小モデルプログラムを実行すると森ファイバー空間 X'/S' を得る：



構成から $S' \to \mathbb{P}(a_0, a_1)$ は全射であるので X'/S' は狭義森ファイバー空間となり, 従って X は双有理堅固的でない.

注意 5.2. $\mathrm{lcm}(a_0, a_1) < \iota_X$ を満たす 30 族のうち, 20 族に対してそのメンバーが有理的で

*9 極大特異収縮射が存在しない場合もある. この場合は X は双有理超剛的である.

*10 分類の結果 130 族全てに対して a_0 と a_1 は互いに素であるので, $\mathrm{lcm}(a_0, a_1)$ は単に $a_0 a_1$ として良い.

あることが [22] により知られている．さらには，この 20 族及び $\mathbb{P}^4$ の非特異 3 次超曲面の族を除いた 114 族については，その各族の十分一般メンバー[*11]が安定有理的[*12]でないことがやはり [22] により示されている．

次に $1 < \iota_X \leq \mathrm{lcm}(a_0, a_1)$ の場合を考察する．この条件は，№ 100, 101, 102, 103, 110 の 5 族（表 1 参照）に対して満たされる．

表 1　$1 < \iota_X \leq \mathrm{lcm}(a_0, a_1)$ を満たす族

№	$X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_4)$	ι_X	p	$\hat{X} \subset \hat{\mathbb{P}}$
100	$X_{18} \subset \mathbb{P}(1,2,3,5,9)$	2	$\frac{1}{5}(1,2,3)$	$\hat{X}_{10} \subset \mathbb{P}(1,1,1,3,5)$
101	$X_{22} \subset \mathbb{P}(1,2,3,7,11)$	2	$\frac{1}{7}(1,2,5)$	$\hat{X}_{12} \subset \mathbb{P}(1,1,1,4,6)$
102	$X_{26} \subset \mathbb{P}(1,2,5,7,13)$	2	$\frac{1}{7}(1,3,4)$	$\hat{X}_{14} \subset \mathbb{P}(1,1,2,4,7)$
103	$X_{38} \subset \mathbb{P}(2,3,5,11,19)$	2	$\frac{1}{11}(1,4,7)$	$\hat{X}_{22} \subset \mathbb{P}(1,1,3,7,11)$
110	$X_{21} \subset \mathbb{P}(1,3,5,7,8)$	3	$\frac{1}{8}(1,3,5)$	$\hat{X}_{7} \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,3)$

X は擬スムースであるため，その特異点は全て端末的商特異点である．X の特異点のうち指数が最大であるものはただ 1 つであり，それを p とする．3 次元端末的商特異点を中心とする因子収縮射はただ一つ存在する（川又 [16]）ので，それを**川又爆発**と呼ぶことにする．$\varphi\colon Y \to X$ を点 p を中心とする川又爆発とする．$\varphi\colon Y \to X$ は重み付き爆発として実現されており，容れ物の重み付き射影空間 $\mathbb{P}$ の点 p での適当な重みによる重み付き爆発（トーリック射）$\Phi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{P}$ へと延長することができる．ここに，$\mathbb{T}$ はピカール数 2 の $\mathbb{Q}$ 分解的トーリック多様体であり，X の Φ による固有変換と Y を同一視でき，$\varphi = \Phi|_Y$ となっている．ピカール数 2 の $\mathbb{Q}$ 分解的トーリック多様体 $\mathbb{T}$ の可動錐の分解に対応する $\mathbb{Q}$ 分解的改変の列（あるいは 2-ray game といっても良い）により次の図式を得る：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
Y & \subset & \mathbb{T} & \overset{\Theta_1}{\dashrightarrow} & \mathbb{T}_1 & \overset{\Theta_2}{\dashrightarrow} & \cdots & \overset{\Theta_m}{\dashrightarrow} & \mathbb{T}_m & \supset & \hat{Y} \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\Phi}} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\varphi}} \\
X & \subset & \mathbb{P} & & & & & & \hat{\mathbb{P}} & \supset & \hat{X}
\end{array}
$$

ここに，Θ_i は余次元 1 で同型な双有理写像であり，$\hat{\Phi}\colon \mathbb{T}_m \to \hat{\mathbb{P}}$ はトーリック因子収縮射である．全ての場合において，像 $\hat{\mathbb{P}}$ は 4 次元重み付き射影空間であり，$\hat{\Phi}$ は因子を点 $\hat{\mathsf{p}} \in \hat{\mathbb{P}}$ に潰している．$\hat{Y} \subset \mathbb{T}_m$ を Y の双有理変換とし，$\hat{\varphi} := \hat{\Phi}|_{\hat{Y}}\colon \hat{Y} \to \hat{X} := \hat{\Phi}(\hat{Y})$ とすると，基本

---

*11 パラメーター空間の高々可算無限個の空でない開集合の共通部分によってパラメトライズされるメンバーのことを十分一般メンバーという．

*12 代数多様体 V は，$V \times \mathbb{P}^m$ が有理的となる整数 $m \geq 0$ が存在するときに**安定有理的**という．

リンク

$$\begin{array}{ccc} Y & \dashrightarrow & \hat{Y} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\hat{\varphi}} \\ X & \overset{\hat{\sigma}}{\dashrightarrow} & \hat{X} \end{array}$$

を得る．$\hat{X}$ は $\hat{\mathbb{P}}$ の擬スムースではないピカール数 1 のファノ超曲面であり, $\hat{\varphi}\colon \hat{Y} \to \hat{X}$ は非商特異点への因子収縮射となっている．特に $\hat{X} \not\cong X$ である．

また, X が №110 の族のメンバーである場合には, もう 1 つ存在する商特異点（$\frac{1}{5}(1,1,4)$ 型特異点）から上記と同様の構成法により, 異なる基本リンク $\check{\sigma}\colon X \dashrightarrow \check{X}$ を得る．ただし, 最初に構成するピカール数 2 の $\mathbb{Q}$ 分解的トーリック多様体 $\mathbb{T}$ は 4 次元のものであるが, その $\mathbb{Q}$ 分解的改変を制限しても基本リンクは得られない．そのため, $\mathbb{T}$ をそれに対してさらに unprojection という操作を行うことにより得られる 5 次元のピカール数 2 の $\mathbb{Q}$ 分解的トーリック多様体と取り替えてリンクの構成を行う．なお, $\check{X}$ は 5 次元の重み付き射影空間 $\check{\mathbb{P}}$ における余次元 2 の完全交叉であり, $\check{X} \not\cong X, \hat{X}$ である．以上をまとめておく．

定理 5.3 (Abban–Cheltsov–Park [1])**.** 擬スムースかつ well-formed なファノ重み付き超曲面 $X \subset \mathbb{P} \coloneqq \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_4)$, $a_0 \leq \cdots \leq a_4$, に対して次が成立する．

(1) $1 < \iota_X \leq \mathrm{lcm}(a_0, a_1)$ であれば, X は双有理堅固的でない．
(2) $\mathrm{lcm}(a_0, a_1) < \iota_X$ であれば, X と非同型なピカール数 1 のファノ多様体 $\hat{X}$ への基本リンク $\hat{\sigma}\colon X \dashrightarrow \hat{X}$ が存在する．X が № 110 の族のメンバーの場合は, X 及び $\hat{X}$ と非同型なピカール数 1 のファノ多様体 $\check{X}$ への基本リンク $\check{\sigma}\colon X \dashrightarrow \check{X}$ が存在する．

定理 5.3 と定理 5.1 を合わせれば, 3 次元ファノ重み付き超曲面の双有理剛性について完全な解決がもたらされる．

系 5.4. 擬スムースかつ well-formed な 3 次元ファノ重み付き超曲面が双有理剛的となる必要十分条件は, ファノ指数が 1 となることである．

6　3 次元ファノ重み付き超曲面の双有理堅固性

6.1　主定理の紹介

引き続き $X \subset \mathbb{P} \coloneqq \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_4)$, $a_0 \leq \cdots \leq a_4$, を擬スムースかつ well-formed なファノ重み付き超曲面とする．定理 5.3 の (2) の状況を考察する, つまり, $\mathrm{lcm}(a_0, a_1) < \iota_X$ とする．このとき, X は双有理剛的でないことは直ちにわかるが, 定理 5.3 で双有理同値モデルとして得られている森ファイバー空間 $\hat{X}$（及び $\check{X}$）は自明な森ファイバー空間であり, その

他に森ファイバー空間が現れるかどうかは [1] において示されていない. 次の疑問は自然に生じる.

問い 6.1. № 100, 101, 102, 103, 110 の 5 族の各メンバーは双有理堅固的か.

次の結果は, この問いに答え, 擬スムースかつ well-formed な 3 次元ファノ重み付き超曲面の双有理堅固性の研究を完全に解決するものである.

定理 6.2 ([23]). X を族 №100, 101, 102, 103（あるいは族 № 110）の擬スムースかつ well-formed なメンバーとする. このとき, X は $\hat{X}$（あるいは $\hat{X}, \check{X}$）以外の森ファイバー空間と双有理同値にならない. 特に X は双有理堅固的であり, 非有理的である.

6.2　定理 6.2 の証明の概略

以下では, 最も込み入った場合である族 № 110 を題材にして定理 6.2 の証明の概略について解説したい. まずは, 族 №110 のメンバーである X 及びその双有理同値モデルである $\hat{X}$, $\check{X}$ の基本情報をまとめておく：

- $X = X_{21} \subset \mathbb{P} \coloneqq \mathbb{P}(1,2,3,5,9)$, $\quad \mathrm{Sing}(X) = \{\frac{1}{5}(1,1,4), \mathsf{p} = \frac{1}{8}(1,3,5)\}$.
- $\hat{X} = \hat{X}_7 \subset \hat{\mathbb{P}} \coloneqq \mathbb{P}(1,1,1,2,3)$, $\quad \mathrm{Sing}(\hat{X}) = \{\frac{1}{2}(1,1,1), \frac{1}{3}(1,1,2), \mathrm{cE}\}$.
- $\check{X} = \check{X}_{6,7} \subset \check{\mathbb{P}} \coloneqq \mathbb{P}(1,1,2,2,3,5)$, $\quad \mathrm{Sing}(\check{X}) = \{\frac{1}{5}(1,2,3), \mathrm{cD}/2\}$.

ここで, $\hat{X}_7$ あるいは $\check{X}_{6,7}$ は, それぞれが次数 7 の超曲面あるいは次数 6 と 7 の超曲面の余次元 2 完全交叉であることを意味している. cE 型特異点とは, その一般超平面が E 型 Du Val 特異点であるような超平面特異点のことである. cD/2 型特異点とは, 一般超平面が D 型 Du Val 特異点であるような超平面特異点の位数 2 巡回群の適当な作用による商として得られる特異点である. 双有理堅固性の証明は次のとおりに行われる：

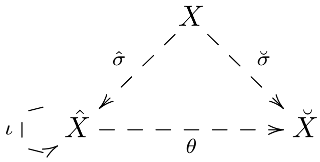
- ステップ 1：基本リンクの構成 — X, $\hat{X}$ 及び $\check{X}$ からの基本リンクを可能な限り多く構成する.
- ステップ 2：極大特異中心/収縮射の除外 — X, $\hat{X}$ 及び $\check{X}$ からの基本リンクがステップ 1 で構成したもので尽きていることを示す.

6.2.1　ステップ 1：基本リンクの構成

基本リンクの構成は, §5.2 における $\hat{\sigma}$ の構成と同様に行われる. つまり, X への因子収縮射に対し, それを容れ物の重み付き射影空間の重み付き爆発として得られるピカール数 2 の $\mathbb{Q}$ 分解的トーリック多様体に埋め込み, その $\mathbb{Q}$ 分解的改変として得られる双有理写像の制限

を取ることで基本リンクを構成するわけである．以下に，構成された基本リンクの情報をまとめておく．

- $\hat{\sigma}\colon X \dashrightarrow \hat{X}$：$\frac{1}{8}(1,3,5)$ 型特異点を中心とする川又爆発により開始される基本リンク．
- $\breve{\sigma}\colon X \dashrightarrow \breve{X}$：$\frac{1}{5}(1,1,4)$ 型特異点を中心とする川又爆発により開始される基本リンク．
- $\hat{\sigma}^{-1}\colon \hat{X} \dashrightarrow X$：cE 型特異点を中心とする食い違い係数 2 の因子収縮射 $\hat{\varphi}\colon \hat{Y} \to \hat{X}$ から開始される基本リンク．
- $\iota\colon \hat{X} \dashrightarrow \hat{X}$：$\frac{1}{3}(1,1,2)$ 型特異点を中心とする川又爆発から開始される基本リンク．
- $\theta\colon \hat{X} \dashrightarrow \breve{X}$：cE 型特異点を中心とする食い違い係数 1 の因子収縮射 $\hat{\psi}\colon \hat{Z} \to \hat{X}$ から開始される基本リンク．
- $\breve{\sigma}^{-1}\colon \breve{X} \dashrightarrow X$：cD/2 型特異点を中心とする因子収縮射 $\breve{\varphi}\colon \breve{Y} \to \breve{X}$ から開始される基本リンク．
- $\theta^{-1}\colon \breve{X} \dashrightarrow \hat{X}$：$\frac{1}{5}(1,2,3)$ 型特異点を中心とする川又爆発から開始される基本リンク．



6.2.2　ステップ 2：極大特異中心/収縮射の除外

§6.2.1 において構成された基本リンクが X, $\hat{X}$, $\breve{X}$ からの基本リンクを尽くしていることを示す必要がある．非特異点，曲線，特異点を極大特異中心から除外していくプロセスである．この部分がこの手の研究の困難な部分と言える．

非特異点の除外方法は次の結果が基本的である．

定理 6.3 ($4n^2$-不等式, Corti [8, Theorem 5.3.2])**.** $P \in V$ を非特異 3 次元多様体の芽とし，$\mathcal{M}$ を V 上の可動線形系とする．有理数 $n > 0$ に対して，組 $(V, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ が点 P で標準的でないと仮定する．$\mathcal{M}$ の一般メンバー M_1, M_2 に対して $Z \coloneqq M_1 \cap M_2$ をその交叉とするとき，

$$\mathrm{mult}_P(Z) > 4n^2$$

が成立する．

我々の場合に戻る．極大特異中心である X の非特異点 P が存在したとする．このとき，$(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ が点 P で標準的でないような可動線形系 $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} -nK_X$ が存在する．$Z = M_1 \cap M_2$ を $\mathcal{M}$ の一般メンバー M_1, M_2 の交叉として得られる有効 1 サイクルとすれば，$\mathrm{mult}_P Z > 4n^2$ である．つまり，極大特異中心が存在すれば，その中心で高い重複度を持つ有効 1 サイクルが存在するわけである．点 P を通り，なおかつ Z の台を含まないような

X 上の有効因子 D で $D \cdot (-K_X)^2 \leq 4$ となるもの見つけてくると,

$$4n^2 \geq n^2(D \cdot (-K_X)^2) = D \cdot M_1 \cdot M_2 = D \cdot Z \geq \operatorname{mult}_P D \cdot \operatorname{mult}_P Z > 4n^2$$

となり矛盾が生じる．このようにして非特異点が極大特異中心となり得ないことが示される．同様の議論を $\hat{X}$ と $\check{X}$ に対しても行う[*13].

曲線の除外に関しては次の結果が基本である．

補題 6.4 ([21, Lemma 2.9])**.** *V をピカール数 1 の 3 次元ファノ多様体とし, $C \subset V$ を既約かつ被約な曲線とする．$(-K_V) \cdot C \geq (-K_V)^3$ であれば C は極大特異中心ではない.*

全ての曲線に対して上記補題が有効であるわけではない．有効でない曲線（= 低次の曲線）は特殊なものに限られ, その場合は曲線を中心とする因子収縮射の分類や上記補題とは異なる手法を適用する．このような議論の結果, X, $\hat{X}$, $\check{X}$ 上の全ての曲線が極大特異中心から除外される．以上をまとめて次を得る．

命題 6.5. *X, $\hat{X}$ 及び $\check{X}$ の非特異点と曲線は極大特異中心でない.*

残るは特異点である．次の除外方法が有用である．

補題 6.6 ([21, Lemma 2.20])**.** *V をピカール数 1 の 3 次元ファノ多様体とし, $\varphi\colon W \to V$ を因子収縮射, E をその例外因子とする．W 上に無限個の既約曲線 C_λ が存在し, $(-K_W) \cdot C_\lambda \leq 0$ かつ $E \cdot C_\lambda > 0$ が成立するとき, φ は極大特異収縮射でない.*

$\hat{X} = \hat{X}_7 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ の $\frac{1}{2}(1,1,1)$ 型特異点 P を考察する．この点は $P = (0:0:0:1:0)$ であり, $\psi_P\colon Z \to Y$ を点 P での川又爆発とし, E をその例外因子とする．線形系 $|\mathcal{O}_{\hat{X}}(1)|$ の固定点集合は曲線 $\Delta := (x_0 = x_1 = x_2 = 0) \cong \mathbb{P}(2,3) \cong \mathbb{P}^1$ である．ここに, x_0, x_1, x_2 は重み 1 の斉次座標である[*14]．一般メンバー $D_1, D_2 \in |\mathcal{O}_{\hat{X}}(1)|$ に対して, $D_1 \cap D_2$ の Δ での重複度が 1 であることが確かめられる．従って, 1 サイクルとして $D_1 \cdot D_2 = \Gamma + \Delta$ と表される．ここに, Γ は Δ を台に含まない有効 1 サイクルである．Γ の Z における固有変換を $\tilde{\Gamma}$ とすると, その台 $\operatorname{Supp} \tilde{\Gamma}$ の中に $-K_Z$ との交点数が非正かつ E との交点数が正となる既約成分が存在る．そのような成分の 1 つを C_λ とする．D_1, D_2 の選び方に応じて曲線 C_λ は無数に構成される．従って補題 6.6 により点 ψ_P は極大特異収縮射でない．この点 P 以外の X, $\hat{X}$, $\check{X}$ の端末的商特異点に対してはその川又爆発から開始される基本リンクが構成されている（§6.2.1 参照）．

---

*13 $4n^2$-不等式による除外が通用しない非特異点も存在するが, それらに対しては別途異なる手法を適用する必要がある．

*14 $\hat{X}$ を定義する 7 次斉次多項式はイデアル (x_0, x_1, x_2) に含まれることが構成からわかる．これにより $\Delta \subset \hat{X}$ が従う．

端末的商特異点を中心とする因子収縮射の一意性から, 残りは $\hat{X}$ の cE 型特異点と $\breve{X}$ の cD/2 型特異点を中心とする因子収縮射について考察すれば良い. cD/2 型特異点を中心とする因子収縮射は川北 [17], [18], 早川 [11] により分類されている. 一般に因子収縮射は一意的ではなく, 特異点を定める方程式の形状に依存して様相が異なる. 我々の $\breve{X}$ の cD/2 型特異点については因子収縮射の分類を利用することで次がわかる.

補題 6.7. $\breve{X}$ の cD/2 型特異点を中心とする因子収縮射はただ 1 つである.

§6.2.1 における $\breve{\psi}\colon \breve{Y} \to \breve{X}$ は cD/2 型特異点を中心とする因子収縮射であり, 基本リンク $\breve{\sigma}^{-1}\colon \breve{X} \dashrightarrow X$ を導いている.

従って, 残るは $\hat{X}$ の cE 型特異点である. cE 型特異点を中心とする因子収縮射はまだ部分的な分類しかなされていない（川北 [17], 山本 [25]）. 我々の $\hat{X}$ の cE 型特異点については, その明示性を利用することで因子収縮射を分類することができた.

補題 6.8. $\hat{X}$ の cE 型特異点を中心とする因子収縮射は 3 つ存在する. そのうち, 食い違い係数が 1 のものが 2 つであり, 食い違い係数が 2 のものが 1 つである.

§6.2.1 における $\hat{\psi}\colon \hat{Z} \to \hat{X}$（あるいは $\hat{\varphi}\colon \hat{Y} \to \hat{X}$）は cE 型特異点を中心とする食い違い係数 1（あるいは 2）の因子収縮射であり, 基本リンク $\theta\colon \hat{X} \dashrightarrow \breve{X}$（あるいは $\hat{\sigma}^{-1}\colon \hat{X} \dashrightarrow X$）を導く. 補題 6.8 によって, 因子収縮射がもう 1 つ存在するが, そのような因子収縮射 $\hat{\psi}'\colon \hat{Z}' \to \hat{X}$ を具体的に構成することができる. 詳細の説明は割愛するが, 次の結果を適用することで $\hat{\psi}'$ が極大特異収縮射でないことが示される.

補題 6.9 ([21, Lemma 2.19])**.** V をピカール数 1 の 3 次元ファノ多様体とし, $\varphi\colon W \to V$ を因子収縮射, E をその例外因子とする. W 上に有効因子 $S \sim_{\mathbb{Q}} -bK_W + eE$（$b > 0$, $e \geq 0$）及び正規曲面 $T \neq E$ が存在して, 有効因子 $S|_T$ の既約成分の交点数の定める交点数行列が負定値であるとする. このとき, φ は極大特異収縮射でない.

以上により, X, $\hat{X}$, $\breve{X}$ の任意の因子収縮射に対して, それが極大特異収縮射でないかあるいはそれが基本リンクを開始し, その像が X, $\hat{X}$, $\breve{X}$ のいずれかであることがわかる. 具体的には, X, $\hat{X}$, $\breve{X}$ からの基本リンクは §6.2.1 のものに限られ, 従って X の双有理同値類には $X, \hat{X}, \breve{X}$ 以外の森ファイバー空間は存在しない. これにより定理 6.2 の証明が完了する.

参考文献

[1] H. Abban, I. Cheltsov and J. Park, On geometry of Fano threefold hypersurfaces. *Rationality of varieties*, 1–14, Progr. Math., **342**, Birkhäuser/Springer, Cham, 2021.

[2] H. Ahmadinezhad and T. Okada, Birationally rigid Pfaffian Fano 3-folds. Algebr. Geom. **5** (2018), no. 2, 160–199

[3] G. Brown and K. Suzuki, Computing certain Fano 3-folds. Japan J. Indust. Appl. Math. **24** (2007), 241–250.

[4] G. Brown and K. Suzuki, Fano 3-folds with divisible anticanonical class. Manuscripta Math. **123** (2007), 37–51.

[5] I. Cheltsov and J. Park, Birationally rigid Fano threefold hypersurfaces. Mem. Amer. Math. Soc. **246** (2017), nn. 1167, v+117 pp.

[6] J.-J. Chen, J. A. Chen and M. Chen, On quasismooth weighted complete intersections. J. Algebraic Geom. **20** (2011), no. 2, 239–262.

[7] A. Corti, Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov. J. Algenraic Geom. **4** (1992), no. 2, 223–254.

[8] A. Corti, Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry. *Explicit birational geometry of* 3*-folds*, 259–312, London Math. Soc. Lecture Note ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge , 2000.

[9] A. Corti, A. Pukhlikov and M. Reid, Fano 3-fold hypersurfaces. *Explicit birational geometry of* 3*-folds*, 175–258, London Math. Soc. Lecture Note ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge , 2000.

[10] C. D. Hacon and J. McKernan, The Sarkisov program. J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 389–405.

[11] T. Hayakawa, Divisorial contractions to 3-dimensional terminal singularities of discrepancy one. J. Math. Soc. Japan **57** (2005), no. 3, 651–668.

[12] A. R. Iano-Fletcher, Working with weighted complete intersections. *Explicit birational geometry of* 3*-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[13] V. A. Iskovskikh, Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties. J. Math. Sci. **13** (1980), 815–868.

[14] V. A. Iskovskikh and Ju. I. Manin, Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem (Russian). Mat. Sb. (N.S.) **86 (128)** (1971), 140–166; English translation in Math. USSR Sb. **15** (1971), 141–166.

[15] J. M. Johnson and J. Kollár, Fano hypersurfaces in weighted projective 4-spaces. Experiment. Math. **10** (2001), no. 1, 151–158.

[16] Y. Kawamata, Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities. *Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994)*, 241–246, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.

[17] M. Kawakita, Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices. Duke Math. J. **130** (2005), no. 1, 57–126.

[18] M. Kawakita, Supplement to classification of threefold divisorial contractions. Nagoya Math. J. **206** (2012), 67–73.

[19] H. Matsumura and P. Monsky, On the automorphisms of hypersurfaces. J. Math. Kyoto Univ. **3** (1963/64), 347–361.

[20] T. Okada, $\mathbb{Q}$-Fano threefolds with three birational Mori fiber structures. *Algebraic varieties and automorphism groups*, 393–424, Adv. Stud. Pure Math., **75**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.

[21] T. Okada, Mori fiber structures of $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold weighted complete intersections. J. Reine Angew. Math. **738** (2018), 73-129.

[22] T. Okada, Stable rationality of orbifold Fano 3-fold hypersurfaces. J. Algebraic Geom. **28** (2019), no. 1, 99–138.

[23] T. Okada, Birationally solid Fano 3-fold hypersurfaces. arXiv:2305.06183, 2023, to appear in Mem. Eur. Math. Soc.

[24] V. V. Shokurov, Problems about Fano varieties. *Birational Geometry of Algebraic Varieties, Open Problems*, The XXIIIrd International Symposium, Division of Mathematics, The Taniguchi Foundation, pp. 30–32, 1988

[25] Y. Yamamoto, Divisorial contractions to cDV points with discrepancy greater than 1. Kyoto J. Math. **58** (2018), no. 3, 529–567.

STRUCTURES IN TRIANGULATED CATEGORIES AND N-COMPLEXES

JUN-ICHI MIYACHI

The notion of N-complexes, that is, graded objects with N-differential d ($d^N = 0$), was introduced by Kapranov ([Ka]). Dubois-Violette studied homological properties of N-complexes ([Du]). In the category of N-complexes of finite dimensional vector spaces over a field, Cibils, Solotar and Wisbauer studied projective-injective objects and their homologies ([CSW]). Gillespie and Hovey approached the homotopy category of N-complexes and its derived category from the point of view of algebraic homotopy ([GH]). We introduce homological algebra of N-complexes and N-differential graded category from the point of view of triangulated categories.

1. Stable t-structures and recollement

Let $\mathcal{D}$ be a triangulated category with the translation functor Σ. A structure of subcategories is called a stable t-structure [Mi], and has been studied by many authors under a lot of names, e.g. a torsion pair, a semiorthogonal decomposition, Bousfield localization.

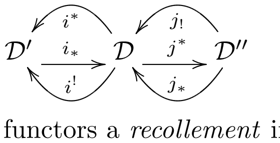
Definition 1.1. Let $\mathcal{D}$ be a triangulated category. A pair $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ of full subcategories of $\mathcal{D}$ is called a *stable t-structure* in $\mathcal{D}$ provided that

(a) $\mathcal{U} = \Sigma\mathcal{U}$ and $\mathcal{V} = \Sigma\mathcal{V}$.
(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$.
(c) For every $X \in \mathcal{D}$, there exists a triangle $U \to X \to V \to \Sigma U$ with $U \in \mathcal{U}$ and $V \in \mathcal{V}$.

Definition 1.2 ([IKM1], [IKM2]). Let $\mathcal{D}$ be a triangulated category, and let $\mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_n$ be full triangulated subcategories of $\mathcal{D}$. An n-tuple $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n)$ is called an n-gon of recollements in $\mathcal{D}$ if $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_{i+1})$ is a stable t-structure in $\mathcal{D}$ ($1 \le i \le n$), where $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{n+1}$.

If $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n)$ is an n-gon of recollements, then we have equivalences $\mathcal{U}_{k-1} \simeq \mathcal{U}_{k+1} \simeq \mathcal{D}/\mathcal{U}_k$ for any $k \mod n$.

Definition 1.3 ([BBD]). We call a diagram



of triangulated categories and functors a *recollement* if it satisfies the following:

(1) i_*, $j_!$ and j_* are fully faithful.
(2) (i^*, i_*), $(i_*, i^!)$, $(j_!, j^*)$, and (j^*, j_*) are adjoint pairs.
(3) There are canonical embeddings $\mathrm{Im}\, j_! \hookrightarrow \mathrm{Ker}\, i^*$, $\mathrm{Im}\, i_* \hookrightarrow \mathrm{Ker}\, j^*$, and $\mathrm{Im}\, j_* \hookrightarrow \mathrm{Ker}\, i^!$ which are equivalences.

We remember that a recollement corresponds to a pair of consecutive stable t-structures.

Proposition 1.4 ([Mi]). (1) *Let*

$$\xymatrix{\mathcal{D}' \ar[r]^{i_*} & \mathcal{D} \ar@/_1.5pc/[l]_{i^*} \ar@/^1.5pc/[l]^{i^!} \ar[r]^{j^*} & \mathcal{D}'' \ar@/_1.5pc/[l]_{j_!} \ar@/^1.5pc/[l]^{j_*}}$$

be a recollement. Then $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ *and* $(\mathcal{V},\mathcal{W})$ *are stable t-structures in* $\mathcal{D}$ *where we put* $\mathcal{U}=\operatorname{Im} j_!$, $\mathcal{V}=\operatorname{Im} i_*$ *and* $\mathcal{W}=\operatorname{Im} j_*$.

(2) *Let* $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ *and* $(\mathcal{V},\mathcal{W})$ *be stable t-structures in* $\mathcal{D}$. *Then for the canonical embedding* $i_*:\mathcal{V}\to\mathcal{D}$, *there is a recollement*

$$\xymatrix{\mathcal{V} \ar[r]^{i_*} & \mathcal{D} \ar@/_1.5pc/[l]_{i^*} \ar@/^1.5pc/[l]^{i^!} \ar[r]^{j^*} & \mathcal{D}/\mathcal{V} \ar@/_1.5pc/[l]_{j_!} \ar@/^1.5pc/[l]^{j_*}}$$

such that $\operatorname{Im} j_! = \mathcal{U}$ *and* $\operatorname{Im} j_* = \mathcal{W}$.

In each cases, for every object X *of* $\mathcal{D}$ *adjunction arrows of adjoints induce triangles*

$$i_*i^!X \to X \to j_*j^*X \to \Sigma i_*i^!X,$$
$$j_!j^*X \to X \to i_*i^*X \to \Sigma j_!j^*X.$$

Definition 1.5. Let $\mathcal{D}_1$ and $\mathcal{D}_2$ be triangulated categories and let $F:\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_2$ be a triangle functor.

(1) Let $(\mathcal{U}_n,\mathcal{V}_n)$ be a stable t-structure in $\mathcal{D}_n$ $(n=1,2)$. We say that F *sends* $(\mathcal{U}_1,\mathcal{V}_1)$ *to* $(\mathcal{U}_2,\mathcal{V}_2)$ if $F(\mathcal{U}_1)$ is contained in $\mathcal{U}_2$ and $F(\mathcal{V}_1)$ is in $\mathcal{V}_2$.

(2) Let $(\mathcal{U}_{in},\cdots,\mathcal{U}_{in})$ be an n-gon of recollements in $\mathcal{D}_i$ $(i=1,2)$. We say that F *sends* $(\mathcal{U}_{1n},\cdots,\mathcal{U}_{1n})$ *to* $(\mathcal{U}_{2n},\cdots,\mathcal{U}_{2n})$ if $F(\mathcal{U}_{1k})$ is contained in $\mathcal{U}_{2k}$ for any k.

Proposition 1.6 ([IKM2]). *Let* $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ *be triangulated categories. Let* $(\mathcal{U}_1,\cdots,\mathcal{U}_n)$ *and* $(\mathcal{V}_1,\cdots,\mathcal{V}_n)$ *be n-gons of recollements in* $\mathcal{D}_1$ *and* $\mathcal{D}_2$, *respectively. Assume a triangle functor* $F:\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_2$ *sends* $(\mathcal{U}_1,\cdots,\mathcal{U}_n)$ *to* $(\mathcal{V}_1,\cdots,\mathcal{V}_n)$. *Then the following hold.*

(1) *In the case that n is odd, if* $F\mid_{\mathcal{U}_t}$ *is triangle equivalent for some t, then F is triangle equivalent.*

(2) *In the case that n is even, if* $F\mid_{\mathcal{U}_t}$ *and* $F\mid_{\mathcal{U}_{t+1}}$ *are triangle equivalent for some t, then F is triangle equivalent.*

Definition 1.7. In the case that $\mathcal{D}$ has arbitrary coproducts, an object C is called *compact* in $\mathcal{D}$ if the canonical morphism $\coprod_i \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(C,X_i) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(C,\coprod_i X_i)$ is an isomorphism for any coproduct $\coprod_i X_i$ in $\mathcal{D}$. We say that $\mathcal{D}$ is compactly generated if there is a set $\{C_i\}$ of compact objects such that $X=0$ in $\mathcal{D}$ whenever $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(C_i,X)=0$ for all i.

Theorem 1.8 (cf. [Ke], [Kr2], [MN]). *Let* $\mathcal{D}$ *be a compactly generated triangulated category with a set* U *of comapct generators for* $\mathcal{D}$ *which sarisfies* $\mathsf{U}=\Sigma\,\mathsf{U}$. *For a triangle functor* $F:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ *preserving coproducts, the following are equivalent.*

(1) *F is triangle equivalent.*

(2) (a) $F\,\mathsf{U}$ *is a set of compact generators for* $\mathcal{D}'$.

(b) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(U,V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}'}(FU,FV)$ *for all* $U,V\in F\,\mathsf{U}$.

2. Algebraic triangulated categories

An exact category $\mathcal{C}$ in the sense of Quillen ([Qu]) is called a Frobenius category provided that project objects coincide injective objects, that for any object X (resp., Y) of $\mathcal{C}$ there is a conflation $0 \to Y \to Q \to X \to 0$ such that Q is projective. We denote by $\mathcal{E}$ the collection of conflations, by $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ a collection of projective objects. For a Frobenius category $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, a stable category $\underline{\mathcal{C}}$ is a category whose objects are objects of $\mathcal{C}$ and whose morphisms $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathcal{C}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/Q(X,Y)$, where $Q(X,Y)$ is a set of morphisms factor through projectives for any $X, Y \in \underline{\mathcal{C}}$. Then $\mathcal{C}$ is a triangulated category, it is called an *algebraic triangulated catgory.* In order to check whether a functor is trangle functor or not, the following Lemma is useful.

Proposition 2.1 ([IKM3]). *Let $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ be Frobenius categories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ an exact functor, that is F sends conflations in $\mathcal{C}$ to conflations in $\mathcal{C}'$. If F sends projective objects in $\mathcal{C}$ to projective objents in $\mathcal{C}'$, then it induces the triangle functor $\underline{F} : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}'$.*

Example 2.2 (cf. [Ne], [Ke], [Kr2]). For a Frobenius category $\mathcal{C}$, a complex Q of projective objects is called *acyclic* if it is a complex $Q : \cdots \to Q^{i-1} \xrightarrow{\eta^i\pi^i} Q^i \xrightarrow{\eta^{i+1}\pi^{i+1}} Q^{i+1} \to \cdots$ such that $0 \to X^i \xrightarrow{\eta^i} Q^i \xrightarrow{\pi^{i+1}} X^{i+1} \to 0$ is a conflation for any i. Then the category $\mathsf{C}^a(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})$ of acyclic complexes is a Frobenius category, and its stable category is the homotopy category $\mathsf{K}^a(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})$ of acyclic complexes which is triangle equivalent to a stable category $\underline{\mathcal{C}}$.

Theorem 2.3 (cf. [Ke], [Kr2]). *Let $\mathcal{T}$ be an algebraic triangulated category with arbitrary coproducts, $\mathcal{S}$ a small full subcategory of compact generators. Then there is a triangle equivalence $F : \mathcal{T} \to \mathsf{D}_{dg}(\mathcal{C})$ where $\mathsf{D}_{dg}(\mathcal{C})$ is a derived category for some ordinary DG category $\mathcal{C}$.*

Proof of Sketch. We may assume $\mathcal{T} = \mathsf{K}^a(\mathcal{P})$ for some Frobenius category $\mathcal{B}$ and its full subcategory $\mathcal{P}$ of projective-injective objects. Considering $\mathcal{S} \subset \mathsf{K}^a(\mathcal{P})$, let $\mathcal{A}$ be a DG category whose objects are ojects of $\mathcal{S}$, whose morphisms $\mathcal{A}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{-1}(X,Y)$ for $X, Y \in \mathcal{S}$ (see Definition 4.1). Then a functor $F : \mathsf{C}^a(\mathcal{P}) \to \mathsf{C}_{dg}(\mathcal{A})$ $(X \mapsto \mathrm{Hom}_{-1}(-,X))$ induces the triangle functor $\underline{F} : \mathsf{K}^a(\mathcal{P}) \to \mathsf{D}_{dg}(\mathcal{A})$ which sends $X \in \mathcal{S}$ to a free $\mathcal{A}$-module $X^\wedge$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^a(\mathcal{P})}(X, \Sigma^i Y) &\simeq \mathrm{H}^i \,\mathrm{Hom}_{-1}(X,Y) \\
&\simeq \mathrm{H}^i \,\mathcal{A}(X,Y) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}_{dg}(\mathcal{A})}(X^\wedge, \Sigma^i Y^\wedge)
\end{aligned}$$

Since $\mathsf{K}^a(\mathcal{P})$ is compactly generated by $\mathcal{S}$, $\mathsf{D}_{dg}(\mathcal{A})$ is compactly generated by $\mathcal{A}$. Since $\underline{F}$ preserves coproducts, $\underline{F}$ is a triangle equivalence by Theorem 1.8. □

3. N-complexes

In this section, we study the homotopy category of N-complexes. We fix a positive integer $N \geq 2$. Throughout this section $\mathcal{B}$ is an additive category. An *N-complex* is a diagram

$$\cdots \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} \cdots$$

with objects $X^i \in \mathcal{B}$ and morphisms $d_X^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X^i, X^{i+1})$ satisfying

$$d_X^{i+N-1} \cdots d_X^{i+1} d_X^i = 0$$

for any $i \in \mathbb{Z}$. A *morphism* between N-complexes is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \xrightarrow{d_X^{i+1}} \cdots \\
& \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & \\
\cdots \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} & \xrightarrow{d_Y^{i+1}} \cdots
\end{array}$$

with $f^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X^i, Y^i)$ for any $i \in \mathbb{Z}$. We denote by $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ (resp., $\mathsf{C}_N^-(\mathcal{B})$, $\mathsf{C}_N^+(\mathcal{B})$, $\mathsf{C}_N^{\mathrm{b}}(\mathcal{B})$) the category of unbounded (resp., bounded above, bounded below, bounded) N-complexes. Let $\mathcal{S}_N(\mathcal{B})$ be the collection of short exact sequences in $\mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ of which each term is split short exact in $\mathcal{B}$. Then it is easy to see the following Lemma.

Theorem 3.1 ([IKM2]). *A category $(\mathsf{C}_N(\mathcal{B}), \mathcal{S}_N(\mathcal{B}))$ is an exact category, its homotopy category $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ is a triangulated category.*

Definition 3.2. Let N be an integer greater than 2. For any integer s, we define functions $\iota_s^{(N-1)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\rho_s^{(N)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ as follows.

$$\iota_s^{(N-1)}(s+i+kN) = \begin{cases} s + k(N-1) & (i = 0) \\ s + i - 1 + k(N-1) & (0 < i < N) \end{cases}$$

$$\rho_s^{(N)}(s+i+k(N-1)) = \begin{cases} s + kN & (i = 0) \\ s + i + 1 + kN & (0 < i < N-1). \end{cases}$$

For an $(N-1)$-complex $X = (X^i, d_X^i)$, we define a complex $I_s^{(N-1)}(X)$ by

$$I_s^{(N-1)}(X)^i = X^{\iota_s^{(N-1)}(i)},$$

$$d^i_{I_s^{(N-1)}(X)} = \begin{cases} d^{\iota_s^{(N-1)}(i)} & (\iota_s^{(N-1)}(i) < \iota_s^{(N-1)}(i+1)) \\ 1 & (\iota_s^{(N-1)}(i) = \iota_s^{(N-1)}(i+1)). \end{cases}$$

For an N-complex $Y = (Y^i, d_Y^i)$, we define a complex $J_s^{(N)}(Y)$ by

$$J_s^{(N)}(X)^i = X^{\rho_s^{(N)}(i)},$$

$$d^i_{J_s^{(N)}(X)} = d^{\rho_s^{(N)}(i+1)-1} \cdots d^{\rho_s^{(N)}(i)}.$$

Then $I_s^{(N-1)} : \mathsf{C}_{N-1}(\mathcal{B}) \to \mathsf{C}_N(\mathcal{B})$ and $J_s^{(N)} : \mathsf{C}_N(\mathcal{B}) \to \mathsf{C}_{N-1}(\mathcal{B})$ are functors. Thus we have triagulated functors $\underline{I}_s{}^{\Uparrow_{N-r}^{N}} = \underline{I}_s^{(N-1)} \cdots \underline{I}_s^{(N-r)} : \mathsf{K}_{N-r}(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_N(\mathcal{B})$ and $\underline{J}_s{}^{\Downarrow_{N-r}^{N}} = \underline{J}_s^{(N-r+1)} \cdots \underline{J}_s^{(N)} : \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}_{N-r}(\mathcal{B})$. For $1 \le r < N$, we define the full subcategory of $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$

$$\mathcal{F}_s^r = \{(X^i, d^i) \in \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \mid d^{i+k} = 1_{X^{i+k}} (0 \le k < r) \text{ for } i \equiv s \mod N\}$$

Theorem 3.3 ([IKM2]). *For $1 \le r < N$, $(\mathcal{F}_s^r, \mathcal{F}_{r+s+1}^{N-r-1})$ is a stable t-structure in $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$.*

Corollary 3.4 ([IKM2]). *We have a recollement of $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$:*

$$\mathsf{K}_{N-r}(\mathcal{B}) \underset{\overset{\longleftarrow}{i_s^!}}{\overset{\overset{i_s^*}{\longleftarrow}}{\xrightarrow{i_{s*}}}} \mathsf{K}_N(\mathcal{B}) \underset{\overset{\longleftarrow}{j_{s*}}}{\overset{\overset{j_{s!}}{\longleftarrow}}{\xrightarrow{j_s^*}}} \mathsf{K}_{r+1}(\mathcal{B})$$

where $i_s^* = \underline{J}_{s-1}^{\Downarrow^N_{N-r}}$, $i_{s*} = \underline{I}_s^{\Uparrow^N_{N-r}}$, $i_s^! = \underline{J}_s^{\Downarrow^N_{N-r}}$, $j_{s!} = \underline{I}_{r+s}^{\Uparrow^N_{r+1}}$, $j_s^* = \underline{J}_{r+s}^{\Downarrow^N_{r+1}}$ *and* $j_{s!} = \underline{I}_{r+s+1}^{\Downarrow^N_{r+1}}$.

Corollary 3.5 ([IKM2]). *For any integer* s,

$$(\mathcal{F}_{s+1}^{N-2}, \mathcal{F}_s^1, \mathcal{F}_{s+2}^{N-2}, \mathcal{F}_{s+1}^1, \cdots, \mathcal{F}_{s+r+1}^{N-2}, \mathcal{F}_{s+r}^1, \cdots, \mathcal{F}_{s+N-1}^{N-2}, \mathcal{F}_{s+N-2}^1, \mathcal{F}_s^{N-2}, \mathcal{F}_{s+N-1}^1)$$

is a $2N$*-gon of recollements in* $\mathsf{K}_N(\mathcal{B})$.

Definition 3.6. We define the category $\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B})$ (resp., $\mathsf{Mor}_{N-2}(\mathcal{B})$) of sequences of morphisms in $\mathcal{B}$ as follows.

- An object is a sequence of split monomorphisms (resp., morphisms) $X : X^1 \xrightarrow{\alpha_X^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_X^{N-2}} X^{N-1}$ in $\mathcal{B}$.
- A morphism from X to Y is an $(N-1)$-tuple $f = (f^1, \cdots, f^{N-1})$ of morphisms $f^i : X^i \to Y^i$ such that $f^{i+1}\alpha_X^i = \alpha_Y^{i+1} f^i$ for $1 \le i \le N-2$.

Definition 3.7. We define the following functors:

$$\begin{array}{ll} D_{[s,t]} : \mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B}) \to \mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{t-s+1}(\mathcal{B}) & (1 \le s \le t \le N-1) \\ E^{\Uparrow^{N-1}_r} : \mathsf{Mor}_r(\mathcal{B}) \to \mathsf{Mor}_{N-2}(\mathcal{B}) & (1 \le r \le N-2) \\ U_{N-1} : \mathcal{B} \to \mathsf{Mor}_{N-2}(\mathcal{B}) & \end{array}$$

as follows. For $X^1 \xrightarrow{\alpha_X^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_X^{N-2}} X^{N-1} \in \mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B})$,

$$D_{[s,t]}(X^1 \xrightarrow{\alpha_X^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_X^{N-2}} X^{N-1}) = Y^1 \xrightarrow{\alpha_Y^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_Y^{t-s}} Y^{t-s+1}$$

where $Y^i = X^{i+s-1}, \alpha_Y^i = \alpha_X^{i+s-1}$ $(1 \le i \le t-s+1)$. We denote $D_{[s,s]}$ by $D_{[s]}$. For $X^1 \xrightarrow{\alpha_X^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_X^{r-1}} X^r \in \mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_r(\mathcal{B})$,

$$E^{\Uparrow^{N-1}_r}(X^1 \xrightarrow{\alpha_X^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_X^{r-1}} X^r) = Y^1 \xrightarrow{\alpha_Y^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_Y^{N-2}} Y^{N-1}$$

$$Y^i = \begin{cases} 0 \ (1 \le i < N-r) \\ X^{i-N+r+1} \ (N-r \le i \le N-1) \end{cases} , \alpha_Y^i = \begin{cases} 0 \ (1 \le i < N-r) \\ \alpha_X^{i-N+r+1} \ (N-r \le i \le N-1) \end{cases}$$

For $X \in \mathcal{B}$,

$$U_{N-1}(X) = Y^1 \xrightarrow{\alpha_Y^1} \cdots \xrightarrow{\alpha_Y^{N-2}} Y^{N-1}$$

where $Y^i = X, \alpha_Y^i = 1_X$ $(1 \le i \le N-1)$. Moreover, we use the same symbols for the corresponding functors $D_{[s,t]} : \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B})) \to \mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{t-s+1}(\mathcal{B}))$, $E^{\Uparrow^{N-1}_r} : \mathsf{K}(\mathsf{Mor}_r(\mathcal{B})) \to \mathsf{K}(\mathsf{Mor}_{N-2}(\mathcal{B}))$ and $U_{N-1} : \mathsf{K}(\mathcal{B}) \to \mathsf{K}(\mathsf{Mor}_{N-2}(\mathcal{B}))$.

