

第68回代数学シンポジウム報告集

於 名古屋大学

2023年8月29日～9月1日

第68回 代数学シンポジウム

本書は2023年に名古屋大学で開催された第68回代数学シンポジウムの報告集です。

日程：2023年8月29日（火）～9月1日（金）

会場：名古屋大学大学院多元数理科学研究科 509 講義室

開催方法：現地開催（オンライン配信なし）

主催：日本数学会代数学分科会

プログラム責任者：

[代数幾何] 大川 新之介（大阪大学）、山木 壱彦（筑波大学）

[環論] 相原 琢磨（東京学芸大学）、東谷 章弘（大阪大学）

[群論・表現論] 花木 章秀（信州大学）、桑原 俊郎（筑波大学）

[数論] 加塩 朋和（東京理科大学）、山崎 義徳（愛媛大学）

会場責任者：石井 亮（名古屋大学）

シンポジウム責任者：高橋 篤史（大阪大学、連絡責任評議員）

プログラム

8月29日（火）

9:45–10:45 大内 元気（名古屋大学）

K3曲面の導来圏と有限群

11:00–12:00 榎園 誠（立教大学）

Slope inequality of fibered surfaces and moduli of curves

13:30–14:30 松澤 陽介（大阪公立大学）

高次元数論力学系の諸問題

14:45–15:45 木村 雄太（大阪公立大学）

ネーター代数の加群圏の部分圏の分類

16:00–17:00 加瀬 遼一（岡山理科大学）

g -扇と g -多面体

8月30日（水）

*9:45–10:45 高橋 宣能（広島大学）

対数的曲面上の曲線の数え上げ

*11:00–12:00 森脇 淳（中部大学）

アデリック曲線上のアラケロフ幾何

*13:30–14:30 中岡 宏行（名古屋大学）

Extriangulated category について

*14:45–15:45 松岡 直之（明治大学）

1次元解析を基盤とした局所環論

16:00–17:00 大杉 英史（関西学院大学）

Specht イデアルのグレブナー基底

8月31日(木)

*9:45–10:45 古庄 英和 (名古屋大学)

正標数多重ポリログの解析接続

*11:00–12:00 水澤 靖 (立教大学)

代数体の擬馴分岐副 p ガロア拡大について

*13:30–14:30 池田 岳 (早稲田大学)

アフィン・グラスマン多様体の同変シューベルト・カルキュラス

*14:45–15:45 徳重 典英 (琉球大学)

交差族の組合せ論とその周辺

16:00–17:00 小境 雄太 (東京理科大学)

群環上の台 τ 傾加群

9月1日(金)

9:45–10:45 藤田 遼 (RIMS)

量子 Grothendieck 環について

11:00–12:00 有家 雄介 (鹿児島大学)

頂点代数とモジュラー微分方程式

13:30–14:30 齋藤 耕太 (筑波大学)

Linear Diophantine equations on Piatetski-Shapiro sequences

14:45–15:45 宮崎 直 (北里大学)

一般線型群上のアルキメデス Whittaker 関数と局所ゼータ積分

16:00–17:00 星 明考 (新潟大学)

Norm one tori and Hasse norm principle

「*」の付いた講演は、専門分野以外の方も対象とした、サーベイなどを含む講演です。

目次

大内 元気 (名古屋大学)	
K3 曲面の導来圏と有限群	6
榎園 誠 (立教大学)	
Slope inequality of fibered surfaces and moduli of curves	20
松澤 陽介 (大阪公立大学)	
高次元数論力学系の諸問題	37
木村 雄太 (大阪公立大学)	
ネーター代数の加群圏の部分圏の分類	50
加瀬 遼一 (岡山理科大学)	
g -扇と g -多面体	61
高橋 宣能 (広島大学)	
対数的曲面上の曲線の数え上げ	79
森脇 淳 (中部大学)	
アデリック曲線上のアラケロフ幾何	94
中岡 宏行 (名古屋大学)	
Extriangulated category について	107
松岡 直之 (明治大学)	
1次元解析を基盤とした局所環論	116
大杉 英史 (関西学院大学)	
Specht イデアルのグレブナー基底	132
古庄 英和 (名古屋大学)	
正標数多重ポリログの解析接続	140
水澤 靖 (立教大学)	
代数体の擬馴分岐副 p ガロア拡大について	146
池田 岳 (早稲田大学)	
アフィン・グラスマン多様体の同変シューベルト・カルキュラス	157
徳重 典英 (琉球大学)	
交差族の組合せ論とその周辺	165
小境 雄太 (東京理科大学)	
群環上の台 τ 傾加群	185
藤田 遼 (RIMS)	
量子 Grothendieck 環について	196
有家 雄介 (鹿児島大学)	
頂点代数とモジュラー微分方程式	209
齋藤 耕太 (筑波大学)	
Linear Diophantine equations on Piatetski-Shapiro sequences	220
宮崎 直 (北里大学)	
一般線型群上のアルキメデス Whittaker 関数と局所ゼータ積分	227
星 明考 (新潟大学)	
Norm one tori and Hasse norm principle	247

K3 曲面の導来圏と有限群

大内元気 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

1 はじめに

講演では、4次元3次超曲面の自己同型群と K3 曲面の導来圏の自己同値群の関係に関する自身の結果 [O] の紹介をゴールに設定して話をした。この報告書では、K3 曲面の導来圏の自己同値群の有限群論的側面をコンウェイ群 C_{60} やリーチ格子 L を用いて調べた [Huy] について、その元ネタとなった [GHV] の結果と共に解説したい。[GHV] や [Huy] の結果を紹介する前に、K3 曲面の自己同型群の有限群論的側面をマシュー群 M_{23} やニーマイヤー格子 N を使って研究した [Muk] や [K] の議論や結果を [GHV] や [Huy] の形式を真似て、リーチ格子の言葉で改めて述べ直す。特に、[LZ, Theorem 4.5] に触発されて、[Muk] や [GHV] の内容をリーチ対の言葉を使って述べ直すことにする。このようなことをして意味があるかどうか意見が分かれるかもしれないが、筆者自身の整理と講演の補足も兼ねてこの場を借りて、解説させていただく。[GHV] や [Huy] の内容に親しみを持つために、この解説が少しでも参考になれば幸いである。

K3 曲面の対称性と散在型の有限群の関係は、代数幾何学、群論、表現論、数論、数理物理学など様々な観点から研究されている。向井 [Muk] は、K3 曲面のシンプレクティック自己同型からなる有限群とマシュー群 M_{23} の関係を発見した。一方、超弦理論の観点から、江口、大栗、立川 [EOT] は、K3 曲面の楕円種数とマシュー群 M_{24} の関係を発見した。この関係は、マシュームーンシャインと呼ばれる。マシュームーンシャインの発見は、代数幾何学、群論、表現論、数論、数理物理学など様々な観点から K3 曲面の対称性が活発に研究されるようになるきっかけとなった。マシュームーンシャインの幾何学的な解釈を巡って、K3 曲面の対称性を通じて M_{23} より大きい M_{24} にどのようにして到達すれば良いか様々な検討がなされた。超弦理論の観点から、Gaberdiel, Hohenegger, Volpato [GHV] は、K3 曲面とターゲット空間とするシグマ模型の自己同型群について研究し、シグマ模型の自己同型群に関して向井の定理 [Muk, Theorem 0.3] の類似を得た。その結果として出現した有

限群は, マシュー群 M_{24} よりも大きい散在型の有限群であるコンウェイ群 C_{00} であった. M_{24} が現れなかったという意味では残念であったが, K3 曲面の対称性とコンウェイ群 C_{00} の関係という新しいトピックが発見された. Huybrechts[Huy] は, K3 曲面の導来圏とその自己同値群を用いて, [GHV] の結果を代数幾何学の言葉で解釈することに成功した. また, Mongardi [Mon] は, K3 曲面上の n 点のヒルベルトスキームと変形同値な超ケーラー多様体のシンプレクティック自己同型からなる有限群とコンウェイ群 C_{00} の関係について部分的な結果を得た.

[GHV] を受けて, [CFHP, B.1] では, 様々な 4 次元 3 次超曲面の定義多項式 W を超ポテンシャルとする LG 模型について論じている. 超弦理論の観点から, [GHV] に現れるような群の研究が 4 次元 3 次超曲面のシンプレクティック自己同型群の研究と関連づけられている. 代数幾何学の文脈では, Laza と Zheng [LZ, Theorem 4.5] は, 4 次元 3 次超曲面のシンプレクティック自己同型群について, コンウェイ群 C_{00} を用いた向井の定理 [Muk, Theorem 0.3] の類似を示した. 筆者 [O] は, 4 次元 3 次超曲面のシンプレクティック自己同型群を導来圏を用いた [Huy] の様式で特徴づけ, 4 次元 3 次超曲面の自己同型群と K3 曲面の導来圏の自己同値群の関係について論じた.

本文の概要は, 以下の通りである. 第 2 章では, 格子に関する様々な用語についてまとめる. 第 3 章では, [Mon] において導入されたリーチ対という概念について紹介し, リーチ対を用いて [Muk] の結果と [GHV] の結果 (の格子理論的側面) について説明する. 第 4 章では, K3 曲面の導来圏とその自己同値群, 安定性条件を用いて, Huybrechts[Huy] の結果を定式化し, 第 3 章における [GHV] の結果との関係について説明する.

謝辞

第 68 回代数学シンポジウムにおいて, 筆者に講演の機会を与えてくださった世話人の皆様に感謝申し上げます. 特に, シンポジウム責任者の高橋篤史先生, 代数幾何プログラム責任者の大川新之助先生, 山木壱彦先生に心より感謝いたします.

2 格子に関する用語のまとめ

第 2 章では, 格子について後で必要となる事柄についてまとめる. 格子や K3 曲面全般に関する参考文献として, [K1], [Huy1] を挙げておく.

2.1 一般論

有限生成自由アーベル群 L と非退化対称双線形形式

$$(-, -) : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$$

の組 $(L, (-, -))$ を**格子**という. 簡単のため, 単に L を格子ということもある. 格子 L と L の部分群 M に対して, L が $(-, -)$ の制限によって格子になっているとき, M を L の部分格子という. 格子 L と L の部分格子 M に対して,

$$M^\perp := \{v \in L \mid \forall m \in M, (v, m) = 0\}$$

とおくと, M^\perp は L の部分格子である. 格子 L_1, L_2 に対して, L_1 と L_2 の直交直和を $L_1 \oplus L_2$ と書く.

格子 L_1 から格子 L_2 への双線形形式を保つアーベル群の同型写像を L_1 から L_2 への (格子としての) **同型写像**という. 格子 L に対して, L の自己同型からなる群を $O(L)$ と書き, L の**直交群**という.

格子 L が**偶格子**であるとは, 任意の $v \in L$ に対して, $v^2 = (v, v)$ が偶数であることをいう. 格子 L が**正定値** (resp. **負定値**) であるとは, 任意の 0 でない $v \in L$ に対して, $v^2 > 0$ (resp. $v^2 < 0$) が成り立つことをいう. 格子 L が正定値でも負定値でもないとき, L は**不定値**であるという. 格子 L に対して, 付随する双線形形式の符号を L の**符号**という.

格子 L に対して,

$$L \rightarrow L^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z}), v \mapsto (v, -)$$

は単射であり, 有限アーベル群 $A_L := L^*/L$ を L の判別式群という. 格子 L が**ユニモジュラー**であるとは, $A_L = 0$ が成り立つことをいう. 格子 L がユニモジュラーであることと, 付随する双線形形式のグラム行列の行列式が ± 1 であることは同値である. 格子 L に対して, $l(L)$ を判別式群 A_L を生成するのに必要な元の最小個数とする. 定義より, $l(L) \leq \text{rk}(L)$ が成り立つことに注意する.

格子 L に対して, $v \in L$ が (-2) 類であるとは, $v^2 = -2$ が成り立つことをいう.

Definition 2.1. L を格子とし, G を $O(L)$ の部分群とする. このとき,

$$L^G := \{v \in L \mid \forall g \in G, g(v) = v\},$$

$$L_G := (L^G)^\perp \subset L$$

とおく.

2.2 特別な格子

K3 曲面と関係が深い特別な格子についてまとめる.

Example 2.2. U を e と f を基底とする自由アーベル群とし, $(-, -)$ を

$$(e, e) = (f, f) = 0, (e, f) = 1$$

によって定義される U 上の非退化対称双線形形式とする. このとき, 格子 U は符号 $(1, 1)$ の偶ユニモジュラー格子であり, **双曲平面格子**と呼ばれる.

Example 2.3. E_8 を e_1, e_2, \dots, e_8 を基底とする自由アーベル群とし, グラム行列が

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

になるように E_8 に格子の構造を入れる. このとき, E_8 はランク 8 で負定値の偶ユニモジュラー格子である. 格子 E_8 は, E_8 型のディンキン図形のルート格子に他ならない.

不定値の偶ユニモジュラー格子は, 符号により決定されることが知られている.

Theorem 2.4 ([K1, 定理 1.27]). 不定値の偶ユニモジュラー格子 L_1 と L_2 の符号が等しいとき, L_1 と L_2 は同型である.

負定値 (正定値) の偶ユニモジュラー格子の同型類は, 符号だけでは決定されない. ランク 24 の負定値偶ユニモジュラー格子 \mathbb{L} で, $v^2 = -2$ となる元 $v \in \mathbb{L}$ を持たないものは同型を除いて一意的存在し, \mathbb{L} は**リーチ格子**と呼ばれる. 他には, ランク 24 の負定値偶ユニモジュラー格子 N で $v^2 = -2$ となる元 $v \in N$ をもつものが同型を除いて 23 個存在し, これらは**ニーマイヤー格子**と呼ばれる.

リーチ格子 L の直交群は, **コンウェイ群** C_{00} と呼ばれる. コンウェイ群 C_{00} は, 位数 $2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$ の有限群である. C_{00} をその中心で割った群 $C_{01} := C_{00}/\{\pm \text{id}_{\mathbb{L}}\}$ は単純群であり, 散在型有限単純群の一つである.

2.3 K3 曲面のコホモロジー格子

K3 曲面のコホモロジー群を用いて定まる格子についてまとめる.

Definition 2.5. 滑らかで射影的な代数曲面 X は, $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ かつ $q(X) = 0$ を満たすとき, **K3 曲面** と呼ばれる. ここで, $q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ は X の不正則数である.

Theorem 2.6 ([K1, 定理 4.5]). X を K3 曲面とする. X の 2 次のコホモロジー群 $H^2(X, \mathbb{Z})$ は, 交点数により与えられる双線形形式によって格子になる. 格子 $H^2(X, \mathbb{Z})$ は, 符号 $(3, 19)$ の偶ユニモジュラー格子であり

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq U^3 \oplus E_8^2$$

が成り立つ.

次の向井格子は, K3 曲面の導来圏の研究や K3 曲面上の接続層のモジュライ空間の研究において重要である. [K1, 補題 4.3] にあるように, K3 曲面の奇数次のベッチ数は 0 である.

Definition 2.7. X を K3 曲面とする. X のコホモロジー群

$$H^*(X, \mathbb{Z}) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$$

について, 次のようにして格子の構造を定める.

$(r_1, c_1, m_1), (r_2, c_2, m_2) \in H^*(X, \mathbb{Z})$ に対して,

$$((r_1, c_1, m_1), (r_2, c_2, m_2)) := c_1 c_2 - r_1 m_2 - r_2 m_1$$

とおく. このとき,

$$H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^4(X, \mathbb{Z}) \simeq U$$

であり, 定理 2.6 によって,

$$H^*(X, \mathbb{Z}) \simeq U^4 \oplus E_8^2$$

が成り立つ. 特に, $H^*(X, \mathbb{Z})$ は符号 $(4, 20)$ の偶ユニモジュラー格子である. 格子 $H^*(X, \mathbb{Z})$ を X の**向井格子**, $(-, -)$ を**向井ペアリング**という.

3 リーチ対と K3 曲面

第 3 章では, [Mon] において導入されたリーチ対についてまとめる. その後にリーチ対の言葉で, [Muk] や [GHV] の主結果を述べる.

3.1 リーチ対

K3 曲面の対称性を測る群は, 2.3 節で導入した 2 種類の格子と関係が深い. コンウェイ群 Co_0 やマシュー群 M_{23} もリーチ格子 \mathbb{L} と密接に関係している. 群だけを扱うのではなく, 群がある程度きれいに作用している格子も含めて扱うことにする.

Definition 3.1 ([Mon, Definition 2.5.1]). 群 G と偶格子 S の組 (G, S) がリーチ対であるとは, 次の条件を満たすことをいう.

- (1) $G \subset O(S)$ が成り立つ.
- (2) S は負定値である.
- (3) S は (-2) 類を含まない.
- (4) S は, 0 以外の G 不変な元を含まない.
- (5) S は, 判別式群 A_S に自明に作用する.

(G, S) がリーチ対であるとき, Definition 3.1 における条件 (1), (2) から G は有限群となる.

名前の通り, コンウェイ群とリーチ格子はリーチ対の典型的な例を与える.

Example 3.2. (Co_0, \mathbb{L}) はリーチ対である.

Definition 3.3 ([LZ, Definition 3.7]). (G, S) をリーチ対とする. リーチ対 (G', S') が (G, S) の部分リーチ対であるとは, G' は G の部分群であって, $S^{G'} = S'$ が成り立つことをいう. リーチ対 (G, S) の部分リーチ対 $(G_1, S_1), (G_2, S_2)$ が共役であるとは, ある $g \in G$ が存在して, $gG_1g^{-1} = G_2$ と $gS_1 = S_2$ が成り立つことをいう.

コンウェイ群 Co_0 の部分群は, リーチ対を定める.

Example 3.4. G をコンウェイ群 Co_0 の部分群とする. このとき, (G, \mathbb{L}_G) は, (Co_0, \mathbb{L}) の部分リーチ対である. ここでは, Definition 2.1 で導入した記法を用いている.

リーチ対 $(G_1, S_1), (G_2, S_2)$ が同型であるとは, 群の同型 $\theta : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ と格子の同型 $\varphi : S_1 \xrightarrow{\sim} S_2$ であって, 任意の $g_1 \in G_1$ と $v_1 \in S_1$ に対して,

$$\varphi(g_1 v_1) = \theta(g_1) \varphi(v_1)$$

が成り立つことをいう.

Example 3.4 におけるリーチ対は, 次のように特徴づけられる.

Theorem 3.5 ([LZ, Proposition 3.4]). (G, S) をリーチ対とする. このとき, 次は同値である.

- (1) (G, S) は, $(\text{Co}_0, \mathbb{L})$ の部分リーチ対と同型である.
- (2) $\text{rk}(S) + l(S) \leq 24$ が成り立つ.

Höhn と Mason [HM] は, $(\text{Co}_0, \mathbb{L})$ の (飽和的な) 部分リーチ対の共役類を分類し, それらが全部で 290 個あることを示した. [HM, Table 1] における no. 227 に対応するリーチ対の共役類の代表元を一つ固定し, $(M_{23}, \mathbb{L}_{M_{23}})$ とかく. リーチ対 $(M_{23}, \mathbb{L}_{M_{23}})$ についても, Theorem 3.5 の類似が成り立つ.

Theorem 3.6 ([HM, Section 1]). (G, S) をリーチ対とする. このとき, 次は同値である.

- (1) (G, S) は, $(M_{23}, \mathbb{L}_{M_{23}})$ の部分リーチ対と同型である.
- (2) $\text{rk}(S) + l(S) \leq 22$ が成り立つ.

金銅 [K] は, ニーマイヤー格子を用いた [Muk, Theorem 0.3] の別証明を与えた. 次の節では, Theorem 3.5 と Theorem 3.6 を認めて, [K] のアイデアに基づいて [Muk, Theorem 0.3] をリーチ対の言葉で述べ直してみる.

3.2 偏極 K3 曲面とリーチ対

[Muk, Theorem 0.3] では, 実質的に偏極 K3 曲面のシンプレクティック自己同型群について調べている. 偏極 K3 曲面のシンプレクティック自己同型群を次のように定める.

Definition 3.7. (X, H) を偏極 K3 曲面とする. このとき, (X, H) のシンプレクティック自己同型群 $\text{Aut}_s(X, H)$ を

$$\text{Aut}_s(X, H) := \{f \in \text{Aut}(X) \mid f^*H = H, f^*\eta_X = \eta_X\}$$

と定める. ここで, η_X は X 上の正則シンプレクティック形式を一つ選んだものであり, $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\eta_X$ である.

以下では, 記号を簡単にするために, $G_{X,H} := \text{Aut}_s(X, H)$ とかくこともある.

以下の Proposition 3.12 のようにして, 偏極 K3 曲面からリーチ対を構成することができる. Proposition 3.12 を述べる前に, 次の節の記号と統一するために, いくつか記号を導入しておく.

Definition 3.8. X を K3 曲面とする. このとき,

$$P_X := \langle \operatorname{Re}(\eta_X), \operatorname{Im}(\eta_X) \rangle_{\mathbb{R}} \subset H^2(X, \mathbb{R})$$

とおく. [K1, 定理 4.5 の直後] より, P_X は $H^2(X, \mathbb{R})$ の 2 次元正定値部分ベクトル空間である. さらに, X 上の豊富因子 H に対して,

$$\Pi_{X,H} := P_X \oplus \mathbb{R} \cdot H \subset H^2(X, \mathbb{R})$$

とおくと, $\Pi_{X,H}$ は $H^2(X, \mathbb{R})$ の 3 次元正定値部分ベクトル空間である.

[K1, 補題 4.16] より X のネロン・セベリ群 $\operatorname{NS}(X)$ 内の (-2) 類 δ に対して, δ または, $-\delta$ は有効因子である. したがって, X 上の豊富因子 H に対して, H は $\operatorname{NS}(X)$ 内の (-2) 類と直交しない. すなわち, 次が成立する.

Remark 3.9. (X, H) を偏極 K3 曲面とする. このとき, (-2) 類 $v \in H^2(X, \mathbb{Z})$ であって, 任意の $w \in \Pi_{X,H}$ に対して $\langle v, w \rangle = 0$ となるようなは存在しない.

偏極 K3 曲面 (X, H) に対して, $\Pi_{X,H}$ を用いて, 次のように直交群 $O(H^2(X, \mathbb{Z}))$ の部分群を定める.

Definition 3.10. 組 $(H^2(X, \mathbb{Z}), \Pi_{X,H})$ の自己同型群 $\operatorname{Aut}(H^2(X, \mathbb{Z}), \Pi_{X,H})$ を

$$\operatorname{Aut}(H^2(X, \mathbb{Z}), \Pi_{X,H}) := \{ \varphi \in O(H^2(X, \mathbb{R})) \mid \varphi_{\mathbb{R}}|_{\Pi_{X,H}} = \operatorname{id}_{\Pi_{X,H}} \}$$

で定める. ここで, $\varphi \in O(H^2(X, \mathbb{Z}))$ に対して, $\varphi_{\mathbb{R}} := \varphi \otimes \operatorname{id}_{\mathbb{R}}$ である.

トレリの定理 [K1, 定理 6.1] によって次が成り立つ.

Proposition 3.11. 引き戻し $(-)^*$ は, 同型写像

$$(-)^* : \operatorname{Aut}_{\mathfrak{s}}(X, H) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut}(H^2(X, \mathbb{Z}), \Pi_{X,H})$$

を定める.

[K, Section 2] のような格子を考えることで, 偏極 K3 曲面からリーチ対を構成することができる.

Proposition 3.12 ([K, Proposition 2]). (X, H) を偏極 K3 曲面とする.

このとき, $(G_{X,H}, H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}})$ は, $(M_{23}, \mathbb{L}_{M_{23}})$ の部分リーチ対 (G, \mathbb{L}_G) であって,

$$\operatorname{rk}(\mathbb{L}^G) \geq 5$$

を満たすものと同型である.

Proof. Proposition 3.11 より, $G_{X,H} \subset O(H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}})$ が成り立つ. $\Pi_{X,H}$ は $H^2(X, \mathbb{R})$ の 3次元の正定値部分ベクトル空間で, $G_{X,H}$ は $\Pi_{X,H}$ に自明に作用するので $H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}$ は負定値である. $H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}$ は, $\text{NS}(X)$ における H の直交補空間に含まれることに注意する. Remark 3.9 より, $H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}$ は (-2) 類を含まない. また, $H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}$ の定義より, $H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}$ は 0 以外の $G_{X,H}$ 不変な元を含まない. [Huy1, Chapter 14, Lemma 2.5] より, $G_{X,H}$ は $H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}$ の判別式群に自明に作用する. したがって, $(G_{X,H}, H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}})$ はリーチ対である.

さらに [Huy1, Chapter 14, Proposition 0.2] あるいは [K1, 定理 1.32] より

$$\begin{aligned} \text{rk}(H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}) + l(H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}) &= \text{rk}(H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}) + l(H^2(X, \mathbb{Z})^{G_{X,H}}) \\ &\leq \text{rk}(H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}}) + \text{rk}(H^2(X, \mathbb{Z})^{G_{X,H}}) \\ &= 22 \end{aligned}$$

が成り立つ. Theorem 3.6 よりリーチ対 $(G_{X,H}, H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}})$ は, $(M_{23}, \mathbb{L}_{M_{23}})$ の部分リーチ対 $(G_{X,H}, \mathbb{L}_{G_{X,H}})$ と同型である. また, $\text{rk}(H^2(X, \mathbb{Z})^{G_{X,H}}) \geq 3$ より $\text{rk}(\mathbb{L}^{G_{X,H}}) \geq 5$ が成り立つ. ■

[Muk, Theorem 0.3] は, リーチ対の言葉で次のように述べ直すことができる.

Theorem 3.13 ([Muk, Theorem 0.3]). (G, S) をリーチ対とする. このとき, 次は同値である.

- (1) ある偏極 K3 曲面 (X, H) が存在して, (G, S) は $(G_{X,H}, H^2(X, \mathbb{Z})_{G_{X,H}})$ の部分リーチ対と同型である.
- (2) (G, S) は, $(M_{23}, \mathbb{L}_{M_{23}})$ の部分リーチ対 (G, \mathbb{L}_G) であって, $\text{rk}(\mathbb{L}^G) \geq 5$ を満たすものと同型である.

3.3 K3 シグマ模型の自己同型群

Λ を符号 $(4, 20)$ の偶ユニモジュラー格子とし, $\Lambda_{\mathbb{R}} := \Lambda \otimes \mathbb{R}$ とする. Theorem 2.4 より, $\Lambda \simeq U^4 \oplus E_8^2$ である. Definition 3.8 や Definition 3.10 の類似を Λ に対して考える.

Definition 3.14. $\Lambda_{\mathbb{R}}$ の 4次元正定値部分ベクトル空間 Π であって, (-2) 類 $v \in \Lambda$ であって, 任意の $w \in \Pi$ に対して $(v, w) = 0$ となるようなものが存在しないと仮定する. このと

き, 組 (Λ, Π) を **K3 シグマ模型** と呼ぶ. K3 シグマ模型 (Λ, Π) に対して, (Λ, Π) の自己同型群を

$$\text{Aut}(\Lambda, \Pi) := \{\varphi \in O(\Lambda) \mid \varphi_{\mathbb{R}}|_{\Pi} = \text{id}_{\Pi}\}$$

で定義する. ここで, $\varphi \in O(\Lambda)$ に対して, $\varphi_{\mathbb{R}} := \varphi \otimes \text{id}_{\mathbb{R}}$ である.

以下では, 記号を簡単にするために, $G_{\Lambda, \Pi} := \text{Aut}(\Lambda, \Pi)$ とかくこともある.

次は, Proposition 3.12 の K3 シグマ模型に関する類似である.

Proposition 3.15. $(G_{\Lambda, \Pi}, \Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}})$ は, $(C_{0,0}, \mathbb{L})$ の部分リーチ対 (G, \mathbb{L}_G) であって,

$$\text{rk}(\mathbb{L}^G) \geq 4$$

を満たすものと同型である.

Proof. 証明は, Proposition 3.12 と同様である.

$\text{Aut}(\Lambda, \Pi)$ の定義より, $\text{Aut}(\Lambda, \Pi) \subset \Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}$ が成り立つ. $\Pi_{\Lambda, \Pi}$ は $\Lambda_{\mathbb{R}}$ の 4 次元の正定値部分ベクトル空間で, $G_{\Lambda, \Pi}$ は $\Pi_{\Lambda, \Pi}$ に自明に作用するので $\Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}$ は負定値である. Definition 3.14 より, $\Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}$ は (-2) 類を含まない. また, $\Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}$ の定義より, $\Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}$ は 0 以外の $G_{\Lambda, \Pi}$ 不変な元を含まない. したがって, $(G_{\Lambda, \Pi}, \Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}})$ はリーチ対である.

さらに [Huy1, Chapter 14, Proposition 0.2] あるいは [K1, 定理 1.32] より

$$\begin{aligned} \text{rk}(\Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}) + l(\Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}) &= \text{rk}(\Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}) + l(\Lambda^{G_{\Lambda, \Pi}}) \\ &\leq \text{rk}(\Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}}) + \text{rk}(\Lambda^{G_{\Lambda, \Pi}}) \\ &= 24 \end{aligned}$$

が成り立つ. Theorem 3.5 よりリーチ対 $(G_{\Lambda, \Pi}, \Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}})$ は, $(C_{0,0}, \mathbb{L})$ の部分リーチ対 $(G_{\Lambda, \Pi}, \mathbb{L}_{G_{\Lambda, \Pi}})$ と同型である. また, $\text{rk}(\Lambda^{G_{\Lambda, \Pi}}) \geq 4$ より $\text{rk}(\mathbb{L}^{G_{\Lambda, \Pi}}) \geq 4$ が成り立つ. ■

Gaberdiel, Hohenegger, Volpato [GHV] は, 向井の定理の類似として次を証明した. ここでは, [Huy, Proposition 2.2] をリーチ対を用いて述べ直した主張を述べる.

Theorem 3.16 ([GHV]). (G, S) をリーチ対とする. このとき, 次は同値である.

- (1) ある K3 シグマ模型 (Λ, Π) が存在して, (G, S) は $(G_{\Lambda, \Pi}, \Lambda_{G_{\Lambda, \Pi}})$ の部分リーチ対と同型である.
- (2) (G, S) は, $(C_{0,0}, \mathbb{L})$ の部分リーチ対 (G, \mathbb{L}_G) であって, $\text{rk}(\mathbb{L}^G) \geq 4$ を満たすものと同型である.

4 K3 曲面の導来圏と安定性条件

K3 曲面の導来圏, その自己同値群, 安定性条件について簡単に説明し, [Huy] に従って, K3 曲面の導来圏の自己同値群と K3 シグマ模型の自己同型群の関係について述べる. 最後に, [Huy, Theorem 0.1] の主張を述べる.

4.1 K3 曲面の導来圏とその自己同値

X を K3 曲面とする. X 上の接続層の有界導来圏

$$D^b(X) := D^b(\text{Coh}(X))$$

を考える. 簡単のため, $D^b(X)$ を X の導来圏と呼ぶ. X の導来圏 $D^b(X)$ の自己同値群を $\text{Aut}(D^b(X))$ と書く. X の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ が格子 $H^2(X, \mathbb{Z})$ に作用していた. 一方, [Huy1, Chapter 16, Section 3] より, 自己同値群 $\text{Aut}(D^b(X))$ は X の向井格子 $H^*(X, \mathbb{Z})$ に作用する. この作用を

$$(-)^H : \text{Aut}(D^b(X)) \rightarrow O(H^*(X, \mathbb{Z})), \Phi \mapsto \Phi^H$$

と書く.

向井格子 $H^*(X, \mathbb{Z})$ の部分格子 $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z})$ を

$$H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z}) := H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \text{NS}(X) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$$

で定義する. 格子 $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z})$ を X の代数的向井格子と呼ぶ. X の代数的向井格子 $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z})$ は, 符号 $(2, \rho(X))$ の偶格子である. ここで, $\rho(X)$ は X のピカール数である.

[Huy1, Chapter 16, Proposition 3.2] より, 自己同値 $\Phi \in \text{Aut}(D^b(X))$ に対して, Φ^H は $\Phi^H : H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z})$ を誘導する.

4.2 安定性条件

X を K3 曲面とする. Bridgeland により導入された $D^b(X)$ 上の安定性条件のなす空間 $\text{Stab}(D^b(X))$ を考える. 正確な定義や性質は, [Bri07] や [Bri08] を参照して欲しい.

$\text{Stab}(D^b(X))$ の元は, $D^b(X)$ 上の安定性条件と呼ばれる群準同型 $Z : H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ と $D^b(X)$ 上の有界 t -構造の核 \mathcal{A} で適切な条件を満たすものの組 $\sigma = (Z, \mathcal{A})$ である. 自己同

値 $\Phi \in \text{Aut}(D^b(X))$ と安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{A}) \in \text{Stab}(D^b(X))$ に対して,

$$\Phi\sigma := (Z \circ (\Phi^H)^{-1}, \Phi(\mathcal{A}))$$

と定めることで, 自己同値群 $\text{Aut}(D^b(X))$ は, $\text{Stab}(D^b(X))$ に作用する.

$B, \omega \in \text{NS}(X) \otimes \mathbb{R}$ で ω が豊富であるものを考える. コホモロジー類

$$e^{B+i\omega} = \left(1, B + i\omega, \frac{1}{2}(B^2 - \omega^2) + iB\omega \right) \in H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$$

を考える. $v \in H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z})$ に対して,

$$Z_{B,\omega}(v) := (e^{B+i\omega}, v) \in \mathbb{C}$$

と定めることで, 群準同型 $Z_{B,\omega} : H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ を定める. $e^{B+i\omega}$ が $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z})$ 内の (-2) 類と直交しないと仮定する. Bridgeland は [Bri08, Section 6] において, $D^b(X)$ 上の安定性条件 $\sigma_{B,\omega} = (Z_{B,\omega}, \mathcal{A}_{B,\omega})$ を $D^b(X)$ 上の有界 t-構造の核 $\mathcal{A}_{B,\omega}$ を具体的に与えることで構成した. $B + i\omega$ から定まる安定性条件 $\sigma_{B,\omega}$ は, 一つの連結成分 $\text{Stab}^*(X)$ に含まれている.

代数的向井格子 $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z})$ 上で向井ペアリング $(-, -)$ は非退化なので, 安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{A}) \in \text{Stab}^*(X)$ に対して,

$$Z(-) = (\Omega, -)$$

となるような $\Omega \in H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ が一意的に存在する. このとき, $\pi(\sigma) := \Omega$ とおく. [Bri08, Theorem 1.1] より, 次が成立する.

Proposition 4.1. $\sigma \in \text{Stab}^*(X)$ を安定性条件とする. 任意の (-2) 類 $\delta \in H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z})$ に対して,

$$(\pi(\sigma), \delta) \neq 0$$

が成り立つ.

4.3 K3 曲面の導来圏の自己同値群

X を K3 曲面とする. Definition 3.7 の類似として, 次の群を考える.

Definition 4.2 ([Huy, Definition 1.3]). 安定性条件 $\sigma \in \text{Stab}^*(X)$ に対して,

$$\text{Aut}_s(D^b(X), \sigma) := \{\Phi \in \text{Aut}(D^b(X)) \mid \Phi\sigma = \sigma, \Phi^H\eta_X = \eta_X\}$$

と定める.

以下では, 記号を簡単にするために, $G_{X,\sigma} := \text{Aut}_s(D^b(X), \sigma)$ とかくこともある.

Definition 3.8 の類似として, 次を考える.

Definition 4.3. 安定性条件 $\sigma \in \text{Stab}^*(X)$ に対して,

$$P_\sigma := \langle \text{Re}(\pi(\sigma)), \text{Im}(\pi(\sigma)) \rangle_{\mathbb{R}} \subset H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$$

と定める.

Proposition 4.1 と [Huy, Proposition 1.4] を合わせて次を得る.

Proposition 4.4 ([Huy, Proposition 1.4]). X を K3 曲面, $\sigma \in \text{Stab}^*(X)$ を安定性条件とする. このとき,

$$\Pi_{X,\sigma} := P_X \oplus P_\sigma \subset H^*(X, \mathbb{R})$$

とおくと, $(H^*(X, \mathbb{Z}), \Pi_{X,\sigma})$ は K3 シグマ模型である. さらに,

$$(-)^H : \text{Aut}_s(D^b(X), \sigma) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(H^*(X, \mathbb{Z}), \Pi_{X,\sigma})$$

は同型写像である.

Huybrechts [Huy] は, Theorem 3.16 を K3 曲面の導来圏の言葉で次のように言い換えた.

Theorem 4.5 ([Huy, Theorem 0.1]). (G, S) をリーチ対とする. このとき, 次は同値である.

- (1) ある K3 曲面 X と安定性条件 $\sigma \in \text{Stab}^*(X)$ の組 (X, σ) が存在して, (G, S) はリーチ対 $(G_{X,\sigma}, H^*(X, \mathbb{Z})_{G_{X,\sigma}})$ の部分リーチ対と同型である.
- (2) (G, S) は, $(\text{Co}_0, \mathbb{L})$ の部分リーチ対 (G, \mathbb{L}_G) であって, $\text{rk}(\mathbb{L}^G) \geq 4$ を満たすものと同型である.

参考文献

- [Bri07] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math **166** (2007), 317-345.
- [Bri08] T. Bridgeland, *Stability conditions on K3 surfaces*, Duke Math. J. **141** (2), 241-291, (2008).

- [CFHP] M. C. N. Cheng, F. Ferrari, S. M. Harrison, N. M. Paquette, *Landau-Ginzburg orbifolds and symmetries of K3 CFTs*, J. High Energy Phys. **1701** (2017) 046.
- [EOT] T. Eguchi, H. Ooguri and Y. Tachikawa, *Note on the K3 surfaces and the Mathieu group M_{24}* , Exper. Math. **20** (2011) 91-96.
- [GHV] M. R. Gaberdiel, S. Hohenegger and R. Volpato, *Symmetries of K3 σ -models*, Commun. Num. Theor. Phys. **6** (2012) 1.
- [HM] G. Höhn and G. Mason, *The 290 fixed-point sublattices of the Leech lattice*, Journal of Algebra, Volume **448**, (2016), pp 618-637.
- [Huy] D. Huybrechts, *On derived categories of K3 surfaces, symplectic automorphism groups and the Conway group*, Adv. Stud. Pure Math. Development of Moduli Theory, Tokyo: Mathematical society of Japan (2016), 387-405.
- [Huy1] D. Huybrechts, *Lectures on K3 Surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press (2016), doi:10.1017/CBO9781316594193.
- [K] S. Kondō, *Niemeyer lattices, Mathieu groups, and finite groups of symplectic automorphisms of K3 surfaces (with an appendix by S. Mukai)*, Duke Math. J., **92** (1998), 593–603.
- [K1] 金銅誠之, K3 曲面, 共立講座 数学の輝き 5, 共立出版 (2015)
- [LZ] R. Laza, Z. Zheng, *Automorphisms and periods of cubic fourfolds*, Math. Z. **300**, (2022), 1455–1507 . DOI: <https://doi.org/10.1007/s00209-021-02810-x>
- [Mon] G. Mongardi, *Automorphisms of hyperKähler manifolds*, Ph.D thesis, Università degli Studi di Roma Tre (2013).
- [Muk] S. Mukai, *Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group*, Invent. Math. 94 (1988), no. 1, 183-221.
- [O] G. Ouchi, *Automorphism groups of cubic fourfolds and K3 categories*, Algebraic Geometry **8** (2) (2021), 171–195.

Slope inequality of fibered surfaces and moduli of curves

立教大学理学部数学科 榎園 誠

概要

本稿は「第68回代数学シンポジウム」での発表と論文 [Eno] の内容に基づき、ファイバー曲面のスロープ不等式、ファイバー芽に関するモース化予想、曲線のモジュライ空間の関係についてまとめる。

1 一般型曲面の地誌学とファイバー曲面

本稿では、簡単のため代数多様体は複素数体 \mathbb{C} 上で考える。 S を非特異射影的な極小一般型曲面とする。このとき、標準束の自己交点数 K_S^2 と構造層のオイラー数 $\chi(\mathcal{O}_S)$ は正の整数であり、次の不等式を満たす。

- (Noether 不等式 [Noe]) $K_S^2 \geq 2\chi(\mathcal{O}_S) - 6$.
- (Castelnuovo 不等式 [Cas]) 標準写像 φ_{K_S} が像へ双有理のとき、 $K_S^2 \geq 3\chi(\mathcal{O}_S) - 10$.
- (宮岡–Yau 不等式 [Miy], [Yau]) $K_S^2 \leq 9\chi(\mathcal{O}_S)$.

上の2つの不等式は、それぞれ種数 2, 3 のファイバー曲面と関連している。ここで、種数 g のファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ とは、非特異射影曲面 S から非特異射影曲線 B への全射正則写像であり、一般ファイバーが種数 g の連結な曲線であるものをいう。実際、Noether 直線付近の曲面は、種数 2 のファイバー曲面の構造を自然に持つことが知られている ([Hor1])。また Castelnuovo 直線付近の標準写像が像へ双有理な曲面は、種数 3 の非超楕円的なファイバー曲面の構造を自然に持つことが知られている ([AsKo], [Kon1])。このように、「2つの不変量の比 $K_S^2/\chi(\mathcal{O}_S)$ が比較的小さい曲面 S は、自然な有理関数によるファイバー曲面の構造を持ち、曲線論との類似がある」という現象が観察される。

種数 2 以上のファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ に対しては、不変量 $K_S^2, \chi(\mathcal{O}_S)$ の代わりにその相対版である相対標準束 $\omega_f = \mathcal{O}_S(K_f)$ の自己交点数 K_f^2 と Hodge 束 $f_*\omega_f$ の次数 $\chi_f := \deg f_*\omega_f$ を用いることが多い。このとき $\chi_f \geq 0$ であり、等号が成立するときは f が局所自明（全てのファイバーが非特異かつ同型）なときに限ることが知られている。 $\chi_f > 0$ のとき、二つの不変量の比

$$\lambda_f := \frac{K_f^2}{\chi_f}$$

を f のスロープという。 K_f^2 や χ_f はいくらでも大きな値を取りうるが、そのスロープは有界であり次の不等式がよく知られている（上限については Noether 公式などから直ちに従う）。

定理 1.1 ([Xia], [CoHa]) 相対極小な種数 g のファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ に対し、

$$\frac{4(g-1)}{g} \leq \lambda_f \leq 12.$$

一般にこのようなスロープの下限を与える不等式を、ファイバー曲面の**スロープ不等式**という。種数 2 の場合は、上のスロープ不等式は $K_f^2 \geq 2\chi_f$ となり、 $B = \mathbb{P}^1$ のときこれは Noether の不等式 $K_S^2 \geq 2\chi(\mathcal{O}_S) - 6$ と一致する。さらに、スロープ不等式よりももっと精密な次の等式が知られている。

定理 1.2 ([Hor2]) 相対極小な種数 2 のファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ に対し、等式

$$K_f^2 - 2\chi_f = \sum_{p \in B} \text{Ind}(f^{-1}(p))$$

が成立する。ここで、 $\text{Ind}(f^{-1}(p))$ は種数 2 のファイバー芽 $f^{-1}(p)$ に対し非負の整数を取る不変量である。

この定理は、種数 2 のファイバー曲面に対してはスロープの下限からの差が退化ファイバーの退化具合を測る量によって計算できることを主張している。このようなタイプの等式を**スロープ等式**といい、スロープの下限からのずれを測る不変量 $\text{Ind}(f^{-1}(p))$ はファイバー芽 $f^{-1}(p)$ の**堀川指数**と呼ばれている。さらに [Hor2] では、種数 2 のファイバー芽を $(0), (I_k), (II_k), (III_k), (IV_k), (V)$ の 6 タイプに分類し、各タイプに対し堀川指数の値を次のように求めた。

$$\text{Ind}(0) = 0, \text{Ind}(I_k) = \text{Ind}(III_k) = 2k - 1, \text{Ind}(II_k) = \text{Ind}(IV_k) = 2k, \text{Ind}(V) = 1.$$

また [Hor3] では、任意の種数 2 のファイバー芽は高々 1 つのノードを持つ安定ファイバーのいくつかに分裂変形できることが示された。さらにこの分裂変形により現れるファイバーのうち、分離型のノードを一つ持つ安定ファイバー（=楕円曲線 2 つが一点で横断的に交わっているもの=“一般”な (I_1) 型ファイバー）の数は堀川指数に一致することが示された。特に堀川指数（の和）はファイバー芽の分裂変形により保たれることがわかる。

種数 3 のファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ は定理 1.1 より $K_f^2 \geq \frac{8}{3}\chi_f$ を満たす。しかし一般ファイバーが非超楕円曲線のときは、さらに強い不等式 $K_f^2 \geq 3\chi_f$ を満たすことが知られている。これは $B = \mathbb{P}^1$ のとき、Castelnuovo 不等式 $K_S^2 \geq 3\chi(\mathcal{O}_S) - 10$ と一致する。種数 2 の場合と同様に、種数 3 の非超楕円的なファイバー曲面に対し次のスロープ等式が知られている。

定理 1.3 ([Rei2]) 相対極小な種数3の非超楕円のファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ に対し, 等式

$$K_f^2 - 3\chi_f = \sum_{p \in B} \text{Ind}_H(f^{-1}(p))$$

が成立する. ここで, $\text{Ind}_H(f^{-1}(p))$ は種数3の非超楕円のファイバー芽 $f^{-1}(p)$ に対し非負の整数を取る不変量である.

種数3のファイバー芽の位相的分類は [AsIs] によりなされており, 膨大なりストよりなる. 一方で [Hor2] による種数2のファイバー芽の6タイプへの分類のような“代数幾何的”分類は知られていない (堀川氏がこの分類を進めていたらしいが, その全貌は明らかになっていない). 一方 Reid 氏は, 分裂変形により堀川指数 $\text{Ind}_H(f^{-1}(p))$ は次のように計算されることを予想した.

予想 1.4 ([Rei2]) 種数3の非超楕円のファイバー芽 $f: S \rightarrow (p \in B)$ は分裂変形により次の4つの型のファイバーいくつかに分裂変形できる.

- (0) ノードを高々1つ持つ既約非超楕円の安定ファイバー F_0 . このとき $\text{Ind}_H(F_0) = 0$.
- (1) 非特異超楕円のファイバー F_1 で $\text{Ind}_H(F_1) = 1$ を満たすもの.
- (2) 分離型ノードを1つ持つ非超楕円の安定ファイバー F_2 . このとき $\text{Ind}_H(F_2) = 2$.
- (3) 非特異2重ファイバー F_3 で $\text{Ind}_H(F_3) = 3$ を満たすもの.

また, この分裂変形に現れる (1), (2), (3) のファイバー芽の本数をそれぞれ a_1, a_2, a_3 とすると, 堀川指数は $\text{Ind}_H(f^{-1}(p)) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$ と表せる.

この予想は次の2つの問題に分解できる. 1つはファイバー芽の代数的モース化の問題である. これはファイバー芽を超楕円的という代数幾何的特殊性を考慮しつつノードを高々1つもつ安定ファイバーと非特異重複ファイバーのいくつかに分裂変形可能かという問題である. もう1つは, 堀川指数 (の和) が分裂変形により不変であるかという問題である. 本稿ではこれらの問題を曲線のモジュライ理論を用いて考察する. 本稿の主結果の系として, Reid 予想 1.4 は肯定的に解決される (例 6.2 (2)).