Definition 3.8. We define the following full triangulated subcategories of $\mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B}))$:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{E}^{[2,N-1]} = \mathrm{Ker}\, D_{[1]} & \mathcal{E}^{[1,N-2]} = \mathrm{Ker}\, D_{[N-1]} & \mathcal{E}^1 = \mathrm{Ker}\, D_{[2,N-1]} \\ \mathcal{E}^s = \mathrm{Ker}\, D_{[1,s-1]} \bigcap \mathrm{Ker}\, D_{[s+1,N-1]} & \mathcal{E}^{N-1} = \mathrm{Ker}\, D_{[1,N-2]} & \end{array}$$

For $1 \le s < t \le N-1$, $\mathcal{F}^{[s,t]}$ is the full triangulated subcategory of $\mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B}))$ consisting of objects $X^1 \xrightarrow{\alpha^1} \cdots \xrightarrow{\alpha^{N-2}} X^{N-1}$ such that $\alpha^s = \cdots = \alpha^{t-1} = 1$.

Proposition 3.9 ([IKM2])**.** *Let $\mathcal{B}$ be an additive category. Then a $2N$-tuple of full subcategories*

$$(\mathcal{F}^{[1,N-1]}, \mathcal{E}^{[2,N-1]}, \mathcal{E}^{1}, \mathcal{F}^{[1,2]}, \cdots, \mathcal{E}^{s}, \mathcal{F}^{[s,s+1]}, \cdots, \mathcal{E}^{N-2}, \mathcal{F}^{[N-2,N-1]}, \mathcal{E}^{N-1}, \mathcal{E}^{[1,N-2]})$$

is a $2N$-gon of recollements in $\mathsf{K}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B}))$.

We have a triangle functor which sends $2N$-gon in Proposition 1.6 to one in Corollary 3.5. By Propositions 1.6, we have the following

Theorem 3.10 ([IKM2])**.** *Let $\mathcal{B}$ be an additive category, then we have triangle equivalences:*

$$\mathsf{K}^{\sharp}(\mathsf{Mor}^{\mathrm{sm}}_{N-2}(\mathcal{B})) \simeq \mathsf{K}^{\sharp}_{N}(\mathcal{B})$$

where $\sharp =$ nothing, $-, +, \mathrm{b}$.

Definition 3.11. Let $\mathcal{A}$ be an abelian category, and $\mathsf{Proj}\,\mathcal{A}$ (resp., $\mathsf{Inj}\,\mathcal{A}$) the subcategory of $\mathcal{A}$ consisting of projective (resp., injective) objects of $\mathcal{A}$. Let X be an N-complex of objects of $\mathcal{A}$

$$\cdots \to X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^{i} \xrightarrow{d_X^{i}} X^{i+1} \to \cdots$$

For $0 < n < N$ and $i \in \mathbb{Z}$, we define

$$\mathrm{Z}^{i}_{(r)}(X) := \mathrm{Ker}(d_X^{i+r-1} \cdots d_X^{i}), \quad \mathrm{B}^{i}_{(r)}(X) := \mathrm{Im}(d_X^{i-1} \cdots d_X^{i-r}),$$
$$\mathrm{C}^{i}_{(r)}(X) := \mathrm{Cok}(d_X^{i-1} \cdots d_X^{i-r}), \quad \mathrm{H}^{i}_{(r)}(X) := \mathrm{Z}^{i}_{(r)}(X)/\,\mathrm{B}^{i}_{(N-r)}(X).$$

An N-complex X is called *acyclic* if $\mathrm{H}^{i}_{(r)}(X) = 0$ for all i and $1 \le r < N$.

Lemma 3.12 ([Du])**.** *For any N-complex X, the following sequence is exact for any $i \in \mathbb{Z}$ and $0 < \ell, m$ satisfying $\ell + m < N$.*

$$\begin{aligned} \cdots \to \quad & H^{i}_{(m)}(X) \to H^{i}_{(\ell+m)}(X) \to H^{i+m}_{(\ell)}(X) \\ \to \quad & H^{i+m}_{(N-m)}(X) \to H^{i+\ell+m}_{(N-\ell-m)}(X) \to H^{i+\ell+m}_{(N-\ell)}(X) \\ \to \quad & N^{i+N}_{(m)}(X) \to H^{i+N}_{(\ell+m)}(X) \to H^{i+N+m}_{(\ell)}(X) \quad \to \cdots . \end{aligned}$$

Lemma 3.13 ([Du])**.** *Let $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ be a short exact sequence of N-complexes, then we have the following exact sequence*

$$\begin{aligned} \cdots \quad \to \quad & H^{Nr+p}_{(r)}(X) \xrightarrow{\alpha_*} H^{Nr+p}_{(n)}(Y) \xrightarrow{\beta_*} H^{Nr+p}_{(n)}(Z) \\ \xrightarrow{\partial_*} \quad & H^{Nr+p+r}_{(N-r)}(X) \xrightarrow{\alpha_*} H^{Nr+p+r}_{(N-r)}(Y) \xrightarrow{\beta_*} H^{Nr+p+r}_{(N-r)}(Z) \\ \xrightarrow{\partial_*} \quad & H^{N(r+1)+p}_{(r)}(X) \xrightarrow{\alpha_*} \cdots . \end{aligned}$$

In particular, if $H^{i}_{1}(X) = 0$ for any $i \in \mathbb{Z}$, then we have $H^{i}_{(r)}(X) = 0$ for any $i \in \mathbb{Z}$ and $0 < r < N$.

Definition 3.14. Let $\mathsf{K}^{\emptyset}_{N}(\mathcal{A})$ be the homotopy category of acyclic N-complexes. The derived category $\mathsf{D}_N(\mathcal{A})$ of N-complexes is defined by the quotient category $\mathsf{K}_N(\mathcal{A})/\,\mathsf{K}^{\emptyset}_{N}(\mathcal{A})$.

Theorem 3.15 ([IKM2], [IKM3])**.** *Let $\mathcal{A}$ be an Ab4 abelian category with enough projectives. Then we have triangle equivalences:*

$$\mathsf{D}(\mathsf{Mor}_{N-2}(\mathcal{A})) \simeq \mathsf{D}_N(\mathcal{A}).$$

4. NDG CATEGORIES

In order to define N-differential graded categories, we require a primitive N-root q of 1 in the base ring ([Ka]). Let k be a commutative ring with unity which has a primitive N-root q of 1.

Definition 4.1. For $U, V \in \mathsf{C}_N(k)$,

$$U \otimes_q V = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} U \otimes^n V, \quad U \otimes^n V = \coprod_{i+j=n} U^i \otimes V^j$$
$$d_{U \otimes_q V}(u \otimes v) = d_U(u) \otimes v + q^r u \otimes d_V(v) \ (u \in U^r, y \in V)$$

$$\mathrm{Hom}_q(U, V) := \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^n(U, V), \quad \mathrm{Hom}^n(U, V) = \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(U^i, V^j)$$
$$d_{\mathrm{Hom}_q(U,V)}(f) = d_V \circ f - q^r f \circ d_U \text{ for any } f \in \mathrm{Hom}^r(U, V)$$

Then $U \otimes_q V, \mathrm{Hom}_q(U, V) \in \mathsf{C}_N(k)$.

Remark 4.2. Since $U \otimes_q V \simeq V \otimes_{q^{-1}} U$, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_N(k)}(U \otimes_q V, W) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_N(k)}(U, \mathrm{Hom}_q(V, W)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_N(k)}(V, \mathrm{Hom}_{q^{-1}}(U, W))\end{aligned}$$

Therefore $\mathsf{C}_N(k)$ is a non-symmetric biclosed monoidal category.

Definition 4.3. An N_qDG category $\mathcal{A}$ is defined by the following datum.

(1) A class of objects $Ob\mathcal{A}$.
(2) The morphism set

$$\mathcal{A}(A, B) = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}^i(A, B)$$

which is an N-differential graded k-module for any A and B in $Ob\mathcal{A}$, and the composition

$$\begin{aligned}\mu : \ &\mathcal{A}(B, C) \otimes_q \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(A, C) \quad \text{in } \mathsf{C}_N(k). \\ &(f \otimes g \mapsto fg)\end{aligned}$$

That is, $\mu \circ (\mu \otimes 1) = \mu \circ (1 \otimes \mu)$ in $\mathsf{C}_N(k)$.

Example 4.4. Let $N_q dg(k)$ (resp., $N_{q^{-1}} dg(k)$) be the category of NDG k-modules of which morphism sets $\mathrm{Hom}_q(X, Y)$ (resp., $\mathrm{Hom}_{q^{-1}}(X, Y)$) for all NDG k-modules X, Y. Then $N_q dg(k)$ (resp., $N_{q^{-1}} dg(k)$) is a N_qDG (resp., $N_{q^{-1}}$DG) category.
In the language of enriched categories, by Remark 4.2 $\mathcal{V}_q = N_q dg(k)$ and $\mathcal{V}_{q^{-1}} = N_{q^{-1}} dg(k)$ are enriched categories over $\mathcal{V} = \mathsf{C}_N(k)$ induced by the internal-homs $\mathrm{Hom}_q(-,-)$ and $\mathrm{Hom}_{q^{-1}}(-,-)$, respectively. Since $\mathcal{V}$ is non-symmetric for $N > 2$, $\mathcal{V}_q$ is not equivalent to $\mathcal{V}_{q^{-1}}$ in general.

Definition 4.5. A right NDG $\mathcal{A}$-module $X = (X, d_X; \rho_X)$ is a collection of an NDG k-module $X(A) = (X(A), d_{X(A)})$ for any objet A of $\mathcal{A}$ with a homogeneous morphism of degree 0 as a scalar multiplication

$$\rho_X : X(A_1) \otimes_q \mathcal{A}(A_2, A_1) \to X(A_2) \quad \text{in } \mathsf{C}_N(k)$$

satisfying

(1) $x 1_A = x$ for any $A \in \mathcal{A}$, $x \in X(A)$ and $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$.
(2) $\rho_X \circ (1 \otimes \mu) = \rho_X \circ (\rho_X \otimes 1)$ in $\mathsf{C}_N(k)$.

The category $\mathsf{C}_{Ndg}(\mathcal{A})$ of right graded $\mathcal{A}$-modules is defiend by the following data:

(1) objects are right NDG $\mathcal{A}$-modules.

(2) For right NDG $\mathcal{A}$-modules$X = (X, \rho_X), Y = (Y, \rho_Y)$, a morhism $F : X \to Y$ is defined by a collection of morphiisms $F_A : X(A) \to Y(A)$ in $\mathsf{C}_N(k)$ such that

$$\begin{array}{ccc} X(A_1)\otimes_q\mathcal{A}(A_2, A_1) & \xrightarrow{\rho_X} & X(A_2) \\ {\scriptstyle F_{A_1}\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{A_2}} \\ Y(A_1)\otimes_q\mathcal{A}(A_2, A_1) & \xrightarrow{\rho_Y} & Y(A_2) \end{array}$$

is commutative in $\mathsf{C}_N(k)$.

Similarly, left graded $\mathcal{A}$-modules and left NDG $\mathcal{A}$-modules are defined.

Remark 4.6. By Remark 4.2, we know that the above definition of left NDG $\mathcal{A}$-modules is equivalent to the one of covariant functors from $\mathcal{A}$ to $N_q dg(k)$ as the same as [Ke]. But by the language of functors, right NDG $\mathcal{A}$-modules are defined by contravariant functors from $\mathcal{A}$ to the $N_{q^{-1}}DG$ category $N_{q^{-1}}dg(k)$, because by Remark 4.2 the opposite category $\mathcal{A}^{op}$ of an N_qDG category $\mathcal{A}$ is an $N_{q^{-1}}DG$ category. Therefore in case of $N > 2$ it is difficult to define right NDG $\mathcal{A}$-modules, especially NDG $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}$-bimodules on the same ground.

As in the case of the category of N-complexes, we obtain the following result.

Theorem 4.7 ([MN]). *Let $\mathcal{A}$ be an N_qDG category, $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ the collection of exact sequences $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ in $\mathsf{C}_{Ndg}(\mathcal{A})$ which are split exact sequences as graded $\mathcal{A}$-modules. Then $(\mathsf{C}_{Ndg}(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\mathcal{A}})$ is a Frobenius category, and its homotopy $\mathsf{K}_{Ndg}(\mathcal{A})$ is an algebraic triangulated category.*

Definition 4.8. Let $\mathcal{A}$ be an N_qDG category, $\mathsf{K}_{Ndg}(\mathcal{A})$ the homotopy category of right NDG $\mathcal{A}$-modules, and $\mathsf{K}^{\phi}_{Ndg}(\mathcal{A})$ the full subcategory of $\mathsf{K}_{Ndg}(\mathcal{A})$ consisting of acyclic right NDG $\mathcal{A}$-modules. The derived category of right NDG $\mathcal{A}$-modules is defined by the quotient category

$$\mathsf{D}_{Ndg}(\mathcal{A}) = \mathsf{K}_{Ndg}(\mathcal{A})/K^{\phi}_{Ndg}(\mathcal{A}).$$

Proposition 4.9. *For any right NDG $\mathcal{A}$-module X, Y and any object A of $\mathcal{A}$,*

(1) $\mathrm{Hom}_{K_{Ndg(\mathcal{A})}}(\theta_q^{-n}X, Y) \simeq \mathrm{H}^n_{(1)}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A},q}(X, Y)$,
(2) $\mathrm{Hom}_{K_{Ndg(\mathcal{A})}}(\theta_q^{-n}X, \Sigma Y) \simeq \mathrm{H}^n_{(N-1)}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A},q}(X, Y)$.

In particular,

$$\mathrm{Hom}_{K_{Ndg(\mathcal{A})}}(\theta_q^{-n}A^\wedge, X) \simeq \mathrm{H}^n_{(1)}\,X(A).$$

where $(\theta_q X)(A)^m = X(A)^{m+1}, d_{\theta_q X} = q^{-1}d_{X(A)}, A^\wedge = \mathcal{A}(-, A)$.
By Lemma 3.13, we have $\{\Sigma^i\theta_q^j A^\wedge \mid A \in \mathcal{A}, 1-N \leq j \leq 0, i \in \mathbb{Z}\}$ is a collection of compact generators for $\mathsf{D}_{Ndg}(\mathcal{A})$.

According to Theorems 2.3, 4.7 and Proposition 4.9, we have the follwing result.

Theorem 4.10 ([MN]). *For any N_qDG category $\mathcal{A}$, there exists a DG category $\mathcal{B}$ such that $\mathsf{D}_{Ndg}(\mathcal{A})$ is triangle equivalent to the derived category $\mathsf{D}_{dg}(\mathcal{B})$.*

References

[BBD] A. A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, 'Faisceaux Pervers', *Astérisque* **100** (1982).

[CSW] C. Cibils, A. Solotar and R. Wisbauer, 'N-Complexes as Functors, Amplitude Cohomology and Fusion Rules', *Commun. Math. Phys.* 272 (2007), 837-849.

[Du] M. Dubois-Violette, '$d^N = 0$: Generalized Homology', *K-Theory*, Vol. **14**, Number 4 (1998) 371-404.

[Du2] M. Dubois-Violette, Generalized differential spaces with $d^N = 0$ and the q-differential calculus, Quantum groups and integrable systems, I (Prague, 1996). Czechoslovak J. Phys. 46 (1996), no. 12, 1227–1233.

[DK] M. Dubois-Violette, R. Kerner, Universal q-differential calculus and q-analog of homological algebra, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 65 (1996), no. 2, 175–188.

[Gi] J. Gillespie, The homotopy category of N-complexes is a homotopy category, J. Homotopy Relat. Struct. 10 (2015), no. 1, 93–106.

[GH] J. Gillespie, M. Hovey, 'Gorenstein model structures and generalized derived categories', *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) 53 (2010), no. 3, 675-696.

[Ha] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras, London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[IKM1] O. Iyama, K. Kato, J. Miyachi, Recollement of homotopy categories and Cohen-Macaulay modules, J. K-Theory 8 (2011), no. 3, 507–542.

[IKM2] O. Iyama, K. Kato and J. Miyachi, Derived categories of N-complexes, J. Lond. Math. Soc. (2) 96 (2017), no. 3, 687-716.

[IKM3] O. Iyama, K. Kato and J. Miyachi, Polygon of recollements and N-complexes, 2016, arXiv:1603.06056.

[Ka] M. M. Kapranov, 'On the q-analog of homological algebra', *Preprint, Cornell University*,1991; q-alg/961005.

[Ke] B. Keller, 'Deriving DG categories', *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **27** (1994), 63-102.

[Kr1] H. Krause, A Brown representability theorem via coherent functors, Topology **41** (2000), 853–861.

[Kr2] H. Krause, 'Derived categories, resolutions, and Brown representability', Interactions between homotopy theory and algebra. Summer school, University of Chicago, IL, USA, July 26–August 6, 2004. Providence, RI, *American Mathematical Society (AMS), Contemporary Mathematics* 436, 101-139 (2007).

[Mi] J. Miyachi, Localization of Triangulated Categories and Derived Categories, J. Algebra **141** (1991), 463-483.

[MN] J, Miyachi, H. Nagase, Derived categories of NDG categories, J. Homotopy Relat. Struct. 16 (2021), no. 2, 191–224.

[Ne] A. Neeman, The derived category of an exact category, J. Algebra 135 (1990), no. 2, 388–394.

[Ne2] A. Neeman, "Triangulated categories", Annals of Mathematics Studies 148, Princeton Univ. Press, 2001.

[Qu] D. Quillen, Higher Algebraic K-theory I, Springer LNM **341**, 1973, 85-147.

[Si] A. Sitarz, Andrzej, On the tensor product construction for q-differential algebras, Lett. Math. Phys. 44 (1998), no. 1, 17–21.

Department of Mathematics, Tokyo Gakugei University, Koganei-shi, Tokyo, 184-8501, Japan

Email address: `miyachi@u-gakugei.ac.jp`

非可換 DEL PEZZO 曲面の幾何学

大川新之介（大阪大学）

Abstract. 非可換 del Pezzo 曲面に関する研究の現状と今後の展望について概説する。

1. はじめに

近年、abel 圏や (enhanced) 三角圏に関する幾何学的な動機にもとづいた研究が活発に行われており、これらが非可換代数幾何学 (noncommutative algebraic geometry) という言葉でゆるく総称されるようになった。非可換代数幾何学で興味の対象となる圏の代表例は代数多様体上の連接層がなす abel 圏やその導来圏、実 symplectic 多様体の深谷圏、行列因子化の圏などである。さらに、既存の三角圏の半直交分解成分を取ったり、逆に複数の三角圏を両側加群に沿って貼り合わせることでより多くの興味深い研究対象が得られる。また、既知の圏を変形することで更に多くの興味深い三角圏が得られる。

第 61 回代数学シンポジウムにおいて「非可換代数曲面」という題で講演を行った。本稿では、del Pezzo 曲面の連接層の圏を変形して得られる非可換 del Pezzo 曲面について、その後に理解できたことを概説する。簡単のため、本稿では基礎体 $\mathbf{k}$ は標数 0 の代数閉体とする。

謝辞. 第 69 回代数学シンポジウムにおける講演の機会を下さった関係者の皆様、特にシンポジウム責任者の朝倉政典先生ならびに代数幾何学プログラム責任者の大橋久範・上原北斗両先生に感謝いたします。本研究は科研費 (19KK0348, 20H01797, 20H01794, 21H04994, 23K25771) の助成を受けました。

2. Abel 圏の変形と Poisson 構造

Abel 圏の平坦変形の理論が [LV06] で導入され、さらに変形理論が Hochschild differential graded Lie algebra (DGLA) で記述されることが [LV05] で証明されている。特に、X を基礎体 $\mathbf{k}$ 上の非特異射影代数多様体としたとき、連接層の abel 圏 $\operatorname{coh} X$ の $\mathbf{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2$ 上の平坦変形の同値類集合は X の 2 次 Hochschild cohomology

$$\mathrm{HH}^2(X) := \operatorname{Ext}^2_{X\times_{\mathbf{k}}X}\left(\mathcal{O}_{\Delta_{X/\mathbf{k}}}, \mathcal{O}_{\Delta_{X/\mathbf{k}}}\right) \tag{2.1}$$

と自然に同一視される。さらに、これは Hochschild-Kostant-Rosenberg (HKR) 同型によって 3 つの成分に分解される。

$$\mathrm{HH}^2(X) \simeq H^0\left(X, \wedge^2 T_{X/\mathbf{k}}\right) \oplus H^1\left(X, T_{X/\mathbf{k}}\right) \oplus H^2\left(X, \mathcal{O}_X\right) \tag{2.2}$$

第 2 成分 $H^1\left(X, T_{X/\mathbf{k}}\right)$ は X の代数多様体としての変形を分類しており、可換変形の方向である。また、$H^2\left(X, \mathcal{O}_X\right)$ は gerby 変形に対応しているが、本稿では有理多様体だけを考えるので、この方向は消えている。残った $H^0\left(X, \wedge^2 T_{X/\mathbf{k}}\right)$ は定義から X 上の bivector の空間であるが、これは X の Poisson 変形に対応する方向である。この方向への $\operatorname{coh} X$ の変形は Poisson 構造の圏論的変形量子化と呼ぶべきものであり、本稿の主な興味の対象である。以下、$\operatorname{coh} X$ の平坦変形を X の非可換変形とも呼ぶことにする。

なお、1 次 Hochschild cohomology

$$\mathrm{HH}^1(X) \simeq H^0\left(X, T_{X/\mathbf{k}}\right) \oplus H^1\left(X, \mathcal{O}_X\right) \tag{2.3}$$

は無限小自己同値を記述しており、coh X の自己同値群の Lie 環を記述している。さらに、

$$\mathrm{HH}^3(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{3} H^i\left(X, \wedge^{3-i} T_{X/\mathbf{k}}\right) \tag{2.4}$$

が障害空間の役割を果たすこともわかっている。例えば X が del Pezzo 曲面の場合にはこの空間は消えており、従って coh X の変形は障害を持たない。一方、例えば $X = \mathbb{P}^3$ の場合には

$$\mathrm{HH}^3(X) \simeq H^0\left(X, \wedge^3 T_{X/\mathbf{k}}\right) \simeq \mathrm{Sym}^4 \mathbf{k}^{\oplus 4} \neq 0 \tag{2.5}$$

であり、実際に coh X の変形は障害されている。これは、X 上の bivector $\beta \in H^0\left(X, \wedge^2 T_{X/\mathbf{k}}\right)$ が Poisson 構造を定めるための条件

$$[\beta, \beta]_{\mathsf{Sch}} = 0 \in H^0\left(X, \wedge^3 T_{X/\mathbf{k}}\right) \tag{2.6}$$

に対応しており、非自明な非線形条件である。ただし $[-,-]_{\mathsf{Sch}}$ は Schouten bracket を表す。

coh $\mathbb{P}^3$ の変形の倉西空間が [Pym15] で調べられており、6 つの既約成分を持つことがわかっている。この結果は、Kontsevich formality theorem によって実質的に $\mathbb{P}^3$ 上の Poisson 構造の分類問題に帰着することで得られている。さらに、Poisson 構造はある種の foliation と等価であり、後者は [CL96] で分類されている。関連する仕事として、[LPT13] において Picard 数 1 の Fano 3-fold の Poisson 構造が分類されている。

6 つの既約成分の中に $R(2,2)$ と呼ばれる成分があり、4 次元の Sklyanin 代数を分類している。4 次元 Sklyanin 代数の中には次数 2 の中心元で線型独立なものが 2 つあり、それらは非可換 2 次曲面の pencil を張る。また、$R(1,3)$ と呼ばれる成分もあり、これらは非可換 3 次曲面の pencil を含むような非可換 $\mathbb{P}^3$ を分類している。このように、高次元 Fano 多様体 (stack) の非可換変形は非可換 del Pezzo 曲面の観点からも大変興味深く、調べるべき対象が多く残されている。

標数 0 の Fano 多様体の可換変形の障害空間は秋月-中野消滅定理で消えており、従って可換変形は障害を持たず、倉西空間は非特異（特に既約）である。上述のように、非可換変形まで考えると全く様相が異なるわけである。

非可換 del Pezzo 曲面はそれ自体興味深い対象であるが、それと同時に、一般化された複素構造 [Gua11] との関係、特異点の unfolding との関係 [EG10]、楕円 Painlevé 方程式との関係 [Rai16] など、周辺分野との繋がりを豊富に持っている。

3. del Pezzo 曲面の幾何学

反標準束 $\omega_X^{-1} = \wedge^{\dim X} T_{X/\mathbf{k}}$ が豊富であるような非特異射影代数多様体 X を Fano 多様体と呼ぶ。双有理幾何学（極小モデル理論）において重要な位置を占めるが、様々な文脈に登場する対象であり、古来より極めて多くの研究がなされてきた。1 次元の Fano 多様体は射影直線に他ならない。2 次元の Fano 多様体は del Pezzo 曲面と呼ばれ、射影平面を一般の位置にある高々8 点で blow-up して得られる曲面または 2 次曲面と同型になることが知られている（全部で 10 種類の変形類がある）。Del Pezzo 曲面に限っても極めて膨大な研究の歴史があり、例えば 3 次曲面上の 27 本の直線の幾何学は 19 世紀に得られた記念碑的な結果である (例えば [Dol12] を見よ)。

HKR 同型 (2.2) からわかるように、X が曲線の場合、X の非可換変形は可換なものしかない。よって、非可換変形が興味深くなるのは 2 次元からということになる。X が曲面の場合 $\wedge^2 T_{X/\mathbf{k}} = \omega_X^{-1}$ となるため、X 上の bivector は反標準束の大域切断に他ならないが、del Pezzo 曲面は有効な反標準因子を持つので、必ず非可換変形を持つことになる。さらに、上述のように del Pezzo 曲面は $\mathrm{HH}^3 = 0$ を満たすので、非可換変形が障害を持たず素性が良い。こうした理由から、代数多様体の非可換変形は del Pezzo 曲面の場合によく調べられてきた。

Del Pezzo 曲面を語る上で root 系の話を避けることはできない。$\mathbb{P}^2$ の 1 点爆発と 2 点爆発の場合を除き、del Pezzo 曲面 X の Picard lattice Pic X の（反）標準束に直交する部分 $\omega_X^{\perp} \subseteq \mathrm{Pic}\, X$ は特定の root lattice と isometric である。その Dynkin 型を以下の Table 3.1 に

X	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$\mathsf{Bl}_1 \mathbb{P}^2$	$\mathsf{Bl}_2 \mathbb{P}^2$	$\mathsf{Bl}_3 \mathbb{P}^2$	$\mathsf{Bl}_4 \mathbb{P}^2$	$\mathsf{Bl}_5 \mathbb{P}^2$	$\mathsf{Bl}_6 \mathbb{P}^2$	$\mathsf{Bl}_7 \mathbb{P}^2$	$\mathsf{Bl}_8 \mathbb{P}^2$
R	$\emptyset$	A_1	N/A	N/A	$A_1 + A_2$	A_4	E_5	E_6	E_7	E_8

Table 3.1. del Pezzo 曲面と root 系

まとめた。ただし $\mathsf{Bl}_r \mathbb{P}^2$ は $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある r 点での blow-up の結果得られる曲面（の変形類）を表す。$9 - r = \omega^2_{\mathsf{Bl}_r \mathbb{P}^2}$ をその del Pezzo 曲面の次数と呼び、1 以上 9 以下の整数を取る。次数 8 の del Pezzo 曲面は $\mathsf{Bl}_1 \mathbb{P}^2$ と $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 種類が存在するが、それ以外の次数については、次数 d の del Pezzo 曲面は全て $\mathsf{Bl}_{9-d} \mathbb{P}^2$ である。

Del Pezzo 曲面の Picard lattice に root 系が出現する理由であるが、1 つの説明の方法は、その Dynkin 型の特異点を持つ特異な del Pezzo 曲面への退化が存在するということである。例えば 3 次曲面の場合、E_6 型特異点を持つ特異 3 次曲面への退化が存在する。そのような特異な del Pezzo 曲面の極小特異点解消は弱 del Pezzo 曲面（反標準束が豊富ではないが nef かつ big な曲面）であり、例外曲線の双対グラフがちょうど Dynkin 図に一致する。一般に非特異な del Pezzo 曲面はその弱 del Pezzo 曲面の変形として得られるが、変形のもとで Picard lattice の同型類と反標準因子の類が保たれるため、root lattice を含むことになる。

$\mathbb{P}^2, \mathsf{Bl}_1 \mathbb{P}^2, \mathsf{Bl}_2 \mathbb{P}^2,$ の 3 種類以外の Pezzo 曲面の変形類を 1 つ固定し、そのタイプの del Pezzo 曲面の Picard lattice と isometric な（抽象）lattice Λ を 1 つ固定する。さらに、反標準束に対応する元 $\omega^{-1} \in \Lambda$ を 1 つ固定しておく。このとき、その変形類の del Pezzo 曲面 X の marking とは isometry

$$\Lambda \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} X \tag{3.1}$$

であって ω^{-1} を ω_X^{-1} に送るものである。Marking つきの del Pezzo 曲面を marked del Pezzo 曲面と呼び、それらの間の同型は代数多様体の同型であって marking と整合的なものとする。Lattice Λ の isometry であって ω^{-1} を保つもの全体のなす有限群は、ちょうどその root lattice

$$R = \omega^{\perp} \subseteq \Lambda \tag{3.2}$$

の Weyl 群に一致する。これを W で表すことにすると、定義から、与えられた del Pezzo 曲面 X の marking 全体の集合に W が自然に右作用し、その作用は自由かつ推移的である。

一方、$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合を除き、del Pezzo 曲面の marking と、互いに交わらない (-1) 曲線の列であってそれらを blow-down すると $\mathbb{P}^2$ になるものとが 1 対 1 に対応する。Blow-down して得られる $\mathbb{P}^2$ 上の点列の情報から逆に marking を復元することができるため、結局、次数 $d = 9 - r$ の marked del Pezzo surface の moduli 空間は $\mathbb{P}^2$ 上の一般の位置にある順序付けられた r 点の空間の $PGL(3) = \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^2)$ による商に一致する。この moduli 空間には上記の考察から自然に W が右作用しており、その商が marking なしの del Pezzo 曲面の moduli 空間となる。

(Marked) del Pezzo 曲面の moduli 空間およびその compact 化の研究は膨大な歴史を持つ。例えば [HKT09] においては、moduli 空間の compact 化の構成において root 系が本質的な役割を果たす。

一方、del Pezzo 曲面は高次元の Fano 多様体の閉部分集合として実現することができる。例えば、次数 3 の del Pezzo 曲面は 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ の 3 次曲面として実現可能であり、$\mathbb{P}^3$ への埋め込みは反標準線型系で与えられる。他の次数の del Pezzo 曲面については、例えば Fanography を参照されたい。

以上、del Pezzo 曲面の幾何学について非常に簡単に紹介した。これらを非可換 del Pezzo 曲面へ拡張することを目指し、様々な研究が行われてきた。本稿ではこれらについて概説する。

4. Artin-Schelter 正則代数としての非可換 del Pezzo 曲面

非可換次数付き代数 $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ が与えられたとき、その次数付き右加群のなす圏 $\operatorname{Grmod} S$ を捻じれ加群のなす部分圏 $\operatorname{Tors} S$ で局所化して得られる圏を $\operatorname{QGr} S$ で表す。これは、S に付随して定まる仮想的な非可換射影多様体 $\operatorname{Proj} S$ 上の準連接層の圏と考えられる。実際、射影代数多様体 X およびその上の十分豊富な直線束 L に対して $\operatorname{Qcoh} X \simeq \operatorname{QGr} R(X, L)$ が成立する (Serre)。ただし、ここで $R(X, L)$ は切断環を表す。このようなアイディアに基づいた非可換次数付き代数（およびその一般化）の研究を非可換射影幾何学（noncommutative projective geometry）と呼び、$\operatorname{QGr} S$ に注目することで自然と非可換代数幾何学の文脈に回収される。問題は、どのようなクラスの非可換次数付き代数を考えるか、である。

非可換射影幾何学の歴史は 1987 年の論文 [AS87] に始まる。この論文で導入された Artin-Schelter (AS) 正則代数は、ある種の homology 代数的な良い条件を満たす非可換次数付き代数のクラスである。彼らは次数 1 で生成される 3 次元代数の場合に注目し、それぞれ quadratic, cubic と呼ばれる 2 種類の変形類があることを発見した。それぞれの変形類に属する次数付き代数の QGr は非可換射影平面、非可換 2 次曲面を与える。その後 [ATV90] において、このような代数の同型類がある種の幾何学的データと一対一対応することが証明され、分類が完成した。

一方、局所化関手 $\operatorname{Grmod} S \to \operatorname{QGr} S$ による $S(i)$ の像を $\mathcal{O}(i)$ と表すことにすると、対象が標準的に $\mathbb{Z}$ で添字付けられた $\operatorname{QGr} S$ の部分圏 $(\mathcal{O}(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ が定まる。これはほとんど S と等価な情報であるが、非可換代数幾何学の観点からは、こちらに注目する方がより自然である。このような、特定の集合 I によって対象が添字付けられた $\mathbf{k}$ 線型圏を I 代数と呼ぶ。以下、I 代数の対象を I の元と同一視する。$\mathbb{Z}$ 代数および三角圏の観点から [ATV90] の結果を再解釈・一般化した仕事が [BP93; Van11] である。

筆者は共同研究者と共に、以上の話を全ての del Pezzo 曲面の変形類に一般化する研究を続けてきた。その中で鍵になるのが、我々が pure helix と呼ぶ概念である[1]：

定義 4.1. 三角 $\mathbf{k}$-線型圏 $\mathcal{T}$ の helix とは、$\mathcal{T}$ の対象の列 $(\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ であって以下の条件を満たすものである。ただし、$r = \operatorname{rank} K_0(\mathcal{T})$ とする：

- $\mathcal{E}_i$ は例外対象である。つまり、以下を満たす。
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i[\ell]) = \begin{cases} \mathbf{k}\cdot \mathrm{id}_{\mathcal{E}_i} & \ell = 0 \\ 0 & \ell \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$
- 任意の $i \in \mathbb{Z}$ について $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}, \dots, \mathcal{E}_{i+r-1}$ は $\mathcal{T}$ の充満例外対象列である。つまり、これらは三角圏として $\mathcal{T}$ を生成し、さらに任意の $i \leq j < k \leq i+r-1$ と $\ell \in \mathbb{Z}$ について次が成立する：
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_j[\ell]) = 0 \tag{4.2}$$

Helix が以下の条件を満たすとき、pure helix と呼ぶ：

- (purity) 任意の $-\infty < j \leq k < \infty$ と $\ell \neq 0$ について次が成立する：
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k[\ell]) = 0 \tag{4.3}$$

Helix に対し、その長さ r の切片として得られる充満例外対象列を helix の foundation と呼ぶ。Foundation が与えられると、それを Serre 関手（のシフト）の冪で左右に伸ばす、あるいは左・右変異の繰り返すことで helix が生成できる。

例 4.2. $(\mathcal{O}(i))_{i\in\mathbb{Z}} \subset D^b \operatorname{coh} \mathbb{P}^n$ は pure helix である。ここで $r = n + 1$.

例 4.3. $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(0,1), \mathcal{O}(1,1), \mathcal{O}(1,2)) \subset D^b \operatorname{coh} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は pure helix を生成する充満例外対象列である。ここで $r = 4$.

[1] [BS10] では geometric helix と呼ばれ、[OU20] では acyclic helix と呼んだ。Very strong helix と呼ぶ人もいる。なお、[BP93] で定義されている geometricity は [BS10] の geometricity よりも強い。

例 4.4. 3次元 Artin-Schelter quadratic/cubic $\mathbb{Z}$ 代数 A に対し、$(\mathcal{O}(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ は $D^b \operatorname{qgr} A$ の pure helix である。ただし $\operatorname{qgr} A \subset \operatorname{QGr} A$ は noetherian object のなす部分圏である。

例 4.5. 任意の del Pezzo 曲面にはベクトル束からなる pure helix が存在する。

例 4.6. $\mathsf{Bl}_1 \mathbb{P}^2$ と $\mathsf{Bl}_2 \mathbb{P}^2$ を除く全ての del Pezzo 曲面はベクトル束からなる 3-block helix を持つ ([KN98])。これらは特に pure helix であり、特定の Diophantine 方程式の解と 1 対 1 対応する。

Helix は自然に $\mathbb{Z}$ 代数と思えることに注意する。一般に I 代数 A に対し、$\mathbf{k}$ 線型前層圏

$$\operatorname{Mod} A := [A^{\mathrm{op}}, \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}] \tag{4.4}$$

を右 A 加群の圏と呼ぶ。これは次の意味で右次数付き加群の圏の一般化である：次数付き代数 S に対して、それに付随する $\mathbb{Z}$ 代数 $\check{S} := \bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}} S_{i-j}$ を考えると圏同型 $\operatorname{Grmod} S \simeq \operatorname{Mod} \check{S}$ が成立する。$\mathbb{Z}$ 代数 A に対しても次数付き代数の場合と同様に $\operatorname{Tors} A \subseteq \operatorname{Mod} A, \operatorname{QGr} A$ が定義できる。

定義 4.7. $\mathbb{Z}$ 代数 A が次を満たすとき、positively graded であるという：

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad \dim_{\mathbf{k}} A_{ii} = 1 \tag{4.5}$$

$$i < j \Rightarrow A_{ij} = 0 \tag{4.6}$$

Positively graded $\mathbb{Z}$ 代数 A に対して米田埋め込み

$$※\colon A \hookrightarrow \operatorname{Mod} A \tag{4.7}$$

を考えたとき、$P_i := ※(i)$ を i 番目の射影加群と呼ぶ。また、その 1 次元商 $P_i \to S_i \to 0$ を i 番目の単純加群と呼ぶ。このとき、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し、以下を満たす $j_0 \in \mathbb{Z}, \ell_0 \in \mathbb{Z}$ の組がただ 1 つ存在するとき、A は Artin-Schelter Gorenstein であるという。

$$\operatorname{Ext}^{\ell}_{\operatorname{Mod} A}(S_i, P_j) = \begin{cases} \mathbf{k} & j = j_0, \ell = \ell_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.8}$$

さて、X を非特異射影曲面とし、$(\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ を $\operatorname{coh} X$ の対象からなる pure helix とする。また、$\pi\colon |K_X| \to X$ を X の標準束の全空間とする。これは (non-compact) Calabi-Yau 3-fold である。このとき、以下の事実が成立する：

- $\pi^* \oplus_{1\le i\le r} \mathcal{E}_i$ が $D^b \operatorname{coh} |K_X|$ の tilting object になる。
- $B := \operatorname{End}(\pi^* \oplus_{1\le i\le r} \mathcal{E}_i)$ は自然に次数付き代数となり、その qgr が X と導来同値になる。
- B は次数付き CY3 代数であり、然るべき superpotential つき quiver の Jacobi algebra と同型になる。更に、その事実から、単純加群が quiver だけに依存する特定の形の射影分解を持つことがわかる ([Boc08])。
- 次数付き代数 B に付随する $\mathbb{Z}$ 代数 $\check{B}$ は自然に helix $(\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ と同型になる。

以上のことから、$\mathbb{Z}$ 代数 $(\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ が AS-Gorenstein になることが従う。さらに、その単純加群の射影分解も特定の形を持つことがわかる。これを踏まえて、pure helix を持つような代数曲面の非可換変形を与えるような Artin-Schelter 正則代数のクラスを次のように定義することができる（Abdelgadir-O-Ueda）：

定義 4.8. 代数曲面およびその上の pure helix の組の変形類を 1 つ固定する。このとき、その型の Artin-Schelter 正則 $\mathbb{Z}$ 代数とは、AS-Gorenstein な $\mathbb{Z}$ 代数であって、単純加群の射影分解の形が上記 pure helix を $\mathbb{Z}$ 代数と思ったときの単純加群の射影分解と同じ形をしているものとする。

以下、定義 4.8 を様々な pure helix に適用してみる。まず、例 4.2 で $n = 2$ の場合を考える。この場合に定義 4.8 を適用すると、ちょうど 3 次元 quadratic AS 正則 $\mathbb{Z}$ 代数の定義が

得られる。この場合、単純加群の射影分解は次の形をしている：

$$0 \to P_{i-3} \to P_{i-2}^{\oplus 3} \to P_{i-1}^{\oplus 3} \to P_i \to S_i \to 0 \tag{4.9}$$

同じく、例 4.3 の pure helix に定義 4.8 を適用すると、ちょうど 3 次元 cubic AS 正則 $\mathbb{Z}$ 代数の定義が得られる。この場合、単純加群の射影分解は次の形をしている：

$$0 \to P_{i-4} \to P_{i-3}^{\oplus 2} \to P_{i-1}^{\oplus 2} \to P_i \to S_i \to 0 \tag{4.10}$$

このようにして [AS87] に登場した 2 種類の Artin-Schelter 正則代数の定義が自然に復元される。

一方、例 4.5 で述べたように任意の del Pezzo 曲面はベクトル束からなる pure helix を持つので、それに定義 4.8 を適用することで、その変形類の del Pezzo 曲面の非可換変形を与えるような Artin-Schelter 正則 $\mathbb{Z}$ 代数のクラスの定義が得られる。特に例 4.6 で紹介した 3-block helix に定義 4.8 を適用することができるが、この場合、3-block 構造を考慮に入れて、添字集合を $\mathbb{Z}$ から少し修正したものにした方が自然になる：

例 4.9. Marked cubic surface の 3-block helix (の foundation) として、次のものがある (詳細は [AOU24] を参照されたい)：

$$\begin{aligned}
&E_{0,0} := \mathcal{O}_X, && E_{0,1} := \mathcal{O}_X(l_1), && E_{0,2} := \mathcal{O}_X(l - l_4),\\
&E_{1,0} := \mathcal{O}_X\left(-2l + \textstyle\sum_{i=1}^{6} l_i\right), && E_{1,1} := \mathcal{O}_X(l_2), && E_{1,2} := \mathcal{O}_X(l - l_5),\\
&E_{2,0} := \mathcal{O}_X(-l + l_1 + l_2 + l_3), && E_{2,1} := \mathcal{O}_X(l_3), && E_{2,2} := \mathcal{O}_X(l - l_6),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

列が 3 つあるが (3-block)、同じ列に入っている異なる対象の間には一切の射と拡張が存在しない。この pure helix に対して定義 4.8 を適用すると、非可換 3 次曲面に対応する Artin-Schelter 正則代数の定義を得る。ただし、ここでは 3-block 構造を考慮に入れて、添字集合を $I = \{0,1,2\} \times \mathbb{Z}$ と置く：

定義 4.10. (4.11) 型の AS 正則 $\{0,1,2\} \times \mathbb{Z}$ 代数とは、AS-Gorenstein な $\{0,1,2\} \times \mathbb{Z}$ 代数であって、任意の $\boldsymbol{i} \in \{0,1,2\} \times \mathbb{Z}$ に対し、対応する単純加群が以下の形の射影分解を持つものである：ただし、自然な同一視 $\{0,1,2\} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を用いている。

$$0 \to P_{\boldsymbol{i}+(0,-3)} \to \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} P_{\boldsymbol{i}+(a,-2)} \to \bigoplus_{b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} P_{\boldsymbol{i}+(b,-1)} \to P_{\boldsymbol{i}} \to S_{\boldsymbol{i}} \to 0 \tag{4.12}$$

注 4.11. 1 つの del Pezzo 曲面の上には無数の pure helix が存在する。それらに応じて AS 正則代数のクラスが無数に定義できることになる。異なるクラスに属する AS 正則代数同士は変異で結びつくはずであるが、その詳細な研究は今後の課題である。

定義 4.8 の方法で AS 正則代数のクラスを 1 つ定義したとき、そのクラスに属する AS 正則代数 A に付随する圏 $\operatorname{QGr} A$ を考えることで非可換 del Pezzo 曲面が得られる（[Van11; DL11]）。一方、同じクラスに属する同型でない代数 A と A' に対して $\operatorname{QGr} A \simeq \operatorname{QGr} A'$ が成立する場合がある。ここで A と部分圏 $(\mathcal{O}_A(i))_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \operatorname{QGr} A$ が $\mathbb{Z}$ 代数として自然に同型になることに注意すると、A と A' は圏 $\operatorname{QGr} A$ の異なる helix の選び方（=“偏極” あるいは “marking”）と見なすことができる。この観察のもとで、次の予想が成立する：

予想 4.12. *$\mathbb{P}^2$ の 1 点爆発と 2 点爆発以外の del Pezzo 曲面の変形類およびその上の pure helix の変形類の組を 1 つ固定する。このとき、その型の AS 正則代数の同型類の集合には Table 3.1 に載っている Dynkin 型の affine Weyl 群が作用し、同じ軌道に属することと QGr が圏同値になることが同値である。*

予想 4.12 は $\mathbb{P}^2$ と $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合に証明できている。後者の場合、A_1 型の affine Weyl 群 = 無限 2 面体群 = $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が作用する。

Affine Weyl 群が登場する理由の 1 つの説明は、del Pezzo 曲面が、対応する Dynkin 型特異点の最小特異点解消として得られる弱 del Pezzo 曲面に退化することを用いることで得られる。その弱 del Pezzo 曲面の導来圏には、特異点解消の例外曲線（(-2) 曲線）の構造層が

定める球面ひねりが作用している。特に、その導来圏の helix たちの集合に作用する。この作用が非可換 del Pezzo 曲面の pure helix の集合への作用に変形することが期待される（半直交分解のモジュライ空間 [BOR20] の deck 変換）。例えば 2 次曲面は 2 次の Hirzebruch 曲面 Σ_2 へ退化するが、これは重み付き射影平面 $P(1,1,2)$ の A_1 型特異点 $[0:0:1]$ の最小特異点解消を与えている。なお、Σ_2 の導来圏の例外対象列の構造を [IOU21] で調べた。

さて、上述のように、3 次元 quadratic/cubic AS 正則 $\mathbb{Z}$ 代数はある種の幾何学的データと 1 対 1 に対応する (詳細は [Van11] を参照されたい)。この話を定義 4.8 で得られるより一般の AS 正則代数に拡張したい。一方、上記 2 例の場合を扱った [ATV90; BP93; Van11] の証明は完全に概念的でなく、brute force なところがある。これを概念的に理解することが課題であり、現在研究中である。ただし、幾何学的データに AS 正則代数を対応させる手続きは [OU20] で概念的な枠組みが与えられている。逆対応は、AS 正則代数が定める非可換曲面の上の skyscraper sheaf のモジュライ空間およびその上の普遍対象を考えることで与えられると考えている。このモジュライ空間は、非可換曲面と有限次元代数（helix の foundation の endomorphism algebra）との間の導来同値に注目することで、その有限次元代数上の A. King の意味の安定表現のモジュライ空間として構成することができると期待している。実際、quadratic/cubic $\mathbb{Z}$ 代数の場合には適切な GIT 安定性条件がわかっており、それに関する安定表現のモジュライ空間として skyscraper sheaf のモジュライ空間を構成すると、それがちょうど上述の幾何学的データに一致することがわかっている。 一般の del Pezzo 曲面の場合には適切な GIT 安定性条件を見つける必要があるが、この問題は “1 点の Hilbert scheme” を考えることで部分的には解決している。さらに、skyscraper sheaf のモジュライ空間は 1 点の Hilbert scheme の反標準因子 =Poisson 構造を与えると期待され、これが非可換 del Pezzo 曲面の半古典極限になると期待される。

3 次元 quadratic/cubic AS 正則 $\mathbb{Z}$ 代数 A に対し、qgr A の skyscraper sheaf のモジュライ空間 Y は然るべき意味で qgr A の中に因子として埋め込まれている：具体的には、以下のような随伴関手の対が存在する。

$$\iota^*\colon D^b \operatorname{qgr} A \rightleftarrows D^b \operatorname{coh} Y \colon \iota_* \tag{4.13}$$

ここで “pushforward 関手” ι_* はモジュライ空間 Y 上の普遍対象を核とする積分変換で与えられる。

ここで鍵となるのは、qgr A の pure helix $(\mathcal{O}_A(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ の Y への制限 $(\iota^*\mathcal{O}_A(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ が Y 上の pure spherical helix ([OU20]) を与えるということである（準備中）。これは pure helix の (1-)spherical object 版であるが、証明では Y が構成から種数 1 の Gorenstein 曲線であることと、Ginzburg dga の cohomology が 0 次に集中するための判定法 ([Gin06]) が鍵となる。

5. 非可換射影平面の爆発と射影幾何学

Van den Bergh は [Van01] において非可換代数曲面の blow-up を導入した。特に S が 3 次元 quadratic AS 正則代数の場合、その上の 6 点 $p_1,\dots,p_6$ における爆発が定義され、非可換次数付き代数

$$\mathsf{Bl}_{p_1,\dots,p_6} S \subseteq S^{[3]} \tag{5.1}$$

が定義される。ただし、ここで $S^{[3]} = \bigoplus_{n\geq 0} S_{3n}$ は S の 3rd Veronese subalgebra である。ここで構成された代数 $\mathsf{Bl}_{p_1,\dots,p_6} S$ は S の定める非可換射影平面の $p_1,\dots,p_6$ における爆発の反標準環（反標準束の切断環）と考えるべきものである。Van den Bergh はさらに、ある非可換次数付き代数 D および D の次数 3 の中心元 $G \in Z(D)_3$ が存在して

$$\mathsf{Bl}_{p_1,\dots,p_6} S \simeq D/G \tag{5.2}$$

が成立することを証明した。さらに、D には次数 1 の中心元 $z \in Z(D)_1$ も存在して D/z が 3 次元 quadratic AS 正則代数であることを示した。このクラスの非可換次数付き代数 D、すなわち次数 1 の元による 3 次元 quadratic AS 正則代数の中心拡大は [LSV96] で詳細に研究されており、$\mathbb{P}^3$ の非可換変形の倉西空間の既約成分の 1 つである $R(1,3)$ に含まれている。さ

らに、$[\lambda_0 : \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$ を係数とする 1 次結合 $\lambda_0 z^3 + \lambda_1 G$ は全て D の次数 3 の中心元なので、非可換 3 次曲面の pencil が得られたことになる。Van den Bergh は [Van01] において、この pencil のメンバーが非可換射影平面の爆発によって得られることを予想した。筆者らの共同研究（発表準備中）において、この予想を肯定的に解決した。我々の証明では、具体的にどの非可換射影平面とどの 6 点を爆発すれば良いかということまで記述できる。

一般の $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ に対して

$$S_{a,b,c} := \frac{\mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3\rangle}{\begin{matrix} cx_1^2 + ax_2x_3 + bx_3x_2, \\ cx_2^2 + ax_3x_1 + bx_1x_3, \\ cx_3^2 + ax_1x_2 + bx_2x_1 \end{matrix}} \tag{5.3}$$

は 3 次元 quadratic AS 正則代数となることが知られており、3 次元 Sklyanin 代数と呼ばれている。これを 1 つ固定したとき、$S_{a,b,c}$ の中心拡大として得られる D の一般形が [LSV96] で与えられている：

$$D = \frac{\mathbb{C}\langle x_1, x_2, x_3\rangle[z]}{\begin{matrix} cx_1^2 + ax_2x_3 + bx_3x_2 + \ell_{11}x_1z + \ell_{12}x_2z + \ell_{13}x_3z + \alpha_1 z^2 \\ cx_2^2 + ax_3x_1 + bx_1x_3 + \ell_{21}x_1z + \ell_{22}x_2z + \ell_{23}x_3z + \alpha_2 z^2 \\ cx_3^2 + ax_1x_2 + bx_2x_1 + \ell_{31}x_1z + \ell_{32}x_2z + \ell_{33}x_3z + \alpha_3 z^2 \end{matrix}} \tag{5.4}$$

詳細は省略するが、上記のような $S_{a,b,c}$ の中心拡大（で非自明なもの）たちを適切な座標変換で同一視したモジュライが重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1,1,1,2,2,2)$ になることが証明できる。一方、6 点付き非可換射影平面のモジュライの中で $S_{a,b,c}$ を固定したことに対応するスライスを取ると、そこには自然と E_6 型の Weyl 群が作用することがわかる。さらに、そのスライスは 6 次元の abel 多様体 $\mathrm{Pic}^0(E) \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ と（非標準的に）同変同型になることがわかる。ただし Q は E_6 の root lattice である。この群作用の商は重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1,1,1,2,2,2,3)$ になることが証明できる。

さて、非可換射影平面の 6 点爆発に対してその ambient algebra D を対応させる有理射

$$\mathrm{Pic}^0(E) \otimes_{\mathbb{Z}} Q \dashrightarrow \mathbb{P}(1,1,1,2,2,2) \tag{5.5}$$

を考えることができるが、これの構造を決定したというのが主結果である：

定理 5.1. (5.5) は E_6 型 *Weyl* 群作用による商射と射影 $\mathbb{P}(1,1,1,2,2,2,3) \dashrightarrow \mathbb{P}(1,1,1,2,2,2)$ との合成に一致する。

この定理の証明の鍵は、pencil のメンバーの上の直線加群（直線の非可換類似）の大域 monodromy 群が E_6 型 Weyl 群に一致することを証明することにある。この定理（と証明）には様々な応用があるが、特に、任意の（非自明な）中心拡大 D が 6 点爆発を超曲面として含むこと、逆に (z^3 以外の)pencil のメンバーが全て非可換射影平面の 6 点爆発（の反標準モデル）になることが証明できる。

定理 5.1 には半古典極限版が存在し、$\mathbb{P}^3$ 上の特別な形の Poisson 構造に関する主張になる。具体的には、斉次 3 次式 G と 1 次式 z に対し、$\mathbb{A}^4$ 上の Poisson 構造が

$$\{f, g\} = \frac{df \wedge dg \wedge dG \wedge dz}{\mathsf{Vol}} \tag{5.6}$$

で定まる。ただし Vol は volume form である。この Poisson 構造は次数が 0 のため、$\mathbb{P}^3$ 上の Poisson 構造に落ちる。この Poisson 構造に関して、（可換）3 次曲面の pencil $\{\lambda_0 z^3 + \lambda_1 G\}$ のメンバーが Poisson 部分多様体になり、従って自然に Poisson 曲面の構造を持つことがわかる。これらが実は上述の非可換射影幾何学の半古典極限となっており、定理 5.1 の半古典極限に相当する定理が比較的平易に証明できる。

最後に、当然ながら、以上の話を 3 次曲面以外の非可換 del Pezzo 曲面にも拡張したい。これは極めて興味深い課題である。例えば 7 点爆発と 8 点爆発の場合、stack $\mathbb{P}(1,1,1,2)$ および $\mathbb{P}(1,1,2,3)$ の非可換変形の射影幾何学（および、その半古典極限として得られる Poisson

幾何学）を考えることになる。そのためには、まず、[LSV96] に相当する研究をこれらの場合に行う必要がある。

References

[AOU24] Tarig Abdelgadir, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda. "Compact moduli of marked noncommutative cubic surfaces". Mar. 2024. arXiv: 2404.00175 [math.AG] (cit. on p. 6).

[AS87] Michael Artin and William F. Schelter. "Graded algebras of global dimension 3". In: *Adv. in Math* 66.2 (1987), pp. 171–216 (cit. on pp. 4, 6).

[ATV90] M. Artin, J. Tate, and M. Van den Bergh. "Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves". In: *The Grothendieck Festschrift, Vol. I.* Vol. 86. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 33–85 (cit. on pp. 4, 7).

[Boc08] Raf Bocklandt. "Graded Calabi Yau algebras of dimension 3". In: *J. Pure Appl. Algebra* 212.1 (2008), pp. 14–32 (cit. on p. 5).

[BOR20] Pieter Belmans, Shinnosuke Okawa, and Andrea T. Ricolfi. "Moduli spaces of semiorthogonal decompositions in families". Feb. 2020. arXiv: 2002.03303 [math.AG] (cit. on p. 7).

[BP93] A. I. Bondal and A. E. Polishchuk. "Homological properties of associative algebras: the method of helices". In: *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 57.2 (1993), pp. 3–50 (cit. on pp. 4, 7).

[BS10] Tom Bridgeland and David Stern. "Helices on del Pezzo surfaces and tilting Calabi-Yau algebras". In: *Adv. Math.* 224.4 (2010), pp. 1672–1716 (cit. on p. 4).

[CL96] D. Cerveau and A. Lins Neto. "Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbf{C}\mathrm{P}(n)$, $n \geq 3$". In: *Ann. of Math. (2)* 143.3 (1996), pp. 577–612 (cit. on p. 2).

[DL11] Olivier De Deken and Wendy Lowen. "Abelian and derived deformations in the presence of $\mathbb{Z}$-generating geometric helices". In: *J. Noncommut. Geom.* 5.4 (2011), pp. 477–505 (cit. on p. 6).

[Dol12] Igor V. Dolgachev. *Classical algebraic geometry.* A modern view. Cambridge University Press, Cambridge, 2012, pp. xii+639 (cit. on p. 2).

[EG10] Pavel Etingof and Victor Ginzburg. "Noncommutative del Pezzo surfaces and Calabi-Yau algebras". In: *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 12.6 (2010), pp. 1371–1416 (cit. on p. 2).

[Gin06] Victor Ginzburg. "Calabi-Yau algebras". math.AG/0612139. 2006 (cit. on p. 7).

[Gua11] Marco Gualtieri. "Generalized complex geometry". In: *Ann. of Math. (2)* 174.1 (2011), pp. 75–123 (cit. on p. 2).

[HKT09] Paul Hacking, Sean Keel, and Jenia Tevelev. "Stable pair, tropical, and log canonical compactifications of moduli spaces of del Pezzo surfaces". In: *Invent. Math.* 178.1 (2009), pp. 173–227 (cit. on p. 3).

[IOU21] Akira Ishii, Shinnosuke Okawa, and Hokuto Uehara. "Exceptional collections on Σ_2". July 2021. arXiv: 2107.03051 [math.AG] (cit. on p. 7).

[KN98] B. V. Karpov and D. Yu. Nogin. "Three-block exceptional sets on del Pezzo surfaces". In: *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 62.3 (1998), pp. 3–38 (cit. on p. 5).

[LPT13] Frank Loray, Jorge Vitório Pereira, and Frédéric Touzet. "Foliations with trivial canonical bundle on Fano 3-folds". In: *Math. Nachr.* 286.8-9 (2013), pp. 921–940 (cit. on p. 2).

[LSV96] Lieven Le Bruyn, S. P. Smith, and Michel Van den Bergh. "Central extensions of three-dimensional Artin-Schelter regular algebras". In: *Math. Z.* 222.2 (1996), pp. 171–212 (cit. on pp. 7–9).

[LV05] Wendy Lowen and Michel Van den Bergh. "Hochschild cohomology of abelian categories and ringed spaces". In: *Adv. Math.* 198.1 (2005), pp. 172–221 (cit. on p. 1).

[LV06] Wendy Lowen and Michel Van den Bergh. "Deformation theory of abelian categories". In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 358.12 (2006), 5441–5483 (electronic) (cit. on p. 1).

[OU20] Shinnosuke Okawa and Kazushi Ueda. "AS-regular algebras from acyclic spherical helices". July 2020. arXiv: 2007.07620 [math.AG] (cit. on pp. 4, 7).

[Pym15] Brent Pym. "Quantum deformations of projective three-space". In: *Adv. Math.* 281 (2015), pp. 1216–1241 (cit. on p. 2).

[Rai16] Eric M. Rains. "The noncommutative geometry of elliptic difference equations". July 2016. arXiv: 1607.08876 [math.AG] (cit. on p. 2).

[Van01] Michel Van den Bergh. "Blowing up of non-commutative smooth surfaces". In: *Mem. Amer. Math. Soc.* 154.734 (2001), pp. x+140 (cit. on pp. 7, 8).

[Van11] Michel Van den Bergh. "Noncommutative quadrics". In: *International Mathematics Research Notices. IMRN* 17 (2011), pp. 3983–4026 (cit. on pp. 4, 6, 7).

一般化マルコフ数について

行田康晃（東京大学数理科学研究科）

目次

1 はじめに 1

2 本稿の概要 2

3 k-GM 数のツリー構造 2

4 k-GM 数の 2 種類の $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列化 5

5 k-GC 行列と k-MM 行列の関係性 11

6 4 点付き 2 次元球面における基本群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現としての解釈 15

7 応用 1：一意性予想の一般化とその部分的解決 16

8 応用 2：一次元力学系におけるマルコフ数の解釈 21

9 応用 3：既約分数から k-GM 数を構成するアルゴリズム 24

10 応用 4：トーリック幾何と k-GM 数 27

1 はじめに

本稿は第 69 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演の概説である。講演ではマルコフ方程式の紹介とその一般化である k-GM 方程式、その正整数解に現れる正整数であるマルコフ数・k-GM 数の導入から始め、これらの正整数がもつツリー構造を説明した後に、このツリー構造を保つような「$SL(2,\mathbb{Z})$ 行列化」を導入した。そして、この行列化を使ったマルコフ数や k-GM 数の組み合わせ論的な解釈と、トーリック幾何における特異点解消の応用を紹介した。本稿では講演内容の詳細と、時間の都合で紹介できなかった更なるマルコフ数・k-GM 数の応用について説明する。

謝辞

第 69 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会を与えて下さった上山健太先生はじめ、運営の先生方に感謝申し上げます。本研究は JSPS 科研費 JP22KJ0731 の助成を受けたものです。

2 本稿の概要

本稿におけるメインテーマは k **一般化マルコフ数**と呼ばれる整数である。長いので、これ以降略して **k-GM 数**[*1]と呼ぶ。ただし、k は非負整数である。この整数は、k **一般化マルコフ方程式**（こちらもこれ以降 **k-GM 方程式**と呼ぶ）と呼ばれる方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(yz + zx + xy) = (3 + 3k)xyz$$

の正整数解 (k **一般化マルコフトリプル**、**k-GM トリプル**) に現れる整数のことである。例えば $k = 1$ の場合、1-GM 方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy = 6xyz$$

の正整数解として $(1, 3, 13)$ がとれるので、$1, 3, 13$ は 1-GM 数である。 特に $k = 0$ の場合の方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

とその正整数解、そしてそれに現れる数は**マルコフ方程式**/**マルコフトリプル**/**マルコフ数**と呼ばれ、ディオファントス近似理論に端を発して 1880 年ごろに Andrei Markov の論文 [10, 11] によって導入されてから今もなお盛んに研究されている。k-GM 数はそれから約 150 年後の 2022 年、[6] によってマルコフ方程式の理論をより包括的に理解することを目的として導入された。

後述するように、マルコフトリプル（あるいは k-GM トリプル）は一種の組み合わせ構造を持っており、特にこの構造を通してマルコフ数は、整数論に限らず、数学上のさまざまな分野に現れる重要な整数となっている。しかし、実はマルコフ数（あるいは k-GM 数）のみで構成されている「骨だけの」ツリー構造の状態でこれ以上の応用を考えるのは結構難しいと筆者は考えている。ある分野に別の分野の概念を持ち込もうとする際には、その概念自体が数学的に応用が利きやすい形で記述できている（例えばそれ自身が群の構造をもっている、多様体の構造を持っているなど）ことが望ましいが、k-GM トリプルからなる組み合わせ構造は、一見するとそのような良い構造があまり見えないように思えるからである。

これを打破する方法は既にいくつか知られているが、論文 [5, 4] では k-GM 数に情報を付け足して組み合わせ構造を扱いやすい形にすることを考えている。具体的には、k-GM 数を考える代わりに、k-GM 数を $(1, 2)$ 成分にもつ $SL(2, \mathbb{Z})$ の元を考えてこれらが与える組み合わせ構造を観察している。本稿ではこの増強化された k-GM 数として扱われる $SL(2, \mathbb{Z})$ の元の導入と、[5, 4] で紹介されている具体的な応用例について見ていきたい。

3 k-GM 数のツリー構造

k-GM 数の $SL(2, \mathbb{Z})$ 行列化を考える前に、k-GM 数が持つ「骨だけの」組み合わせ構造を見ておくことにする。まず、次のようなツリー構造を定義する。

定義 3.1 (k-GM ツリー)**.** 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{MT}(k)$ を考え、これを **k-GM ツリー**と呼ぶ。

- 最初の頂点は $(1, k + 2, 1)$、
- 各 (a, b, c) は以下のような 2 つの子を持つ。

$$\begin{array}{ccc} & (a,b,c) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \left(a, \dfrac{a^2 + kab + b^2}{c}, b\right) & & \left(b, \dfrac{b^2 + kbc + c^2}{a}, c\right). \end{array}$$

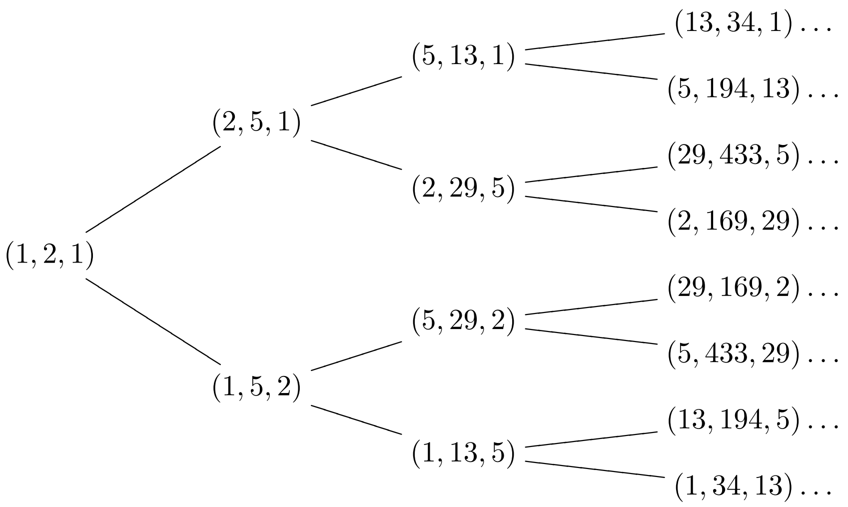
[*1] k-GM 数は私（行田）と共同研究者の松下浩大さんによって導入された概念であるが、「GM」は我々の頭文字ではなく「Generalized Markov」の頭文字である。

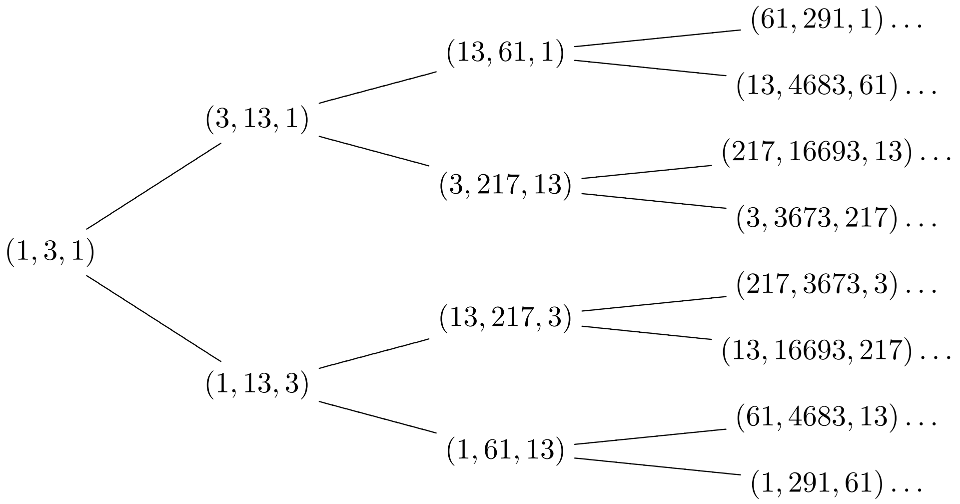
するとこのツリーについて次が成り立つ。

定理 3.2 ([6, Theorem 1])**.** k-GM ツリー $\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$ について、次のことが成り立つ。

(1) 全ての頂点は第 2 成分が真に最も大きい k-GM トリプルである。
(2) 第 2 成分が真に最も大きい k-GM トリプルは全て k-GM ツリーに含まれる。さらに、それらの解（順番違いは区別する）は、このツリーにそれぞれちょうど 1 個ずつ含まれる。

以下は $k = 0, 1$ の場合のツリーである。紙面の都合により、横に倒した形で表示している。





注 3.3. 最初の頂点とその 2 つの子の対称性により、(a, b, c) がツリー上にあるとき順番違いの (c, b, a) もツリー上に存在し、この 2 つの頂点はツリーの中央を挟んで対称的な位置にあることがわかる。

さて、上記のツリーでは第 2 成分が最も大きい k-GM トリプルが全て出現するようなツリーであるが、第 1 成分や第 3 成分が最も大きい k-GM トリプルが出現するツリーも存在する。

定義 3.4 (逆 k-GM ツリー)**.** 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{M}\mathbb{T}^{\dagger}(k)$ を考え、これを逆 **k-GM ツリー**と呼ぶ。

- 最初の頂点は $(1, 1, 1)$、
- 各 (a, b, c) は以下のような 2 つの子を持つ。

$$(a, b, c)$$

$$\left(a, c, \frac{a^2 + kac + c^2}{b}\right) \qquad \left(\frac{a^2 + kbc + c^2}{b}, a, c\right).$$

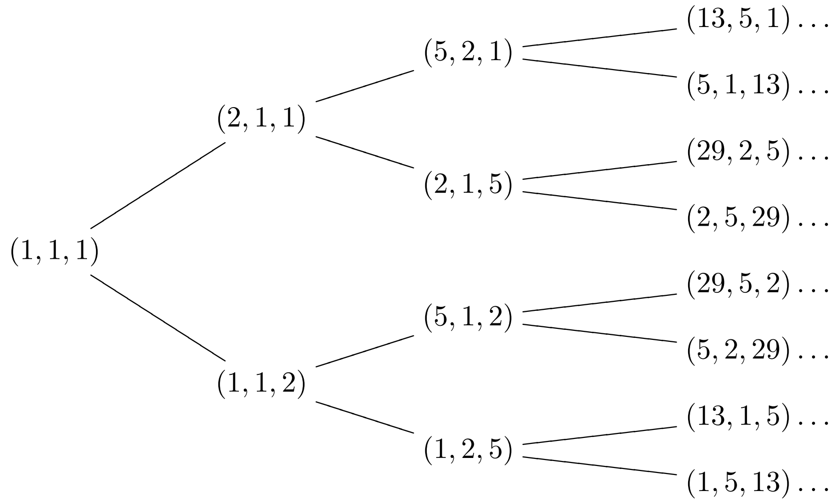
このツリーの世代ルールは k-GM ツリーの世代ルールを下から上に辿る変換と一致しており、これが逆 k-GM ツリーの名前の由来である。このとき、次の定理が成り立つ。

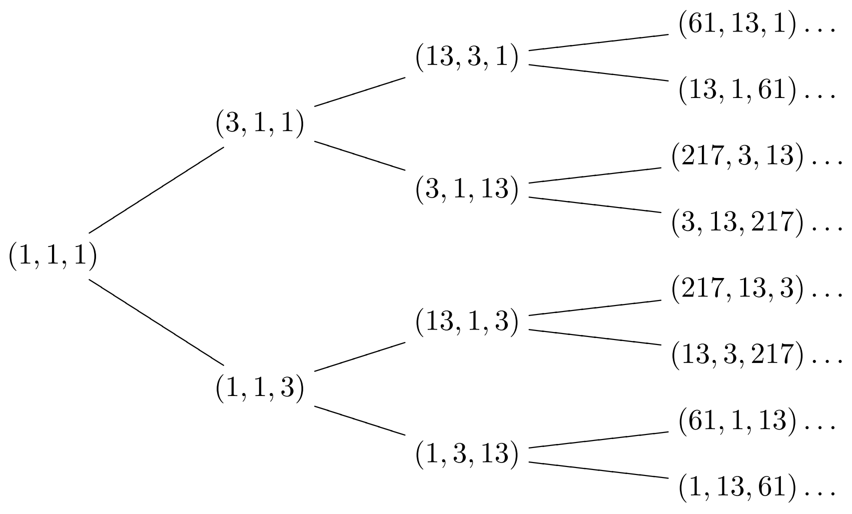
定理 3.5 ([4, Proposition 3.7])**.** 逆 k-GM ツリー $\mathrm{MT}^{\dagger}(k)$ について、次のことが成り立つ。

(1) 全ての頂点は第 1 成分か第 3 成分が最も大きい（真に大きいとは限らない）k-GM トリプルである。

(2) 第 1 成分か第 3 成分が最も大きい k-GM トリプルは全て逆 k-GM ツリーに含まれる。さらに、それらの解（順番違いは区別する）は、それぞれちょうど 1 個ずつ含まれる。

$k = 0, 1$ の場合は次のようになる。





k-GM ツリーと逆 k-GM ツリーの間には、次のような関係がある。

命題 3.6 ([4, Proposition 3.5])**.** 対応 $\mu\colon (a, b, c) \mapsto \left(a, \dfrac{a^2 + kac + c^2}{b}, c\right)$ は $\mathrm{MT}(k)$ から $\mathrm{MT}^{\dagger}(k)$ への標準的なツリー同型を与える。

ただし、ここでの「標準的なツリー同型」とは、「ツリー同士の同型であって、左の子を与える操作と右の子を与える操作を保つようなもの」のことを指す（これ以降も同じ意味で使用する）。つまり、上記の定理は $\mathrm{MT}(k)$ のある頂点の第 2 成分を入れ替えて別の k-GM トリプルにすると、それは $\mathrm{MT}^{\dagger}(k)$ の同じ位置にある頂点の k-GM トリプルであることを意味している。μ は 2 回作用させると元に戻る対応なので、$\mathrm{MT}^{\dagger}(k)$ から $\mathrm{MT}(k)$ への標準的なツリー同型も与えることに注意されたい。

4 k-GM 数の 2 種類の $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列化

上記の $\mathrm{MT}(k)$ と $\mathrm{MT}^\dagger(k)$ の構造を増強化するために、k-GM 数を $(1,2)$ 成分に持つ 2×2 行列を考える。その方法は 2 通りあるので、順番に紹介する。

4.1 一般化コーン行列

まずは一般化コーン行列と呼ばれる $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列化を紹介する。この概念は [5] において導入されている。

定義 4.1 (k 一般化コーン行列)**.** $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。2×2 行列 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$ は、次の条件を全て満たすとき k **一般化コーン行列**（以下省略して **k-GC 行列**）という：

(i) $P\in SL(2,\mathbb{Z})$
(ii) p_{12} は k-GM 数
(iii) $\mathrm{tr}(P)=(3+3k)p_{12}-k$

k-GM 数が特定の 3 つが集まると k-GM トリプルを構成することの類似として、特定の 3 つを集めたものとして k 一般化コーントリプルを導入する。

定義 4.2 (k 一般化コーントリプル)**.** $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。2×2 行列の 3 つ組 (P,Q,R) は、次の条件を全て満たすとき k **一般化コーントリプル**（以下省略して **k-GC トリプル**）という：

(i) P,Q,R は k-GC 行列
(ii) (p_{12},q_{12},r_{12}) は k-GM トリプル
(iii) $Q=PR-S_k$ を満たす、ただし $S_k=\begin{bmatrix}k & 0\\ 3k^2+3k & k\end{bmatrix}$ である

これらの定義を眺めてみると、k-GC 行列と k-GC トリプルの条件 (iii) の特異性が目につくが、この条件の由来については後で説明する。

さて、定義からはその存在性が明らかではない。まず自明解 $(1,1,1)$ の最初の頂点に対応する k-GC トリプルを考える。

命題 4.3 ([5, Proposition 3.4])**.** $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。$(p_{12},q_{12},r_{12})=(1,1,1)$ であるような k-GC トリプル (P,Q,R) は、次で与えられるもので全てである。

$$P=P_{1;\ell}:=\begin{bmatrix}\ell & 1\\ -\ell^2+2k\ell+3\ell-1 & -\ell+2k+3\end{bmatrix}$$
$$Q=Q_{1;\ell}:=\begin{bmatrix}k+\ell+1 & 1\\ k^2-\ell^2+3k+\ell+1 & k-\ell+2\end{bmatrix}$$
$$R=R_{1;\ell}:=\begin{bmatrix}2k+\ell+2 & 1\\ -\ell^2-2k\ell+2k-\ell+1 & -\ell+1\end{bmatrix}$$

ただし、ℓ は任意の整数とする。

この命題の証明はほとんど straightforward である。P の $(1,1)$ 成分を ℓ と決めると、P,Q,R が $SL(2,\mathbb{Z})$ に入っていること、トレースの条件、$Q=PR-S_k$ であることから (P,Q,R) を決定することができる。次に $(1,1,1)$ 以外の場合を考えるために、次のツリーを導入する。

定義 4.4 (k-GC ツリー)**.** 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{GCT}(k,\ell)$ を考える。

- 最初の頂点は $(P_\ell, Q_\ell, R_\ell) := (P_{1;\ell}, P_{1;\ell}Q_{1;\ell} - S_k, Q_{1;\ell})$
- 各 (P, Q, R) は以下のような 2 つの子を持つ。

$$(P, Q, R)$$

$$(P, PQ - S_k, Q) \qquad\qquad (Q, QR - S_k, R)$$

最初の頂点は、$(1,1,1)$ に対応する k-GC トリプル $(P_{1;\ell}, Q_{1;\ell}, R_{1;\ell})$ の、上記の世代ルールにおける左の子になっている。$\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$ の最初の頂点は $(1,1,1)$ ではなく $(1, k+2, 1)$ であるから、これはそこに合わせるための操作である。右の子ではなく左の子で与えている理由は、ℓ を $P_{1;\ell}$ の $(1,1)$ 成分で与えているので、最初の頂点にもその情報を残しておくという点にある。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 4.5 ([5, Theorem 1.10])**.** k-GC ツリー $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ について、次が成り立つ。

(1) 全ての頂点は k-GC トリプルである。

(2) (P, Q, R) とその 2 つの子 $(P, PQ - S_k, Q), (Q, QR - S_k, R)$ の各行列をその $(1,2)$ 成分で置き換えると、

$$(p_{12}, q_{12}, r_{12})$$

$$\left(p_{12}, \frac{p_{12}^2 + kp_{12}q_{12} + q_{12}^2}{r_{12}}, q_{12}\right) \qquad \left(q_{12}, \frac{q_{12}^2 + kq_{12}r_{12} + r_{12}^2}{p_{12}}, r_{12}\right).$$

となり、これは k-GM ツリーの世代ルールに一致する。

k-GC ツリーの世代ルールは k-GC トリプルの (iii) の条件を保つよう意図されたものなので、各頂点が k-GC トリプルの定義の (iii) を満たすことは明らかだが、(i) と (ii) の条件まで保たれるのは非自明である。また、各行列の $(1,2)$ 成分は ℓ に依存しないことに注意されたい。これにより、次の系が成り立つ。

系 4.6. 任意の $\ell \in \mathbb{Z}$ をとる。k-GC ツリー $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ の頂点に含まれる各行列に対しその $(1,2)$ 成分をとる対応は、$\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ と k-GM ツリー $\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$ の間の標準的なツリー同型を与える。特に、任意の k-GM トリプル (a,b,c) であって $b > \max\{a,c\}$ となるようなものに対して、(a,b,c) をそれぞれの $(1,2)$ 成分にもつような k-GC トリプルが存在する。

$k = 0$ の場合の具体例を以下にあげる。ℓ はここでは 0 とする。

$$\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\ 7 & 12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right) \quad \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 13\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 5\\ 7 & 12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}8 & 13\\ 19 & 31\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right) \quad \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}17 & 29\\ 41 & 70\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\ 7 & 12\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 13\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}12 & 29\\ 31 & 75\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\right) \quad \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 13\\ 13 & 34\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 13\end{bmatrix}\right)$$

$k=1,\ell=-1$ のときは以下のようになる。

$$\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -7 & 6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 16\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 16\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9 & 13\\ 47 & 68\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}9 & 13\\ 47 & 68\end{bmatrix},\begin{bmatrix}47 & 61\\ 245 & 318\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 16\end{bmatrix},\begin{bmatrix}149 & 217\\ 791 & 1152\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9 & 13\\ 47 & 68\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -7 & 6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 13\\ 17 & 74\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 16\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 13\\ 17 & 74\end{bmatrix},\begin{bmatrix}67 & 217\\ 381 & 1234\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 16\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -7 & 6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13 & 61\\ 75 & 352\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 13\\ 17 & 74\end{bmatrix}\right)$$

各行列の $(1,2)$ 成分を抜き出すと、先の例で与えた k-GM ツリーが与えられることがわかる。

なお、(P,Q,R) は成分の順番を入れ替えて (R,Q,P) などにすると k-GC トリプルにはならないことに注意が必要である。

注 4.7. $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ を定める際に、最初の頂点として $(P_{1;\ell},Q_{1;\ell},R_{1;\ell})$ の左の子 $(P_{1;\ell},P_{1;\ell}Q_{1;\ell}-S_k,Q_{1;\ell})$ をとったが、右の子 $(Q_{1;\ell},Q_{1;\ell}R_{1;\ell}-S_k,R_{1;\ell})$ を取った場合は違う頂点が出てくるので、k-GC 行列を頂点に持つツリーのバリエーションは $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ 以外にもまだあるのではと思われるかもしれない。しかし実際はそうではなく、$\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ で全てである。実際、$(P_{1;\ell},Q_{1;\ell},R_{1;\ell})$ の右の子は $(P_{1;k+\ell+1},Q_{1;k+\ell+1},R_{1;k+\ell+1})$ の左の子に一致し、さらに左の子全体の集合

$$\{(P_{1;\ell},P_{1;\ell}Q_{1;\ell}-S_k,Q_{1;\ell})\mid \ell\in\mathbb{Z}\}$$

は $(1,k+2,1)$ に対応するすべての k-GC トリプルを与えるのである。したがって、k-GC トリプルを頂点に持つツリーを考えたい場合は、最初の頂点として $(P_{1;\ell},Q_{1;\ell},R_{1;\ell})$ の左の子だけを考えれば十分であることがわかる。

k-GM ツリーには、$b>\max\{a,c\}$ を満たすような k-GM トリプル (a,b,c) を任意にとったときに、このトリプルがツリーのどこか 1 箇所に現れるという性質（定理 3.2）があったが、k-GC ツリーにも同じような性質がある。

命題 4.8 ([5, Corollary 3.15])**.** 任意の $q_{12}>\max\{p_{12},r_{12}\}$ を満たすような k-GC トリプル (P,Q,R) に対して、ある一意的な $\ell\in\mathbb{Z}$ とある一意的な頂点 $v\in\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ が存在して、$v=(P,Q,R)$ を満たす。

次に、逆 k-GM ツリーのコーン行列バージョンである逆 k-GC ツリーを導入する。

定義 4.9 (逆 k-GC ツリー)**.** 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ を考える。

- 最初の頂点は $(P_{1;\ell},Q_{1;\ell},R_{1;\ell})$
- 各 (P,Q,R) は以下のような 2 つの子を持つ。

$$(P,Q,R)$$

$$\big(P,R,P^{-1}(R+S_k)\big)\qquad\big((P+S_k)R^{-1},P,R\big)$$

こちらの最初の頂点は $(P_{1;\ell},Q_{1;\ell},R_{1;\ell})$ で与えていて、このツリーの世代ルールは $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ の世代ルールを下から上に辿る変換に一致している。このツリーについて、やはり次の定理が成り立つ。

定理 4.10 ([4, Corollary 4.13])**.** 逆 k-GC ツリー $\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ について、次が成り立つ。

(1) 全ての頂点は k-GC トリプルである。

(2) (P,Q,R) とその 2 つの子 $(P,R,P^{-1}(R+S_k)),((P+S_k)R^{-1},P,R)$ の各行列をその $(1,2)$ 成分で置き換えると、

$$
\begin{array}{c}
(p_{12},q_{12},r_{12}) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\left(p_{12},r_{12},\dfrac{p_{12}^2+kp_{12}r_{12}+r_{12}^2}{q_{12}}\right) \qquad \left(\dfrac{p_{12}^2+kp_{12}r_{12}+r_{12}^2}{q_{12}},p_{12},r_{12}\right).
\end{array}
$$

となり、これは逆 k-GM ツリーの世代ルールに一致する。

次の系も k-GC ツリーの場合と同様に成り立つ。

系 4.11. 任意の $\ell\in\mathbb{Z}$ に対して、逆 k-GC ツリー $\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ の頂点に含まれる各行列をその $(1,2)$ 成分に置き換える操作は、$\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ と逆 k-GM ツリー $\mathrm{M}\mathbb{T}^\dagger(k)$ の間の標準的なツリー同型を与える。特に、任意の k-GM トリプル (a,b,c) であって $b\le\max\{a,c\}$ となるようなものに対して、(a,b,c) をそれぞれの $(1,2)$ 成分にもつような k-GC トリプルが存在する。

さらに、次の命題も成り立つ。

命題 4.12 ([4, Corollary 4.14])**.** 任意の $q_{12}\le\max\{p_{12},r_{12}\}$ を満たすような k-GC トリプル (P,Q,R) に対して、ある一意的な $\ell\in\mathbb{Z}$ とある一意的な頂点 $v\in\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ が存在して、$v=(P,Q,R)$ を満たす。

以上から、$\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$ や $\mathrm{M}\mathbb{T}^\dagger(k)$ はより情報量が多いツリーである $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ や $\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ の一部として実現できることがわかる。

この節の最後に、本家本元の k-GM ツリー/逆 k-GM ツリーが持たない（すなわち、$(1,2)$ 成分に制限した時に失われてしまう）性質を紹介しておくことにする。

定理 4.13 ([5, Corollary 3.16], [4, Corollary 5.32])**.** 任意に $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ と $\ell\in\mathbb{Z}$ をとる。このとき、$\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ の各頂点の第 2 成分は全て異なる k-GC 行列である。また、$\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ の各頂点の第 2 成分は全て異なる k-GC 行列である。

定理 4.13 の類似の主張は k-GM ツリーや逆 k-GM ツリーでは明らかに成り立たない。実際、第 2 成分だけを抜き取ると、k-GM ツリーも逆 k-GM ツリーもちょうどツリーの中央を挟んで鏡写しの関係になっていることがわかる。k-GM ツリーはツリーの右半分または左半分のみを考えれば第 2 成分は重複していないように見えるが、これが本当に成り立つかどうかは今のところ未解決である（この問題については第 7 節を参照）。

ちなみにこの節の内容は $k=0$ の場合、すなわち古典的なマルコフ数の場合については 1955 年に Harvey Cohn が導入・証明している [2]。このケースでは S_k は零行列であるから (P,Q,R) が 0-GC トリプル（コーントリプル）であるときは $Q=PR$ という良い形をした条件になっており、これは**クリストッフェル語**などの組み合わせ論的なツールと非常に相性がいいことが知られている。一方で $k\neq 0$ の場合 S_k は零行列ではなく、このとき Q は $PR-S_k$ というあまり良くない形をしており、$k=0$ の理論を素直に適用できない場合が多々ある。そこで次の節では、k の値によって世代ルールが変化しない、もう一つの $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列化を導入することにする。

4.2 マルコフモノドロミー行列

ここでは、一般化コーン行列とは別の $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列化を導入する。

定義 4.14 (k マルコフモノドロミー行列)**.** $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ とする。2×2 行列 $X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$ は、次の条件を全

て満たすとき k **マルコフモノドロミー行列** (あるいは単に **k-MM 行列**) という：

(i) $X \in SL(2, \mathbb{Z})$
(ii) x_{12} は k-GM 数
(iii) $\mathrm{tr}(X) = -k$

こちらも特定の 3 つを集めたものを k-MM トリプルとする。

定義 4.15 (k-マルコフモノドロミートリプル)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。2×2 行列の 3 つ組 (X, Y, Z) は、次の条件を全て満たすとき k **マルコフモノドロミートリプル** (あるいは単に **k-MM トリプル**) という：

(i) X, Y, Z は k-MM 行列
(ii) (x_{12}, y_{12}, z_{12}) は k-GM トリプル
(iii) $XYZ = T_k$ を満たす、ただし $T_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3k+3 & -1 \end{bmatrix}$ である

定義が k-GC 行列や k-GC トリプルとよく似ているものの、(iii) の条件が異なっている。しかし、実はこの定義でも k-GC トリプルと同じような性質が成り立つのである。まずは $(1, 2)$ 成分が $(1, 1, 1)$ であるような k-MM トリプルを決定する。

命題 4.16 ([4])**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。$(x_{12}, y_{12}, z_{12}) = (1, 1, 1)$ であるような k-MM トリプル (X, Y, Z) は、次で与えられるもので全てである。

$$\begin{aligned} X = X_{1;\ell} &:= \begin{bmatrix} \ell & 1 \\ -\ell^2 - k\ell - 1 & -k - \ell \end{bmatrix} \\ Y = Y_{1;\ell} &:= \begin{bmatrix} -k + \ell - 1 & 1 \\ -\ell^2 + k\ell + 2\ell - k - 2 & -\ell + 1 \end{bmatrix} \\ Z = Z_{1;\ell} &:= \begin{bmatrix} -2k + \ell - 2 & 1 \\ -2k^2 - \ell^2 + 3k\ell - 6k + 4\ell - 5 & k - \ell + 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし、ℓ は任意の整数とする。

一般化コーン行列と同様、X の $(1, 1)$ 成分を任意に指定するとそこから全ての値が定まる。さらに、次のツリーを考える。

定義 4.17 (k-MM ツリー)**.** 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{MM}\mathbb{T}(k, \ell)$ を考える。