2 曲線のモジュライ

\mathcal{M}_g を種数 $g \geq 2$ の非特異射影曲線のモジュライスタックとし, $\overline{\mathcal{M}}_g$ を種数 g の安定曲線のモジュライスタック (Deligne–Mumford コンパクト化) とする. これらはスムーズな Deligne–Mumford スタックであり, その粗モジュライ空間 M_g, \overline{M}_g はそれぞれ擬射影的, 射影的スキームである. 境界 $\overline{M}_g \setminus M_g$ は余次元1であり, \overline{M}_g 上単純正規交叉である. これは $\lfloor g/2 \rfloor + 1$ 個の既約成分 $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{\lfloor g/2 \rfloor}$ を持つ. ここで δ_0 はノードを一つ持つ既約曲線を一般にパラメトライズし, $i > 0$ のとき δ_i は横断的に一点で交わる種数 i と種数 $g - i$ の非特異曲線の和を一般にパラメトライズしている. これらを \overline{M}_g 上の因子または直線束とみなし, $\delta := \sum_{i=0}^{\lfloor g/2 \rfloor} \delta_i$ とおく. 他に重要な \overline{M}_g 上の直線束として, 第1森

田–Mumford 類 κ と Hodge 束 λ がある。これは、 $\pi: \overline{\mathcal{U}}_g \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ を普遍族、 ω_π をその相対双対層として、

$$\kappa := \pi_* c_1(\omega_\pi)^2, \quad \lambda := \det \pi_* \omega_\pi$$

と定義される。これらはそれぞれ種数 g の半安定なファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ の K_f^2 と χ_f に対応している。実際、 f の相対標準モデル $\bar{f}: \bar{S} \rightarrow B$ はモジュライ写像 $\rho_f: B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ と対応し、このとき

$$K_f^2 = \deg \rho_f^* \kappa, \quad \chi_f = \deg \rho_f^* \lambda$$

が成立する。 $\overline{\mathcal{M}}_g$ の有理係数ピカール群 $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)_\mathbb{Q}$ に関し次のことが知られている (cf. [Mor2]) .

- $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)_\mathbb{Q}$ は Hodge 束 λ と境界因子 $\delta_0, \dots, \delta_{\lfloor g/2 \rfloor}$ で生成される。 $g \geq 3$ のときこれらは基底をなし、 $g = 2$ のとき 1 つの関係式 $10\lambda - \delta_0 - 2\delta_1 = 0$ を持つ。
- (Noether 公式) $12\lambda = \kappa + \delta$.

簡単のため $g \geq 3$ と仮定する。 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上の有効 \mathbb{Q} -因子 D を考える。この $\overline{\mathcal{M}}_g$ での閉包も同じ記号 D で表す。このとき上の事実より、 $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)_\mathbb{Q}$ の中で

$$D = a\lambda - b_0\delta_0 - \dots - b_{\lfloor g/2 \rfloor}\delta_{\lfloor g/2 \rfloor}$$

と表せる。ここで、 a, b_i は正の有理数になることが知られている。このとき $b := \min_i \{b_i\}$ とおき、 $s_D := a/b$ を D のスロープという。この概念は、元々 $\overline{\mathcal{M}}_g$ の大域的な構造を調べるために導入された。実際、スロープが $13/2$ より小さな因子 D を用いて $\overline{\mathcal{M}}_g$ の標準因子を記述することにより、 $g \geq 24$ のときに $\overline{\mathcal{M}}_g$ は一般型であることが示された ([HaMu], [EiHa])。 λ はネフかつ巨大なので、スロープが大きい有効因子は大量に存在する。一方スロープが小さい因子は発見が困難であり、なんらかの重要な幾何学的性質を持つ曲線をパラメトライズしている因子として構成されることが多い。

種数 g のファイバー曲面 $f: S \rightarrow B$ は一般ファイバーのモジュライ点が D に属さないとき、 D 一般であるという。有効因子 D のスロープと D 一般な半安定ファイバー曲面のスロープは次のように関係している。

補題 2.1 $f: S \rightarrow B$ を種数 g の D 一般な半安定ファイバー曲面とする。このとき、 $\lambda_f \geq 12 - s_D$ が成り立つ。

証明 f の相対標準モデルのモジュライ写像 $\rho_f: B \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ を考える。このとき、

$$\begin{aligned} K_f^2 - (12 - s_D)\chi_f &= \deg \rho_f^*(\kappa - (12 - s_D)\lambda) \\ &= \deg \rho_f^*(s_D\lambda - \delta) \\ &= \deg \rho_f^* \left(\frac{1}{b} \left(D + \sum_{i=0}^{\lfloor g/2 \rfloor} (b_i - b)\delta_i \right) \right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

ここで最後の不等式は、モジュライ写像の像 $\rho_f(B)$ が D や境界因子 δ_i に含まれないことから従う。□

本稿の主結果は、このスロープ不等式を半安定でないファイバー曲面の場合に拡張する試みである。そのためには、曲線のモジュライとしてファイバー曲面（の相対標準モデル）のファイバーを全て含むようなものを考えたい。例えば $n \geq 4$ を任意に固定し、 \mathcal{M}'_g (resp. \mathcal{M}''_g) を被約 (resp. スムージング可能) かつ局所完全交叉であり n 標準線形系は埋め込みを与える種数 g 曲線のモジュライスタックとする。これらは有限型の整 Artin スタックであり、開部分スタックとしての包含関係

$$\mathcal{M}_g \subseteq \overline{\mathcal{M}}_g \subseteq \mathcal{M}'_g \subseteq \mathcal{M}''_g$$

が成り立つ。また、 \mathcal{M}''_g はファイバー曲面の相対標準モデルのファイバーとして現れる種数 g 曲線を全て含む。よって、 \mathcal{M}''_g に対して補題 2.1 のような議論を展開できれば良い。そのためには、 \mathcal{M}''_g の境界の余次元 1 の既約成分を調べる必要がある。 \mathcal{M}'_g に対しては、次の定理を示すことができた。

定理 2.2 $\mathcal{M}'_g \setminus \overline{\mathcal{M}}_g$ は余次元 2 以上である。

変形理論により \mathcal{M}'_g は非特異であることが示されており、 λ や κ は同様にカルティエ因子として定義できる。これらにより、相対標準モデルが被約ファイバーのみを持つ D 一般な種数 g のファイバー曲面に対し補題 2.1 の主張が成り立つことを示すことができる（後に述べる主定理ではもっと一般化された形で述べる）。一方、 \mathcal{M}''_g の方は境界因子として何が現れうるのかについて現時点で分かっていない。これに関する予想（モジュライ予想）を次章で述べる。

補題 2.1 によると、“一般”ファイバー曲面のより強いスロープ不等式を与えるには、 D としてスロープ s_D がより小さいものを取ればよい。 s_D にかんしては次が予想されている。

予想 2.3 (Farkas–Morrison 予想 [CFM]) $s_D > 6$.

実際、 $s_D \leq 6$ となる有効因子 D はまだ見つかっていない。一方後に例 4.3 で述べるように、 D として Brill–Noether 因子を考えると、これは $g \rightarrow \infty$ のとき $s_D \rightarrow 6$ となる因子の系列である。

3 モース化予想

以下では、ファイバー曲面のファイバー芽を $f: S \rightarrow (p \in B)$ または $f^{-1}(p)$ と表す。相対極小な種数 g のファイバー芽 $f: S \rightarrow (p \in B)$ の分裂変形族とは、1-パラメーター族

$$S \xrightarrow{f} (p \in B) \xrightarrow{h} (0 \in T)$$

であって、 $f: S \rightarrow B$ は非特異曲面 B 上の射影曲線の平坦族、 $h: B \rightarrow T$ は非特異曲線 T へのスムーズ射であり $h(p) = 0$ を満たし、中心ファイバー $f_0: S_0 \rightarrow (p \in B_0)$ は $f: S \rightarrow (p \in B)$ とファイバー芽として同型であるものと定義される。複素解析的な設定では、 T は開円盤 Δ 、 $p = (0,0) \in B = \Delta \times \Delta$ 、 $h = pr_2: \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ としてよい。さらに $f_t: S_t \rightarrow B_t$ ($t \neq 0$ は十分小) が2つ以上の特異ファイバーを持つとき、**真の分裂変形族**という。ファイバー芽 $f^{-1}(p)$ は真の分裂変形族を持たないとき、**原子的**であるという。原子的ファイバー芽に対しては Xiao-Reid による次の予想がある。

予想 3.1 (モース化予想 [Rei2]) 原子的な特異ファイバー芽 $f^{-1}(p)$ はノードを1つ持つ安定ファイバーかまたは非特異重複ファイバーに限る。

ノードを1つ持つ安定ファイバーと非特異重複ファイバーは原子的であることが知られている ([Tak1])。よって問題は、任意の特異ファイバー芽は有限回の分裂変形を施すことによりこれらのファイバーへ分裂させることができるかどうかである。この予想は [Tak2] により種数 $g \leq 5$ の場合は (複素解析的な設定で) 正しいことが示されているが、一般には未解決である。ファイバー芽 $f^{-1}(p)$ が**モース化予想を満たす**とは、有限回の分裂変形によりノードを高々1つ持つ安定ファイバーと非特異重複ファイバーへ分裂変形できるときにいう。定理 2.2 の系として、次を示すことができる。

命題 3.2 $f: S \rightarrow (p \in B)$ をファイバー芽とし、その相対標準モデル $\bar{f}: \bar{S} \rightarrow (p \in B)$ の中心ファイバーは被約とする。このとき $f^{-1}(p)$ はモース化予想を満たす。

実際、 M'_g は非特異でありその境界の因子成分はノードを1つ持つ安定曲線を一般にパラメトライズしているので、 $\bar{f}^{-1}(p)$ のモジュライ点を含む非特異曲面を M'_g (のスムーズ被覆) から“切り出す”ことによりモース化を与える分裂変形族を構成することができる。このようにモース化の話と曲線のモジュライの話に関連させると、原子的ファイバーは曲線のモジュライスタックの境界の因子成分の一般元と対応しているように思える。この考察より、モース化予想の変種として次の予想を提示したい。

予想 3.3 (モジュライ予想) 種数 g 曲線のモジュライスタック M_g^* で次の条件を満たすものが存在する。

- (1) M_g^* はファイバー曲面の相対標準モデルのファイバーに現れる任意の種数 g 曲線をモジュライ点として含む。
- (2) $M_g^* \setminus M_g$ の余次元1の既約成分は、ノードを1つ持つ安定曲線を一般にパラメトライズしているもの (つまり δ_i の閉包) とファイバー曲面のファイバーとして現れうる非特異重複曲線を一般にパラメトライズしているものからなる。

例えば M''_g は条件 (1) を満たし、予想を満たすモジュライの一つの候補である。モジュライ予想はモース化予想と同値であるかは今のところ分からない。片方からもう片方が従うということも今のところ分かっていない。すぐに分かることとしては、条件 (1) を満たす曲線のモジュライスタックの境界因子は、原子的ファイバーである曲線を一般にパラメ

トライズするか、ファイバー曲面の相対標準モデルのファイバーとして現れない曲線を一般にパラメトライズしているかのどちらかである。種数 g のファイバー曲面の相対標準モデルのファイバーとして現れる曲線全体が Artin スタックをなすかは分かっていない（アプリアリには M''_g の構成可能な部分集合をなす）。また非特異重複曲線のなすローカスが余次元 1 なことも分かっていない。

4 スロープ（不）等式

本稿の主結果は次の定理である。

定理 4.1 (一般ファイバー曲面のスロープ等式) $g \geq 2$ とし、 D を \mathcal{M}_g 上の有効因子で $s_D \geq 4$ を満たすものとする。 $f: S \rightarrow B$ を相対極小な種数 g の D 一般なファイバー曲面とする。次のどちらかを仮定する。

- (i) f の全てのファイバーはモース化予想を満たす。
- (ii) 種数 g に対しモジュライ予想が成り立つ。

このとき等式

$$K_f^2 - (12 - s_D)\chi_f = \sum_{p \in B} \text{Ind}_D(f^{-1}(p))$$

が成立する。ここで、 $\text{Ind}_D(f^{-1}(p))$ はファイバー芽 $f^{-1}(p)$ に対し非負の有理数を取る不変量である（以下これを D に付随する堀川指数と呼ぶ）。

(i) は例えば $g \leq 5$ または f の相対標準モデルが被約ファイバーのみを持つときに成立する（命題 3.2）。この定理は $g = 2$ かつ $D = \delta_1$ のときも $s_{\delta_1} = 10$ として成立する。この場合は定理 1.2 の別証明を与える。また $g = 3$ かつ $D = H$ が超楕円曲線のなすローカスのときは $s_H = 9$ であり、定理 1.3 の別証明を与える。

D 一般なファイバー曲面のスロープ不等式を得るために D のスロープを計算しなければならないのは、少々トートロジカルに感じられるかもしれない。しかし D の有理係数ピカル群の中での表示を求めるには、具体的な有限個の D 一般な半安定ファイバー曲面に対してその不変量やモジュライ写像などを計算すれば十分である。よって定理 4.1 は「代数的なモジュライスタックの存在により、ファイブレーションの数値的な性質は有限個の具体的な半安定ファイブレーションにより決定することができる」という原理を示唆しているといえる。

定理 4.1 の証明の主要部分は、 D に付随する堀川指数

$$\text{Ind}_D(-): \{ \text{種数 } g \text{ の } D \text{ 一般なファイバー芽} \} \rightarrow \mathbb{Q}$$

を構成し、ファイバー芽 $f^{-1}(p)$ がモース化予想を満たすかまたはモジュライ予想が正しいときに $\text{Ind}_D(f^{-1}(p))$ が非負であることを示すことである。堀川指数の構成は次のようになされる。モジュライスタック M''_g （またはモジュライ予想が正しい M'_g ）を考える。 $\kappa - (12 - s_D)\lambda$ は M''_g 上の \mathbb{Q} -カルティエ因子として定義されている（正確には、 κ はカ

ルティエ因子とは限らないが、ファイバー曲面に対しては κ と同じ役割をするカルティエ因子 $\lambda^{(2)} - \lambda$ に置き換えてよい). これを有理係数ピカル群の中で D と境界因子の和で表示することができ、それを H_D と表す (\mathcal{M}_g の境界因子には δ_i 以外も現れうるため、 H_D はいま有効因子かどうか分からないことに注意しておく). D 一般なファイバー芽 $f: S \rightarrow (p \in B)$ に対し、その相対標準モデルのモジュライ写像 $\rho_f: (p \in B) \rightarrow \mathcal{M}_g$ を用いて、

$$\text{Ind}_D(f^{-1}(p)) := \deg_p \rho_f^* H_D$$

と定義する. この段階では $\text{Ind}_D(f^{-1}(p))$ の非負性は分からないが、次に述べるように堀川指数は分裂変形で保たれることが分かる.

補題 4.2 $S \xrightarrow{f} (p \in B) \xrightarrow{h} (0 \in T)$ を D 一般なファイバー芽 $f^{-1}(p)$ の分裂変形族とする. このとき、

$$\text{Ind}_D(f^{-1}(p)) = \sum_{q \in \mathcal{B}_t} \text{Ind}_D(\mathbf{f}_t^{-1}(q))$$

が十分小さい $t \in T$ に対し成立する.

よって $f^{-1}(p)$ はモース化予想を満たすとき、堀川指数 $\text{Ind}_D(f^{-1}(p))$ の非負性はノードを高々1つ持つ安定ファイバーと非特異重複ファイバーの堀川指数 $\text{Ind}_D(\mathbf{f}_t^{-1}(q))$ の非負性に帰着される. 安定ファイバーの堀川指数の非負性は、因子 H_D が $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上では有効であることから従う. 問題は非特異重複ファイバーの場合であるが、こちらは次の章でみるように堀川指数が半安定還元でどう変化するかを記述することにより非負性を示すことができる.

例 4.3 ここでは \mathcal{M}_g 上の重要な有効因子をいくつか紹介する.

(1) **Brill–Noether 因子** (BN): $g+1$ は素数でないとし、ある整数 $r \geq 1, s \geq 3$ を用いて $g+1 = (r+1)(s-1)$ と分解すると仮定する. $d := rs - 1$ とおく.

$$BN_{g,d}^r := \{[C] \in \mathcal{M}_g \mid C \text{ は } \mathfrak{g}_d^r \text{ を持つ}\}$$

とおく. これは余次元1であり、その閉包は $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)_{\mathbb{Q}}$ の中で次のような表示を持つ ([EiHa, Theorem 1]).

$$BN_{g,d}^r = c \left((g+3)\lambda - \frac{g+1}{6}\delta_0 - \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor} i(g-i)\delta_i \right),$$

ここで c は g, d, r にのみ依存するある正の有理数である. 特に $s_{BN_{g,d}^r} = 6 + \frac{12}{g+1}$ であり、定理 4.1 の不等式は

$$K_f^2 \geq \frac{6(g-1)}{g+1} \chi_f$$

となる. $D = BN_{g,d}^1$ のとき、これは [Kon3] により示されたスロープ不等式を復元する.

(2) **Gieseker–Petri 因子 (GP)**: g は素数でないとし, ある整数 $r \geq 1, s \geq 3$ を用いて $g = (r+1)(s-1)$ と分解すると仮定する. $d := rs$ とおく.

$$GP_{g,d}^r := \{[C] \in \mathcal{M}_g \mid C \text{ は Petri 条件を満たさない } \mathfrak{g}_d^r \text{ を持つ}\}$$

とおく. ここで, 曲線 C 上の線束 L が Petri 条件を満たすとは, 自然な掛け算写像 $\mu_0: H^0(L) \otimes H^0(\omega_C \otimes L^{-1}) \rightarrow H^0(\omega_C)$ が単射であることとする. $GP_{g,d}^r$ の $\overline{\mathcal{M}}_g$ の中での閉包も同じ記号で表す. 多くの g, r, d で, $GP_{g,d}^r$ は自然に $\overline{\mathcal{M}}_g$ の有効因子になることが知られている (cf. [Far1]). g が偶数で $r = 1$ のとき, $s = d = g/2 + 1$ であり, このとき $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g)_{\mathbb{Q}}$ の中で

$$GP_{g,d}^1 = c \left(e\lambda - f_0\delta_0 - \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor} f_i\delta_i \right)$$

が成立する ([EiHa, Theorem 2]). ここで,

$$c = 2 \frac{(2d-4)!}{d!(d-2)!}, \quad e = 6d^2 + d - 6, \quad f_0 = d(d-1), \quad f_1 = (2d-3)(3d-2),$$

であり, 残りの f_i も知られており f_0 より大きい. 特に $s_{GP_{g,d}^1} = 6 + \frac{2(7g+2)}{g(g+2)}$ となり, 定理 4.1 の不等式は

$$K_f^2 \geq \frac{2(3g+2)(g-1)}{g(g+2)} \chi_f$$

となる. (1) と合わせて, 種数 g の “一般” ファイバー曲面のスロープは $g \rightarrow \infty$ のとき 6 に下から収束する値で下から評価できるというフォークロアは (モース化予想の仮定の下で) 正しいことが分かった (スロープの真の下限がこのような値になることまで主張するには, 少なくとも Farkas–Morrison 予想を解決する必要があるだろう).

(3) **K3 因子 (K)**: \mathcal{F}_g を種数 g の偏極 K3 曲面 (S, H) のモジュライスタックとし, \mathcal{F}_g 上の \mathbb{P}^g -束 \mathcal{P}_g を, $\mathcal{P}_g := \{((S, H), C) \mid (S, H) \in \mathcal{F}_g \text{ かつ } C \in |H|\}$ とおく. 自然な射影 $\mathcal{P}_g \dashrightarrow \mathcal{M}_g$, $((S, H), C) \mapsto [C]$ が支配的であることは $1 \leq g \leq 11$ かつ $g \neq 10$ と必要十分であることが知られている ([Muk, Theorems 0.7, 6.1], [MoMu, Corollary 2]). また $g = 10$ のとき, $\mathcal{P}_{10} \dashrightarrow \mathcal{M}_{10}$ の像は余次元 1 になり, この像の $\overline{\mathcal{M}}_{10}$ での閉包を K と表す. K は $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{10})_{\mathbb{Q}}$ の中で次のように表せる ([FaPo, Theorem 1.6], [Far2, Theorem 2.18]).

$$K = 7\lambda - \delta_0 - 5\delta_1 - 9\delta_2 - 12\delta_3 - 14\delta_4 - 15\delta_5.$$

特に $s_K = 7$ となり, 定理 4.1 の不等式は

$$K_f^2 \geq 5\chi_f$$

となる. この不等式は (2) で $g = 10$ としたときの $GP_{10,6}^1$ 一般なファイバー曲面の満たすスロープ不等式よりも強い.

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_g	10	9	$\frac{17}{2}$	8	$\frac{47}{6}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{36}{5}$	7	7
D with $s_g = s_D$	δ_1	BN	GP	BN	GP	BN	BN	BN	K	BN

全ての有効因子 $D \subseteq \mathcal{M}_g$ にわたるスロープ s_D の下限を s_g とおく．このとき種数 g が小さい場合は実際に s_g の値が求められており， $g \leq 11$ までをまとめると表のようになる ([HaMo], [Tan2], [FaPo]) ．

ここで s_g が整数である $g = 2, 3, 5, 10, 11$ の場合は一般型曲面論的には興味深い．実際， $g = 2, 3$ の場合はすでにみたように，一般型曲面にかんする Noether 不等式や Castelnuovo 不等式と関連があった． $g = 5$ の場合は，スロープ不等式 $K_f^2 \geq 4\chi_f$ は $B = \mathbb{P}^1$ のとき不等式 $K_S^2 \geq 4\chi(\mathcal{O}_S) - 16$ に書き換えられるが，この不等式は次に述べる Reid の 2 次包予想で予想されている不等式と（不正則数 0 のとき）一致する．

予想 4.4 (Reid の 2 次包予想 [Rei1, p.541]) S を極小な一般型曲面とし，その標準写像は像 $X \subseteq \mathbb{P}^{p_g(S)-1}$ と双有理と仮定する．もし X を含む全ての 2 次超曲面の共通部分 (X の 2 次包) が X と一致するならば，不等式 $K_S^2 \geq 4p_g(S) - 12$ が成立する．

この予想は非超楕円曲線の 2 次包にかんする古典的な Enriques–Babbage–Petri の定理の 2 次元版とみなせるが，現在でも未解決である．Reid 直線 $K_S^2 = 4p_g(S) - 12$ 上にある Reid の 2 次包予想の仮定を満たす偶曲面 S は 5 タイプに分類され，その主要なクラスの一つは種数 5 のテトラゴナルファイバー曲面 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ の構造を持ち $K_f^2 = 4\chi_f$ を満たすことが知られている ([Kon2]) ．

種数 $g = 10$ (resp. $g = 11$) の場合は，“一般”ファイバー曲面のスロープ不等式 $K_f^2 \geq 5\chi_f$ は $B = \mathbb{P}^1$ のとき $K_S^2 \geq 5\chi(\mathcal{O}_S) - 27$ (resp. $K_S^2 \geq 5\chi(\mathcal{O}_S) - 30$) と書き換えられる．これらの不等式が一般型曲面 S のどのような幾何学的性質でもって特徴付けられるかは今後の問題である．

この章では“一般”ファイバー曲面のスロープ（不）等式を $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上の有効因子 D を用いて議論してきたが，Xiao と Cornalba–Harris によるスロープ不等式（定理 1.1）も $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上のある因子 D の“正值性”の結果とみなすことができる．実際，[Mor1] により因子

$$D = (8g + 4)\lambda - g\delta_0 - \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor} 4i(g - i)\delta_i$$

の弱半正值性が示され，種数 g の半安定ファイバー曲面に対し定理 1.1 より精密なスロープ不等式が示された．この弱半正值性と定理 2.2 を合わせると，[Mor1] のスロープ不等式を次のように一般化できる．

系 4.5 $f: S \rightarrow B$ を種数 g の相対極小なファイバー曲面とし，その相対標準モデルに現れるファイバーは全て被約であると仮定する．このとき，不等式

$$K_f^2 \geq \frac{4(g-1)}{g}\chi_f + \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor} \frac{4i(g-i) - g}{g} \sum_{p \in B} \delta_i(f^{-1}(p))$$

が成立する. ここで, $\delta_i(f^{-1}(p))$ は $f^{-1}(p)$ を分裂変形してモース化したときに現れる i 型ノードを 1 つ持つ安定ファイバーの本数である.

5 半安定還元との関係

$f: S \rightarrow (p \in B)$ を種数 $g \geq 2$ のファイバー芽とする. このとき [Tan1] により, Chern 不変量と呼ばれる $f^{-1}(p)$ の \mathbb{Q} 値不変量 $c_1^2(f^{-1}(p)), c_2(f^{-1}(p)), \chi_{f^{-1}(p)}$ が定義されている. これらは次の性質を満たす.

- (正値性) $c_1^2(f^{-1}(p)), c_2(f^{-1}(p)), \chi_{f^{-1}(p)} \geq 0$.

また, どれか 1 つが 0 \Leftrightarrow 全てが 0 $\Leftrightarrow f^{-1}(p)$ は半安定ファイバー

- (Noether 公式) $12\chi_{f^{-1}(p)} = c_1^2(f^{-1}(p)) + c_2(f^{-1}(p))$
- (局所大域公式) $f: S \rightarrow B$ を相対極小な種数 g のファイバー曲面, $f': S' \rightarrow B'$ を次数 N の有限射 $B' \rightarrow B$ により得られる f の半安定還元とすると, 次が成立する.

$$K_f^2 - \frac{1}{N}K_{f'}^2 = \sum_{p \in B} c_1^2(f^{-1}(p)),$$

$$\chi_f - \frac{1}{N}\chi_{f'} = \sum_{p \in B} \chi_{f^{-1}(p)},$$

$$e_f - \frac{1}{N}e_{f'} = \sum_{p \in B} c_2(f^{-1}(p)).$$

- (宮岡–Yau 型不等式) $c_1^2(f^{-1}(p)) \leq 8\chi_{f^{-1}(p)}$ が成立し,

等号成立 $\Leftrightarrow f^{-1}(p)$ は高々ノードを持つ被約曲線またはその多重ファイバー

一方, [Ash] により局所符号不足数と呼ばれる \mathbb{Q} 値不変量 $\text{Lsd}(f^{-1}(p))$ がファイバー芽 $f^{-1}(p)$ の位相的モノドロミーの数値的情報を用いて定義された. この不変量にかんしても局所大域公式

$$\text{Sign}(S) - \frac{1}{N}\text{Sign}(S') = \sum_{p \in B} \text{Lsd}(f^{-1}(p))$$

を満たす. ここで $\text{Sign}(S)$ は 2 次コホモロジー群 $H^2(S, \mathbb{Q})$ 上の交点形式にかんする符号数である. Hirzebruch の符号数定理より $\text{Sign}(S) = K_f^2 - 8\chi_f$ が成り立つので, 部分的な半安定還元と局所大域公式を用いて

$$\text{Lsd}(f^{-1}(p)) = c_1^2(f^{-1}(p)) - 8\chi_{f^{-1}(p)} = \frac{1}{3}(c_1^2(f^{-1}(p)) - 2c_2(f^{-1}(p)))$$

がわかる. よって宮岡–Yau 型不等式より, $\text{Lsd}(f^{-1}(p))$ は非正である (これは位相的モノドロミーの数値的情報を用いた定義からは非自明のように思われる). また $c_2(f^{-1}(p))$ は定義

から位相的モノドロミーの数値的情報を用いて記述できるので、上の等式から $c_1^2(f^{-1}(p))$ と $\chi_{f^{-1}(p)}$ も同様に位相的モノドロミーの数値的情報を用いて記述できる。特にこれら4つの局所不変量は（堀川指数とは違い）ファイバー芽 $f^{-1}(p)$ の位相同値類によって完全に決定され、 $f^{-1}(p)$ の代数的構造には依らない。堀川指数とこれらの不変量の関係にかんしては次が成立する。

命題 5.1 D を M_g 上の有効因子とし、 $f: S \rightarrow (p \in B)$ を D 一般な種数 g のファイバー芽とする。 $f': S' \rightarrow B'$ を次数 N の有限射 $\varphi: B' \rightarrow B$ により得られる $f^{-1}(p)$ の半安定還元とする。このとき、

$$\text{Ind}_D(f^{-1}(p)) = \frac{1}{N} \sum_{q \in \varphi^{-1}(p)} \text{Ind}_D(f'^{-1}(q)) + c_1^2(f^{-1}(p)) - (12 - s_D)\chi_{f^{-1}(p)}.$$

特に堀川指数 $\text{Ind}_D(f^{-1}(p))$ が非負でありかつ任意の $q \in \varphi^{-1}(p)$ に対し $\text{Ind}_D(f'^{-1}(q)) = 0$ が成り立つ（つまり $f'^{-1}(q)$ の安定モデルのモジュライ点が D にも $b_i > b$ となる δ_i にも含まれない）とき、 $c_1^2(f^{-1}(p)) \geq (12 - s_D)\chi_{f^{-1}(p)}$ が成立する。この不等式は、「ファイバー芽の位相同値類のみに依存する Chern 不変量がモジュライ論的な制限を受ける」ことを意味している。

Lu と Tan は [LuTa] において、任意のファイバー芽 $f^{-1}(p)$ に対し $c_1^2(f^{-1}(p)) \geq \chi_{f^{-1}(p)}$ が成り立つだろうと予想した。定理 4.1 ($\text{Ind}_D(f^{-1}(p))$ の非負性) と命題 5.1 を豊富な因子 D に対し用いて、次を得る。

系 5.2 種数 g のファイバー芽 $f^{-1}(p)$ はモース化予想を満たすかまたはモジュライ予想が正しいとき、 $c_1^2(f^{-1}(p)) \geq \chi_{f^{-1}(p)}$ 。特に、 $f^{-1}(p)$ はその安定モデルが被約ファイバー芽かまたは $g \leq 5$ のとき、Lu–Tan 予想は正しい。

証明 [CoHa, Theorem (1.3)] より、 $D = a\lambda - b\delta$ の形の因子 D が豊富であることは $s_D > 11$ と同値である。よって $\varepsilon > 0$ に対し、有効な豊富 \mathbb{Q} -因子 D_ε として $D_\varepsilon = a_\varepsilon\lambda - b_\varepsilon\delta$ かつ $s_{D_\varepsilon} = 11 + \varepsilon$ を満たし $f^{-1}(p)$ の安定還元を含まないように取れる。 $\text{Ind}_{D_\varepsilon}(f^{-1}(p)) \geq 0$ と命題 5.1 から $c_1^2(f^{-1}(p)) \geq (1 - \varepsilon)\chi_{f^{-1}(p)}$ を得る。 ε は任意より主張の不等式を得る。□

他の応用として、Farkas–Morrison 予想のささやかな状況証拠を与えることができる。

系 5.3 モース化予想またはモジュライ予想が正しいと仮定する。 D を M_g 上の有効 \mathbb{Q} -因子とする。もしある自由でない自己同型を持つ種数 g の非特異曲線のモジュライ点が D に含まれなければ、 $s_D > 4$ である。

証明 $s_D \leq 4$ と仮定して矛盾を導く。 D に一般の有効な豊富 \mathbb{Q} -因子を足すことにより、 $s_D = 4$ として良い。仮定より、種数 g の非特異曲線 C でそのモジュライ点が D に含まれないものと位数 $m \geq 2$ の自由でない C の自己同型 σ が存在する。ファイバー曲面 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を、商 $(C \times \mathbb{P}^1)/\sigma \rightarrow \mathbb{P}^1/\sigma \cong \mathbb{P}^1$ の極小特異点解消として定義する。ここで、 \mathbb{P}^1 への σ の

作用は標準的な m 次巡回作用とし、 $C \times \mathbb{P}^1$ には対角に作用させる。 f は $0, \infty \in \mathbb{P}^1$ 上に特異ファイバーを持ち、 m 次巡回被覆 $z \mapsto z^m$ により底変換して半安定還元すると自明な族 $C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ となることに注意する。 よって、宮岡–Yau 型不等式より、 $K_f^2 < 8\chi_f$ を得る。 一方、 f は D 一般なので定理 4.1 を適用でき、 $s_D = 4$ から不等式 $K_f^2 \geq 8\chi_f$ が成り立ち、矛盾。 \square

6 堀川指数の分解

補題 4.2 と補題 5.1 より、堀川指数 $\text{Ind}_D(f^{-1}(p))$ は $f^{-1}(p)$ をモース化して現れる“代数的原子ファイバー”の堀川指数の和で明示的に計算できる。ここで“代数的”とあるように、通常の原子ファイバーであるノードを一つ持つ安定ファイバーと非特異重複ファイバー以外に、モジュライ点が因子 D に属す非特異ファイバーに対しても堀川指数は値を取るので、ファイバー芽の位相構造だけでなく代数的構造も考慮しなくてはならないことに注意する。次の定理はモース化予想から“代数的モース化”が従うことを主張する。

定理 6.1 $f^{-1}(p)$ を D 一般な種数 g のファイバー芽とし、モース化予想が成り立つと仮定する。このとき、 $f^{-1}(p)$ は次のファイバー芽 $\mathbf{f}_t^{-1}(q)$ のいくつかに分裂変形できる。

(i) 非特異ファイバー芽でそのモジュライ点が D に属さないもの。このとき、

$$\text{Ind}_D(\mathbf{f}_t^{-1}(q)) = 0.$$

(ii) 非特異ファイバー芽でそのモジュライ写像が D と横断的に交わるもの。このとき、

$$\text{Ind}_D(\mathbf{f}_t^{-1}(q)) = \frac{1}{b}.$$

(iii) i 型ノードを一つ持つ安定ファイバー芽でそのモジュライ点が D の閉包に属さないもの ($i = 0, 1, \dots, \lfloor g/2 \rfloor$)。このとき、

$$\text{Ind}_D(\mathbf{f}_t^{-1}(q)) = \frac{b_i - b}{b}.$$

(iv) 非特異 m 重ファイバー。ここで m は $g - 1$ の約数。このときある $n \geq 0$ を用いて

$$\text{Ind}_D(\mathbf{f}_t^{-1}(q)) = \frac{n}{mb} + \frac{s_D - 4}{2m}(m - 1)(g - 1)$$

と書け、この n の取り得る範囲は D と g のみに依存する有限個の整数である。

例 6.2 $g \leq 5$ のときはモース化予想が成り立つので、以下の堀川指数の分解を得る。

(1) $g = 2$ のときも、 $D = \delta_1$ を考えて関係式 $D = 5\lambda - \frac{1}{2}\delta_0$ を用いれば同様の議論ができる。このとき $s_{\delta_1} = 10$ であり、定理 4.1 は定理 1.2 を還元する。定理 6.1 より、堀川指数 $\text{Ind}_{\delta_1}(f^{-1}(p))$ はファイバー $f^{-1}(p)$ を分裂変形によりモース化したときに現れる分離型

ノードを一つ持つ安定ファイバーの本数と等しく、定理 1.2 の堀川指数 $\text{Ind}(f^{-1}(p))$ と一致する。

(2) $g = 3$ とし $D = H = BN_{3,2}^1$ を超楕円曲線をパラメトライズする因子とする。このとき例 4.3 (1) より $s_H = 9$ であり、定理 4.1 は定理 1.3 を復元する。2 つの堀川指数の値が一致することも示すことができる。また定理 6.1 を用いて、予想 1.4 を示すことができる。予想 1.4 のファイバー F_0, F_1, F_2, F_3 はそれぞれ定理 6.1 の (i) と (iii) ($i = 0$), (ii), (iii) ($i = 1$), (iv) に対応する (定理 6.1 (iv) のファイバーは $n = 1$ のみ考えれば良いことが示せる)。

(3) $g = 4$ とし $D = GP_{4,3}^1$ を唯一のトリゴナルペンシルを持つ曲線を一般にパラメトライズする因子とする。このとき $D = 34\lambda - 4\delta_0 - 14\delta_1 - 18\delta_2$ であり、定理 4.1 と定理 6.1 を用いて、 $GP_{4,3}^1$ 一般ファイバー曲面 f に対し、スロープ等式

$$K_f^2 = \frac{7}{2}\chi_f + \frac{1}{4}GP_{4,3}^1 + \frac{5}{2}\delta_1 + \frac{7}{2}\delta_2 + \frac{9}{2}\delta_{(3,0)}$$

を得る。ここで堀川指数の分解

$$\text{Ind}_{GP_{4,3}^1}(f^{-1}(p)) = \frac{1}{4}GP_{4,3}^1(f^{-1}(p)) + \frac{5}{2}\delta_1(f^{-1}(p)) + \frac{7}{2}\delta_2(f^{-1}(p)) + \frac{9}{2}\delta_{(3,0)}(f^{-1}(p))$$

の意味は、 $f^{-1}(p)$ を分裂変形して現れるファイバーの内、定理 6.1 の (ii), (iii) (i 型, $i = 1, 2$), (iv) $((m, n) = (3, 0))$ のものの本数をそれぞれ $GP_{4,3}^1(f^{-1}(p))$, $\delta_i(f^{-1}(p))$, $\delta_{(3,0)}(f^{-1}(p))$ と定義する。

(4) $g = 5$ とし $D = BN_{5,3}^1$ をトリゴナル曲線を一般にパラメトライズする因子とする。このとき $D = 8\lambda - \delta_0 - 4\delta_1 - 6\delta_2$ であり、定理 4.1 と定理 6.1 を用いて、 $BN_{5,3}^1$ 一般ファイバー曲面 f に対し、スロープ等式

$$K_f^2 = 4\chi_f + BN_{5,3}^1 + 3\delta_1 + 5\delta_2 + 4\delta_{(2,0)} + 6\delta_{(4,0)}$$

を得る。ここで堀川指数の分解

$$\text{Ind}_{BN_{5,3}^1}(f^{-1}(p)) = BN_{5,3}^1(f^{-1}(p)) + 3\delta_1(f^{-1}(p)) + 5\delta_2(f^{-1}(p)) + 4\delta_{(2,0)}(f^{-1}(p)) + 6\delta_{(4,0)}(f^{-1}(p))$$

の意味は、 $f^{-1}(p)$ を分裂変形して現れるファイバーの内、定理 6.1 の (ii), (iii) (i 型, $i = 1, 2$), (iv) $((m, n) = (2, 0), (4, 0))$ のものの本数をそれぞれ $BN_{5,3}^1(f^{-1}(p))$, $\delta_i(f^{-1}(p))$, $\delta_{(m,0)}(f^{-1}(p))$ と定義する。

謝辞 この度は「第 68 回代数学シンポジウム」での講演の機会を与えて下さったプログラム責任者の大川先生、山木先生、ならびに会場責任者の石井先生、シンポジウム責任者の高橋先生にお礼を申し上げます。私は JSPS Grant-in-Aid for Young Scientists: 20K14297 から援助を受けています。

参考文献

- [Ash] T. Ashikaga, Local signature defect of fibered complex surfaces via monodromy and stable reduction, *Comment. Math. Helv.* **85** (2010), 417–461.
- [AsKo] T. Ashikaga and K. Konno, Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 7$, *Tohoku Math. J.* **42** (1990), 517–536.
- [AsIs] T. Ashikaga and M. Ishizaka, Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos’ theorem, *Tohoku Math. J.* **54** (2002), 195–226.
- [Cas] G. Castelnuovo, Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie, Nota II, *Rendic. Ist. Lombardo, serie II*, **24** (1891), Memoria Scelta numero XVIII.
- [CFM] D. Chen, G. Farkas and I. Morrison, Effective divisors on moduli spaces of curves and abelian varieties, In: *A celebration of algebraic geometry*, vol. 18 of *Clay Math. Proc.*, 131–169. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
- [CoHa] M. Cornalba and J. Harris, Divisor classes associated to families of stable varieties, with applications to the moduli space of curves, *Annales Sci. École Norm. Sup. (4)* **21** (1988), 455–475.
- [EiHa] D. Eisenbud and J. Harris, The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus ≥ 23 , *Invent. Math.* **90** (1987), 359–387.
- [Eno] M. Enokizono, Slope inequality of fibered surfaces, Morsification conjecture and moduli of curves, arXiv:2307.04311.
- [Far1] G. Farkas, Gaussian maps, Gieseker-Petri loci and large theta-characteristics, *J. reine angew. Math.* **581** (2005), 151–173.
- [Far2] G. Farkas, The global geometry of the moduli space of curves, in *Algebraic Geometry—Seattle 2005. Part 1*, *Proc. Sympos. Pure Math.* 80 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 125–147.
- [FaPo] G. Farkas and M. Popa, Effective divisors on $\overline{\mathcal{M}}_g$, curves on K3 surfaces and the Slope Conjecture, *J. Algebraic Geometry* **14** (2005), 241–267.
- [HaMo] J. Harris and I. Morrison, Slopes of effective divisors on the moduli space of stable curves, *Invent. Math.* **99** (1990), 321–355.
- [HaMu] J. Harris and D. Mumford, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.* **67** (1982), 23–86.

- [Hor1] E. Horikawa, Algebraic surfaces of general type with small c_1^2 , I, *Ann. of Math.* **104** (1976), 357–387; *ibid*, II, *Invent. Math.* **37** (1976), 121–155; *ibid*, III, *Invent. Math.* **47** (1978), 209–248; *ibid*, IV, *Invent. Math.* **50** (1978–1979), 103–128; *ibid*, V, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA* **28** (1982), 745–755.
- [Hor2] E. Horikawa, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, In: *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, a volume dedicated to K. Kodaira, pp, 79–90, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press, 1977.
- [Hor3] E. Horikawa, Local deformation of pencils of curves of genus two, *Proc. Japan Acad. Ser. A math. Sci.*, **64** (1988), 241–244.
- [Kon1] K. Konno, Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 6$, *Math. Ann.* **290** (1991), 77–107.
- [Kon2] K. Konno, Even canonical surfaces with small K^2 , II, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* **93** (1995), 199–241.
- [Kon3] K. Konno, Clifford index and the slope of fibered surfaces, *J. Algebraic Geometry*, **8** (1999), 207–220.
- [LuTa] J. Lu and S.-L. Tan, Inequalities between the Chern numbers of a singular fiber in a family of algebraic curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **365** (2013), 3373–3396.
- [Miy] Y. Miyaoka, On the Chern numbers of surfaces of general type, *Invent. Math.* **42** (1977), 225–237.
- [MoMu] S. Mori and S. Mukai, The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11, *Lecture Notes in Mathematics* **1016** (1983), 334–353.
- [Mor1] A. Moriwaki, Relative Bogomolov’s inequality and the cone of positive divisors on the moduli space of stable curves, *J. Amer. Math. Soc.* **11** no.3 (1998), 569–600.
- [Mor2] A. Moriwaki, The \mathbb{Q} -Picard group of the moduli space of curves in positive characteristic, *Internat. J. Math.* **12** (5) (2001), 519–534.
- [Muk] S. Mukai, Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10 , in: *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata*, Academic Press (1987), 357–377.
- [Noe] M. Noether, Zur Theorie der eindeutigen Entsprechungen algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen, *Math. Ann.* **2** (1870), no.2, 293–316.

- [Rei1] M. Reid, π_1 for surfaces with small K^2 , Springer Lec. Notes in Math. **732** (1979), 534–544.
- [Rei2] M. Reid, Problems on pencils of small genus, Preprint (1990) (see his home page).
- [Tak1] S. Takamura, Towards the classification of atoms of degenerations, I (Splitting criteria via configurations of singular fibers), J. Math. Soc. Japan **56** no.1 (2004), 115–145.
- [Tak2] S. Takamura, *Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*, Towards the classification of atoms of degenerations, III, Lecture Notes in Math. **1886**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Tan1] S.-L. Tan, On the invariants of base changes of pencils of curves, II, Math. Z. **222** (1996), 655–676.
- [Tan2] S.-L. Tan, On the slopes of moduli spaces of curves, Int. J. Math. **9** (1998), 119–127.
- [Xia] G. Xiao, Fibred algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. **276** (1987), 449–466.
- [Yau] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no.3, 339–411.

高次元数論力学系の諸問題

松澤陽介*(大阪公立大学)

目次

1	はじめに	1
2	数論力学系	1
2.1	Dynamical Lang-Siegel 問題	2
2.2	一様有界性予想	4
3	高次元の数論力学系	6
3.1	Zariski 稠密軌道予想	7
3.2	Dynamical Mordell-Lang 予想	8
3.3	Kawaguchi-Silverman 予想	9

*1

1 はじめに

数論力学系という分野は、代数多様体やそれに類する対象の上の自己写像を数論的観点から研究する分野である。この記事では主にディオファントス幾何と関連の深い数論力学系のいくつかの問題を紹介する。数論力学系は近隣の分野、複素力学系、代数幾何、複素幾何、非アルキメデス幾何等と融合しながら様々な方向に発展している。この分野に興味のある方は是非数年前に出版されたサーベイ [6] を参照していただきたい。

記号

- 体 k 上の多様体とは、 k 上有限型な分離的整スキームのこととする。
- 体 k 上の多様体 X とその支配的自己有理写像 $f: X \dashrightarrow X$ が与えられたとき、 f の n 回繰り返し合成 $f \circ \dots \circ f$ を f^n と表す。

2 数論力学系

数論力学系は射影直線 \mathbb{P}^1 の自己射やそれによる有理点の軌道を数論的観点から研究するという問題を中心に発展してきた。複素力学系が複素平面 \mathbb{C} の自己多項式写像や有理写像を位相・解析的観点から研究するの

* matsuzaway@omu.ac.jp
2023年12月16日

に対して、より数論的な視点で同様の力学系を研究すると何が起きているのかという問題意識が出发点にあったと思われる。

射影直線の数論力学系の研究は非常に多く、とても豊かな数学を提供している。ここではその中から二つの話題を紹介する。

2.1 Dynamical Lang-Siegel 問題

数論力学系の重要かつ典型的な定理として以下の Silverman の定理をまず紹介したい。

定理 2.1 (Silverman 1993 [20]). 有理数体上で定義された射影直線の自己全射 $f: \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ を考える. $\deg f \geq 2$ とする. 点 $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ であって f -軌道

$$O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

が無限であるようなものを考える. 軌道の斉次座標を $f^n(x) = (a(n) : b(n))$ と互いに素な整数 $a(n), b(n)$ を用いて表す. もし

$$f^{-2}((0:1)) \neq \{(0:1)\} \quad \text{かつ} \quad f^{-2}((1:0)) \neq \{(1:0)\} \quad (2.1)$$

ならば、以下が成立する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a(n)|}{\log |b(n)|} = 1.$$

注意 2.2. 仮定 (2.1) は点 $(0:1), (1:0)$ の f^2 による (スキーム点としての) 逆像が集合としてそれぞれ $(0:1), (1:0)$ のみからなるという意味である. これは Riemann-Hurwitz などを使えば以下の集合が有限集合であることと同値であることがわかる.

$$\begin{aligned} & \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \mid \text{ある } n \geq 1 \text{ があり } f^n(P) = (0:1)\} \\ & \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \mid \text{ある } n \geq 1 \text{ があり } f^n(P) = (1:0)\} \end{aligned}$$

例えば $f = (x^2 : y^2)$ などはこの条件を満たさない。

この定理は軌道の斉次座標を見ると、二つの成分が漸近的にほぼ同じ桁数になるということを主張している。これは Siegel による楕円曲線の点の座標に関する同様の定理の力学系版だと見做せるが、その証明の鍵はどちらもディオファントス近似における Roth の定理であり、本質的に数論的な現象だと言って良いだろう。

Silverman の定理の仮定を満たす f に対して、数値計算例を一つ載せておく。次数 2 の自己射 $f: \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1, (x:y) \mapsto (x^2 + y^2 : -4xy + y^2)$ と、 f による点 $(1:1)$ の軌道を考えよう。このとき $a(n), b(n)$ は (符号は適当にどちらかを選んでいる) 以下ようになる。

n	$a(n)$	$b(n)$	$\log a(n) / \log b(n) $
0	1	1	NA
1	-2	3	0.630929753571457
2	13	33	0.733574663395198
3	-1258	627	1.10811018104787
4	1975693	3548193	0.961177482019189
5	-16493036395498	15450886725747	1.00214931449425
6	510750150155086510667376013	1258058049053713634998656033	0.985553634620254

実際に $a(n)$ と $b(n)$ の桁数がほぼ一致していることが見て取れる。また、Silverman の定理とは直接関係はないが、桁数が指数的に大きくなっていくことが観察できる。実際桁数は n が 1 大きくなる毎に約 2 倍になっていることが見て取れる。これは実は後で述べる Kawaguchi-Silverman 予想の最も簡単なケースとみなすことができる。

さて、Silverman の定理の以下の高次元化が自然に考えられる。

問題 2.3 (Dynamical Lang-Siegel 問題¹)。 $N \geq 1$ とし、 N 次元射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ の自己全射 $f: \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ を考える。有理点 $x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ であってその f -軌道 $O_f(x)$ が Zariski 稠密なものを考える。軌道の斉次座標を

$$f^n(x) = (a_0(n) : \cdots : a_N(n)), \quad a_0(n), \dots, a_N(n) \text{ は互いに素な整数}$$

と表す。いつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_i(n)|}{\log |a_j(n)|} = 1, \quad 0 \leq i, j \leq N$$

が成立するか？

この問題にアプローチするには 1 次元の時の Silverman の定理の仮定 (2.1) を高次元の場合に適切に拡張しなければならない。仮定 (2.1) は点 $(0 : 1), (1 : 0)$ の f による繰り返し逆像

$$\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(0 : 1), \quad \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(1 : 0)$$

上で f があまり分岐していないという条件だと解釈できる。そこで講演者は一般に標数 0 の体上定義された滑らかな射影多様体の自己全射 $f: X \rightarrow X$ に対して、以下の量に注目した。閉部分スキーム $Y \subset X$ に対して (上の例では $Y = \{(0 : 1), (1 : 0)\}$)

$$e(f, Y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{e_{f^n}(z) \mid z \in X, f^n(z) \in Y\}^{1/n}.$$

但しここで

$$e_{f^n}(z) = \mathcal{O}_{X,z}/(f^n)^* \mathfrak{m}_{f^n(z)} \mathcal{O}_{X,z} \text{ の } \mathcal{O}_{X,z}\text{-加群としての長さ}$$

である。この $e(f, Y)$ は収束し、また実はある X 上の上半連続関数の Y 上での最大値としても定義できることがわかっている。この類の極限が良い性質を持つことや、具体的な例に対してはそれなりに計算可能であることは Dinh [7], Favre [11] によって示されている。Gignac による [12] と講演者の論文 [16, section 4] も参照。

さて Dynamical Lang-Siegel 問題に戻ろう。Silverman の仮定 (2.1) はこの量を用いると

$$e(f, \{(0 : 1), (1 : 0)\}) < \deg f$$

と同値であることが証明できる。講演者は Silverman の定理の高次元化にあたる以下の定理を示した。

定理 2.4 ([16])。問題 2.3 の記号を用いる。 f を定義する斉次多項式の次数を d とし、 $d \geq 2$ とする。

(1) $e(f, \{(0 : \cdots : 0 : 1)\}) < d$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \max\{|a_0(n)|, \dots, |a_{N-1}(n)|\}}{\log \max\{|a_0(n)|, \dots, |a_N(n)|\}} = 1.$$

¹ Silverman の定理は楕円曲線の有理点の成分の桁数に対する Siegel の定理の力学系類似であり、そのアーベル多様体への一般化は Lang の予想 (Faltings によって [10] で証明されている) と呼ばれていた。

(2) *Vojta* 予想を仮定する. $H_i \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ を第 i 成分が 0 である座標超平面とする. $e(f, H_i) < d$ で, さらに軌道 $O_f(x)$ が *generic* ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_i(n)|}{\log \max\{|a_0(n)|, \dots, |a_N(n)|\}} = 1.$$

但し $O_f(x)$ が *generic* とは, $\#O_f(x) = \infty$ かつ任意の真の閉部分集合 $Z \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ に対して $\#Z \cap O_f(x) < \infty$ ということである.

注意 2.5. (1) は実は $O_f(x)$ が無限という仮定だけで正しい. 証明の鍵となるインプットはやはり Roth の定理である. (2) は *Vojta* 予想というディオファントス幾何における非常に強力な予想を仮定しているのだが, これを完全に外すのは現在のところ非常に難しいと思われる. *Vojta* 予想は Roth の定理の一般化であり, 証明の方針を大きく変更しない限り自然に登場してくる. ここで用いている *Vojta* 予想の正確な主張は [16] を参照していただきたい.

注意 2.6. Silverman の定理も講演者の定理も, 問題を局所高さ関数というものの漸近的挙動に置き換え, それに関するより一般的な定理を証明することで得られている. 詳しくは [20], [16] を参照.

2.2 一様有界性予想

一般に力学系が与えられた時, その周期点は様々な情報を持っており, 力学系を理解する手がかりになることが多い. 数論力学系の文脈でもそれは同じだが, そもそも固定された代数体上でどれくらい周期点が存在するのかということが問題になる. 実際例えば $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1$ の自己射 $f: \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1, x \mapsto x^2 + c$ に対して f の周期点とはある n に対する方程式

$$f^n(x) = x$$

の解である. これは x についての次数 2^n の多項式であり, 固定された数体上に解をそんなに持たないかもしれない. 実際以下がよく知られている. (自己射の標準高さ関数と Northcott の定理を使えば良い.)

命題 2.7. K を代数体, $f: \mathbb{P}_K^N \rightarrow \mathbb{P}_K^N$ を K 上定義された自己全射で同型ではないものとする. この時,

$$\text{Per}(f, \mathbb{P}^N(K)) := \{x \in \mathbb{P}^N(K) \mid \text{ある } n \geq 0 \text{ に対して } f^n(x) = x\}$$

は有限集合. より一般に,

$$\text{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K)) := \{x \in \mathbb{P}^N(K) \mid \#O_f(x) < \infty\}$$

とする時,

$$\# \bigcup_{[K:\mathbb{Q}] \leq D} \text{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K)) < \infty.$$

ここで合併は代数体 K で \mathbb{Q} 上の拡大次数がある定数 D で抑えられているものにわたってとっている.

ここで導入した $\text{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K))$ の元を f の擬周期点 (preperiodic point) と呼ぶ. 擬周期点は各射 f に対しては固定された数体上有限個しかないわけだが, その個数は射 f にどの程度依存するのだろうか. すぐに

わかるように、 f の次数を大きくしていくと、いくらでも多くの擬周期点を作ることができる。実際 $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ の自己射 f をアフィン座標で以下のように定めてみる。

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m)$$

この時、 0 は固定点であり、 $1, 2, \dots, m$ は全て 0 に写されるので擬周期点である。では次数を固定するとどうなるだろうか？ Morton-Silverman の以下の予想は、数論力学系における最も挑戦的な問題の一つだと言えるだろう。

予想 2.8 (Morton-Silverman's Uniform Boundedness Conjecture, 一様有界性予想). $d \geq 1, D \geq 1, N \geq 1$ とする. この時定数 $C \geq 1$ が存在して、以下が成立する. 代数体 K で $[K : \mathbb{Q}] \leq D$ なるものと、 K 上定義された次数 d の自己全射 $f: \mathbb{P}_K^N \rightarrow \mathbb{P}_K^N$ に対して

$$\# \text{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K)) \leq C.$$

ここでは f の次数とは f を定義する斉次多項式の字数のことである。つまり第 1 力学次数のことである。

注意 2.9. 簡単な議論で $\text{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K))$ を

$$\bigcup_{[K:\mathbb{Q}] \leq D} \text{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K))$$

に置き換えても良いことがわかる。

この予想は $N = 1$ の時でも一般に未解決である。この予想がいかに強力かを示す例として、楕円曲線のトーショナルパートの位数の有界性 (Mazur-Merel の定理) が従うことを指摘しておく。実際、 E を代数体 K 上の楕円曲線とすると、以下の図式を作ることができる。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{[2]} & E \\ \wr \langle -1 \rangle \downarrow & & \downarrow \wr \langle -1 \rangle \\ \mathbb{P}_K^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_K^1 \end{array}$$

但し、 $[2]$ は 2 倍写像、縦の射は -1 倍作用による商、 f は誘導される射である。この時、 $[2]$ の擬周期点集合はちょうど E のトーショナル点集合になる。一方 f は次数 4 の自己全射であるから、予想 2.8 からその K 上の擬周期点集合の位数は E によらずに一様に抑えられる。従って $E(K)$ のトーショナル部分群の位数も E によらずに抑えられることになる。

より一般に、アーベル多様体のトーショナル部分群の位数の有界性も予想 2.8 から従うことが知られている [9]。

さて一様有界性予想、特に \mathbb{P}^1 の自己射で \mathbb{A}^1 の自己射にもなっているもの (力学系の世界では多項式写像と呼ばれるもの) の擬周期点については多くの研究がある。全ての研究を紹介することはできないが、ここ数年の大きな進展だけ紹介したい。まず、一様有界性予想の関数体類似 (K を代数体ではなく関数体にしたもの) については以下の肯定的な結果が証明されている。

定理 2.10 (Doyle-Poonen [8]). $d \geq 2, D \geq 1$ とし、体 k を $\text{char } k$ が d を割り切らないものとする。 K を k 上の既約代数曲線の関数体とする。このとき、定数 $C \geq 1$ があり

$$\# \text{Preper}(x^d + c, \mathbb{P}^1(L)) \leq C$$

が K の任意の有限次拡大 L で $[L : K] \leq D$ なるものと, $c \in L$ であって k 上代数的でないものに対して成立する. k が有限体なら c が k 上代数的でないという条件は外せる.

ここで $x^d + c$ は $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1, x \mapsto x^d + c$ なる射を \mathbb{P}^1 に拡張したものとみなしている.

代数体の場合は講演者の知る限りこのレベルの肯定的な結果は一つも知られていない. しかし, Vojta 予想の非常に特別な場合であり, abc 予想の自然な一般化である abcd 予想というものを仮定すると Looper により以下のような肯定的な結果が知られている. (標数 0 の関数体の場合, Doyle-Poonen の一般化も与えている.)

定理 2.11 (Looper [14,15]). K を代数体か標数 0 の 1 次元関数体とする. $f(x) \in K[x]$ を次数が $d \geq 2$ の多項式とする. K が代数体なら abcd 予想を仮定する. K が関数体なら f は non-isotrivial だと仮定する. このとき, d と K のみに依存する定数 $C \geq 1$ が存在して

$$\# \text{Preper}(f(x), \mathbb{P}^1(K)) \leq C$$

が成立する.

abcd 予想は任意の代数体上で高さ関数などを用いて定式化されるので一般的な形は [14] を参照してもらいたい. ここでは有理数体 \mathbb{Q} に対する abcd 予想を高さ関数などを用いない形に翻訳しておく.

予想 2.12 (\mathbb{Q} 上の abcd 予想). $n \geq 2$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある閉部分集合 $Z \subset (x_0 + \cdots + x_n) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ と定数 $C > 0$ が存在して以下が成立する: 任意の整数 $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ で $\gcd(a_0, \dots, a_n) = 1$ かつ $a_0 + \cdots + a_n = 0$ なるものに対して, $(a_0 : \cdots : a_n) \notin Z$ ならば

$$\text{rad}(a_0 \cdots a_n)^{1+\varepsilon} \geq C \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\}.$$

ここで rad は整数の根基を表す.

3 高次元の数論力学系

高次元の数論力学系の研究は近年活発になってきているが, まだまだ未開拓な領域だと言って良いと思われる. X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された射影多様体, $f: X \dashrightarrow X$ を支配的な有理写像とする. (射に限らず有理写像まで考える理由は, その方が力学系の観点から豊かで興味深い現象が起きるからである. また X としては任意の射影多様体を考えるが, $X = \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^N$ の場合が特に興味深いことが多いことを指摘しておく. それは $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^N$ が豊富な自己射, 自己写像を持つからである.) 高次元数論力学系では f やその軌道を数論的観点から研究するわけだが, 1 次元の時にはなかった基本的な問題がいくつかすぐに生じる. $x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ とする. まず, f が有理写像なので x の f -軌道は一般には定義できないかもしれない. そこで

$$X_f(\overline{\mathbb{Q}}) := \{x \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \mid f^n(x) \notin I_f, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

という集合を考える. ただしここで I_f は f の不確定点集合である. この集合 $X_f(\overline{\mathbb{Q}})$ は可算集合から可算個の部分集合を取り除いた形をしているので直ちには元を持つかわからないのだが, Amerik により空集合ではないことが示されている [1]. [22] も参照. さらに f が有限位数 (i.e. ある $n \geq 1$ があり $f^n = \text{id}$) でなければ, 無限軌道が存在することも示されている.

さて, X が 1 次元の場合は無限軌道は自動的に Zariski 稠密軌道でもある. しかし X が 2 次元以上の場合

は、無限軌道というだけでは Zariski 稠密かどうか分からない。Zariski 稠密ではない軌道は、低次元の力学系の軌道だと見做せるので、興味深いのは Zariski 稠密軌道である。以下のような問題が自然に考えられる。

- (1) Zariski 稠密軌道はいつ存在するのか？
- (2) Zariski 稠密軌道は X の部分多様体とどの程度交わるのか？
- (3) Zariski 稠密軌道が存在するとして、その数論的性質について何が期待できるのか？

一つ目と二つ目の問いは具体的な問題であり、それぞれ Zariski 稠密軌道予想, Dynamical Mordell-Lang 予想と呼ばれる予想が定式化されている。三つ目は数論力学系という分野そのものの根幹に関わる問いであり当然一つの主張にまとめられるような類のものではないが、ここでは Kawaguchi-Silverman 予想という問題を紹介することにする。

3.1 Zariski 稠密軌道予想

自己写像が定数でない有理関数を不変に保つ場合、各軌道上でその有理関数の値は一定になってしまうから Zariski 稠密軌道は存在し得ない。この逆が成り立つであろうというのが以下の予想である。

予想 3.1 (Zariski 稠密軌道予想. S.W. Zhang [23], Medvedev-Scanlon [19],). k を標数 0 の代数閉体, X を k 上の射影多様体, $f: X \dashrightarrow X$ を支配的有理写像とする。この時、以下は同値。

- (1) ある $x \in X(k)$ があり, f -軌道 $O_f(x)$ は well-defined (i.e. $f^n(x) \notin I_f, n = 0, 1, \dots$) かつ X で Zariski 稠密。
- (2) 支配的有理写像 $\pi: X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1$ であって、以下の図式が可換になるものは存在しない。

$$\begin{array}{ccc}
 X & \overset{f}{\dashrightarrow} & X \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi \\
 & \mathbb{P}_k^1 &
 \end{array}$$

注意 3.2.

- (1) k が非加算 (e.g. $k = \mathbb{C}$) の時は、この予想は Amerik-Campana によって証明されている [2]。より代数的な証明は [3] を参照。
- (2) 数論力学系の観点からは $k = \overline{\mathbb{Q}}$ の場合が興味深いのだが、この場合は一般に未解決である。

Zariski 稠密軌道予想については多くの研究があり、特殊な多様体や写像についての肯定的な結果が数多く知られている。ここでは最近の Xie による結果 [22] と講演者の結果だけ紹介することにする。Xie はこの論文で adelic topology というものを導入し、それをを用いて Zariski 稠密軌道予想にアプローチした。 \mathbb{Q} 上の超越次元が有限な代数閉体 k とその上の有限型被約分離的スキーム X に対し、adelic topology は $X(k)$ 上の位相で k のあらゆる \mathbb{C}_p への埋め込みの情報をもちつつガロア共役を反映して適切に荒くした位相であると言える。

定理 3.3 (Xie [22]). k を標数 0 の代数閉体で \mathbb{Q} 上の超越次元が有限なものとする。 X を k 上の滑らかな射影代数曲面とし, $f: X \dashrightarrow X$ を自己全射だとする。このとき, f が予想 3.1 の条件 (2) を満たすならば, 空でない adelic open set $U \subset X(k)$ が存在して任意の $x \in U$ に対して x の f -orbit は well-defined かつ $O_f(x)$ は Zariski 稠密。特に, 任意の標数 0 の代数閉体 k , k 上の滑らかな射影代数曲面, その上の自己全射に対し

て予想 3.1 は正しい.

講演者は Long Wang との共同研究で Xie の adelic topology と後で説明する Kawaguchi-Silverman 予想に関連する技術を用いることで次の定理を証明した.

定理 3.4 (Matsuzawa-Wang [18]). X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影多様体, $f: X \dashrightarrow X$ を支配的有理写像とする. f が 1-cohomologically hyperbolic だとすると, 空でない adelic open set $U \subset X(\overline{\mathbb{Q}})$ が存在して任意の $x \in U$ に対して x の f -orbit は well-defined かつ $O_f(x)$ は Zariski 稠密.

注意 3.5. f が 1-cohomologically hyperbolic とは, f の第一力学次数が他の力学次数より真に大きいということである. 例えば曲面の自己双有理写像であれば第一力学次数が 1 より真に大きいということと同値である. また 1-cohomologically hyperbolic は予想 3.1 の条件 (2) を自動的に満たすことが示せる.

3.2 Dynamical Mordell-Lang 予想

さて, 一度 Zariski 稠密軌道の存在がわかった場合, その性質について何が言えるだろうか? 例えば (標数 0 の) 体 k 上の準射影多様体 X 上の支配的自己射 $f: X \rightarrow X$ が与えられていて, 点 $x \in X(k)$ の軌道が Zariski 稠密だとする. このとき, 軌道 $O_f(x)$ は部分多様体 $Z \subset X$ とどの程度交わるだろうか? $O_f(x)$ はただの部分集合ではなく, 代数的な写像によって作られているものだから, かなり特殊な部分集合だと考えられている. 例えば極端な (しかし示唆的な) 例として, X がアーベル多様体, f が点 $a \in X(k)$ によるトランスレーション写像の場合を考える. この場合, $O_f(x) = \{x, x+a, x+2a, x+3a, \dots\}$ となり, これと部分多様体 $Z \subset X$ との交わりは Mordell-Lang 予想 (Faltings と Vojta の定理) から ($O_f(x)$ が Zariski 稠密に関係なく) 以下を満たす:

$$\overline{O_f(x) \cap Z} = \bigcup_{i=1}^r (a_i + A_i), \quad a_i \in X(k), \quad A_i \subset X \text{ は部分アーベル多様体.}$$

ここで左辺のオーバーラインは Zariski 閉包を意味する. 簡単な観察から

$$\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^n(x) \in Z\} = \bigcup_{i=1}^r \{l_i + mk_i \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

と, $l_i, k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて表せることがわかる (有限個の等差数列の合併になっている). この事実をそのまま一般化したものが次の予想である.

予想 3.6 (Dynamical Mordell-Lang 予想). k を標数 0 の代数閉体, X を k 上の準射影多様体, $f: X \rightarrow X$ を自己射とする. $Z \subset X$ を X の閉集合とし, $x \in X(k)$ とする. この時, ある $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $l_i, k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i = 1, \dots, r$ が存在して

$$\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^n(x) \in Z\} = \bigcup_{i=1}^r \{l_i + mk_i \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

が成立する.

この予想を認めると, Zariski 稠密軌道は真の部分多様体 Z と有限回しか交わらないことが示せることを指摘しておく. (つまり generic ということ.) 実際, $\#O_f(x) \cap Z = \infty$ と仮定すると, ある $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在して

$$f^{l+mk}(x) \in Z, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

そこで W を $\{f^l(x), f^{l+k}(x), f^{l+2k}(x), \dots\}$ の Zariski 閉包とすると

$$O_f(x) \subset \{x, f(x), \dots, f^{l-1}(x)\} \cup W \cup f(W) \cup \dots \cup f^{k-1}(W)$$

となり、右辺は $W \subset Z$ だから真の閉集合なので矛盾する。

Dynamical Mordell-Lang 予想に関しても多くの研究があり、様々な部分結果が得られている。問題の一般的な性質上、線形回帰列など数論力学系以外の分野との関連もあり、現在も活発に研究されている興味深い問題だと思う。興味のある方は例えば [5] を参照されると良いと思う。

さて、一般には予想 3.6 は未解決であるが、自己同型やより一般に étale 射の場合は軌道の p -進補完という手法を用いて肯定的に解決されている。

定理 3.7 (Bell-Ghioca-Tucker [4]). 予想 3.6 は f が étale 射の場合正しい。

インフォーマルには p -進補完とは、写像 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow X(\mathbb{Q}_p), n \mapsto f^n(x)$ を p -進解析的な写像 $\mathbb{Z}_p \rightarrow X(\mathbb{Q}_p)$ に拡張することである。これが可能ならば、解析関数の零点が \mathbb{Z}_p 内で無限個あるとその関数は恒等的に 0 でなければならないということから Dynamical Mordell-Lang 予想が証明できる。

この p -進補完という方法は射が分岐していると同じようには使うことができない。例えば \mathbb{P}^2 の自己射に対しては Dynamical Mordell-Lang 予想は未解決である。

しかし、分岐点などの悪い場所を避けて p -進補完を使うことで “general” には Dynamical Mordell-Lang 予想は正しいことが知られている。

命題 3.8 (Xie [22]). k を \mathbb{Q} 上の有限生成体の代数閉包、 X を k 上の準射影多様体、 $f: X \dashrightarrow X$ を支配的有理写像とする。この時、空でない adelic open set $U \subset X(k)$ が存在して、任意の $x \in U$ に対してその f -軌道 $O_f(x)$ は Dynamical Mordell-Lang 予想の主張を満たす。

3.3 Kawaguchi-Silverman 予想

最後に Kawaguchi-Silverman 予想という軌道の数論的性質に関する問題の中で最も基本的なものを一つ紹介する。まずは射影空間の場合を用いてこの予想の意味するところを説明したいと思う。射影空間の自己写像

$$f: \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N, (x_0 : \dots : x_N) \mapsto (P_0 : \dots : P_N)$$

を考える。ここで、 $P_0, \dots, P_N \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_N]$ は $(\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_N]$ での) 最大公約数が 1 の同じ次数の整数係数斉次多項式とする。その共通の次数を d とおき、 $d \geq 2$ と仮定する。この写像による有理点 $a = (a_0 : \dots : a_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の軌道を考える。有理点の斉次座標 a_0, \dots, a_N はいつでも整数にしてよく、さらに最大公約数が 1 であるようにすることができる。このとき

$$h(a) = \log \max\{|a_0|, \dots, |a_N|\}$$

を点 a の高さと呼ぶ。これは大体点 a を表すのに必要なビット数であり、点の数論的な複雑さを測る量である。(Weil 高さ関数の最も基本的な場合である。)

このとき、以下のような問題は自然であろう。

問題 3.9. $h(f^n(a))$ は n が増大する時どのように増大するか？

以下のような観察が直ちに行える。 n 回合成 f^n の成分表示をまず考える。 f をアフィン空間の自己写像と

みたものを

$$F: \mathbb{A}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{A}^{N+1}, (x_0, \dots, x_N) \mapsto (P_0, \dots, P_N)$$

とおき, $F^n = (P_0^{(n)}, \dots, P_N^{(n)})$ とおく. このとき, $P_0^{(n)}, \dots, P_N^{(n)}$ の $\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_N]$ での最大公約元を G_n とおくと,

$$f^n = \left(\frac{P_0^{(n)}}{G_n} : \dots : \frac{P_N^{(n)}}{G_n} \right) \quad (3.1)$$

とかける. この約分された多項式 $P_i^{(n)}/G_n$ の次数は f^n の実質的な幾何的複雑さを表していると思える. この次数を $\deg_1(f^n)$ と表すことにする. これらの記号を用いると以下がわかる.

$$h(f^n(a)) \leq \log \max \left\{ \left| \frac{P_0^{(n)}}{G_n}(a) \right|, \dots, \left| \frac{P_N^{(n)}}{G_n}(a) \right| \right\}.$$

この不等式から大雑把には

$$h(f^n(a)) \ll \deg_1(f^n)h(a)$$

が期待できる. 多項式の係数などからくる項の問題があるのだが, それは以下のようにして処理できてこの観察は正当化でき最終的に不等式 (3.2) を示すことができる.

まず

$$\begin{aligned} h(f^n(a)) &\leq \log \max \left\{ \left| \frac{P_0^{(n)}}{G_n}(a) \right|, \dots, \left| \frac{P_N^{(n)}}{G_n}(a) \right| \right\} \\ &\leq \log \left(2^{N+1+\deg_1(f^n)} \max \left\{ \left\| \frac{P_0^{(n)}}{G_n} \right\|, \dots, \left\| \frac{P_N^{(n)}}{G_n} \right\| \right\} \max\{|a_0|, \dots, |a_N|\}^{\deg_1(f^n)} \right) \\ &\leq \deg_1(f^n)h(a) + (N+1+\deg_1(f^n)) \log 2 + \log \max \left\{ \left\| \frac{P_0^{(n)}}{G_n} \right\|, \dots, \left\| \frac{P_N^{(n)}}{G_n} \right\| \right\}. \end{aligned}$$

ただしここで $\|\cdot\|$ は多項式のガウスノルム, つまり係数の絶対値の最大値を表す. ガウスノルムに対し次の不等式が成り立つことを指摘しておく (cf. [24, 命題 3.8]). $P, Q \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$ に対して

$$\begin{aligned} \|PQ\| &\leq 2^{N+1+\min\{\deg P, \deg Q\}} \|P\| \|Q\| \\ \|P\| \|Q\| &\leq e^{(N+1)(\deg P + \deg Q)} \|PQ\|. \end{aligned}$$

これと, $\deg P_i^{(n)} = d^n$ に注意すると, 以下のことがわかる: N のみに依存して決まるある定数 $C \geq 1$ が存在して

$$\max \left\{ \left\| \frac{P_0^{(n)}}{G_n} \right\|, \dots, \left\| \frac{P_N^{(n)}}{G_n} \right\| \right\} \leq (C \max\{\|P_0\|, \dots, \|P_N\|\})^{nd^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

従って $d = \deg_1(f)$ であることに注意すると

$$h(f^n(a)) \leq \deg_1(f^n)(h(a) + \log 2) + n \deg_1(f)^n \log(C \max\{\|P_0\|, \dots, \|P_N\|\}) + (N+1) \log 2.$$

この不等式を f^k ($k \geq 1$) に対して適用すると

$$\begin{aligned} h(f^{nk}(a)) &\leq \deg_1(f^{nk})(h(a) + \log 2) + n \deg_1(f^k)^n \log \left(C \max \left\{ \left\| \frac{P_0^{(k)}}{G_k} \right\|, \dots, \left\| \frac{P_N^{(k)}}{G_k} \right\| \right\} \right) + (N+1) \log 2 \\ &\leq \deg_1(f^{nk})(h(a) + \log 2) + n \deg_1(f^k)^n \log \left(C (C \max\{\|P_0\|, \dots, \|P_N\|\})^k \deg_1(f)^k \right) + (N+1) \log 2. \end{aligned}$$

従って, n, k に依存しない定数 $C_1, C_2 \geq 1$ を用いて

$$h(f^{nk}(a)) \leq C_1 \deg_1(f^{nk}) + C_2 n k \deg_1(f^k)^n \deg_1(f)^k$$

となる. よって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h(f^{nk}(a))^{1/nk} \leq \max\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \deg_1(f^{nk})^{1/nk}, \deg_1(f)^{1/k} \}.$$

ここで右辺の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \deg_1(f^{nk})^{1/nk}$$

についてであるが, 一般に以下の極限が存在することが知られている:

$$d_1(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \deg_1(f^n)^{1/n}.$$

この値は f の第一力学次数と呼ばれており, f の幾何的複雑さを表す不変量である. この記号を用いると

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h(f^{nk}(a))^{1/nk} \leq \max\{d_1(f), \deg_1(f)^{1/k}\}.$$

右辺は a に無関係な量なので, この不等式を $a, f^a, \dots, f^{k-1}(a)$ に適用することで

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h(f^n(a))^{1/n} \leq \max\{d_1(f), \deg_1(f)^{1/k}\}$$

が任意の $k \geq 1$ に対して成立することがわかる. 右辺は $k \rightarrow \infty$ とすると $d_1(f)$ に収束するので, 最終的に

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h(f^n(a))^{1/n} \leq d_1(f) \tag{3.2}$$

を得る.

多項式の繰り返し合成の係数の評価に少しややこしい計算があったが, この不等式の本質的な意味は以下のようなものである: f^n を計算する際の多項式レベルでの約分 (3.1) が $f^n(a)$ を計算する際の成分間の整数レベルでの約分を与えるが, それが高さ $h(f^n(a))$ の上からの評価を与えている.

整数レベルでの約分というのはランダムな状況では基本的にほぼ発生しないと考えるのが自然であるが, もしそのような約分が起こるならそれは多項式レベルでの約分から必ずくるといえるだろうか? それが一歩漸近的には正しいと主張するのが以下の Kawaguchi-Silverman 予想である.

予想 3.10 ($\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ に対する Kawaguchi-Silverman 予想 cf. [21]). 上の記号のもと $O_f(a)$ が Zariski 稠密ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(f^n(a))^{1/n} = d_1(f).$$

ここで登場した第一力学次数 $d_1(f)$ は実は任意の射影代数多様体の支配的自己有理写像に対しても定義できる. また, 高さ関数 h も $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の任意の射影多様体上の $\overline{\mathbb{Q}}$ 点に対して定義することができる. 詳しい定義はここでは省略するが, 一般的な形での Kawaguchi-Silverman 予想を述べておく.

予想 3.11 (Kawaguchi-Silverman 予想 cf. [13]). X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の射影多様体, $f: X \dashrightarrow X$ を支配的自己有理写像, H を X 上の豊富因子とする. $h_H: X(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ を H に付随する Weil 高さ関数とする. このとき, 任意の点 $x \in X_f(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して極限

$$\alpha_f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{1, h_H(f^n(x))\}^{1/n}$$

が存在し, さらに $O_f(x)$ が Zariski 稠密ならば

$$\alpha_f(x) = d_1(f)$$

が成立する.

この予想は一般には未解決である. 近年多くの研究がなされており, 様々な部分結果が知られている. 現在までに知られていることのほぼ全てをまとめたサーベイ論文 [17] を最近執筆したので, 詳細はそちらを参照してもらいたい. 講演者と Long Wang との共同研究で得た最近の結果を一つだけ紹介しておく.

定理 3.12 (Matsuzawa-Wang [18]). X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影多様体, $f: X \dashrightarrow X$ を支配的有理写像とする. f が 1-cohomologically hyperbolic だとし, さらに点 $x \in X_f(\overline{\mathbb{Q}})$ が以下を満たすとする:

$$\begin{aligned} \#O_f(x) &= \infty \\ \#O_f(x) \cap Z &< \infty, \quad Z \subset X \text{ は任意の真の部分多様体.} \end{aligned}$$

このとき, $\alpha_f(x)$ は存在して

$$\alpha_f(x) = d_1(f).$$

注意 3.13. この条件を満たすような軌道を generic な軌道と呼ぶ. 同じ論文 [18] で定理の仮定のもと generic な軌道が十分たくさん存在することも証明している.

参考文献

- [1] E. Amerik. Existence of non-preperiodic algebraic points for a rational self-map of infinite order. *Math. Res. Lett.*, 18(2):251–256, 2011.
- [2] E. Amerik and F. Campana. Fibrations méromorphes sur certaines variétés à fibré canonique trivial. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(2):509–545, 2008.
- [3] J. Bell, D. Ghioca, and Z. Reichstein. On a dynamical version of a theorem of Rosenlicht. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 17(1):187–204, 2017.
- [4] J. P. Bell, D. Ghioca, and T. J. Tucker. The dynamical Mordell-Lang problem for étale maps. *Amer. J. Math.*, 132(6):1655–1675, 2010.
- [5] J. P. Bell, D. Ghioca, and T. J. Tucker. *The dynamical Mordell-Lang conjecture*, volume 210 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.
- [6] R. Benedetto, P. Ingram, R. Jones, M. Manes, J. H. Silverman, and T. J. Tucker. Current trends and open problems in arithmetic dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 56(4):611–685, 2019.
- [7] T.-C. Dinh. Analytic multiplicative cocycles over holomorphic dynamical systems. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 54(3-4):243–251, 2009.

- [8] J. R. Doyle and B. Poonen. Gonality of dynatomic curves and strong uniform boundedness of preperiodic points. *Compos. Math.*, 156(4):733–743, 2020.
- [9] N. Fakhruddin. Questions on self maps of algebraic varieties. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 18(2):109–122, 2003.
- [10] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties. *Annals of Mathematics*, 133(3):549–576, 1991.
- [11] C. Favre. *Dynamique des applications rationnelles*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2000.
- [12] W. T. Gignac. *Equidistribution of preimages in nonarchimedean dynamics*. PhD thesis, 2013.
- [13] S. Kawaguchi and J. H. Silverman. On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 713:21–48, 2016.
- [14] N. R. Looper. Dynamical uniform boundedness and the *abc*-conjecture. *Invent. Math.*, 225(1):1–44, 2021.
- [15] N. R. Looper. The uniform boundedness and dynamical lang conjectures for polynomials. *arXiv preprint arXiv:2105.05240*, 2021.
- [16] Y. Matsuzawa. Growth of local height functions along orbits of self-morphisms on projective varieties. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (4):3533–3575, 2023.
- [17] Y. Matsuzawa. Recent advances on Kawaguchi-Silverman conjecture. *arXiv preprint arXiv:2311.15489*, 2023.
- [18] Y. Matsuzawa and L. Wang. Arithmetic degrees and Zariski dense orbits of cohomologically hyperbolic maps. *arXiv preprint arXiv:2212.05804*, 2022.
- [19] A. Medvedev and T. Scanlon. Invariant varieties for polynomial dynamical systems. *Ann. of Math. (2)*, 179(1):81–177, 2014.
- [20] J. H. Silverman. Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps. *Duke Math. J.*, 71(3):793–829, 1993.
- [21] J. H. Silverman. Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34(2):647–678, 2012.
- [22] J. Xie. The existence of Zariski dense orbits for endomorphisms of projective surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 2022.
- [23] S.-W. Zhang. Distributions in algebraic dynamics. In *Surveys in differential geometry. Vol. X*, volume 10 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 381–430. Int. Press, Somerville, MA, 2006.
- [24] 森脇淳, 川口周, and 生駒英晃. モーデル-ファルティングスの定理: デイオファントス幾何からの完全証明. サイエンス社, 2017.

ネーター代数の加群圏の部分圏の分類

木村 雄太 (大阪公立大学) *

本稿は第 68 回代数シンポジウムにおいて筆者が講演した内容の概説である。大部分の内容は伊山修氏 (東京大学) との共同研究 [IK1, IK2] に基づく。

1 導入

代数の表現論の目的の一つは、代数の加群圏や導来圏の構造の決定である。直既約な加群をすべて分類し、それらの間の射を書き下すことで、代数の加群圏の構造は明らかになる。しかし、それは一般には不可能とされている (Drozd の tame-wild 二分定理がある)。そこで現代の代数の表現論では、加群圏や導来圏の部分圏の構造を解析し、そこから得られる情報を基に加群圏の構造を調べるのが一つの手法となっている。

可換ネーター環と有限次元代数に対して、その加群圏の部分圏の分類が盛んに行われている。可換ネーター環 R の有限生成加群のなす圏 $\text{mod } R$ に対しては、Gabriel[Ga] によるセール部分圏の分類を始め、高橋氏 [T] によるねじれ自由類の分類、Stanley-Wang[SW] によるねじれ類の分類が代表的である (定理 3.1)。いずれも $\text{Spec } R$ の部分集合を用いた分類結果であり、本研究の大きな動機となっている。

一方、有限次元代数 A の有限生成加群のなす圏 $\text{mod } A$ に対して、セール部分圏は単純加群を用いて容易に分類される (命題 3.5)。直交圏を取る操作により $\text{mod } A$ のねじれ類とねじれ自由類は対応しているため、ねじれ類に着目する。有限次元代数の表現論におけるねじれ類の重要な点の一つは傾加群との対応であり、この対応は傾理論を大きく進展させた。足立-伊山-Reiten[AIR] は傾加群を変異の観点から一般化することで、台 τ 傾加群を導入した。台 τ 傾加群は関手的有限なねじれ類と対応している。現在では、ねじれ類に限らず、代数の部分圏の研究は非常に多岐に渡っている [AIR, AHIKM, As, AsI, AP, Ao, BY, CD, DIJ, DIRRT, En, KK, IT, Sa, STV, Y]。

本研究では可換ネーター環と有限次元代数の共通一般化であるネーター代数を扱う。ネーター代数とは可換ネーター環 R 上加群として有限生成な R 代数 Λ のことである。目標はネーター代数 Λ のセール部分圏、ねじれ類およびねじれ自由類の分類である。各素イデアル $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して有限次元代数 $\Lambda(\mathfrak{p})$ が得られる。本研究では、 Λ の部分圏の分類を $\Lambda(\mathfrak{p})$ の部分圏の分類に帰着させる。 Λ のねじれ自由類の分類は $\Lambda(\mathfrak{p})$ のねじれ自由類の分類に完全に帰着される (定理 4.2)。 Λ のセール部分圏の分類は単純 $\Lambda(\mathfrak{p})$ 加群の集合上に定義される順序によって分類される (定理 4.5)。ねじれ類の分類に関しては、完全に有限次元代数のねじれ類の分類に帰着させることは難しい。そのため本研究では、 Λ のねじれ類が $\Lambda(\mathfrak{p})$ のねじれ類で制御可能な代数として、整合的なネーター代数を導入した。そしてネーター代数が整合的であるためのいくつかの十分条件を与えた。その際にネーター代数上の台 τ 傾加群である準傾加群が重要な役割を持つことがわかる。

2 準備

まずはネーター代数を定義する。

定義 2.1. R を可換ネーター環とする。

- (1) 環 Λ は環準同型写像 $R \rightarrow \Lambda$ が存在して、その像が Λ の中心に含まれるとき、 R 代数と呼ばれる。
- (2) R 代数 Λ は R 加群として有限生成のとき、ネーター R 代数と呼ばれる。

ネーター R 代数 Λ を組 (R, Λ) と表す場合もある。

* E-mail : yutakimura@omu.ac.jp

ネター代数は可換ネター環と体上有限次元な代数を含むクラスである. 実際, $\Lambda = R$ とすれば Λ は可換ネター環であり, R を体とすれば Λ は有限次元代数である.

例 2.2. R を可換ネター環とする.

- (1) Q を非輪状な有限箴とする. R を係数に持つ Q の道代数 $\Lambda = RQ$ はネター代数である.
- (2) 有限生成 R 加群 M に対して $\Lambda = \text{End}_R(M)$ はネター代数である.
- (3) 行列環 $M_n(R)$ の部分 R 代数 Λ としてネター代数が得られる. 例えば

$$\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ I & R \end{pmatrix}, \quad I \subset R: \text{イデアル.}$$

目標はネター代数 Λ の有限生成左加群のなす圏 $\text{mod } \Lambda$ の部分圏を分類することである. 部分圏の基本的な用語を準備する.

定義 2.3. \mathcal{A} をアーベル圏, \mathcal{C} をその部分圏とする.

- (1) \mathcal{C} が \mathcal{A} の中で拡大で閉じるとは, \mathcal{A} の任意の短完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して, $L, N \in \mathcal{C}$ ならば $M \in \mathcal{C}$ が成立するときをいう.
- (2) \mathcal{C} が \mathcal{A} の中で商対象で閉じるとは, \mathcal{A} の任意の全射 $M \rightarrow N$ に対して, $M \in \mathcal{C}$ ならば $N \in \mathcal{C}$ が成立するときをいう.
- (3) \mathcal{C} が \mathcal{A} の中で部分対象で閉じるとは, \mathcal{A} の任意の単射 $L \rightarrow M$ に対して, $M \in \mathcal{C}$ ならば $L \in \mathcal{C}$ が成立するときをいう.

本研究で扱う部分圏は以下の 3 つである.

定義 2.4. \mathcal{A} をアーベル圏, \mathcal{C} をその部分圏とする.

- (1) \mathcal{C} は拡大と商対象で閉じるとき, **ねじれ類**と呼ばれる.
- (2) \mathcal{C} は拡大と部分対象で閉じるとき, **ねじれ自由類**と呼ばれる.
- (3) \mathcal{C} は拡大と商対象と部分対象で閉じるとき, **セール部分圏**と呼ばれる.

\mathcal{A} のねじれ類, ねじれ自由類, セール部分圏全体のなす集合をそれぞれ $\text{tors } \mathcal{A}$, $\text{torf } \mathcal{A}$, $\text{serre } \mathcal{A}$ と表す. これらは部分圏の包含によって順序集合である. 即ち $\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ を $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ と定義する. $\mathcal{A} = \text{mod } \Lambda$ のとき, $\text{tors}(\text{mod } \Lambda)$ を $\text{tors } \Lambda$ と表す. ねじれ自由類とセール部分圏も同様に $\text{torf } \Lambda$, $\text{serre } \Lambda$ と表す.

- 例 2.5.** (1) $R = \Lambda = \mathbb{Z}$ とする. このとき $\{\mathbb{Z}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\text{mod } \mathbb{Z}$ のねじれ自由類である. $\{\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}/(p_i^{n_i}) \mid n_i \geq 1, \ell \geq 0, p_i \text{ は素数}\}$ は $\text{mod } \mathbb{Z}$ のねじれ類である.
- (2) 一般に $R = \Lambda$ を整域とする. $M \in \text{mod } R$ に対して $t(M) := \{x \in M \mid \exists a \in R \setminus 0, ax = 0\}$ とする. このとき $\{M \in \text{mod } R \mid t(M) = 0\}$ は $\text{mod } R$ のねじれ自由類である. $\{M \in \text{mod } R \mid t(M) = M\}$ は $\text{mod } R$ のねじれ類である.
- (3) k を体とする. このとき $\text{tors } k = \text{torf } k = \text{serre } k = \{0, \text{mod } k\}$ である.

明らかに $\text{serre } \Lambda$ は $\text{tors } \Lambda$ と $\text{torf } \Lambda$ の部分集合である. 以下で $\text{tors } \Lambda$ と $\text{torf } \Lambda$ の関係を述べる. $\text{mod } \Lambda$ の部分圏 \mathcal{C} の右直行圏 \mathcal{C}^\perp および左直行圏 ${}^\perp \mathcal{C}$ を次で定める.

$$\mathcal{C}^\perp := \{M \in \text{mod } \Lambda \mid \text{Hom}_\Lambda(X, M) = 0 \forall X \in \mathcal{C}\}, \quad {}^\perp \mathcal{C} := \{M \in \text{mod } \Lambda \mid \text{Hom}_\Lambda(M, X) = 0 \forall X \in \mathcal{C}\}.$$

補題 2.6. Λ をネター代数とする. 直交部分圏を取ることで, 順序を反転する写像が 2 つ導かれて, (a) と (b) が成立する.

$$(-)^\perp: \text{tors } \Lambda \rightleftarrows \text{torf } \Lambda: {}^\perp(-)$$

- (a) ${}^\perp(-) \circ (-)^\perp = \text{id}_{\text{tors } \Lambda}$
- (b) Λ がアルティンのならば, これらは順序集合の反同型である.

以降の議論のために記号を用意しておく. $\text{mod } \Lambda$ の部分圏または加群の族 \mathcal{C} に対して

- $\text{add } \mathcal{C} = \{M \in \text{mod } \Lambda \mid M \text{ は } \mathcal{C} \text{ の加群の有限直和の直和因子}\}$

- $\text{Fac } \mathcal{C} = \{M \in \text{mod } \Lambda \mid \text{add } \mathcal{C} \text{ の加群から } M \text{ への全射が存在する} \}$
- $\text{Filt } \mathcal{C} = \{M \in \text{mod } \Lambda \mid \text{部分加群の列 } 0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_\ell = M, M_i/M_{i-1} \in \mathcal{C} \text{ が存在する} \}$

3 先行研究

ここでは可換ネター環および有限次元代数に対して、ねじれ類、ねじれ自由類、セール部分圏について知られている分類結果を紹介する。またネター代数における準傾理論を解説し、ネター代数の関手的有限なねじれ類の分類を確認する。

3.1 可換ネター環の部分圏の分類

R を可換ネター環とし、 R の素イデアル全体のなす集合を $\text{Spec } R$ とする。有限生成 R 加群 M に対して

$$\text{Supp } M = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}, \quad \text{Ass } M = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid \exists R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M\}$$

とする。それぞれ M の台、随伴素イデアルのなす集合と呼ばれる。 $\text{Spec } R$ の部分集合 \mathcal{W} は、 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \in \text{Spec } R$ に対して $\mathfrak{p} \in \mathcal{W}$ ならば $\mathfrak{q} \in \mathcal{W}$ となるとき、特殊化閉集合と呼ばれる。 $\text{Spec } R$ の特殊化閉集合のなす集合を $\text{Spcl } R$ で表す。これは部分集合の包含で順序集合となる。例えば $\text{Supp } M$ は特殊化閉集合である。特殊化閉集合の和集合も特殊化閉集合である。

これらの準備のもとで、 $\text{mod } R$ のねじれ類、ねじれ自由類、セール部分圏は以下のように分類される。集合 S に対して、その冪集合を $P(S)$ と表す。

定理 3.1. R を可換ネター環とする。

- (a) [Ga] $\mathcal{C} \in \text{serre } R$ に対して $\text{Supp}(\mathcal{C}) = \bigcup_{M \in \mathcal{C}} \text{Supp } M$ とする。これは順序集合の同型

$$\text{serre } R \xrightarrow{\sim} \text{Spcl } R$$

を導く。逆写像は $\text{Supp}^{-1}(\mathcal{W}) = \{M \in \text{mod } R \mid \text{Supp } M \subseteq \mathcal{W}\}$ で与えられる。

- (b) [T] $\mathcal{C} \in \text{torf } R$ に対して $\text{Ass}(\mathcal{C}) = \bigcup_{M \in \mathcal{C}} \text{Ass } M$ とする。これは順序集合の同型

$$\text{torf } R \xrightarrow{\sim} P(\text{Spec } R)$$

を導く。逆写像は $\text{Ass}^{-1}(\mathcal{W}) = \{M \in \text{mod } R \mid \text{Ass } M \subseteq \mathcal{W}\}$ で与えられる。

- (c) [SW] $\text{serre } R = \text{tors } R$ である。

以上により、可換ネター環のねじれ類、ねじれ自由類、セール部分圏は $\text{Spec } R$ を用いて分類されることがわかる。本研究では、ねじれ類とセール部分圏が $\text{Spec } R$ を用いて分類可能であるようなネター代数のクラスを取り上げる。

3.2 関手的有限なねじれ類と 2 項準傾複体

まずは関手的有限性を説明する。 Λ をネター代数とし、 \mathcal{C} を $\text{mod } \Lambda$ の部分圏とする。加群 $A \in \text{mod } \Lambda$ の左 \mathcal{C} 近似とは射 $f : A \rightarrow C$ ($C \in \mathcal{C}$) であり、 $\text{Hom}_\Lambda(f, -)|_{\mathcal{C}} : \text{Hom}_\Lambda(C, -) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(A, -)$ が全射となるものである。 $\text{mod } \Lambda$ の任意の加群に対して左 \mathcal{C} 近似が存在するとき、 \mathcal{C} を共変有限であるという。双対的に右 \mathcal{C} 近似が定義される。 $\text{mod } \Lambda$ の任意の加群に対して右 \mathcal{C} 近似が存在するとき、 \mathcal{C} を反変有限であるという。共変有限かつ反変有限である部分圏を関手的有限であるという。例えば、ねじれ類 $\mathcal{T} \in \text{tors } \Lambda$ は共変有限である。なぜならば任意の $A \in \text{mod } \Lambda$ に対して短完全列 $0 \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow 0$ で $T \in \mathcal{T}$ かつ $F \in \mathcal{T}^\perp$ となるものが存在するためである。 $\text{mod } \Lambda$ の関手的有限なねじれ類のなす順序集合を $\text{f-tors } \Lambda$ とする。

有限次元代数や完備局所環上のネター代数では、関手的有限なねじれ類が 2 項準傾複体と呼ばれる複体と対応している。 2 項準傾複体を導入する。 $\text{proj } \Lambda$ を有限生成射影 Λ 加群のなす圏として、 $K(\Lambda) := K^b(\text{proj } \Lambda)$ を $\text{proj } \Lambda$ の有界ホモトピー圏とする。複体 $X = (\cdots \rightarrow X^{-1} \rightarrow X^0 \rightarrow \cdots) \in K(\Lambda)$ は $X^i = 0$ ($i \neq -1, 0$) のとき 2 項複体と呼ばれる。

定義 3.2. $X \in K(\Lambda)$ とする。

- (1) $\text{Hom}_{K(\Lambda)}(X, X[i]) = 0 \ \forall i > 0$ となるとき、 X を前準傾複体と呼ぶ。

(2) 前準傾複体 X が準傾複体であるとは, X を含み直和因子で閉じる最小の三角圏が $K(\Lambda)$ のときをいう.