- 最初の頂点は $(X_\ell, Y_\ell, Z_\ell) := (X_{1;\ell}, Y_{1;\ell} Z_{1;\ell} Y_{1;\ell}^{-1}, Y_{1;\ell})$
- 各 (X, Y, Z) は以下のような 2 つの子を持つ。

$$\begin{array}{ccc} & (X, Y, Z) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \big(X, YZY^{-1}, Y\big) & & \big(Y, Y^{-1}XY, Z\big) \end{array}$$

k-GC トリプルとのときとよく似てるものの、こちらは k の値によらず世代ルールが一定である（k-GC ツリーの世代ルールには行列 S_k を引くステップがあり、この S_k の成分は k に依存している)。そして、次の定理が成り立つ。

定理 4.18 ([4, Corollary 5.8])**.** k-MM ツリー $\mathrm{MM}\mathbb{T}(k, \ell)$ について、次が成り立つ。

(1) 全ての頂点は k-MM トリプルである。
(2) (X, Y, Z) とその 2 つの子 $\big(X, YZY^{-1}, Y\big), \big(Y, Y^{-1}XY, Z\big)$ の各行列をその $(1, 2)$ 成分で置き換え

ると、

$$
\begin{array}{ccc}
 & (x_{12}, y_{12}, z_{12}) & \\
\swarrow & & \searrow \\
\left(x_{12}, \dfrac{x_{12}^2 + kx_{12}y_{12} + y_{12}^2}{z_{12}}, y_{12}\right) & & \left(x_{12}, \dfrac{y_{12}^2 + ky_{12}z_{12} + z_{12}^2}{x_{12}}, z_{12}\right).
\end{array}
$$

となり、これは k-GM ツリーの世代ルールに一致する。

系 4.19. 任意の $\ell \in \mathbb{Z}$ に対して、k-MM ツリー $\mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell)$ の頂点に含まれる各行列をその $(1,2)$ 成分に置き換える操作は、$\mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell)$ と k-GM ツリー $\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$ の間の標準的なツリー同型を与える。特に、任意の k-GM トリプル (a,b,c) であって $b > \max\{a,c\}$ となるようなものに対して、(a,b,c) をそれぞれの $(1,2)$ 成分にもつような k-MM トリプルが存在する。

$k=0, \ell=0$ の例は以下の通り。

$$
\begin{array}{lll}
 & & \left(\begin{bmatrix}-3&5\\-2&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8&13\\-5&8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&1\\-2&1\end{bmatrix}\right) \\
 & \left(\begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3&5\\-2&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&1\\-2&1\end{bmatrix}\right) & \\
 & & \left(\begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-17&29\\-10&17\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3&5\\-2&3\end{bmatrix}\right) \\
\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&1\\-2&1\end{bmatrix}\right) & & \\
 & & \left(\begin{bmatrix}-2&5\\-1&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-12&29\\-5&12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}\right) \\
 & \left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&5\\-1&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&2\\-1&1\end{bmatrix}\right) & \\
 & & \left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5&13\\-2&5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&5\\-1&2\end{bmatrix}\right)
\end{array}
$$

$k=1,\ell=0$ のときは次のようになる。

$$
\begin{array}{lll}
 & & \left(\begin{bmatrix}-10&13\\-7&9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-48&61\\-37&47\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&1\\-3&1\end{bmatrix}\right) \\
 & \left(\begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-10&13\\-7&9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&1\\-3&1\end{bmatrix}\right) & \\
 & & \left(\begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-150&217\\-103&149\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-10&13\\-7&9\end{bmatrix}\right) \\
\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&1\\-3&1\end{bmatrix}\right) & & \\
 & & \left(\begin{bmatrix}-4&13\\-1&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-68&217\\-21&67\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}\right) \\
 & \left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4&13\\-1&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2&3\\-1&1\end{bmatrix}\right) & \\
 & & \left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-14&61\\-3&13\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4&13\\-1&3\end{bmatrix}\right)
\end{array}
$$

次の命題も k-GC の場合と同様に成り立つ。

命題 4.20 ([4, Proposition 5.9])**.** 任意の $y_{12} > \max\{x_{12}, z_{12}\}$ を満たすような k-MM トリプル (X,Y,Z) に対して、ある一意的な $\ell \in \mathbb{Z}$ とある一意的な頂点 $v \in \mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell)$ が存在して、$v = (X,Y,Z)$ を満たす。

逆バージョンも k-GC の場合と同様に存在し、その性質も全てパラレルである。

定義 4.21 (逆 k-MM ツリー)**.** 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{MM}\mathbb{T}^{\dagger}(k,\ell)$ を考える。

- 最初の頂点は $(X_{1;\ell}, Y_{1;\ell}, Z_{1;\ell})$

- 各 (X,Y,Z) は以下のような 2 つの子を持つ。

$$\begin{array}{ccc} & (X,Y,Z) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \left(X,Z,Z^{-1}YZ\right) & & \left(XYX^{-1},X,Z\right) \end{array}$$

定理 4.22 ([4, Corollary 5.16])**.** 逆 k-MM ツリー $\mathrm{MMT}^{\dagger}(k,\ell)$ について、次が成り立つ。

(1) 全ての頂点は k-MM トリプルである。

(2) (X,Y,Z) とその 2 つの子 $\left(X,Z,Z^{-1}YZ\right),\left(XYX^{-1},X,Z\right)$ の各行列をその $(1,2)$ 成分で置き換えると、

$$\begin{array}{ccc} & (x_{12},y_{12},z_{12}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \left(x_{12},z_{12},\dfrac{x_{12}^2+kx_{12}z_{12}+z_{12}^2}{y_{12}}\right) & & \left(\dfrac{x_{12}^2+kx_{12}z_{12}+z_{12}^2}{y_{12}},x_{12},z_{12}\right) \end{array}$$

となり、これは逆 k-GM ツリーの世代ルールに一致する。

系 4.23. 任意の $\ell\in\mathbb{Z}$ に対して、k-MM ツリー $\mathrm{MMT}^{\dagger}(k,\ell)$ の頂点に含まれる各行列をその $(1,2)$ 成分に置き換える操作は、$\mathrm{MMT}^{\dagger}(k,\ell)$ と k-GM ツリー $\mathrm{MT}^{\dagger}(k)$ の間の標準的なツリー同型を与える。特に、任意の k-GM トリプル (a,b,c) であって $b\le\max\{a,c\}$ となるようなものに対して、(a,b,c) をそれぞれの $(1,2)$ 成分にもつような k-MM トリプルが存在する。

命題 4.24 ([4, Proposition 5.17])**.** 任意の $y_{12}\le\max\{x_{12},z_{12}\}$ を満たすような k-MM トリプル (X,Y,Z) に対して、ある一意的な $\ell\in\mathbb{Z}$ とある一意的な頂点 $v\in\mathrm{MMT}^{\dagger}(k,\ell)$ が存在して、$v=(X,Y,Z)$ を満たす。

以上のように、$\mathrm{MT}(k)$ や $\mathrm{MT}^{\dagger}(k)$ は $\mathrm{MMT}(k,\ell)$ や $\mathrm{MMT}^{\dagger}(k,\ell)$ でも増強化できることがわかる。
k-GC の方で成り立っていた第 2 成分の一意性も成立する。

定理 4.25 ([4, Corollaries 5.10, 5.34])**.** 任意に $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ と $\ell\in\mathbb{Z}$ をとる。このとき、$\mathrm{MMT}(k,\ell)$ の各頂点の第 2 成分は全て異なる k-MM 行列である。また、$\mathrm{MMT}^{\dagger}(k,\ell)$ の各頂点の第 2 成分は全て異なる k-MM 行列である。

5 k-GC 行列と k-MM 行列の関係性

前節で k-GM 数の 2 種類の $SL(2,\mathbb{Z})$ 行列化である一般化コーン行列とマルコフモノドロミー行列を導入して、これらが非常によく似た性質を持つことを紹介した。ここまで類似しているからには、やはりこの 2 つの行列の間には何か良い関係性があるのではないかと考えるのが自然である。この節ではそれを紹介していくことにする。[4] では、2 種類の関係性を発見している。

5.1 2 つのツリー同型 Ψ,Φ

2×2 行列上の次の写像 $\psi\colon M(2,\mathbb{Z})\to M(2,\mathbb{Z})$ を考える（行列は 2×2 の整数成分行列であればよく、k-GC 行列や k-MM 行列である必要はない）。

$$\psi\colon \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -m_{11}+m_{12}k-k & m_{12} \\ m_{21}-(k+3)m_{11}+k(2k+3)(m_{12}-1) & -m_{22}+(2k+3)m_{12}-k \end{bmatrix}$$

この写像は全単射写像である。実際、逆写像が次の形で与えられる。

$$\psi^{-1}\colon \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -m_{11}+m_{12}k-k & m_{12} \\ m_{21}-(k+3)m_{11}-k^2(m_{12}-1) & -m_{22}+(2k+3)m_{12}-k \end{bmatrix}.$$

この写像について、次の定理が成り立つ。

定理 5.1 ([4, Proposition 5.3])**.** ψ は k-MM 行列全体から k-GC 行列全体への全単射を与える。

さらに、$\Psi\colon M(2,\mathbb{Z})^3 \to M(2,\mathbb{Z})^3$ を $\Psi(X,Y,Z) = (\psi(X),\psi(Y),\psi(Z))$ で定義すると、次の定理が成り立つ。

定理 5.2 ([4, Theorem 5.6])**.** 次の性質が成り立つ。

(1) Ψ は k-MM トリプル全体から k-GC トリプル全体への全単射を与える。
(2) さらに、Ψ は標準的なツリー同型 $\mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell) \simeq \mathrm{GC}\mathbb{T}(k,-\ell)$、$\mathrm{MM}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell) \simeq \mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,-\ell)$ を誘導する。

(2) は $\mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell)$ の世代ルールと $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,-\ell)$ の世代ルールが Ψ で保たれることを意味する。$\mathrm{MM}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ と $\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,-\ell)$ も同様。すなわち、図式

$$
\begin{array}{ccc}
(X,Y,Z) & \xmapsto{\Psi} & (P,Q,R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(X,YZY^{-1},Y) & \underset{\Psi}{\longmapsto} & (P,PQ-S_k,Q)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(X,Y,Z) & \xmapsto{\Psi} & (P,Q,R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(Y,Y^{-1}XY,Z) & \underset{\Psi}{\longmapsto} & (Q,QR-S_k,R)
\end{array}
$$

が可換であるということを主張している。ただし、ℓ は符号が反転して $-\ell$ になっていることに注意されたい。

論文 [4] で発見された 2 種類のうちもう 1 種類を、次で導入する。次で与えられる写像 $\Phi\colon GL(2,\mathbb{Z})^3 \to GL(2,\mathbb{Z})^3$ を考える。

$$\Phi(X,Y,Z) = (-(YZ)^{-1}, -(XZ)^{-1}, -(XY)^{-1})$$

この写像は Ψ と違い、定義から直ちにその逆写像を特定することは難しい（そもそも全単射写像かどうかもよくわからない)。しかし、実は次の定理が成立する。

定理 5.3 ([4, Corollary 5.26])**.** 次の性質が成り立つ。

(1) Φ は k-MM トリプル全体から k-GC トリプル全体への全単射を与える。
(2) さらに、Φ は標準的なツリー同型 $\mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell) \simeq \mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$、$\mathrm{MM}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell) \simeq \mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ を誘導する。

(2) は、$\mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell)$ の世代ルールと $\mathrm{GC}\mathbb{T}^\dagger(k,-\ell)$ の世代ルールが Φ で保たれることを意味している。$\mathrm{MM}\mathbb{T}^\dagger(k,\ell)$ と $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,-\ell)$ も然り。すなわち、図式

$$
\begin{array}{ccc}
(X,Y,Z) & \xmapsto{\Phi} & (P,Q,R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(X,YZY^{-1},Y) & \underset{\Phi}{\longmapsto} & (P,R,P^{-1}(R+S_k))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(X,Y,Z) & \xmapsto{\Phi} & (P,Q,R) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(Y,Y^{-1}XY,Z) & \underset{\Phi}{\longmapsto} & ((P+S_k)R^{-1},P,R)
\end{array}
$$

が可換であるということを主張している。

Ψ との違いは、標準的なツリー同型が順方向のツリーから逆方向のツリーへのものであるという点、そして ℓ が保存されるという点である。こちらは Ψ と違って、行列同士の 1 対 1 の対応があるわけではない。

5.2 写像 Φ にまつわる背景

この節では写像 Φ にまつわる背景について説明する。これは、k-GC 行列の定義における、一見すると不思議な条件である (iii) と深く関わっている。

少し唐突に思えるが、次の方程式を考える。

$$x^2+y^2+z^2+(2k+k^2)(x+y+z)+2k^3+3k^2=xyz$$

この方程式は**第 2k 一般化マルコフ方程式（第 2k-GM 方程式）**と呼ぶ。第 2 という名前がついている理由は次の命題にある。

命題 5.4 ([6, Proposition 2.4])**.** 次が成り立つ。

(1) (a,b,c) が k-GM 方程式の実数解/有理数解であることと、$((3+3k)a-k,(3+3k)b-k,(3+3k)c-k)$ が第 2k-GM 方程式の実数解/有理数解であることは同値である。
(2) 特に (a,b,c) が k-GM トリプルであるとき、$((3+3k)a-k,(3+3k)b-k,(3+3k)c-k)$ が第 2k-GM 方程式の正整数解である。

主張 (2) について、$k=0$ のときは逆が成り立つことが知らいるが、一般の k では成り立たない。例えば $k=4$ のとき、$(9,9,22)$ は第 2k-GM 方程式の正整数解だが、これに対応する k-GM 方程式の解は $\left(\frac{13}{15},\frac{13}{15},\frac{26}{15}\right)$ で、整数組ではないので明らかにこれは k-GM トリプルではない。第 2k-GM 方程式の正整数解で、対応する k-GM 方程式の解が k-GM トリプルであるようなものを**誘導解**と呼ぶ。

さて、この命題と k-GC 行列の定義の

$$\text{(iii) } \mathrm{tr}(P)=(3+3k)p_{12}-k$$

を比較すると、$(1,2)$ 成分の値とトレースの値の間の関係性が k-GM トリプルとそれに対応する誘導解の関係になっていることがわかる。したがって、k-GC トリプルの定義のうちの

(ii) (p_{12},q_{12},r_{12}) は k-GM トリプル

は次のように書き換えることができる。

(ii)' $(\mathrm{tr}(P),\mathrm{tr}(Q),\mathrm{tr}(R))$ は第 2k-GM 方程式の誘導解である。

したがって、k-GC トリプル (P,Q,R) に対して次の等式が成立していることがわかる。

$$\mathrm{tr}(P)^2+\mathrm{tr}(Q)^2+\mathrm{tr}(R)^2+(2k+k^2)(\mathrm{tr}(P)+\mathrm{tr}(Q)+\mathrm{tr}(R))+2k^3+3k^2=\mathrm{tr}(P)\mathrm{tr}(Q)\mathrm{tr}(R)$$

一方で、全く別の文脈において、次のような $SL(2,\mathbb{C})$ の元の間の恒等式が知られていた。

命題 5.5 ([7, 12])**.** 任意の $(X,Y,Z)\in SL(2,\mathbb{C})^3$ に対して、$x:=-\mathrm{tr}(YZ),y:=-\mathrm{tr}(ZX),z:=-\mathrm{tr}(XY),a:=-\mathrm{tr}(X),b:=-\mathrm{tr}(Y),c:=-\mathrm{tr}(Z),d:=-\mathrm{tr}(XYZ)$ とすると、

$$x^2+y^2+z^2+(ad+bc)x+(bd+ca)y+(cd+ab)z+a^2+b^2+c^2+d^2+abcd-4=xyz$$

が成り立つ。

ここで、この恒等式と k-GC トリプルが満たす方程式を比較すると、次のような条件を満たす (X,Y,Z) があるのではないか？という疑問が浮かぶ。

(1) $\mathrm{tr}(P)=-\mathrm{tr}(YZ),\ \mathrm{tr}(Q)=-\mathrm{tr}(ZX),\ \mathrm{tr}(R)=-\mathrm{tr}(XY)$,
(2) $\mathrm{tr}(X)=\mathrm{tr}(Y)=\mathrm{tr}(Z)=-k$,
(3) $\mathrm{tr}(XYZ)=-2$.

実際、この条件を $SL(2,\mathbb{C})$ 恒等式に代入すると、k-GC 行列のトレースに関する方程式を得る。実は、この条件を満たす行列 (X,Y,Z) というデザインのもとで定義されたのが k-MM 行列と k-MM トリプルである。k-MM 行列の定義のうち

$$\text{(iii) } \mathrm{tr}(X) = -k$$

が上記の (2)、k-MM トリプルの定義の条件

$$\text{(iii) } XYZ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3k+3 & -1 \end{bmatrix}$$

が (3) と噛み合うものであることがわかる。さらに $P = (-YZ)^{-1}, Q = (-XZ)^{-1}, R = (-XY)^{-1}$ とすることで上記の条件 (1)(2)(3) を全て満たすようにできるが、(X, Y, Z) から (P, Q, R) への、この対応が写像 Φ である。論文 [4] では (P, Q, R) を k-MM トリプル (X, Y, Z) を使って $P = (-YZ)^{-1}, Q = (-XZ)^{-1}, R = (-XY)^{-1}$ と表す対応、すなわち Φ（の制限）の逆写像のことを**マルコフモノドロミー分解**と呼んでいる。Φ^{-1} が逆写像になることは、このマルコフモノドロミー分解が常に存在し、かつ一意的であることを意味する。

5.3 Ψ と Φ の関係性

この節の最後に、今まで与えた標準的なツリー同型 Ψ と Φ の関係性について言及しておくことにする。異なるツリーの間の同型を与えているので、明らかにこの 2 つの写像は同じものではない。しかし、これらを合成すると興味深い観察を得ることができる。

定理 5.6 ([4, Theorems 5.31, 5.33])**.** (1) 写像 $\Phi \circ \Psi^{-1}$ に対して、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell) & \xrightarrow{\Phi\circ\Psi^{-1}} & \mathrm{GC}\mathbb{T}^{\dagger}(k,-\ell) & \xrightarrow{\Phi\circ\Psi^{-1}} & \mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{M}\mathbb{T}(k) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{M}\mathbb{T}^{\dagger}(k), & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{M}\mathbb{T}(k,\ell)
\end{array}$$

(2) 写像 $\Psi^{-1} \circ \Phi$ に対して、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell) & \xrightarrow{\Psi^{-1}\circ\Phi} & \mathrm{MM}\mathbb{T}^{\dagger}(k,-\ell) & \xrightarrow{\Psi^{-1}\circ\Phi} & \mathrm{MM}\mathbb{T}(k,\ell) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{M}\mathbb{T}(k) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{M}\mathbb{T}^{\dagger}(k), & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{M}\mathbb{T}(k,\ell)
\end{array}$$

ただし、μ は命題 3.6 で用いたものと同じ記号であり、上の図式中で上から下への写像は行列をその $(1,2)$ 成分でき置き換える操作から定まる標準的なツリー同型であるとする。

この定理は、$\Phi \circ \Psi^{-1}$ や $\Psi^{-1} \circ \Phi$ が 3 節で導入した μ を増強化したものであるということを意味している。ここからさらに、次の系たちを得る。

系 5.7. $(\Phi \circ \Psi^{-1})^2$ は k-GC トリプル全体からなる集合上の恒等式写像である。同様に、$(\Psi^{-1} \circ \Phi)^2$ は k-MM トリプル全体からなる集合上の恒等式写像である。

系 5.8. $\Phi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$ が成立する。特に、(P, Q, R) のマルコフモノドロミー分解は与えられた (P, Q, R) の値を使ったアルゴリズムで計算できる。

一見因数分解のような計算の困難さを持っているように見えるマルコフモノドロミー分解であるが、 Ψ^{-1} と Φ は対応が明示的な写像なので、実はこれらを組み合わせて計算ができることがわかる。

注 5.9. 写像 Ψ の幾何学的あるいは代数的文脈における良い解釈は、現在のところ見つかっていない。

6　4 点付き 2 次元球面における基本群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現としての解釈

さて、ここまで説明してきた k-GC トリプルや k-MM トリプルを 4 点付き 2 次元球面 S_4^2 の基本群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現に現れる行列だと思うと、新しい視点が見えてくる。S_4^2 の基本群（ランク 3 の自由群）を

$$\pi_1(S_4^2) = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta\gamma\delta = 1 \rangle$$

で表すことにする。ここで、$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は基点を通り 4 つある点のどれかを囲むようなループのホモトピー同値類である。この群はランク 3 の非可換自由群なので、α, β, γ をその自由生成系とすることができる。したがって、$\pi_1(S_4^2)$ の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現はこの α, β, γ に対応する行列を決定することによって一意的に定まる。$\pi_1(S_4^2)$ の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現全体の集合を $\mathrm{Rep}(S_4^2)$ とおき、その任意の元を α の行き先 X, β の行き先 Y、γ の行き先 Z を使って $\rho_{X,Y,Z}$ と表すことにする。ここで、(X,Y,Z) が k-MM トリプルであるとすると、この k-MM トリプルの Φ の像 (P,Q,R) について、

$$-P = \rho_{X,Y,Z}(\gamma^{-1}\beta^{-1}), -Q = \rho_{X,Y,Z}(\gamma^{-1}\alpha^{-1}), -R = \rho_{X,Y,Z}(\beta^{-1}\alpha^{-1}),$$

が成立する。以上から、(P,Q,R) は $(\gamma^{-1}\beta^{-1}, \gamma^{-1}\alpha^{-1}, \beta^{-1}\alpha^{-1})$ を $SL(2,\mathbb{C})$ 表現を通してみた形であるということができる（-1 倍という「おまけ」がついているが）。ちなみに、k-MM トリプルは定義から $XYZ = T_k$ なので、$\rho_{X,Y,Z}(\delta) = T_k^{-1}$ となる。

一旦話を戻して、まだ (X,Y,Z) を何の条件も課さない（k-MM トリプルとは限らない）ただの $SL(2,\mathbb{C})$ の 3 つ組と思うことにする。いま X,Y,Z は命題にある方程式を満たすが、ここで写像 $\chi\colon \mathrm{Rep}(S_4^2) \to \mathbb{C}^7$ を次のように定める。

$$\chi(\rho_{X,Y,Z}) = (x,y,z,a,b,c,d)$$

ここで、x,y,z,a,b,c,d は命題 5.5 で使った記号と同じである。すると、χ の像は $\mathbb{C}^7$ 上の命題 5.5 の方程式を満たすような点全体からなる代数多様体（ここでは H とかくことにする）となるが、この写像 χ は $\mathrm{Rep}(S_4^2)$ の GIT 商 $\mathrm{Rep}(S_4^2)/\!/SL(2,\mathbb{Z})$ と $\mathbb{C}^7$ の部分代数多様体 H の間の同相を誘導する。これらの多様体（の同相類）は**指標多様体**と呼ばれる。さて、この指標多様体の同相を与える、χ から誘導される同相写像を $\overline{\chi}$ としたとき、次が成り立つ。

定理 6.1 ([4, Theorems 5.36, 5.37])**.** (X,Y,Z) を k-MM トリプルとし、$(P,Q,R) = \Phi(X,Y,Z)$ とする。(p_{12}, q_{12}, r_{12}) を (P,Q,R) の $(1,2)$ 成分とする。

(1) (X,Y,Z) から与えられる $\mathrm{Rep}(S_4^2)$ の元 $\rho_{X,Y,Z}$ に対して、

$$\overline{\chi}(\overline{\rho_{X,Y,Z}}) = ((3k+3)p_{12} - k, (3k+3)q_{12} - k, (3k+3)r_{12} - k, k, k, k, 2)$$

を満たす。ただし $\overline{\rho_{X,Y,Z}}$ は $\rho_{X,Y,Z}$ を代表元とする $\mathrm{Rep}(S_4^2)/\!/SL(2,\mathbb{Z})$ の剰余類である。

(2) さらに、射影 $p\colon \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^3$ を

$$p(x,y,z,a,b,c,d) = (x,y,z)$$

と定めると、写像 $p \circ \overline{\chi}$ は k-MM トリプルから定まる表現を代表元とする $\mathrm{Rep}(S_4^2)/\!/SL(2,\mathbb{Z})$ における剰余類全体と第 $2k$-GM 方程式の k-GM トリプルによる誘導解全体の間の全単射を構成する。

この定理を見ると、k-GM トリプル（あるいはその誘導解）とその行列化である k-MM トリプルの両者は、指標多様体の観点で考えると実は同じ点を示していて、これを代数多様体として捉えたときに出てくるものが前者、4 点付き球面の基本群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現の剰余として捉えたときに出てくるものが後者である、という解

釈ができる。この観点から k-GC トリプルや k-MM トリプルを見ることで新しい応用が見つかるかもしれない、という期待を持っている。

ちなみに、多様体の基本群の $GL(2,\mathbb{C})$ 表現のことをモノドロミー表現、基本群の各元に対応する行列をモノドロミー行列と呼ぶことがあり、k マルコフモノドロミー行列/トリプルの名前はこれが由来である。

7 応用 1：一意性予想の一般化とその部分的解決

これ以降の節では、前節でその定義と性質をみた k-GC 行列や k-MM 行列を使って、様々な分野における k-GM 数が絡む現象を見ていく。まず、マルコフ数の意性予想と呼ばれる有名な予想とその一般化予想に関する k-GC 行列を用いた部分的解決を紹介する。

7.1 一意性予想と部分的な結果

マルコフ数の一意性予想とは次の予想のことである。

予想 7.1 (マルコフ数の一意性予想)**.** 任意のマルコフ数 b に対して、b を最大数とするようなマルコフトリプルが（数の順番による差を除いて）ただ一つ存在する。

この予想は 1913 年に Georg Frobenius が [3] の中で与えているものであり、現在のところ未解決である。なお、これに関しては次のような部分的解決が知られている。

定理 7.2 ([9])**.** マルコフ数 b に対して、ある素数 p と $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が存在して $b = p^m$ または $2p^m$ であるとき、b を最大数とするような k-GM トリプル (a,b,c) が（順番による差を除いて）ただ一つ存在する。

さて、予想 7.1 の k-GM 数への一般化として、次の予想が考えられる。

予想 7.3 (k-GM 数の一意性予想)**.** 任意に $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとる。任意の k-GM 数 b に対して、b を最大数とするような k-GM トリプルが（数の順番による差を除いて）ただ一つ存在する。

現在のところこの予想についても反例は出ておらず、筆者はマルコフ数のケースとともに肯定的に解かれるのではないかと考えている。この節の主題は、この予想の次のような部分的解決である。

定理 7.4 ([5, Theorem 1.6])**.** 任意に $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとる。k-GM 数 b が素数または素数の 2 倍であるとき、b を最大数とするような k-GM 方程式の解が（数の順番による差を除いて）ただ一つ存在する。

上の定理は定理 7.2 の k 一般化バージョン（ただし $m = 1$ の場合に限っている）である。なお、[5] では $m > 1$ の場合についても部分的な解決を与えている。ただし、全ての p と k に適用できるわけではなく、条件が必要である。

定理 7.5. k-GM 数 b に対して、ある素数 p と $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が存在して $b = p^m$ または $2p^m$ であって、k が次の条件 (1),(2),(3) のいずれかを満たすとき、b を最大数とするような k-GM トリプル (a,b,c) が（順番による差を除いて）ただ一つ存在する：

(1) $k = 2$
(2) $k \geq 4$ が偶数かつ、$\dfrac{k}{2}+1$ と $\dfrac{k}{2}-1$ がどちらも p^2 で割り切れない
(3) k が奇数で、$k+2$ と $k-2$ がどちらも p^2 で割り切れない

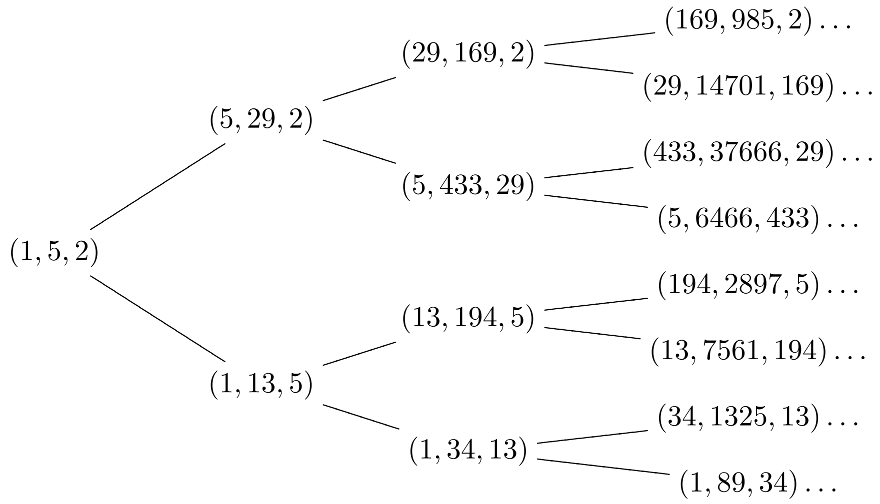
上記の (1)〜(3) をみると、条件を満たさない素数 p は各 k に対して有限個しかなく、したがって k に対して十分大きい素数 p に対しては定理 7.5 が常に適用できることがわかる。また 100 以下の k のうち、

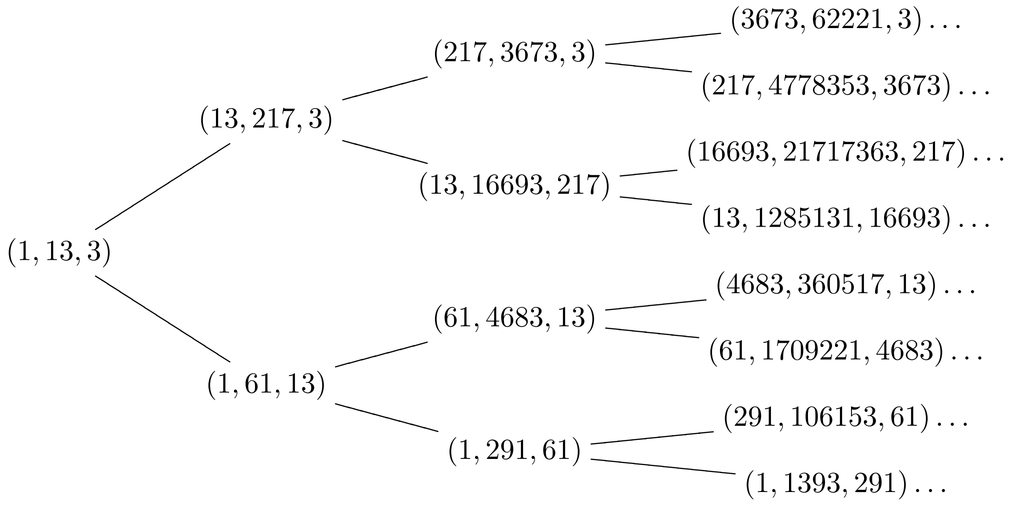
$$k = 1,2,3,4,5,8,9,12,13,15,17,19,21,24,28,31,32,33,35,36,37,39,40,41,44,45,49,53,$$

$$55, 57, 59, 60, 63, 64, 67, 68, 69, 71, 72, 75, 76, 80, 81, 84, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 99$$

のときは全ての素数 p が定理 7.5 の仮定を満たす。 なお、この条件は**ヘンゼルの補題**に由来するものであり、同じ証明方針でこの条件を取り去った形を考えるのは難しいと個人的には考えている。

7 節では、定理 7.2 について [1] で与えられている証明手法を k 一般化して定理 7.4 を解決する方針について簡単に述べる（定理 7.5 も証明方針としては同じである)。まず予想 7.3 を言い換えるところから始める。$\mathrm{MT}(k)$ の最初の頂点の左の子を最初の頂点とするような充満部分木を $\mathrm{LMT}(k)$ と表すことにする。例えば $k = 0, 1$ の場合は





から始まる部分木である。定理 3.2 と注 3.3 から、次の命題が成立する。

命題 7.6. 予想 7.3 が成り立つことと、$\mathrm{LMT}(k)$ の各頂点の第 2 成分が全て異なることは同値である。

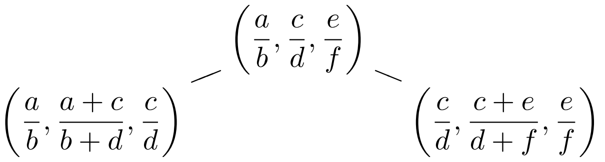
7.2 ファレイツリーと k-GM 数の分数ラベリング

ここでは、前節の最後で与えた同値命題を考えるために、k-GM 数、k-GC 行列を既約分数でラベリングすることを考える。まず、ファレイツリーと呼ばれる既約分数のツリーを導入する。

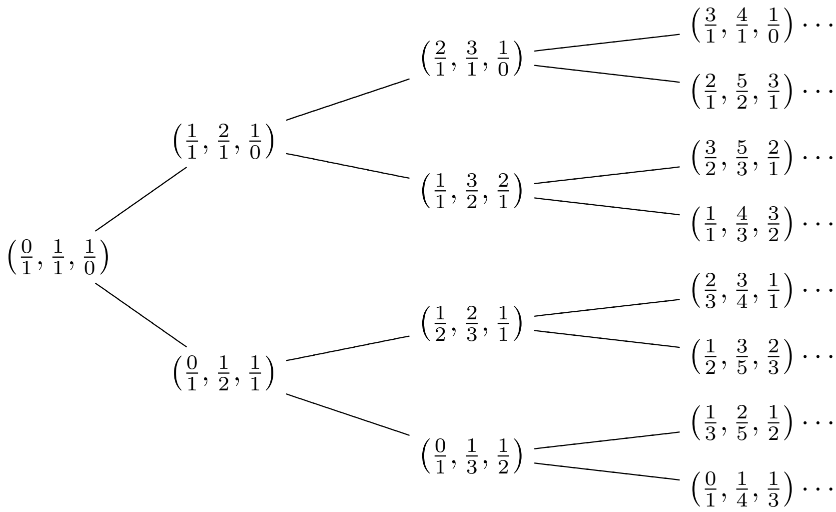
定義 7.7 (ファレイツリー)**.** 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{F}\mathbb{T}$ を考える。

- 最初の頂点は $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$

- 各頂点 $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ は以下のような 2 つの子を持つ。



このツリーの最初の 15 個の頂点は次のようになる。



このツリーについて、次の定理が成り立つ。

定理 7.8. 全ての正の既約分数に対して、その分数を第 2 成分にもつ $\mathbb{FT}$ の頂点が一意的に存在する。

定理 7.8 の証明は、例えば [1] の 3.2 節を参照せよ。このファレイツリーは、既約分数を効率よく全列挙することができるツリーであるといえる。また、世代ルールを見ると k-GM ツリーや k-GC ツリー、k-MM ツリーなどと同じで、新しい値が第 2 成分に入り、もともと第 2 成分だった値が右か左にずれていることがわかる。ここから、このツリーの成分と k-GM ツリーや k-GC ツリーの成分を使って対応を作れる。これをもう少し見ていく。

$\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$, $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ の頂点の各成分たちに、ファレイツリー $\mathbb{FT}$ の既約分数を使ってラベリングしていくことを考える。例えば、$\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$ の最初の頂点は $(1, k+2, 1)$ なので、ここに $\mathbb{FT}$ の最初の頂点 $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$ をつかってラベル付けする。k-GM 数 1 には既約分数 0/1 と 1/0、$k+2$ には既約分数 1/1、となる。ここで、ラベルと k-GM 数は 1 対 1 の関係ではないことに注意されたい。続いて、各々の世代ルールを使って生まれてくる新しい k-GM 数と新しい既約分数を順番に対応させていく。$\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$ において最初の頂点の左の子は $(1, 2k^2+6k+5, k+2)$ であり、$\mathbb{FT}$ の最初の頂点の左の子は $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$ なので、新しく出てきた $2k^2+6k+5$ に既約分数 $\frac{1}{2}$ をラベリングする（既出の第 1 成分、第 3 成分の k-GM 数と既約分数の対応はすでにラベリングしたものになっている）。この操作を続けていくことで、任意の k-GM 数に既約分数がラベリングされる。既約分数 t がラベリングされている k-GM 数を $m_{k,t}$ と書くことにする。例えば $m_{k,0/1} = 1$,$m_{k,1/1} = k+2$,$m_{k,1/2} = 2k^2+6k+5$ である。

分数ラベリングは、予想で考察する対象である $\mathrm{LM}\mathbb{T}(k)$ の領域だけでなく、$\mathrm{M}\mathbb{T}(k)$ 全体で定まっていることに注意されたい。ファレイツリー $\mathbb{FT}$ を $\mathrm{LM}\mathbb{T}(k)$ の第 2 成分と同じ範囲に制限する場合は、考える既約分数を $(0,1)$ の範囲に制限すれば良いので、予想 7.3 の考察をするためには次の問題を考えるのが妥当である。

予想 7.9. 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、写像 $(0,1) \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_{\geq 0},\ t \mapsto m_{k,t}$ が単射である。

命題 7.6 を踏まえると、次が成立する。

命題 7.10. 予想 7.3 と予想 7.9 の成立は同値である。

7.3 k-GC 行列によるアプローチ

1 つ前の節で k-GM 数を分数でラベリングしたが、これと同じことを $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ でも行う。$\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ の最初の頂点 (P,Q,R) はそれぞれ $P=P_{1;\ell}, Q=P_{1;\ell}Q_{1;\ell}-S_k, R=Q_{1;\ell}$ だったので、この 3 つに分数 0/1、1/1、1/0 をラベル付けし、以下世代ルールに従って $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ に現れる全ての k-GC 行列に既約分数を対応させていく。 既約分数 t がラベリングされている $\mathrm{GC}\mathbb{T}(k,\ell)$ の k-GC 行列を $C_t(k,\ell)$ で表すことにする。k と ℓ を一つ固定すると、これらの対応は k-GM 数の場合とは異なり定理 4.13 により（全）単射である。

k-GC ツリーも左半分だけに制限する。$\mathrm{LM}\mathbb{T}(k)$ とに対応する領域の k-GC ツリーの充満部分ツリーを $\mathrm{LGC}\mathbb{T}(k,\ell)$ で表す。さて、ここで $\ell=-k$ ととる。すなわち、$\mathrm{LGC}\mathbb{T}(k,-k)$ を考える。$k=0$ の場合

$$\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5\\5&13\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}2&5\\5&13\end{bmatrix},\begin{bmatrix}12&29\\31&75\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}12&29\\31&75\end{bmatrix},\begin{bmatrix}70&169\\181&437\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}2&5\\5&13\end{bmatrix},\begin{bmatrix}179&433\\463&1120\end{bmatrix},\begin{bmatrix}12&29\\31&75\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&13\\13&34\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5\\5&13\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}5&13\\13&34\end{bmatrix},\begin{bmatrix}75&194\\196&507\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5\\5&13\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13&34\\34&89\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&13\\13&34\end{bmatrix}\right)$$

$k=1$ の場合は

$$\left(\begin{bmatrix}-1&1\\-7&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&13\\17&74\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\5&16\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}3&13\\17&74\end{bmatrix},\begin{bmatrix}67&217\\381&1234\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\5&16\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}67&217\\381&1234\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1151&3673\\6545&20886\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\5&16\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}3&13\\17&74\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5153&16693\\29327&95004\end{bmatrix},\begin{bmatrix}67&217\\381&1234\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}-1&1\\-7&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13&61\\75&352\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&13\\17&74\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}13&61\\75&352\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1075&4683\\6203&27022\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&13\\17&74\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}-1&1\\-7&6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}61&291\\353&1684\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13&61\\75&352\end{bmatrix}\right)$$

から始まる部分木である。

これを踏まえて、予想 7.9 をさらに言い換える。対応 $t\mapsto C_t(k,-k)$ が単射であることに注意すると、次が成立する。

命題 7.11. 任意の k-GM 数 b（ただし $b\neq 1, k+2$ とする）に対して、b を $(1,2)$ 成分に持つような k 一般化コーン行列 $C_t(k,-k)$ が $\mathrm{LGC}\mathbb{T}(k,-k)$ において一意的であることと予想 7.9 の成立が同値である。

上の命題の主張は任意の（すなわち全ての）b に対する主張だが、これを少し制限した形を考える。

命題 7.12. k-GM 数 b が素数または素数の 2 倍（ただし $b\neq k+2$ とする）であるとき、b を $(1,2)$ 成分に持つような k 一般化コーン行列 $C_t(k,-k)$ が $\mathrm{LGC}\mathbb{T}(k,-k)$ において一意的である。

これは予想ではなく命題である（すなわち解ける）。命題 7.9 と命題 7.11 を考えると、定理 7.4 が上記の命題と対応するので、これを解くことで定理 7.4 が示される。以下、k-GM 素数 b に対して $b = m_{k,t} = m_{k,\tau}$ ならば $C_t = C_\tau$ であることを示すための基本方針について述べる（C_t は $C_t(k,-k)$ の略記とし、以下同じ意味で使用する）。 C_t と C_τ は $(1,2)$ 成分が $m_{k,t} = m_{k,\tau}$ で一致しているので、$(1,1)$ 成分が一致することを示せば良い。そうすると、残りの成分の一致は $\mathrm{tr}(C_t) = \mathrm{tr}(C_\tau) = (3+3k)m_{k,t} - k$ と $\det(C_t) = \det(C_\tau) = 1$ であることから従う。そこで、C_t と C_τ の $(1,1)$ 成分をそれぞれ $u_{k,t}, u_{k,\tau}$ とおく。 ここで、C_t の $(1,1)$ 成分が特性数と呼ばれる数であることを利用する。

定義 7.13 (特性数)**.** $(r,t,s) \in \mathrm{F}\mathbb{T}$ とする。このとき、

$$m_{k,r}x \equiv m_{k,s} \mod m_{k,t}$$

を満たす $0 < x < m_{k,t}$ が一意的に存在する。この x を $u_{k,t}$ とかき、(k,t) の**特性数**という。

上記の定義は「x が一意的である」という非自明な主張を含んでいることに注意されたい（この事実は $m_{k,r}, m_{k,t}, m_{k,s}$ が常に互いに素であることから従う）。また、$u_{k,t}$ は定義から t だけでなく r,s にも依存しているように見えるが、(r,t,s) は t が決まれば一意的に決まってしまうので実際は（k と）t のみに依存する。

命題 7.14 ([5, Lemma 4.5])**.** C_t の $(1,1)$ 成分は特性数 $u_{k,t}$ である。

特性数はこの後の 9,10 節でも出てくる重要な概念である。さらに、特性数について次の性質が成り立つ。

命題 7.15 ([5, Lemmas 4.7, 4.8])**.** 任意の頂点 t に対して、$u_{k,t}$ は $0 < u_{k,t} < \dfrac{m_{k,t}}{2} - k$ を満たす $x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解である。

この命題は $m_{k,t}$ が素数かどうかに関わらず成立することに注意する。7.3 節の冒頭にある具体例で実際に成り立つことを確認できる。さて、上記の命題は t ではなく $m_{k,t}$ の値に依存する性質であるから、$m_{k,t} = m_{k,\tau}$ の条件下では $u_{k,t}$ と $u_{k,\tau}$ はともに全く同じ条件を満たすことになる。したがって $u_{k,t} = u_{k,\tau}$、と結論づけるのはまだ早く、「$0 < x < \dfrac{m_{k,t}}{2} - k$ を満たす $x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解」が一意的であることを示さなければならない。ここに $m_{k,t}$ の素数性が必要になる。

命題 7.16. k-GM 数 $m_{k,t}$ が素数または素数の 2 倍であるとき、$0 < x < \dfrac{m_{k,t}}{2} - k$ を満たす $x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解は一意的である。

この命題の素数の場合の証明は簡単なので、素数性がどこで使用されているのかを明確にする意味でも証明を与えておく。

***k-GM* 数 b が素数の場合の証明.** まず $x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解が高々 2 つであることを示す。x_1,x_2 を $x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解で $x_1 \not\equiv x_2$ を満たすものとする。 $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + k) \equiv 0 \mod m_{k,t}$ だから、 $m_{k,t}$ の素数性より $x_1 + x_2 + k \equiv 0 \mod m_{k,t}$ が成立する。x_3 を $x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解で $x_1 \not\equiv x_3$ であるようなものとしてとる。 このとき、先の議論と同様にして $x_1 + x_3 + k \equiv 0 \mod m_{k,t}$ を得る。$x_1 + x_2 + k \equiv 0 \mod m_{k,t}$ と $x_1 + x_3 + k \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の両辺引いて $x_2 - x_3 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ を得る。したがって、解の個数は高々 2 個である。さて、$x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解として今 $0 < x < \dfrac{m_{k,t}}{2} - k$ を満たすものが少なくとも 1 つ取れることが命題 7.15 からわかっている。これを a とおくと、$m_{k,t} - (a+k)$ も $x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解であり、このとき $\dfrac{m_{k,t}}{2} < m_{k,t} - (a+k) < m_{k,t}$ である。したがって、a と $m_{k,t} - (a+k)$ は別の解であり、$x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解の個数が高々 2 つであることから $x^2 + kx + 1 \equiv 0 \mod m_{k,t}$ の解は a と $m_{k,t} - (a+k)$ で全てである。以上から、$0 < x < \dfrac{m_{k,t}}{2} - k$ を満たす解は a しかないことがわかり、一意性が示された。 □

以上から命題 7.12（の b が素数のとき）が示され、したがって命題 7.4（の b が素数のとき）が示される。

8　応用 2：一次元力学系におけるマルコフ数の解釈

この節では、$k=2$ の場合を考える。2-GM 数は古典的なマルコフ数、すなわち 0-GM 数と非常に深い関係があることが知られており、特に次の定理が成り立つ。