(3) 準傾複体である 2 項複体を 2 項準傾複体と呼ぶ.

$\text{add } X = \text{add } Y$ のとき, 2 項準傾複体 X, Y は同値という. この同値による 2 項準傾複体の同値類を $2\text{-silt } \Lambda$ と表す.

例えば $\Lambda \in K(\Lambda)$ は 2 項準傾複体である.

集合 $2\text{-silt } \Lambda$ は $X \leq Y$ を $\text{Hom}_{K(\Lambda)}(Y, X[i]) = 0 \ \forall i > 0$ と定めることで順序集合となる $[\text{AiI}]$.

定理 3.3 ([AIR, Ki]). (R, Λ) をネター代数として, R は完備局所環とする. 次の順序集合の同型が得られる.

$$2\text{-silt } \Lambda \longrightarrow \text{f-tors } \Lambda, \quad X \mapsto \text{Fac } H^0(X).$$

ここで $H^0(X)$ は複体 X の 0 番目コホモロジーである.

この定理は R が体の場合に [AIR] で示された. その後 [Ki] で完備局所環上のネター代数に拡張された.

$M \in \text{mod } \Lambda$ はある $P \in 2\text{-silt } \Lambda$ が存在して $\text{add } M = \text{add } H^0(P)$ となるとき準傾加群と呼ばれる. また, M はある 2 項前準傾複体 P が存在して $\text{add } M = \text{add } H^0(P)$ となるとき前準傾加群と呼ばれる. 準傾加群 M, N は $\text{add } M = \text{add } N$ のとき同値であるといい, $\text{siltm } \Lambda$ で準傾加群の同値類のなす集合とする. R が体の場合, 準傾加群は台 τ 傾加群と呼ばれる [AIR]. 本稿ではネター代数を考えるため, 準傾加群と呼ぶ. ホモロジーを取る操作 $H^0 : 2\text{-silt } \Lambda \rightarrow \text{siltm } \Lambda$ は全単射だと知られている [IK1]. この全単射により $\text{siltm } \Lambda$ を順序集合とみなす.

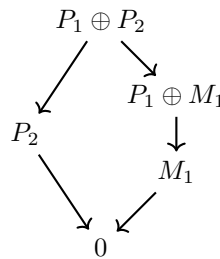
定義より準傾加群は有限生成だが, 有限生成とは限らない準傾加群も研究されている [AMV, An, AH].

R が体の場合, [AIR] によって準傾加群の変異操作が導入された. 変異とは, 準傾加群の直既約因子を異なる直既約因子と取り替えて新たな準傾加群を作る操作である. 詳細は [AIR] を参照せよ. R が完備局所環の場合も同様に変異操作が可能であることが [Ki] で示されている. 特に有限次元代数や完備局所環上のネター代数に対して, 準傾加群が具体的に計算可能である.

例 3.4. (R, \mathfrak{m}) を完備局所環とし, $\ell \geq 1$ を整数とする. Λ を次のネター R 代数とする. 第 (i, i) 成分に関する行列単位を e_i とする. Λ の直既約射影加群の同型類は次の P_1, P_2 の 2 つである.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} R & 0 \\ R/\mathfrak{m}^\ell & R/\mathfrak{m}^\ell \end{bmatrix}, \quad P_1 = \Lambda e_1 = \begin{bmatrix} R \\ R/\mathfrak{m}^\ell \end{bmatrix}, \quad P_2 = \Lambda e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ R/\mathfrak{m}^\ell \end{bmatrix}.$$

自然な包含射 $P_2 \rightarrow P_1$ の余核を M_1 とおく. Λ は非自明な準傾加群を 3 つ持つ: $P_1 \oplus M_1$ と P_2 と M_1 である. $\text{siltm } \Lambda$ の元は 5 つであり, そのハッセ図は次となる (詳細は [AIR, Ki] を参照せよ).



3.3 有限次元代数の部分圏の分類

ここでは R を体として, Λ を有限次元 R 代数とする. 単純 Λ 加群の同型類のなす集合を $\text{sim } \Lambda$ とする. $\text{mod } \Lambda$ のセール部分圏 \mathcal{C} は, \mathcal{C} に含まれる単純加群で決定される.

命題 3.5. 順序集合の同型 $\text{serre } \Lambda \xrightarrow{\sim} P(\text{sim } \Lambda)$ が $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C} \cap \text{sim } \Lambda$ によって得られる. 逆写像は $\mathcal{S} \mapsto \text{Filt } \mathcal{S}$ で与えられる.

補題 2.6(b) より, 有限次元代数 Λ に対して $\text{tors } \Lambda$ と $\text{torf } \Lambda$ は反同型である. そこで $\text{tors } \Lambda$ に着目する. 一般に有限次元代数のねじれ類を全て分類することは難しい問題である. しかし準傾加群が有限個である有限次元代数はねじれ類が全て関手的有限であることが知られている.

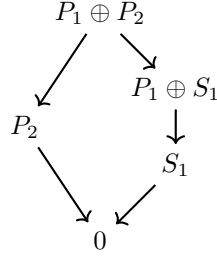
定理 3.6 ([DIJ]). R を体, Λ を有限次元 R 代数とする. $\text{tors } \Lambda, \text{f-tors } \Lambda, 2\text{-silt } \Lambda, \text{siltm } \Lambda$ のいずれか 1 つが有限集合の場合, 残り 3 つも有限集合となる. また, 4 つの集合のいずれかが有限集合であることと, $\text{tors } \Lambda = \text{f-tors } \Lambda$ となることも同値である.

定理の状況が成立する場合, 即ち $\text{tors } \Lambda$ が有限集合の場合, 有限次元代数 A は τ 傾有限と呼ばれる.

例 3.7. k を体として A を次の代数とする. A の直既約射影加群の同型類は次の P_1, P_2 の 2 つである.

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & k \end{bmatrix}, \quad P_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}.$$

また, $S_1 = P_1/\text{rad } P_1, S_2 = P_2/\text{rad } P_2 = P_2$ とおく. $\text{sim } A = \{S_1, S_2\}$ となっている. $\text{siltm } A$ のハッセ図は次となる.



例 3.4 と例 3.7 のハッセ図が一致していることは偶然ではない. 実際に次の定理が成立する. 一般にネター代数 (R, Λ) に対して $\text{s-tors } \Lambda = \{\text{Fac } H^0(P) \mid P \in 2\text{-silt } \Lambda\}$ とする. $\text{s-tors } \Lambda \subseteq \text{f-tors } \Lambda$ となる. R が完備局所環のときは $\text{s-tors } \Lambda = \text{f-tors } \Lambda$ となる.

定理 3.8 ([IK1, Ki]). (R, \mathfrak{m}) を局所環として, (R, Λ) をネター代数とする. このとき次の可換図式が得られて, 縦向きの写像は順序集合の同型である. 横向きの写像は順序埋め込みである. 更に R が完備局所環の場合は, 全ての横向きの写像は順序集合の同型である.

$$\begin{array}{ccc}
 2\text{-silt } \Lambda & \xrightarrow{(R/\mathfrak{m}) \otimes_R (-)} & 2\text{-silt}(\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda) \\
 \downarrow H^0(-) \wr & & \downarrow H^0(-) \wr \\
 \text{siltm } \Lambda & \xrightarrow{(R/\mathfrak{m}) \otimes_R (-)} & \text{siltm}(\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda) \\
 \downarrow \text{Fac}(-) \wr & & \downarrow \text{Fac}(-) \wr \\
 \text{s-tors } \Lambda & \xrightarrow{(-) \cap \text{mod}(\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda)} & \text{f-tors}(\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda).
 \end{array} \tag{3.1}$$

定理の仮定において $\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda = (R/\mathfrak{m}) \otimes_R \Lambda$ は有限次元 R/\mathfrak{m} 代数である. 例 3.4 の代数 Λ と例 3.7 の代数 A は, $R/\mathfrak{m} = k$ とおくと, $\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda = A$ となっている. よって定理より Λ と A の準傾加群のハッセ図は一致する.

以上のように可換環 R が完備局所環の場合は, 関手的有限なねじれ類の分類は有限次元代数での分類に帰着される. それでは一般のネター代数の場合はどうなるだろうか. この疑問を考察するのが本研究である.

4 ねじれ自由類とセール部分圏の分類

4.1 ねじれ自由類の分類

本研究ではネター代数の局所化を用いて部分圏の分類問題を有限次元代数に帰着させる. そこでまずは R の素イデアルによる局所化を定義し, その性質を観察する. $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して $\kappa(\mathfrak{p}) := R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ とし,

$$\Lambda_{\mathfrak{p}} := R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \Lambda, \quad \Lambda(\mathfrak{p}) := \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R \Lambda = \Lambda_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\Lambda_{\mathfrak{p}}$$

とする. $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ はネター $R_{\mathfrak{p}}$ 代数であり, $\Lambda(\mathfrak{p})$ は有限次元 $\kappa(\mathfrak{p})$ 代数である. $\text{mod } \Lambda(\mathfrak{p}) \subseteq \text{mod } \Lambda_{\mathfrak{p}}$ に注意する. $\text{mod } \Lambda$ の部分圏 \mathcal{C} に対して, $\text{mod } \Lambda_{\mathfrak{p}}$ の部分圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ を次で定義する.

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} := \{M_{\mathfrak{p}} \mid M \in \mathcal{C}\} \subseteq \text{mod } \Lambda_{\mathfrak{p}}.$$

補題 4.1. (R, Λ) をネター代数, $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ とする.

(a) $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ は順序を保つ写像 $\text{tors } \Lambda \rightarrow \text{tors } \Lambda_{\mathfrak{p}}$ を導く.

(b) $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C} \cap \text{mod } \Lambda(\mathfrak{p})$ は順序を保つ写像 $\text{tors } \Lambda_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{tors } \Lambda(\mathfrak{p})$ を導く.

この主張は tors を torf や serre に置き換えても成立する.

(b) は直接証明できる. (a) について, 商加群で閉じる (または部分加群で閉じる) という性質が局所化 $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ で保たれることが, 局所化の完全性から従う. \mathcal{C} が拡大で閉じるとき $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ も拡大で閉じるとは, Ext 関手についての同型 $\text{Ext}_{\Lambda}^1(M, N)_{\mathfrak{p}} \simeq \text{Ext}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}^1(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$ を用いて示される.

次の集合の直積を考える.

$$\mathbb{T}_R(\Lambda) := \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} \text{tors } \Lambda(\mathfrak{p}) \quad \mathbb{F}_R(\Lambda) := \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} \text{torf } \Lambda(\mathfrak{p}) \quad \mathbb{S}_R(\Lambda) := \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} \text{serre } \Lambda(\mathfrak{p})$$

これらを直積順序により順序集合とみなす. 補題 4.1 によって順序を保つ次の写像が得られる.

$$\begin{aligned} \Phi_t : \text{tors } \Lambda &\longrightarrow \mathbb{T}_R(\Lambda), & \mathcal{T} &\mapsto (\mathcal{T}_{\mathfrak{p}} \cap \text{mod } \Lambda(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R}, \\ \Phi_f : \text{torf } \Lambda &\longrightarrow \mathbb{F}_R(\Lambda), & \mathcal{F} &\mapsto (\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \cap \text{mod } \Lambda(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R}, \\ \Phi_s : \text{serre } \Lambda &\longrightarrow \mathbb{S}_R(\Lambda), & \mathcal{S} &\mapsto (\mathcal{S}_{\mathfrak{p}} \cap \text{mod } \Lambda(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R}. \end{aligned}$$

この定理によって, ねじれ自由類の分類は完全に有限次元代数のねじれ自由類の分類に帰着される.

定理 4.2. (R, Λ) をネター代数とする. このとき Φ_f は順序集合の同型 $\text{torf } \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_R(\Lambda)$ を導く.

Φ_f の逆写像を記述する. $\mathcal{Y} \in \text{torf } \Lambda(\mathfrak{p})$ を含む $\text{mod } \Lambda_{\mathfrak{p}}$ の最小のねじれ自由類を $F_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{Y})$ と表す. 更に $\mathcal{Y} \in \text{torf } \Lambda(\mathfrak{p})$ に対して

$$\begin{aligned} \psi_f(\mathcal{Y}) &:= \{X \in \text{mod } \Lambda \mid \text{Ass } X \subseteq \{\mathfrak{p}\}, X_{\mathfrak{p}} \in F_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{Y})\} \in \text{torf } \Lambda \\ \Psi_f : \mathbb{F}_R(\Lambda) &\longrightarrow \text{torf } \Lambda, & (\mathcal{Y}^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} &\mapsto \text{Filt}(\psi_f(\mathcal{Y}^{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec } R). \end{aligned}$$

とする. このとき Ψ_f が Φ_f の逆写像だとわかる.

次に定理 4.2 から定理 3.1(b) が得られることを確認する. $\Lambda = R$ とする. $\Lambda(\mathfrak{p}) = \kappa(\mathfrak{p})$ なので, $\text{tors } \Lambda(\mathfrak{p}) = \text{torf } \Lambda(\mathfrak{p}) = \text{serre } \Lambda(\mathfrak{p}) = \{0, \text{mod } \Lambda(\mathfrak{p})\}$ である. よって $\mathbb{F}_R(R) \simeq \text{P}(\text{Spec } R)$, $(\mathcal{Y}^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mapsto \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid \mathcal{Y}^{\mathfrak{p}} = 0\}$ が順序集合の同型を与える. この同型と Φ_f の合成によって次の同型が得られ, かつ定理 3.1(b) の Ass と一致することがわかる.

$$\text{torf } R \simeq \mathbb{F}_R(R) \simeq \text{P}(\text{Spec } R)$$

4.2 セール部分圏の分類

ねじれ類およびセール部分圏について, Φ_t と Φ_s に対して次が成立する.

定理 4.3. (R, Λ) をネター代数とする.

(a) 次で定義する写像 $\Psi_t : \mathbb{T}_R(\Lambda) \rightarrow \text{tors } \Lambda$ が順序を保ち, $\Psi_t \circ \Phi_t = \text{id}_{\text{tors } \Lambda}$ となる.

$$\Psi_t((\mathcal{X}^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}) := \{X \in \text{mod } \Lambda \mid \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } R, \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R X \in \mathcal{X}^{\mathfrak{p}}\}.$$

更に Ψ_t を $\mathbb{S}_R(\Lambda)$ に制限することで $\Psi_s : \mathbb{S}_R(\Lambda) \rightarrow \text{serre } \Lambda$ が得られて, $\Psi_s \circ \Phi_s = \text{id}_{\text{serre } \Lambda}$ となる.

(b) 特に Φ_t および Φ_s は順序埋め込みである. 即ち $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{tors } \Lambda$ に対して $\mathcal{C} \leq \mathcal{D}$ であることと $\Phi_t(\mathcal{C}) \leq \Phi_t(\mathcal{D})$ であることが同値となる.

定理 4.3 によって $\text{tors } \Lambda$ と $\text{serre } \Lambda$ の分類問題は、 $\mathbb{T}_R(\Lambda)$ および $\mathbb{S}_R(\Lambda)$ の中で $\text{Im } \Phi_t$ と $\text{Im } \Phi_s$ の記述を与えることに帰着される。まずはセール部分圏の分類を行う。

$\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ とする。 $\Lambda(\mathfrak{p})$ の単純加群の同型類のなす集合を $\text{sim } \Lambda(\mathfrak{p})$ とする。 $\text{Sim}_R \Lambda := \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} \text{sim } \Lambda(\mathfrak{p})$ とする。命題 3.5 を R の素イデアル毎に適用することで、次の順序集合の同型が得られる。

$$\iota : \mathbb{S}_R(\Lambda) = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} \text{serre } \Lambda(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} P(\text{Sim}_R \Lambda), \quad (\mathcal{C}^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mapsto \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} (\mathcal{C}^{\mathfrak{p}} \cap \text{sim } \Lambda(\mathfrak{p})). \quad (4.1)$$

Φ_s と同型 (4.1) を合成することで $\text{serre } \Lambda$ を $P(\text{Sim}_R \Lambda)$ に埋め込める。そこで以下では、 $P(\text{Sim}_R \Lambda)$ の中で $\text{serre } \Lambda$ を特徴づける。

$$\iota \circ \Phi_s : \text{serre } \Lambda \hookrightarrow \mathbb{S}_R(\Lambda) \xrightarrow{\sim} P(\text{Sim}_R \Lambda).$$

定義 4.4. (R, Λ) をネター代数とする。

- (1) $\text{Sim}_R \Lambda$ 上の半順序 $S \leq T$ を以下で定める: $S \in \text{Sim } \Lambda(\mathfrak{p})$, $T \in \text{Sim } \Lambda(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$ のとき, $\Lambda_{\mathfrak{p}} \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{q}} \rightarrow \Lambda(\mathfrak{q})$ によって T を $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ 加群とみなす。このとき S は T の部分商加群である。
- (2) $\text{Sim}_R \Lambda$ の部分集合 \mathcal{W} は $S \leq T \in \text{Sim}_R \Lambda$ について, $T \in \mathcal{W}$ ならば $S \in \mathcal{W}$ を満たすとき, 下に閉じるという。

定理 4.5. (R, Λ) をネター代数とする。 $\iota \circ \Phi_s : \text{serre } \Lambda \rightarrow P(\text{Sim}_R \Lambda)$ は次の順序集合の同型を導く。

$$\text{serre } \Lambda \simeq \{ \mathcal{W} \subseteq \text{Sim}_R \Lambda \mid \mathcal{W} \text{ は下に閉じる} \}$$

例 4.6. k を体, $R = k[[x]]$, $\mathfrak{m} = (x)$, $K = R_0 = k((x))$ とする。次のネター R 代数 Λ を考える。 $\Lambda(\mathfrak{m}) = \Lambda/\mathfrak{m}\Lambda$ と $\Lambda(0) = \Lambda_0$ は次となる。

$$\Lambda := \begin{bmatrix} R & R & \cdots & R \\ \mathfrak{m} & R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{m} & \cdots & \mathfrak{m} & R \end{bmatrix} \subset M_n(R), \quad \Lambda(\mathfrak{m}) = \begin{bmatrix} R/\mathfrak{m} & R/\mathfrak{m} & \cdots & R/\mathfrak{m} \\ \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & R/\mathfrak{m} & \cdots & R/\mathfrak{m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & \cdots & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & R/\mathfrak{m} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(0) = M_n(K).$$

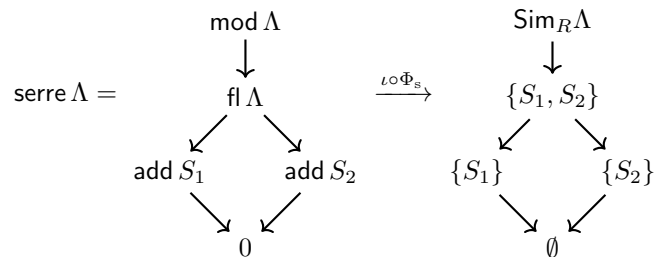
$\Lambda(\mathfrak{m})$ 加群 S_i ($1 \leq i \leq n$) と $\Lambda(0)$ 加群 T を次とする。

$$S_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} K \\ \vdots \\ K \\ \vdots \\ K \end{bmatrix}.$$

すると $\text{Sim } \Lambda(\mathfrak{m}) = \{S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $\text{Sim } \Lambda(0) = \{T\}$ となっている。 $\text{Sim}_R \Lambda = \{T\} \sqcup \{S_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ となり, $T \geq S_i$ ($1 \leq \forall i \leq n$) である。特に

$$|\text{serre } \Lambda| = |\{ \mathcal{W} \subseteq \text{Sim}_R \Lambda \mid \mathcal{W} \text{ は下に閉じる} \}| = 2^n + 1$$

となっている。 $n = 2$ の場合の $\text{serre } \Lambda$ のハッセ図は次となる。



5 ねじれ類の分類

5.1 整合的な元

$\Phi_t : \text{tors } \Lambda \rightarrow \mathbb{T}_R(\Lambda)$ は順序埋め込みである。よってねじれ類の分類のために $\mathbb{T}_R(\Lambda)$ の中で $\text{Im } \Phi_t$ の記述を与えることが目標である。まずは $\mathbb{T}_R(\Lambda)$ の元が $\text{Im } \Phi_t$ に属するための必要条件を与える。 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して順序を保つ写像 $\psi_{\mathfrak{p}}$ が次で定義される。

$$\psi_{\mathfrak{p}} : \text{tors } \Lambda(\mathfrak{p}) \rightarrow \text{tors } \Lambda_{\mathfrak{p}}, \quad \psi_{\mathfrak{p}}(\mathcal{T}) = \{X \in \text{mod } \Lambda_{\mathfrak{p}} \mid \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R X \in \mathcal{T}\}.$$

定義 5.1. (R, Λ) をネター代数, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \in \text{Spec } R$ とする。

(1) 写像 $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ を次の合成写像として定義する。補題 4.1 によって $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ は順序を保つ写像である。

$$r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} : \text{tors } \Lambda(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{p}}} \text{tors } \Lambda_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{(-)_{\mathfrak{q}}} \text{tors } \Lambda_{\mathfrak{q}} \xrightarrow{(-) \cap \text{mod } \Lambda(\mathfrak{q})} \text{tors } \Lambda(\mathfrak{q})$$

(2) $\mathbb{T}_R^c(\Lambda) := \{(\mathcal{X}^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{T}_R(\Lambda) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \text{ ならば } r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\mathcal{X}^{\mathfrak{p}}) \supseteq \mathcal{X}^{\mathfrak{q}} \text{ となる } \}$. この集合の元を整合的な元という。

次の命題によって、 $\mathbb{T}_R(\Lambda)$ の元が整合的であることが $\text{Im } \Phi_t$ に属するための必要条件である。

命題 5.2. (R, Λ) をネター代数とする。このとき $\text{Im } \Phi_t \subseteq \mathbb{T}_R^c(\Lambda)$ となる。

整合的な元は $\Lambda(\mathfrak{p})$ のねじれ類と写像 $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ によって記述されている。よって次の定義を考えることは自然である。

定義 5.3. ネター代数 (R, Λ) は $\text{Im } \Phi_t = \mathbb{T}_R^c(\Lambda)$ となるとき整合的という。

以下本稿では、ネター代数が整合的であるための幾つかの十分条件を与える。最初の結果は R のクルル次元が 1 の場合である。

定理 5.4. R が 1 次元半局所環のとき、ネター代数 (R, Λ) は整合的である。

R が 1 次元局所環の場合、定理 5.4 は比較的容易に証明できる。 R が 1 次元半局所環の場合は極大イデアルの個数に関する帰納法で証明する。

整合的な元を用いることで定理 3.1(a)(c) が得られることを確認する。環 A のジャコブソン根基を $\text{rad } A$ とする。 A は $A/\text{rad } A$ が単純アルティン環であるとき *primary* 環と呼ばれる [CR]. 例えば局所環は *primary* 環である。ネター代数 (R, Λ) が局所的に *primary* とは、任意の $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ が *primary* 環のときをいう。明らかに可換ネター環 $\Lambda = R$ は局所的に *primary* である。

定理 5.5. (R, Λ) を局所的に *primary* なネター代数とする。次が成立する。

- (a) (R, Λ) は整合的であり、自然な同型 $\text{tors } \Lambda \xrightarrow{\sim} \text{Spcl } R$ が存在する。
- (b) $\text{tors } \Lambda = \text{serre } \Lambda$ となる。

$\Lambda = R$ の場合がまさに定理 3.1(a)(c) である。

証明の概略を説明する。まず一般に、 (R, \mathfrak{m}) が局所環とし、 (R, Λ) をネター代数とする。このとき Λ が *primary* であることと $\Lambda(\mathfrak{m})$ が局所環と森田同値であることが同値である。特に $\text{tors } \Lambda(\mathfrak{m}) = \text{torf } \Lambda(\mathfrak{m}) = \text{serre } \Lambda(\mathfrak{m}) = \{0, \text{mod } \Lambda(\mathfrak{m})\}$ である。写像 $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ の定義により $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(0) = 0$, $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\text{mod } \Lambda_{\mathfrak{p}}) = \text{mod } \Lambda_{\mathfrak{q}}$ である。そこで $s : \mathbb{T}_R^c(\Lambda) \rightarrow \text{Spcl } R$, $s((\mathcal{X}^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid \mathcal{X}^{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ が順序集合の同型を与える。 $s \circ \Phi_t : \text{tors } \Lambda \rightarrow \text{Spcl } R$ は単射であるが、各素イデアル \mathfrak{p} に対して $\text{tors } \Lambda(\mathfrak{p}) = \{0, \text{mod } \Lambda(\mathfrak{p})\}$ であることから、全射であることがわかる。特に (R, Λ) が整合的であることがわかる。

5.2 準傾加群と写像 $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$, いくつかの整合的代数

ネター代数が整合的か否かを判定する際に写像 $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ の計算が必要となる。しかし与えられた $\mathcal{T} \in \text{tors } \Lambda(\mathfrak{p})$ に対して $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\mathcal{T})$ を計算することは一般には難しい。これがねじれ類分類の困難な点と言える。そこで $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ が計算可能なねじれ類

$\mathcal{T} \in \text{tors } \Lambda(\mathfrak{p})$ を考察する必要がある. 次の定理により $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ が計算可能なねじれ類が準傾加群から得られる.

定理 5.6 ([IK1]). $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \in \text{Spec } R$ として, M を $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ の前準傾加群とする. このとき次が成立する.

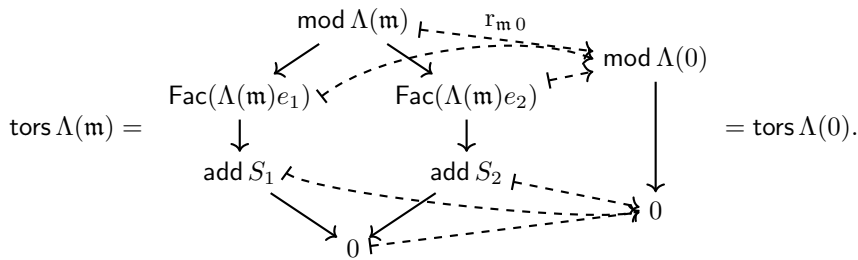
$$r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\text{Fac}(M/\mathfrak{p}M)) = \text{Fac}(M_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}M_{\mathfrak{q}}).$$

この定理によりいくつかの Λ に対して $\text{tors } \Lambda$ の計算が具体的に可能となる. 以下, 1 つ例を計算する.

例 5.7. k を体, $R = k[[x]]$, $\mathfrak{m} = (x)$, $K = R_0 = k((x))$ とする. 次のネター R 代数 Λ を考える. $\Lambda(\mathfrak{m}) = \Lambda/\mathfrak{m}\Lambda$ と $\Lambda(0) = \Lambda_0$ は次となる.

$$\Lambda := \begin{bmatrix} R & R \\ \mathfrak{m} & R \end{bmatrix} \subset M_n(R), \quad \Lambda(\mathfrak{m}) = \begin{bmatrix} R/\mathfrak{m} & R/\mathfrak{m} \\ \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & R/\mathfrak{m} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(0) = M_n(K).$$

すると $\text{tors } \Lambda(\mathfrak{m})$ と $\text{tors } \Lambda(0)$ は次となる.



点線の矢印は写像 $r_{\mathfrak{m}0}$ を表しており, 定理 5.6 により計算可能である. そこで次の同型が得られる.

$$\text{tors } \Lambda \stackrel{\text{定理 5.4}}{\simeq} \mathbb{T}_R^c(\Lambda) = \{(\mathcal{X}^{\mathfrak{m}}, \mathcal{X}^0) \in \text{tors } \Lambda(\mathfrak{m}) \times \text{tors } \Lambda(0) \mid r_{\mathfrak{m}0}(\mathcal{X}^{\mathfrak{m}}) \supseteq \mathcal{X}^0\} \simeq$$

右のグラフは順序集合 $\text{tors } \Lambda$ のハッセ図である.

定理 5.6 によって, ネター代数 (R, Λ) が任意の $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して $\text{tors } \Lambda(\mathfrak{p}) = \{\text{Fac}(M/\mathfrak{p}M) \mid M \in \text{siltm } \Lambda_{\mathfrak{p}}\}$ を満たすならば, 全ての $r_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ が計算可能である. そこで次の定理の条件が考えられる.

定理 5.8 ([IK1]). R を環直既約として, (R, Λ) をネター代数とする. 次の 2 つの条件が成立しているとする.

- (a) $(-)_{\mathfrak{p}} : 2\text{-silt } \Lambda \rightarrow 2\text{-silt } \Lambda_{\mathfrak{p}}$ が任意の $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ に対して順序集合の同型である.
- (b) $\text{tors } \Lambda(\mathfrak{p}) = \{\text{Fac}(M/\mathfrak{p}M) \mid M \in \text{siltm } \Lambda_{\mathfrak{p}}\}$ が任意の $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ で成立する.

このとき (R, Λ) は整合的代数であり, 次の順序集合の同型が得られる.

$$\text{tors } \Lambda \simeq \text{Hom}_{\text{poset}}(\text{Spec } R, 2\text{-silt } \Lambda).$$

定理 5.8 が適応可能な代数を紹介する.

定理 5.9. R を可換ネター環として体 k を含むとする. A を有限次元代数とし, $\Lambda = R \otimes_k A$ とする. 次の 2 つを仮定する.

- (a) 任意の $S \in \text{sim } A$ に対して $\text{End}_A(S) \simeq k$ である.
- (b) A は τ 傾有限である.

このとき (R, Λ) は整合的代数であり, 次の順序集合の同型が得られる.

$$\text{tors } \Lambda \simeq \text{Hom}_{\text{poset}}(\text{Spec } R, \text{tors } A) = \{f : \text{Spec } R \rightarrow \text{tors } A \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \Rightarrow f(\mathfrak{p}) \supseteq f(\mathfrak{q})\}.$$

ここで A が条件 (a) を満たす必要十分条件は, ある有限範 Q の道代数 kQ を許容イデアル $I \subset kQ$ で割った代数 kQ/I と A が同型となることである.

証明は $\Lambda = R \otimes_k A$ が定理 5.8 の条件 (a)(b) を満たすことを確認する. 加えて定理の仮定の下で次の同型が得られることがわかる. $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \in \text{Spec } R$ に対して,

$$2\text{-silt } A \xrightarrow{R \otimes_k (-)} 2\text{-silt } \Lambda \xrightarrow{(-)_{\mathfrak{p}}} 2\text{-silt } \Lambda_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{(-)_{\mathfrak{q}}} 2\text{-silt } \Lambda_{\mathfrak{q}}.$$

τ 傾有限で最も基本的な代数は, ディンキン型筋 Q の道代数 kQ である. [IT, R] によって $\text{tors } kQ$ は Q に付随する Cambrian 束 $\mathfrak{C}(Q)$ と順序集合として同型である: $\text{tors } kQ \simeq \mathfrak{C}(Q)$. よって次の例が得られる.

例 5.10. R を可換ネター環として体 k を含むとする. Q をディンキン型筋として, $\Lambda = R \otimes_k kQ$ とする. Q に付随する Cambrian 束を $\mathfrak{C}(Q)$ とする. このとき次の順序集合の同型が得られる.

$$\text{tors}(R \otimes_k kQ) \simeq \text{Hom}_{\text{poset}}(\text{Spec } R, \mathfrak{C}(Q))$$

最後に Q が拡大ディンキン型筋の場合の結果を紹介する. この場合は R の次元が低いときに, $R \otimes_k Q$ が整合的であることが判明している.

定理 5.11 ([IK2]). R を可換ネター環として体 k を含むとする. Q を拡大ディンキン型筋として, $\Lambda = R \otimes_k kQ$ とする. R は次を満たすとする.

- (a) $\text{ht } \mathfrak{p} \leq 1$ なる任意の \mathfrak{p} に対して $R_{\mathfrak{p}}$ は正則環
- (b) $\text{ht } \mathfrak{p} = 2$ なる素イデアル \mathfrak{p} は有限個

このとき Λ は整合的である.

与えられた代数が整合的か否かを判定することは一般には難しい. 上記で見たように, 研究 [IK1, IK2] ではいくつかのネター代数が整合的であることを示している. 現在のところ, 整合的でないネター代数は発見されていない. そこで次の問題を提起して, 本稿を終えたい.

問題 5.12. 整合的でないネター代数を与えよ. または, 整合的なネター代数の特徴づけを与えよ.

謝辞

第 68 回代数学シンポジウムにおいて講演の機会を与えて下さった先生方に感謝申し上げます. 本研究において筆者は JSPS 科研費 JP22J01155 と the Alexander von Humboldt Foundation in the framework of an Alexander von Humboldt Professorship endowed by the German Federal Ministry of Education and Research の助成を受けています. 伊山氏は JSPS 科研費 (B) 22H01113, (C) 18K03209 の助成を受けています.

参考文献

- [AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, τ -tilting theory, *Compos. Math.* 150 (2014), no. 3, 415–452.
- [Aii] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, *J. Lond. Math. Soc.* (2) 85 (2012), no. 3, 633–668.
- [An] L. Angeleri-Hügel, *On the abundance of silting modules*, *Surveys in representation theory of algebras*, 1–23, *Contemp. Math.*, 716, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.
- [AH] L. Angeleri-Hügel, M. Hrbek, *Silting modules over commutative rings*, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2017, no. 13, 4131–4151.
- [AMV] L. Angeleri-Hügel, F. Marks, J. Vitória, *Silting modules*, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2016, no. 4, 1251–1284.
- [Ao] T. Aoki, *Classifying torsion classes for algebras with radical square zero via sign decomposition*, *J. Algebra* 610 (2022), 167–198.
- [AHIKM] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory I: Foundations*, arXiv:2203.15213.
- [As] S. Asai, *Semibricks*, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2020, no. 16, 4993–5054.
- [AsI] S. Asai, O. Iyama, *Semistable torsion classes and canonical decompositions in Grothendieck groups*, arXiv:2112.14908.
- [AP] S. Asai, C. Pfeifer, *Wide subcategories and lattices of torsion classes*, arXiv:1905.01148.

- [BY] T. Brüstle, D. Yang, *Ordered exchange graphs*, Advances in representation theory of algebras, 135–193, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.
- [CD] A. Chan, L. Demonet, *Classifying torsion classes of gentle algebras*, arXiv:2009.10266.
- [CR] C. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory. Vol. I. With applications to finite groups and orders*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981.
- [DIJ] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso, τ -tilting finite algebras, bricks and g -vectors, Int. Math. Res. Not. IMRN 2019, no. 3, 852–892.
- [DIRRT] L. Demonet, O. Iyama, N. Reading, I. Reiten, H. Thomas, *Lattice theory of torsion classes: Beyond τ -tilting theory*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 10 (2023), 542–612.
- [En] H. Enomoto, *IE-closed subcategories of commutative rings are torsion-free classes*, arXiv:2304.03260.
- [Ga] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 323–448.
- [IK1] O. Iyama, Y. Kimura, *Classifying subcategories of modules over Noetherian algebras*, arXiv:2106.00469.
- [IK2] O. Iyama, Y. Kimura, *Torsion classes of extended Dynkin quivers over Noetherian rings*, arXiv:2303.02928.
- [IT] C. Ingalls, H. Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1533–1562.
- [Ki] Y. Kimura, *Tilting and Silting Theory of Noetherian Algebras*, International Mathematics Research Notices, 2023,; rnad057, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnad057>
- [KK] R. Koshio, Y. Kozakai, *Induced modules of support τ -tilting modules and extending modules of semibricks over blocks of finite groups*, J. Algebra 628 (2023), 524–544.
- [R] N. Reading, *Sortable elements and Cambrian lattices*, Algebra Universalis 56 (2007), 411–437.
- [Sa] S. Saito, *Classifying torsionfree classes of the category of coherent sheaves and their Serre subcategories*, arXiv:2304.06918.
- [STV] S. Schroll, H. Treffinger, Y. Valdivieso, *On band modules and τ -tilting finiteness*, Math. Z. 299 (2021), no. 3-4, 2405–2417.
- [SW] D. Stanley, B. Wang, *Classifying subcategories of finitely generated modules over a Noetherian ring*, J. Pure Appl. Algebra 215 (2011), no. 11, 2684–2693.
- [T] R. Takahashi, *Classifying subcategories of modules over a commutative Noetherian ring*, J. Lond. Math. Soc. (2) 78 (2008), no. 3, 767–782.
- [Y] T. Yurikusa, *Wide subcategories are semistable*, Doc. Math. 23 (2018), pp. 35–47.

g -扇と g -多面体

加瀬遼一（岡山理科大学情報理工学部情報理工学科）*

1 はじめに

本稿は第68回代数学シンポジウムでの著者の講演に関する報告であり、内容は青木利隆氏（神戸大学）、東谷章弘氏（大阪大学）、伊山修氏（東京大学）、水野有哉氏（大阪公立大）との共同研究（[AHIKM1, AHIKM2]）に基づく。

有限次元代数の表現論における問題意識の1つが加群圏や導来圏の構造の解析である。加群圏の同値に関しては射影生成加群がコントロールし、また導来圏の三角同値に関しては傾対象がその役目を担っている。したがって傾対象の分類や構成が重要となるが、準傾対象の変異の導入（[AI]）によりそれが帰納的に行えるようになった。特に二項準傾対象は台 τ -傾加群、関手の有限捻じれ類、二項 SMC (Simple Minded Collection) といった加群圏やその導来圏上で重要となる対象、部分圏たちと一対一対応があることが知られている（[AIR, KY]）。

（基本的な）二項準傾対象およびその直和因子たちの集まりを考える。この集まりは単体的複体の構造をもち、さらに射影加群の圏の実 Grothendieck 群の中で考えることで多面体および扇を構成することができる（[DIJ]）。本稿であつかう g -多面体や g -扇はまさにこのように構成される多面体、扇であり様々な組合せ構造と関連している。例えば g -扇に含まれる極大な錐を考えると、それは King による加群圏の安定性条件（[Ki]）から定まる部屋を構成することが知られている [As2, BKT, BST, Y]。

本稿では二項（前）準傾対象とその性質を説明したのち、加群から定まるニュートン多面体との関連およびランク 2 の有限 g -扇に関する研究結果について紹介する。

記号と設定

本稿を通して、代数といったらそれは体 k 上の有限次元代数を意味する。また代数 A に対して有限次元右 A 加群および射影加群のなす圏をそれぞれ $\text{mod } A$ および $\text{proj } A$ で表す。 $\text{mod } A$ の有界導来圏を $D^b(A)$ とし、 $\text{proj } A$ の有界ホモトピー圏を $K^b(\text{proj } A)$ とする。これらの圏は Krull-Schmidt 圏となり、一意的な直既約分解をもつ。そこで対象 X に対して、 $|X|$ で X の非同型な直既約因子の個数を表すこととする。また各直既約因子が互いに非同型なときに X は基本的とよぶ。本稿において特に言及がなければ代数自身の直既約分解を

$$P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$$

とし、 P_1, \dots, P_n は互いに非同型と仮定しておく。

謝辞

第68回代数学シンポジウムでの講演の機会を与えてくださった相原先生はじめ、シンポジウムの運営に携わった方々にこの場をお借りして深く感謝いたします。

本研究に関して著者は科研費（研究課題:17K14169）の助成を受けております。また共同研究者である青木氏が科研費（研究課題:19J11408）、東谷氏が科研費（研究課題:20K03513）、伊山氏が科研費（研究課題:16H03923, 18K3209, 15H05738）、水野氏が科研費（研究課題:20K03539）の助成を受けております。

*e-mail: r-kase@ous.ac.jp

2 二項準傾対象と変異

ここでは二項準傾対象とその変異, および本稿で重要となる性質について紹介する.

2.1 二項準傾対象の定義

二項準傾対象の定義をしよう. A を代数とする.

定義 2.1. $T \in K^b(\text{proj } A)$ とする.

- (1) T が $[\dots \rightarrow 0 \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots]$ のような対象と同型であるとき, T を**二項対象**¹とよぶ.
- (2) $\text{Hom}_{K^b(\text{proj } A)}(T, T[i]) = 0$ が全ての正の整数 i に対して成立するとき, T を**前準傾対象**とよぶ. さらに $\text{thick } T^2 = K^b(\text{proj } A)$ が成り立つとき, T を**準傾対象**とよぶ.
- (3) T が二項対象かつ前準傾対象であるとき, T を**二項前準傾対象**とよぶ. 特に二項対象 T が準傾対象であるとき T を**二項準傾対象**とよぶ³.

以下では次の記号を用いる.

$$\begin{aligned} 2\text{-psilt } A &:= \text{基本的な二項前準傾対象の (同型類) の集合} \\ 2\text{-psilt}^d A &:= \{U \in 2\text{-psilt } A \mid |U| = d\} \\ 2\text{-silt } A &:= \text{基本的な二項準傾対象の (同型類) の集合} \end{aligned}$$

定理 2.2 ([AIR]). U を二項前準傾対象とする. このとき, U はある二項準傾対象の直和因子となる⁴.

2.2 準傾対象の変異

準傾対象の既約変異とは直既約直和因子を取り換える操作であり, 次のように定義される.

定義 2.3 ([AI, AIR]). $|U| = |A| - 1$ を満たす $U \in 2\text{-psilt } A$ に対して次が成り立つ.

- (1) U を直和因子としてもつ基本的二項準傾対象が丁度 2 つ存在する.
- (2) $T = X \oplus U, T' = Y \oplus U$ を基本的な二項準傾対象とする. このとき, 以下の何れかが成り立つ.

$$(i) \text{Hom}_{K^b(\text{proj } A)}(X, Y[1]) = 0$$

$$(ii) \text{Hom}_{K^b(\text{proj } A)}(Y, X[1]) = 0$$

(i) の状況のとき, $\mu_{\bar{X}} T := T'$ と定め, T の X による**既約左変異**とよぶ.

T に (既約な) 左変異を施して T' が得られたとき, T から T' へ矢をひく⁵ことで, $2\text{-silt } A$ 上に有向グラフ構造 $\mathcal{H}(2\text{-silt } A)$ を定めることができる. この有向グラフは $2\text{-silt } A$ 上に定まるある半順序に関するハッセ図と一致することが知られている ([AI]). また $\mathcal{H}(A)$ を単なるグラフとしてみたものを $\bar{H}(A)$ とおく. つまり $\bar{H}(A)$ は (既約な) 変異関係にある 2 つの基本的二項準傾対象を辺で結ぶことのできるグラフである.

例 2.4 (2 次上三角行列環の変異グラフ). $A = \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$ とする. $\mathcal{H}(2\text{-silt } A)$ は次のようになる.

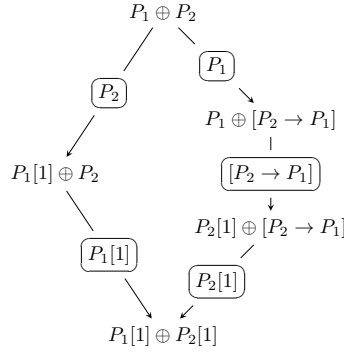
¹本稿では二項対象を $[P' \rightarrow P]$ のように記述する. 特に射影加群 P に対して, $P = [0 \rightarrow P], P[1] = [P \rightarrow 0]$ である.

² T を含み, 直和因子, シフト関手 $[\pm 1]$, および写像錐で閉じている部分圏の中で最小のもの

³ T が二項前準傾対象であるとき, T が準傾対象であることと $|T| = |A|$ であることは同値である.

⁴特に $2\text{-psilt } A$ は単体的複体の構造をもつ.

⁵本稿では T と T' の極大共通直和因子 U を明記したい場合は, $T - \boxed{U} \rightarrow T'$ とかくことにする.



2.3 g -ベクトルと符号同一性

$A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ とし, Grothendieck 群 $K_0(\text{proj } A) = K_0(K^b(\text{proj } A))$ を考える. この群は基底 $\{P_1, \dots, P_n\}$ をもつ自由アーベル群となる. 以下では P_i を $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ の標準的な単位ベクトルに対応させることで Grothendieck 群および実 Grothendieck 群をそれぞれ \mathbb{Z}^n および \mathbb{R}^n と同一視する.

$$K_0(\text{proj } A) = \mathbb{Z}^n, \quad K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}} := K_0(\text{proj } A) \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

$X \in K^b(\text{proj } A)$ に対して $[X] \in \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ を X に対応する Grothendieck 群の元とし, これを g -ベクトルとよぶ.

$$\left[\left[\bigoplus_{i=1}^n P_i^{b_i} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n P_i^{a_i} \right] \right] = \sum_{i=1}^n a_i e_i - \sum_{i=1}^n b_i e_i$$

次の 2 つの定理が重要である.

定理 2.5 ([DIJ]). T, T' を二項前準傾対象とする. $[T] = [T']$ であれば $T \simeq T'$ である.

定理 2.6 ([AI]). $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n \in 2\text{-silt } A$ であるとき, $\{[T_1], \dots, [T_n]\}$ は \mathbb{Z}^n の自由基底となる.

$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n, S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n \in 2\text{-silt } A$ とすれば, $([T_1] \cdots [T_n])$ および $([S_1] \cdots [S_n])$ は \mathbb{R}^n の基底となるので変換行列 $G(T, S)$ を考えることができる.

$$([S_1] \cdots [S_n]) = ([T_1] \cdots [T_n])G(T, S)$$

T, S の間に順序関係 $T \geq S$ が定まるとき, $G(T, S)$ は次の定理で定まる符号同一性という性質を満たす.

定理 2.7 ([DIJ]). $T, S \in 2\text{-silt } A$ とする. $T \geq S$ であるとき, $G(T, S)$ の行 r について次の何れかが成り立つ.

- r の成分は全て負でない整数.
- r の成分は全て正でない整数.

3 g -多面体と g -扇

3.1 錐と扇

ユークリッド空間 \mathbb{R}^n を考える. $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$ を用いて次のように表される集合を凸多面錐とよぶ.

$$\text{cone}\{v_1, \dots, v_\ell\} := \{a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell \mid a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

凸多面錐に対して σ の次元および面が次のように定義される.

- $\dim_{\mathbb{R}}(\sigma + (-\sigma))$ を σ の次元とよぶ.

- $\sigma \subseteq \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) \leq 0\}$ を満たす線型写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を用い、次の共通部分で表される集合を σ の面とよぶ.

$$\sigma \cap \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = 0\}$$

定義 3.1. 次の条件を満たす \mathbb{R}^n 内の凸多面錐 σ を**強凸有理多面錐**とよぶ.

- $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$
- $\sigma = \text{cone}\{v_1, \dots, v_\ell\}$ となる $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{Q}^n$ が存在する.

注意 3.2. 2つの強凸有理多面錐の共通部分もまた強凸有理多面錐となる.

注意 3.3. $\sigma = \text{cone}\{v_1, \dots, v_\ell\}$ とする. σ の面は $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ の部分集合 V を用いて、 $\text{cone } V$ とかける. また v_1, \dots, v_ℓ が一次独立であれば、 $\text{cone } V$ は σ の面となる.

扇を定義する.

定義 3.4. 次の条件を満たす \mathbb{R}^n 内の錐の族 $\Sigma (\neq \emptyset)$ を \mathbb{R}^n の**扇**とよぶ.

- $\sigma \in \Sigma$ であれば σ の任意の面は Σ に属する.
- Σ に属する2つの錐 σ, σ' に対し、その共通部分 $\sigma \cap \sigma'$ は σ と σ' の共通面である.

\mathbb{R}^n の扇 Σ に関するいくつかの用語をまとめる.

- 錐の個数が有限な扇を**有限扇**とよぶ.
- 全ての錐の和集合をその扇の**台**とよび $|\bullet|$ で表す. また台が \mathbb{R}^n と一致するような扇を**完備扇**とよぶ.
- 全ての (包含関係に関して) 極大な錐が \mathbb{Z}^n の自由基底で生成されるような扇を**非特異扇**とよぶ.

3.2 g -扇

$U \in 2\text{-psilt}A$ およびその直既約分解 $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_\ell$ に対して、 \mathbb{R}^n の錐 $C(U)$ を次で定める.

$$C(U) := \text{cone}\{[U_1], \dots, [U_\ell]\}$$

また、このように表される錐たちの族を $\Sigma(A)$ とかく.

$$\Sigma(A) := \{C(U) \mid U \in 2\text{-psilt}A\}$$

定義から $\Sigma(A)$ に属する極大な錐は基本的な二項準傾対象から定まる $n := |A|$ 次元の錐であり、(定理 2.6 から) \mathbb{Z}^n の自由基底で生成される. いま $U, U' \in 2\text{-psilt}A$ に対して、 X を U, U' の最大の共通直和因子とする. このとき、次の包含関係が成り立つ.

$$C(U) \cap C(U') \supseteq C(X)$$

また逆の包含関係も成り立つ. $C(U) \cap C(U')$ は錐であるので (注意 3.2), $C(U) \cap C(U') = \text{cone}\{x_1, \dots, x_m\}$ となるような $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Z}^n$ が存在する. $C(U) \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}_{\geq 0}[U_1] + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0}[U_\ell]$, $C(U') \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}_{\geq 0}[U'_1] + \dots + \mathbb{Z}_{\geq 0}[U'_\ell]$ なので各 x_i は次のように表示できる.

$$x_i = [U_1^{a_1} \oplus \dots \oplus U_\ell^{a_\ell}] = [U_1^{b_1} \oplus \dots \oplus U_\ell^{b_\ell}]$$

定理 2.5 より、 $U_1^{a_1} \oplus \dots \oplus U_\ell^{a_\ell} \simeq U_1^{b_1} \oplus \dots \oplus U_\ell^{b_\ell}$ なので $x_i \in C(X)$ であることがわかる.

$$C(U) \cap C(U') = C(X)$$

また注意 3.3 より $C(U)$ の面は U の直和因子 X を用いて $C(X)$ とかける.

以上の議論より、 $\Sigma(A)$ は非特異扇となることがわかる.

定義 3.5 (g -扇, [DIJ]). 非特異扇 $\Sigma(A)$ を A の g -扇とよぶ.

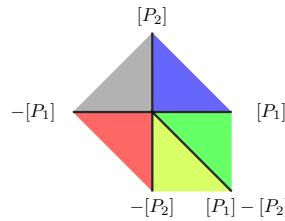
$\Sigma(A)$	$2\text{-psilt}A$
$\Sigma(A)_d$	$2\text{-psilt}_d A := \{U \in 2\text{-psilt}A \mid U = d\}$
$C(U)$ の面	U の直和因子
$C(U) \cap C(U')$	U と U' の極大共通直和因子

$\Sigma(A)$ は非特異扇であるが, 完備性に関して次の定理が成り立つ.

定理 3.6 ([ZZ]([As2] も参照されたい)). 次は同値である.

- (a) $\Sigma(A)$ は有限扇.
- (b) $\Sigma(A)$ は完備扇.

例 3.7 (2 次上三角行列環の g -扇). $A = \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$ とすれば $\Sigma(A)$ は次のようになる.



3.3 変異と g -扇

2つの基本的二項準傾対象 T, T' はそれらの極大な共通直和因子 U が $|U| = n - 1$ を満たすときに変異の関係にあるのであった. これを g -扇の言葉で置き換えると次のようになる.

$$C(T) \cap C(T') = C(U) \in \Sigma_{n-1}A$$

このことは $\Sigma(A)$ から変異 (無向) グラフ $\overline{\mathcal{H}}(A)$ を復元することができることを意味するが, さらに変異 (有向) グラフ $\mathcal{H}(A)$ も復元することができる. いま $U \in 2\text{-psilt}^{n-1}A$, $C(U)$ を含む $n - 1$ 次元の超平面を $\mathbb{H}(U)$, $T = U \oplus X \in 2\text{-silt}A$, $T' = U \oplus Y$ としよう. $C(U)$ は $C(T)$ の面であるので, 次の条件を満たす線型写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が取れる.

$$f(\mathbb{H}(U)) = 0, f([X]) > 0$$

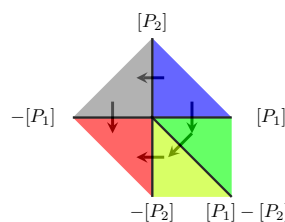
また符号同一性 (定理 2.7) を $T > A[1]$ に適用することで, 次の何れか (一方のみ) が成り立つことがわかる.

- (a) 全ての $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $e_i = [P_i] \in \mathbb{H}(U) + \mathbb{R}_{\geq 0}[X]$.
- (b) 全ての $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $e_i = [P_i] \in \mathbb{H}(U) + \mathbb{R}_{\leq 0}[X]$.

特に, $\mathbb{H}(U)$ は \mathbb{R}^n を 2つの半空間 $\{x \mid f(x) \geq 0\}$ と $\{x \mid f(x) \leq 0\}$ に分けるが, どちらか一方は $C(A)$ を含みまたもう一方は $C(A[1])$ を含むことがわかる. そこで $C(A)$ を含む半空間を U に関する正半空間とよぶことにする.

定理 3.8 ([DIJ]). 上記の設定のもと, $\mathcal{H}(A)$ に中で有向辺 $T \rightarrow T'$ があることと, $C(T)$ が U に関する正半空間に含まれていることは同値である.

例 3.9 (2 次上三角行列環の変異グラフの復元). $A = \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$ とすれば $\Sigma(A)$ から $\mathcal{H}(A)$ は次のように復元される.



4 g -扇と加群のニュートン多面体

この節では加群のニュートン多面体⁶とよばれる格子多面体を導入し、Fei の結果の精密化を紹介する。

定理 4.1 ([F]). A を g -有限な代数とし、その煉瓦⁷全ての直和を B とする。このとき、 B のニュートン多面体の正規扇⁸と A の g -扇が一致する。

4.1 加群のニュートン多面体と正規扇

Grothendieck 群 $K_0(\text{mod } A) = K_0(\text{D}^b(\text{mod } A))$ を考える。この群は基底 $\{S_1, \dots, S_n\}$ をもつ自由アーベル群となる。以下では $[S_i]$ を $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ の標準的な単位ベクトルに対応させることで Grothendieck 群および実 Grothendieck 群をそれぞれ \mathbb{Z}^n および \mathbb{R}^n と同一視する。

$$K_0(\text{mod } A) = \mathbb{Z}^n, \quad K_0(\text{mod } A)_{\mathbb{R}} := K_0(\text{mod } A) \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

$M \in \text{mod } A$ に対してそのニュートン多面体を定める。

定義 4.2 (加群のニュートン多面体). $M \in \text{mod } A$ とする。次の集合 \mathbb{R}^n での凸包を $N(M)$ とおき、これを M のニュートン多面体とよぶ。

$$\{[V] \mid V \underset{\text{部分加群}}{\subseteq} M\}$$

この節を通してニュートン多面体 $N(M)$ を考えるときは $[M] \in \mathbb{Z}^n$ の各成分は 0 でないとする。⁹

一般に凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し、その面は $\theta \in \mathbb{R}^{n*}$ によって次のように定まる。

$$P_{\theta} = \{v \in P \mid \theta(v) = \max \theta(P)\}$$

P が n 次元整凸多面体であるとし、その $n-1$ 次元的面全体を $\text{facet}(P) = \{F_1, \dots, F_r\}$ としよう。 $F \in \text{facet}(P)$ に対して、 $P_{\theta} = F$ を満たす $\mathbb{R}^{n*} \supset \mathbb{Q}^{n*} \ni \theta \neq 0$ が正の有理数倍を除いて一意に決まる。そこで θ_i を $P_{\theta_i} = F_i$ を満たすようにとり、 P の面 F に対して錐 σ_F および錐の族 $\Sigma(P)$ を次で定める。

$$\begin{aligned} \sigma_F &:= \text{cone}\{\theta_i \mid F_i \supseteq F\} = \{\theta \in \mathbb{R}^{n*} \mid P_{\theta} \supseteq F\} \\ \Sigma(P) &:= \{\sigma_F \mid F \text{ は } P \text{ の面}\} \end{aligned}$$

このとき、 $\Sigma(P)$ は扇となりこの扇を P の**正規扇**とよぶ。以下では $N(M)$ の正規扇を $\Sigma(M)$ と表すことにする (例えば節末の例 4.11)。

4.2 数値的捻じれ対

この小節では [BKT] による数値的捻じれ対を導入し、二項前傾対象から定まる捻じれ対との関係を説明する。

オイラー形式 $\langle -, - \rangle : K_0(\text{proj } A) \times K_0(\text{mod } A) \rightarrow \mathbb{Z}$ を考える。

$$\langle T, X \rangle = \sum_{t \in \mathbb{Z}} (-1)^t \dim_k \text{Hom}_{\text{D}^b(\text{mod } A)}(T, X[t])$$

特に次の等式が成り立ち、オイラー形式を通して $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ と $K_0(\text{mod } A)_{\mathbb{R}}$ はそれぞれ互いの双対空間とみなすことができる¹⁰。

$$\langle P_i, S_j \rangle = \begin{cases} \dim_k \text{End}_A(S_j) & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

以下では $\theta \in K^b(\text{proj } A)$ 、 $M \in \text{mod } A$ に対して $\theta(M) := \langle \theta, [M] \rangle$ とおく¹¹。

⁶[BKT] では Harder–Narashimhan 多面体とよんでいる。

⁷準同型環が斜体になるような A -加群。 A が g -有限であることと煉瓦が有限であることが同値になる [As1]。

⁸多面体の面ごとに定まる錐たちを集めたもの。詳細は 4.1 節で述べる。

⁹この条件は $N(M)$ が n 次元的であることと同値になる。

¹⁰ k が代数閉体であるときは $\dim_k \text{End}_A(S_j) = 1$ であり、 $K_0(\text{proj } A)_{\mathbb{R}}$ の基底 $(P_i)_{i=1}^n$ と $K_0(\text{mod } A)_{\mathbb{R}}$ の基底 $(S_i)_{i=1}^n$ はそれぞれ互いの双対基底となる。

¹¹ $U = [P' \rightarrow P]$ 、 $\theta = [U]$ のとき、 $\theta(M) = \dim_k \text{Hom}_A(P, M) - \dim_k \text{Hom}_A(P', M)$ である。

定義 4.3 (数値的捻じれ対, BKT). $\theta \in K_0(\text{proj } A)$ に対して $\text{mod } A$ の類 $\mathcal{T}_\theta, \bar{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta, \bar{\mathcal{F}}_\theta$ を次で定める.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\theta &:= \{M \in \text{mod } A \mid M \text{ の任意の剰余加群 } M' \neq 0 \text{ が } \theta(M') > 0 \text{ を満たす}\} \\ \bar{\mathcal{T}}_\theta &:= \{M \in \text{mod } A \mid M \text{ の任意の剰余加群 } M' \neq 0 \text{ が } \theta(M') \geq 0 \text{ を満たす}\} \\ \mathcal{F}_\theta &:= \{M \in \text{mod } A \mid M \text{ の任意の部分加群 } M' \neq 0 \text{ が } \theta(M') < 0 \text{ を満たす}\} \\ \bar{\mathcal{F}}_\theta &:= \{M \in \text{mod } A \mid M \text{ の任意の部分加群 } M' \neq 0 \text{ が } \theta(M') \leq 0 \text{ を満たす}\}\end{aligned}$$

このとき, $(\mathcal{T}_\theta, \bar{\mathcal{F}}_\theta)$ および $(\bar{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$ は $\text{mod } A$ の捻じれ対となり, これらを**数値的捻じれ対**とよぶ.

$\bar{\mathcal{T}}_\theta$ と $\bar{\mathcal{F}}_\theta$ の共通部分を \mathcal{W}_θ とおく.

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\theta &:= \bar{\mathcal{T}}_\theta \cap \bar{\mathcal{F}}_\theta \\ &= \{M \in \text{mod } A \mid \theta(M) = 0 \text{ かつ } M \text{ の任意の剰余加群 } M' \neq 0 \text{ が } \theta(M') \geq 0 \text{ を満たす}\} \\ &= \{M \in \text{mod } A \mid \theta(M) = 0 \text{ かつ } M \text{ の任意の部分加群 } M' \neq 0 \text{ が } \theta(M') \leq 0 \text{ を満たす}\}\end{aligned}$$

このとき \mathcal{W}_θ は核, 余核, および拡大で閉じ $\text{mod } A$ の広大部分圏となる¹². また捻じれ対 $(\mathcal{T}_\theta, \bar{\mathcal{F}}_\theta)$ から定まる加群 M の分解により, 部分加群 $t_\theta M \in \mathcal{T}_\theta$ および剰余加群 $\bar{f}_\theta M \in \bar{\mathcal{F}}_\theta$ を定義する.

$$0 \rightarrow t_\theta M \rightarrow M \rightarrow \bar{f}_\theta M \rightarrow 0$$

同様に捻じれ対 $(\bar{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$ を用いて, \bar{t}_θ および f_θ を定義する. このとき, $t_\theta M, \bar{t}_\theta M$ はそれぞれ $\mathcal{T}_\theta, \bar{\mathcal{T}}_\theta$ に属する M の最大の部分加群となる. 特に $t_\theta M \subseteq \bar{t}_\theta M$ であり, 剰余加群 $\bar{t}_\theta M/t_\theta M$ は \mathcal{W}_θ に属する. この剰余加群を $w_\theta M$ とおく.

$$w_\theta M = \bar{t}_\theta M/t_\theta M \in \mathcal{W}_\theta$$

4.3 二項前準傾対象から定まる捻じれ類の数値的記述

$U \in 2\text{-psilt } A$ に対して, 捻じれ対 $(\mathcal{T}_U, \bar{\mathcal{F}}_U)$ および $(\bar{\mathcal{T}}_U, \mathcal{F}_U)$ が次で定まる ([AIR]).

$$\mathcal{T}_U := \text{Fac } H^0(U), \bar{\mathcal{T}}_U := {}^\perp H^1(\nu U), \mathcal{F}_U := \text{Sub } H^1(\nu U), \bar{\mathcal{F}}_U := H^0(U)^\perp$$

$t_U, \bar{t}_U, f_U, \bar{f}_U, w_U$ などは前小節と同様に定義する.

注意 4.4. U の Bongartz 完備化 \bar{T}_U と co-Bongartz 完備化 T_U に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\mathcal{T}_U = \mathcal{T}_{T_U}, \bar{\mathcal{T}}_U = \bar{\mathcal{T}}_{\bar{T}_U}$$

特に $T \in 2\text{-silt } A$ に対して, $\mathcal{T}_T = \bar{\mathcal{T}}_T$ である.

注意 4.5. [AIR] により, 関手的有限な捻じれ類と二項準傾対象から定まる捻じれ類の間に一対一対応がある. さらに g -有限な場合は全ての捻じれ類は二項準傾対象から定まる捻じれ類となる ([DIJ]).

この小節では二項前準傾対象から定まる捻じれ対と数値的捻じれ対との対応 ([As2, BKT, BST, Y]) を紹介する. まず $U = [P' \rightarrow P] \in 2\text{-psilt } A$, $M \in \text{mod } A$ に対して次の図式が定まることに注意する.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, H^1(\nu U)) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, \nu P') & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, \nu P) \\ & & & & \downarrow \simeq & \circlearrowleft & \downarrow \simeq \\ & & & & D\text{Hom}_A(P', M) & \longrightarrow & D\text{Hom}_A(P, M) & \longrightarrow & D\text{Hom}_A(H^0(U), M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

¹² \mathcal{W}_θ は [Ki] による安定性条件において, θ -半安定な加群のなす広大部分圏である. またその単純対象は θ -安定な加群であり, その全体は $\text{mod } A$ の semibrick を与える.

特に次元を考えることで次の等式が得られる.

$$\dim_k \operatorname{Hom}_A(P, M) - \dim_k \operatorname{Hom}_A(P', M) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(H^0(U), M) - \dim_k \operatorname{Hom}_A(M, H^1(\nu U))$$

いま U の直既約直和分解を $U \simeq U_1 \oplus \cdots \oplus U_d$ とし, $\theta_i := [U_i]$ とする. $\theta = \sum_{i=1}^d x_i \theta_i \in C^+(U)$ としよう. このとき, 上式から次の等式を得る.

$$\begin{aligned} \theta(M) &= \sum_{i=1}^d x_i \theta_i(M) \\ &= \sum_{i=1}^d x_i (\dim_k \operatorname{Hom}_A(H^0(U_i), M) - \dim_k \operatorname{Hom}_A(M, H^1(\nu U_i))) \end{aligned}$$

特に次が成り立つ.

$$\begin{aligned} M \in \overline{\mathcal{T}}_U &\Rightarrow \theta(M) \geq 0 \quad (\text{等号成立は } M \in \overline{\mathcal{F}}_U) \\ M \in \overline{\mathcal{F}}_U &\Rightarrow \theta(M) \leq 0 \quad (\text{等号成立は } M \in \overline{\mathcal{T}}_U) \end{aligned}$$

以上より $\mathcal{T}_U \subseteq \mathcal{T}_\theta$, $\overline{\mathcal{T}}_U \subseteq \overline{\mathcal{T}}_\theta$, $\mathcal{F}_U \subseteq \mathcal{F}_\theta$, $\overline{\mathcal{F}}_U \subseteq \overline{\mathcal{F}}_\theta$ である. また $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$, $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$, $(\mathcal{T}_U, \overline{\mathcal{F}}_U)$, $(\overline{\mathcal{T}}_U, \mathcal{F}_U)$ が捻じれ対であることから, それぞれ逆の包含関係も成り立つ.

命題 4.6 ([BST, Y]). $\theta \in C^+(U)$ とすれば次の等式が成り立つ.

$$\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_U, \overline{\mathcal{T}}_\theta = \overline{\mathcal{T}}_U, \mathcal{F}_\theta = \mathcal{F}_U, \overline{\mathcal{F}}_\theta = \overline{\mathcal{F}}_U, \mathcal{W}_\theta = \mathcal{W}_U$$

4.4 数値的捻じれ対とニュートン多面体の面

$0 \neq \theta \in K_0(\operatorname{proj} A)_{\mathbb{R}}$ とする. θ で定まるニュートン多面体 $\mathbf{N}(M)$ の面

$$\mathbf{N}(M)_\theta = \{x \in \mathbf{N}(M) \mid \theta(x) = \max \theta(\mathbf{N}(M))\}$$

を考えよう. いま M の部分加群 X に対して, $[X] \in \mathbf{N}(M)_\theta$ となるための条件を考察する. X の捻じれ対 $(\mathcal{T}_\theta, \overline{\mathcal{F}}_\theta)$, $(\overline{\mathcal{T}}_\theta, \mathcal{F}_\theta)$ に関する標準分解

$$0 \rightarrow \mathfrak{t}_\theta X \rightarrow X \rightarrow \overline{\mathfrak{f}}_\theta X \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \overline{\mathfrak{t}}_\theta X \rightarrow X \rightarrow \mathfrak{f}_\theta X \rightarrow 0,$$

および $\mathfrak{t}_\theta M / \mathfrak{t}_\theta X \in \mathcal{T}_\theta$, $\overline{\mathfrak{t}}_\theta M / \overline{\mathfrak{t}}_\theta X \in \overline{\mathcal{T}}_\theta$ から次の不等号が成立することがわかる.

$$\theta(X) \leq \theta(\overline{\mathfrak{t}}_\theta X) \leq \theta(\overline{\mathfrak{t}}_\theta M), \quad \theta(X) \leq \theta(\mathfrak{t}_\theta X) \leq \theta(\mathfrak{t}_\theta M)$$

ここで $\mathfrak{w}_\theta Y = \overline{\mathfrak{t}}_\theta Y / \mathfrak{t}_\theta Y \in \mathcal{W}_\theta$ より

$$\theta(\mathfrak{t}_\theta X) = \theta(\overline{\mathfrak{t}}_\theta X), \quad \theta(\mathfrak{t}_\theta M) = \theta(\overline{\mathfrak{t}}_\theta M)$$

であるので, $(\mathbf{N}(M))$ の頂点は M の部分加群 X を用いて $[X]$ と記述できることに注意すれば) 次がわかる.

$$\begin{aligned} [X] \in \mathbf{N}(M)_\theta &\Leftrightarrow \theta(X) = \theta(\overline{\mathfrak{t}}_\theta M) = \theta(\mathfrak{t}_\theta M) \\ &\Leftrightarrow \theta(X / \overline{\mathfrak{t}}_\theta X) = 0 \text{ かつ } \theta(\mathfrak{t}_\theta M / \mathfrak{t}_\theta X) = 0 \\ &\Leftrightarrow X = \overline{\mathfrak{t}}_\theta X \text{ かつ } \mathfrak{t}_\theta X = \mathfrak{t}_\theta M \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{t}_\theta M \subseteq X \in \overline{\mathcal{T}}_\theta \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{t}_\theta M \subseteq X \subseteq \overline{\mathfrak{t}}_\theta M \text{ かつ } X / \mathfrak{t}_\theta M \in \mathcal{W}_\theta (\subseteq \overline{\mathcal{T}}_\theta) \end{aligned}$$

特に面 $\mathbf{N}(M)_\theta$ の頂点は次の集合に含まれている.

$$[\mathfrak{t}_\theta M] + \mathbb{R}_{\geq 0}^n$$

$\mathfrak{t}_\theta M \in \mathbf{N}(M)_\theta$ であることから, $[\mathfrak{t}_\theta M]$ は $\mathbf{N}(M)_\theta$ の頂点でありニュートン多面体 $\mathbf{N}(M)$ の頂点でもある. 逆にニュートン多面体の頂点 v に対して, $\{v\}$ は $\mathbf{N}(M)$ の面であることから $\{v\} = \mathbf{N}(M)_\theta$ とかける. すなわちある θ に対して $v = \mathfrak{t}_\theta M$ が成り立つ. 同様にしてニュートン多面体の辺 E は $\mathbf{N}(M)_\theta$ とかけ, これは $\mathfrak{t}_\theta M$ および $\overline{\mathfrak{t}}_\theta M$ を含むことになるので E は $\{[\mathfrak{t}_\theta M], [\overline{\mathfrak{t}}_\theta M]\}$ の凸包になることがわかる. 以上をまとめる.

命題 4.7 ([BKT]). (1) ニュートン多面体 $N(M)$ の頂点集合と次の集合は一致する.

$$\{[t_\theta M] \mid 0 \neq \theta \in K_0(\text{proj } A)\}$$

(2) 任意の辺はある $\theta \neq 0$ を用いて, $\{[t_\theta M], [\bar{t}_\theta M]\}$ の凸包と表すことができる.

(3) ニュートン多面体の面 $N(M)_\theta$ の頂点集合は次の集合と一致する.

- $\{[t_{\theta'} M] \mid 0 \neq \theta' \in K_0(\text{proj } A), t_\theta M \subseteq t_{\theta'} M \in \bar{\mathcal{T}}_\theta\}$
- $\{[t_{\theta'} M] \mid 0 \neq \theta' \in K_0(\text{proj } A), t_\theta M \subseteq t_{\theta'} M \subseteq \bar{t}_\theta M, t_{\theta'} M/t_\theta M \in \mathcal{W}_\theta\}$

4.5 ニュートン多面体の面 \sim_g -有限な場合

この小節では A を g -有限な代数とする. 定理 3.6 により $\Sigma(A)$ は完備扇であるので $0 \neq \theta \in K_0(\text{proj } A)$ に対し, $\theta \in C^+(U)$ となる $U \in 2\text{-psilt } A$ が一意的に存在する. したがって命題 4.6 と命題 4.7 からニュートン多面体の面 $N(M)_\theta$ の頂点集合は次の集合と一致する¹³.

$$\{[t_T M] \mid T \in 2\text{-silt } A, t_U M \subseteq t_T M \in \bar{\mathcal{T}}_U\}$$

いま $N = t_T M$ ($T \in 2\text{-silt } A$) が $t_U M \subseteq N \in \bar{\mathcal{T}}_U$ を満たしているとしよう. 次の等式を満たす二項準傾対象 $T' \in 2\text{-silt } A$ をとる.

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T}_{T'} = \mathcal{T}_T \cap \bar{\mathcal{T}}_U$$

$\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_T, t_T M \in \mathcal{T}_T \cap \bar{\mathcal{T}}_U = \mathcal{T}'$ なので次が成り立つ.

$$t_{T'} M \subseteq t_T M \subseteq t_{T'} M \rightsquigarrow t_{T'} M = t_T M = N$$

そこで次の等式を満たす二項準傾対象 $T'' \in 2\text{-silt } A$ をとる.

$$\mathcal{T}'' := \mathcal{T}_{T''} = \text{Filt}(\mathcal{T}', \mathcal{T}_U)^{14}$$

$t_{T''} M/t_{T'} M \in \mathcal{T}''$ より, もし $t_{T''} M \neq t_{T'} M$ であれば $t_{T'} M \subsetneq X \subseteq t_{T''} M$ かつ $X/t_{T'} M \in \mathcal{T}' \cup \mathcal{T}_U$ を満たす X が取れるが, これは次の通り矛盾である.

- $X/t_{T'} M \in \mathcal{T}' \Rightarrow t_{T'} M \subsetneq X \in \mathcal{T}'^{15}$
- $X/t_{T'} M \subseteq t_{T''} M/t_{T'} M = \text{Coker}(t_{T'} M/t_U M \rightarrow t_{T''} M/t_U M) \in \mathcal{W}_U^{16} \subseteq \bar{\mathcal{F}}_U$

特に $t_{T''} M = t_{T'} M = t_T M = N$ かつ $T'' \in 2\text{-silt}_U A^{17}$ である. 以上をまとめる.

$$\begin{aligned} \theta \in C^+(U) &\Rightarrow N(M)_\theta \text{ の頂点集合} = \{[t_T M] \mid T \in 2\text{-silt}_U A\} =: n(M)_U \\ &\rightsquigarrow N(M)_\theta = \text{conv } n(M)_U =: N(M)_U \end{aligned}$$

そこで $2\text{-psilt } A$ 上の同値関係 \sim_M を $n(M)_U$ を用いて定める.

$$U \sim_M U' :\Leftrightarrow n(M)_U = n(M)_{U'} \Leftrightarrow N(M)_U = N(M)_{U'}$$

注意 4.8. \sim_M を $2\text{-silt } A$ 上の同値関係に制限した場合, $T \sim_M T'$ であることと $t_T M = t_{T'} M$ は同値である.

命題 4.9 ([AHIKM1]). 対応 $U \mapsto \text{conv } n(M)_U = N(M)_U$ により $2\text{-psilt } A / \sim_M$ と $\{N(M) \text{ の面}\}$ は一対一に対応する.

4.6 Fei の結果の精密化

引き続き A は g -有限とする. $\Sigma(M)$ を $N(M)$ の正規扇とし, 面 F に対応する錐を σ_F で表す.

$$\sigma_F = \{\theta \in K_0(\text{proj } A) \mid N(M)_\theta \supseteq F\} = \text{cone}\{\theta_i \mid F_i \supseteq F\}^{18}$$

¹³ $U \in 2\text{-psilt } A$ に対して, その co-Bongartz 完備化 T_U を考えれば $t_U M = t_{T_U} M$ が成り立つことに注意する.

¹⁴ $\mathcal{T}' \cup \mathcal{T}_U$ に属する加群たちでフィルトレーションされる加群からなるクラス. \mathcal{T}' と \mathcal{T}_U を含む最小の捻じれ類になっている.

¹⁵完全列 $0 \rightarrow t_{T'} M \rightarrow X \rightarrow X/t_{T'} M \rightarrow 0$ に注意.

¹⁶ $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}'' \subseteq \bar{\mathcal{T}}_U$ から, $t_{T'} M/t_U M$ および $t_{T''} M/t_U M$ はどちらも広大部分圏 \mathcal{W}_U に属することに注意する.

¹⁷ $\mathcal{T}_U \subseteq \mathcal{T}'' \subseteq \bar{\mathcal{T}}_U$ から従う.

¹⁸ F_i や θ_i は 4.1 節の記号を流用

前小節の結果から次が従う.

$$\sum_{i:F_i \supseteq F} \mathbb{R}_{>0} \theta_i \subseteq \{\theta \in K_0(\text{proj } A) \mid \mathbf{N}(M)_\theta = F\} = \bigcup_{U:\mathbf{N}(M)_U=F} C^+(U) \subseteq \sigma_F \rightsquigarrow \sigma_F = \bigcup_{U:\mathbf{N}(M)_U=F} C(U)$$

ニュートン多面体の頂点が $\mathbf{t}_T M$ ($T \in 2\text{-silt } A$) とかけることに注意すれば次の等式が成り立つ.

$$\sigma_F = {}^{19} \bigcap_{v:F \text{ の頂点}} \sigma_{\{v\}} = \bigcap_{\substack{T \in 2\text{-silt } A \\ \mathbf{t}_T M \in F}} \sigma_{\mathbf{N}(M)_T} = \bigcap_{\substack{T \in 2\text{-silt } A \\ \mathbf{t}_T M \in F}} \left(\bigcup_{\substack{T' \in 2\text{-silt } A \\ T' \sim_M T}} C(T') \right)$$

以上をまとめる.

定理 4.10 ([AHIKM1]). A を g -有限, $M \in \text{mod } A$, $\dim \mathbf{N}(M) = |A|$ とする.

(1) $\mathbf{N}(M)$ の面 F に対して次の等式が成り立つ.

$$\sigma_F = \bigcup_{\substack{U \in 2\text{-psilt } A \\ \mathbf{N}(M)_U = F}} C(U) = \bigcap_{\substack{T \in 2\text{-silt } A \\ \mathbf{t}_T M \in F}} \left(\bigcup_{\substack{T' \in 2\text{-silt } A \\ T' \sim_M T}} C(T') \right)$$

(2) 次は同値である.

- (a) $\Sigma(M) = \Sigma(A)$
- (b) $2\text{-psilt } A / \sim_M = 2\text{-psilt } A$
- (c) $2\text{-silt } A / \sim_M = 2\text{-silt } A$
- (d) $w_U M \neq 0$ が全ての $U \in 2\text{-psilt}^{n-1}(A)$ に対して成り立つ.

Proof. (1) はすでに示している. また (2) の条件の内, (a), (b), (c) の同値性は (1) より従う. さらに (d) が成り立たないとき, $w_U M = \bar{t}_U M / \mathbf{t}_U M = 0$ となる $U \in 2\text{-psilt}^{n-1} A$ が取れる. 特に $\mathbf{t}_{T_U} M = \mathbf{t}_{\bar{T}_U} M$ となり, (c) が成り立たない. よって (c) が成り立たないとき, (d) も成り立たないことを示せばよい.

$\mathbf{t}_T M = \mathbf{t}_{T'} M$ が $T, T' \in 2\text{-silt } A$ ($T \neq T'$) に対して成り立つとする. $\mathbf{t}_T M \in \mathcal{T}_T \cap \mathcal{T}_{T'}$ より, $T'' := T \wedge T'^{20}$ に対して $\mathbf{t}_T M = \mathbf{t}_{T''} M$ が成り立つ. したがって $T' < T$ としてよい. A は g -有限なので変異図 $\mathcal{H}(A)$ において次の列が取れる.

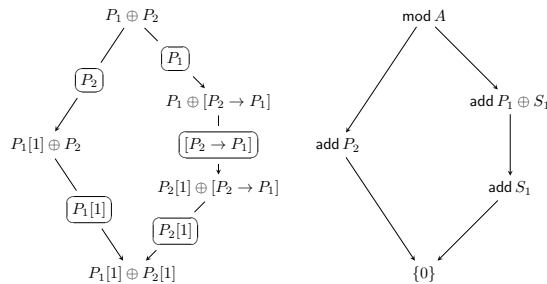
$$T \rightarrow T_1 \rightarrow \cdots \rightarrow T_\ell = T''$$

$\mathbf{t}_T M \supseteq \mathbf{t}_{T_1} M \supseteq \mathbf{t}_{T''} M = \mathbf{t}_T M$ より, $\mathbf{t}_T M = \mathbf{t}_{T_1} M$ であり, T, T_1 の共通直和因子 $U \in 2\text{-psilt}^{n-1} A$ に対して次の等式が成り立つ.

$$w_U M = \bar{t}_U M / \mathbf{t}_U M = \mathbf{t}_T M / \mathbf{t}_{T_1} M = 0$$

特に (d) は成り立たない. □

例 4.11. $A = \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$ とする. A の直既約加群の同型類は $\{P_1, P_2, S_1\}$ であり, 二項準傾対象と捻じれ類の対応は次で与えられる.



¹⁹一般に F と F' を含む最小の面 F'' に対して $\sigma_{F''} = \sigma_F \cap \sigma_{F'}$ が成り立つ.

²⁰ $\mathcal{T}_{T''} = \mathcal{T}_T \cap \mathcal{T}_{T'}$ で定まる二項準傾対象である.

$T - \boxed{U} \rightarrow T'$ に対し, $\bar{\mathcal{T}}_U = \mathcal{T}_T$, $\mathcal{T}_U = \mathcal{T}_{T'}$ が成り立つ. したがって M として A , $A \oplus S_1$ を考えれば下表が得られる.

M	$N(M)$	$\Sigma(M)$	$n(M)_\bullet$
A			
$A \oplus S_1$			

5 完備 2 次元 g -扇の分類

5.1 2 次元扇の符号同一性

g -扇のもつ性質として符号同一性というものを導入する.

定義 5.1 (符号同一性). 次の条件を満たす \mathbb{R}^2 内の非特異扇 Σ を符号同一性をもつ扇とよぶ.

- $\sigma_+ := \mathbb{R}_{\geq 0}(1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(0, 1) \in \Sigma$, $\sigma_- := -\sigma_+ \in \Sigma$ (\leadsto 各錐の内部はある象限に含まれる.)
- 任意の 1 次元錐は丁度 2 つの 2 次元錐に含まれる.

以下 $\text{c-Fan}_{\text{sc}}(2)$ で符号同一性をもつ \mathbb{R}^2 内の非特異扇全体の集合を表すことにする. またその部分集合 $\text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$, $\text{c-Fan}_{\text{sc}}^-(2)$ を次で定める.

$$\begin{aligned} \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2) &= \{\Sigma \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}(2) \mid \text{cone}\{-e_1, e_2\} \in \Sigma\} \\ \text{c-Fan}_{\text{sc}}^-(2) &= \{\Sigma \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}(2) \mid \text{cone}\{e_1, -e_2\} \in \Sigma\} \end{aligned}$$

5.2 $\text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ の帰納的構成

この小節では特に断らない限り $\Sigma \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ に対し, その一次元錐の原始的生成元を $\mathbf{v}_0 := (0, 1)$ から時計回りに次のようにおく.

$$\mathbf{v}_0 = (0, 1), \mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_\ell := (0, -1), \mathbf{v}_{\ell+1} := (-1, 0)$$

5.2.1 $\text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ 内の扇のクイディティ列

$\Sigma \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ とする. Σ が非特異扇であることから, $\{\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i\}$ および $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}\}$ は \mathbb{Z}^2 の自由基底であり, また符号同一性から $\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{v}_{i-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathbf{v}_i$ となる. そこで次の関係式によって a_i ($i = 1, \dots, \ell$) を定める.

$$\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{v}_{i-1} = a_i \mathbf{v}_i$$

このように定めた非負整数列 $q(\Sigma)$ を $\Sigma \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ のクイディティ列とよぶことにする. $\text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ の扇はそのクイディティ列により一意に決まる.

5.2.2 c-Fan_{sc}⁺(2) への巡回作用

$\Sigma \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ としそのクイディティ列を (a_1, \dots, a_ℓ) とする. Σ は非特異扇であるので, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ は \mathbb{Z}^2 の自由基底であり, 特に \mathbb{R}^2 の基底である. そこで線型写像 $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次で定める.

$$\rho(\mathbf{v}_1) = (0, 1), \rho(\mathbf{v}_2) = (1, 0)$$

このとき, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^2$ を次で定める.

$$\mathbf{w}_k := \begin{cases} \rho(\mathbf{v}_{k+1}) & (0 \leq k \leq \ell) \\ -\rho(\mathbf{v}_2) = (-1, 0) & (k = \ell + 1) \end{cases}$$

定義から $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{\ell+1}$ は非特異扇 Σ' を定め, さらに次が成り立っている.

$$\begin{aligned} \text{cone}\{(0, 1), (1, 0)\} &= \text{cone}\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1\} \\ \text{cone}\{((0, -1), (-1, 0))\} &= \text{cone}\{\mathbf{w}_\ell, \mathbf{w}_{\ell+1}\} \\ \text{cone}\{((0, -1), (-1, 0))\} &= \text{cone}\{\mathbf{w}_{\ell+1}, \mathbf{w}_0\} \end{aligned}$$

特に $\Sigma' \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ である. この対応 $\Sigma \mapsto \Sigma'$ により定まる写像を ρ とする.

$$\rho: \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2) \rightarrow \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$$

構成から ρ はクイディティ列に巡回的に作用する. つまり次が成り立つ²¹.

$$\mathbf{q}(\Sigma) = (a_1, a_2, \dots, a_\ell) \Rightarrow \mathbf{q}(\rho(\Sigma)) = (a_2, \dots, a_\ell, a_1)$$

5.2.3 c-Fan_{sc}⁺(2) 内の扇の部分分割

$\Sigma \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$, $\sigma_i := \text{cone}\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}\} \in \Sigma$ とする. $1 \leq i \leq \ell - 1$ に対して σ_i は領域 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 0\}$ に含まれるが, 次のように (\mathbb{Z}^2 の自由基底で生成される)2 つの 2 次元錐に分割することができる.

$$\sigma_i = \underbrace{\text{cone}\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}\}}_{\sigma'_i} \cup \underbrace{\text{cone}\{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}\}}_{\sigma''_i}$$

特に新しい扇 $\Sigma' \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ を, その 2 次元錐が次で与えられるように定めることができる.

$$\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma'_i, \sigma''_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{\ell-1}, \sigma_\ell, \sigma_{\ell+1}$$

この対応 $\Sigma \mapsto \Sigma'$ で定まる写像を D_{σ_i} とかく.

$$D_{\sigma_i}: \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2) \rightarrow \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$$

以下の議論では特に $i = \ell - 1$ のときが重要である. そこで以下のような記号を用意する.

$$D := D_{\sigma_{\ell-1}}$$

注意 5.2. クイディティ列について次が成り立つ.

$$\mathbf{q}(\Sigma) = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_\ell) \Rightarrow \mathbf{q}(D_{\sigma_i}(\Sigma)) = (a_1, \dots, a_i + 1, 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_\ell)$$

特に $i = \ell - 1$ のときを考えれば次が成り立つ.

$$\mathbf{q}(\Sigma) = (a_1, \dots, a_{\ell-1}, a_\ell) \Rightarrow \mathbf{q}(D(\Sigma)) = (a_1, \dots, a_{\ell-1} + 1, 1, a_\ell + 1)$$

ここまでの議論を用いることで次を得る.

補題 5.3. $\mathbf{q}(\Sigma) = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_\ell)$ とすれば次の等式が成り立つ.

$$D_{\sigma_i}(\Sigma) = \rho^{\ell-i} \circ D \circ \rho^{i+1}(\Sigma)$$

²¹非自明な部分は $\mathbf{w}_{\ell-1} + \mathbf{w}_{\ell+1} = a_1 \mathbf{w}_\ell$ である. これは次の通り成立する.

$$\mathbf{w}_{\ell-1} + \mathbf{w}_{\ell+1} = \rho(\mathbf{v}_\ell - \mathbf{v}_2) = \rho(-\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_2) = a_1 \rho(-\mathbf{v}_1) = a_1 \rho(\mathbf{v}_{\ell+1}) = a_1 \mathbf{w}_\ell$$

5.2.4 c-Fan_{sc}⁺(2) 内の扇の機能的構成

クイディティ列 $\mathbf{q} = (a_1, \dots, a_\ell)$ を考えよう. 符号同一性から次が分かる.

- クイディティ列に 0 が現れること, $\ell = 2$ であること, および $\mathbf{q} = (0, 0)$ であることは同値.
- $a_1 = a_\ell = 1$ であることと $\mathbf{q} = (1, 1, 1)$ であることは同値.
- $a_1, \dots, a_k \geq 2$ であれば \mathbf{v}_{k+1} は領域 $\{(x, y) \mid 0 \geq y > -x\}$ に存在する.
- $a_k, \dots, a_\ell \geq 2$ であれば \mathbf{v}_{k-1} は領域 $\{(x, y) \mid y < -x \leq 0\}$ に存在する.

特に $\ell \geq 3$ であれば $a_k = 1$ を満たす $k \in \{2, \dots, \ell - 1\}$ が存在する. この k に対し,

$$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_\ell$$

は扇 $\Sigma' \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ を定め次が成り立つ.

$$D_{\text{cone}\{\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}\}} \Sigma' = \Sigma$$

以上の議論および補題 5.3 から次が従う.

補題 5.4. c-Fan_{sc}⁺(2) 内の扇はクイディティ列として $(0, 0)$ をもつ扇に ρ および D を有限回施すことで得られる.

5.3 部分分割定理

極大イデアルでの剰余代数が k と同型になるような局所 k -代数 A と B , (A, B) -両側加群 ${}_A X_B$, (B, A) -両側加群 Y , および (A, A) -両側加群準同型 $m_A : X \otimes_B Y \rightarrow A$, (B, B) -両側加群準同型 $m_B : Y \otimes_A X \rightarrow B$ を考える. このようなデータに対して,

$$\begin{bmatrix} A & {}_A X_B \\ {}_B Y_A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & {}_A X_B \\ 0 & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ {}_B Y_A & B \end{bmatrix}$$

と表すことのできる代数のクラスをそれぞれ $M := M_k(2)$, $\text{UTM} := \text{UTM}_k(2)$, $\text{LTM} := \text{LTM}_k(2)$ とする. 本小節では $\Lambda \in \text{UTM}$ が g -有限のとき, 各 $\Sigma(\Lambda) \ni \sigma \subseteq \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \geq y\}$ に対して次の等式を満たす $\Gamma \in \text{UTM}$ の存在を示す.²²

$$D_\sigma(\Sigma(\Lambda)) = \Sigma(\Gamma)$$

5.3.1 巡回 ρ の実現

$\Lambda \in \text{UTM}$ を g -有限な代数, $\mu_2^-(\Lambda) = U \oplus P_1 \in 2\text{-silt}\Lambda$, $\Gamma = \text{End}_{\text{K}^b(\text{proj}\Lambda)}(\mu_2^-(\Lambda))$ とする. このとき, $\text{Hom}_{\text{K}^b(\text{proj}\Lambda)}(\mu_2^-(\Lambda), P_1[1]) = 0$ であり, また $\text{Hom}_{\text{K}^b(\text{proj}\Lambda)}(P_1, P_2) = 0$ から $\text{Hom}_{\text{K}^b(\text{proj}\Lambda)}(\mu_2^-(\Lambda), U[1]) = 0$ である. したがって $\mu_2^-(\Lambda)$ は傾対象になっている. 特に三角圏同値

$$F : \text{K}^b(\text{proj}\Lambda) \rightarrow \text{K}^b(\text{proj}\Gamma), F(\mu_2^-(\Lambda)) = \Gamma$$

が存在し $([\mathbb{R}])$, Γ の直既約射影加群を $P'_1 := F(U)$, $P'_2 := F(P_1)$ とおく. いま $\text{silt}\Lambda$ の変異列

$$(P_1 \oplus P_2 \rightarrow) U \oplus P_1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_2[1] \oplus V \rightarrow P_1[1] \oplus P_2[1] \rightarrow U[1] \oplus P_1[1]$$

に対して, $2\text{-silt}\Gamma$ の変異列

$$P'_1 \oplus P'_2 \rightarrow \cdots \rightarrow F(P_2[1]) \oplus F(V) \rightarrow P'_2[1] \oplus F(P_2[1]) \rightarrow P'_1[1] \oplus P'_2[1]$$

²² この主張を示すことができれば c-Fan_{sc}⁺(2) の扇が全て実現できることがわかる. また $\Sigma(A^{\text{op}}) = \{-\sigma \mid \sigma \in \Sigma(A)\}$ であって, また $\text{UTM} \stackrel{\text{反転}}{\cong} \text{LMT}$ であるので, c-Fan_{sc}⁺(2) の扇も全て実現できることわかる.

が定まる. 特に $[P'_1] \mapsto (1, 0)$, $[P'_2] \mapsto (0, 1)$ により $K_0(\text{proj } \Gamma)_{\mathbb{R}}$ を \mathbb{R}^2 と同一視すれば, $\Sigma(\Gamma)$ と $\rho(\Sigma(\Lambda))$ は第 2 象限 $\{(x, y) \mid x < 0, y > 0\}$ 以外の領域では一致していることがわかる. そこで Γ' を次で定める.

$$\Gamma' := \begin{bmatrix} \text{End}_{K^b(\text{proj } \Lambda)}(U) & \text{Hom}_{K^b(\text{proj } \Lambda)}(P_1, U) \\ 0 & \text{End}_{K^b(\text{proj } \Lambda)}(P_1) \end{bmatrix} \underset{\text{部分代数}}{\subseteq} \begin{bmatrix} \text{End}_{K^b(\text{proj } \Lambda)}(U) & \text{Hom}_{K^b(\text{proj } \Lambda)}(P_1, U) \\ \text{Hom}_{K^b(\text{proj } \Lambda)}(U, P_1) & \text{End}_{K^b(\text{proj } \Lambda)}(P_1) \end{bmatrix} \cong \Gamma$$

$\Sigma(\Gamma)$ と $\Sigma(\Gamma')$ は第 2 象限以外の領域では一致し, 特に次の等式が成り立つ.

$$\Sigma(\Gamma') = \rho(\Sigma(\Lambda))$$

注意 5.5. 構成した代数 Γ' は UTM に属する. 証明は [AHIKM1, Proposition 4.7 (b)] を参照されたい.

以上をまとめる.

定理 5.6 ([AHIKM1, Theorem 4.6]). $\Lambda \in \text{UTM}_k(2)$ とする. Λ が g -有限であれば, 次の等式を満たす $\Gamma \in \text{UTF}_k(2)$ が存在する.

$$\Sigma(\Gamma) = \rho(\Sigma(\Lambda))$$

5.3.2 分割 D の実現

ここでは次の設定のもとで議論をおこなう.