定理 8.1 ([6, Theorem 11])**.** (a,b,c) がマルコフトリプルであるとき、(a^2,b^2,c^2) は 2-GM トリプルである。逆に (A,B,C) が 2-GM トリプルであるとき、$(\sqrt{A},\sqrt{B},\sqrt{C})$ はマルコフトリプルである。

この節では、上記の性質から導かれる 2-MM 行列を使ったマルコフ数の新しい解釈について見ていく。

2-MM 行列を 1 次分数変換の元とみなす。すなわち、行列 $X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$ を、実射影直線 $\mathbb{R}P^1=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ に対して

$$X\cdot z := \frac{x_{11}z+x_{12}}{x_{21}z+x_{22}} \quad (z\in\mathbb{R})$$

で作用させる。X が 2-MM 行列であるとき定義から $\mathrm{tr}(X)^2=4$ だが、この場合の 1 次分数変換は放物型と呼ばれ、この変換による $\mathbb{R}P^1$ 上の不動点は $x_{21}\neq 0$ であれば実数上に 1 点だけ存在する。この不動点が有理数であることは X が整数成分をもつ行列であることからわかるが、さらに次の定理が成立する。

定理 8.2 ([4, Proposition 6.1])**.** 2-MM 行列 X に対して、$x_{21}\neq 0$ を仮定する。X の不動点を $\dfrac{p}{p\prime}\in\mathbb{Q}(p>0$ かつ p と $p\prime$ の絶対値は互いに素$)$ とする。このとき、

$$p=\sqrt{x_{12}},\quad p\prime=\begin{cases}\sqrt{-x_{21}} & (x_{11}<x_{22})\\ -\sqrt{-x_{21}} & (x_{11}>x_{22})\end{cases}$$

が成り立つ。特に、定理 8.1 から p はマルコフ数である。

上記の定理では不動点が無限遠点になる $x_{21}=0$ の場合を除外しているが、$x_{21}=0$ となるのは $X=X_{1:-1}$ のときだけであり、このとき $x_{12}=1$ なので無限遠点の既約分数表示を $\dfrac{1}{0}$ とみなすことで上の定理に含めることができる。さて、定理 8.2 の現象をツリー上でみてみる。

定理 8.3 ([4, Corollary 6.7])**.** 2-MM ツリー $\mathrm{MM}\mathbb{T}(2,\ell)$ 上の各頂点 (X,Y,Z) に対して、その 1 次分数変換としての不動点 $\dfrac{p}{p\prime},\dfrac{q}{q\prime},\dfrac{r}{r\prime}$ を考える（ただし、全ての分子と分母の絶対値が互いに素であり、$p,q,r>0$ であるとする）。このとき、対応 $(X,Y,Z)\mapsto(p,q,r)$ は標準的なツリー同型 $\mathrm{MM}\mathbb{T}(2,\ell)\simeq\mathrm{M}\mathbb{T}(0)$ を誘導する。

定理 8.3 自体は定理 8.2 の帰結であり、取り立てて目を見張るような結果ではない。しかし、2-MM ツリーの世代ルールによって不動点がどのように動くのかを考えると、そこから非自明な結果が与えられる。以下、もう少し詳しく説明する。

$(X,Y,Z)\in\mathrm{MM}\mathbb{T}(2,\ell)$ の不動点を $\dfrac{p}{p\prime},\dfrac{q}{q\prime},\dfrac{r}{r\prime}$ としたとき、(X,Y,Z) の左の子は (X,YZY^{-1},Y) で与えられたのだった。YZY^{-1} の不動点は Z の不動点 $\dfrac{r}{r\prime}$ を使って

$$Y\cdot\frac{r}{r\prime}=\frac{y_{11}\frac{r}{r\prime}+y_{12}}{y_{21}\frac{r}{r\prime}+y_{22}}=\frac{y_{11}r+y_{12}r\prime}{y_{21}r+y_{22}r\prime}$$

と書くことができる。ここで、定理 8.2 から

$$y_{12}=q^2,\ y_{21}=-q\prime^2$$

である。さらに、k-MM 行列の定義 (i),(ii) から

$$y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}=1$$

$$\Leftrightarrow y_{11}(-y_{11}-k)+q^2q'^2=1$$
$$\Leftrightarrow y_{11}^2+2y_{11}-q^2q'^2+1=0,$$

同様にして $y_{22}^2+2y_{22}-q^2q'^2+1=0$ を得る。これらを解くことで y_{11} と y_{12} は $-1\pm qq'$ のどちらかになるが、定理 8.2 から q' の符号と y_{11} と y_{22} の大小関係を勘案することで $y_{11}=-1-qq'$, $y_{22}=-1+qq'$ で確定する。これらを YZY^{-1} の不動点 $\dfrac{y_{11}r+y_{12}r'}{y_{21}r+y_{22}r'}$ に代入することで、YZY^{-1} の不動点は $\dfrac{q^2r'-qq'r-r}{-q'^2r+qq'r'-r'}$ と表される。同様にして、(X,Y,Z) の右の子 $(Y,Y^{-1}XY,Z)$ の $Y^{-1}XY$ の不動点は $\dfrac{-q^2p'+qq'p-p}{q'^2p-qq'p'-p'}$ となる。

さて、ここで定理 8.2 に戻ると、この 2 つの分数が既約であり、かつ分子が 0 より大きければこの分数の分子はマルコフ数となるが、実際これは正しいことが示されている。これらを踏まえると、マルコフ数を計算する新しいアルゴリズムが得られる。

定義 8.4 (放物型不動点ツリー). ℓ を任意の整数とする。次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{P}\mathbb{T}(\ell)$ を考える。

- 最初の頂点は
$$\left(\begin{bmatrix}1\\-\ell-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\ell+1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-\ell+2\end{bmatrix}\right)$$
- 各頂点 $\left(\begin{bmatrix}p\\p'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}q\\q'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}r\\r'\end{bmatrix}\right)$ は以下のような 2 つの子を持つ。

$$\left(\begin{bmatrix}p\\p'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}q\\q'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}r\\r'\end{bmatrix}\right)$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\left(\begin{bmatrix}p\\p'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}q^2r'-qq'r-r\\-q'^2r+qq'r'-r'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}q\\q'\end{bmatrix}\right) \qquad \left(\begin{bmatrix}q\\q'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-q^2p'+qq'p-p\\q'^2p-qq'p'-p'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}r\\r'\end{bmatrix}\right)$$

$\mathrm{P}\mathbb{T}(\ell)$ の頂点の各ベクトルたちは第 1 成分を不動点の分子、第 2 成分を不動点の分母とするようなベクトルになっており、世代ルールは $\mathrm{MM}\mathbb{T}(2,\ell)$ の世代ルールに従って与えられる不動点の変化に基づいて設定されている。このとき、次が成立する。

定理 8.5 ([4, Theorem 6.12]). 対応 $\left(\begin{bmatrix}p\\p'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}q\\q'\end{bmatrix},\begin{bmatrix}r\\r'\end{bmatrix}\right)\mapsto(p,q,r)$ は標準的なツリー同型 $\mathrm{P}\mathbb{T}(\ell)\simeq\mathrm{M}\mathbb{T}(0)$ を誘導する。

$\ell=0$ の場合で具体例を見てみる。

$$\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) \qquad \left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$\left(\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13\\11\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)\cdots \quad \left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}29\\22\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\right)\cdots \quad \left(\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}29\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)\cdots \quad \left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\right)\cdots$$

ここで、前節でみたマルコフ数の一意性予想との関連を見ることにする。$\mathrm{LP}\mathbb{T}(\ell)$ を、$\mathrm{P}\mathbb{T}(\ell)$ の最初の頂点の左の子を最初の頂点とする $\mathrm{P}\mathbb{T}(\ell)$ の充満部分ツリーであるとする。このとき、定理 8.5 と命題 7.6 から、次が成り立つ。

命題 8.6. $\mathrm{LP\mathbb{T}}(\ell)$ の各頂点の第 2 成分のベクトルにおける上の成分が全て異なることと予想 7.1 が成立することは同値である。

上記の主張に含まれるマルコフ数の一意性予想の同値条件は解決できていないが、弱い形である次のような定理が成り立つことが [4] では示されている。

定理 8.7 ([4, Theorem 6.18]). 任意の $\mathrm{LP\mathbb{T}}(\ell)$ における頂点 $\left(\begin{bmatrix} p \\ p\prime \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ q\prime \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r\prime \end{bmatrix}\right)$ に対して、

(1) $\ell \geq 1$ ならば $\dfrac{r}{r\prime} < \dfrac{q}{q\prime} < \dfrac{p}{p\prime} < 0$

(2) $\ell = 0$ かつ $p \neq 1$ ならば $0 < \dfrac{r}{r\prime} < \dfrac{q}{q\prime} < \dfrac{p}{p\prime}$

(3) $\ell = 0$ かつ $p = 1$ ならば $\dfrac{p}{p\prime} < 0 < \dfrac{r}{r\prime} < \dfrac{q}{q\prime}$

(4) $\ell \leq -1$ ならば $0 < \dfrac{r}{r\prime} < \dfrac{q}{q\prime} < \dfrac{p}{p\prime}$

がそれぞれ成立する。特に、$\ell \in \mathbb{Z}$ を固定したとき $\mathrm{LP\mathbb{T}}(\ell)$ の各頂点の第 2 成分のベクトルは全て異なる。

上記の定理は、分数にした時の大小関係がわかっている分、単に各成分が全て異っているという事実よりは強い主張である。

また、この 3 つのベクトルを 2 つずつ組み合わせて、その行列式を考えることでもマルコフトリプル（正確には第 2 マルコフ方程式の誘導解）を得ることができる。それが次の定理である。

定理 8.8. 任意の $\mathrm{P\mathbb{T}}(\ell)$ の頂点 $\left(\begin{bmatrix} p \\ p\prime \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ q\prime \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r\prime \end{bmatrix}\right)$ に対して、

$$\left(\det \begin{bmatrix} q & r \\ q\prime & r\prime \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} p & r \\ p\prime & r\prime \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} p & q \\ p\prime & q\prime \end{bmatrix}\right) = 3\mu(p, q, r),$$

が成り立つ。ここで、μ は命題 3.6 で用いたものと同じ記号である。特に、対応

$$\left(\begin{bmatrix} p \\ p\prime \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ q\prime \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r\prime \end{bmatrix}\right) \mapsto \frac{1}{3}\left(\det \begin{bmatrix} q & r \\ q\prime & r\prime \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} p & r \\ p\prime & r\prime \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} p & q \\ p\prime & q\prime \end{bmatrix}\right)$$

は $\mathrm{P\mathbb{T}}(\ell)$ から $\mathrm{M\mathbb{T}}^{\dagger}(0)$ への標準的なツリー同型を誘導する。

注 8.9. 上記の定理をうまく説明する幾何学的な現象が何かありそうな気がしているのだが、今のところよくわかっていない。

なお、放物型不動点ツリーは逆マルコフツリーに対応するバージョンもあり、上記のよくわからない定理 8.8 の類似も成り立っている。

定義 8.10 (逆放物型不動点ツリー). ℓ を任意の整数とする。次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{P\mathbb{T}}^{\dagger}(\ell)$ を考える。

- 最初の頂点は

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \ell - 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\ell + 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\ell + 5 \end{bmatrix}\right)$$

- 各頂点 $\left(\begin{bmatrix} p \\ p' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}\right)$ は以下のような 2 つの子を持つ。

$$\left(\begin{bmatrix} p \\ p' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} p \\ p' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -r^2q' + rr'q - q \\ r'^2q - rr'q' - q' \end{bmatrix}\right) \qquad \left(\begin{bmatrix} p^2q' - pp'q - q \\ -p'^2q + pp'q' - q' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ p' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}\right).$$

定理 8.11 ([4, Theorem 6.22])**.** 対応 $\left(\begin{bmatrix} p \\ p' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}\right) \mapsto (p, q, r)$ は標準的なツリー同型 $\mathrm{P}\mathbb{T}^\dagger(\ell) \simeq \mathrm{M}\mathbb{T}^\dagger(0)$ を誘導する。

定理 8.12. 任意の $\mathrm{P}\mathbb{T}^\dagger(\ell)$ の頂点 $\left(\begin{bmatrix} p \\ p' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}\right)$ に対して、

$$\left(\det\begin{bmatrix} q & r \\ q' & r' \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} p & r \\ p' & r' \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} p & q \\ p' & q' \end{bmatrix}\right) = 3\mu(p, q, r),$$

が成り立つ。ここで、μ は命題 3.6 で用いたものと同じ記号である。特に、対応

$$\left(\begin{bmatrix} p \\ p' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ q' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}\right) \mapsto \frac{1}{3}\left(\det\begin{bmatrix} q & r \\ q' & r' \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} p & r \\ p' & r' \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} p & q \\ p' & q' \end{bmatrix}\right)$$

は $\mathrm{P}\mathbb{T}^\dagger(\ell)$ から $\mathrm{M}\mathbb{T}(0)$ への標準的なツリー同型を誘導する。

9 応用 3：既約分数から k-GM 数を構成するアルゴリズム

ここでは、正の既約分数から k-GM 数を計算するアルゴリズムを紹介する。7 節では k-GM 数や k-GC 行列に対して分数ラベリングを行ったが、ここでは k-MM 行列にも全く同様にして分数ラベリングを行う。$\mathrm{MM}\mathbb{T}(k, \ell)$ に対して FT を使ってラベリングしたものを考えた時、t に対応する k-MM 行列を $M_t(k, \ell)$ で表す。ここで、定理 4.25 から k と ℓ を固定したとき $t \mapsto M_t(k, \ell)$ は単射である。

さて、この節では以下の問題を考える。

問題 9.1. $C_t(k, -k)$、$M_t(k, 0)$ の各成分を k と t の情報から計算せよ。

$C_t(k, \ell)$ の ℓ として $-k$ を、$M_t(k, \ell)$ の ℓ として 0 をとってきているのは、天下り的ではあるがそう設定することによって行列の成分としてある意味で「良い」値が出現するからである。実際、$C_t(k, -k)$ は 7 節のマルコフ予想の一般化に関する部分的解決において重要な役割を担っていた。また、系 4.6 や系 4.19 から、$C_t(k, -k)$ の $(1, 2)$ 成分や $M_t(k, 0)$ の $(1, 2)$ 成分は $m_{k,t}$ なので、ここから対応する k-GM 数を計算することもできる。

さて、ここからは問題 9.1 を解決するためのアルゴリズムを例を交えつつ説明する。非負整数 k と正の既約分数 $t > 0$ をとり、固定する。まず、傾きが t の線分 L_t を x 軸と y 軸を固定した平面 $\mathbb{R}^2$ 上にとる。ここで、この線分 L_t の端点はどちらも整数格子点上にあって、L_t はそれ以外の整数格子点を通らないようなものとする。整数格子点を頂点に持つ長さ 1 の正方形であって L_t が通るものを全て取り出し、その全ての正方形の左上から右下にかけて対角線を引く。ここまでで、例えば $t = 2/5$ のときは下図のような図形が描けている。

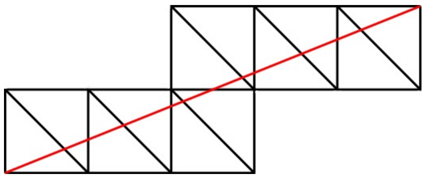


図 1　$t = 2/5$ のプレ蛇グラフ

この図形のことを、t の**プレ蛇グラフ**という。次に、このプレ蛇グラフの各パーツに次のルールで符号 $\{+, -\}$ を配置する。まず、線分 L_t に左下から右上方向への向きを定めておく。

(1) プレ蛇グラフを分割する各直角三角形に対して：

[1] 次の条件を満たす直角三角形に $-$ を配置する (図 2 を参照)。

1. 線分 L_t が左下の端点を共有している直角三角形
2. L_t の進行方向の向かって左側が四角形に分割されるような直角三角形

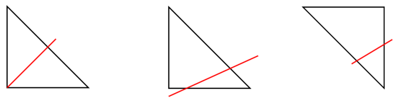


図 2　$-$ を配置する三角形

[2] 次の条件を満たす直角三角形に $+$ を配置する (図 3 を参照)。

1. 線分 L_t が右上の端点を共有している直角三角形
2. L_t の進行方向の向かって右側が四角形に分割されるような直角三角形

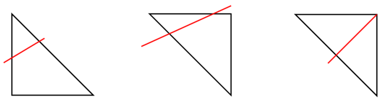


図 3　$+$ を配置する三角形

(2) プレ蛇グラフの**内部を通る**垂直線、水平線、斜線について：

[1] L_t 上か、L_t の進行方向の向かって左側に中点が存在する垂直線、水平線、斜線に $-$ を配置する (図 4 を参照)。

図 4　$-$ を配置する線分

[2] L_t の進行方向の向かって右側に中点が存在する垂直線、水平線、斜線に $+$ を配置する (図 5 を参照)。

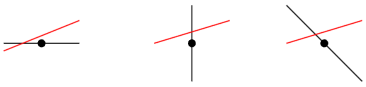


図 5　$+$ を配置する線分

以上のルールに従って $t = 2/5$ のプレ蛇グラフに符号を配置すると次のような図を得る。

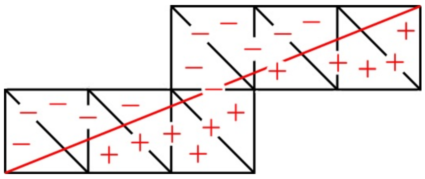


図 6　符号つきプレ蛇グラフ

この符号を、線分 L が左下から右上に向かって通る順番に並べる。ただし、直角三角形上の符号は 1 回カウント、線分上の符号は k **回重複カウント**する（$k=0$ のときはカウントしない)。たとえば、$t=2/5$ の例では

- $k=0$ のとき：$-,-,+,-,+,+,-,-,+,-,+,+$
- $k=1$ のとき：$-,-,-,-,+,+,-,+,+,+,+,-,-,-,-,-,+,-,-,+,+,+,+$

である。さらにこの符号の列をみて、同じ符号が続いている数を順番に並べ、それを使って正則連分数を構成する。 $t=2/5$ の例では $k=0$ のとき $[2,1,1,2,2,1,1,2]$、$k=1$ のとき $[4,2,1,4,5,1,2,4]$、 $k=2$ のとき $[6,3,1,6,8,1,3,6]$、$k=3$ のとき $[8,4,1,8,11,1,4,8]$ となる。ただし、

$$[a_1,\dots,a_m] := a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}}}$$

である。この手順で得られる連分数を $F^+(k,t)$ と書くことにする。連分数 $[a_1,\dots,a_m]$ を既約分数に直した時の分子を $m(a_1,\dots,a_m)$ と表すことにすると、この連分数を使って次のように $C_t(k,-k)$ と $M_t(k,0)$ が記述される。

定理 9.2 ([4, Theorem 7.10])**.** $F^+(k,t)=[a_1,\dots,a_m]$ とする。このとき、

$$M_t(k,0) = \begin{bmatrix} -m(a_1,\dots,a_{m-1}) & m(a_1,\dots,a_m) \\ -m(a_2,\dots,a_{m-1}) & m(a_2,\dots,a_m) \end{bmatrix},$$

$$C_t(k,-k) = \begin{bmatrix} m(a_2,\dots,a_m) & m(a_1,\dots,a_m) \\ (3k+3)m(a_2,\dots,a_m) - m(a_2,\dots,a_{m-1}) & (3k+3)m(a_1,\dots,a_m) - m(a_1,\dots,a_{m-1}) \end{bmatrix}$$

が成立する。特に、$m_{k,t} = m(a_1,\dots,a_m)$ である。

実際に $F^+(k,2/5)$ を計算してみると $k=0$ のとき $F^+(0,2/5)=[2,1,1,2,2,1,1,2]=194/75$、$k=1$ のとき $[4,2,1,4,5,1,2,4]=4683/1075$、$k=2$ のとき $[6,3,1,6,8,1,3,6]=37636/6013$、$k=3$ のとき $[8,4,1,8,11,1,4,8]=176405/21501$ で分子の値が k-GM 数になっているのが確認できる。また、$C_t(k,-k)$ の $(1,1)$ 成分を見ると、実は 7 節で導入した特性数 $u_{k,t}$ は $F^+(k,t)=(a_1,\dots,a_m)$ としたとき $m(a_2,\dots,a_m)$ で与えられる値であることもわかる。さらに、$m(a_2,\dots,a_m)$ は $F^+(k,t)$ の分母であることがわかっており、ここから次の定理が従う。

定理 9.3 ([4, Theorem 7.25])**.** $F^+(k,t)=\dfrac{m_{k,t}}{u_{k,t}}$ が成り立つ。

この定理の、特に $\dfrac{m_{k,t}}{u_{k,t}}$ が $F^+(k,t)$ という「良い」形の連分数でかけることは、次の節で紹介するトーリック幾何への応用において重要な意味を持つ。

注 9.4. 本稿ではプレ蛇グラフのみを導入し、プレ蛇グラフから与えられる**蛇グラフ**の導入を省略した。実は、$m_{k,t}$ は連分数 $F^+(k,t)$ の分子で与えられると同時に蛇グラフにおける**完全マッチング**の個数でもあり、論文 [4] ではこれを利用してこの節の諸定理を証明している。

10 応用 4：トーリック幾何と k-GM 数

最後に、トーリック幾何に対する応用を見る。

10.1 Hirzebruch-Jung 連分数と代数多様体の特異点解消

まずは、**Hirzebruch-Jung 連分数**（**HJ 連分数**）を導入する。これは、先ほどの正則連分数とは異なり、項の間の演算を和ではなく差で結ぶ連分数である。すなわち、

$$b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{\ddots}{b_{m-1} - \cfrac{1}{b_m}}}}$$

の形で表される連分数を指す。上記の HJ 連分数を表す記号として、$[[b_1, \ldots, b_m]]$ を用いることにする。まず、この連分数がトーリック幾何の文脈でどのように用いられるかということから説明する。

$N = \mathbb{Z}^2$ を 2 次元平面上の格子集合として、この格子集合を含む 2 次元平面 $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ を考える。既約分数 d/k に対して、$N_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathbf{v} = (d, -k)$ と $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ で張られる錐

$$\sigma_{d/k} = \{a\mathbf{v} + b\mathbf{e}_2 \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

を考える。これに対して、N の双対格子 $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{N}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$ を含む 2 次元平面 $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ の錐 $\sigma_{d/k}^{\vee}$ を次で定める。

$$\sigma_{d/k}^{\vee} = \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall v \in N_{\mathbb{R}},\ u(v) \geq 0\}.$$

なお、上記の集合においては $M_{\mathbb{R}}$ を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{N}_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z})$ とみなしている。 $S_{d/k} = \sigma_{d/k}^{\vee} \cap M$ を半群とみなして、$U_{d/k}$ を $\mathbb{C}[S_{d/k}]$ を座標環として持つアフィン多様体、あるいは $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_{d/k}])$ とする。 このアフィン多様体 $U_{d/k}$ には特異点がある場合があるが、この特異点が解消されたトーリック多様体は、錐 $\sigma_{d/k}$ を決まった位置で細かい錐に分割して、分割された各々の錐から得られるアフィン多様体を貼り合わせることによって得られることが知られている（この操作は**細分**と呼ばれる）。ここで、d/k の HJ 連分数展開は、特異点を解消するために必要な細分の位置の情報を持っている。

その細分の手順を見ていくことにする。具体的に $d/k = [[b_1, b_2, \ldots, b_m]]$ が与えられているとする。このとき、次の操作を考える。

(1) $u_0 = \mathbf{e}_2 := (0, 1)$, $u_1 = \mathbf{e}_1 := (1, 0)$ とおく。

(2) 次の漸化式で、$u_2, ..., u_{m+1}$ を帰納的に構成する：

$$u_{i+1} = b_i u_i - u_{i-1}$$

このとき、$u_{m+1} = \mathbf{v} = (d, -k)$ となる。

(3) 原点と端点とするような、各 u_i $(i = 2, 3, \ldots, m)$ を通る $m-1$ 本の半直線で $\sigma_{d/k}$ を分割する。

この操作で与えられた錐の細分（に対応するトーリック多様体）は、$U_{d/k}$ の極小特異点解消を与える。

10.2 k-GM 数と k ウォールチェイン

本題である k-GM 数の話に入る。ファレイツリーの頂点 $(r, t, s) \in \mathrm{F}\mathbb{T}$ を任意に取る。これに対応する k-GM 数 $(m_{k,r}, m_{k,t}, m_{k,s})$ を考える。さらに、$\begin{bmatrix} \varepsilon^{m_{k,r}} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{m_{k,s}} \end{bmatrix}$(ただし ε は $\varepsilon^{m_{k,t}} = 1$ を満たす原始冪等元)

で生成される $GL(2,\mathbb{C})$ の部分群を $G_{k,t}$ とする。2 変数多項式環 $\mathbb{C}[X,Y]$ に対して $G_{k,t}$ の作用を

$$\begin{bmatrix}\varepsilon^{m_{k,r}} & 0\\ 0 & \varepsilon^{m_{k,s}}\end{bmatrix}\cdot X=\varepsilon^{m_{k,r}}X,\quad \begin{bmatrix}\varepsilon^{m_{k,r}} & 0\\ 0 & \varepsilon^{m_{k,s}}\end{bmatrix}\cdot Y=\varepsilon^{m_{k,s}}Y$$

でそれぞれ与え、この作用に関して不変な元全体からなる環（不変式環）を $\mathbb{C}[X,Y]^{G_{k,t}}$ と書くことにする。このとき、実は環同型 $\mathbb{C}[X,Y]^{G_{k,t}}\simeq\mathbb{C}[S_{m_{k,t}/u_{k,t}}]$ が成り立つ。したがって、$\mathbb{C}[X,Y]^{G_{k,t}}$ を座標環として持つようなアフィン多様体の特異点解消を考えるためには、$\mathbb{C}[S_{m_{k,t}/u_{k,t}}]$ を座標環として持つアフィン多様体の特異点解消を考えればよく、そしてそのためには $m_{k,t}/u_{k,t}$ の HJ 連分数を考えれば良いことになる。$m_{k,t}/u_{k,t}$ の HJ 連分数展開がどのような形になるのかについて、[4] で 1 つの結果を与えているのでこれを説明する。まず k ウォールチェインツリーを導入する。

定義 10.1 (k ウォールチェインツリー)**.** 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\mathrm{W}\mathbb{T}(k)$ を考える。 (1) 最初の頂点は $[[k+2]]$ (2) 各頂点 $[[b_1,\dots,b_m]]$ は以下のような 2 つの子を持つ。

$$[[b_1,\ \dots\ ,\ b_m]]$$

$$[[b_1+1,b_2,\ \dots\ ,\ b_m,2]] \qquad\qquad [[2,b_1,b_2,\ \dots\ ,\ b_m+1]]$$

この各頂点に属する HJ 連分数を k **ウォールチェイン**と呼ぶ。歴史的には 2 ウォールチェインの連分数表示を持つ既約分数に付随するアフィン多様体が注目されていたようである（そもそも 2 ウォールチェイン以外のクラスはほとんど注目されておらず、このチェインだけが「ウォールチェイン」と呼ばれていたようである）。この代数多様体は「クラス T」と呼ばれる良いクラスに属しており、$\mathbb{Q}$ ゴレンシュタインスムージングだったりミルナー数が 0 だったりといろいろ良い性質を持っていて、商特異点の変形理論の文脈で研究されている。さて、[4] では次の定理を示している。

定理 10.2 ([4, Theorem 8.1])**.** $m_{k,t}/u_{k,t}$ は k ウォールチェインの連分数表示を持つ。

この定理は、$m_{k,t}/u_{k,t}$ の正則連分数展開が応用 2 で見たようにプレ蛇グラフ上の符号列を使って与えられることから示される。特に、プレ蛇グラフ上の符号が中央の符号を挟んで左右で綺麗に対称反転の形になっていることが重要である。この性質と、正則連分数展開と HJ 連分数展開の間の次の変換公式を使う。

命題 10.3 ([4, Corollary 8.10])**.** $i=1,\dots,\ell$ に対して、$a_i\in\mathbb{Z}_{>0}$ とする。このとき、ℓ が偶数ならば

$$[a_1,\dots,a_\ell]=[[a_1+1,(2)^{a_2-1},a_3+2,(2)^{a_4-1},\dots,a_{\ell-1}+2,(2)^{a_\ell-1}]],$$

ℓ が奇数ならば

$$[a_1,\dots,a_\ell]=[[a_1+1,(2)^{a_2-1},a_3+2,(2)^{a_4-1},\dots,(2)^{a_{\ell-1}-1},a_\ell+1]]$$

が成立する。ただし、$(2)^a$ は 2 が a 回連続することを意味する。

ただし、今回の文脈で使う主張は ℓ が偶数のときだけである。ℓ が偶数であることは、連分数を構成するための符号が必ず $-$ で始まり、$+$ で終わることから明らかである。

ちなみに、定理 10.2 の逆は成り立たない。定理 10.2 は、$k=2$ の場合は 2022 年に Markus Perling が、$k=0$ の場合については 2023 年に Giancarlo Urzúa と Juan Pablo Zúñiga が個別に示しており [8, 13]、この結果はその一般化となっている。ただし、2022 年の Perling の結果は 2-GM 数とその特性数を使った形ではなく、古典的なマルコフ数の 2 乗数と古典的なマルコフ数の特性数を使った形で記述されているので、[4] の結果は Perling と Urzúa-Zúñiga の結果を、「k-GM 数とその特性数」という共通のフォーマットで一般化した形であるといえる。

参考文献

[1] M. Aigner, Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture, Springer Cham, 2013, 257 pages.

[2] H. Cohn, Approach to Markoff ' s minimal forms through modular functions, Ann. of Math, 61, 1–12, 1955.

[3] G. Frobenius, Über die Markovschen Zahlen, Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.3, 458–487, 1913.

[4] Y. Gyoda, S. Maruyama and Y. Sato, SL(2,Z)-matrixizations of Generalized Markov numbers, arXiv: 2407.08203, 2024.

[5] Y. Gyoda and S. Maruyama, Uniqueness theorem of generalized Markov numbers that are prime powers, arXiv: 2312.07329, 2023.

[6] Y. Gyoda and K. Matsushita, Generalization of Markov Diophantine equation via generalized cluster algebra, Electron. J. Combin., 30, P4.10, 2023.

[7] F. Luo, Geodesic length functions and Teichmüller spaces, J. Differential Geom., 48, 275–317, 1998.

[8] M. Perling, Unfocused notes on the Markoff equation and T-Singularities, arXiv:2210.12982, 2022.

[9] P. Schmutz, Systoles of arithmetic surfaces and the Markoff spectrum, Math. Ann., 305, 191–203, 1996.

[10] A. Markoff, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies , Math. Ann., 15, 381–406, 1879.

[11] A. Markoff, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies (Second Memoir), Math. Ann., 17, 379–399, 1880.

[12] T. Nakanishi and M. Näätänen, Areas of two-dimensional moduli spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 129, 3241-3252, 2001.

[13] G. Urzúa and J. P. Zúñiga, The birational geometry of Markov numbers, arXiv:2310.17957, 2023.

CARTIER 作用素を用いた微分形式の拡張可能性

河上龍郎

1. はじめに

X を滑らかな代数多様体とする．このとき，微分形式層 Ω^i_X は X の情報をふんだんに持つ重要な局所自由層である．しかし，X が特異点を持つとき，Ω^i_X は torsion-free とは限らないなどの理由により，あまり扱いやすくない．そのため X が正規のときは，反射的微分形式層 $\Omega^{[i]}_X := j_*\Omega^i_U$ がよく考えられる．ここで，$j\colon U \hookrightarrow X$ を滑らかな領域からの包含である．名前の通り，X は反射的である，すなわち，$\Omega^{[i]}_X = (\Omega^{[i]}_X)^{**}(= (\Omega^i_X)^{**})$ が成立する．反射的微分形式層を用いる利点として，duality との相性の良さが挙げられる．実際，$d := \dim X$ として，

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^{[i]}_X, \omega_X) \cong \Omega^{[d-i]}_X$$

が成立する．ここで，ω_X は双対化層であるが，$\omega_X \cong \Omega^{[d]}_X$ であることがよく知られている．

さて，双有理幾何学においては，正規な代数多様体間の固有かつ双有理な射 $f\colon Y \to X$ が与えられたときに，$\Omega^{[i]}_X$ と $\Omega^{[i]}_Y$ の関係が重要になる．特に，X が滑らかでない場合，特異点解消 $f\colon Y \to X$ を取り，Y 上の議論に帰着することができれば効果的である．Exlocus(f) で f の例外集合全体を表すとする．このとき，X の開集合 U に対して，自然な単射

$$\Gamma(f^{-1}(U), \Omega^{[i]}_Y) \hookrightarrow \Gamma(f^{-1}(U) \setminus \mathrm{Exlocus}(f), \Omega^{[i]}_Y) = \Gamma(U \setminus f(\mathrm{Exlocus}(f)), \Omega^{[i]}_X) = \Gamma(U, \Omega^{[i]}_X)$$

が存在する．ここで，最初の単射性は $\Omega^{[i]}_Y$ の torsion-freeness から，最後の等号は $\Omega^{[i]}_X$ の反射性からわかる．この全射性，すなわち X の反射的微分形式がいつ Y の反射的微分形式に拡張されるかを問うのが微分形式の (正則) 拡張定理である．また上と同様に，自然な制限射

$$f_*\Omega^{[i]}_Y(\log E) \hookrightarrow \Omega^{[i]}_X$$

の全射性も重要な問題である．ただし，E は f の例外因子全体である．

Definition 1.1. X を正規代数多様体とする．

(1) X が i 形式の正則拡張定理を満たすとは，任意の固有かつ双有理な射 $f\colon Y \to X$ に対し，自然な制限射

$$f_*\Omega^{[i]}_Y \hookrightarrow \Omega^{[i]}_X$$

が全射になることをいう．すべての i に対して，正則拡張定理が成立するとき，単に正則拡張定理が成立するという．

(2) X が i 形式の対数的拡張定理を満たすとは，任意の固有かつ双有理な射 $f\colon Y \to X$ に対し，自然な制限射

$$f_*\Omega^{[i]}_Y(\log E) \hookrightarrow \Omega^{[i]}_X$$

が全射になることをいう．すべての i に対して，対数的拡張定理が成立するとき，単に対数的拡張定理が成立するという．

包含 $f_*\Omega^{[i]}_Y \subset f_*\Omega^{[i]}_Y(\log E)$ より，正則微分形式が成立するならば，対数的拡張定理も成立する．また定理という名前がついているが，これは特異点と微分形式に関する性質である．

2. $\mathbb{C}$ 上における微分形式の拡張定理

代数多様体 X が $\mathbb{C}$ 上定義されているときは，以下のような結果が知られている．

Theorem 2.1. X を $\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体とする．このとき，以下が成立する．

(1) X が有理特異点ならば，X は正則拡張定理を満たす [17]
(2) X が *Du Bois* ならば，X は対数的拡張定理を満たす ([7, 8]).

Theorem 2.1の証明における主な手法は，混合 Hodge 理論，またはそれ由来の消滅定理である．極小モデル理論が用いられる場合もあり，さらに (対数的) 特異点解消は多用される．

さて，正標数に目を向けると，まず正標数には混合 Hodge 理論に対応する理論はなく，極小モデル理論や特異点解消も 3 次元までしか知られていない.[1]そのため，正標数の拡張定理を調べる上で，標数 0 の議論を真似することは難しいであろう．一方，もし正標数の強みである Frobenius 射を用いた純代数的アプローチ見つけることができれば興味深い．

3. 観察 (商特異点の場合)

X を任意標数の代数閉体上定義された正規代数多様体とする．この章では，主に X が smooth な多様体からの有限全射をもつ場合を考える．この有限全射を Frobenius 射に置き換えるのが，次章の目的である．

まずは正規代数多様体間の有限全射

$$g\colon X' \to X$$

を考える．U を X の滑らかな領域，U' を X' の滑らかな領域と $g^{-1}(U)$ の共通部分とする．このとき，pullback 写像

$$g^*\colon \Omega^i_U \to g_*\Omega^i_{U'}$$

が存在する．これに対し，$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(-, \omega_U)$ を適用し，Grothendieck duality を使うと

$$\tau_g^{d-i}\colon g_*\Omega^{d-i}_{U'} \to \Omega^{d-i}_U$$

が得られる．ここで，$d := \dim X = \dim X'$ である．$j\colon U \hookrightarrow X$ を包含とし，$\tau_g^{[i]}$ を

$$\tau_g^{[i]} = j_*\tau_g^i\colon g_*\Omega^{[i]}_{X'} \to \Omega^{[i]}_X$$

で定め，i 次反射的 trace 射と呼ぶことにする．

ここで，正規代数多様体 Y からの固有かつ双有理な射 $f\colon Y \to X$ をとる．$X' \times_X Y$ の成分のうち，X' を dominant するものの正規化を Y' をとおく．誘導される射を $f'\colon Y' \to X'$，$g_Y\colon Y' \to Y$ として，次のような可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc}
f_*(g_Y)_*\Omega^{[i]}_{Y'} & \xrightarrow{f_*\tau^{[i]}_{g_Y}} & f_*\Omega^{[i]}_Y \\
\downarrow & & \downarrow \\
g_*\Omega^{[i]}_{X'} & \xrightarrow{\tau^{[i]}_g} & \Omega^{[i]}_X.
\end{array}$$

ここで仮に，下の射 $\tau_g^{[i]}\colon g_*\Omega^{[i]}_{X'} \to \Omega^{[i]}_X$ が全射であると仮定する．このときもし X' が正則拡張定理を満たすと仮定すると，左の縦の射は全射になり，上の可換図式から右の縦の射も全射になる．

[1]正確には，3 次元極小モデル理論は標数 $p > 3$ で機能することが知られている [9].

すなわち，X' が正則拡張定理を満たすと X もそれを満たすことがわかる．また，滑らかな多様体は正則拡張定理を満たす．これは，pullback 射と制限射の合成

$$\Omega_X^i \to f_*\Omega_Y^{[i]} \hookrightarrow \Omega_X^i$$

が同型になることからわかる．よって，滑らかな多様体の商に対する正則拡張定理は以下の問いに帰着される．

Question 3.1. $\tau_g^{[i]}\colon g_*\Omega_{X'}^{[i]} \to \Omega_X^{[i]}$ はいつ全射になるか？

この問いに対する答えが次の定理である．

Theorem 3.2 (Cf. [16, proof of Theorem C])**.** $\deg(g) \in k^\times$ ならば，$\tau_g^{[i]}\colon g_*\Omega_{X'}^{[i]} \to \Omega_X^{[i]}$ は分裂全射である．

$\deg(g) \in k^\times$ という条件は tame と呼ばれる．k の標数 0 のときは常に満たされる仮定であり，k の標数 $p > 0$ のときは p で割り切れないということを意味する．以上のことをまとめると次を得る．

Proposition 3.3. X が *tame quotient* とする．すなわち，ある滑らかな代数多様体 X' からの有限全射 $g\colon X' \to X$ であり，$\deg(g) \in k^\times$ なるものが存在するとする．このとき，X は正則拡張定理を満たす．

Proposition 3.3は標数 0 のときは新しい結果ではない．実際，このとき X は有理特異点になるため，Theorem 2.1 (1) から正則拡張定理を得る．一方で標数 0 であっても，商特異点の正則拡張定理に対するこれほど簡潔な証明は知られていなかったと思われる．また，後にみる Example 4.9 (1) から，g が単に separable というだけでは，Theorem 3.2や Proposition 3.3は成立しないことがわかる．

4. Cartier 作用素と微分形式の拡張定理

この章では，基礎体を正標数の代数閉体とする．X を正規代数多様体とする．3章では，X が滑らかな代数多様体からの tame な有限全射を持つ場合について考えた．この章の目的は，この有限全射を Frobenius 射に置き換えることである．すべての正標数の代数多様体は Frobenius 射を持つので，これができれば適用範囲を大幅に広げられる可能性がある．

まずは3章の議論を Frobenius に置き換えてみる．U を X の滑らかな領域とする．以下，簡単のため 1 次の微分形式層を考える．まず，pullback 射

$$F^*\colon \Omega_U^1 \to F_*\Omega_U^1; dx \longmapsto dx^p$$

が存在するが，$dx^p = pdx^{p-1} = 0$ なので，F^* は zero 射になってしまう．そこで F^* を p で割り，dx を dx^{p-1} にうつすような射を考える．しかしこのとき，一般に

$$\frac{1}{p}F^*(dx + dy) \neq (\frac{1}{p}F^*dx + \frac{1}{p}F^*dy)$$

であり，$\frac{1}{p}F^*$ は Abel 群の射でなくなってしまう．一方，

$$\frac{1}{p}F^*(dx + dy) - (\frac{1}{p}F^*dx + \frac{1}{p}F^*dy) \in B_U^1 := \mathrm{im}(F_*d\colon F_*\mathcal{O}_U \to F_*\Omega_U^1)$$

がわかるので，

$$\frac{1}{p}F^*\colon \Omega_U^1 \to F_*\Omega_U^1/B_U^1; dx \longmapsto x^{p-1}dx \quad \text{modulo} \quad B_U^1$$

は well-defined である．また，i が一般の場合も

$$B_U^i \coloneqq \mathrm{im}(F_*d\colon F_*\Omega_U^{i-1} \to F_*\Omega_U^i)$$

として，well-defined な射

$$\frac{1}{p}F^*\colon \Omega_U^i \to F_*\Omega_U^i/B_U^i$$

が定義できる．ここで，F_*d は微分射 $d\colon \Omega_U^i \to \Omega_U^{i+1}$ の Frobenius pushforward のことであり，これは $\mathcal{O}_U$ 加群の射になることが簡単に確かめられる．したがって，B_U^i も $\mathcal{O}_U$ 加群であり，また $\frac{1}{p}F^*$ も $\mathcal{O}_U$ 加群の射になる．この $\frac{1}{p}F^*$ は，inverse Cartier 作用素と呼ばれる．

次に，3章のように $\frac{1}{p}F^*$ の ω_U-双対 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(-,\omega_U)$ をとると，

$$C_U^{d-i}\colon Z_U^{d-i} \to \Omega_U^{d-i}$$

を得る．ここで，$d \coloneqq \dim X$ であり，Z_U^i とは

$$Z_U^i \coloneqq \ker(F_*d\colon F_*\Omega_U^i \to F_*\Omega_U^{i+1})$$

で定義される $\mathcal{O}_U$ 加群である．また，C_U^i は i 次 Cartier 作用素と呼ばれる．$j\colon U \hookrightarrow X$ を包含とし，$j_*C_U^i$ を考えると，

$$C_X^{[i]} \coloneqq j_*C_U^i\colon Z_X^{[i]} \to \Omega_X^{[i]}$$

を得る．これを i 次反射的 Cartier 作用素と呼ぶこととする．

3章を踏まえると，次の問いが自然であると思われる．

Question 4.1. i 次反射的 Cartier 作用素 $C_X^{[i]}\colon Z_X^{[i]} \to \Omega_X^{[i]}$ が全射であれば，拡張定理が成立するか？

この問いに答えるのが [11] の主定理である．

Theorem 4.2 ([11, Theorem A])**.** *$i \geq 0$ を固定する．i 次反射的 Cartier 作用素 $C_X^{[i]}\colon Z_X^{[i]} \to \Omega_X^{[i]}$ が全射であれば，X は i 形式の対数的拡張定理を満たす．*

Theorem 4.2において，正則拡張定理は期待できない．例えば X が toric のとき，全ての $i \geq 0$ に対し i 次反射的 Cartier 作用素は常に全射であるが，Example 4.9でみるように，2 次元の toric でも正則拡張定理が成立しない例がある．

*Theorem 4.2*のポイント. Proposition 3.3では，X の拡張定理をより性質の良い X' の拡張定理に帰着することで証明を行なった．一方，今回の状況では Frobenius 射が自己射であるため，X は X のままであり，別の方針を考える必要がある．

$f_*\Omega_Y^{[i]}(\log E)$ に，$\lfloor D \rfloor = 0$ かつ $\mathrm{Supp}(D) = E$ になるような微小な有効 $\mathbb{Q}$-因子 D を足す．テンソルを省略して，$\Omega_Y^{[i]}(\log E) \otimes \mathcal{O}_X(D)$ を $\Omega_Y^{[i]}(\log E)(D)$ と書くことにすると，当然,

$$\Omega_Y^{[i]}(\log E)(D) = \Omega_Y^{[i]}(\log E)$$

であるが，[10, Section 3.2] にあるように，$\Omega_Y^{[i]}(\log E)(pD)$ からの partial 射

$$\Omega_Y^{[i]}(\log E)(pD) \rightharpoonup \Omega_Y^{[i]}(\log E)(D)$$

を構成することができる．ここで，$\Omega_Y^{[i]}(\log E)(pD) = \Omega_Y^{[i]}(\log E) \otimes \mathcal{O}_X(\lfloor pD \rfloor)$ であり，D より大きな $\mathbb{Q}$-因子 pD が付け加えたれていることに注意したい．$\Omega_Y^{[i]}(\log E)(pD) \rightharpoonup \Omega_Y^{[i]}(\log E)(D)$ は全

体で定義されていない partical な射ではあるが，少し議論をすると，可換図式

$$\begin{array}{ccc} f_*F_*\Omega_Y^{[i]}(\log E)(pD) & \xrightarrow{f_*C_Y^{[i]}} & f_*\Omega_Y^{[i]}(\log E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_*\Omega_{X'}^{[i]} & \xrightarrow{C_X^{[i]}} & \Omega_X^{[i]} \end{array}$$

の右の縦の射の全射性 (= X の対数的拡張定理) は左の縦の射の全射性，すなわち

$$f_*\Omega_Y^{[i]}(\log E)(pD) \hookrightarrow \Omega_X^{[i]}$$

の全射性に帰着できることがわかる．これを繰り返すと，ある $n > 0$ が存在して，

$$f_*\Omega_Y^{[i]}(\log E)(p^nD) \hookrightarrow \Omega_X^{[i]}$$

が全射かという問題になるが，これは $\lfloor p^nD \rfloor$ が $\Omega_X^{[i]}$ の各局所切断の E に沿った pole を上回れば良いので，n を十分大きく取れば満たされる． □

したがって，X の対数的拡張定理は次の問いに帰着される．

Question 4.3. いつ i 次反射的 Cartier 作用素 $C_X^{[i]}: Z_X^{[i]} \to \Omega_X^{[i]}$ が全射か？

例えば X が F-liftable であれば，反射的 Cartier 作用素の全射性がわかる．

Definition 4.4. X を代数多様体とする．X が F-liftable であるとは，X とその Frobenius 射 F が，長さ 2 の Witt 環 $W_2(k)$ に持ち上がることをいう．

Proposition 4.5 ([13, Theorem 3.3])**.** X を正規代数多様体とする．このとき，以下が同値である．

(1) 1 次反射的 *Cartier* 作用素 $C_X^{[1]}: Z_X^{[1]} \to \Omega_X^{[1]}$ が分裂全射である．
(2) すべての $i \geq 1$ に対して，i 次反射的 *Cartier* 作用素 $C_X^{[i]}: Z_X^{[i]} \to \Omega_X^{[i]}$ が分裂全射である．
(3) X が *F-liftable* である．

したがって，Question 4.3の答えの 1 つとして，X が F-liftable であることが挙げられる．F-liftable 多様体の例として挙げられるのは，toric 多様体や (tame とは限らない) 線形簡約群による商特異点である．

Theorem 4.6 ([1, Theorem 2.10 (c)], [11, Theorem 2.12])**.** X を正規代数多様体とする．このとき，X が

(1) 滑らかな多様体の (有限とは限らない) 被約な線形簡約群スキームの *good quotient* であるか，
(2) (被約とは限らない) 有限な線形簡約群スキームによる商特異点

であれば，X は *F-liftable* である．

まとめると次の定理を得る．

Theorem 4.7 ([11, Theorem B])**.** X を正規代数多様体とする．X が *F-liftable* であれば，対数的拡張定理が満たされる．特に，

(1) 滑らかな多様体の (有限とは限らない) 被約な線形簡約群スキームの *good quotient*,
(2) 滑らかな多様体の (被約とは限らない) 有限な線形簡約群スキームによる商特異点

は対数的拡張定理を満たす．

また，2 次元では以下のようなことがわかる．

Theorem 4.8 ([13, Theorem A]). X を標数 $p>0$ の 2 次元 *klt* 特異点とする．このとき，以下が同値である．

(1) X が F-*liftable*,
(2) X が F-*pure* かつ，$p=5$ の E_8^1 型の有理二重点でない．

つまり，2 次元 klt 特異点に対して $p\neq 5$ であれば，F-liftability は F-purity と同値である．$p=2,3$ で F-liftability と F-purity は一致するのにも関わらず，$p=5$ で異なるというのは不思議である．

標数 $p>5$ の 2 次元 klt 特異点は，F-pure であるため，F-liftable でもあり，Theorem 4.2から，対数的拡張定理を満たすことがわかる．[2]

Example 4.9. (1) $p=2$ とし，X を E_8^2 型の有理二重点とする．このとき，X は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-商特異点であるが，X は対数的拡張定理を満たさない．$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は被約ではあるが，線形簡約ではない群スキームである．これにより，対数的拡張定理には，線形簡約性が重要であることがわかる．詳細は [11, Example 4.5] をみよ．

(2) X を $\frac{1}{p}(1,1)$-特異点とする．これは，μ_p-商特異点であり，特に X は toric である．この特異点は $(-p)$-curve の contraction によって得られる特異点ということもできる．X は線形簡約群による商特異点であるため，F-liftable であり，対数的拡張定理を満たすが，正則拡張定理は成立しないことが知られている ([18, Proposition 1.5],[5, Example 10.2])．特に，Theorem 4.2では，正則拡張定理の成立は期待できない．

5. その他の結果

この章では，基礎体を標数 $p>0$ の代数閉体とする．

5.1. **2 次元の拡張定理.** まず [11] 以前から，Graf[5] により，標数 $p>5$ の 2 次元 lc 特異点が対数的拡張定理を満たすことが知られていた．

Theorem 5.1 ([5, Theorem 1.2]). X を標数 $p>5$ の 2 次元 *lc* 特異点とする．このとき，X は対数的拡張定理を満たす．

超特異楕円曲線の affine cone を考えることで，十分大きい標数に対して，F-liftable でない lc 特異点が存在することがわかるので，残念ながら Theorem 4.7は Theorem 5.1をカバーできていない．[3]

また，筆者は Theorem 5.1の拡張として，次のような消滅定理を示した．

Theorem 5.2 ([12, Theorem A]). X を標数 $p>0$ の 2 次元特異点とする．次の条件のいずれかが成立すると仮定する．

(1) $p>5$ かつ X が *lc*.
(2) X が F-*pure*.