- $\Lambda = \begin{bmatrix} A & AX_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \text{UTM}$, J_A は A の極大イデアル, J_B は B の極大イデアル, $\bar{X} := X/XJ_B$.
- 自然な全射 $A \rightarrow A/J_A = k$, $A \rightarrow B/J_B = k$, および $X \rightarrow \bar{X}$ をそれぞれ $(-)$ で表す.
- \bar{X} には自然に左 A -加群構造がはいる, また $(-): A \rightarrow A/J_A = k$ を通して右 A -加群構造をいれる.
- $C := A$ の両側加群 $D(\bar{X})$ に関する自明拡大 $A \oplus D(\bar{X})$, $Y := X \oplus k$.

Y の C -加群構造および右 B -加群構造を次のように定める.

$$(a, f)(x, \alpha) := (ax, \bar{a}\alpha + f(\bar{x})), (x, \alpha)b := (xb, \alpha\bar{b})$$

このとき, 新しい代数 $\Gamma = D(\Lambda)$ を次で定義する.

$$\Gamma := \begin{bmatrix} C & CY_B \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Λ の直既約射影加群について

$$P_1 = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \text{Hom}_{\Lambda}(P_2, P_1) \simeq \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \simeq X$$

であり, Γ の直既約射影加群について

$$Q_1 = \begin{bmatrix} C & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \text{Hom}_{\Gamma}(Q_2, Q_1) \simeq \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \simeq Y$$

が成り立つ. 以下では $x \in X$ に対して, $(x, 0) \in Y$ も x と書くことにする.

$\mathbf{x} \in M_{s,t}(X)$, $\mathbf{y} \in M_{s,t}(Y)$ に対して, $P_{\mathbf{x}} \in K^b(\text{proj } \Lambda)$ および $Q_{\mathbf{y}} \in K^b(\text{proj } \Gamma)$ を次で定める.

$$P_{\mathbf{x}} := [P_2^t \xrightarrow{\mathbf{x}} P_1^s], Q_{\mathbf{y}} := [Q_2^t \xrightarrow{\mathbf{y}} Q_1^s]$$

注意 5.7. $\mathbf{x} \in M_{s,t}(X) \subset M_{s,t}(Y)$ に対して, $Q_{\mathbf{x}} \simeq P_{\mathbf{x}} \otimes_{\Lambda} \Gamma$, $P_{\mathbf{x}} \simeq Q_{\mathbf{x}} \otimes_{\Gamma} \Lambda$ である.²³ 特に次が成り立つ.

²³ Λ は Γ の部分代数かつ剰余代数になっている.

- $P_{\mathbf{x}}$ が直既約であることと $Q_{\mathbf{x}}$ が直既約であることは同値.
- $-\otimes_{\Gamma} \Lambda$ が充満関手 $\text{proj } \Gamma \rightarrow \text{proj } \Lambda$ を誘導することから, $Q_{\mathbf{x}}$ が Γ の二項前準傾対象であれば $P_{\mathbf{x}}$ は Λ の二項前準傾対象.

いま X の右 B -加群としての極小生成系 $\{g_1, \dots, g_r\}$ を固定する. このとき, $\bar{\mathbf{g}} := (\bar{g}_1 \cdots \bar{g}_r)$ は \bar{X} の k -基底である. $x \in X \subset Y$ に対して, \bar{x} を \mathbf{g} に関して展開した係数ベクトルを $\pi(x) \in M_{r,1}(k)$ とし, $\tilde{\pi} : M_{s,t}(X) \rightarrow M_{s,t}(M_{r,1}(k)) = M_{sr,t}(k)$ を π を介して定める.

$$\tilde{\pi}(\mathbf{x} = (x_{ij})) := (\pi(x_{ij}))$$

注意 5.8. $a \in A$ に対して, a 倍写像 $\bar{X} \xrightarrow{a \cdot} \bar{X}$ の \mathbf{g} に関する表現行列を $\phi(a) \in M_{r,r}(k)$ とする.

$$a\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g}\phi(a)$$

また $\tilde{\phi} : M_{s,s}(A) \rightarrow M_{s,s}(M_{r,r}(k)) = M_{sr,sr}(k)$ を ϕ を介して定める.

$$\tilde{\phi}(\mathbf{a} = (a_{ij})) := (\phi(a_{ij}))$$

$a \in A$ および $x \in X \subset Y$ に対して $a\bar{x} = a\bar{\mathbf{g}}\pi(x) = \bar{\mathbf{g}}\phi(a)\pi(x)$ より $\pi(ax) = \phi(a)\pi(x)$ である. 特に, $\mathbf{a} \in M_{s,s}(A)$ および $\mathbf{x} \in M_{s,t}(X) \subset M_{s,t}(Y)$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\tilde{\pi}(\mathbf{ax}) = \tilde{\phi}(\mathbf{a})\tilde{\pi}(\mathbf{x})$$

注意 5.9. $D(\bar{X})$ の $\bar{\mathbf{g}}$ に対する双対基底を $\bar{\mathbf{g}}^*$ とし, $f \in D(\bar{X})$ を $\bar{\mathbf{g}}^*$ に関して展開したときの係数ベクトルを $\pi^*(f) \in M_{1,r}(k)$ とする.

$$f = \pi^*(f)\bar{\mathbf{g}}^*$$

また $\tilde{\pi}^* : M_{s,s}(D(\bar{X})) \xrightarrow{\sim} M_{s,s}(M_{1,r}(k)) = M_{s,sr}(k)$ を π^* を介して定める.

$$\tilde{\pi}^*(\mathbf{f} = (f_{ij})) = (\pi^*(f_{ij}))$$

$f \in D(\bar{X})$ および $x \in X \subset Y$ に対して $fx = f(\bar{x}) = \pi^*(f)\bar{\mathbf{g}}^*\bar{\mathbf{g}}\pi(x) = \pi^*(f)\pi(\bar{x})$ である. 特に $\mathbf{f} \in M_{s,s}(D(\bar{X})) \subset M_{s,s}(C)$ および $\mathbf{x} \in M_{s,t}(X) \subset M_{s,t}(Y)$ に対して次が成り立つ.

$$\mathbf{fx} = \tilde{\pi}^*(\mathbf{f})\tilde{\pi}(\mathbf{x}) \in M_{s,t}(k) \subset M_{s,t}(Y)$$

補題 5.10. $\mathbf{x} \in M_{s,t}(X) \subset M_{s,t}(Y)$ に対して, $P_{\mathbf{x}}$ が二項前準傾対象とする.

$$(1) M_{sr,sr}(k)\tilde{\pi}(\mathbf{x}) + \tilde{\pi}(\mathbf{x})M_{t,t}(k) = M_{sr,t}(k)$$

$$(2) t \leq rs \text{ であれば } M_{s,s}(D(\bar{X}))\mathbf{x} = M_{s,t}(k) (\subset M_{s,t}(Y)) \text{ が成り立つ.}$$

Proof. $P_{\mathbf{x}}$ が二項前準傾対象であることと次の等式が成り立つことは同値である.

$$M_{s,s}(A)\mathbf{x} + \mathbf{x}M_{t,t}(B) = M_{s,t}(X)$$

この等式の両辺に $\tilde{\pi}$ を作用させると次を得る (注意 5.8).

$$M_{sr,t}(k) \supseteq M_{sr,sr}(k)\tilde{\pi}(\mathbf{x}) + \tilde{\pi}(\mathbf{x})M_{t,t}(k) \supseteq \tilde{\phi}(M_{s,s}(A))\tilde{\pi}(\mathbf{x}) + \tilde{\pi}(\mathbf{x})M_{t,t}(k) = M_{sr,t}(k)$$

特に (1) が成り立つ. また $t \leq sr$ のとき, (1) より $\text{rank } \tilde{\pi}(\mathbf{x}) = t$ であり, 次の等式を得る (注意 5.9).

$$M_{s,s}(D(\bar{X}))\mathbf{x} = \tilde{\pi}^*(M_{s,s}(D(\bar{X})))\tilde{\pi}(\mathbf{x}) = M_{s,sr}(k)\tilde{\pi}(\mathbf{x}) = M_{s,t}(k) (\subset M_{s,t}(Y))$$

□

いま $\mathbf{x} \in M_{s,t}(X) \subset M_{s,t}(Y)$ ($t \leq sr$) に対して次の等式が成り立つ。

$$M_{s,s}(C)\mathbf{x} + \mathbf{x}M_{t,t}(B) = M_{s,s}(A)\mathbf{x} + \mathbf{x}M_{t,t}(B) + M_{s,s}(D(\overline{X}))\mathbf{x}$$

特に補題 5.10 より次が成り立つ。

$$P_{\mathbf{x}} \in 2\text{-psilt} \Leftrightarrow Q_{\mathbf{x}} \in 2\text{-psilt}\Gamma$$

したがって Λ が g -有限であれば領域 $\{(x, y) \mid -xr \leq y \leq 0\}$ 内では $\Sigma(\Lambda)$ と $\Sigma(\Gamma)$ の錐は一致する。また $\mathbf{y} = [g_1 \cdots g_r \ 1] \in M_{1,r+1}(Y)$ を考えると, $\{g_1, \dots, g_r, 1\}$ は Y の右 B -加群としての極小生成元であるため

$$Q_2[1] \oplus Q_{\mathbf{y}} \in 2\text{-silt}\Gamma$$

が成り立つ。また $Q_{\mathbf{y}} \oplus Q_{\mathbf{g}} \in 2\text{-silt}\Gamma$ である。実際に次が成り立つ。

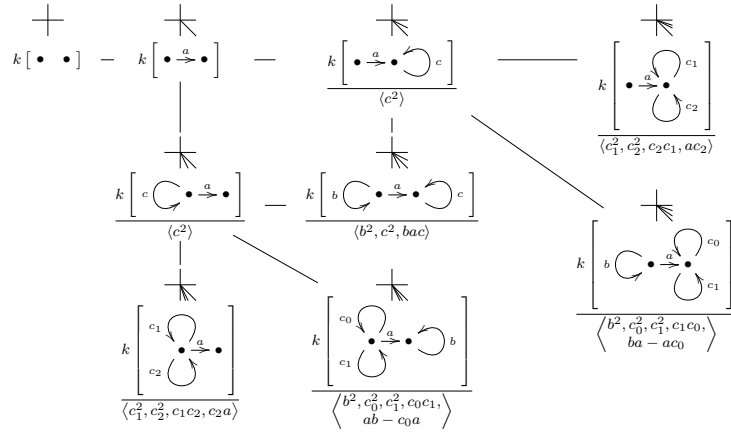
$$\begin{aligned} M_{1,1}(C)\mathbf{y} + \mathbf{g}M_{r,r+1}(B) &= \mathbf{g}M_{r,r+1}(B) + A\mathbf{y} + D(\overline{X})\mathbf{y} \supseteq M_{1,r+1}(X) + M_{1,r}(k) = M_{1,r+1}(Y) \\ M_{1,1}(C)\mathbf{g} + \mathbf{y}M_{r+1,r}(B) &= \mathbf{y}M_{r+1,r}(B) + A\mathbf{g} + D(\overline{X})\mathbf{g} \supseteq M_{1,r}(Y) \end{aligned}$$

以上の議論をまとめる。

定理 5.11 ([AHIKM1]). $\Lambda = \begin{bmatrix} A & A^X B \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \text{UTM}$ は g -有限とする。 $D(\Lambda) \in \text{UTM}$ であり次の等式が成り立つ。

$$D(\Sigma(\Lambda)) = \Sigma(D(\Lambda))$$

例 5.12 ($\Sigma(A) \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ となる代数の帰納的構成). 補題 5.3, 定理 5.6, および定理 5.11 により $\Sigma(A) \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ となる代数 A を帰納的に構成できる。



5.4 貼り合せ定理

$\sigma \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ および $\sigma' \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$ に対して $\sigma \cup \sigma' \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}(2)$ となる。これを $\sigma * \sigma'$ とおき, σ と σ' の貼り合せとよぶ。

$$\sigma * \sigma' := \sigma \cup \sigma' \in \text{c-Fan}_{\text{sc}}(2)$$

このとき, 次が成り立つ。

$$\text{c-Fan}_{\text{sc}}(2) = \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2) * \text{c-Fan}_{\text{sc}}^+(2)$$

そこでこの小節では $\Lambda \in \text{UTM}$, $\Gamma \in \text{LTM}$ に対し, 次を満たす代数 $\Lambda * \Gamma \in \text{M}$ を構成する。

$$\Sigma(\Lambda * \Gamma) = \Sigma(\Lambda) * \Sigma(\Gamma)$$

5.4.1 設定

この小節では次の設定のもと議論を展開する。

- $\Lambda = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} C & 0 \\ Y & D \end{bmatrix}$

- $A \twoheadrightarrow A/J_A = k, A \twoheadrightarrow B/J_B = k, C \twoheadrightarrow A/J_C = k, D \twoheadrightarrow D/J_D = k$ をそれぞれ $\overline{(-)}$ で表す。

5.4.2 $\Lambda * \Gamma$ の構成

$A \times_k C := \{(a, c) \in A \times C \mid \bar{a} = \bar{c}\}$, $B \times_k D := \{(b, d) \in B \times D \mid \bar{b} = \bar{d}\}$ とおく. $A \times_k C$ および $B \times_k D$ は局所 k -代数であり, 極大イデアルでの剰余代数は k と同型になる. $\pi_A : A \times_k C \rightarrow A$ および $\pi_C : A \times_k C \rightarrow C$ をそれぞれ次で定める.

$$\pi_A((a, c)) = a, \pi_C((a, c)) = c$$

π_A を介して X の左 $A \otimes_k C$ -加群構造を定め, また π_C を介して Y の右 $A \otimes_k C$ -加群構造を定める. 同様に $\pi_B : B \times_k D \rightarrow B$ および $\pi_D : B \times_k D \rightarrow D$ を定め, これらから X の左 $B \otimes_k D$ -加群構造および Y の右 $B \otimes_k D$ -加群構造を定める.

注意 5.13. 対応 $A \ni a \mapsto (a, 0) \in A \times_k C$ により, $J(A) \subset A \times_k C$ とみなすことができる. このとき, $J(A) \subseteq \text{ann } Y_{A \times_k C}$ であり, $A \times_k C / J_A \cong C$ が成り立つ. 同様にして次が成り立つ.

- $J(A) \subseteq \text{ann } Y_{A \times_k C}$, $J(B) \subseteq \text{ann } Y_{B \times_k D}$, $J(C) \subseteq \text{ann } X_{A \times_k C}$, $J(D) \subseteq \text{ann } X_{B \times_k D}$
- $A \times_k C / J_A \cong C$, $B \times_k D / J_B \cong D$, $A \times_k C / J_C \cong A$, $B \times_k D / J_D \cong B$

いま $\Delta \in M$ およびその部分代数 $\Delta_u \in \text{UTM}$, $\Delta_l \in \text{LTM}$ を次で定める.

$$\Delta := \begin{bmatrix} A \times_k C & X \\ Y & B \times_k D \end{bmatrix}, \Delta_u := \begin{bmatrix} A \times_k C & X \\ 0 & B \times_k D \end{bmatrix}, \Delta_l := \begin{bmatrix} A \times_k C & 0 \\ Y & B \times_k D \end{bmatrix}$$

ただし $m_{A \times_k C} := 0$, $m_{B \times_k D} := 0$ とする. このとき, Δ の g -扇は Δ_u の g -扇と Δ_l の g -扇の貼りあわせになる.

$$\Sigma(\Delta) = \Sigma(\Delta_u) * \Sigma(\Delta_l)$$

注意 5.14. $\text{Hom}_\Delta(P_2, P_1) \simeq X \simeq \text{Hom}_{\Delta_u}(P_2, P_1)$ を通し, $\mathbf{x} \in M_{s,t}(X)$ から $\text{K}^b(\text{proj } \Delta)$ の二項対象 $P_{\mathbf{x}}$ および $\text{K}^b(\text{proj } \Delta_u)$ の二項対象 $P_{\mathbf{x}}^u$ が定まる (5.3.2 節参照). このとき, $\mathbf{x} \in M_{s,t}(X)$ および $\mathbf{y} \in M_{s',t'}(X)$ に対して次が成り立つ.

$$\text{Hom}_{\text{K}^b(\text{proj } \Delta)}(P_{\mathbf{x}}, P_{\mathbf{y}}[1]) \simeq \frac{M_{s,t'}(X)}{M_{t,t'}(A \times_k C)\mathbf{x} + \mathbf{x}M_{s,s'}(B \times_k D)} \simeq \text{Hom}_{\text{K}^b(\text{proj } \Delta)}(P_{\mathbf{x}}^u, P_{\mathbf{y}}^u[1])$$

このことから第 2 象限以外の領域において $\Sigma(\Delta)$ と $\Sigma(\Delta_u)$ が一致することがわかる. 同様にして第 4 象限以外の領域において $\Sigma(\Delta)$ と $\Sigma(\Delta_l)$ が一致することがわかる.

Δ_u の両側イデアル I_u および Δ_l の両側イデアル I_l をそれぞれ次で定める.

$$I_u := \begin{bmatrix} J_C & 0 \\ 0 & J_D \end{bmatrix} \subseteq \text{ann}_{\Delta_u} \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I_l := \begin{bmatrix} J_A & 0 \\ 0 & J_B \end{bmatrix} \subseteq \text{ann}_{\Delta_l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix}$$

構成から次が成り立っていることに注意する.

$$\Delta_u / I_u \cong \Lambda, g(\Delta_u / I_u) = g(\Delta_u), \Delta_l / I_l \cong \Gamma, g(\Delta_l / I_l) = g(\Delta_l) \rightsquigarrow g(\Delta_u) = g(\Lambda), g(\Delta_l) = g(\Gamma)$$

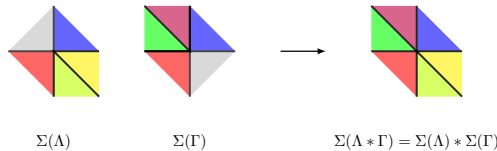
そこで $\Lambda * \Gamma := \Delta$ と定めるとこれが貼りあわせを実現することがわかる.

定理 5.15 ([AHIKM1]). $\Sigma(\Lambda * \Gamma) = \Sigma(\Lambda) * \Sigma(\Gamma)$ が成り立つ.

例 5.16 (上三角行列環と下三角行列環の貼りあわせ). $\Lambda = \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & k \end{bmatrix}$ に対し, $\Lambda * \Gamma$ は次の代数と同型である.

$$\begin{bmatrix} k & kx \\ ky & k \end{bmatrix} \quad (xy = 0, yx = 0)$$

また $\Sigma(\Lambda * \Gamma)$ は $\Sigma(\Lambda)$ と $\Sigma(\Gamma)$ の貼りあわせになっている.



5.5 完備 2 次元 g -扇

この節におけるここまでの結果から次の分類が得られる.

定理 5.17 ([AHIKM2]). ランク 2 の完備扇について次は同値である.

- (a) g -扇として実現できる.
- (b) 符号同一性を満たす.

参考文献

- [AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, τ -tilting theory, *Compos. Math.* 150 (2014), no. 3, 415–452.
- [AI] T. Aihara, O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, *J. Lond. Math. Soc.* (2) 85 (2012), no. 3, 633–668.
- [AHIKM1] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory I: Foundations*, arXiv:2203.15213.
- [AHIKM2] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory II: Classification of g -fans of rank 2*, arXiv:2301.01498.
- [As1] S. Asai, *Semibricks*, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2020, no. 16, 4993–5054.
- [As2] S. Asai, *The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups*, *Adv. Math.* 381 (2021), 107615.
- [BKT] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirkovic-Vilonen polytopes*, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 120 (2014), 113–205.
- [BST] T. Brüstle, D. Smith, H. Treffinger, *Wall and chamber structure for finite-dimensional algebras*, *Adv. Math.* 354 (2019), 106746.
- [DIJ] L. Demonet, O. Iyama, G. Jasso, τ -tilting finite algebras, bricks, and g -vectors, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2019, no. 3, 852–892.
- [F] J. Fei, *Tropical F -polynomials and General Presentations*, arXiv:1911.10513.
- [Ki] A. D. King, *Moduli of representations of finite-dimensional algebras*, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 45 (1994), no. 180, 515–530.
- [KY] S. Koenig, D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t -structures and co- t -structures for finite-dimensional algebras*, *Doc. Math.* 19 (2014), 403–438.
- [R] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, *J. London Math. Soc.* (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.
- [Y] T. Yurikusa, *Wide subcategories are semistable*, *Doc. Math.* 23 (2018), 35–47.
- [ZZ] A. Zimmermann, A. Zvonareva, *Talk in ‘Algèbres amassées et théories des représentations’*, at Université de Caen, November 2017

対数的曲面上の曲線の数え上げ

高橋 宣能 (広島大学)

1 はじめに

ここ 30 年ほどの間に、弦理論におけるミラー対称性の発見などにも刺激を受けて、代数多様体上の曲線の数え上げに大きな進展があった。曲線の数え上げの典型的な設定では、非特異で固有 (コンパクト) な代数多様体 X を考え、非負整数 g およびホモロジー類 $\beta \in H^2(X, \mathbb{Z})$ に対して X 上の種数 g の曲線でホモロジー類 β を持つものの数を問う。このような問題を扱うための方法としては、 X 内の曲線を表すものとして曲線から X への写像を考える Gromov-Witten 理論、曲線の定めるイデアル層や関連する接続層を用いる Donaldson-Thomas 理論、Pandharipande-Thomas 理論などが開発されてきた。

固有でない代数多様体 U を扱う一つの方法として、固有な多様体 X とその上の被約因子 D であって $X \setminus D$ が U と同型になるようなものを考え、 U のかわりに「対数的」な対 (X, D) を調べる、ということが行われる。これをさらに一般化したものが対数的幾何学であり、たとえば正規交叉多様体を扱うのに適している。このような設定では、Gromov-Witten 理論の一般化として相対 Gromov-Witten 理論・対数的 Gromov-Witten 理論というものがあり、アフィン多様体や正規交叉多様体上の数え上げを扱うことができる。

本稿では、まず具体的な問題の例として開多様体上の曲線、特に \mathbb{A}^1 -曲線の数え上げについて説明する。続いて、相対 Gromov-Witten 理論・対数的 Gromov-Witten 理論の定式化について解説し、その応用として退化公式、対数的不変量と局所不変量の対応、対数的 (相対)BPS 不変量、 \mathbb{A}^1 -曲線の数え上げに関連した結果等について触れる。このあたりは全体として表面的な解説になり、たとえば退化公式の具体的な形も述べないが、参考になりそうな文献をなるべく挙げておいた。最後に、対数的 Calabi-Yau 曲面 (X, D) 上の \mathbb{A}^1 -曲線の数え上げに関わる X 上の一次元層のモジュライについて、筆者が最近調べていることを少し述べる。なお、話の順番や記号は講演でのものとは多少異なる。

以下、 \mathbb{C} 上で考える。

2 開多様体上の数え上げ、特に \mathbb{A}^1 -曲線

射影非特異 3 次曲面上に直線がちょうど 27 本ある、という事実は、射影多様体上の曲線の数え上げの最初期の例と言えるだろう (Cayley, Salmon 1849)。

一つ次元をあげて、3 次元の射影非特異 5 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^4$ を考える。このとき標準因子 K_X は自明 ($K_X \sim 0$) であり、 X は Calabi-Yau 多様体である。 X に含まれる直線は 2875 本 (Schubert, 1886 頃?)、2 次曲線は 609250 本ある (Katz, 1985)。一般の次数では、有理曲線、すなわち正則写像 $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ の像を数えることにする。Clemens は、 X を一般の 5 次超曲面とすると、各 d に対して X の含む d 次の有理曲線は 0 次元の族をなす、すなわち有限個であることを予想した。

1991 年、弦理論における「ミラー対称性」の考え方から、3 次元 5 次超曲面 X 上の各次数の有理曲線の数

について「予言」が与えられ、3 次の場合にはちょうどその頃に行われた計算により確かめられた。その後、この予言を確かめることなどを目的として Gromov-Witten 理論などが考案され、また予言自体は Givental, Lian-Liu-Yau によって証明された。

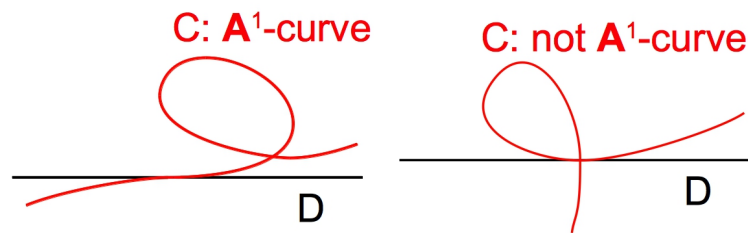
同じようなことを、アフィン多様体上で考えるとどうなるだろうか。まず、非特異アフィン多様体 U に対して、非特異射影多様体 X と X 上の正規交叉因子 D で $U \cong X \setminus D$ となるものを考える。このとき、非特異射影的な場合の標準因子に対応するものは対数的標準因子 $K_X + D$ である。以下では、代数多様体 X とその上の被約因子 D の対 (X, D) を対数的多様体と呼ぶことにする。

(既約) 非特異射影的曲線 C が有理曲線である、すなわち \mathbb{P}^1 と同型であることは $\deg K_C < 0$ となることと同値だが、対象を対数的曲線 (C, D) (C は非特異射影的、 D は被約因子) に広げると、 $\deg(K_C + D) < 0$ となるものとしてもう一つ、 $(C, D) \cong (\mathbb{P}^1, pt)$ がある。これは、 \mathbb{A}^1 に対応するものと言える。

定義 2.1. X を固有代数多様体、 $D \subset X$ を被約因子とする。 (X, D) 上の \mathbb{A}^1 -曲線とは、(既約) 有理曲線 $C \subset X$ であって、正規化写像を $\nu: \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ と書くとき $\#\nu^{-1}(D) = 1$ が成り立つようなものである。 $(X \setminus D)$ 上の \mathbb{A}^1 -曲線と呼ぶこともある。))

既約曲線 $C \subset X$ が (X, D) 上の \mathbb{A}^1 -曲線であることは、 $C \setminus D$ が正則写像 $\mathbb{A}^1 \rightarrow X \setminus D$ の像であるということと同値である。また、 $X \setminus D$ がアフィン空間の閉部分多様体として表されている場合は、 $C \setminus D$ が多項式写像の像であると言っても良い。

条件のうち、 $\#\nu^{-1}(D) = 1$ を最大接触条件という。これは、 $\#(C \cap D) = 1$ より少し強いことに注意しておく。



例 2.2. $U \subset \mathbb{A}^3 = \mathbb{C}^3$ をアフィン 3 次曲面として、射影閉包 $X = \overline{U}$ と $D := X \setminus U$ が非特異と仮定する。例えば、 $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ は条件を満たす。

このとき、 U 上のアフィン直線は X 上の射影直線と一対一に対応するから、27 本ある。

より一般には、対 (X, D) と $g \geq 0, w_1 > 0, \dots, w_k > 0$ に対して

- $C \subset X$ は種数 g の既約曲線
- $\nu: C^\nu \rightarrow C$ を正規化として $\nu^*(D) = w_1 x_1 + \dots + w_k x_k$ ($x_i \in C^\nu$)

となるものを数え上げる問題が考えられる。これを、「相対的」「対数的」な曲線の数え上げという。

$(\mathbb{P}^2, \text{line})$ の場合、次数 n で上の条件を満たすものは、ある次元 d の族をなし、一般の位置にある d 個の点を通る曲線の数を求めることが問題となる。Caporaso-Harris は、この次元がパラメータの数え上げから予想される通りの値であることを証明し、また求める曲線の数を帰納的に計算する公式を与えている ([CH])。

$(\mathbb{P}^2, \text{conic})$ や Hirzebruch 曲面の場合にも同様の結果が Vakil により与えられている ([V])。

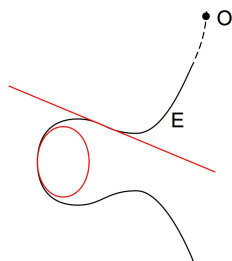
3 $(\mathbb{P}^2, \text{cubic})$ 上の \mathbb{A}^1 -曲線

3次元 Calabi-Yau 多様体 X 上では、各ホモロジー類 β および非負整数 g に対して、 β に属する種数 g の曲線のモジュライ空間の「仮想次元」、すなわちパラメータの数の計算から予想される次元が 0 になる。

これと同様のことを対数的多様体上の \mathbb{A}^1 -曲線で考えると、 (X, D) 上の \mathbb{A}^1 -曲線のモジュライの仮想次元が 0 になるためには、 (X, D) が対数的 Calabi-Yau 曲面、すなわち $\dim X = 2$ および $K_X + D \sim 0$ を満たすようなものであれば良いことがわかる。

以下では、この条件を満たすものとして、非特異 3 次曲線 $E \subset \mathbb{P}^2$ に対する対 (\mathbb{P}^2, E) を主に扱う。(実は、 E で 3 重分岐する 3 重被覆での $\mathbb{P}^2 \setminus E$ の逆像はアフィン三次曲面であり、上で述べたようなアフィン三次曲面上の \mathbb{A}^1 -曲線は (\mathbb{P}^2, E) の \mathbb{A}^1 -曲線と大体 3:1 で対応する。)

$E \subset \mathbb{P}^2$ を非特異三次曲線とする。変曲点 $O \in E$ をとり、これを単位元とする群構造を考える。



C を (\mathbb{P}^2, E) 上の d 次 \mathbb{A}^1 -曲線とすると、最大接触性から特に $C \cap E = \{P\}$ がある $P \in E$ について成り立つ。このとき $C|_E = 3dP$ となっているから、 P は群構造について $3d$ -トーションである。

$3d$ -トーションの中でも、 P の位数によって $C \cap E = \{P\}$ となる \mathbb{A}^1 -曲線 C の様子には差がある。考えやすいのが次の場合である。

定義 3.1. $3d$ -トーション P が (次数 d で) 原始的とは

- $3|d$ かつ P は位数 $3d$, または
- $3 \nmid d$ かつ P は位数 d または $3d$

を満たすことである。($3 \nmid d$ の場合、 O を取り替えて位数 d とすることも $3d$ とすることもできる。)

筆者は、原始的な P に対して $C \cap E = \{P\}$ となる d 次 \mathbb{A}^1 -曲線 C の数 m_d を (随分前に) 計算した ([T1])。

d	1	2	3	4	5	6	7	8
m_d	1	1	3	16	113	948	8974	92840

ただし、 E は一般の 3 次曲線とし、 $d = 7, 8$ ではある技術的仮定を置いている。(計算の方法は、具体的な 1 次元の族を用いた退化および上で述べた三重被覆を組み合わせたものである。)

ちょうどその頃、Chiang-Klemm-Yau-Zaslow により、可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E)$ に対応する直線束 $\text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E))$ 上の種数 0、次数 d の曲線に対応する局所 Gromov-Witten 不変量 K_d が計算された ([CKYZ])。ここで、 $\text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E))$ は局所 Calabi-Yau 3-fold になっている。

K_d に Aspinwall-Morrison の公式を適用して、BPS 数と呼ばれる整数不変量 n_d が得られる (後述)。 m_d と n_d を比較し、以下の観察が得られた ([T2])。

1, 1, 3, 16, 113, ... は $(-1)^{d-1}n_d/3d$ に等しい。

ここで、次の疑問が生じる。

疑問 3.2. (1) なぜ、 \mathbb{A}^1 -曲線の数 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E)$ の局所 Gromov-Witten 不変量と結びつくのか。なお、[T3] では $(\mathbb{P}^2, \text{line})$, $(\mathbb{P}^2, \text{conic})$ でも同様の現象があることを示している (接触する点の個数が複数の場合にも同様の現象がある程度ある)。

(2) 原始的な点と原始的でない点での \mathbb{A}^1 -曲線の様子はかなり異なるにも関わらず、なぜ、原始的な点での数え上げが良い性質を持っている (局所的な BPS 数の簡単な有理数倍になっている) のか。

これらの問いには、§§6.1, §§6.3 で一定の答が与えられる。

4 安定写像・(局所)Gromov-Witten 不変量・BPS 数

相対/対数的 Gromov-Witten 理論について述べる前に、まず Gromov-Witten 理論について思い出しておく。

Gromov-Witten 理論では、代数多様体 X 上の曲線を、曲線からの正則写像 $C \rightarrow X$ の像と考える。ここで、たとえば非特異な曲線の族を考えると、ほとんどの場合、極限において特異曲線があらわれる。そのため、非特異な曲線からの正則写像のモジュライはコンパクトにならない。そこで、次のように考えるのだった。

定義 4.1. n 点付き半安定曲線とは、次のような組 (C, x_1, \dots, x_n) である。

- C は連結な 1 次元多様体であり、特異点としては高々 node しか持たない。
- x_i は C の異なる非特異点である。

定義 4.2. X を非特異固有多样体とする。

X への n 点付き安定写像とは、半安定曲線 (C, x_1, \dots, x_n) と正則写像 $f: C \rightarrow X$ の組 $(C; x_1, \dots, x_n; f)$ で、 x_i を保つ C の X 上の自己同型 (f と可換な自己同型) が有限個であるようなものである。

定義 4.3. g を非負整数、 $\beta \in H_2(X)$ をホモロジー類とすると、 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ を、安定写像 $(C; x_1, \dots, x_n; f)$ であって $p_a(C) = g$, $f_*([C]) = \beta$ となるもののモジュライ空間と定義する。

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ は固有 Deligne-Mumford スタックとなる。また、「仮想基本類」 $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\text{vir}}$ が定義される。 x_i での評価写像による X 上のコホモロジー類の引き戻しや忘却写像 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ による $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 上のコホモロジー類の引き戻しの様々な積と $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\text{vir}}$ とのペアリングを取ることで、**Gromov-Witten 不変量**が定まる。

例 4.4. $E \subset \mathbb{P}^2$ を非特異三次曲線として、 $X = \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E))$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E)$ に対応する直線束の全空間とする。 h を \mathbb{P}^2 内の直線の類とする。

このとき、 X は局所 Calabi-Yau 3-fold となり、したがって、各正整数 d に対して $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X, dh)$ の仮想次元は 0 となる。ここで、 X は固有ではないが、定数でない安定写像の像は 0 切斷 $\mathbb{P}^2 \subset X$ に含まれるので、 $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X, dh)$ は $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, dh)$ と同一視でき、したがって固有である。ただし、 $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X, dh)$ には $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, dh)$ とは異なる仮想基本類が定まっている。有理曲線の数え上げに対応する Gromov-Witten 不変量 $K_d := \deg[\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X, dh)]^{\text{vir}} \in \mathbb{Q}$ を考える。

BPS 数 n_d は, Aspinwall-Morrison の公式 $K_d = \sum_{k|d} n_{d/k}/k^3$ を満たすものとして定義され、整数になる (ことが示されている)。

5 相対/対数的 Gromov-Witten 理論

X を非特異固有多様体、 $D \subset X$ を正規交叉因子として、 D との接触の条件付きで安定写像を考えたい。境界のない、通常の Gromov-Witten 理論では、定義域として node を持ちうる曲線を考えることでモジュライをコンパクトにすることができた。境界 D との接触の条件が加わることにより、何が問題となるか、まず述べる。

非負整数 g およびホモロジー類 $\beta \in H_2(X)$ を取り、交点数を $w := \beta \cdot D$ と置いておく。たとえば最大接触の条件付きでモジュライ空間を考えるにあたり、まず $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}(X, \beta)$ の部分集合

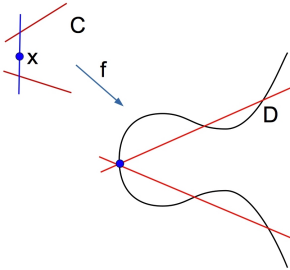
$$\{(C; x; f) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,1}(X, \beta) \mid f^*D = wx\}$$

が考えられるが、残念ながらこれは固有になっていない。極限として、 x を含む C の成分が f によって D の中に写されるようなものが現れうるからである。

一方で、

$$\{(C; x; f) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,1}(X, \beta) \mid f^{-1}D \supseteq wx \text{ (スキームとして)}\}$$

を考えると、今度は最大接触の曲線のモジュライのコンパクト化としては大きすぎる。たとえば、下図のように x を含む成分が D 上の一点に収縮されるとき、 $f^{-1}D \supseteq wx$ が満たされるが、 C の像は D と複数の点で交わることがあり、最大接触性の一般化としては望ましくない。



これを解消する方法はいくつか考えられてきた。まず、 D が非特異の場合には、得られる不変量は相対 Gromov-Witten 不変量と呼ばれている。Ionel-Parker, Li-Ruan は、微分幾何学的なアプローチにより相対 Gromov-Witten 不変量を定義し、後述の退化公式等を得た ([IP], [LF])。

代数的なアプローチとして、Gathmann は、境界 D が very ample である場合にこれによって X を射影空間 \mathbb{P}^N に埋め込み、 \mathbb{P}^N への種数 0 の安定写像のモジュライの部分空間として種数が 0 の相対 Gromov-Witten 不変量を定義し、またそれらを計算する方法を与えた ([Ga1])。一般の場合については、Jun Li がターゲット X の退化を用いた代数的な定式化を与えた ([L1])。§§5.1 ではこれについて述べる。(なお、このあたりは 2000 年代前半までのお話である。)

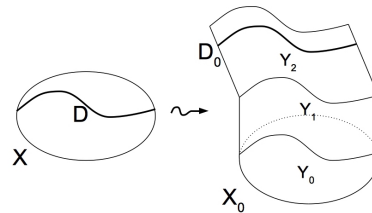
より一般に、 D が非特異と限らない正規交叉因子の場合や X 自体が正規交叉多様体の場合については、Gross-Siebert, Abramovich-Chen により対数的 Gromov-Witten 理論が定式化された。これについては §§5.2 で述べる。

5.1 相対安定写像・相対 Gromov-Witten 不変量 ([L1])

簡単のため、最大接触の場合で説明する。 (X, D) への 1 点付き安定写像の、非特異曲線 S でパラメータ付けられた族で、 $0 \in S$ 以外では最大接触であるものを考える。 $0 \in S$ 上の安定写像 $(C; x; f)$ が、 C のある成分を D の中に移す場合が問題だった。このとき、 $D \times \{0\} \subset X \times S$ を適切に何回かブローアップすることにより、状況を改善できることがわかる。

そこで、 (X, D) の退化として、次のような “expanded target” (X_0, D_0) を考える。

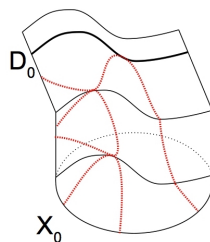
- $X_0 = Y_0 \sqcup_D Y_1 \sqcup_D \cdots \sqcup_D Y_k$
- $Y_0 \cong X$, $Y_i \cong \mathbb{P}_D(\mathcal{O}_D \oplus \mathcal{N}_{D \subset X})$
- \sqcup_D は、 $D \subset X$ および $\mathbb{P}_D(\mathcal{O}_D \oplus \mathcal{N}_{D \subset X}) \rightarrow D$ の二つの自然な section に沿った貼り合わせ。
- $D_0 \subset Y_k$ は $Y_k = \mathbb{P}_D(\mathcal{O}_D \oplus \mathcal{N}_{D \subset X}) \rightarrow D$ の自然な section のうちのひとつで、 D と同型な因子。



実際には、 $X \times \mathbb{A}^k$ の適切な modification により作られる族 $X[k] \rightarrow \mathbb{A}^k$ を構成し、中心ファイバー $X[k]_0$ として X_0 が得られる。

定義 5.1. 一点付き半安定曲線 (C, x) から X への最大接触の相対安定写像とは、(ある k に対する) $f: C \rightarrow X_0$ で、 $f^*D_0 = wx$ と次の “predeforability” という性質を満たすものである。

- C の既約成分は X_0 の特異点集合の中に写されない。
- $P \in C$ について $f(P) \in Y_i \cap Y_{i+1}(= D')$ であるとき、 P は C の既約成分 Z_1, Z_2 の交わり、 $f(Z_1) \subseteq Y_i$, $f(Z_2) \subseteq Y_{i+1}$ のようになる。
- Z_1 での $D' \subset Y_i$ の引戻しと Z_2 での $D' \subset Y_{i+1}$ の引戻しは同じ order を持つ。(これは、 X の smoothing に沿って f が C 上局所的には変形できる、という条件である。)



接触条件がより一般の場合や接触点以外の marking を考える場合にも、同様に相対安定写像が定義される。

ホモロジー類と接触条件を合わせたデータを $\tilde{\beta}$ と書くとき、相対安定写像のモジュライ空間 $M_g(X/D, \tilde{\beta})$ が定義され、固有 Deligne-Mumford stack になる。

また、仮想基本類 $[M_g(X/D, \tilde{\beta})]^{\text{vir}}$ が定義され、 X への評価写像、 D への評価写像、忘却写像によるコホ

モロジー類の引き戻しとのペアリングにより相対 **Gromov-Witten** 不変量が定まる。

5.2 安定対数的写像・対数的 Gromov-Witten 不変量 ([GS], [AC])

相対 Gromov-Witten 不変量は、非特異多様体 X とその上の非特異因子 D の組に対して定義された。 D が正規交叉因子である場合や X 自体が正規交叉多様体である場合など、より一般の場合には対数的 Gromov-Witten 理論が適用できる。

まず、対数的構造について思い出しておく ([K], [Kf] など参照)。

定義 5.2. スキーム X 上の対数的構造とは、モノイドの層 \mathcal{M}_X とモノイド準同型 $\alpha: \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ (\mathcal{O}_X は乗法でモノイドと見る) の組であって、 $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^\times$ となるものである。

対 (X, \mathcal{M}_X) を対数的スキーム (log scheme) と呼ぶ。 X^\dagger などの記号を用いる。

対数的スキーム (X, \mathcal{M}_X) から (Y, \mathcal{M}_Y) への射とは、スキームの射 $f: X \rightarrow Y$ と、 $f^\#: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ と整合的なモノイドの層の射 $f^{-1}\mathcal{M}_Y \rightarrow \mathcal{M}_X$ の組のことである。

$\overline{\mathcal{M}}_X := \mathcal{M}_X / \mathcal{O}_X^\times$ を ghost sheaf と呼ぶ。

対数的構造について、finitely generated, integral, saturated という性質が定義される (が詳細は述べない)。すべて満たす場合、 (X, \mathcal{M}_X) は fs log scheme であるという。以下では基本的に fs log scheme を扱うものとする。

$\mathcal{M}_X = \mathcal{O}_X^\times$ の場合、この対数的構造は自明であると言い、 (X, \mathcal{M}_X) はただのスキーム X と同一視される。

例 5.3 (因子的対数的構造). X が (既約) 代数多様体、 $D \subset X$ が因子のとき、 $\mathcal{M}_{D \subset X} := \mathcal{O}_X \cap \mathcal{O}_{X \setminus D}^\times$ とおき、 α を包含写像とすると、これは対数的構造を与える。 $\mathcal{M}_{D \subset X}$ を因子的対数的構造と呼び、 $X(\log D) := (X, \mathcal{M}_{D \subset X})$ と書く。

$D = \sum D_i$ が D_i が既約成分とする単純正規交差因子のとき、ghost sheaf を見ておくと、 $(\overline{\mathcal{M}}_{D \subset X})_x \cong \mathbb{N}^{\#\{i|x \in D_i\}}$ となっている。

対数的スキームの射が相対安定写像とどう関わるか、感じをつかむために、非特異射影曲線 C と $P \in C$ について、対数的スキームの射 $C(\log P) \rightarrow X(\log D)$ が最大接触性におおよそ対応していることを見よう。 $f: C \rightarrow X$ を対応するスキームの射として、 $f(Q) \in D$ とする。このとき、 $\mathcal{M}_{D \subset X}$ の section で D に零点を持つものは、 $f^{-1}\mathcal{M}_{D \subset X} \rightarrow \mathcal{M}_{P \subset C}$ によって Q に零点を持つ section に写る。 $\mathcal{M}_{P \subset C}$ の section は P 以外では零点を持たないので $Q = P$ 。よって $f(C \setminus P) \subseteq X \setminus D$ となり、たとえば $f(C) \cdot D > 0$ ならば最大接触になる。

さらに、 f^*D の P での位数が対数的射の変形で保たれる、といったこともすぐわかる。

例 5.4 (正規交叉多様体). Y が非特異多様体、 $X = \bigcup X_i \subset Y$ が非特異多様体 X_i を既約成分とする Y の単純正規交叉因子のとき、 $\mathcal{M}_{X \subset Y}$ を制限することにより X 上の対数的構造が定まる。

対数的曲線からの対数的射は、 X の smoothing に沿ってどのように曲線からの射を変形させるか、という情報を持っている。

対数的スキームの射 $X^\dagger \rightarrow Y^\dagger$ の **log smoothness** が、smoothness と同様に定義される。log smooth に加えて射が integral という条件を満たすことを仮定することが多く、この場合は analytic local に (toric 多様体, toric 境界) の間の支配的 toric 射 (を対数的射と見たもの) の base change と同型である。

次に、安定対数的写像と対数的 Gromov-Witten 不変量について、[GS] に沿って述べる。

定義 5.5. S^\dagger 上の対数的スキームの族、すなわち対数的な射 $\mathcal{X}^\dagger \rightarrow S^\dagger$ 、および S^\dagger 上の対数的スキーム $W^\dagger \rightarrow S^\dagger$ に対し、 $\mathcal{X}^\dagger/S^\dagger$ への安定対数的写像の W^\dagger 上の族とは、“pre-stable log 曲線族”(だいたい点付き半安定曲線の対数版) $\mathcal{C}^\dagger \rightarrow W^\dagger$ と可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{X}^\dagger \\ \downarrow & & \downarrow \\ W^\dagger & \longrightarrow & S^\dagger \end{array}$$

の組で、安定性条件 (略) を満たすものである。

実は、安定対数的写像すべてを考えるとあまり良いモジュライ空間は得られない。これは、与えられた安定対数的写像に対し、「余分な」対数的構造を加えることがいつでも可能であるためである。そこで、 W^\dagger の対数的構造が「必要最小限」であることを意味する**基本性 (basicness)** という条件が定義される。

$X^\dagger = (X, \mathcal{M}_X)$ を (ある log point $S^\dagger = (\text{Spec } \mathbb{C}, \mathcal{M}_{\text{Spec } \mathbb{C}})$ 上の) log scheme とする。このとき、 X^\dagger への基本的安定対数的写像のモジュライ空間 $\mathcal{M}(X^\dagger)$ が定義される。

X が射影的のとき、ホモロジー類、domain curve の種数、marked point の数、接触条件のデータを $\tilde{\beta}$ で表すと、対応するモジュライ空間 $\mathcal{M}(X^\dagger, \tilde{\beta})$ は、“combinatorially finite” という条件が満たされれば固有 Deligne-Mumford stack である。(この条件はここで考えているような例では成立している。)

さらに X^\dagger が log smooth ならば仮想基本類が定義でき対数的 **Gromov-Witten** 不変量が定まる。

X が非特異、 $D \subset X$ が非特異因子のときには、相対安定写像のモジュライと基本的安定対数的写像のモジュライが得られることになる。これらはそれぞれ、非特異な C からの相対安定写像 $C \rightarrow X$ たちに対応する開集合を含んでおり、それらは同型であるが、モジュライ空間全体では同型ではない ([CGKT3] にも例がある)。しかし、GW 不変量については

$$((X, D) \text{ の相対 GW 不変量}) = (X(\log D) \text{ の対数的 GW 不変量})$$

が成り立つ ([AMW])。

相対/対数的 Gromov-Witten 理論の他に、root stack を用いた orbifold Gromov-Witten 理論というものもある (最近の文献としては [TY] など)。また、対数的 Gromov-Witten 理論の一般化としては、punctured Gromov-Witten 理論 ([ACGS])、また相対 GW 理論と対数的 GW 理論のハイブリッドと言うべき logarithmic Gromov-Witten theory with expansions というものもある ([R])。

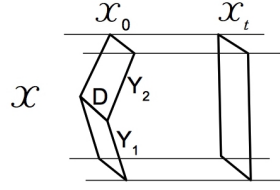
6 応用

6.1 退化公式、局所・相対対応

T を非特異曲線、 $0 \in T$ として、 $\mathcal{X} \rightarrow T$ を射影的平坦族であって次を満たすものとする。

- $t \in T \setminus \{0\}$ に対しファイバー \mathcal{X}_t は非特異。
- $0 \in T$ に対し、 $\mathcal{X}_0 = Y_1 \cup Y_2$ は非特異な Y_1, Y_2 の正規交叉。

$D := Y_1 \cap Y_2$ とおく。



$t \neq 0$ に対して、Gromov-Witten 不変量の変形不変性から、 \mathcal{X}_t の Gromov-Witten 不変量は \mathcal{X}_0 の Gromov-Witten 不変量に等しい。 \mathcal{X}_0 の Gromov-Witten 不変量は (Y_1, D) , (Y_2, D) の相対 Gromov-Witten 不変量で表せることが証明できるので、(準備が煩雑なので具体的な表式は略するが) 以下が成り立つ。

定理 6.1 ([IP], [LF], [L2]). \mathcal{X}_t の Gromov-Witten 不変量は (Y_1, D) , (Y_2, D) の相対 Gromov-Witten 不変量で表せる。

注 6.2. 3 つ以上の成分が交わる場合については、[R], [ACGS], [MR2] があるようである。

退化公式を用いて、局所・相対対応が証明される。

定理 6.3 ([GGR]). X を非特異固有多様体、 $D \subset X$ を nef な非特異因子、 $\beta \in H_2(X)$, $w := \beta \cdot D > 0$ とする。 $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X, \beta)$ と $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\text{Tot}(\mathcal{O}_X(-D)), \beta)$ を同一視する。また、ホモロジー類 β で極大接触という条件を $\tilde{\beta}$ で表すものとして、 $F : M_0(X/D, \tilde{\beta}) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(X, \beta)$ を自然な射とする。このとき、

$$F_*[M_0(X/D, \tilde{\beta})]^{\text{vir}} = (-1)^{w+1} w [\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\text{Tot}(\mathcal{O}_X(-D)), \beta)]^{\text{vir}}.$$

なお、 S が del Pezzo 曲面で D が smooth な反標準曲線の場合には Graber-Hassett による未公開のノートで(しばらく前に) 証明されていたようである。

特に、非特異平面三次曲線 E に対する (\mathbb{P}^2, E) の場合、 h を直線の類として、“mc” で最大接触条件を表すものとする、

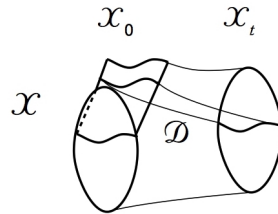
$$\deg[M_0(\mathbb{P}^2/E, (dh, \text{mc}))]^{\text{vir}} = (-1)^{d+1} 3d \cdot \deg[\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E)), dh)]^{\text{vir}}$$

が成り立つ。(これ自体はすでに Gathmann [Gal] が両辺の計算により示していた。)

なお、種数 1 以上では、補正項付きで成立する ([BFGW])。また、 D が $n(\geq 2)$ 個の成分を持ち、domain 上の n 個の点でそれぞれに最大接触となる場合についても研究が進んでいる。最大接触以外では、 D を直線または非特異二次曲線として (\mathbb{P}^2, D) の場合にある(弱い)対応がある ([T3])。

局所・相対対応の証明には、「 $D \subset X$ の法錐への退化」が用いられる。

$X \times \mathbb{A}^1$ を $D \times \{0\}$ でブローアップしたものを \mathcal{X} とおき、 $D \times \mathbb{A}^1$ の strict transform を \mathcal{D} とする。 \mathcal{X}_0 の既約成分で、 X と同型な方を Y_1 , ブローアップで出てくる方を Y_2 とする。



$\mathcal{L} = \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-\mathcal{D}))$ とおき、 $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{A}^1$ に退化公式を適用する。ここで、 $t \neq 0$ では $\mathcal{L}_t \cong \text{Tot}(\mathcal{O}_X(-D))$ となるので、 $\mathcal{O}_X(-D)$ の局所 GW 不変量が得られる。一方、 $t = 0$ では $(\mathcal{L}|_{Y_i}, \mathcal{L}|_D)$ の相対 GW 不変量で表され

るわけだが、まず $\mathcal{L}|_{Y_1}$ は自明な直線束になっている。一方、 Y_2 の方は D 上の \mathbb{P}^1 束で分かりやすい。 $\mathcal{L}|_D$ への評価写像でしかるべき次元になるという条件から、結局 \mathcal{L}_0 の GW 不変量は (X, D) の最大接触の相対 GW 不変量で表されることが分かる。

ともあれ、疑問 3.2 (1) の「なぜ \mathbb{A}^1 -曲線の数 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E)$ の局所 Gromov-Witten 不変量と結びつくのか」という問いには、Gromov-Witten 不変量のレベルでは答が得られたことになる。

6.2 対数的 BPS 数

ホモロジー類 β が別のホモロジー類 β' の $d > 1$ 倍であるとき、類 β' に属する曲線 C の d 重被覆は類 β の Gromov-Witten 不変量に寄与する。 C が 3 次元 Calabi-Yau 多様体内の非特異曲線の場合、この寄与を取り除く方法は、種数 0 では Aspinwall-Morrison (一般には Gopakumar-Vafa) が与えており、§4 で述べた K_d と n_d の関係がそれである。

相対 (または対数的) Gromov-Witten 不変量については、次のように考える。

ここでは X が非特異有理曲面、 $D \in |-K_X|$ が非特異反標準因子の場合を考える。このとき、 (X, D) は非特異な境界を持つ対数的 Calabi-Yau 曲面ということになる。

(X, D) 上の非特異な \mathbb{A}^1 -曲線 C に対して、像サイクルが dC となるような種数 0 の相対安定写像の寄与は [GPS] で与えられており、実際の曲線の数え上げにはこれがかかなり近いが、ここでは局所相対対応に沿い、 $\text{Tot}(\mathcal{O}_X(-D))$ の BPS 数を参考として別の不変量を与える。

定義 6.4. (X, D) の対数的 BPS 数 m_β ($\beta \in H_2(X)$) を次の等式が成り立つものと定める:

$$\deg[M_0(X/D, (\beta, \text{mc}))]^{\text{vir}} = \sum_{k|\beta} \frac{(-1)^{(k-1)\beta \cdot D/k}}{k^2} m_{\beta/k}.$$

Gromov-Witten 不変量の局所・相対対応から、たとえば (\mathbb{P}^2, E) については、 $m_{dh} = (-1)^{d+1}n_d$ が成り立つことになる。そこで、疑問 3.2 の (2) については、次のように考えることができる。

問題 6.5. $E \subset \mathbb{P}^2$ を非特異三次曲線、 $P \in E$ を原始的として以下は成り立つか:

$$(P \text{ での対数的 BPS 数}) = ((\mathbb{P}^2, E) \text{ の対数的 BPS 数}) / (3d)^2.$$

最近、これに肯定的な解答が得られた (後述)。

一般の対数的 Calabi-Yau 曲面でも同様の問題が考えられ、[CGKT1], [CGKT2] では X が del Pezzo 曲面、 $p_a(\beta) \leq 2$ の場合に検証している。

6.3 トロピカル幾何学との関係

Mikhalkin は、平面上のトロピカル曲線を用いてトーリック曲面上の曲線の数え上げを行うことができることを示した ([Mi])。

Nishinou-Siebert は、このこと ($g = 0$ での) 代数的証明および相対・高次元化を行った ([NS])。

また Graefnitz は、非特異平面三次曲線 E に対して (\mathbb{P}^2, E) の対数的 GW 不変量のトロピカル幾何学 (および散乱関式) を用いた記述を得た ([Gr])。

ここでは、(筆者の理解するところでは) 大体以下のようなことが用いられている。まず、トーリック多様体の場合については、与えられたトーリック多様体 X を一般ファイバーとするトーリック写像 $X \rightarrow \mathbb{A}^1$ で、0

上のファイバーは正規交叉多様体 (トーリック多様体の境界因子の和) になるようなものを作る (トーリック退化)。これは log smooth である。

このとき、トロピカル平面上の有理点は、上の族を $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1; t \mapsto t^m$ で基底変換し、中心ファイバーを適宜 (トーリックに) プローアップしたものの既約成分に対応する。そこで、トロピカル曲線の頂点 (有理点とする) に対して、対応する既約成分内の「直線」を対応させる。これにより中心ファイバーへの対数的射が得られるので、後は対数的射の変形理論により一般ファイバーに変形することを見る。

(\mathbb{P}^2, E) についてもトーリック退化に似た log smooth な退化族が考えられる。この場合トロピカル曲線は、ある「特異点付きアフィン多様体 (アフィン微分幾何学の意味で)」で考えることになる。このあたりは、Gross-Siebert による、実アフィン幾何と対数的幾何学の対応を用いたミラー対称性の理論に関わる (らしい)。

Bousseau は、Graefnitz の結果および散乱関数と \mathbb{P}^2 上の一次元層の Donaldson-Thomas 不変量との関係などを用いて、任意の $3d$ -torsion $P \in E$ に対して

$$(P \text{ での対数的 BPS 数}) = ((\mathbb{P}^2, E) \text{ の対数的 BPS 数}) / (3d)^2$$

が成立することを証明した ([Bou1], [Bou2])。これで、二つ目の疑問にも解答が得られたことになる。(証明の中では、 \mathbb{P}^2 上の一次元層の Donaldson-Thomas 不変量 $P(M_{(0,d,\chi)})$ が χ によらないという、問題 6.5 と似た形の事実を使っている。)

7 対数的 (相対的) な一次元層

代数多様体 X 上の曲線 C を (半安定) 曲線からの射の像と見て、射のモジュライを用いるのが Gromov-Witten 理論だが、 X 上の部分スキームと見るとその構造層やイデアル層によってとらえることもできる。そこで、 X 上の接続層のモジュライを用いて数え上げを行う Donaldson-Thomas 理論、Pandharipande-Thomas 理論が考案されている。

相対的/対数的な場合にも接続層のモジュライを考えることには意味はあるだろうと思われる。実際、相対的 Donaldson-Thomas 理論については [CL], 対数的 Donaldson-Thomas 理論については [MR1], [MR2] などがあるようだ。筆者は今のところこういったことを考えているわけではないが、 \mathbb{A}^1 -曲線の数え上げに関連してある種の接続層のモジュライに関わることがあったので、(地味な話だが) ここに述べる。

まず相対/対数的でない、射影 K3 曲面上の有理曲線の話の思い出しておく。Yau-Zaslow は次の「公式」を与えた: S を K3 曲面、 D を S 上の ample な因子として、 g を D の (算術) 種数とする。このとき $|D|$ に含まれる有理曲線の数、適切に数えると g のみに依存し、これを $n(g)$ と書くとき ($n(0) = 1$ として)

$$\sum_{g=0}^{\infty} n(g)q^g = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^{24}}.$$

注 7.1. 有理曲線の「数」が g のみによる、という点は問題 6.5 に通じるものがある。

Yau-Zaslow の議論、および Beauville による、ある定式化のもとでの証明では、 $|D|$ 上の tautological family の relative compactified Jacobian が用いられる。その議論から、 $C \in |D|$ が (既約) 有理曲線のとき、 C の寄与は compactified Jacobian $\bar{J}C$ のオイラー標数 $e(\bar{J}C)$ であるべきことが分かる。実際これは、安定写像のモジュライから得られる重複度に等しいことが証明された。

定理 7.2 ([FGS]). 有理曲線 $C \subset S$ の $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(S, [C])$ における重複度は $e(\overline{J}C)$.

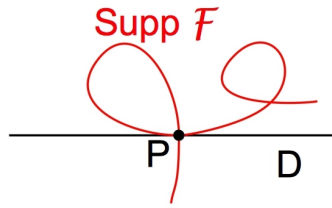
証明には、K3 曲面上の単純層のモジュライの非特異性 ([Mu]) が用いられた。

では、相対的な場合にはどうかというと、だいたい同じことが成り立つ。

X を非特異有理曲面として、 $D \in |-K_X|$ を非特異反標準曲線とする。 (X, D) 上の \mathbb{A}^1 -曲線 C の、類 $[C]$ の対数的 Gromov-Witten 不変量への寄与が問題である。

定理 7.3 ([CGKT3]). (X, D) 上の \mathbb{A}^1 -曲線 C について、 C が $C \cap D$ で非特異ならば、 $\mathcal{M}_0(X/B, ([C], mc))$ における重複度は $e(\overline{J}C)$. (“mc” は最大接触条件.)

証明には、K3 曲面の場合と同様、モジュライの非特異性を用いる。下図のような、 D と「最大に交わる」単純一次元層のモジュライを考える。



$\beta \in H_2(X)$, $w := \beta \cdot D$, $P \in D$ とする。

定義 7.4. $MMI_\beta^P(X, D)$ (modules with maximal intersection) を、(大雑把に言って) 次のような \mathcal{F} をパラメータ付けするモジュライ空間と定義する: \mathcal{F} は X 上の接続層で、

- (a) 既約かつ被約な曲線 $C \subset X$ で、 D に含まれず、 $[C] = \beta$ となるものが存在し、 \mathcal{F} は C 上の 1 階の振れのない層 (の X での直像)
- (b) $\mathcal{F}|_D \cong \mathcal{O}_{wP}$. (これは $C|_D = wP$, \mathcal{F} は P の近くで C 上の直線束という条件と同値)

定理 7.5. \mathcal{F} を $MMI_\beta^P(X, D)$ に属する層として、 $C := \text{Supp } \mathcal{F}$ が $C \cap D$ で非特異ならば、 $MMI_\beta^P(X, D)$ は点 $[\mathcal{F}]$ において非特異。

[Mu] により、K3 曲面上の単純層のモジュライにはシンプレクティック構造が入るのだった。相対的な場合にどうなっているかは (今のところ特に応用を見出していないが) 興味深いと思われる。

D を定める $s \in H^0(X, \omega_X^{-1})$ を取っておくと、Serre 双対性を用いて $T_{[\mathcal{F}]}MMI_\beta^P(X, D)$ に非退化双線形形式が入る。

定理 7.6 ([Tyu], [Bot]). s は X 上の (適切な意味での) 安定層のモジュライ空間上に Poisson 構造を定める。

定理 7.7 ([BG]). $M^\circ(X, D) := \{X \text{ 上の層 } \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ は既約曲線 } C \not\subset D \text{ 上の直線束}\}$ に対し、自然な正則写像

$$\varphi_{X,D}^\circ : M^\circ(X, D) \rightarrow \prod_d \text{Sym}^d(D)$$

が定まり、 $\varphi_{X,D}^\circ$ のファイバーはシンプレクティック葉。

$\varphi_{X,D}^\circ$ の定義域は

$$M(X, D) := \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ は既約曲線 } C \not\subset D \text{ 上 torsion free, } D \text{ の近くで } C \text{ 上の直線束}\}$$

に延長でき、 $[wP]$ 上のファイバーが上で考えていた $MMI_\beta^P(X, D)$ になる。さらに、この射は

$$\overline{\varphi}_{X,D} : \overline{M}(X, D) := \{ \text{既約な } C \not\subset D \text{ 上の torsion free rank 1 sheaf} \} \rightarrow \prod_d \text{Sym}^d(D)$$

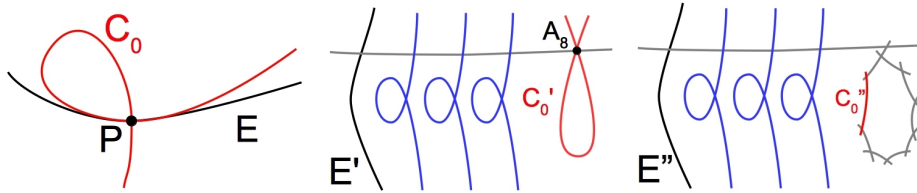
に拡張でき、 $\overline{\varphi}_{X,D}^{-1}([wP])$ は $MMI_\beta^P(X, D)$ の部分コンパクト化と言える。この空間 $\overline{\varphi}_{X,D}^{-1}([wP])$ は特異点を持ちうるので、どのような特異点か、たとえば、symplectic 特異点であろうか、といったことが気になる。

例 7.8. $E \subset \mathbb{P}^2$ を一般の非特異三次曲線、 $P \in E$ を位数 9 の点として

$$\Lambda := \{ C : 3 \text{ 次曲線, } C \cap E = 9P \}$$

とおく。 Λ は P で node を持つ C_0 をちょうど 1 つ含み、 C_0 の 2 つの枝は E と重複度 1, 8 で交わる。

$[I_{P \subset C_0}] \in \overline{M}(\mathbb{P}^2, E)$ は $\overline{\varphi}_{\mathbb{P}^2, E}^{-1}([9P])$ の特異点になっている。 $[I_{P \subset C_0}]$ を含む $\overline{\varphi}_{\mathbb{P}^2, E}^{-1}([9P])$ の連結成分は曲線族 Λ の total space $\coprod_{C \in \Lambda} C$ と同一視でき、 $[I_{P \subset C_0}]$ の定める点は A_8 特異点であることが分かる。また、 Λ の base point の解消が crepant resolution を与える。



より一般に、 $C = \text{Supp } \mathcal{F}$ が P で node を持つならば、やはり台の曲線族の base point を解消した族から symplectic resolution が得られるようである。ただし、base point を解消した族には可約曲線が現れるので、[MRV]などを参考に「偏極」を取る必要がある。

node を越えた特異点の場合、base point の解消で被約でない曲線が現れ、このような場合には compactified Jacobian があまり研究されていない…が、何とか調べることが可能そうではある。

モジュライ空間のコンパクト化を考えると、 $\text{Supp } \mathcal{F} \supseteq D$ の場合が問題になるが、これは [MPT], [LW] などのように “expanded target space” を考えれば良い。期待としては、モジュライ空間に対数的構造が入り、Poisson/symplectic structure も対数的な特異点になるのではないかと考えられる (cf. [D])。

謝辞

代数学シンポジウムでの講演の機会を与えてくださったプログラム責任者の大川新之介さん、山木壱彦さん、会場責任者の石井亮さん、シンポジウム責任者の高橋篤史さんに心よりお礼を申し上げます。本研究は JSPS 科研費 22K03229 の助成を受けたものです。

参考文献

- [AC] D. Abramovich, Q. Chen, *Stable logarithmic maps to Deligne-Faltings pairs II*, Asian J. Math. **18**, 465–488 (2014).
- [ACGS] D. Abramovich, Q. Chen, M. Gross, B. Siebert, *Punctured logarithmic maps*, arXiv:2009.07720.
- [AMW] D. Abramovich, S. Marcus, J. Wise, *Comparison theorems for Gromov-Witten invariants of smooth pairs and of degenerations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **64**, 1611–1667 (2014).

- [BFGW] P. Bousseau, H. Fan, S. Guo, L. Wu, *Holomorphic anomaly equation for (\mathbb{P}^2, E) and the Nekrasov-Shatashvili limit of local \mathbb{P}^2* , Forum Math. Pi **9**, Paper No. e3, 57 pp (2021).
- [BG] I. Biswas, T. L. Gómez, *Poisson structure on the moduli spaces of sheaves of pure dimension one on a surface*, Geom. Dedicata **207**, 157–165 (2020).
- [Bot] F. Bottacin, *Poisson structure of moduli spaces of sheaves over Poisson surfaces*, Invent. Math. **121**, 421–436 (1995).
- [Bou1] P. Bousseau, *Scattering diagrams, stability conditions, and coherent sheaves on \mathbb{P}^2* , J. Alg. Geom. **31**, no. 4, 593–686 (2022).
- [Bou2] P. Bousseau, *A proof of N.Takahashi’s conjecture for (\mathbb{P}^2, E) and a refined sheaves/Gromov-Witten correspondence*, arXiv:1909.02992v2.
- [CH] L. Caporaso, J. Harris, *Counting plane curves of any genus*, Invent. Math. **131**, 345–392(1998).
- [CL] Y. Cao, N.-C. Leung, *Relative Donaldson-Thomas theory for Calabi-Yau 4-folds*, Trans. Amer. Math. Soc. **369**, no.9, 6631–6659 (2017).
- [CGKT1] J. Choi, M. van Garrel, S. Katz, N. Takahashi, *Local BPS invariants: enumerative aspects and wall-crossing*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2020, no. 17, 5450–5475 (2020).
- [CGKT2] J. Choi, M. van Garrel, S. Katz, N. Takahashi, *Log BPS numbers of log Calabi-Yau surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **374** , no. 1, 687–732 (2021).
- [CGKT3] J. Choi, M. van Garrel, S. Katz, N. Takahashi, *Sheaves of maximal intersection and multiplicities of stable log maps*, Selecta Math. (N.S.) **27**, no. 4, Paper No. 61 (2021).
- [CKYZ] T.-M. Chiang, A. Klemm, S.-T. Yau, E. Zaslow, *Local mirror symmetry: calculations and interpretations*, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, no.3, 495–565 (1999).
- [D] S. Das, *Relative log-symplectic structure on a semi-stable degeneration of moduli of Higgs bundles*, Adv. Math. **410**, Paper No. 108756, 61 pp. (2022).
- [FGS] B. Fantechi, L. Göttsche, D. van Straten, *Euler number of the compactified Jacobian and multiplicity of rational curves*, J. Alg. Geom. **8**, 115–133 (1999).
- [GGR] M. van Garrel, T. Graber, H. Ruddat, *Local Gromov-Witten invariants are log invariants* Adv. Math. **350**, 860–876(2019).
- [Ga1] A. Gathmann, *Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces*, Duke Math. J. **115**, no.2, 171–203 (2002).
- [Ga2] A. Gathmann, *Relative Gromov-Witten invariants and the mirror formula*, Math. Ann. **325**, no.2, 393–412 (2003).
- [Gr] T. Graefnitz, *Tropical correspondence for smooth del Pezzo log Calabi-Yau pairs*, J. Alg. Geom. **31**, no. 4, 687–749 (2022).
- [GPS] M. Gross, R. Pandharipande, B. Siebert, , R., Siebert, *The tropical vertex*, Duke Math. J. **153**, 297–362 (2010).
- [GS] M. Gross, B. Siebert, *Logarithmic Gromov-Witten invariants*, J. Amer. Math. Soc. **26**, 451–510 (2013).
- [IP] E.-N. Ionel, T. H. Parker, *Gromov-Witten invariants of symplectic sums*, Math. Res. Lett. **5**, no.5, 563–576 (1998).
- [K] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic analysis, geometry, and number

- theory (Baltimore, MD, 1988), 191–224. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989
- [Kf] F. Kato, *Log smooth deformation and moduli of log smooth curves*, Internat. J. Math. **11**, no.2, 215–232 (2000).
- [LF] A.-M. Li, Y. Ruan, *Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds*, Invent. Math. **145**, no.1, 151–218 (2001).
- [L1] J. Li, *Stable morphisms to singular schemes and relative stable morphisms*, J. Differential Geom. **57**, 509–578 (2001).
- [L2] J. Li, *A degeneration formula of GW-invariants*, J. Differential Geom. **60**, 199–293 (2002).
- [LW] J. Li, B. Wu, *Good degeneration of Quot-schemes and coherent systems*, Comm. Anal. Geom. **23**, no. 4, 841–921 (2015).
- [MPT] D. Maulik, R. Pandharipande, R. P. Thomas, *Curves on K3 surfaces and modular forms*, With an appendix by A. Pixton, J. Topol. **3**, no. 4, 937–996 (2010).
- [MR1] D. Maulik, D. Ranganathan, *Logarithmic Donaldson-Thomas theory*, arXiv: 2006.06603.
- [MR2] D. Maulik, D. Ranganathan, *Logarithmic enumerative geometry for curves and sheaves*, arXiv: 2311.14150.
- [MRV] M. Melo, A. Rapagnetta, F. Viviani, *Fine compactified Jacobians of reduced curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **369**, no. 8, 5341–5402 (2017).
- [Mi] G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{P}^2* , J. Amer. Math. Soc. **18**, no.2, 313–377 (2005).
- [Mu] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. Math. **77**, 101–116 (1984).
- [NS] T. Nishinou, B. Siebert, *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves*, Duke Math. J. **135**, no. 1, 1–51 (2006).
- [R] D. Ranganathan, *Logarithmic Gromov-Witten theory with expansions*, Algebr. Geom. **9**, no. 6, 714–761 (2022).
- [T1] N. Takahashi, *Curves in the complement of a smooth plane cubic whose normalizations are \mathbb{A}^1* , preprint (alg-geom/9605007).
- [T2] N. Takahashi, *Log mirror symmetry and local mirror symmetry*, Comm. Math. Phys. **220**, no.2, 293–299 (2001).
- [T3] N. Takahashi, *Local and relative Gromov-Witten invariants of the projective plane*, Manuscripta Math. **111**, no. 4, 413–426 (2003).
- [TY] H.-H. Tseng, F. You, *A Gromov-Witten theory for simple normal-crossing pairs without log geometry*, Comm. Math. Phys. **401**, no.1, 803–839 (2023).
- [Tyu] A. N. Tyurin, *Symplectic structures on the moduli spaces of vector bundles on algebraic surfaces with $p_g > 0$* (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52**, no.4, 813–852, 896 (1988); translation in Math. USSR-Izv. **33**, no.1, 139–177 (1989).
- [V] R. Vakil, *Counting curves on rational surfaces*, Manuscripta Math. **102**, no.1, 53–84 (2000).

アデリック曲線上のアラケロフ幾何

森脇 淳 (中部大学)

この研究はパリ大学の陳氏との共同研究です。詳しくは以下の3つの文献を見て下さい。

参考文献

- [1] Huayi Chen and Atsushi Moriwaki, *Arakelov geometry over adelic curves*, volume 2258 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Singapore, 2020.
- [2] Huayi Chen and Atsushi Moriwaki, *Arithmetic intersection theory over adelic curves*. 2022. preprint (arXiv:2103.15646).
- [3] Huayi Chen and Atsushi Moriwaki, *Positivity in Arakelov geometry over adelic curves: Hilbert-Samuel formula and equidistribution theorem over adelic curves*. 2023. in preparation.

1. アデリック構造

K は体とする。 K のアデリック構造 $S = (K, (\Omega, \mathcal{A}, \nu), \phi)$ とは、以下を満たすデータを意味する。

- パラメータ空間とよばれる $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ は ν を可測空間 (Ω, \mathcal{A}) 上の測度とする測度空間である。
- M_K で K の絶対値全体を表すと、 ϕ は Ω から M_K への写像である。
 $\omega \in \Omega$ に対して、 M_K 元 $\phi(\omega)$ を $|\cdot|_\omega$ で表す。
- 任意の $a \in K^\times$ に対して、関数 $\omega \in \Omega \mapsto \log |a|_\omega$ は $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ 上可積分である。

アデリック構造を与えられた体をアデリック曲線とよぶ。任意の $a \in K^\times$ に対して、積公式と呼ばれる

$$\int_{\Omega} \log |a|_\omega \nu(d\omega) = 0$$

が成り立つとき、アデリック構造 S は固有という。

さらに、

$$\Omega_\infty := \{\omega \in \Omega \mid |\cdot|_\omega \text{ はアルキメデスの}\}$$

とおく. また, 任意の C に対して,

$$\left\{ x \in K \mid \int_{\Omega} \log \max\{|x|_{\omega}, 1\} \nu(d\omega) \leq C \right\}$$

が有限集合になるとき, S は **ノースcott性** を満たすという.

$\omega \in \Omega$ に対して, K の $|\cdot|_{\omega}$ に関する完備化を K_{ω} で表すことにし, K_{ω} に自然に拡張した絶対値も, 言葉の乱用で, $|\cdot|_{\omega}$ とかくことにする.

例 1.1 ($K = \mathbb{Q}$ の場合). $\Omega_{\mathbb{Q}} = \{p : p \text{ は素数}\} \cup \{\infty\}$ とおく. 各 $\omega \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ に対して,

$$|\cdot|_{\omega} = \begin{cases} |\cdot|_p & (p\text{-進絶対値で } |p|_p = 1/p) \quad \omega = p \text{ のとき} \\ |\cdot|_{\infty} & (\text{普通の絶対値}) \quad \omega = \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

と定め, 可測空間は離散的なものとし, 測度 ν は $\nu(\{\omega\}) = 1$ と定めれば, これは, 固有なアデリック構造になる. ノースcott性を満たすことも容易にわかる.

例 1.2 (K が代数体の場合). Ω_K は, \mathbb{Q} への制限が $\Omega_{\mathbb{Q}}$ の元になっている絶対値全体とする. 可測空間は離散的なものとし, 測度 ν は

$$\nu(\{\omega\}) = [K_{\omega} : \mathbb{Q}_{\omega}]$$

と定める. このとき, $x \in K^{\times}$ に対して,

$$\prod_{\omega \in \Omega_K} |x|_{\omega}^{[K_{\omega} : \mathbb{Q}_{\omega}]} = 1$$

となることが知られているので (積公式), 固有なアデリック構造になる. さらに, ノースcott性を満たすことも知られている (ノースcottの定理).

例 1.3. X は体 k 上で定義された d 次元の正規な射影代数多様体とする. K は X の関数体とする. Ω_K は X 上の素因子全体とし, H_1, \dots, H_{d-1} は X 上のネフな直線束とする. 列 (H_1, \dots, H_{d-1}) を X の **偏極** という. $\omega \in \Omega_K$ に対して, ord_{ω} は素因子 Γ_{ω} での付値とする.

$$|x|_{\omega} = \exp(-\text{ord}_{\omega}(x))$$

と定め, Ω_K は離散的な可測空間とする. さらに, 測度 ν を

$$\nu(\{\omega\}) = (\Gamma_{\omega} \cdot H_1 \cdots H_{d-1})$$

と定義すると, K の固有なアデリック構造が定まる. これは, ノースcott性を満たさない.

例 1.4. 任意の体 K は自明な絶対値

$$|x|_{K,0} = \begin{cases} 1 & \text{もし } x \neq 0 \\ 0 & \text{もし } x = 0 \end{cases}$$

により, 固有なアデリック構造を与えることができる.

$S = (K, (\Omega_K, \mathcal{A}_K, \nu_K), \phi_K)$ は体 K のアデリック構造とし, L/K は分離的な代数拡大とする. $\omega \in \Omega_K$ に対して, L の絶対値であって K へ制限が $|\cdot|_\omega$ のなるもの全体を $M_{L,\omega}$ と表す.

$$\Omega_L := \prod_{\omega \in \Omega_K} M_{L,\omega}$$

とおく. $M_{L,\omega}$ の元を ω に送ることにより, 自然な写像 $\pi_{L/K} : \Omega_L \rightarrow \Omega_K$ が定まる. さらに, $M_{L,\omega} \rightarrow M_L$ は $\phi_L : \Omega_L \rightarrow M_L$ を導く. Ω_L の元 x に対して, 対応する絶対値を $|\cdot|_x$ と表すことにする. このとき,

$$\begin{array}{ccc} \Omega_L & \xrightarrow{\pi_{L/K}} & \Omega_K \\ \phi_L \downarrow & & \downarrow \phi_K \\ M_L & \xrightarrow{\text{rest}_{L/K}} & M_K \end{array}$$

は可換であることがわかる. ここで, $\text{rest}_{L/K}$ は L の絶対値を K に制限する写像である. さらに, Ω_L はファイバー積

$$\Omega_K \times_{M_K} M_L := \{(\omega, x) \in \Omega_K \times M_L \mid \phi_K(\omega) = \text{rest}_{L/K}(x)\}$$

に同型であることがわかる.

ここからはしばらくの間, L は K 上有限次と仮定する. Ω_L の σ -代数 \mathcal{A}_L は, $\pi_{L/K}$ と, 任意の $a \in L$ に対して, 写像 $(x \in \Omega_L) \mapsto |a|_x \in \mathbb{R}$ が可測となる最小のものとする. $\omega \in \Omega$ に対して, $M_{L,\omega}$ には離散的な可測空間を与え, 測度 $\mathbb{P}_{L,\omega}$ を

$$\mathbb{P}_{L,\omega}(\{x\}) = \frac{[L_x : K_\omega]}{[L : K]}$$

と定める.

$$[L : K] = \sum_{x \in M_{L,\omega}} [L_x : K_\omega]$$

であるので、 $\mathbb{P}_{L,\omega}$ は確率的測度である。さらに、 L' が L の分離的有限次拡大とし、 f を $M_{L,\omega}$ 上の関数 ($M_{L,\omega}$ は有限集合) のとき、

$$(1.1) \quad \int_{M_{L',\omega}} f \circ (\pi_{L'/L}|_{M_{L',\omega}}) d\mathbb{P}_{L',\omega} = \int_{M_{L,\omega}} f d\mathbb{P}_{L,\omega}$$

が成り立つ。

定理 1.5. Ω_L 上の \mathcal{A}_L -可測関数 f に対して、

$$(\omega \in \Omega_K) \mapsto \int_{M_{L,\omega}} f d\mathbb{P}_{L,\omega}$$

は \mathcal{A}_K -可測である。

定義 1.6. Ω_L 上の測度 $\nu_L : \mathcal{A}_L \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ を

$$\forall B \in \mathcal{A}_L, \quad \nu_L(B) := \int_{\Omega_K} \left(\int_{M_{L,\omega}} \mathbb{1}_B d\mathbb{P}_{L,\omega} \right) d\nu_K$$

と定める。定理 1.5 により、この写像は意味をもつ。そこで、

$$S_L = (L, (\Omega_L, \mathcal{A}_L, \nu_L), \phi_L)$$

とおき、 S_L を $S \otimes_K L$ と表す。

命題 1.7. S が固有なら、 S_L も固有である。さらに、 S がノースcott性をもつなら、 S_L もノースcott性をもつ。

次に一般的な場合を考える。つまり、 L は K 上代数的かつ分離的である。

$$\mathcal{E}_{L/K} = \{K' \mid K \subseteq K' \subseteq L \text{ であり } K' \text{ は } K \text{ 上有限次}\}$$

とおく。 Ω_L 上で \mathcal{A}_L は、任意の $K' \in \mathcal{E}_{L/K}$ に対して、 $\pi_{L/K'} : \Omega_L \rightarrow \Omega_{K'}$ が可測的になる最小の σ -代数とする。さらに、 $\omega \in \Omega$ を固定したとき、 $M_{L,\omega}$ 上で $\mathcal{A}_{L,\omega}$ は、任意の $K' \in \mathcal{E}_{L/K}$ に対して、 $\pi_{L/K'} : M_{L,\omega} \rightarrow M_{K',\omega}$ が可測となる最小の σ -代数とする。 $K' \in \mathcal{E}_{L/K}$ と $M_{K',\omega}$ の関数 f が存在して、

$$f \circ (\pi_{L/K'}|_{M_{L,\omega}})$$

とかけような $M_{L,\omega}$ 上の関数全体を $V_{L,\omega}$ と表す。このとき、

$$I_{L/K,\omega} : V_{L,\omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

を

$$f \circ (\pi_{L/K'}|_{M_{L,\omega}}) \mapsto \int_{M_{K',\omega}} f d\mathbb{P}_{K',\omega}.$$

と定める. (1.1) により, $I_{L/K,\omega}$ がうまく定義されていることがわかる.

定理 1.8. $I_{L/K,\omega}$ は $(M_{L,\omega}, \mathcal{A}_{L,\omega})$ 上の確率的測度 $\mathbb{P}_{L,\omega}$ に拡張される. さらに, 非負の \mathcal{A}_L -可測の Ω_L 上の関数 f に対して, f の $M_{L,\omega}$ への制限は $\mathcal{A}_{L,\omega}$ -可測であり, 写像

$$(\omega \in \Omega) \mapsto \int_{M_{L,\omega}} f d\mathbb{P}_{L,\omega}$$

は \mathcal{A}_K -可測である.

定義 1.9. $\nu_L : \mathcal{A}_L \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ を以下の様に定義する.

$$\forall B \in \mathcal{A}_L, \quad \nu_L(B) := \int_{\Omega_K} \left(\int_{M_{L,\omega}} \mathbb{1}_B d\mathbb{P}_{L,\omega} \right) d\nu_K.$$

ここで, $S_L = (L, (\Omega_L, \mathcal{A}_L, \nu_L), \phi_L)$ とおく. S_L は $S \otimes_K L$ とかく.

L が K 上代数的だが分離的でない場合, K の L における分離閉包 L' を考えると, $\text{rest}_{L/L'} : M_L \rightarrow M_{L'}$ は全単射であるので, S_L を $S_{L'}$ と定めればよい.

命題 1.10. S が固有なら, S_L も固有である.

有理数体上有限性な体を**算術的函数体**とよぶ. このとき, 以下のことが知られている.

定理 1.11 (陳・森脇 [2]). K は標数 0 の濃度が可算である体とする. このとき, 次を満たす K の固有なアデリック構造が存在する. K' が K の部分体でありかつ算術的函数体であれば, K のアデリック構造の K' への制限はノースコット性をもつ.

例 1.12. $K = \mathbb{Q}(\xi)$ (ξ は \mathbb{Q} 上超越的) の場合,

$$\Omega_\infty = \{t \in [0, 1] \mid e^{2\pi\sqrt{-1}t} \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上超越的}\}$$

となり, Ω_∞ には $[0, 1]$ のルベグ測度の制限が入る. $t \in \Omega_\infty$ に対して, $|f(\xi)|_t := |f(e^{2\pi\sqrt{-1}t})|_{\mathbb{C}}$ と定める. この場合, 測度空間は離散的でない.

2. 点の高さ

S は以後固有と仮定する. $(x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(K)$ に対して,

$$h(x_0, \dots, x_N) = \int_{\Omega} \log \max\{|x_0|_\omega, \dots, |x_N|_\omega\} \nu(d\omega)$$

と定める. これは, 積公式より, 同次座標 $(x_0 : \cdots : x_N)$ の取り方に依らない. これを $(x_0 : \cdots : x_N)$ の高さ^{とよぶ}とよぶ. S がノースcott性をもつとき, 任意の C について,

$$\{(x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(K) \mid h(x_0 : \cdots : x_N) \leq C\}$$

は有限集合である. というのは, $x_i \neq 0$ のとき, 任意の $j \neq i$ に対して,

$$h(x_i, x_j) \leq h(x_0, \dots, x_N)$$

であるので, x_j/x_i の可能性は有限である. つまり,

$$\{(x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(K) \mid x_i \neq 0, h(x_0 : \cdots : x_N) \leq C\}$$

は有限個である. よって,

$$\begin{aligned} & \{(x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(K) \mid h(x_0 : \cdots : x_N) \leq C\} \\ &= \bigcup_{i=0}^N \{(x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N(K) \mid x_i \neq 0, h(x_0 : \cdots : x_N) \leq C\} \end{aligned}$$

であるので, 題意がわかる.

さらに, 拡張して, 以下が知られている.

定理 2.1 (陳・森脇 [1]). K^a を K の代数的閉包とすると,

$$\{x \in \mathbb{P}^N(K^a) \mid h(x) \leq C, [K(x) : K] \leq e\}$$

は, 任意の C と e について, 有限集合である.

3. K 上のアデリックベクトル束

V は K 上の n -次元ベクトル空間とし, 各 $\omega \in \Omega$ に対して, $\|\cdot\|_\omega$ は $V_\omega := V \otimes_K K_\omega$ の $(K_\omega, |\cdot|_\omega)$ 上のノルムとする.

ノルムの族 $\|\cdot\| = \{\|\cdot\|_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ が^{支配的}であるとは, 任意の $s \in V \setminus \{0\}$ と $\alpha \in V^\vee \setminus \{0\}$ に対して, Ω 上の可積分関数 $A(\omega)$ と $B(\omega)$ が存在して,

$$\log \|s\|_\omega \leq A(\omega), \quad \log \|\alpha\|_{\omega,*} \leq B(\omega)$$

が Ω 上至る所で成立することである. ここで, $\|\cdot\|_{\omega,*}$ は $\|\cdot\|_\omega$ の双対ノルムである. $\alpha(s) = 1$ であるとき, $\log \|s\|_\omega + \log \|\alpha\|_{\omega,*} \geq 0$ であるので,

$$-B(\omega) \leq \log \|s\|_\omega \leq A(\omega), \quad -A(\omega) \leq \log \|\alpha\|_{\omega,*} \leq B(\omega)$$

が Ω 上至る所で成立する.

さらにノルムの族 $\|\cdot\| = \{\|\cdot\|_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ が可測であるとは、任意の $s \in V$ に対して、函数

$$\omega \in \Omega \mapsto \|s\|_\omega \in \mathbb{R}$$

が可測空間 (Ω, \mathcal{A}) 上可測であるときにいう。

ノルムの族 $\|\cdot\| = \{\|\cdot\|_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ が可測かつ支配的なとき、 $(V, \|\cdot\|)$ をアデリック束という。

アデリックベクトル束 $(V, \{\|\cdot\|_\omega\}_{\omega \in \Omega})$ の行列式ベクトル空間と行列式ノルム $(\det V, \{\|\cdot\|_{\omega, \det}\}_{\omega \in \Omega})$ もアデリックベクトル束であることが知られている (cf. 陳・森脇 [1])。ここで、

$$\|\eta\|_{\det, \omega} := \inf \{ \|x_1\|_\omega \cdots \|x_n\|_\omega \mid \eta = \pm x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, x_1, \dots, x_n \in V_\omega \}$$

である。よって、 $s \in \det V \setminus \{0\}$ に対して、積分

$$- \int_{\Omega} \log \|s\|_{\omega, \det} \nu(d\omega)$$

が考えられるが、これは、積公式により、 s の取り方に依らないので、 $\widehat{\deg}(V, \|\cdot\|)$ と表す。これが $(V, \|\cdot\|)$ のアラケロフ次数と呼ばれる基本量である。

4. 代数多様体上のアデリック直線束

X は K 上の d -次元射影代数多様体とし、 L は X 上の直線束とする。各 $\omega \in \Omega$ に対して、 $X_\omega := X \otimes_K K_\omega$ に付随するベルコビッチ空間 X_ω^{an} 上で $L_\omega := L \otimes_K K_\omega$ の連続な計量 φ_ω を考える。その族を $\varphi = \{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ とおく。別の族 $\varphi' = \{\varphi'_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ が与えられたとき、

$$d_\omega(\varphi, \varphi') := \sup_{x \in X_\omega^{\text{an}}} \left| \log \frac{|\varphi_\omega(x)|}{|\varphi'_\omega(x)|} \right|$$

と定める。

$H^0(X, L) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow L$ は全射と仮定し、 $H^0(X_\omega, L_\omega)$ のノルム $\|\cdot\|_\omega$ を与えると、全射 $H^0(X_\omega, L_\omega) \otimes \mathcal{O}_{X_\omega} \rightarrow L_\omega$ を利用して、 L_ω に計量が定まる。これを L_ω のフビニ・スタディ計量という。

定義 4.1. 連続計量の族 φ が支配的な族であるとは、以下を満たす直線束 L_1 と L_2 、及び、 L_1, L_2 の連続な計量の族 $\varphi_1 = \{\varphi_{1, \omega}\}, \varphi_2 = \{\varphi_{2, \omega}\}$ が存在するときをいう。

- (a) $H^0(X, L_1) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow L_1$ と $H^0(X, L_2) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow L_2$ は全射。
- (b) $H^0(X, L_1)$ と $H^0(X, L_2)$ には支配的なノルムの族が存在し、 φ_1 と φ_2 はそれらから定まるフビニ・スタディ計量の族である。

- (c) $L = L_1 - L_2$.
 (d) $(\omega \in \Omega) \mapsto d_\omega(\varphi_\omega, \varphi_{1,\omega} - \varphi_{2,\omega})$ が支配的である.

定義 4.2. F は K 上有限生成の体とする. F の K 上の超越次元が 1 のとき, K 上の非特異射影曲線 C が存在して, C の関数体が F になる. $|\cdot|$ は F の絶対値で, K 上自明であると仮定する. このとき, C の閉点 ξ と $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して,

$$|\cdot| = \exp(-q \operatorname{ord}_\xi(\cdot))$$

となることが知られている. ここで, $\operatorname{ord}_\xi(\cdot)$ は点 ξ での付値である. この q を $|\cdot|$ の **指数** とよぶ.

定義 4.3. K^a は K の代数的閉包とする. $P \in X(K^a)$, つまり, $P: \operatorname{Spec}(K^a) \rightarrow X$ に対して, $(L, \{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega})$ の P による引き戻しによって, K^a 上のノルムの族をもった直線束 $P^*(L, \{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega})$ を自然に与えることができる. 計量の族 $\varphi = \{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ の Ω に関して **可測** であるとは, 以下が成り立つときにいう.

- (a) 任意の $P \in X(K^a)$ について, $P^*(L, \{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega})$ は可測である.
 (b) $|\cdot|_{K,0}$ は K の自明な絶対値で, X^{an} は $|\cdot|_{K,0}$ に関するベルコビッチ空間とする.

$$X_{1,\mathbb{Q}}^{\text{an}} = \left\{ x \in X^{\text{an}} \mid \begin{array}{l} x \text{ に対応する } X \text{ の点の } K \text{ 上の次元} \\ \text{は } 1 \text{ で, } x \text{ に関する指数が有理数} \end{array} \right\}$$

とおく. このとき, 任意の $x \in X_{1,\mathbb{Q}}^{\text{an}}$ と $\ell \in L \otimes \hat{\kappa}(x)$ に対して,

$$(\omega \in \Omega_0) \mapsto |\ell|_{\varphi_\omega}(x)$$

は可測である. ここで, $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega \mid |\cdot|_\omega \text{ は自明}\}$ であり, $\hat{\kappa}(x)$ は x から決まる剰余体の完備化である.

定義 4.4. (L, φ) が可測かつ支配的であるとき, **X 上のアデリック直線束** という.

このとき, 以下がわかる.

- 定理 4.5** (陳・森脇 [1]). (a) (L, φ) と (L', φ') がアデリック直線束のとき, $(L \otimes L', \varphi \otimes \varphi')$ もアデリック直線束である.
 (b) $\|\cdot\|_{\varphi_\omega}$ を $H^0(X_\omega, L_\omega) = H^0(X, L) \otimes_K K_\omega$ の φ_ω から定まる最大値ノルムとすると, (L, φ) がアデリック直線束のとき,

$$(H^0(X, L), \{\|\cdot\|_{\varphi_\omega}\}_{\omega \in \Omega})$$

は Ω 上のアデリックベクトル束になる.

L が半豊富であると仮定する. (L, φ) が X 上のアデリック直線束のとき, 上の定理より, $(nL, n\varphi)$ もアデリック直線束である. よって, 上の定理から,

$$\widehat{\deg}(H^0(X, nL), \{\|\cdot\|_{n\varphi_\omega}\}_{\omega \in \Omega})$$

を考えることができる. このとき, 以下がわかる.

定理 4.6 (陳・森脇 [1], [3]). 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\deg}(H^0(X, nL), \{\|\cdot\|_{n\varphi_\omega}\}_{\omega \in \Omega})}{n^{d+1}/(d+1)!}$$

が存在する. この極限値を $\widehat{\text{vol}}_\chi(L, \varphi)$ と表す.

5. 算術的ヒルベルト・サミュエル公式

K が代数体の場合, Gillet-Soulé による算術的リーマン・ロッホの定理または Abbes-Bouche によるヒルベルト・サミュエル公式により, 極限值 $\widehat{\text{vol}}_\chi(L, \varphi)$ は大域的な算術交点数 $\widehat{\deg}(\hat{c}_1(L, \varphi)^{d+1})$ に等しいことがわかる. このことを一般のアデリック曲線上に拡張することが, 最初の目標である. そのためには, アデリック曲線上での交点数の理論を確立する必要がある.