このとき，対数的特異点解消 $f\colon Y\to X$ に対して，

$$R^1f_*\Omega^i_Y(\log E)(-E)=0$$

が成立する．ただし，E は f の例外因子全体である．

---

[2]Graf[5] により，標数 $p>5$ の 2 次元 log canonical(lc) 特異点が，対数的拡張定理を満たすことはすでに知られていた．

[3]一方，dlt blow-up を考えることで，比較的容易に Theorem 4.7(の log バージョン) に帰着することとができるので，Theorem 5.1の証明を簡略化することは可能である．

Theorem 5.2の本質的な主張は $i=1$ のときである．実際，$i=2$ のときは

$$R^1 f_*\Omega_Y^2(\log E)(-E) = R^1 f_*\omega_Y$$

より，これは Grauert–Riemenschneider 消滅定理に他ならない．Grauert–Riemenschneider 消滅定理は任意標数の代数曲面に対して成立することが知られている．また，$i=0$ のときは，

$$R^1 f_*\Omega_Y^0(\log E)(-E) = R^1 f_*\mathcal{O}_Y(-E)$$

であるが，これも任意標数の lc 特異点に対して成立することが比較的容易に確かめられる．$i=1$ のとき，formal duality を使うと

$$R^1 f_*\Omega_Y^1(\log E)(-E) \cong H_E^1(\Omega_Y^1(\log E))$$

を得る．完全列

$$H^0(Y, \Omega_Y^1(\log E)) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X^{[1]}) \to H_E^1(\Omega_Y^1(\log E))$$

より，$H_E^1(\Omega_Y^1(\log E))$ は対数的拡張定理における射

$$f_*\Omega_Y^1(\log E) \hookrightarrow \Omega_X^{[1]}$$

の cokernel を含むことがわかる．特に，Theorem 5.2の消滅定理は対数的拡張定理よりも強い主張であり，Theorem 5.1の拡張となっている．[4]またここから，Theorem 5.2の $i=1$ の消滅には，$p>5$ かつ lc や，F-pure などの仮定が必要であることもわかる．

このように 2 次元に制限して考えると，Theorem 5.1や Theorem 5.2は，Theorem 4.7よりも強い主張である．一方，Theorem 5.1や Theorem 5.2はどちらも 2 次元の lc 特異点の分類に強く依存しており，高次元化が難しい．Theorem 4.2のような Cartier 作用素を用いた特徴づけを考えたのは，分類に依らない手法を探すためである．

5.2. **1 形式の拡張定理.** Theorem 4.2は反射的 Cartier 作用素が全射であればよく，Proposition 4.5のように，分裂全射である必要はない．ここでは，全射になる条件をより直接考える．X を正規代数多様体，U を滑らかな領域とする．このとき，短完全列

$$0 \to B_U^i \to Z_U^i \xrightarrow{C_U^i} \Omega_U^i \to 0$$

が存在する (Cartier 同型)．この短完全列の包含 $j\colon U \hookrightarrow X$ による pushforward を考えることで，完全列

$$Z_X^{[i]} \to \Omega_X^{[i]} \to Rj_*B_U^{[i]}$$

を得る．一般に $Rj_*B_X^{[i]}$ の消滅を示すことは容易でないが，$i=1$ のときは例外である．実際，B_U^1 は，Frobenius 射 $\mathcal{O}_U \to F_*\mathcal{O}_U$ の cokernel である，つまり，完全列

$$0 \to \mathcal{O}_U \to F_*\mathcal{O}_U \to B_U^1 \to 0$$

が存在する．これをうまく使うことで，X の Serre 条件と X の特異点の余次元の情報から，1 次反射的 Cartier 作用素 $C_X^{[1]}\colon Z_X^{[1]} \to \Omega_X^{[1]}$ が全射になる条件を導くことができる．

Theorem 5.3. X を正規代数多様体とする．

(1) X が Serre 条件 (S_4) を満たし，特異点の余次元が 4 以上，または
(2) X が Serre 条件 (S_3) を満たし，特異点の余次元が 3 以上，X が *F-injective*

であるとき，1 次反射的 Cartier 作用素 $C_X^{[1]}\colon Z_X^{[1]} \to \Omega_X^{[1]}$ が全射であり，特に X は 1 形式の対数的拡張定理を満たす．

[4]一般に，孤立特異点に対しては同様の議論が機能する．

ここで，X が F-injective であるとは，全ての閉点 $x \in X$ と全ての $j \geq 0$ に対し，局所コホモロジー $H^j_{\mathfrak{m}_x}(\mathcal{O}_X)$ への Frobenius 作用 $F\colon H^j_{\mathfrak{m}_x}(\mathcal{O}_X) \to H^j_{\mathfrak{m}_x}(\mathcal{O}_X)$ が単射であることをいう．これは Du Bois 特異点の正標数アナログと考えられている [19].

Flenner[4] により，標数 0 の高い余次元の特異点は，正則拡張定理を満たすことが知られているが，ここでは特に Serre 条件は必要ない．しかし次の Graf の定理からわかるように，正標数では Serre 条件が本質的であることがわかる．

Theorem 5.4 ([6, Theorem 3], cf. [11, Example 4.6])**.** p を素数，$d \geq 3$ を整数とする．このとき，標数 p かつ余次元 d の特異点であって，1 形式の対数的拡張を満たさないものが存在する．

このような例は，Akizuki-Nakano 消滅定理を満たさない正標数の滑らかな射影多様体の affine cone として構成される．また，Flenner[4] によると，1 形式の正則拡張定理は余次元 3 以上という仮定でよいが，Theorem 5.3の仮定は codimension の観点から最適であるかわかっていない．

さて，Theorem 5.3 (2) の F-injective の条件を quasi-F-pure という条件に置き換えることができる．ここで，quasi-F-pure とは元々，呼子 [20] によって導入された F-pure を弱めた概念である．筆者は，高松，田中，Witaszek，呼子，吉川らとともにこの quasi-F-purity と双有理幾何学の関係性を研究し [14, 15]，例えば以下のような定理を得た．

Theorem 5.5 ([15, Theorems A and B])**.** 標数 $p > 41$ の 3 次元 $\mathbb{Q}$-*factorial klt* 特異点は *quasi-F-pure* である．また，$p > 41$ という仮定は，最適である．

3 次元 klt 特異点は標数が十分大きくても，F-pure とは限らないことが知られているため [3]，より広いクラスである quasi-F-purity を考えることが Theorem 5.5において不可欠であることがわかる．この定理と Theorem 5.3の variant を合わせせることで，次の定理を得る．

Theorem 5.6 ([15, Theorem E])**.** 標数 $p > 41$ の 3 次元 *terminal* 特異点は 1 形式の対数的拡張定理を満たす．

Proof. $\mathbb{Q}$-factorization をとり，X を $\mathbb{Q}$-factorial としてよい．$p > 5$ の 3 次元 klt 特異点は Cohen-Macaulay であり [2]，また terminal 特異点は任意標数で余次元 2 で正則である．これと Theorem 5.3 (2) において，F-injectivity を quasi-F-purity で置き換えられること，及び Theorem 5.5より，定理の主張を得る． □

Theorem 5.6を klt にすること，標数の仮定を最適にすること，そして 1 形式だけでなく全ての形式に関する主張を得ることなどが今後の課題である．

謝辞

第 69 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会を与えて下さった先生方に感謝申し上げます．本研究は，JSPS 科研費 JP22KJ1771 及び JP24K16897 の助成を受けています．

参考文献

[1] Piotr Achinger, Jakub Witaszek, and Maciej Zdanowicz. Global Frobenius liftability II: surfaces and Fano threefolds. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. 24, No. 1, pp. 329–366, 2023.

[2] Emelie Arvidsson, Fabio Bernasconi, and Justin Lacini. On the Kawamata-Viehweg vanishing theorem for log del Pezzo surfaces in positive characteristic. Compos. Math., Vol. 158, No. 4, pp. 750–763, 2022.

[3] Paolo Cascini, Hiromu Tanaka, and Jakub Witaszek. Klt del Pezzo surfaces which are not Globally F-split. Int. Math. Res. Not. IMRN, No. 7, pp. 2135—-2155, 2018.

[4] Hubert Flenner. Extendability of differential forms on nonisolated singularities. Invent. Math., Vol. 94, No. 2, pp. 317–326, 1988.

[5] Patrick Graf. Differential forms on log canonical spaces in positive characteristic. J. Lond. Math. Soc. (2), Vol. 104, No. 5, pp. 2208–2239, 2021.

[6] Patrick Graf. A note on Flenner's extension theorem. Manuscripta Math., Vol. 165, No. 3-4, pp. 597–603, 2021.

[7] Patrick Graf and Sándor J. Kovács. An optimal extension theorem for 1-forms and the Lipman-Zariski conjecture. Doc. Math., Vol. 19, pp. 815–830, 2014.

[8] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Sándor J. Kovács, and Thomas Peternell. Differential forms on log canonical spaces. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., No. 114, pp. 87–169, 2011.

[9] Christopher Hacon and Jakub Witaszek. The minimal model program for threefolds in characteristic 5. Duke Math. J., Vol. 171, No. 11, pp. 2193–2231, 2022.

[10] Nobuo Hara. A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius maps. Amer. J. Math., Vol. 120, No. 5, pp. 981–996, 1998.

[11] Tatsuro Kawakami. Extendability of differential forms via Cartier operators. `arXiv:2207.13967`, 2022. To appear in J. Eur. Math. Soc. (JEMS).

[12] Tatsuro Kawakami. Steenbrink-type vanishing for surfaces in positive characteristic. `arXiv:2402.08153`, 2024. To appear in Bull. Lond. Math. Soc.

[13] Tatsuro Kawakami and Teppei Takamatsu. On Frobenius liftability of surface singularities. `arXiv:2402.08152`, 2024.

[14] Tatsuro Kawakami, Teppei Takamatsu, Hiromu Tanaka, Jakub Witaszek, Fuetaro Yobuko, and Shou Yoshikawa. Quasi-F-splittings in birational geometry. `arXiv:2208.08016`, 2022. To appear in Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.

[15] Tatsuro Kawakami, Teppei Takamatsu, Hiromu Tanaka, Jakub Witaszek, Fuetaro Yobuko, and Shou Yoshikawa. Quasi-F-splittings in birational geometry II. Proc. Lond. Math. Soc. (3), Vol. 128, No. 4, pp. Paper No. e12593, 81, 2024.

[16] Tatsuro Kawakami and Burt Totaro. Endomorphisms of varieties and Bott vanishing. `arXiv:2302.11921`, 2023. To appear in J. Algebraic Geom.

[17] Stefan Kebekus and Christian Schnell. Extending holomorphic forms from the regular locus of a complex space to a resolution of singularities. J. Amer. Math. Soc., Vol. 34, No. 2, pp. 315–368, 2021.

[18] Adrian Langer. Birational geometry of compactifications of Drinfeld half-spaces over a finite field. Adv. Math., Vol. 345, pp. 861–908, 2019.

[19] Karl Schwede. F-injective singularities are Du Bois. Amer. J. Math., Vol. 131, No. 2, pp. 445–473, 2009.

[20] Fuetaro Yobuko. Quasi-Frobenius splitting and lifting of Calabi-Yau varieties in characteristic p. Math. Z., Vol. 292, No. 1-2, pp. 307–316, 2019.

Email address: `tkawakami@math.kyoto-u.ac.jp`

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

グラフの剛性に関わる凸多面体の構成問題

村井　聡

1. 序文

本稿では講演で紹介した, 5 次元以上の素な単体的凸多面体のアフィン型がそのグラフの stress 空間から決定することの証明の概要を紹介する。尚, 本研究は Isabella Novik と Hailun Zheng との共同研究であり, ここで紹介する定理の完全な証明は [MNZ] で与えられている.

最初にグラフの stress 空間とは何かについて説明する. 空間 $\mathbb{R}^d$ 内の 1 次元の幾何的単体的複体 G を $\mathbb{R}^d$ 内の**幾何グラフ (geometric graph)** と呼ぶことにし, $V(G) \subset \mathbb{R}^d$ で G の頂点集合, $E(G)$ で G の辺集合を表すことにする. グラフ G の (self) stress とは写像 $\lambda : E(G) \to \mathbb{R}$ であって次を満たすものである

$$\forall \boldsymbol{v} \in V(G), \quad \sum_{\boldsymbol{u} \in N_G(\boldsymbol{v})} (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

但し $N_G(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{u} \in V(G) \mid$ 頂点 $\boldsymbol{u}$ は頂点 $\boldsymbol{v}$ と隣接$\}$ は G における $\boldsymbol{v}$ の近傍とする. Stress はグラフの剛性の理論で重要な役割を果たす. 本稿では stress の組合せ論的な側面については立ち入らないが, 興味があれば [CG] 等を参照して頂きたい. 以下 Stress(G) で G の stress 全体の集合を表すとする. 凸多面体のグラフの stress 空間について Gil Kalai は以下の予想をしている.

Conjecture 1.1 (Kaial)**.** d を 4 以上の整数とし, $P \subset \mathbb{R}^d$ を素な d 次元単体的凸多面体, $G(P)$ を P の頂点を $G(P)$ の頂点, P の辺を $G(P)$ の辺とする幾何グラフとする. $G(P)$ の stress 空間は P のアフィン型を決定する.

尚凸多面体 P が単体的であるとは P の真の面が全て単体であるときに言う. 素な単体的凸多面体の定義は後の章を見ていただきたい. 一般に凸多面体のアフィン型は頂点間のアフィン従属関係式全体から決定することが良く知られている. 一方, 条件 (1) に表れる等式 $\sum_{\boldsymbol{u} \in N_G(\boldsymbol{v})} (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ は $V(G)$ の頂点間のアフィン従属関係式になっているので, stress 空間は頂点間のアフィン従属関係式の情報をある程度含んでいる. Kalai の予想は, 4 次元以上の素な単体的凸多面体のグラフの場合は stress 空間が全てのアフィン従属関係式の情報を含むという予想とみなすことが出来る. この予想に関し, 次の特別な場合を証明することが出来たので本稿ではその証明の概要を紹介する.

Theorem 1.2. *Conjecture 1.1* は $d \geq 5$ の時は正しい.

尚 $d = 4$ の場合は Conjecture 1.1 は現在も未解決である.

2. 証明の概要

2.1. Stanley-Reisner 環. 定理の証明には Stanley-Reisner 環の手法が重要となるので, 最初に単体的凸多面体の Stanley-Reisner 環について簡単に紹介する.

$P \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元単体的凸多面体とし, $V(P) = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を P の頂点集合とする. 部分集合 $F \subset [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し, $\mathrm{conv}\{\boldsymbol{v}_i \mid i \in F\}$ が P の面でないとき, F は P の non-face であるということにする, 但し $\mathrm{conv}(-)$ は凸閉包を表す. $S = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ を実数を係数とする多項式環とし, S のイデアル I_P を次で定める

$$I_P := (x^F = \prod_{i \in F} x_i \mid F \text{ は } P \text{ の non-face}).$$

このイデアル I_P を P の Stanley-Reisner イデアルと呼び, 剰余環 $\mathbb{R}[P] := S/I_P$ を P の Stanley-Reisner 環と呼ぶ. 単体的凸多面体の Stanley-Reisner 環は次の性質を持つことが知られている. いずれも基本的な事であるので, Stanley の本 [S] 等を参照して頂きたい. 以下 P は原点を内部に含むことを仮定する.

(1) $\mathbb{R}[P]$ は d 次元の Gorenstein 環になる.

(2) 頂点 $\boldsymbol{v}_i$ の第 j 成分を $v_{i,j}$ で表すことにする. 一次式の列 $\Theta = \theta_1, \ldots, \theta_n \in S$ を

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{n} v_{i,j} x_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, d)$$

で定めると Θ は環 $\mathbb{R}[P]$ の巴系となる. この巴系 Θ を P の標準巴系と呼び以後 Θ_P で表す.

(3) $\ell = \sum_{i=1}^{n} x_i$ とする. $\mathbb{R}[P]$ をその標準巴系 Θ_P で割った環を R_P で表すことにすると, 任意の $i \leq \frac{d}{2}$ に対し,

$$\times \ell^{d-2i} : (R_P)_i \to (R_P)_{d-i}$$

は全単射（この性質は強レフシェッツ性と呼ばれる）. 但し M_i で次数付き加群 M の次数 i の斉次成分を表す.

2.2. Stress 空間・Stanley-Reisner 環・Macaulay の逆系. Lee [L] の仕事により, Stanley-Reisner 環と Stress 空間は Macaulay の逆系を通じて関連することが知られている. ここではこのことについて簡単に解説したい.

斉次イデアル $I \subset S$ に対し, その逆系 $I^{\perp}$ を次で定義する

$$I^{\perp} = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid {}^{\forall} g(x_1, \ldots, x_n) \in I, g(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}) \cdot f = 0\}.$$

ここで $I^{\perp}$ に S の元の作用を $x_i \cdot f = \frac{\partial}{\partial x_i} f$ で定めると $I^{\perp}$ は S 加群となり, この加群は S/I の Matlis 双対と同型になることが良く知られている. 以下, $(I^{\perp})_k$ で $I^{\perp}$ に属する次数 k の多項式全体を表す[1]

さてここで逆系と stress 空間の関係について述べる. d 次元単体的凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ に対し, イデアル $J_P \subset S$ を

$$J_P = I_P + (\Theta_P, \ell)$$

で定める. このとき次が知られている.

[1] ここでは多項式の次数に合わせたが, 次数付き S 加群としての構造を見るときは $I^{\perp}$ の次数 k の多項式は次数 $-k$ の元とみるのが正しい.

Theorem 2.1 (Lee)**.** ベクトル空間として $(J_P)^{\perp}_2 \cong \mathrm{Stress}(G(P))$.

尚, 同型写像は $f = \sum_{1\le i\le j\le n} \lambda_{i,j} x_i x_j$ に対し, 関数 $\lambda : E(G(P)) \to \mathbb{R}$ を $\lambda(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j) = \lambda_{ij}$ と定めることで与えられる.

2.3. **生成元・socle・次数付きベッチ数.** 序文で紹介した定理の証明の為にはもう一つ道具が必要である. 後で分かることだが, Conjecture 1.1 は $(J_P)^{\perp}$ の生成元の個数と深く関係しており, これを評価するために生成元およびその双対である socle 元について述べたい.

$\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ とする. 次数付き S 加群 M に対しその極小生成系の元の個数は

$$\mu(M) = \dim_{\mathbb{R}} M/(\mathfrak{m}M)$$

で与えられる. これと双対な概念として socle 加群

$$\mathrm{Soc}(M) = \{f \in M : \mathfrak{m}f = 0\}$$

とその次元

$$r(M) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Soc}(M))$$

がある. 実際 M^* を M の Matlis 双対とすると $\mu(M)$ は $r(M^*)$ に一致する, 特に, 斉次イデアル I について $\mu(I^{\perp}) = r(S/I)$ である. 次数も含めて考えると, 斉次イデアル I について $\mu_i(I^{\perp}) = \dim_{\mathbb{R}}(I^{\perp}/\mathfrak{m}I^{\perp})_i$ と定め[2], $r_i(R/I) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Soc}(R/I))_i$ とおくと任意の i に対し

$$\mu_i(I^{\perp}) = r_i(R/I)$$

が成り立つ.

さてここで $\mu_i(-)$ や $r_i(-)$ の情報を含むもう少し一般的な概念を導入しておきたい. 有限生成次数付き S 加群 M に対し値

$$\beta^S_{i,j}(M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Tor}^S_i(M, \mathbb{R})_j$$

は M の (i, j) 番目の次数付きベッチ数と呼ばれる. $\mathrm{Tor}_0(M, \mathbb{R}) \cong M/\mathfrak{m}M$ であり, $\mathrm{Tor}_n(M, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Soc}(M)$ であるので, $\mu_i(-)$ や $r_i(-)$ の情報は β_0 や β_n に表れる. 次数付きベッチ数の性質として次が良く知られている.

Lemma 2.2. $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_k \in S$ を一次式の列, $A = S/(\Theta)$ とする. Θ が有限生成次数付き S 加群 M の正則列であるとき全ての i, j について

$$\beta^S_{i,j}(M) = \beta^A_{i,j}(M/(\Theta M))$$

少しテクニカルな話になるが, 上の補題の意味を理解すると, 次が成り立つことも自然にわかる.

Lemma 2.3. $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_k \in S$ を一次式の列, $A = S/(\Theta)$ とする. 積

$$\times\theta_i : (M/(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}))_{j-1} \to (M/(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}))_j$$

が全ての $1 \le i \le s$, $1 \le j \le k$ で成り立つなら

$$\beta^S_{i,i+j}(M) = \beta^A_{i,j}(M/(\Theta M)) \quad (i = 1, 2, \dots, n,\ j \le s - 2)$$

---

[2] $I^{\perp}$ の次数 i の多項式を次数 i とみているので Matlis 双対を考えるときの通常の次数と異なることに注意

2.4. **Theorem 1.2 の証明の概要.** 最初に保留していた素な多面体の定義をする. d 次元単体的凸多面体 P が素 (prime) であるとは, 大きさが d の極小な non-face を持たない時に言う. これは I_P が次数 d の生成元を持たない事と同値であるので, $\beta_{0,d}(I_P) = \mu_d(I_P) = 0$ である事と同値である.

さて, Theorem 1.2 の証明の概要について説明したい. $P \subset \mathbb{R}^d$ を素な d 次元単体的凸多面体で $d \geq 5$ であるとする. Stress 空間は平行移動で変化しないので P は原点を内部に含むとしてよい. 定義から $(J_P)_1^\perp$ は $(\Theta_P)_1^\perp$ に一致するが, $(\Theta_P)_1^\perp$ は P の頂点のアフィン従属関係全体に他ならない. よって Theorem 1.2 を示すには $(J_P)_2^\perp$ が $(J_P)_1^\perp$ を決定することを言えばよいが, これを示すには $(J_P)^\perp$ が次数 1 の生成元を持たないことを言えば十分である. すると求める主張は次の計算から従う

$$\begin{aligned}
\mu_1((J_P)^\perp) &= r_1(S/J_P) && (\mu(-) \text{ と } r(-) \text{ の双対性}) \\
&= \beta_{n-d-1,n-d}^{(S/(\Theta_P,\ell))}(S/J_p) && (\beta(-) \text{ と } r(-) \text{ の関係}) \\
&= \beta_{n-d-1,n-d}^{S}(S/I_P) && (\text{Lemma 2.3 と強レフシェッツ性}) \\
&= \beta_{1,d}^{S}(S/I_P) && (S/I_P \text{ は Gorenstein}) \\
&= \beta_{0,d}^{S}(I_P) && \\
&= 0 && (P \text{ は素}).
\end{aligned}$$

尚, $d \geq 5$ の仮定は 3 行目の等式で Lemma 2.3 を用いるときに使われている (積写像 $\times\ell : (R_P)_2 \to (R_P)_3$ の単射性を保証するために必要である).

2.5. **最後に.** ここでは証明の概略のみ紹介したが, より詳細な証明及び主張の一般化については [MNZ] を参照して頂きたい.

References

[CG] R. Connelly, S. Guest, Frameworks, tensegrities, and symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 2022.

[L] C.W. Lee, Generalized stress and motions, In: Polytopes: Abstract, Convex and Computational, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **vol. 440**, 1994, pp. 249–271.

[MNZ] Affine stresses, inverse systems, and reconstruction problems, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2024 (2024), 8540—8556.

[S] R.P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Progress in Mathematics, **vol. 41**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

Satoshi Murai, Department of Mathematics Faculty of Education Waseda University, 1-6-1 Nishi-Waseda, Shinjuku, Tokyo 169-8050, Japan

Email address: `s-murai@waseda.jp`

α_p-作用の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-作用への変形

三井健太郎（琉球大学）

1　概要

正標数体上の導分とその変形について近年得られた結果を報告する．本稿は 2 論文 [IM], [MS] のための準備メモの一部に基づく．標数 $p>0$ の体上の加法代数群 $\mathbb{G}_a$ の p 倍準同型は有限群スキーム α_p を核に持つ．α_p-作用は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-作用と類似しているが商特異点などに違いが生じる．また α_p-作用は Hopf 代数を介して導分で記述できる．

一方，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-作用は擬導分で記述できる．宮西正宜氏と伊藤浩行氏の [MI2021] で論じられているように，導分を擬導分として変形することで α_p-作用を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-作用へ変形できる．この変形を伊藤浩行氏と研究し，解析的手法により 2 次元以下の場合に変形を具体的に構成した．

このような変形により，特異点解消の双対グラフは一致するが解析的同型でない様々な商特異点の組みが生じる（双対グラフで判別できない特異点を non-taut 特異点と呼ぶ）．一つの帰結として，双対グラフから決定できる不変量については，分離商に付随する不変量の困難な計算を比較的簡単な純非分離商の場合へ帰着させられると期待できる．これについては現在研究を進めつつある．

他方，p 次有限群スキーム作用の場合と類似した商を与える一般の導分は p-閉導分と呼ばれる．$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-作用の α_p-作用への退化などの観察から，どのような導分が p-閉になるか予想できる．この予想を佐藤信夫氏と拡張した上で，簡明な p-閉性判定法を与えた．

2　2 次元導分の p-閉性判定法

標数 $p>0$ の体 K をとる．p 冪元の成す K の部分体を K^p，K^p を含む K の有限指数部分体全体の集合を $\mathcal{E}$，K 上の有限次元制限 Lie 代数全体を $\mathcal{D}$ と書く．Jacobson は A を A-定数の成す K の部分体に写す写像 $\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ が全単射であることを示した [Jacobson1964, p. 189]．即ち $\mathcal{E}$ について $\mathcal{D}$ は Galois 拡大の Galois 群に相当する役割を果たす．指数を高々p に限って得られる $\mathcal{E}$ の部分集合は K-ベクトル空間として単元生成である制限 Lie 代数全体に対応する．ここで生成元 D は p-閉導分と呼ばれ，$D^p=aD$ を満たす $a\in K$ の存在で特徴付けられる．特に非零 p-閉導分は K の指数 p の純非分離部分体に関して Galois 群の生成元の類似物であり，純非分離拡大の研究において基本的役割を果たす．

一方 p-閉導分は正標数の代数曲面論において指数 p の純非分離商の構成に用いられてきた．例えば応用として $K3$ 曲面上の非零正則ベクトル場の非存在性が示された [RS1976, §6, Theorem 7]．また楕円曲面の具体的構成にもよく用いられる

(e.g., [Katsura1995]). K が非特異曲面のアフィン座標環 R の関数体であるとする．このとき D-定数の成す R の部分環 R^D は有限群作用の不変式環と同様の役割を果たし，埋め込み $R^D \to R$ が高々位数 p の純非分離商射 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} R^D$ を誘導する．商 $\operatorname{Spec} R^D$ は一般に特異点を持ち，とりわけ正標数特有の non-taut 有理 2 重点の研究に応用されてきた (e.g., [MI2021], [LMM]).

本節では，このような 2 次元の場合に導分 $D = fD_x + gD_y$ の簡明な p-閉性判定法を与える．この判定法は任意の D に有効だが，$D_x(f) + D_y(g) = 0$ を満たすとき最も効率よく判定できる．このような D は上記特異点の研究に登場する．さらに，どの程度 p-閉であるかもわかる．正確には $D(x)D^p(y) - D(y)D^p(x)$ の計算法が得られ，その消滅は D が p-閉であることと同値である．一般の場合は $D_x(af) + D_y(ag) = 0$ を満たす $a \in K^\times$ が必要であり，$p^2 - 1$ 個の p^2 変数同次 1 次連立方程式の非自明解がこのような a を与える．

主定理の証明には Cartier 作用素を用いる．代数幾何では Cartier 同型が重要視されており (e.g., [DI1987])，Cartier 作用素は閉形式上の定義がよく知られているが，本証明では Cartier による 1 形式全体上の定義へ遡り [Cartier1958]，二つの定義が一致する事実を応用する．

Lemma 2.1. 標数 $p > 0$ の体 K の部分体 L をとる．K は L 上 p-基底 $x_1, \ldots, x_n$ を持つと仮定する．このとき任意の n 元 $f_1, \ldots, f_n \in K$ について $\sum_{i=1}^n D_{x_i}(af_i) = 0$ を満たす $a \in K^\times$ が存在する．

Remark 2.2. 下記証明は構成的で具体的に a が求まる．

Proof. $M \coloneqq K^p L \subset K$, $g \coloneqq \sum_{i=1}^n D_{x_i}(af_i)$ とおく．任意の $b \in K$ は一意的に $b = \sum_{I \in [0,p-1]^n} b_I x^I$ $(b_I \in M)$ と書ける．よって $g = 0$ を満たす $a \in K^\times$ は p^n 変数 $(a_I)_I$ についての p^n 個からなる M 係数同次 1 次連立方程式 S の非自明解で与えられる．I の全ての成分が $p-1$ のとき $g_I = 0$ なので S の係数行列の階数は $p^n - 1$ 以下であり S は非自明解を持つ．従って a が存在する． □

Theorem 2.3. 標数 $p > 0$ の体 K の 2 元 f, g と部分体 L をとる．K は L 上 p-基底 x, y を持つと仮定する．$D_x(af) + D_y(ag) = 0$ を満たす $a \in K^\times$ をとる（*Lemma* 2.1 より存在する）．このとき $D \coloneqq fD_x + gD_y$ について

$$a(D(x)D^p(y) - D(y)D^p(x)) = f^p D_x^{p-1}(ag) - g^p D_y^{p-1}(af)$$

が成り立つ．

Proof. $\omega \coloneqq ag\,dx - af\,dy$ とおく．$\omega(D) = 0$ と Cartier 作用素の定義 [Cartier1958, Ch. 2, §6, p. 200] より $a(D(x)D^p(y) - D(y)D^p(x)) = -\omega(D^p) = -(C\omega(D))^p$ が成り立つ．$d\omega = 0$ より [Cartier1958, Ch. 2, §6, p. 202, the proof of Proposition 8] の第 2 段落の公式を応用でき $C\omega = -D_x^{p-1}(ag)^{1/p}\,dx + D_y^{p-1}(af)^{1/p}\,dy$ なので $-(C\omega(D))^p = f^p D_x^{p-1}(ag) - g^p D_y^{p-1}(af)$ が成り立つ．以上より示された． □

Example 2.4. $D_x(f) + D_y(g) = 0$ と仮定する．$M \coloneqq K^p L \subset K$, $c_f \coloneqq -D_y^{p-1}(f)$, $c_g \coloneqq -D_x^{p-1}(g)$ とおく．このとき $c_f, c_g \in M$ であり $f = D_y(h) + c_f y^{p-1}$ と $g = -D_x(h) + c_g x^{p-1}$ を満たす $h \in K$ が存在する．Theorem 2.3 より「D が p-閉 $\Leftrightarrow f^p c_g = g^p c_f \Leftrightarrow \exists c \in M, (c_f, c_g) = (cf^p, cg^p)$」が成り立つ．以下，2 つの場合を考える．

1. M の部分体 k 上の x,y を不定元とする 2 変数多項式環 $k[x,y]$ が K に含まれ，f と g が $k[x,y]$ の互いに素な元であるとする．このとき「D が p-閉 $\Leftrightarrow$ $c_f = c_g = 0$ または $fg = 0$」が成り立つ．ここで f と g が互いに素であるという条件は外せない．例えば $f = g = (x-y)^{p-1}$ ならば D は p-閉かつ $c_f = c_g = 1$ である．

2. M の部分体 k 上の x,y を不定元とする 2 変数形式的冪級数環 $k[\![x,y]\!]$ が K に含まれ，$f,g \in k[\![x,y]\!]$ とする．このとき D が p-閉かつ $c_f \in f^p k[\![x,y]\!]$ かつ $c_g \in g^p k[\![x,y]\!]$ が成り立つことと

$$f = \sum_{i \geq 0} D_y(h)^{p^i} c^{\frac{p^i-1}{p-1}} y^{p^i-1}$$

$$g = -\sum_{i \geq 0} D_x(h)^{p^i} c^{\frac{p^i-1}{p-1}} x^{p^i-1}$$

を満たす $h \in k[\![x,y]\!]$ と $c \in k[\![x^p,y^p]\!]$ が存在することは同値である．また，後者が成り立つとき仮定 $D_x(f) + D_y(g) = 0$ と $f,g \in k[\![x,y]\!]$ は自動的に成り立つ．

Corollary 2.5. 有理整数環 $\mathbb{Z}$ の素イデアル (p) による局所化を $\mathbb{Z}_{(p)}$ と書く．$m_x, m_y \in \mathbb{Z}_{(p)}$ をとる．$(n_x, n_y) \coloneqq (m_x+1, m_y+1)$, $N \coloneqq \{n_x, n_y\}$ とおく．このとき「$y^{m_y}D_x + x^{m_x}D_y$ が p-閉 $\Leftrightarrow$ $N \subset \mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$ または $N = \{0\}$」が成り立つ．

Proof. $(f,g) \coloneqq (y^{m_y}, x^{m_x})$ とおく．各 $z \in \{x,y\}$ について $P_z \coloneqq \prod_{i=1}^{p-1}(n_z - i) \in K$ とおく．このとき次が成り立つ：

1. $f^p D_x^{p-1}(g) - g^p D_y^{p-1}(f) = (xy)^{-p}(P_x x^{n_x} y^{pn_y} - P_y x^{pn_x} y^{n_y})$；
2. $P_x = P_y = 0 \Leftrightarrow N \subset \mathbb{Z}_{(p)}^{\times}$；
3. $(n_x, pn_y) = (pn_x, n_y) \Leftrightarrow N = \{0\} \Rightarrow P_x = P_y$.

よって Theorem 2.3 から従う． □

Example 2.6. $p = 5$ のとき Example 2.4 または Corollary 2.5 より $D \coloneqq yD_x + x^2 D_y$ は p-閉である．標数 5 の代数閉体 k 上定義されたアフィン平面 $\operatorname{Spec} k[x,y]$ の D による商特異点は E_8^0 と呼ばれる non-taut 有理 2 重点である [MI2021, III.3.1.3].

Proposition 2.7. 標数 $p > 0$ の体 K の部分体 L と 3 元 $a,f,g \in K^{\times}$ をとる．K は L 上 p-基底 x,y を持つと仮定する．$D \coloneqq fD_x + gD_y$, $F \coloneqq af$, $G \coloneqq ag$ とおく．$D_x(G) = D_y(F) = 0$ と仮定する．このとき

$$\begin{aligned}(aD)^p &= a^p D^p + (aD)^{p-1}(a)D \\ &= -F^{p+1}D_x^{p-1}(F^{-1})D_x - G^{p+1}D_y^{p-1}(G^{-1})D_y \\ D(x)D^p(y) - D(y)D^p(x) &= afg(f^p D_x^{p-1}(F^{-1}) - g^p D_y^{p-1}(G^{-1}))\end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof. $\varepsilon := aD = FD_x + GD_y$ とおく．$D_x(G) = D_y(F) = 0$ より $(FD_x)(GD_y) = (GD_y)(FD_x)$ なので $\varepsilon^p = (FD_x)^p + (GD_y)^p$ が成り立つ．(x, F) または (y, G) を (z, H) と書く．Hochschild 公式より

$$\varepsilon^p = a^p D^p + \varepsilon^{p-1}(a) D$$
$$(HD_z)^p = -H^{p+1} D_z^{p-1}(H^{-1}) D_z$$

が成り立つ．以上より最初の 2 式を得る．特に

$$a^p D^p(z) + \varepsilon^{p-1}(a) D(z) = -H^{p+1} D_z^{p-1}(H^{-1})$$

なので $D(x) = f$, $D(y) = g$ より

$$D(y)D^p(x) + a^{-p}\varepsilon^{p-1}(a)D(x)D(y) = -af^{p+1}gD_x^{p-1}(F^{-1})$$
$$D(x)D^p(y) + a^{-p}\varepsilon^{p-1}(a)D(x)D(y) = -ag^{p+1}fD_y^{p-1}(G^{-1})$$

が成り立ち最後の式を得る． □

Remark 2.8. Theorem 2.3 は $D_x(af) = D_y(ag) = 0$ のとき次のように示すこともできる．$fg = 0$ の場合は両辺共に 0 なので成り立つ．$fg \neq 0$ の場合は Proposition 2.7 の a に $1/afg$ を代入すれば得られる．

3　2 次元導分の加法性判定法

標数 $p > 0$ の体 K の部分体 L をとる．K は L 上 p-基底 x, y を持つと仮定する．導分 $D = fD_x + gD_y \in \operatorname{Der}_L K$ をとる．$D^p = 0$ を満たすとき D は加法的であるという．以下，D は p-閉かつ $g \neq 0$ と仮定する．$M := K^pL \subset K$, $h := 1/g$, $D_1 := hD$ とおく．$D_1^p = 0$ なので Hochschild 公式より

$$D^p = -g^p D_1^{p-1}(h) D$$

が成り立つ．$w \in \operatorname{Ker} D \setminus M$ をとる．K は L 上 p-基底 w, y を持ち

$$D_1^{p-1}(h(x, y)) = D_y^{p-1}(h(w, y))$$

が成り立つ．よって

$$D^p = 0 \Leftrightarrow D_y^{p-1}(h(w, y)) = 0$$

が成り立つ．K の分離閉包 K^s を選ぶ．K を K^s に取り換えると計算が簡単になる場合がある．K^s 内で $t \in K^s$ について $M(t)$ の分離閉包を K_t と書く．$f = D_y(u)$, $g = D_x(v)$ を満たす $u \in K_y$, $v \in K_x$ が存在すると仮定する．$w := v - u$ とおけば $w \in \operatorname{Ker} D \setminus M$ であり K^s は L 上 p-基底 w, y を持つので前同値が得られる．また K^s は L 上 p-基底 v, y を持ち $D_x = gD_v$ が成り立つ．応用として次を示せる．

Definition 3.1. $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$, $c > 0$, $\gcd(b, c) = 1$ について $a \equiv rb \bmod c$ で唯一つ定まる $r \in Z \cap [0, c)$ を $(a/b) \,\%\, c$ と書く．$b = 1$ の場合は $a \,\%\, c$ と書く．

Proposition 3.2. $\{m_x+1, m_y+1, e\} \subset \mathbb{Z}_{(p)} \setminus p\mathbb{Z}_{(p)}$, $\alpha \in k^\times$ により

$$D = y^{m_y} D_x + x^{m_x}(x^{m_x+1}+\alpha)^{e-1} D_y$$

とする．$M_x \coloneqq (1/(m_x+1)) \,\%\, p$, $M_y \coloneqq (-1/(m_y+1)) \,\%\, p$ とおく．このとき

$$D^p = 0 \Leftrightarrow \max\{i \in \mathbb{Z} \cap [1,p) \mid j \in \mathbb{Z} \cap [1, M_x], ie \equiv j \bmod p\} \leq M_y$$

が成り立つ．特に $e=1$ のとき $D = y^{m_y} D_x + x^{m_x} D_y$ であり

$$D^p = 0 \Leftrightarrow M_x \leq M_y$$

が成り立つ．

主張に現れる不等式条件は以下より p についての 1 次不等式条件に書き換えられる．

Lemma 3.3. 素数 p と $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}$ をとる．$|a| < p$, $b > 1$, $p \nmid b$ と仮定する．$r \coloneqq p \,\%\, b$ とおく．このとき

$$(a/b) \,\%\, p + (((a/r) \,\%\, b)p - a)/b = \begin{cases} 0 & \textit{if } b \mid a \textit{ and } a \geq 0, \\ p & \textit{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ．

Proof. $A \coloneqq (a/b)\,\%\,p$, $B \coloneqq (((a/r)\,\%\,b)p - a)/b$ とおく．$\{A, B\} \subset \mathbb{Z}$, $p \mid (A+B)$ が成り立つ．$b \mid a$ ならば $|a/b| < p$, $B = -a/b$ から従う．$b \nmid a$ ならば $A \in [0,p)$, $B \in [(p-a)/b, p-(p+a)/b] \subset (0,p)$ より $A+B \in (0, 2p)$ なので $A+B = p$ が成り立つ． □

このような結果や Proposition 4.12 から次の予想が立つ．

Conjecture 3.4. $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x,y]$ の有限体 $\mathbb{F}_p$ への特殊化を D_p と書く．十分大きい p について D_p が加法的であるか否かは十分大きい整数を法として決まる．

4 $y^{m_y} D_x + x^{m_x} D_y$ の p 乗と加法性

標数 $p > 0$ の体 k をとる．$R \coloneqq k[x,y]$, $\delta \coloneqq yD_x + xD_y \in \mathrm{Der}_k R$ とおく．R の商体を K と書く．$a \in K^\times$ をとる．$a_\delta \coloneqq a - \delta^{p-1}(a) \in K$, $\delta_a \coloneqq a^{-1}\delta \in \mathrm{Der}_k K$ とおく．以下，Example 4.11 まで $p > 2$ と仮定する．

Lemma 4.1. $\delta_a^p = a^{-p} a_\delta \delta_a$ が成り立つ．

Proof. $\varepsilon \coloneqq \delta_a$ とおけば $\delta^p = \delta$ と Hochschild 公式より $a\varepsilon = (a\varepsilon)^p = a^p\varepsilon^p + (a\varepsilon)^{p-1}(a)\varepsilon = a^p\varepsilon^p + (a - a_\delta)\varepsilon$ なので従う． □

μ_p に付随する Hopf 代数 $k[\zeta]/(\zeta^p - 1) = k[t]/(t^p)$ $(t \coloneqq \zeta - 1)$ の $R = k[u,v]$ $(u \coloneqq x+y, v \coloneqq x-y)$ への余作用 $\varphi\colon R \to R[\zeta]/(\zeta^p-1)$ を $(u,v) \mapsto (\zeta u, \zeta^{-1}v) = ((1+t)u, \sum_{i=0}^{p-1}(-t)^i v)$ で定める．対応する導分は $(u,v) \mapsto (u, -v)$ で特徴付けらるので δ で与えられる．$\mathrm{Ker}\,\delta = k[u^p, uv, v^p]$ が成り立つ．

Lemma 4.2. $a \in R$ のとき a_δ は R-加群の $i=0$ 成分への射影 $R[\zeta]/(\zeta^p - 1) = \bigoplus_{i=0}^{p-1} R\zeta^i \to R$ による $\varphi(a)$ の像と等しい.

Proof. $\varphi = \sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i \gamma_i$ と書く．$\delta^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} i^{p-1}\gamma_i = \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i = \mathrm{id} - \gamma_0$ （cf. [MI2021, pp. 113–114]）より $a_\delta = (\mathrm{id} - \delta^{p-1})(a) = \gamma_0(a)$ だから従う． □

Definition 4.3. $\{l, m\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{Z} \cap [0, l+m]$ について

$$S_{l,m}(n) \coloneqq 2^{-l-m} \sum_{(i,j)} (-1)^j \binom{l}{i}\binom{m}{j} \in k$$

とおく．ただし (i,j) は $\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \in [0,l], j \in [0,m], i+j=n\}$ を動く．

Remark 4.4. $S_{l,m}(n)$ は $2^{-l-m}(1+T)^l(1-T)^m$ の n 次係数と等しいので $S_{l,m}(l+m-n) = (-1)^m S_{l,m}(n)$ が成り立つ．特に $l+m=2n$ and $m \in 2\mathbb{Z}+1$ のとき $S_{l,m}(n) = 0$ が成り立つ.

以下 $a = x^{e_x}y^{e_y}$ $(\{e_x, e_y\} \subset \mathbb{Z} \cap [0, p-1])$ とする.

Definition 4.5. 上記 a についての a_δ を A_{e_x,e_y} と書く.

$e \coloneqq e_x + e_y$, $A \coloneqq A_{e_x,e_y}$, $S \coloneqq S_{e_x,e_y}$ とおく．Lemma 4.2 と Remark 4.4 から次を示せる.

Lemma 4.6. $d \coloneqq e/2$, $d^+ \coloneqq (e+p)/2$, $d^- \coloneqq (e-p)/2$ とおく．このとき A は次で与えられる：

1. $\{e_x, e_y\} \subset 2\mathbb{Z}$ のとき $S(d)u^d v^d = S(d)(x^2-y^2)^d$；
2. $e \in 2\mathbb{Z}+1$ *and* $e \geq p$ のとき $S(d^-)u^{d^+}v^{d^-} + S(d^+)u^{d^-}v^{d^+} = (S(d^-)(x^p + y^p) + S(d^+)(x^p - y^p))(x^2-y^2)^{d^-}$；
3. それ以外のとき 0.

Example 4.7. $e < p$ とする．Lemma 4.6 を用いて A の例を挙げる：

1. $e \in 2\mathbb{Z}$ and $e_y = 0$ のとき $2^{-e}\binom{e}{d}(x^2-y^2)^d$；
2. $\{e_x, e_y\} \not\subset 2\mathbb{Z}$ のとき 0.

Lemma 4.6 などから次を示せる.

Lemma 4.8. 次は同値である：

1. $A = 0$；
2. $(e \in [0, p-1]$ *and* $\{e_x, e_y\} \not\subset 2\mathbb{Z})$ *or* $(e \in [p, 2p-2]$ *and* $\{e_x, e_y\} \subset 2\mathbb{Z}+1)$.

K の分離閉包 K^s を選ぶ．$\{m_x, m_y\} \subset \mathbb{Z}_{(p)}$ をとる．$N \coloneqq \{m_x+1, m_y+1\}$, $\eta \coloneqq y^{m_y}D_x + x^{m_x}D_y \in \mathrm{Der}_k K^s$ とおく．Lemma 4.1 から次を示せる.

Proposition 4.9. $N \subset \mathbb{Z}_{(p)}^\times$ と仮定する．各 $z \in \{x, y\}$ について $d_z \coloneqq (m_z + 1)/2 \in \mathbb{Z}_{(p)}^\times$ とおき $e_z \equiv d_z^{-1} - 1 \bmod p$ となる $e_z \in \mathbb{Z} \cap [0, p-1]$ をとる．$r_z^2 = d_z^{-1}$ となる $r_z \in K^s$ を選ぶ．$f_z \coloneqq r_z^{1-p-e_z} z^{(p-1)(d_z-1)-d_z e_z}$, $A \coloneqq A_{e_x, e_y}$ (*Definition* 4.5), $w_z \coloneqq r_z z^{d_z}$ とおく．このとき $\eta^p = f_x f_y A(w_x, w_y)\eta$ が成り立つ．

Remark 4.10. $A(w_x, w_y)$ は $A \in k[x, y]$ の各 $z \in \{x, y\}$ に w_z を代入して得られる元である．

Example 4.11. $e \coloneqq e_x + e_y$, $d \coloneqq e/2$ とおく．$e < p$ とする．Example 4.7 を用いて Proposition 4.9 の $A(w_x, w_y)$ の例を挙げる：

1. $e \in 2\mathbb{Z}$ and $e_y = 0$ のとき $2^{-e}\binom{e}{d}(w_x^2 - w_y^2)^d = 2^{-e}\binom{e}{d}(d_x^{-1}x^{m_x+1} - d_y^{-1}y^{m_y+1})^d$；

2. $\{e_x, e_y\} \not\subset 2\mathbb{Z}$ のとき 0.

Lemma 4.8 と Proposition 4.9 から次を示せる．特に $N \neq \{2\}$ のとき算術級数の素数定理より半分程度の標数 p が $\eta^p = 0$ を満たす．

Proposition 4.12. $p = 2$ も含め一般の $p > 0$ について考える．$N \subset \mathbb{Z}_{\geq 2}$ と仮定する．$l \coloneqq 2\,\mathrm{lcm}(m_x + 1, m_y + 1)$ とおく．$\eta^p = 0$ か否かは $p \bmod l$ で決まる．さらに $N \neq \{2\}$ のとき任意の $i \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$ について条件「$\eta^p = 0$」は $p \equiv i \bmod l$ と $p \equiv -i \bmod l$ で排他的である．

5　導分の持ち上げ

加法的導分の p-閉擬導分としての変形から α_p-作用の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-作用への変形が得られることを説明する [MI2021, II.7]．標数 $p > 0$ の整域 R と $\lambda \in R$ をとる．$R_G \coloneqq R[t]/(t^p - \lambda^{p-1}t)$ で R-代数を定義する．t の R_G への像を τ と書く．R-代数準同型

$$R_G \longrightarrow R_G \otimes_R R_G, \quad \tau \longmapsto \tau \otimes 1 + 1 \otimes \tau$$

が余積となるよう R_G に R-Hopf 代数の構造を定める．R-代数 S をとる．$S_G \coloneqq S \otimes_R R_G = \bigoplus_{i=0}^{p-1} S\tau^i$ で R-代数を定義する．S への R_G の余作用

$$S \longrightarrow S_G, \quad a \longmapsto \sum_{i=0}^{p-1} \delta_i(a)\tau^i$$

をとる．ここで各 δ_i は S の R-加群自己準同型であり $\delta \coloneqq \delta_1$ とおけば $\delta_i = \delta^i/i!$ が成り立つ．特に δ_0 は恒等写像である．また $\delta^p = 0$ が成り立ち，任意の 2 元 $a, b \in S$ について

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\lambda^{p-1}}{i!(p-i)!}\delta^i(a)\delta^{p-i}(b)$$

が成り立つ．このような $\delta \in \mathrm{End}_R S$ を p-閉擬導分と呼ぶ．逆に p-閉擬導分から S への R_G の余作用が一意的に定まる．δ を $R/(\lambda)$ へ特殊化すれば加法的導分と

なり α_p-作用に対応する余作用が得られる．また δ を R_λ へ局所化すれば $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-作用に対応する余作用が得られる．余作用の τ に λ を代入した

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\lambda^i}{i!}\delta^i \in \mathrm{Aut}_{R\text{-alg}} S$$

が $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の生成元の作用を与える．

6　1 次元導分の持ち上げ

標数 $p > 0$ の代数閉体 k と $\delta_0 \in \mathrm{Der}_k k[\![x]\!]$ をとる．$\delta_0 = aD_x$ $(a \in k[\![x]\!])$ と書く．δ_0 は非零かつ加法的であると仮定する．$v(x) = 1$ を満たす $k[\![x]\!]$ の付値 v をとる．$\nu := v(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とおく．次の事実に注意する．

Lemma 6.1. $\nu \not\equiv 1 \bmod p$ が成り立つ．また $k[\![x]\!]$ の正則パラメーター x を適当に取り換えれば $a = x^\nu$ が成り立つ．

$\alpha \not\equiv 0 \bmod p$ と $\alpha \geq -1$ を満たす $\alpha \in \mathbb{Z}$ をとる．$A := \mathbb{F}_p[T][\![X]\!]$ で X-進位相環を定義する．A の 2 元を

$$\Phi(X,T) := X(1+X^\alpha T)^{-\frac{1}{\alpha}} = \sum_{i\geq 0} \binom{-\frac{1}{\alpha}}{i} X^{i\alpha+1}T^i,$$

$$\Phi_T(X,T) := \frac{\Phi(X,T) - X}{T}$$

で定める．特に $\alpha = -1$ のとき $\Phi(X,T) = X + T$, $\Phi_T(X,T) = 1$ である．直接的な計算で得られる次に注意する：

Lemma 6.2. 次の等式が成り立つ：

1. $\Phi(X,0) = X$；
2. $\mathbb{F}_p[T_1,T_2][\![X]\!]$ において $\Phi(\Phi(X,T_1),T_2) = \Phi(X,T_1+T_2)$；
3. $\Phi_T(X,0) = -\frac{X^{\alpha+1}}{\alpha}$.

§5 の記号を用いる．$S = R[\![x]\!]$, $S_G = R_G[\![x]\!]$ とし x-進位相を定める．連続環準同型

$$A = \mathbb{F}_p[T][\![X]\!] \longrightarrow R_G[\![x]\!] = S_G, \quad (X,T) \longmapsto (x,\tau)$$

による $\Psi(X,T)$ の像を $\Psi(x,\tau)$ と書く．Lemma 6.2 (1)–(2) より連続 R-代数準同型

$$\varphi\colon S \longrightarrow S_G, \quad x \longmapsto \Phi(x,\tau)$$

は R_G の S への R-余作用である．R-余作用 φ に対応する擬導分 $\delta \in \mathrm{End}_R S$ をとる．直接的な計算で次を得る．

Lemma 6.3. $\zeta \in \mathbb{F}_p^\times$ について

$$\Phi_T(x, \zeta\lambda) \coloneqq (\Phi_T(x,\tau) \bmod (\tau - \zeta\lambda)) \in S_G/(\tau - \zeta\lambda) = S$$

とおく．このとき次の等式が成り立つ：

1. $\delta(x) = -\sum_{\zeta \in \mathbb{F}_p^\times} \Phi_T(x, \zeta\lambda)$；
2. $\delta|_{\lambda=0}(x) = -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha}$.

Remark 6.4. $\lambda \neq 0$ とし，R を局所化 R_λ の部分環と見做す．このとき

$$\delta(x) = \frac{x}{\lambda} \sum_{\zeta \in \mathbb{F}_p^\times} \zeta^{-1}\Big(1 - (1 + \zeta\lambda x^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)$$

が成り立つ．さらに $p > 2$ ならば

$$\delta(x) = -\frac{x}{\lambda} \sum_{\zeta \in \mathbb{F}_p^\times} \zeta^{-1}(1 + \zeta\lambda x^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

が成り立つ．

Theorem 6.5. $\lambda \neq 0$ かつ $R/(\lambda) = k$ とする．このとき加法的導分 $\delta_0 \in \mathrm{Der}_k\, k[\![x]\!]$ は R 上で $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用へ持ち上がる．

Proof. Lemma 6.1 より $\delta_0 = x^\nu D_x$ $(\nu \not\equiv 1 \bmod p)$ と仮定して良い．このとき $\alpha \coloneqq \nu - 1$ とおけば $-\alpha\delta$ が δ_0 の持ち上げを与える． □

7　2 次元導分の持ち上げ

標数 $p > 0$ の整域 R をとる．$S \coloneqq R[\![x, y]\!]$, $I \coloneqq (x, y)S$ とおく．次の事実に注意する．

Lemma 7.1. $\sigma \in \mathrm{End}_{R\text{-alg}}\, S$ をとる．$f \coloneqq \sigma(x) - x$, $g \coloneqq \sigma(y) - y$ とおく．S の R-部分代数を $T \coloneqq \{a \in S \mid \sigma(a) = a\}$ で定義する．$f \in T$, $g \in T[x]$, $\deg g \leq p - 2$ と仮定する．このとき $\sigma \in \mathrm{Aut}_{R\text{-alg}}\, S$, $\mathrm{ord}\, \sigma \in \{1, p\}$ が成り立つ．

Definition 7.2. $\sigma \in \mathrm{End}_{R\text{-alg}}\, S$, $a \in S$ について

$$N_\sigma(a) \coloneqq \prod_{i=0}^{p-1} \sigma^i(a)$$

とおく．

$\lambda \in R$, $F \in I$, $(G_i \in I \mid i \in [0, p-2])$ をとる．条件

$$\varphi(x) = x + \lambda F(N_\varphi(x), N_\varphi(y))$$
$$\varphi(y) = y + \lambda \sum_{i=0}^{p-2} G_i(N_\varphi(x), N_\varphi(y)) x^i$$

で一意的に定まる $\varphi \in \operatorname{End}_{R\text{-alg}} S$ がとれる．Lemma 7.1 より $\varphi \in \operatorname{Aut}_{R\text{-alg}} S$, $\operatorname{ord} \varphi \in \{1, p\}$ が成り立つ．

$$\begin{aligned} f &\coloneqq F(N_\varphi(x), N_\varphi(y)) \\ g_i &\coloneqq G_i(N_\varphi(x), N_\varphi(y)) \quad (i \in [0, p-2]) \\ \Gamma &\coloneqq \{(i,j) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid i + j \leq p - 2\} \\ \Lambda_{i,j} &\coloneqq \lambda^j f^j g_{i+j} x^i \quad ((i,j) \in \Gamma) \end{aligned}$$

とおく．$(i,j) \in \Gamma$ についての条件

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k+1} \binom{i+k}{k} a_{i+k,j-k} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で一意的に定まる $(a_{i,j} \in R \mid (i,j) \in \Gamma)$ をとる．

$$\delta \coloneqq f D_x + \sum_{(i,j) \in \Gamma} a_{i,j} \Lambda_{i,j} D_y$$

とおく．直接的な計算で次を得る．

Lemma 7.3. 等式

$$\varphi = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda^k}{k!} \delta^k$$

が成り立つ．

Theorem 7.4. $\lambda \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ を選ぶ．$R_0 \coloneqq R/(\lambda)$, $S_0 \coloneqq S/(\lambda)$ とおく．

$$\delta_0 = f_0 D_x + \sum_{i=0}^{p-2} g_{i,0} x^i D_y \in \operatorname{Der}_{R_0} S_0$$

をとる．$\{f_0\} \cup \{g_{i,0}\}_{i=0}^{p-2} \subset R_0[\![x^p, y^p]\!] \cap I S_0$ と仮定する．このとき δ_0 は R 上で $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用へ持ち上がる．

Proof. 条件

$$\begin{aligned} f_0 &= F(x^p, y^p) \bmod \lambda \\ g_{i,0} &= G_i(x^p, y^p) \bmod \lambda \quad (i \in [0, p-2]) \end{aligned}$$

を満たす $F \in I$, $(G_i \in I \mid i \in [0, p-2])$ が存在するので Lemma 7.3 から従う． □

References

[Cartier1958] Pierre Cartier, *Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique*, Bulletin de la Société Mathématique de France **86** (1958), 177–251.

[DI1987] Pierre Deligne, Luc Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Inventiones mathematicae **89** no. 2 (1987), 247–270.

[IM] Hiroyuki Ito, Kentaro Mitsui, *Unification of Artin-Screier and Frobenius quotients*, in preparation.

[Jacobson1964] Nathan Jacobson, Lectures in Abstract Algebra III. Theory of Fields and Galois Theory, Graduate Texts in Mathematics 32, Springer New York, 1964.

[Katsura1995] Toshiyuki Katsura, *Multicanonical systems of elliptic surfaces in small characteristics*, Compositio Mathematica **97** no. 1–2 (1995), 119–134.

[LMM] Christian Liedtke, Gebhard Martin, Yuya Matsumoto, *Isolated Quotient Singularities in Positive Characteristic*, to appear in Astérisque.

[MS] Kentaro Mitsui, Nobuo Sato, *A criterion for p-closedness of derivations in dimension two*, arXiv: 2409.03442.

[MI2021] Masayoshi Miyanishi, Hiroyuki Ito, Algebraic surfaces in positive characteristics, World Scientific, 2021.

[RS1976] Alexei Rudakov, Igor Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya **40** no. 6 (1976), 1269–1307; Mathematics of the USSR-Izvestiya **10** no. 6 (1976), 1205–1237.

1次元局所環のトレースイデアルの集合について

小林稔周 (明治大学)

1 導入

本稿の内容は，神代真也氏との共同研究 [11] に基づくものである．
次は古典的な問題である．

- 与えられた可換環上のイデアルを分類せよ．

例えば，考えている環 R が Dedekind 整域であれば，R のイデアルを加群としての同型の差を除いて分類することは丁度，R のイデアル類群を決定することに対応する．Dedekind 整域という仮定を外すと，この問題はより複雑になる．R が 1 次元の Noether 局所環であるとし，いくつか穏当な仮定をしておく．このとき，次の Grauel と Knörrer の結果が示すように，R のイデアルの分類と R の表現論が密接に関係する．

定理 1 ([8, Satz 1])**.** *R が 1 次元の完備被約局所環であり，その剰余体 k が標数 0 の代数的閉体であるとする．このとき，以下は同値である．*

(1) R のイデアルの同型類全体のなす集合は有限集合．

(2) 直既約有限生成振れ自由 R-加群の同型類全体のなす集合は有限集合．

(3) 階数 1 の有限生成振れ自由 R-加群の同型類全体のなす集合は有限集合．

同じ仮定の下でこの定理の条件 (2) を少し言い換えると，R が有限 CM 表現型を持つことと同値である．ここで，R が有限 CM 表現型を持つとは，R 上の直既約極大 Cohen–Macaulay 加群の同型類全体のなす集合が有限集合であることをいう．有限 CM 表現型を持つ 1 次元 Noether 局所環の分類は [8] などで与えられている．従って，1 次元 Noether 局所環において元の問題は一定の解決に至っている．
少し，視点を変えたい．トレースイデアルという，ある条件を満たすイデアルが近年盛んに研究されている．トレースイデアルに関して次の問題が基本的であろう．

- トレースイデアル (の同型類) 全体のなす集合がいつ有限集合となるか．

本稿ではこの問題に関して，我々の得た結果を紹介する．Grauel と Knörrer の結果の類推により，この問題と可換環の表現論の関係が多少はあるのではないかと思われる．その証拠となりそうな結果についても説明する．

2 トレースイデアル

この節では，R を可換 Noether 環とし，M を R-加群とする．

定義 2. M の**トレースイデアル** $\mathrm{tr}(M)$ を次で定める．

$$\mathrm{tr}_R(M) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} \mathrm{Im}(f).$$

評価写像

$$\mathrm{ev}_M : M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,R) \to R, \quad x \otimes f \mapsto f(x)$$

を用いると，$\mathrm{tr}_R(M) = \mathrm{Im}(\mathrm{ev}_M)$ となる．

トレースイデアルの基本的な性質をいくつか紹介する．[14] などが参考文献である．

補題 3. M, N を R-加群，I を R のイデアル，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルとする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\mathrm{tr}_R(R) = R$.

(2) $\mathrm{tr}_R(M)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{tr}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$.

(3) $\mathrm{tr}_R(M) \not\subseteq \mathfrak{p} \iff$ $R_{\mathfrak{p}}$-加群 X が存在し，$M_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}} \oplus X$.

(4) $\mathrm{tr}_R(M \oplus N) = \mathrm{tr}_R(M) + \mathrm{tr}_R(N)$.

(5) 整数 $n \geq 1$ および R-加群の全射 $M^{\oplus n} \to N$ が存在するとき，$\mathrm{tr}_R(N) \subseteq \mathrm{tr}_R(M)$.

(6) $I \subseteq \mathrm{tr}_R(I)$.

(7) $\mathrm{tr}_R(\mathrm{tr}_R(M)) = \mathrm{tr}_R(M)$.

上の補題の (7) を念頭に置いて，次のように定義をする．

定義 4. R のイデアル I が $\mathrm{tr}_R(I) = I$ を満たすとき，I は**トレースイデアル**であるという．
以下，$\mathrm{T}(R)$ で R の 0 でないトレースイデアル全体のなす集合を表す．補題 3(7) より，$I, J \in \mathrm{T}(R)$ に対し，$I \cong J \iff I = J$ である．

導入で述べた問いを再掲する．

問い 5. $\mathrm{T}(R)$ はいつ有限集合となるか．

これまでに知られていた結果を紹介する．

定理 6 ([13, Theorem 2.6])**.** R が等次元局所環であり，かつ $\mathrm{T}(R)$ が有限集合ならば次が成り立つ．

(1) $\dim R \leq 1$.

(2) R は被約環，かつ R の商体における整閉包 $\overline{R}$ は R 上有限生成加群.

$Q(R)$ で R の全商環を表す．$Q(R)$ の部分 R-加群 I であって，R の正則元を含むものを (正則) 分数イデアルとよぶ．分数イデアル I, J に対し，$I : J = \{a \in Q(R) \mid aJ \subseteq I\}$ とおく．

補題 7 ([12, Proposition 2.4])**.** *I, J を分数イデアルとする．このとき，次が成り立つ．*

(1) $I : J \cong \mathrm{Hom}_R(J, I)$.

(2) $\mathrm{tr}(I) = (R : I)I$.

(3) I が R のトレースイデアル $\iff R : I = I : I$.

Gorenstein 局所環上の正則トレースイデアルについて，次が知られている．

定理 8 ([5, Theorem 5.2])**.** *R を 1 次元 Gorenstein 局所環とするとき，次の集合の間の全単射が存在する．*

(1) R の正則トレースイデアル全体 $\mathcal{X}_R$.

(2) $Q(R)$ の有限生成部分 R-代数全体 $\mathcal{Y}_R$.

この定理と Grauel–Knörrer の結果を組み合わせることで次が従う．

系 9 (c.f. [3, Proposition 7.9])**.** *R を 1 次元 Gorenstein 完備局所環とし，その剰余体が標数 0 の代数的閉体であるとする．このとき，次は同値である．*

(1) $\mathrm{T}(R)$ は有限集合.

(2) R は有限 *CM* 表現型を持つ.

この結果によって，R が Gorenstein 局所環のとき，問い 5 は解決したと言える．従って，考えるべき事項は非 Gorenstein 局所環 R に対する $\mathrm{T}(R)$ の有限性である．

3 Almost Gorenstein 環

Gorenstein 環のクラスを拡張する試みにおいて，次の環のクラスが導入された[1].

[1] ここでは詳細を述べないが，高次元における almost Gorenstein 環の定義も与えられている

定義 10 ([6, 7]). R を1次元 Cohen–Macaulay 局所環とし，k を R の剰余体，ω を R の正準加群とする．このとき，R が *almost Gorenstein* **環**であるとは，次の短完全列が存在することと定める．

$$0 \to R \to \omega \to k^{\oplus r-1} \to 0.$$

ここで，r は R の CM type とする．

R が Gorenstein 環であれば，$r-1=0$, $R \cong \omega$ であるから，R は almost Gorenstein 環である．almost Gorenstein 環であるが，Gorenstein 環でないものの例としては $R = k[[t^3, t^4, t^5]]$ などが存在する．

4 反射的加群

定義 11. 有限生成 R-加群 M に対し，次の標準的 R-線形射

$$M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R), \quad x \mapsto [f \mapsto f(x)]$$

が全単射となるとき，M を**反射的** R-**加群**とよぶ．

また，R のイデアル I が R-加群として反射的であるとき，I を反射的イデアルとよぶ．

直既約反射的 R-加群の同型類全体のなす集合を $\mathrm{Ref}(R)$ とおく．また，R の正則元を含むような反射的イデアルの同型類全体のなす集合を $\mathrm{Ref}_1(R)$ とおく．

$\mathrm{T}(R)$ のときと同様に $\mathrm{Ref}(R)$ や $\mathrm{Ref}_1(R)$ がいつ有限集合となるのかというのも興味深い問題である．良く知られているように，R が Noether 整閉整域のとき，$\mathrm{Ref}_1(R)$ は R の因子類群と集合として等しい．また，R が Gorenstein または正規局所環であって，$\dim R \leq 2$ とする．このとき，M が反射的加群であることと M が極大 Cohen–Macaulay 加群であることは同値である．よって，この場合 $\mathrm{Ref}(R)$ の有限性は R が有限 CM 表現型を持つことと同値である．穏当な条件下で有限 CM 表現型を持つ 2 次元局所環は分類されているから，この場合は $\mathrm{Ref}(R)$ の有限性は分かっていると言える．$\mathrm{Ref}(R)$ や $\mathrm{Ref}_1(R)$ に関して，考えたいのはやはり 1 次元の非 Gorenstein 局所環の場合である．次の部分的結果が知られている．

定理 12 ([3, Proposition 7.9], [10]). R を1次元完備局所環かつ *almost Gorenstein* 環とし，その剰余体 k が標数 0 の代数的閉体であると仮定する．$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．このとき，次は同値である．

(1) $\mathrm{Ref}(R)$ は有限集合．

(2) $\mathrm{Ref}_1(R)$ は有限集合．

(3) $\mathrm{T}(R)$ は有限集合．

(4) $\mathrm{End}_R(\mathfrak{m})$ は有限 *CM* 表現型を持つ.

次の例で見るのように，$\mathrm{End}_R(\mathfrak{m})$ が有限 CM 表現型を持っても，R がそうとは限らないことに注意する.

例 13. k を体とし，$R = k[[t^4, t^5, t^7]]$ とおく．このとき，R は 1 次元 almost Gorenstein 完備局所整域である．また，$\mathrm{End}_R(\mathfrak{m}) = k[[t^3, t^4, t^5]]$ であり，$k[[t^3, t^4, t^5]]$ は有限 CM 表現型をもつ．定理 12 より $\mathrm{Ref}(R)$, $\mathrm{Ref}_1(R)$, $\mathrm{T}(R)$ は有限集合である．一方，R は有限 CM 表現型を持たない.

5 整閉イデアル

R のイデアル I に対し，その**整閉包** $\overline{I}$ を次のように定める.

$$\overline{I} = \{x \in R \mid \exists n \geq 1, a_i \in I^i \text{ s.t. } x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0\}.$$

I が**整閉イデアル**であるとは，$I = \overline{I}$ が成り立つこととする.

例 14. (1) R が局所環で $\mathfrak{m}$ がその極大イデアルのとき，$\mathfrak{m}$ は整閉イデアルである.

(2) R が局所整域であるとし，R の商体 $Q(R)$ における整閉包を $\overline{R}$ とする．$\mathfrak{c} = R : \overline{R}$ とおくと，$\mathfrak{c}$ は R の整閉イデアルである．$\mathrm{I}(R)$ を R の整閉イデアルであって $\mathfrak{c}$ を含むもの全体のなす集合とする．$\overline{R}$ が有限生成 R-加群ならば，$\mathrm{I}(R)$ は有限集合である.

定義 15 ([15]). R は Cohen–Macaulay 半局所環であるとし，任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し，$R_\mathfrak{m}$ が 1 次元であるとする．このとき，R が **Arf 環**であるとは，任意の正則整閉イデアル I に対し，$a \in I$ が存在して，$I^2 = aI$ が成り立つことと定める.

定理 16 ([2, 9]). *R が完備かつ被約な Arf 環であるとき，$\mathrm{T}(R)$ および $\mathrm{Ref}(R)$ は有限集合である.*

例 17. k を体とし，$R = k[[t^4, t^9, t^{10}, t^{11}]]$ とおく．このとき，R は Arf 完備局所整域である．定理 16 より，$\mathrm{T}(R)$ および $\mathrm{Ref}(R)$ は有限集合である．他方，R は almost Gorenstein ではない.

6 トレースイデアルの構成

この節では我々の主結果を紹介する.

設定 18. 節全体を通して，R は 1 次元の完備局所整域とする．また以下の記号を用いる.

- $\overline{R}$ を R の商体 $Q(R)$ における整閉包とする．$\overline{R}$ は離散付値環である.

- $v : Q(R) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を $\overline{R}$ に付随する正規化された付値とする.
- R と $\overline{R}$ の極大イデアルをそれぞれ $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ とおく.
- 誘導される射 $R/\mathfrak{m} \to \overline{R}/\mathfrak{n}$ が同型であると仮定する (この条件は例えば，$R/\mathfrak{m}$ が代数的閉体であるとき成り立つ).
- $H = v(R) = \{v(r) \mid r \in R \setminus \{0\}\}$ とおく.
- $H = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ と表す．ただし，$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$ とする.
- 上の状況で全ての $i \geq 0$ に対し，$a_m = a_{m+i}$ を満たす m が存在する．n をそのような数のうち最小のものとする．n を $n(R)$ とも書くことにする.
- $I_i = \{r \in R \mid v(r) \geq a_i\}$ とおく.

注意 19. 次が成り立つ.

(1) $I_0 = R$, $I_1 = \mathfrak{m}$, $I_n = \mathfrak{c}$.

(2) $\mathrm{I}(R) = \{I_i \mid i = 0, \ldots, n\}$.

(3) $R/\mathfrak{m} \to \overline{R}/\mathfrak{n}$ が同型であるという仮定により，任意の $0 \leq i \leq n$ に対し，$I_i/I_{i+1} \cong R/\mathfrak{m}$. 特に $r_i \in R$, $v(r_i) = a_i$ となる元 r_i を取れば，$I_i = (r_i) + I_{i+1}$ である.

(4) ([4, Proposition 2.2]) $I \in \mathrm{T}(R)$ ならば，$\mathfrak{c} \subseteq I$.

(5) ([1, Theorem 1]) $\mathrm{I}(R) \subseteq \mathrm{T}(R)$.

(6) ([3, Theorem 6.8]) $n \leq 2$ ならば，$\mathrm{T}(R) = \mathrm{I}(R)$. 特に $\mathrm{T}(R)$ は有限集合.

主結果を述べるため，補題を準備しておく.

補題 20 ([11, Proposition 3.4])**.** $n \geq 4$, $1 \leq i \leq n-3$ とする．このとき，次は同値である.

(1) $q \in R$, $v(q) = a_i$ となる任意の元に対し，$I_i I_{i+2} = q I_{i+2}$.

(2) $q \in R$, $v(q) = a_i$ となる元が存在し，$I_i I_{i+2} = q I_{i+2}$.

さらに $s \in R$, $v(s) = a_{i+1}$, $I_{i+1} I_{i+3} = s I_{i+3}$ が成り立つと仮定すると，上の (1),(2) は次と同値である.

(3) $q \in R$, $v(q) = a_i$ となる元が存在し，$s I_{i+2} \subseteq (q)$.

次の命題が特に鍵となる．証明の概略も含めて紹介する.

命題 21 ([11, Proposition 3.6]). $n \geq 4$, $1 \leq i \leq n-3$ とする．$q, q' \in R$, $v(q) = a_i$, $v(q') = a_{i+1}$ となる元 q, q' をとる．勝手な元 $\alpha \in R$ に対し，

$$J_\alpha = (q + \alpha q')R + I_{i+2}$$

とおく．$I_i I_{i+2} \neq q I_{i+2}$, $I_{i+1} I_{i+3} = q' I_{i+3}$ を仮定する．このとき，次が成り立つ．

(1) J_α はトレースイデアル．

(2) $\beta \in R$, $\alpha - \beta \notin \mathfrak{m}$ ならば，$J_\alpha \not\supseteq J_\beta$.

(証明の概略). (1): $f = q + \alpha q'$ とおく．補題 7(3) より，$R : J_\alpha = J_\alpha : J_\alpha$ を示せばよい．$J_\alpha \subseteq R$ より，片側の包含関係 $R : J_\alpha \subseteq J_\alpha : J_\alpha$ を示せば十分である．$0 \neq g \in R : J_\alpha$ とし，$g \in J_\alpha : J_\alpha$ を示す．$I_n \subseteq J_\alpha$ より，$g \in R : I_n = \overline{R}$. よって，$g = h + u$, $h \in \overline{R}$, $v(h) \geq 1$, $u \in R$ と表せる．$u \in J_\alpha : J_\alpha$ だから，g を h に置き換えて，はじめから $v(g) \geq 1$ としてよい．

ここで I_{i+2} はトレースイデアルであることに注意する．$g \in R : J_\alpha \subseteq R : I_{i+2}$ より，$gI_{i+2} \subseteq (R : I_{i+2})I_{i+2} = I_{i+2}$. $v(g) \geq 1$ より，$gI_{i+2} \subseteq I_{i+3}$. $f \in J_\alpha$ より，$gf \in R$. ここで $v(f) = a_i$ であるが，再び $v(g) \geq 1$ より，$v(gf) = a_{i+1}$ または $v(gf) \geq a_{i+2}$. 前者の場合，仮定と補題 20 により，$gfI_{i+3} = I_i I_{i+3}$ が得られる．ところが，$gfI_{i+2} \subseteq fI_{i+3}$ となるから，補題 20 によって，$I_i I_{i+2} = qI_{i+2}$ となる．これは仮定に反する．

従って，$v(gf) \geq a_{i+2}$ を得る．$gf \in R$ だったから，これは $gf \in I_{i+2}$ を意味する．以上より，

$$gJ_\alpha = (gf)R + gI_{i+2} \subseteq I_{i+2} + I_{i+3} \subseteq J_\alpha$$

となるので，$g \in J_\alpha : J_\alpha$ である．

(2): $\alpha - \beta \not\in \mathfrak{m}$ とする．これは $\alpha - \beta$ が R の単元であることを意味する．$J_\alpha \supseteq J_\beta$ であるとすると，$q' \in J_\alpha$ がわかる．このとき，$q' = xf + y$, $x \in R$, $y \in I_{i+2}$ と書ける．$(q' - y)I_{i+2} \subseteq (f)$ はすぐわかる．一方，補題 20 によって，$(q' - y)I_{i+3} = I_{i+1}I_{i+3}$. 再び補題 20 により，$qI_{i+2} = I_{i+1}I_{i+2}$ となり，仮定と矛盾する． □

次が我々の主定理である．

定理 22 ([11, Theorem 3.8]). $n \geq 3$ とし，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が無限体であると仮定する．このとき，以下は同値である．

(1) $\mathrm{T}(R)$ は有限集合.

(2) 任意の $1 \leq i \leq n-3$ に対し，$q_i \in R$, $v(q_i) = a_i$ なる元 q_i が存在し，$I_i I_{i+2} = q_i I_{i+2}$ が成り立つ．

(3) $\mathrm{T}(R) = \mathrm{I}(R)$.

(証明の概略). (1)⇒(2): (2) の否定を仮定する．このとき，$i \in \{1, \ldots, n-3\}$, $q, q' \in R$ が存在し，$v(q) = a_i$, $v(q') = a_{i+1}$, $I_i I_{i+2} \neq q I_{i+2}$, $I_{i+1} I_{i+3} = q' I_{i+3}$ となる．命題 21 を用いて，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ の各元 $\bar{\alpha}$ に対し，その原像 $\alpha \in R$ をとり，J_α というイデアルを考える．このとき，$\{J_\alpha\}_{\bar{\alpha} \in R/\mathfrak{m}}$ は $\mathrm{T}(R)$ の無限部分集合である．

(2)⇒(3): $I \in \mathrm{T}(R)$ を任意にとる．$a_i = \min\{v(r) \mid r \in I\}$ とおく．このとき，$I \subseteq I_i$ である．仮定 (2) を用いることで，各 $j \in \{i+2, \ldots, n\}$ に対しての包含 $I \supseteq I_j$ を，j についての降下する帰納法で示すことができる．従って，$I \supsetneq I_{i+2}$ である．$I = I_i$ なら証明完了である．そうでないとすると，$I = (q_i) + I_i$, $v(q_i) = a_i$ と書ける．仮定 (2) より，$I_i I_{i+2} = q_i I_{i+2}$ である．$v(q_{i+1}) = a_{i+1}$ となる元 $q_{i+1} \in R$ を取ったとき，

$$q_i^{-1} q_{i+1} I_{i+2} \subseteq q_i^{-1} I_i I_{i+2} \subseteq I_{i+2} \subseteq R, \quad q_i^{-1} q_{i+1} q_i \in R.$$

よって，$q_i^{-1} q_{i+1} \in R : I$. I がトレースイデアルだから，$I = (R:I)I \ni (q_i^{-1} q_{i+1}) q_i = q_{i+1}$. これより，$I = I_i \in \mathrm{I}(R)$ を得る．

(3)⇒(1): $\mathrm{I}(R)$ が有限集合であることから従う． □

系 23 ([11, Corollary 3.9]). $n \leq 3$ のとき，$\mathrm{T}(R)$ は有限集合である．

また，R が Arf 環のとき，定理 22(2) の条件を確認することは容易である．よって，定理 16 を復元することができる．

定理 12 を思い出すと，$\mathrm{T}(R)$ の有限性と $\mathrm{Ref}_1(R)$ の有限性は関係があるように思われる．このことに関して，次の結果を得た．

定理 24 ([11, Theorem 6.2]). k が無限体，$\mathrm{T}(R)$ が有限集合であると仮定する．このとき，$\mathrm{Ref}_1(R)$ は有限集合である．

$\mathrm{Ref}(R)$ の有限性については今のところ不明であり，今後の課題である．なお，定理 24 の逆は成り立たないことを次節で説明する．

7 数値的半群環

前節の定理の適用例を多数構成するために，この節では数値的半群環を紹介する．H を $\mathbb{N}$ の加法部分モノイドとする．補集合 $\mathbb{N} \setminus H$ が有限集合であるとき，H は数値的半群とよばれる．数値的半群 H に対し，その有限な生成系 $h_1, \ldots, h_m \in H$ が常に存在する．すなわち，$H = \{c_1 h_1 + \cdots + c_m h_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{N}\}$ と表せる．$h_1, \ldots, h_m$ が H の生成系のとき，$H = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$ と書く．$\mathbb{N} \setminus H$ が有限集合だから，生成系 $h_1, \ldots, h_n$ の最大公約数は 1 であることに注意する．数値的半群 H と体 k に対し，形式的冪級数環 $k[[t]]$ の部分環

$$R = k[[H]] = k[[t^h \mid h \in H]] \subseteq k[[t]]$$

を付随させることができる．この R は 1 次元局所整域であり，前節の設定 18 に適合し，なおかつ $H = v(R)$ である．

数値的半群環 $k[[H]]$ に対して，定理 22 を次のように言い換えることができる．

定理 25 ([11, Theorem 4.1]). H を数値的半群，$R = k[[H]]$, $n \geq 3$ とする．k が無限体のとき，以下は同値.

(1) $\mathrm{T}(R)$ は有限集合.

(2) 任意の $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, $j \in \{i+2, \ldots, n\}$ に対し，$a_j + a_{i+1} - a_i \in H$.

系 26 ([11, Corollary 4.2]). H を数値的半群，$R = k[[H]]$, $n = 4$ とする．k が無限体のとき，以下は同値.

(1) $\mathrm{T}(R)$ は有限集合.

(2) $a_2 - a_1 \geq a_4 - a_3$.

例 27. $H = \langle 5, 8, 12, 14 \rangle$ とおく．$R = k[[H]] = k[[t^5, t^8, t^{12}, t^{14}]]$ である．

$H = \{0, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots\}$ だから，$n = 4$, $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $a_4 = 12$ である．$a_2 - a_1 = 3 > 2 = a_4 - a_3$ なので，系 22 より，$\mathrm{T}(R)$ は有限集合である．

例 28. 整数 $n \geq 3$ を固定する．$H = \{0, 3n, 3n+3\} \cup \{3n+3i \mid 3 \leq i \leq n-1, i \neq 2\} \cup \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq 6n\}$ とおく．H は数値的半群である．$R = k[[H]]$ のとき，$n(R) = n$ であり，かつ

$$a_1 = 3n, a_2 = 3n+3, a_3 = 3n+9, a_4 = 3n+12, \ldots, a_{n-1} = 6n-3, a_n = 6n$$

である．任意の $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ に対し，$a_{i+1} - a_i \in \{3, 6\}$ である．よって，各 $j \in \{i+2, \ldots, n\}$ に対し，$a_j + a_{i+1} - a_i \in H$. 定理 25 より，$\mathrm{T}(R)$ は有限集合である．

R が設定 18 を満たす環とする (数値的半群環でなくてもよい)．このとき，$H = v(R)$ は数値的半群である．$\mathrm{T}(R)$ と $\mathrm{T}(k[[H]])$ のそれぞれの有限性については次のことが言える．

定理 29 ([11, Remark 4.5]). R が設定 *18* を満たす環とし，k が無限体であるとする．このとき，$\mathrm{T}(R)$ が有限集合ならば，$\mathrm{T}(k[[H]])$ もそうである．

この定理の逆は成り立たない.

例 30. k を無限体としておく．$R = k[[t^{15}+t^{16}, t^{18}, t^{24}, t^{27}, t^n \mid n \geq 30]]$ とし，$H = v(R)$ とおく．このとき，$H = \{0, 15, 18, 24, 27\} \cup \{n \mid n \geq 30\}$ なので，H は例 28 において $n = 5$ としたものである．特に $\mathrm{T}(k[[H]])$ は有限集合である．一方，$I_1 I_3 \neq (t^{15} + t^{16}) I_3$ だから，定理 18 より，$\mathrm{T}(R)$ は無限集合である．

数値的半群環に限定して考えても，$\mathrm{Ref}(R)$ や $\mathrm{Ref}_1(R)$ の有限性は未解明である．今回，次のような部分的結果を得ることができた.

定理 31 ([11, Theorem 7.1]). H を数値的半群，$R = k[[H]]$, $n = 4$ とする．k が無限体のとき，以下は同値.

(1) $\mathrm{Ref}_1(R)$ は有限集合.

(2) $\mathrm{Ref}_1(R) \cap \mathrm{T}(R)$ は有限集合.

(3) 次のうちいずれかが成り立つ.

(a) $a_2 - a_1 \geq a_4 - a_3$, すなわち，$\mathrm{T}(R)$ は有限集合.

(b) $2a_3 - a_1 < a_4$.

例 32. $H = \langle 5, 6, 7 \rangle$ とする．k を無限体，$R = k[[H]] = k[[t^5, t^6, t^7]]$ とする．このとき，$n = 4$, $a_1 = 5$, $a_2 = 6$, $a_3 = 7$, $a_4 = 10$. $a_2 - a_1 = 1 < 3 = a_4 - a_3$ より，$\mathrm{T}(R)$ は無限集合．一方，$2a_3 - a_1 = 9 < 10 = a_4$ より，$\mathrm{Ref}_1(R)$ は有限集合．特に，定理 24 の逆は成り立たない.

例 33. $H = \langle 5, 6, 8 \rangle$ とする．k を無限体，$R = k[[H]] = k[[t^5, t^6, t^8]]$ とする．このとき，$n = 4$, $a_1 = 5$, $a_2 = 6$, $a_3 = 8$, $a_4 = 10$. $2a_3 - a_1 = 11 > 10 = a_4$ より，$\mathrm{Ref}_1(R)$ は無限集合である.

参考文献

[1] P. Constapel, The product of an integrally closed ideal with its inverse. *Comm. Algebra* **27** (1999), no. 8, 3777–3779.

[2] H. Dao, Reflexive modules, self-dual modules and Arf rings. preprint, arXiv:2105.12240.

[3] H. Dao; S. Maitra; P. Sridhar, On reflexive and I-Ulrich modules over curve singularities. *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B* **10** (2023), 355–380.

[4] J. Herzog; M. Rahimbeigi, On the set of trace ideals of a Noetherian ring. *Beitr. Algebra Geom.* **64** (2023), no. 1, 41–54.

[5] S. Goto; R. Isobe; S. Kumashiro, Correspondence between trace ideals and birational extensions with application to the analysis of the Gorenstein property of rings. *J. Pure Appl. Algebra* **224** (2020), no. 2, 747–767.

[6] S. Goto; N. Matsuoka; T. T. Phuong, Almost Gorenstein rings. *J. Algebra* **379** (2013), 355–381.

[7] S. Goto; R. Takahashi; N. Taniguchi, Almost Gorenstein rings—towards a theory of higher dimension. *J. Pure Appl. Algebra* **219** (2015), no. 7, 2666–2712.

[8] G.-M. Greuel; H. Knörrer, Einfache Kurvensingularitäten und torsionsfreie Moduln. *Math. Ann.* **270** (1985), no. 3, 417–425.

[9] R. Isobe; S. Kumashiro, Reflexive modules over Arf local rings. *Taiwanese J. Math.* **28** (2024), no. 5, 865–875.

[10] T. Kobayashi, Syzygies of Cohen-Macaulay modules over one dimensional Cohen-Macaulay local rings. *Algebr. Represent. Theory* **25** (2022), no. 5, 1061–1070.

[11] T. Kobayashi; S. Kumashiro, The set of trace ideals of curve singularities. *Isr. J. Math.* (to appear).

[12] T. Kobayashi; R. Takahashi, Rings whose ideals are isomorphic to trace ideals. *Math. Nachr.* **292** (2019), no. 10, 2252–2261.

[13] S. Kumashiro, When are trace ideals finite? *Mediterr. J. Math.* **20** (2023), no. 5, Paper No. 278, 17 pp.

[14] H. Lindo, Trace ideals and centers of endomorphism rings of modules over commutative rings. *J. Algebra* **482** (2017), 102–130.

[15] J. Lipman, Stable ideals and Arf rings. *Amer. J. Math.* **93** (1971), 649–685.

連接層の導来圏の三角圏構造

平野 雄貴 *

1 背景

代数多様体 X の導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ は, X 上の連接層の有界複体を対象に持つ三角圏であり, もともとはコホモロジーの理論を記述する有用な道具であったが, 1980 年代の向井 [Muk] や Kapranov[Kap] によるアーベル多様体やグラスマン多様体の導来圏の研究や, 1994 年に Kontsevich が提唱したホモロジー的ミラー対称性予想などにより注目を集め, 1995 年頃から Bondal–Orlov らにより本格的な研究が始まった. それ以降, 極小モデル理論において重要なある種の双有理変換で結ばれる多様体の導来圏は同値であろうという予想 (Bondal–Orlov 予想 [BO], 川又による D/K 同値予想 [Kaw1]) に関する研究や, 導来 McKay 対応 [BKR] やホモロジー的射影双対 [Kuz] などの, 古典的な理論を導来圏へと拡張する研究, さらにはミラー対称性の文脈で重要な Bridgeland 安定性条件の空間の研究 [Bri] など, 連接層の導来圏に関する多くの重要な理論が華々しく発展した. しかしその一方で, 連接層の導来圏の三角圏としての構造に関する理解, 特に部分三角圏の分類は, 種数が 2 以上の滑らかな射影曲線や射影平面などの比較的単純な多様体の場合でさえ十分には得られていないのが現状である.

本稿では, Kalck 氏と大内氏との共同研究 [HKO] で導入した三角圏の組成列を紹介し, 連接層の導来圏の組成列について得られた結果を概説する. 今節ではまず, 三角圏の構造に関するいくつかの重要な問題を紹介する.

1.1 thick 部分圏の分類問題

与えられた三角圏の構造を理解するために, 三角圏の内在的性質や部分圏の性質に対し, それを満たす部分三角圏を分類することは有効である. 特に, 直和因子をとる操作で閉じた部分三角圏である **thick 部分圏**を分類することは, 三角圏の構造の研究において基本的な問題であり, これまで多くの研究がなされてきた. 最初の重要な結果は, 1980 年代の Devinatz, Hopkins, Smith による p-局所安定ホモトピー圏のコンパクト対象のなす三角圏の thick 部分圏の分類である [DHS, HS]. その後, Hopkins や Neeman により局所可換ネーター環上の完全複体のなす三角圏の thick 部分圏の分類 [Hop, Nee] が得られ, その一般化として Thomason は, ネータースキーム上の完全複体のなす三角圏のイデアル部分圏を分類した [Tho]. Hopkins や Neeman の結果により, アフィン多様体が滑らかな場合には, 連接層の導来圏の thick 部分圏の分類は完全に得られている. アフィン多様体が特異点を持つ場合は, thick 部分圏の分類はより困難であるが, 特別なアルティン環の場合に分類が得られている [EL2]. 滑らかな射影多様体の場合で thick 部分圏の分類が得られているのは, 射影直線と楕円曲線 [HO] のみであるが, ある種の性質を持つ thick 部分圏の分類は, いくつかの比較的単純な代数多様体に対して得られている. 例えば, 滑らかな射

* 東京農工大学 工学研究院 (hirano@go.tuat.ac.jp). JSPS の若手研究 (23K12956) の助成を受けています.

影曲線の導来圏 $\mathrm{D^b}(C)$ の有限生成 thick 部分圏は, C の種数によらず分類されている [EL1]. また, 射影平面の導来圏 $\mathrm{D^b}(\mathbb{P}^2)$ の許容部分圏の分類も近年得られている [Pir]. ここで, thick 部分圏 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{D^b}(X)$ が**許容部分圏**であるとは, 埋め込み関手 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathrm{D^b}(X)$ が右随伴と左随伴を持つ場合をいう.

1.2 例外生成列と phantom 部分圏の存在問題

三角圏の良い生成系として, 例外生成列がある. $\mathbb{C}$ 上の三角圏 $\mathcal{T}$ の対象の列 $E_1, \ldots, E_r$ が**例外列**であるとは,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_i, E_j[n]) = \begin{cases} \mathbb{C} & (i = j \text{ かつ } n = 0) \\ 0 & (i = j \text{ かつ } n \neq 0, \text{ または } i > j) \end{cases}$$

が成り立つときをいい, さらにそれらが $\mathcal{T}$ を生成するとき (すなわち, それらを含む最小の部分三角圏が $\mathcal{T}$ となるとき), **例外生成列**であるという. また, 一つの対象 E が例外列をなす場合, E を**例外対象**と呼ぶ. 例外生成列を持つ三角圏は比較的良い構造を持つと考えられており, 連接層の導来圏がいつ例外生成列を持つかというのは重要な問題である. 一般に, 三角圏 $\mathcal{T}$ が例外生成列 $E_1, \ldots, E_r$ を持つとき, $\mathcal{T}$ の Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{T})$ と Hochschild ホモロジー $\mathrm{HH}_*(\mathcal{T})$ に関し次の同型が成り立つ:

$$K_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}^r, \qquad \mathrm{HH}_*(\mathcal{T}) \cong \mathrm{HH}_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{C}^r.$$

これらの事実により, 滑らかな射影多様体 X の導来圏 $\mathrm{D^b}(X)$ が例外生成列を持つ場合, X の Grothendieck 群 $K(X)$ は有限生成自由加群となる. また, $h^{p,q}(X) = \dim H^q(X, \Omega_X^p)$ を X の Hodge 数とすると, Hochschild–Kostant–Rosenberg 同型により, $p \neq q$ に対し $h^{p,q}(X) = 0$ が成り立つ. このように, 例外生成列を持つ多様体には強い制約が付く. 現在知られている例外生成列を持つ多様体は, 任意の有理曲面や任意のトーリック多様体など, いずれも有理的である.

今, X の Grothendieck 群 $K(X)$ が階数 r の自由加群であるとする. このとき, r 個の対象からなる $\mathrm{D^b}(X)$ の例外列 $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_r)$ が生成する部分三角圏を $\mathcal{C}$ とし, その左直交部分圏を ${}^{\perp}\mathcal{C} = \{F \in \mathrm{D^b}(X) \mid \mathrm{Hom}^*(F, \mathcal{C}) = 0\}$ で定めると, 半直交分解

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathcal{C}, {}^{\perp}\mathcal{C} \rangle$$

を得る. よって, $\mathcal{E}$ が例外生成列であることと, ${}^{\perp}\mathcal{C} = 0$ であることは同値である. $K(X)$ の仮定から, $K_0({}^{\perp}\mathcal{C}) = 0$ を得るため, ${}^{\perp}\mathcal{C} = 0$ である ($\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ は例外生成列である) と期待するのは自然に思われるかもしれない. しかし, これは一般には成り立たない. すなわち, $K_0(\mathcal{D}) = 0$ であるが $\mathcal{D} \neq 0$ であるような $\mathrm{D^b}(X)$ の許容部分圏 $\mathcal{D}$ が存在する. このとき, $\mathcal{D}$ が $\mathrm{D^b}(X)$ の許容部分圏であるという特殊事情から $\mathrm{HH}_*(\mathcal{D}) = 0$ も同時に成り立ち, このような許容部分圏 $\mathcal{D}$ は $\mathrm{D^b}(X)$ の **phantom 部分圏**と呼ばれる. また, $\mathrm{HH}_*(\mathcal{D}') = 0$ を満たす $\mathrm{D^b}(X)$ の許容部分圏は, **H-phantom 部分圏**と呼ばれる. 当初 H-phantom 部分圏は存在しないと予想されたが, その予想の数年後に H-phantom 部分圏の例が古典的 Godeaux 曲面などの一般型曲面上に発見され [BGS, AO, GS], その後 phantom 部分圏の例が, H-phantom を持つ二つの一般型曲面の積 [GO] やある一般型曲面上に発見された [BGKS].

上述のように, 単に Grothendieck 群の階数に等しい長さの例外列を構成できたとしても, phantom 部分圏の存在が排除できない場合, それが例外生成列になるとはいえない. このように, phantom 部分圏は例外生成列を構成する上で厄介な存在である. 実際, Kuznetsov–Polishchuk は BCD 型の単純群 G と (極大とは限らない) パラボリック部分群 $P \subset G$ に対し, Grothendieck

群の階数に等しい長さの例外列を有理等質多様体 G/P の導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(G/P)$ 上に構成したが [KP], それが例外生成列になるかはほとんどの場合でわかっていない. このような状況から, phantom 部分圏がいつ存在するのかは重要な問題であるが, それを判定するのは多くの場合非常に困難である. しかし近年, del Pezzo 曲面 [Pir] や $\mathbb{P}^2$ のある条件を満たす有限個の点に関する爆発 [BK] などの有理曲面上には phantom 部分圏が存在しないことが示された. phantom 部分圏の存在のさらなる理解のためには, phantom 部分圏自体の圏構造を理解することが重要だと思われる. 本稿で紹介する三角圏の組成列や Jordan–Dedekind 性を調べることが, phantom 部分圏の圏構造の研究において有効なアプローチとなることを期待している.

2 三角圏の組成列と Jordan–Dedekind 性

本節では, 三角圏の組成列や Jordan-Dedekind 性を導入し, それらの基本的な性質を紹介する. 以下, $\mathcal{T}$ を本質的小圏であるような $\mathbb{C}$ 上の三角圏とする.

2.1 thick 部分圏

$\mathcal{T}$ の部分三角圏 $\mathcal{U}$ が **thick** であるとは, 直和因子をとる操作について閉じた部分圏である場合をいう. $\mathcal{T}$ の thick 部分圏のなす集合を $\mathbf{Th}(\mathcal{T})$ で表す. $\mathbf{Th}(\mathcal{T})$ は, 部分圏の包含に関し部分順序集合となる. 次の命題は, $\mathbf{Th}(\mathcal{T})$ に関する基本的な性質をまとめたものである.

命題 2.1 ([HKO, Proposition 2.6 (2)],[Tak, Lemma 3.1])**.**

(1) 有限個の三角圏 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_r$ に対し, 次が成り立つ.

$$\mathbf{Th}(\mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_r) \cong \mathbf{Th}(\mathcal{T}_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{Th}(\mathcal{T}_r).$$

ただし, 右辺は部分順序集合の直和である.

(2) $\mathcal{U} \in \mathbf{Th}(\mathcal{T})$ に対し, Verdier 商への自然な商関手 $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{U}$ を考えると, F の引き戻しにより次の部分順序集合の間の同型

$$F^{-1}\colon \mathbf{Th}(\mathcal{T}/\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{V} \in \mathbf{Th}(\mathcal{T}) \mid \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}\},$$

が誘導される.

$\mathcal{T}$ のある種の対象からなる集合 (クラス) $\mathcal{C}$ に対し, $\mathcal{C}$ を含む最小の thick 部分圏を $[\![\mathcal{C}]\!]$ で表す. 対象 $A \in \mathcal{T}$ が $\mathcal{T}$ の**分裂生成対象**であるとは, $\mathcal{T} = [\![A]\!]$ が成り立つ時をいう. また, $\mathcal{T}$ が分裂生成対象を持つとき, $\mathcal{T}$ は**有限生成**であるという.

定義 2.2. $\mathcal{T}$ が**単純**であるとは, $\#\mathbf{Th}(\mathcal{T}) = 2$ が成り立つ場合をいう. すなわち, $\mathcal{T} \neq 0$ であり, かつ非自明な thick 部分圏を持たない場合をいう. また, $\mathcal{T}$ が有限個の単純三角圏の直交和で表されるとき, **半単純**であるという.

単純三角圏の最も簡単な例の一つは, ベクトル空間の導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ であろう. $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ の Grothendieck 群 $K_0(\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}))$ は階数 1 の自由加群であり, その Rouquier 次元 $\dim \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ は 0 である. 以下では, $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ とは異なる数値的な不変量を持つ単純三角圏の例を与える.

例 2.3.

(1) 分離的なネータースキーム X の閉点 $p \in X$ に対し, p に台を持つ完全複体のなす三角圏

$\mathcal{T} = \operatorname{Perf}_p X$ は単純である [HKO, Proposition 2.11]．このとき, $K_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}$ であるが, $\dim \mathcal{T} = \infty$ である．

(2) $f \in \mathbb{C}[\![x, y]\!]$ で定まる 1 次元超曲面 $R := \mathbb{C}[\![x, y]\!]/\langle f \rangle$ を考える．また, $\operatorname{Spec} R$ の既約成分の個数を n とする．もし $\operatorname{Spec} R$ が原点のみで特異点を持つ場合, 特異点圏 $\mathrm{D^{sg}}(R) = \mathrm{D^b}(R)/\operatorname{Perf} R$ は単純となる．このとき, $K_0(\mathrm{D^{sg}}(R)) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ が成り立つ．例えば, $f = x^2 + y^2$ (A_1 型) の場合は $K_0(\mathrm{D^{sg}}(R)) \cong \mathbb{Z}$ が成り立ち, $f = x^2 y + y^3$ (D_4 型) の場合は $K_0(\mathrm{D^{sg}}(R)) \cong \mathbb{Z}^2$ が成り立つ．

次に, 極大部分圏を導入する．

定義 2.4. $\mathcal{U} \in \mathbf{Th}(\mathcal{T})$ が $\mathcal{T}$ の**極大部分圏**であるとは, $\mathcal{T}/\mathcal{U}$ が単純である場合をいう．言い換えると, $\mathcal{U}$ が極大となるのは, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ ならば, $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ または $\mathcal{V} = \mathcal{T}$ が成り立つ場合である．

次の命題は, $\mathcal{T}$ が分裂生成対象を持つ場合に, 極大部分圏の存在を保証するものである．証明では Zorn の補題を用いる．

命題 2.5 ([HKO, Proposition 2.17])**.** $\mathcal{T} \neq 0$ かつ $\mathcal{T}$ が有限生成であると仮定する．このとき, 任意の $\mathcal{U} \in \mathbf{Th}(\mathcal{T})$ に対し, $\mathcal{U}$ を含む $\mathcal{T}$ の極大部分圏が存在する．

以下では, 極大部分圏の例を見る．

例 2.6.

(1) ネーター環 R に対し, $\operatorname{Perf} R$ の thick 部分圏 $\mathcal{M} := \{F \in \operatorname{Perf} R \mid \operatorname{Supp}(F) \neq \operatorname{Spec} R\}$ を考えると, $\mathcal{M}$ は $\operatorname{Perf} R$ の極大部分圏になる．

(2) $\mathcal{T}$ が例外生成列 $E_1, \ldots, E_r$ を持つとき, $\mathcal{M} := [\![E_1, \ldots, E_{r-1}]\!]$ は $\mathcal{T}$ の極大部分圏である．

(3) 例 2.3 (2) のように, $\mathrm{D^{sg}}(R)$ が単純となるような可換環 R に対し, $\operatorname{Perf} R$ は $\mathrm{D^b}(R)$ の極大部分圏になる．

2.2 三角圏の組成列

以下では, 三角圏の組成列を導入する．これは群や加群の組成列の類似であり基本的な概念のように思われるが, 意外にもこれまであまり関心を持たれてこなかった．

定義 2.7. $\mathcal{T}$ の thick 部分圏の上昇列

$$\mathcal{S}_* = (0 = \mathcal{S}_0 \subsetneq \mathcal{S}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{S}_n = \mathcal{T})$$

が $\mathcal{T}$ の**組成列**であるとは, 各 $1 \leq i \leq n$ に対し $\mathcal{S}_i/\mathcal{S}_{i-1}$ が単純である場合をいう．このとき, $\ell(\mathcal{S}_*) := n$ を $\mathcal{S}_*$ の**長さ**と呼ぶ．

$\mathcal{T}$ の組成列全体のなす集合を $\mathrm{CS}(\mathcal{T})$ で表す．また, $\mathrm{CS}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ であるとき,

$$\ell(\mathcal{T}) := \min\{\ell(\mathcal{S}_*) \mid \mathcal{S}_* \in \mathrm{CS}(\mathcal{T})\}$$

を $\mathcal{T}$ の**長さ**と呼ぶ．$\mathrm{CS}(\mathcal{T}) = \emptyset$ である場合は, $\ell(\mathcal{T}) = \infty$ と定める．定義より, $\mathcal{T}$ が単純であることと, $\ell(\mathcal{T}) = 1$ が成り立つことは同値である．以下では, 組成列に関する基本的な性質を紹介する．

命題 2.8. 有限個の三角圏 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_r$ に対し, 次が成り立つ.

$$\ell(\mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_r) = \ell(\mathcal{T}_1) + \cdots + \ell(\mathcal{T}_r).$$

命題 2.9. $\mathcal{U} \in \mathbf{Th}(\mathcal{T})$ とする. $\mathcal{S}_* \in \mathrm{CS}(\mathcal{U})$ と $\mathcal{S}'_* \in \mathrm{CS}(\mathcal{T}/\mathcal{U})$ に対し, $\widetilde{\mathcal{S}}_* \in \mathrm{CS}(\mathcal{T})$ であって $\ell(\widetilde{\mathcal{S}}_*) = \ell(\mathcal{S}_*) + \ell(\mathcal{S}'_*)$ となるようなものが存在する.

上の命題から, 三角圏の長さに関する劣加法性が成り立つ.

命題 2.10. $\ell(\mathcal{U}) < \infty$ かつ $\ell(\mathcal{T}/\mathcal{U}) < \infty$ を満たす $\mathcal{U} \in \mathbf{Th}(\mathcal{T})$ に対し, 次が成り立つ.

$$\ell(\mathcal{T}) \leq \ell(\mathcal{U}) + \ell(\mathcal{T}/\mathcal{U}) < \infty.$$

注意 2.11. $\ell(\mathcal{T}) < \infty$ であっても, $\ell(\mathcal{U}) = \infty$ または $\ell(\mathcal{T}/\mathcal{U}) = \infty$ となるような $\mathcal{U} \in \mathbf{Th}(\mathcal{T})$ が存在する. また, 上の命題における劣加法性について, 一般に加法性は成り立たない.

上の命題の系として次が成り立つ.

系 2.12. 半直交分解 $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ が成り立つとする. 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $\ell(\mathcal{A}_i) < \infty$ が成り立つとき, 次が成り立つ.

$$\ell(\mathcal{T}) \leq \sum_{i=1}^{n} \ell(\mathcal{A}_i).$$

特に, $\mathcal{T}$ が例外生成列 $E_1, \ldots, E_r$ を持つとき, $\ell(\mathcal{T}) \leq r$ が成り立つ.

例 2.13. 組成列の例をいくつか挙げる.

(1) $E_1, \ldots, E_r \in \mathcal{T}$ を例外列とする. このとき,

$$\Big(0 \subsetneq [\![E_1]\!] \subsetneq [\![E_1, E_2]\!] \subsetneq \cdots \subsetneq [\![E_1, \ldots, E_r]\!]\Big)$$

は $[\![E_1, \ldots, E_r]\!]$ の組成列である. 特に, $E_1, \ldots, E_r$ が $\mathcal{T}$ の例外生成列となるとき, $\mathcal{T}$ は長さ r の組成列を持つ.

(2) $n > 1$ に対し, $R := \mathbb{C}[x]/\langle x^n \rangle$ を考える. このとき, $\mathrm{Perf}\, R$ と $\mathrm{D^{sg}}(R)$ はそれぞれ単純となる. したがって

$$\Big(0 \subsetneq \mathrm{Perf}\, R \subsetneq \mathrm{D^b}(R)\Big)$$

は $\mathrm{D^b}(R)$ の組成列となる. $\mathrm{D^b}(R)$ は単純ではないため, $\ell(\mathrm{D^b}(R)) = 2$ が成り立つ.

(3) $X := \mathbb{P}(1,1,2)$ と $R := \mathbb{C}[x]/\langle x^2 \rangle$ に対し, 半直交分解

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathrm{D^b}(R), \mathrm{D^b}(\mathbb{C}), \mathrm{D^b}(\mathbb{C}) \rangle$$
$$\mathrm{Perf}\, X = \langle \mathrm{Perf}\, R, \mathrm{D^b}(\mathbb{C}), \mathrm{D^b}(\mathbb{C}) \rangle.$$

が成り立つ. これらの分解から, 次の 3 つの異なる組成列を得る.

$$\Big(0 \subsetneq \mathrm{Perf}\, R \subsetneq \mathrm{D^b}(R) \subsetneq \langle \mathrm{D^b}(R), \mathrm{D^b}(\mathbb{C}) \rangle \subsetneq \mathrm{D^b}(X)\Big)$$
$$\Big(0 \subsetneq \mathrm{Perf}\, R \subsetneq \langle \mathrm{Perf}\, R, \mathrm{D^b}(\mathbb{C}) \rangle \subsetneq \mathrm{Perf}\, X \subsetneq \mathrm{D^b}(X)\Big)$$
$$\Big(0 \subsetneq \mathrm{D^b}(\mathbb{C}) \subsetneq \langle \mathrm{D^b}(\mathbb{C}), \mathrm{D^b}(\mathbb{C}) \rangle \subsetneq \mathrm{Perf}\, X \subsetneq \mathrm{D^b}(X)\Big)$$

特に, $\ell(\mathrm{D^b}(X)) \leq 4$ が成り立つ.

2.3 Jordan–Dedekind 性と phantom 部分圏

群や加群の組成列が Jordan–Hölder 性を満たすことはよく知られている. 特に, 異なる組成列の長さは常に等しくなる. 以下では, この性質を三角圏の組成列に対して考える.

定義 2.14. 長さ有限な $\mathcal{T}$ が **Jordan–Dedekind 性**を満たすとは, 任意の 2 つの組成列 $\mathcal{S}_*, \mathcal{S}'_* \in \mathrm{CS}(\mathcal{T})$ に対し, $\ell(\mathcal{S}_*) = \ell(\mathcal{S}'_*)$ が成り立つ場合をいう.

原理的には, thick 部分圏の集合 $\mathbf{Th}(\mathcal{T})$ の良い記述が得られれば組成列の集合 $\mathrm{CS}(\mathcal{T})$ を決定でき, それにより Jordan–Dedekind 性を判定することができる. しかし, そのような例は限られており, Jordan–Dedekind 性を判定するのは多くの場合で困難である. 以下では, Jordan–Dedekind 性が成り立つ例をいくつか挙げる.

例 2.15.

(1) 単純三角圏は明らかに Jordan–Dedekind 性を満たす. よって, 命題 2.1 (1) より, 半単純三角圏も Jordan–Dedekind 性を満たす.

(2) $\mathrm{D^b}(\mathbb{P}^1)$ の組成列は必ず
$$(0 \subsetneq [\![\mathcal{O}(i)]\!] \subsetneq \mathrm{D^b}(\mathbb{P}^1))$$
の形をしていることがわかる. 特に, $\mathrm{D^b}(\mathbb{P}^1)$ は Jordan–Dedekind 性を満たす.

(3) E を楕円曲線とする. $\ell(\mathrm{D^b}(E)) = \infty$ であるが, $\mathrm{D^b}(E)$ の有限生成 thick 部分圏は半単純であり, 特に長さ有限である [HO]. 上の (1) より, $\mathrm{D^b}(E)$ の有限生成 thick 部分圏は Jordan–Dedekind 性を満たす.

(4) Q を ADE 型あるいは拡大 ADE 型の非輪状箙とすると, 道代数 $\mathbb{C}Q$ の導来圏 $\mathrm{D^b}(\mathbb{C}Q)$ は例外生成列を持ち, 特に長さ有限である. [HKO] において, $\mathrm{D^b}(\mathbb{C}Q)$ は Jordan–Dedekind 性を満たすことが示された.

次に, 有限次元代数 Λ であって $\mathrm{D^b}(\Lambda)$ が Jordan–Dedekind 性を満たさない例を紹介する.

例 2.16.
次の箙 Q に対し, 有限次元代数 $\Lambda := \mathbb{C}Q/\langle ab \rangle$ を考える.

$$1 \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} 2$$

このとき, $\mathrm{D^b}(\Lambda)$ は長さ 2 と長さ 3 の組成列を持つ. したがって, $\mathrm{D^b}(\Lambda)$ は Jordan–Dedekind 性を満たさない. この有限次元代数 Λ は, 導来離散代数と呼ばれる有限次元代数の例であり, 他の多くの導来離散代数も Jordan–Dedekind 性を満たさないことが知られている [HKO, Corollary 4.15].

Jordan–Dedekind 性が成り立たない場合に, 組成列の長さがどれくらい現れるかは興味深い. そこで, 組成列の長さを全て集めた自然数の集合を考える.

定義 2.17. 長さ有限な $\mathcal{T}$ に対し, $\mathcal{T}$ の**長さスペクトラム** $\mathrm{LS}(\mathcal{T})$ を以下で定める.

$$\mathrm{LS}(\mathcal{T}) := \{\ell(\mathcal{S}_*) \mid \mathcal{S}_* \in \mathrm{CS}(\mathcal{T})\}.$$

さらに, $\ell_{\mathrm{ult}}(\mathcal{T}) := \sup \mathrm{LS}(\mathcal{T})$ とおき, $\mathcal{T}$ の **Jordan–Dedekind 指数** $\iota(\mathcal{T})$ を

$$\iota(\mathcal{T}) := \ell_{\mathrm{ult}}(\mathcal{T}) - \ell(\mathcal{T})$$

で定める.

Jordan–Dedekind 指数に関し, 次が成り立つ.

命題 2.18. 長さ有限の $\mathcal{A}_1 \ldots, \mathcal{A}_r$ に対し, 半直交分解 $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r \rangle$ が成り立つとする. このとき, 包含

$$\{\ell_1 + \cdots + \ell_r \mid \ell_i \in \mathrm{LS}(\mathcal{A}_i)\} \subseteq \mathrm{LS}(\mathcal{T})$$

が成り立つ. 特に, 不等式 $\iota(\mathcal{T}) \geq \iota(\mathcal{A}_1) + \cdots + \iota(\mathcal{A}_r)$ が成り立つ.

続いて, ある種の有理曲面の導来圏の Jordan–Dedekind 性と phantom 部分圏の長さの関係について説明する. これは三角圏の組成列を導入する動機付けとなったものである.

例 2.19.

X を $\mathbb{P}^2$ の十分一般な 10 点での爆発とする. このとき, 爆発公式により $\mathrm{D^b}(X)$ は長さ 13 の例外生成列を持ち, 特に長さ 13 の組成列を持つ. Krah は, 長さ 13 の例外列 $E_1, \ldots, E_{13}$ であって例外生成列でないようなものを構成した [Krah]. よって, それらの左直交部分圏

$$\mathcal{P} := {}^{\perp}\langle E_1, \ldots, E_{13} \rangle \subset \mathrm{D^b}(X)$$

は, $\mathrm{D^b}(X)$ の phantom 部分圏である. これは, 滑らかな有理曲面上に phantom 部分圏は存在しないであろうという大方の予想の反例を与えるものであった.

ここで, $\mathrm{D^b}(X)$ が Jordan–Dedekind 性を満たすと仮定する. もし $\mathcal{P}$ が長さ有限ならば, Krah が構成した例外列 $E_1, \ldots, E_{13}$ と合わせて長さ 14 以上の組成列が構成できてしまう. $\mathrm{D^b}(X)$ は例外生成列に由来する長さ 13 の組成列を持つので, これは Jordan–Dedekind 性に反する. したがって, $\mathcal{P}$ は長さ無限であることが従う.

上の例で見たように, 有理曲面の導来圏の Jordan–Dedekind 性を調べることにより, phantom 部分圏の構造について新たな知見が得られる可能性がある. しかしながら, Jordan–Dedekind 性を満たさない有理曲面が存在することが示された. 次節では, そのような例を紹介する.

3 有理曲面の導来圏の Jordan–Dedekind 性

今節では, 滑らかな射影トーリック曲面の導来圏が Jordan–Dedekind 性を満たさないための十分条件を解説する. 証明では, 特異点を持つ多様体の導来圏の半直交分解に関する最近発展した理論 [KKS, Kaw2] や [HKO] で導入されたブーケ球面的対象などの新たな概念が必要となる.

3.1 準備

以下では, 証明で必要となる概念やその基本的な性質を紹介する.

定義 3.1 ([HKO]). $n > 0$ を自然数とし, $d \neq 0$ を整数とする. 三角圏 $\mathcal{T}$ の対象 $B \in \mathcal{T}$ が **n ブーケ d 球面的**であるとは, 次の等式を満たす場合をいう.

$$\mathrm{Hom}(B, B[i]) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0 \\ 0 & i \neq 0, d \\ \mathbb{C}^n & i = d \end{cases}$$

ただし, n や d を特に指定しない場合は, 単に**ブーケ球面的**であるという.

次の命題は, ブーケ球面的対象の生成する thick 部分圏の単純性に関するものである.

命題 3.2 ([HKO, Proposition 2.13])**.** 三角圏 $\mathcal{T}$ は, ベキ等完備かつ dg 増強を持つとする. このとき, ブーケ球面的対象 $B \in \mathcal{T}$ が生成する thick 部分圏 $[\![B]\!]$ は単純である.

次に, 次数付き Kronecker 箙を導入する.

定義 3.3. $m > 1$ を自然数とし, $q \in \mathbb{Z}$ を整数とする. また, 以下の m-Kronecker 箙を考える.

$$1 \underset{\alpha_{m-1}}{\overset{\alpha_0}{\vdots}} 2$$

この箙の各矢に対し, 次数を $\deg(\alpha_0) = 0$, $\deg(\alpha_i) = q$ $(i > 0)$ と定めたものを**次数付き m-Kronecker 箙**と呼び, Kr_q^m で表す.

次の命題は, 主結果の証明において必要となる.

命題 3.4 ([HKO, Lemma 4.6])**.** S を滑らかな射影曲面とし, $E \subset S$ を滑らかな有理曲線であって $m := -E^2 > 1$ が成り立つものとする. さらに, $\mathcal{O}_S \in \mathrm{D^b}(S)$ が例外対象であるとする. このとき, $\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S(E)$ は例外列をなし, 圏同値

$$\langle \mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S(E) \rangle \cong \mathrm{Perf}(\mathbb{C}\,\mathsf{Kr}_1^m)$$

が成り立つ.

3.2 Hirzebruch 曲面

Jordan–Dedekind 性を満たさない曲面の最初の例として, 滑らかな射影トーリック曲面の例である Hirzebruch 曲面を紹介する. 自然数 $d > 1$ に対し, Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_d$ を

$$\mathbb{F}_d := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(d))$$

で定める. Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_d$ の導来圏 $\mathrm{D^b}(\mathbb{F}_d)$ は, 長さ 4 の例外生成列を持つことが知られており, 特に長さ 4 の組成列を持つ. 以下では, $\mathrm{D^b}(\mathbb{F}_d)$ が長さ 5 の組成列を持つことを説明する.

まず, 極小特異点解消

$$\pi \colon \mathbb{F}_d \to \mathbb{P}(1,1,d)$$

を考え, $E \subset \mathbb{F}_d$ を π の例外因子とすると $E^2 = -d$ が成り立つ. また, $C \subset \mathbb{F}_d$ を $C^2 = d$ となるトーリック因子とし, $H \subset \mathbb{F}_d$ を自然な射影 $\mathbb{F}_d \to \mathbb{P}^1$ による $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ の引き戻しとする. このとき,

$$\mathcal{O}(-H-E), \mathcal{O}(-H), \mathcal{O}, \mathcal{O}(C)$$

は $\mathrm{D^b}(\mathbb{F}_d)$ の例外生成列をなす. よって,

$$\widetilde{\mathcal{A}}_1 := \langle \mathcal{O}(-H-E), \mathcal{O}(-H) \rangle, \quad \widetilde{\mathcal{A}}_2 := \langle \mathcal{O} \rangle, \quad \widetilde{\mathcal{A}}_3 := \langle \mathcal{O}(C) \rangle$$

とおくと, 半直交分解

$$\mathrm{D^b}(\mathbb{F}_d) = \langle \widetilde{\mathcal{A}}_1, \widetilde{\mathcal{A}}_2, \widetilde{\mathcal{A}}_3 \rangle \tag{3.A}$$

を得る．ここで $\mathcal{A}_i := \mathbb{R}\pi_*(\widetilde{\mathcal{A}}_i) \subset \mathrm{D^b}(\mathbb{P}(1,1,d))$ とおくと, $\mathcal{A}_i$ は $\mathrm{D^b}(\mathbb{P}(1,1,d))$ の許容部分圏となる．また, それらによる半直交分解

$$\mathrm{D^b}(\mathbb{P}(1,1,d)) = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \rangle$$

と圏同値

$$\mathcal{A}_1 \cong \widetilde{\mathcal{A}}_1 / [\![\mathcal{O}_E(-1)]\!], \quad \mathcal{A}_i \cong \widetilde{\mathcal{A}}_i \quad (i \neq 1)$$

が成り立つ ([KKS, Theorem 2.12], [Kaw2, Example 5.7]).

簡単な計算により次を得る．

補題 3.5. 対象 $\mathcal{O}_E(-1) \in \mathrm{D^b}(\mathbb{F}_d)$ は, $(d-1)$ ブーケ 2 球面的である．特に, $[\![\mathcal{O}_E(-1)]\!]$ は単純三角圏である．

$\widetilde{\mathcal{A}}_1$ は例外生成列が誘導する長さ 2 の組成列を持つ．以下では, $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ の長さ 3 の組成列を構成する．まず, $R := k[x_1, \ldots, x_{d-1}]/\langle x_1, \ldots, x_{d-1}\rangle^2$ とおくと, [KKS, Example 3.14 (2)] により圏同値

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathrm{D^b}(R)$$

が成り立つ．[EL2] や [HKO, Lemma 4.1] により,

$$\Big(0 \subsetneq \operatorname{Perf} R \subsetneq \mathrm{D^b}(R)\Big)$$

は $\mathrm{D^b}(R)$ の組成列であることがわかり, よって $\mathcal{A}_1$ は長さ 2 の組成列を持つ．このことから, 圏同値 $\mathcal{A}_1 \cong \widetilde{\mathcal{A}}_1 / [\![\mathcal{O}_E(-1)]\!]$ と補題 3.5 および命題 2.9 より, $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ は長さ 3 の組成列を持つ．以上をまとめると次を得る．

命題 3.6. 包含

$$\{2,3\} \subseteq \mathrm{LS}(\widetilde{\mathcal{A}}_1)$$

が成り立つ．特に, $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ は Jordan–Dedekind 性を満たさない．

また, 半直交分解 (3.A) と命題 2.18 により次の系が従う．

系 3.7. 包含

$$\{4,5\} \subseteq \mathrm{LS}(\mathrm{D^b}(\mathbb{F}_d))$$

が成り立つ．特に, $\mathrm{D^b}(\mathbb{F}_d)$ は Jordan–Dedekind 性を満たさない．

直線束のテンソル積により圏同値 $\widetilde{\mathcal{A}}_1 \cong \langle \mathcal{O}_{\mathbb{F}_d}, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_d}(E) \rangle$ を得る．よって命題 3.4 より, 圏同値

$$\widetilde{\mathcal{A}}_1 \cong \operatorname{Perf}(\mathbb{C}\,\mathsf{Kr}_1^d)$$

が成り立ち, 命題 3.6 と合わせて次を得る．

系 3.8. 自然数 $m > 1$ に対し, 包含

$$\{2,3\} \subseteq \mathrm{LS}(\operatorname{Perf}(\mathbb{C}\,\mathsf{Kr}_1^m))$$

が成り立つ．

3.3 トーリック曲面

X を滑らかな射影トーリック曲面とし, Σ を X に対応する平面上の扇とする. $\tau_1, \dots, \tau_n$ を Σ の 1 次元錐全体とする. ここで, τ_i の添字は半時計周りの順にとっている. $E_i \subset X$ を τ_i に対応する既約なトーリック因子とすると, 各 E_i は滑らかな有理曲線となる. さらに, X 上の直線束 $L_1, \dots, L_n$ を

$$L_1 := \mathcal{O}_S, \quad L_i := \mathcal{O}\big(\sum_{j=1}^{i-1} E_j\big) \quad (2 \le i \le n)$$

により定めると, $L_1, \dots, L_n$ は $\mathrm{D^b}(X)$ の例外生成列をなすことが知られている [Hil, Theorem 5.1]. 次の定理は系 3.7 の一般化であり, [HKO] の主結果である.

定理 3.9. トーリック因子 $E_1, \dots, E_n$ の部分列 $E_{i_1}, \dots, E_{i_r}$ であって, 次の条件を満たすものが存在すると仮定する.

(1) 各 $1 \le j \le r$ に対し, $E_{i_j}^2 < -1$ が成り立つ.
(2) 1 次元錐の部分列 $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_j}$ は, どの二つも扇 Σ において隣り合わない.

このとき, 包含

$$\{n, n+1, \dots, n+r\} \subseteq \mathrm{LS}(\mathrm{D^b}(X))$$

が成り立つ. 特に, $\mathrm{D^b}(X)$ は Jordan–Dedekind 性を満たさず, $\iota(\mathrm{D^b}(X)) \ge r$ が成り立つ.

Proof. まず $\mathcal{C}_j := \langle L_{i_j}, L_{(i_j)+1} \rangle$ とおくと, $\mathrm{D^b}(X)$ の半直交分解

$$\mathrm{D^b}(S) = \langle L_1, \dots, L_{i_1 - 1}, \mathcal{C}_1, L_{i_1+2}, \dots, L_{i_r - 1}, \mathcal{C}_r, L_{i_r+2}, \dots, L_n \rangle.$$

が成り立つ. 仮定より $m_j := -E_{i_j}^2 > 1$ であるから, 命題 3.4 より圏同値

$$\mathcal{C}_j \cong \mathrm{Perf}(\mathbb{C}\,\mathsf{Kr}_1^{m_j})$$

が成り立つ. よって系 3.8 より各 $\mathcal{C}_j$ は長さ 2 と 3 の組成列を持ち, 命題 2.18 により包含 $\{n, n+1, \dots, n+r\} \subseteq \mathrm{LS}(\mathrm{D^b}(X))$ が成り立つ. □

滑らかな射影トーリック曲面上の自己交点数が負の有理曲線はトーリック因子に限ることから, 次の系が成り立つ.

系 3.10. 滑らかな射影トーリック曲面 S が $E^2 < -1$ となる滑らかな有理曲線 E を持つとする. このとき, $\mathrm{D^b}(S)$ は Jordan–Dedekind 性を満たさない.

以上により, 自己交点数が -1 未満である有理曲線を含む有理曲面は, 一般に Jordan–Dedekind 性を満たさないことがわかる. 逆に, そのような有理曲線を含まない有理曲面が Jordan–Dedekind 性を満たすかは興味深い. del Pezzo 曲面や $\mathbb{P}^2$ の十分一般の位置にある有限個の点での爆発などは, 自己交点数が -1 未満であるような有理曲線を持たないことが知られている. もしこれらの曲面の導来圏が Jordan–Dedekind 性を満たせば, 例 2.19 でみたように長さ無限の phantom 部分圏の存在がいえる. このように, 有理曲面の導来圏の Jordan–Dedekind 性の研究は, phantom 部分圏の三角圏構造の理解に寄与する可能性を秘めたものであるといえる.

4 謝辞

第 69 回代数学シンポジウムで講演の機会を下さった世話人の皆様に感謝申し上げます. 特に, 代数幾何プログラム責任者の大橋久範先生, 上原北斗先生, シンポジウム責任者の朝倉政典先生に心より御礼申し上げます.

参考文献

[AO] V. Alexeev and D. Orlov, *Derived categories of Burniat surfaces and exceptional collections.* Math. Ann. **357**, No. 2, 743–759 (2013).

[BGS] C. Böhning, H-C. Graf von Bothmer and P. Sosna, *On the derived category of the classical Godeaux surface.* Adv. Math. **243**, 203–231 (2013).

[BGKS] C. Böhning, H-C. Graf von Bothmer, L. Katzarkov and P. Sosna, *Determinantal Barlow surfaces and phantom categories.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17**, No. 7, 1569–1592 (2015).

[BO] A. Bondal and D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties,* arXiv:alg-geom/9506012.

[BK] L. Borisov and K. Kemboi, *Non-existence of phantoms on some non-generic blowups of the projective plane.* arXiv:2405.01683.

[Bri] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. Math. (2) **166**, No. 2, 317–345 (2007).

[BKR] T. Bridgeland, A. King and M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Am. Math. Soc. **14**, No. 3, 535–554 (2001).

[DHS] E. S. Devinatz, M. J. Hopkins and J. H. Smith,*Nilpotence and stable homotopy theory. I.* Ann. of Math.(2), **128**, no. 2, 207–241.

[EL1] A. Elagin and V. Lunts, *Thick subcateories on curves.* Adv. Math. **378** (2021), Paper No. 107525, 19 pp.

[EL2] A. Elagin and V. Lunts, *Derived categories of coherent sheaves on some zero-dimensional schemes.* J. Pure Appl. Algebra **226** (2022), no. 6, Paper No. 106939, 30pp.

[GS] S. Galkin and E. Shinder, *Exceptional collection on the Beauville surface.* Adv. Math. 244, 1033-1050 (2013).

[GO] S. Gorchinskiy and D. Orlov, *Geometric phantom categories.* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **117**, 329–349 (2013).

[Hil] L. Hille, *Exceptional sequences of line bundles on toric varieties.* Mathematisches Institut Universität Göttingen, Seminars WS03-04, 2004, 175–190.

[HKO] Y. Hirano, M. Kalck and G. Ouchi, Length of triangulated categories, arXiv:arXiv:2404.07583.

[HO] Y. Hirano and G. Ouchi, *Prime thick subcategories on elliptic curves*, Pcific J. Math. **318** (2022), no. 1,69–88.

[Hop] M. J. Hopkins, *Global methods in homotopy theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **117**, Cambridge University Press, Cambridge, (1987), 73–96.

[HS] M. J. Hopkins and J. H. Smith, *Nilpotence and stable homotopy theory. II*, Ann. of Math. (2), **148** (1998), no. 1, 1–49.

[Kap] M. Kapranov, *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces*, Invent. Math. **92**, No. 3, 479–508 (1988).

[KKS] J. Karmazyn, A. Kuznetsov and E. Shinder, *Derived categories of singular surfaces.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **24** (2022), no. 2, 461–526.

[Kaw1] Y. Kawamata, *D-equivalence and K-equivalence*, J. Differ. Geom. **61**, No. 1, 147–171 (2002).

[Kaw2] Y. Kawamata, *On-multi-pointed-non-commutative-deformations-and-calabi-yau-threefolds.* Compos. Math. **154** (2018), no. 9, 1815–1842.

[Krah] J. Krah, *A phantom on a rational surface.* Invent. Math. **235** (2024), no. 3, 1009–1018.

[Kuz] A. Kuznetsov, *Homological projective duality*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **105**, 157–220 (2007).

[KP] A. Kuznetsov and A. Polishchuk, *Exceptional collections on isotropic Grassmannians*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18**, No. 3, 507–574 (2016).

[Muk] S. Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves.* Nagoya Math. J. **81**, 153–175, (1981).

[Nee] A. Neeman, *The chromatic tower for $D(R)$.* Topology **31** (1992), no. 3, 519–532.

[Tak] R. Takahashi, *Thick subcategories over Gorenstein local rings that are locally hypersurfaces on the punctured spectra.* J. Math. Soc. Japan **65** (2013), no. 2, 357–374

[Pir] D. Pirozhkov, *Admissible subcategories of del Pezzo surfaces.* Adv. Math. **424** (2023), Paper No. 109046, 62pp.

[Tho] R. W. Thomason, *The classification of triangulated subcategories.* Compos. Math. **105** (1997), 1–27.