可積分な計量を定義しよう. 最初に

$$H^0(X, L) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow L$$

は全射と仮定する. フビニ・スタディ計量の極限としてかける計量を半正な計量とよぶ. L が半豊富であるとき, L_ω の計量 φ_ω が半正であるとは, 十分大きなある n について, $L_\omega^{\otimes n}$ の計量 $n\varphi_\omega$ が半正であるときにいう.

一般に, L_ω の計量 φ_ω が可積分であるとは, 豊富な直線束 L_1, L_2 と $L_{1,\omega}, L_{2,\omega}$ 上の半正な計量 $\varphi_{1,\omega}, \varphi_{2,\omega}$ が存在して, $L = L_1 \otimes L_2^{-1}$ かつ $\varphi_\omega = \varphi_{1,\omega} - \varphi_{2,\omega}$ とかけるときにいう.

しばらくの間, K は代数閉体と仮定する. 交点数を考える場合, 直線束を考えるより, カルチエ因子を考える方が自然である. つまり, 直線束 L の代わりに, L のゼロでない有理切断 s から生じるカルチエ因子 $\text{div}(s)$ を考えるのである. さらに, 直線束 L_ω の計量の代わりに, X_ω に付随するベルコピッチ空間上でグリーン関数 $-\log|s|_{\varphi_\omega}$ を考えればよい.

L_0, \dots, L_d は X 上の $(d+1)$ 個の直線束とし,

$$\varphi_0 = \{\varphi_{0,\omega}\}_{\omega \in \Omega}, \dots, \varphi_d = \{\varphi_{d,\omega}\}_{\omega \in \Omega}$$

は可積分な L_0, \dots, L_d の計量の族とする. s_0, \dots, s_d は L_0, \dots, L_d のゼロでない有理切断とし,

$$\begin{cases} D_0 := \operatorname{div}(s_0), \dots, D_d := \operatorname{div}(s_d), \\ g_{0,\omega} := -\log |s_0|_{\varphi_0,\omega}, \dots, g_{d,\omega} := -\log |s_d|_{\varphi_d,\omega} \end{cases}$$

とおく.

$d = 0$ の場合は, $X = \operatorname{Spec}(K)$ である. このとき,

$$\int_{X_\omega^{\text{an}}} (D_{0,\omega}, g_{0,\omega}) := g_{0,\omega}$$

と定める.

D_0, \dots, D_d が共通成分を持たないとき, $D_d = \sum_{i=1}^N a_i Z_i$ と既約成分への分解を考えると, 次元に関する帰納法で, 局所的な算術交点数を

$$\begin{aligned} \int_{X_\omega^{\text{an}}} (D_{0,\omega}, g_{0,\omega}) \cdots (D_{d,\omega}, g_{d,\omega}) := \\ \sum_{i=1}^N a_i \int_{Z_{i,\omega}^{\text{an}}} (D_{0,\omega}, g_{0,\omega}) \cdots (D_{d-1,\omega}, g_{d-1,\omega}) \\ + \int_{X_\omega^{\text{an}}} g_{d,\omega} \mu_{(D_{0,\omega}, g_{0,\omega}), \dots, (D_{d-1,\omega}, g_{d-1,\omega})} \end{aligned}$$

と定める. ここで, $\mu_{(D_{0,\omega}, g_{0,\omega}), \dots, (D_{d-1,\omega}, g_{d-1,\omega})}$ は Chambert-Loir 測度である.

定理 5.1 (陳・森脇 [2]). 局所的な算術交点数から定まる函数

$$\omega \in \Omega \mapsto \int_{X_\omega^{\text{an}}} (D_{0,\omega}, g_{0,\omega}) \cdots (D_{d,\omega}, g_{d,\omega})$$

は測度空間 (Ω, \mathcal{A}) 上可積分である.

局所的な算術交点数の積分

$$\int_{\Omega} \left(\int_{X_\omega^{\text{an}}} (D_{0,\omega}, g_{0,\omega}) \cdots (D_{d,\omega}, g_{d,\omega}) \right) \nu(d\omega)$$

は, ゼロでない有理切断 s_0, \dots, s_d の取り方に依らないことがわかる. そこで, この積分を $(L_0, \varphi_0), \dots, (L_d, \varphi_d)$ の S 上の**算術的交点数**とよび,

$$\left((L_0, \varphi_0) \cdots (L_d, \varphi_d) \right)_S$$

とかく.

K が閉体でない場合は、 K の代数閉包に持ち上げて交点数を考えることで、交点数

$$\left((L_0, \varphi_0) \cdots (L_d, \varphi_d) \right)_S$$

を定義する。

このとき、次の算術的ヒルベルト・サミュエル公式が成り立つ。

定理 5.2 (陳・森脇 [3]). K は完全体か、または、 X は K 上幾何学的に整であると仮定する。 L は豊富、 $\varphi = \{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ は半正な計量からなる可積分な族とする。このとき、

$$\widehat{\text{vol}}_X(L, \varphi) = \left((L, \varphi)^{d+1} \right)_S.$$

が成り立つ。

6. アデリック曲線上の等分布定理

定義 6.1. (1) $f = \{f_\omega\}$ が $C_a^0(X)$ 元であるとは、それぞれの f_ω は X_ω^{an} 上の連続関数であり、 $(\mathcal{O}_X, \{e^{-f_\omega}\}_{\omega \in \Omega})$ がアデリック直線束になるときにいう。

(2) $\eta = \{\eta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ がボレル測度族であるとは、それぞれの η_ω は X_ω^{an} 上のボレル測度であり、 $f = \{f_\omega\}_{\omega \in \Omega} \in C_a^0(X)$ に対して、

$$\omega \in \Omega \mapsto \int_{X_\omega^{\text{an}}} f_\omega \eta_\omega$$

が可積分であるときにいう。

例 6.2. Y は X の被約な部分スキームとする。さらに L は豊富な直線束で、 $\varphi = \{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ は L の半正な計量の族で、 $\bar{L} = (L, \varphi)$ はアデリックな直線束とする。このとき、

$$\delta_{(L_\omega, \varphi_\omega), Y_\omega}(f_\omega) = \frac{1}{\deg_L(Y)} \int_{Y_\omega^{\text{an}}} f_\omega \mu_{(L_\omega, \varphi_\omega)} \cdot \dim Y$$

と定めると、 $\delta_{\bar{L}, Y} = \{\delta_{Y_\omega, (L_\omega, \varphi_\omega)}\}_{\omega \in \Omega}$ はボレル測度族になる。

定理 6.3 (アデリック曲線上の等分布定理, 陳・森脇 [3]). X は体 K 上定義された射影代数多様体とし、 L は半豊富で巨大であると仮定する。 $\bar{L} = (L, \varphi)$ はアデリック直線束で、 φ は半正な計量の族であると仮定する。 $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ は X の閉点の列で、以下を仮定する。

(1) $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ は生成的である。つまり、任意の部分代数多様体 $Y \subsetneq X$ に対して、 $\{n \mid P_n \in Y\}$ は有限集合である。

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\bar{L}}(P_n) = \frac{(\bar{L}^{\dim X + 1})_S}{(\dim X + 1)(L^{\dim X})}.$$

このとき、 $\delta_{\bar{L}, \bar{P}_n}$ は $\delta_{\bar{L}, X}$ に弱収束する。つまり、任意の $f \in C_a^0(X)$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\bar{L}, \bar{P}_n}(f) = \delta_{\bar{L}, X}(f)$$

が成り立つ。

7. 大域的アデリック空間

$X_\Omega^{\text{an}} = \coprod_{\omega \in \Omega} X_\omega^{\text{an}}$ とおき、 X の大域的アデリック空間とよぶ。 X_Ω^{an} には次の様にして、 σ -代数 $\mathcal{B}_{X, \Omega}$ を入れる。すなわち、 $\mathcal{B}_{X, \Omega}$ は以下を満たす最小の σ -代数である。

- (1) 自然な写像 $X_\Omega^{\text{an}} \rightarrow \Omega$ は可測である。
- (2) X のザリスキ開集合 U に対して、 $U_\Omega^{\text{an}} (= \coprod_{\omega \in \Omega} U_\omega^{\text{an}})$ は $\mathcal{B}_{X, \Omega}$ の元である。
- (3) 任意のアデリック直線束 (L, φ) と L のザリスキ開集合 U 上の切断 s に対して、

$$U_\Omega^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x \in U_\omega^{\text{an}}) \mapsto |s|_{\varphi_\omega}(x)$$

は可測である。

$\eta = \{\eta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ はボレル測度の族とする。このとき、

$$(B \in \mathcal{B}_{X, \Omega}) \mapsto \int_\Omega \left(\int_{X_\omega^{\text{an}}} \mathbf{1}_B \eta_\omega \right)$$

は可測空間 $(X_\Omega^{\text{an}}, \mathcal{B}_{X, \Omega})$ 上の測度を与えることがわかる。この測度を η_Ω と表す。

次の命題は後の議論で役に立つ。

命題 7.1 (陳・森脇 [3]). $\eta = \{\eta_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ と $\tau = \{\tau_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ はボレル測度の族とする。もし $\eta_\Omega = \tau_\Omega$ なら Ω の可測部分集合 Ω' が存在し、 Ω' の測度は 0 であり、任意の $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$ の対して、 $\eta_\omega = \tau_\omega$ である。

8. アデリック曲線上のボゴモロフ予想

以後、 K は可算な代数的閉体であるとし、さらに、 $\nu(\mathcal{A}) \not\subseteq \{0, 1\}$ と仮定する。

アデリック直線束 \bar{L} の本質的最小値 $\mu_{\text{ess}}(\bar{L})$ は

$$\mu_{\text{ess}}(\bar{L}) = \sup_{Z \subsetneq X} \inf_{x \in (X \setminus Z)(K)} h_{\bar{L}}(x)$$

で定義される.

A は K 上のアーベル多様体とし, L は豊富な偶となる直線束とし, 各 $\omega \in \Omega$ に対して, $[2]^*(L_\omega, \varphi_\omega) \simeq (L_\omega, \varphi_\omega)^{\otimes 4}$ と仮定する. このような φ_ω は一意的に存在する. このとき $\bar{L} = (L, \varphi = \{\varphi_\omega\}_{\omega \in \Omega})$ アデリック直線束になることが知られている. さらに, すべての点の高さが 0 以上であるという意味で, ネフである.

定理 8.1 (アデリック曲線上のボゴモロフ予想, 陳・森脇 [3]). $\nu(\Omega_\infty) > 0$ と仮定する. X は A の部分代数多様体で, $\mu_{\text{ess}}(\bar{L}|_X) = 0$ と仮定すると, X は A の部分アーベル多様体を捻じれ点により移動させたものになる.

9. アデリック曲線上の力学系への応用

L は豊富な直線束とする. $\text{End}(X; L)$ で, $f^*(L) \simeq L^{\otimes d}$ となる整数 $d \geq 2$ が存在するような射 $f: X \rightarrow X$ からなる集合とする. そのような f に対して, φ_f を $f^*(L, \varphi_f) \simeq (L, \varphi_f)^{\otimes d}$ と満たすものとする. このような φ_f は一意的に存在する.

定理 9.1 (アデリック曲線上の力学系への応用, 陳・森脇 [3]). $f, g \in \text{End}(X; L)$ に対して, 以下は同値である.

- (1) $h_{(L, \varphi_f)} = h_{(L, \varphi_g)}$.
- (2) $\{x \in X(K) \mid h_{(L, \varphi_f)}(x) = 0\} = \{x \in X(K) \mid h_{(L, \varphi_g)}(x) = 0\}$.
- (3) $\{x \in X(K) \mid h_{(L, \varphi_f)}(x) = h_{(L, \varphi_g)}(x) = 0\}$ は $X(K)$ でザリスキ稠密である.

アデリック曲線上でのボゴモロフ予想の証明, 及び, 力学系への応用の証明等で命題 7.1 が有効に使われる.

EXTRIANGULATED CATEGORY について

2023年8月の代数学シンポジウムでの講演の報告です。講演の機会を与えて下さったオーガナイザ、プログラム責任者の方々をはじめ、関係する皆様に御礼申し上げます。

1. INTRODUCTION

ホモロジー代数学や幾何学などで幅広く用いられており、その重要な舞台としてアーベル圏・完全圏および三角圏が挙げられる。

ここで完全圏は Quillen の意味での完全圏 ([Q, §2]) を指し、加法圏 \mathcal{C} とその上のいくつかの条件を満たす短完全列 (つまり kernel-cokernel pair) $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ のクラス \mathcal{S} の対 $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ として定義される。 \mathcal{S} に属する短完全列は、Keller ([Ke, §4]) の用語では conflation とよばれる。アーベル圏において拡大で閉じた部分圏はその例を与える。実際、 \mathcal{A} がアーベル圏で $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ が拡大で閉じた充満部分圏ならば、 \mathcal{A} における短完全列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ であって $A, B, C \in \mathcal{C}$ を満たすものの全体を \mathcal{S} とおくことで、 $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ が完全圏となる。逆に、small な完全圏はアーベル圏にこの形で埋め込めることが知られている。この意味で完全圏のクラスはアーベル圏のクラスを「拡大閉部分圏をとる操作で閉じさせたもの」と思うことができ、完全圏はアーベル圏の拡大閉部分圏の持つべき性質を抽出し適切な構造の付与された加法圏として定式化されたものであると言える。

三角圏は加法圏 \mathcal{C} とその上のシフト関手 $[1]: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ および適切な条件を満たす三角形 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$ のクラス Δ の三対 $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ として定義され ([V]), 加法圏のホモトピー圏やアーベル圏の導来圏などを例に持つ。アーベル圏から導来圏を得る際の構成に関連し、複体の成す圏を射のホモトピーで割ることでホモトピー圏が得られ、ホモトピー圏の Verdier 商をとることで導来圏が得られるなど、イデアル剰余や局所化といった操作が現れている。アーベル圏・完全圏では短完全列を用いた議論を行うのに対し、三角圏では三角形を用いる。アーベル圏・完全圏において短完全列を用いて示されることは、適切に三角形の言葉で置き換えることで三角圏においてその類似が示されることが有り、逆もまた然りである。こうした類似を追うことができるほか、上記に現れたような拡大閉部分圏・イデアル剰余・局所化や relative theory などを組み合わせてアーベル圏・完全圏・三角圏から新たなアーベル圏・完全圏・三角圏を得る構成が幾つか知られており、互いに密接に関係している。

[NP1] で導入した extriangulated category は完全圏と三角圏を含む概念であり、適切な仮定のもとこれら種々の操作で閉じた圏のクラスとなっている。特に三角圏の拡大閉部分圏は extriangulated category の典型例であり、直感的には、こうした圏の持つ性質を抽出し定式化されたものであると思うことができる。

2. EXTRIANGULATED CATEGORY の定義

以下、本稿を通じて \mathcal{C} は加法圏を表し、 \mathcal{C} の部分圏としては、充満部分圏でかつ \mathcal{C} における同型で閉じているもののみを考える。

Extriangulated category は、加法圏 \mathcal{C} 上に構造 \mathbb{E}, \mathfrak{s} の与えられた三対 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ として定義される。以下にその定義を述べ、詳細は後で補足することにする。

定義 2.1. ([NP1, Definition 2.12]) \mathcal{C} を加法圏とする. 三対 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ が **extriangulated category** であるとは, 以下の (ET1), ..., (ET4) および, (ET3), (ET4) の双対である $(\text{ET3})^{\text{op}}, (\text{ET4})^{\text{op}}$ を満たすときをいう.

(ET1) $\mathbb{E}: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ は双加法関手.

(ET2) \mathfrak{s} は \mathbb{E} の加法的実現.

(ET3) $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ および $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$ に対し

$$\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C], \quad \mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$$

であるとき, 任意の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{x} & B & \xrightarrow{y} & C \\ a \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow b & & \\ A' & \xrightarrow{x'} & B' & \xrightarrow{y'} & C' \end{array}$$

に対し, ある c が存在して $(a, c): \delta \rightarrow \delta'$ が $\mathbb{E}\text{-Ext}(\mathcal{C})$ での射であり, $cy = y'b$ を満たす.

(ET4) 任意の $\delta \in \mathbb{E}(D, A)$ および $\delta' \in \mathbb{E}(F, B)$ に対して

$$\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} D], \quad \mathfrak{s}(\delta') = [B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} F]$$

とすると, \mathcal{C} の対象 E および射 d, e, h' ならびに $\delta'' \in \mathbb{E}(E, A)$ が存在し

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f'} & D \\ \parallel & \circlearrowleft & \downarrow g & \circlearrowleft & \downarrow d \\ A & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{h'} & E \\ & & \downarrow g' & \circlearrowleft & \downarrow e \\ & & F & \xlongequal{\quad} & F \end{array}$$

を可換にしさらに以下を満たす.

- (i) $\mathfrak{s}(f'_* \delta') = [D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F]$,
- (ii) $d^* \delta'' = \delta$,
- (iii) $f_* \delta'' = e^* \delta'$.
- (iv) $\mathfrak{s}(\delta'') = [A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{h'} E]$.

上の定義に関し補足を記す. 詳細は [NP1, §2] を参照. 条件 (ET1) から, 任意の $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ および任意の $a \in \mathcal{C}(A, A'), c \in \mathcal{C}(C', C)$ に対して $\mathbb{E}(C, a)(\delta) \in \mathbb{E}(C, A')$ および $\mathbb{E}(c, A)(\delta) \in \mathbb{E}(C', A)$ が得られる. それぞれ $a_* \delta, c^* \delta$ と書くことにする. [INP] 等では $a\delta, \delta c$ とも表している. \mathbb{E} が $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ 上の関手であることから, $c^* a_* \delta = a_* c^* \delta$ が成り立つ. また, 米田の補題から, 任意の $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ に対して自然変換 $\delta_{\#}: \mathcal{C}(-, C) \Rightarrow \mathbb{E}(-, A)$ および $\delta^{\#}: \mathcal{C}(A, -) \Rightarrow \mathbb{E}(C, -)$ が定まる.

$\mathbb{E}(C, A)$ の元 δ のことを, \mathbb{E} -**extension** あるいは単に **extension** とよぶことにする. 条件 (ET3) に現れている圏 $\mathbb{E}\text{-Ext}(\mathcal{C})$ は \mathbb{E} -extension のなす圏を表し, 以下のよう定義される. \mathbb{E} -extension の圏は [BTHSS] などでも詳しく調べられている.

- 対象は $A, C \in \mathcal{C}$ および $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ からなる三対 (A, δ, C) . これを $A\delta C$ もしくは単に δ と表す.
- $A\delta C$ から $B\rho D$ への射は, \mathcal{C} の射 $a \in \mathcal{C}(A, B), c \in \mathcal{C}(C, D)$ の組 (a, c) であつて $a_* \delta = c^* \rho$ を満たすものとする.

- 合成および恒等射は, \mathcal{C} のそれらを用い $(a', c') \circ (a, c) = (a' \circ a, c' \circ c)$ および (id, id) のように与えられる.

$\mathbb{E}\text{-Ext}(\mathcal{C})$ は加法圏となることが確かめられる. ${}_A\delta_C$ および ${}_B\delta_D$ の直和は $(A \oplus B, \delta \oplus \rho, C \oplus D)$ で得られる. ここで $\delta \oplus \rho$ は, 双加法性からくる自然な同型 $\mathbb{E}(C \oplus D, A \oplus B) \cong \mathbb{E}(C, A) \oplus \mathbb{E}(C, B) \oplus \mathbb{E}(D, A) \oplus \mathbb{E}(D, B)$ のもと, 右辺の元 $(\delta, 0, 0, \rho)$ に対応する左辺の元を表す.

条件 (ET2) に現れた**加法的実現** \mathfrak{s} とは, 任意の extension ${}_A\delta_C$ に対して \mathcal{C} のある射の列 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ の同値類 $[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ を対応させる $(\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C])$ ものであって, 以下の条件を満たすものをいう. ただし以下で ${}_A\delta_C, {}_{A'}\delta'_{C'}$ は任意の extension とし, $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$, $\mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$ であるとする.

- $\mathbb{E}\text{-Ext}(\mathcal{C})$ の任意の射 $(a, c): {}_A\delta_C \rightarrow {}_{A'}\delta'_{C'}$ に対して, $b \in \mathcal{C}(B, B')$ であって

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{x} & B & \xrightarrow{y} & C \\ a \downarrow & \circ & \downarrow b & \circ & \downarrow c \\ A' & \xrightarrow{x'} & B' & \xrightarrow{y'} & C' \end{array}$$

を可換にするものが存在する. 三角圏の場合と同様, この b には一意性や標準的な取り方の存在は要求しないことに注意する.

- $\mathfrak{s}(\delta \oplus \delta') = [A \oplus A' \xrightarrow{x \oplus x'} B \oplus B' \xrightarrow{y \oplus y'} C \oplus C']$ が成り立つ.
- 任意の $A, C \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathfrak{s}({}_A 0_C) = [A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C]$ が成り立つ. ここで ${}_A 0_C$ は $\mathbb{E}(C, A)$ の零元を表し, $A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C$ は分裂短完全列とする.

以降簡単のため, 本稿では extriangulated category のことを **ET 圏** とよぶことにする.

例 2.2. 完全圏と三角圏は以下のような自然な ET 圏の構造を持つ. 詳細は [NP1, Example 2.13] を参照.

- (1) 完全圏 $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ において, 任意の $A, C \in \mathcal{C}$ に対して

$$\text{Ext}^1(C, A) = \{\text{conflation } A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \text{ の同値類}\}$$

が small であるとする. このとき, 加法的実現 id が $\text{id}([A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ で与えられ, $(\mathcal{C}, \text{Ext}^1, \text{id})$ は ET 圏となる.

- (2) $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ が三角圏であるとする. $\mathbb{E} = \mathcal{C}(-, -[1])$ により双加法関手 \mathbb{E} を定める. 任意の \mathbb{E} -extension ${}_A\delta_C$ に対して, それを補完し Δ に属する三角形 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} A[1]$ をとり, $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ とすることで加法的実現 \mathfrak{s} を定める. このとき, $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ は ET 圏となる.

3. EXTRIANGULATED CATEGORY の基本性質

完全圏・三角圏を持つ自然な ET 圏の構造については上の例 2.2 で見たとおり. 逆に ET 圏の中で完全圏・三角圏がどのように特徴付けられるかは, 以降の命題 3.8, 3.9 で述べる.

以下, $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ を ET 圏とする. 完全圏・三角圏の場合と両立するよう, 次のように定める.

定義 3.1. ([NP1, Definition 2.15])

- (1) \mathcal{C} における射の列 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ が **conflation** であるとは、ある $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ に対し $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ を満たすときをいう。
- (2) \mathcal{C} の射 $f \in \mathcal{C}(A, B)$ が **inflation** であるとは、 $A \xrightarrow{f} B \rightarrow C$ の形の conflation が存在するときをいう。
- (3) \mathcal{C} の射 $f \in \mathcal{C}(A, B)$ が **deflation** であるとは、 $K \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ の形の conflation が存在するときをいう。

それぞれ、 \mathfrak{s} を明示するときは \mathfrak{s} -conflation, \mathfrak{s} -inflation, \mathfrak{s} -deflation とよぶ。

また、 $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ を満たす extension δ と列 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ の組 $\langle A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C, \delta \rangle$ を **s-triangle** または **extriangle** とよぶ。s-triangle $\langle A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C, \delta \rangle$ を $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} \rightarrow$ のように表す。

定義 3.2. ([NP1, Definition 2.17]) 部分圏 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ が **拡大で閉じている**とは、 $A, C \in \mathcal{D}$ を満たす任意の conflation $A \rightarrow B \rightarrow C$ に対して $B \in \mathcal{D}$ が成り立つときをいう。

定義 3.3. ([LN, Definition 1.13])

- (1) $P \in \mathcal{C}$ が **射影的**であるとは $\mathbb{E}(P, -) = 0$ を満たすときをいい、射影的対象の全体がなす部分圏を $\text{Proj}_{(\mathcal{C}, \mathbb{E})} \subseteq \mathcal{C}$ で表す。 \mathcal{C} が **射影的に豊富**であるとは、任意の $C \in \mathcal{C}$ に対しある射影的对象 P からの deflation $P \rightarrow C$ が存在するときをいう。
- (2) 双対的に、 $I \in \mathcal{C}$ が **入射的**であるとは $\mathbb{E}(-, I) = 0$ を満たすときをいい、入射的对象の全体がなす部分圏を $\text{Inj}_{(\mathcal{C}, \mathbb{E})} \subseteq \mathcal{C}$ で表す。 \mathcal{C} が **入射的に豊富**であるとは、任意の $C \in \mathcal{C}$ に対しある入射的对象 I への inflation $C \rightarrow I$ が存在するときをいう。

注 3.4. 上の一連の定義は、完全圏・三角圏においては以下の概念に対応する。

- 完全圏の場合、定義 3.1 の conflation, inflation, deflation は [Ke, §4] で定義されたものに他ならない。定義 3.2, 3.3 も通常のものと同致する。
- 三角圏の場合、定義 3.1 の s-triangle は distinguished triangle に対応する。定義 3.3 は通常のものと同致する。後述の命題 3.9 のとおり、三角圏においては任意の射が inflation かつ deflation であり、また、射影的对象・入射的对象はいずれも零対象に限る。

命題 3.5. 以下の 3 つの基本的な操作が可能である。

- (1) ([NP1, Remark 2.18]) $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ が拡大閉部分圏のとき、 \mathbb{E} および \mathfrak{s} を適切に \mathcal{D} に制限することで、 \mathcal{D} に自然な ET 圏の構造 $(\mathcal{D}, \mathbb{E}_{\mathcal{D}}, \mathfrak{s}_{\mathcal{D}})$ が与えられる。
- (2) ([NP1, Proposition 3.30]) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$ が射影的かつ入射的な対象からなる部分圏のとき、すなわち $\mathcal{I} \subseteq \text{Proj}_{(\mathcal{C}, \mathbb{E})} \cap \text{Inj}_{(\mathcal{C}, \mathbb{E})}$ を満たすとき、イデアル剰余 $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/[\mathcal{I}]$ は任意の $A, C \in \mathcal{C}$ に対し $\overline{\mathbb{E}}(C, A) = \mathbb{E}(C, A)$ を満たすような自然な ET 圏の構造 $(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathbb{E}}, \overline{\mathfrak{s}})$ を持つ。
- (3) ([HLN, Proposition 3.16]) 加法的部分関手 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ が **閉**であるとき、 \mathfrak{s} を \mathbb{F} に制限することで ET 圏 $(\mathcal{C}, \mathbb{F}, \mathfrak{s}|_{\mathbb{F}})$ が得られる。ここで $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ が閉であるとは、 $\theta \in \mathbb{F}(C, A)$ なる任意の s-triangle $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\theta} \rightarrow$ と任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して $\mathbb{F}(X, A) \xrightarrow{x^*} \mathbb{F}(X, B) \xrightarrow{y^*} \mathbb{F}(X, C)$ および $\mathbb{F}(C, X) \xrightarrow{y^*} \mathbb{F}(B, X) \xrightarrow{x^*} \mathbb{F}(A, X)$ が完全になるときをいう。この条件は、 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -inflation および $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -deflation が合成で閉じることに同値である。

注 3.6. 上の (3) に現れる閉部分関手の概念は、より一般に **n-exangulated category** に対して [HLN, Definition 3.10, Lemma 3.15] で定義されている。 $n = 1$ のときが ET

圏の場合であり, 完全圏のときにはButler–Horrocks ([BH]), Dräxler–Reiten–Smalø–Solberg–Keller ([DRSSK]) の定義に一致する. 完全圏の場合の用語に倣い, (3) で得られる ET 圏構造を *relative theory* という.

命題 3.7. ([HLN, Proposition 3.19]) $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{C}$ を部分圏とすると, \mathbb{E} の閉部分関手 $\mathbb{E}_{\mathcal{I}}$ および $\mathbb{E}^{\mathcal{I}}$ が, 任意の $A, C \in \mathcal{C}$ に対し以下の様になると定まる.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathcal{I}}(C, A) &= \{\delta \in \mathbb{E}(C, A) \mid \text{任意の } I \in \mathcal{I} \text{ に対して } (\delta_{\sharp})_I = 0\}, \\ \mathbb{E}^{\mathcal{I}}(C, A) &= \{\delta \in \mathbb{E}(C, A) \mid \text{任意の } I \in \mathcal{I} \text{ に対して } (\delta^{\sharp})_I = 0\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{E}_{\mathcal{I}} \subseteq \mathbb{E}$ は \mathcal{I} を射影的にする最大の閉部分関手であり, $\mathbb{E}^{\mathcal{I}} \subseteq \mathbb{E}$ は \mathcal{I} を入射的にする最大の閉部分関手である.

ET 圏において完全圏および三角圏は, それぞれ以下の様な条件で必要十分に特徴付けられる.

命題 3.8. ([NP1, Corollary 3.18]) 以下は同値.

- (1) $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ の任意の *inflation* が単射であり, 任意の *deflation* が全射である.
- (2) $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ の *conflation* の全体 \mathcal{S} に対し, $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ は完全圏となる.

命題 3.9. 以下は同値.

- (1) $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ の任意の射は *inflation* かつ *deflation*.
- (2) $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ は $\text{Proj}_{(\mathcal{C}, \mathbb{E})} = 0$ を満たすフロベニウス ET 圏 ([NP1, Definition 7.1]). すなわち, $\text{Proj}_{(\mathcal{C}, \mathbb{E})} = \text{Inj}_{(\mathcal{C}, \mathbb{E})} = 0$ であり, さらに, 射影的に豊富かつ入射的に豊富である.
- (3) $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ は以下の二条件を満たすような自然な三角圏の構造 $(\mathcal{C}, [1], \Delta)$ を持つ.
 - 自然同型 $\mathbb{E} \cong \mathcal{C}(-, -[1])$ が存在.
 - 任意の $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ と, 上の自然同型で対応する射 $z \in \mathcal{C}(C, A[1])$ に対して, $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{-\delta}$ が \mathfrak{s} -triangle であることと $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{z} A[1]$ が Δ に属することは同値.

Proof. 個々に該当する箇所について述べておく. $0 \in \mathcal{C}$ は射影的かつ入射的であるので, (1) \Rightarrow (2) は定義から明らか. (2) \Leftrightarrow (3) は [NP1, Corollary 7.6] の議論を参照. (3) \Rightarrow (1) は三角圏の定義から直ぐに従う. なお, (2) \Rightarrow (1) も [NP1, Corollary 3.16] または [LN, Proposition 1.20] から直ぐに従う. \square

4. ET 圏の局所化

ET 圏の局所化は [NOS] で与えられた. この節では \mathcal{C} は small であるとする. \mathcal{C} における射の集合 \mathcal{S} に対し, 以下の記号を用いる.

- \mathcal{C} の部分圏 $\mathcal{N}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{C}$ を $\mathcal{N}_{\mathcal{S}} = \{N \in \mathcal{C} \mid (N \rightarrow 0), (0 \rightarrow N) \in \mathcal{S}\}$ で定める.
- $p: \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/[\mathcal{N}_{\mathcal{S}}]$ をイデアル剰余とし, $\overline{\mathcal{S}} = p(\mathcal{S})$ とおく.

定理 4.1. ([NOS, Theorem 3.5]) $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ および \mathcal{S} は上記のとおりとし, $\overline{\mathcal{S}}$ が $\overline{\mathcal{C}}$ において以下を満たすとする.

- (MR1) $\overline{\mathcal{S}}$ は射の合成に関して 2-out-of-3 条件を満たす.
- (MR2) $\overline{\mathcal{S}}$ は積閉系である.

(MR3) $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} \circ$ および $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C' \xrightarrow{\delta'} \circ$ が \mathfrak{s} -triangle であり, $(a, c): \delta \rightarrow \delta'$ が $\mathbb{E}\text{-Ext}(\mathcal{C})$ の射であるとする. もし $\bar{a}, \bar{c} \in \overline{\mathcal{S}}$ ならば, $\overline{\mathcal{C}}$ における図式

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\bar{x}} & B & \xrightarrow{\bar{y}} & C \\ \bar{a} \downarrow & \circ & \downarrow \mathbf{b} & \circ & \downarrow \bar{c} \\ A' & \xrightarrow{x'} & B' & \xrightarrow{y'} & C' \end{array}$$

を可換にするような $\mathbf{b} \in \overline{\mathcal{S}}$ が存在する.

(MR4) $\{\mathbf{v} \circ \bar{x} \circ \mathbf{u} \mid x \text{ は } \mathfrak{s}\text{-inflation かつ } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \overline{\mathcal{S}}\}$ が合成に関して閉じている. \mathfrak{s} -deflation についても双対的な条件を満たす.

このとき, \mathcal{C} の \mathcal{S} による局所化を $\tilde{\mathcal{C}}$ とすると, $\tilde{\mathcal{C}}$ は自然な ET 圏の構造 $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathbb{E}}, \tilde{\mathfrak{s}})$ を持つ.

注 4.2. [NOS, Theorem 3.5] において, 局所化関手 $l: \mathcal{C} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ が持つ ET 圏の完全関手としての普遍性も示されている.

定義 4.3. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が **thick** 部分圏であるとは, 加法部分圏であって以下の条件を満たすときをいう.

- (i) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ は直和因子で閉じている.
- (ii) \mathcal{N} は conflation に関して 2-out-of-3 条件を満たす. すなわち, 任意の conflation $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ に対し, 対象 A, B, C のうち二つが \mathcal{N} に属するならば残りの一つも \mathcal{N} に属す.

以下, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ を thick 部分圏とする. \mathcal{N} に付随し \mathcal{L}, \mathcal{R} を

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{f \text{ は } \mathcal{C} \text{ の射} \mid N \in \mathcal{N} \text{ を満たす conflation } X \xrightarrow{f} Y \rightarrow N \text{ が存在}\}, \\ \mathcal{R} &= \{f \text{ は } \mathcal{C} \text{ の射} \mid N \in \mathcal{N} \text{ を満たす conflation } N \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \text{ が存在}\} \end{aligned}$$

と定め, $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ を合成で閉じさせたもの, すなわち $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ に属する射の有限回合成で得られる \mathcal{C} の射の全体を \mathcal{S} とおく. このとき, $\mathcal{N}_{\mathcal{S}} = \mathcal{N}$ が成り立つ ([NOS, Lemma 4.5]).

\mathcal{N} に適当な条件を追加することで, \mathcal{S} が定理 4.1 の仮定を満たすことが確かめられる. 大きくは次の二つの場合に分けられる.

定義 4.4. ([NOS, Definitions 4.3, 4.28])

- $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が **biresolving** であるとは, 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して, $N, N' \in \mathcal{N}$ を満たす inflation $C \rightarrow N$ および deflation $N' \rightarrow C$ が存在するときをいう.
- $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が **two-sided admissibly percolating** (以降, 単に **percolating** という) であるとは, \mathcal{N} の対象を経由する任意の射 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ に対して, ある $N \in \mathcal{N}$ と deflation $X \xrightarrow{d} N$ および inflation $N \xrightarrow{i} Y$ が存在して $f = i \circ d$ を満たすときをいう.

さらに, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が percolating な場合については, 以下の追加の条件を考える.

- (P2) $f \in \mathcal{C}(A, B)$ が分裂単射でかつ \bar{f} が $\overline{\mathcal{C}}$ において同型ならば, ある $N \in \mathcal{N}$ および $j \in \mathcal{C}(N, B)$ が存在して, $[f \ j]: A \oplus N \rightarrow B$ が \mathcal{C} における同型射となる.
- (P3) $\text{Ker}(\mathcal{C}(X, A) \xrightarrow{l} \mathcal{C}(X, B)) \subseteq [\mathcal{N}](X, A)$ が任意の $X \in \mathcal{C}$ と任意の \mathcal{L} の射 $l \in \mathcal{C}(A, B)$ に対して成り立つ. 双対的に, $\text{Ker}(\mathcal{C}(C, X) \xrightarrow{r} \mathcal{C}(B, X)) \subseteq [\mathcal{N}](C, X)$ が任意の $X \in \mathcal{C}$ と任意の \mathcal{R} の射 $r \in \mathcal{C}(B, C)$ に対して成り立つ.

注 4.5. 完全圏の場合には, (定義 4.3 の意味での)thick 部分圏 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が上の条件を満たすことは, それぞれ [R, Definition 7], [HKR, Definition 2.8] の定義の条件を満たすことに同値. 詳細は [NOS, Examples 4.17, 4.33] を参照.

上の追加条件 (P2),(P3) は [NOS, Condition 4.30] のものであり, 後述の命題 4.8 の証明に必要な技術的な仮定である. (P2) は自己双対的な条件であることが確かめられる. また, (P2) は $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ が弱冪等完備¹であるか完全圏の場合には自動的に満たされ, (P3) は $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ が三角圏もしくは完全圏の場合に自動的に満たされる ([NOS, Remarks 4.31, 4.32]).

以降もこれまでと同様, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ は thick 部分圏であるとする. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が biresolving の場合は以下が成り立つ.

命題 4.6. ([NOS, §4.3.]) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が *biresolving* であるとき, 以下が成り立つ.

- (1) \mathcal{S} は定理 4.1 の仮定を満たし, 従って ET 圏 $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathbb{E}}, \tilde{\mathfrak{s}})$ が得られる.
- (2) $\mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ が成り立つ.
- (3) $\overline{\mathcal{S}}$ は $\tilde{\mathcal{C}}$ において, 全射かつ単射であるような射の全体に一致する.
- (4) $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathbb{E}}, \tilde{\mathfrak{s}})$ は命題 3.9 の同値な条件を満たし, 従って, ET 構造と両立する自然な三角圏の構造を持つ.

Proof. [NOS] において, (1),(3) は Proposition 4.26, (2) は Lemma 4.20, (4) は Corollary 4.27 でそれぞれ示されている. \square

例 4.7. ([NOS, Example 4.17]) 上の命題 4.6 は, 以下の既存の局所化を含むものとなっている.

- \mathcal{C} が三角圏のときは Verdier 商に他ならない.
- \mathcal{C} が完全圏のときは Rump の局所化 ([R]) に相当する.
- \mathcal{C} が弱冪等完備であり, $\mathcal{P} = ((\mathcal{S}, \mathcal{T}), (\mathcal{U}, \mathcal{V}))$ が Hovey 双余ねじれ対 ([NP1, Definition 5.1]) のとき, $V \in \mathcal{V}, S \in \mathcal{S}$ であるような conflation $V \rightarrow S \rightarrow N$ を持つ対象 N の全体がなす部分圏 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ は biresolving な thick 部分圏となり, 局所化 $\tilde{\mathcal{C}}$ は [NP1] のものと一致する.

$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が *percolating* の場合は以下の様になる.

命題 4.8. [NOS, §4.4.] $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ が *percolating* であり, かつ条件 (P2),(P3) を満たすとする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) \mathcal{S} は定理 4.1 の仮定を満たし, 従って ET 圏 $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathbb{E}}, \tilde{\mathfrak{s}})$ が得られる.
- (2) $\mathcal{S} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ が成り立つ.
- (3) もし $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ がさらに次の ((P3) よりも強い) 条件 (P3') $\text{Ker}(\mathcal{C}(X, A) \xrightarrow{x \circ} \mathcal{C}(X, B)) \subseteq [\mathcal{M}](X, A)$ が任意の $X \in \mathcal{C}$ と任意の \mathfrak{s} -inflation $x \in \mathcal{C}(A, B)$ に対して成り立つ. 双対的に, $\text{Ker}(\mathcal{C}(C, X) \xrightarrow{y \circ} \mathcal{C}(B, X)) \subseteq [\mathcal{M}](C, X)$ が任意の $X \in \mathcal{C}$ と任意の \mathfrak{s} -deflation $y \in \mathcal{C}(B, C)$ に対して成り立つ.

を満たすならば, $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathbb{E}}, \tilde{\mathfrak{s}})$ は命題 3.8 の同値な条件を満たし, 従って, ET 圏構造と両立する完全圏の構造を持つ.

Proof. [NOS] において, (1) は Proposition 4.41, (2) は Lemma 4.37, (3) は Corollary 4.42 でそれぞれ示されている. \square

¹ET 圏 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ に対して, [NP1] における条件 (WIC) と \mathcal{C} の弱冪等完備性の同値が, Klapproth により示されている ([Kla, Proposition 2.7]).

例 4.9. 上の命題 4.8 の局所化は, \mathcal{C} が完全圏のときは, Cárdenas-Escudero および Henrard–Kvamme–van Roosmalen の局所化 ([C-E, Chapter 4],[HKR, §2.3]) に相当する. 特に, \mathcal{C} がアーベル圏のときは Serre 商に他ならない.

5. ET 圏の増強と埋め込みについて

講演の最後に, 最近示された事柄として, ET 圏の増強に関わる結果に言及した. 一方は完全 ∞ -圏 ([B, Definition 3.1]) によるものであり, もう一方は Chen により定義された完全 dg 圏 (exact dg category, [C, Definition 5.1]) によるものである.

完全 ∞ -圏については, 以下で示されている.

定理 5.1. [NP2, Theorem 4.22] \mathcal{C} が *small* な完全 ∞ -圏ならば, そのホモトピー圏は自然な ET 圏の構造を持つ.

さらに Klemenc ([Kle, Theorem 1.2]) により, *small* な完全 ∞ -圏は安定 ∞ -圏に拡大閉に埋め込めることが示された. 従って, 完全 ∞ -圏による増強を持つ ET 圏 (= トポロジカル ET 圏 ([NP2, Definition 4.3])) は三角圏の拡大閉部分圏となることも分かる.

完全 dg-圏については, Chen の論文 ([C]) により, そのホモトピー圏が自然な ET 圏の構造を持ち, 適切な pretriangulated dg-圏のホモトピー圏に拡大閉に埋め込まれることが示された. 従って, ET 圏が完全 dg-圏による増強を持つ場合 (= 代数的 ET 圏 ([C, Proposition-Definition 6.20])²) にも, 三角圏の拡大閉部分圏となる.

冒頭の Introduction での「ET 圏は三角部分圏の拡大閉部分圏を定式化したもの」という直感的な理解は, このように ET 圏が増強を持つ場合には上記の諸結果において正確に定式化され, 証明されることとなった.

REFERENCES

- [B] Barwick, C.: *On exact ∞ -categories and the theorem of the heart*. Compos. Math. **151** (2015), no. 11, 2160–2186.
- [BTHSS] Bennett-Tennenhaus, R.; Haugland, J.; Sandøy, M.H.; Shah, A.: *The category of extensions and a characterisation of n -exangulated functors*. Math. Z. **305** (2023), no. 3, Paper No. 44, 37 pp.
- [BH] Butler, M.C.R.; Horrocks, G.: *Classes of extensions and resolutions*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **254** (1961/62), 155–222.
- [C-E] Cárdenas-Escudero, M.E.: *Localization for exact categories*. Thesis (Ph.D.)–State University of New York at Binghamton. 1998.
- [C] Chen, X.: *On exact dg categories*. arXiv:2306.08231.
- [DRSSK] Dräxler, P.; Reiten, I.; Smalø, O.; Solberg, Ø.: *Exact categories and vector space categories*. With an appendix by B. Keller. Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 2, 647–682.
- [HKR] Henrard, R.; Kvamme, S.; van Roosmalen, A-C.: *Auslander’s formula and correspondence for exact categories*. Adv. Math. **401** (2022), Paper No. 108296, 65 pp.
- [HLN] Herschend, M.; Liu, Y.; Nakaoka, H.: *n -exangulated categories (I): Definitions and fundamental properties*. J. Algebra **570** (2021), 531–586.
- [INP] Iyama, O.; Nakaoka, H.; Palu, Y.: *Auslander–Reiten theory in extriangulated categories*. arXiv:1805.03776v3.
- [Ke] Keller, B.: *Derived categories and their uses*. Handbook of algebra, Vol. 1, 671–701, North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [Kla] Klapproth, C.: *n -Extension closed subcategories of n -exangulated categories*. arXiv:2209.01128v3.
- [Kle] Klemenc, J.: *The stable Hull of an exact ∞ -category*. Homology Homotopy Appl. **24** (2022), no.2, 195–220.

²適切な条件を満たす完全 dg 圏の dg-nerve は完全 ∞ -圏であることも Chen により示されており, 代数的な ET 圏はトポロジカルである. [C] の Theorem 6.19 直前の議論を参照.

- [LN] Liu, Y.; Nakaoka, H.: *Hearts of twin cotorsion pairs on extriangulated categories*. J. Algebra **528** (2019), 96–149.
- [NOS] Nakaoka, H.; Ogawa, Y.; Sakai, A.: *Localization of extriangulated categories*. J. Algebra **611** (2022), 341–398.
- [NP1] Nakaoka, H.; Palu, Y.: *Extrianulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures*. Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **60** (2019), no. 2, 117–193.
- [NP2] Nakaoka, H.; Palu, Y.: *External triangulation of the homotopy category of exact quasi-category*. arXiv:2004.02479.
- [Q] Quillen, D.: *Higher algebraic K-theory. I*. Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 85–147, Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, Berlin-New York, 1973.
- [R] Rump, W.: *The acyclic closure of an exact category and its triangulation*. J. Algebra **565** (2021), 402–440.
- [V] Verdier, J.-L.: *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque, **239**, Société Mathématique de France, (1996) [1967].

1次元解析を基盤とした局所環論

松岡 直之 (明治大学)

目次

1	はじめに	1
2	数値半群と数値半群環	3
2.1	数値半群	3
2.2	数値半群環	5
3	数値半群環の定義イデアルおよび極小自由分解	6
4	Gorenstein 性の一般化	9
5	2次小行列式で定まる環の nearly Gorenstein 性と almost Gorenstein 性	12

1 はじめに

可換環論研究では多くの環の分類が与えられているが、その中でもホモロジー代数的な視点から定まる局所環の性質として以下の階層が取り扱われることが多い。

正則 \Rightarrow 完全交叉 \Rightarrow Gorenstein \Rightarrow Cohen-Macaulay \Rightarrow Buchsbaum

これらの中で、Cohen-Macaulay 性と Gorenstein 性が双璧をなすものであることには、疑問の余地は少ないであろう。

以下、 A は極大イデアル \mathfrak{m} をもつ可換な Noether 局所環とし、 $d = \dim A$ は A の Krull 次元とする。

定義 1.1. A が Cohen-Macaulay であるとは、 A が非混合 (純性) 定理を満たすことをいう。すなわち、 r 個の元で生成された A のイデアル I の高さが r ならば、 I のいかなる素因子も必ず高さ r を持つということである。

A がCohen-Macaulayであることは、極大イデアル \mathfrak{m} 内に長さ d の正則列が含まれていることと同値である。もちろん、1次元局所整域は典型的にCohen-Macaulay局所環である。

定義 1.2. A がGorensteinであるとは、 A の自己入射次元が有限であることをいう。

以降の文脈で扱いやすい同値条件を述べると、以下がよく知られている。

定理 1.3. K_A によって A の正準加群を表す。このとき、以下は同値である。

- (1) A はGorensteinである。
- (2) A はCohen-Macaulayであって、 K_A は A -加群として A と同型である。
- (3) A はCohen-Macaulayであって、 $\mu_A(K_A) = 1$ である。
- (4) A はCohen-Macaulayであって、 $\ell_A(\text{Ext}_A^d(A/\mathfrak{m}, A)) = 1$ である。

ただし、 $\ell_A(*)$ は A -加群としての長さを表し、 $\mu_A(*)$ は A -加群としての極小生成系の個数を表す。

局所環とは限らないNoether環 R がCohen-Macaulay (resp. Gorenstein) であるとは、任意の素イデアル P による局所化 R_P がCohen-Macaulay (resp. Gorenstein) であることをいう。

例 1.4. (1) H を数値半群とする。すなわち、 $H \subseteq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ は数の和で閉じていて $0 \in H$ であり、 $\mathbb{N} \setminus H$ は有限集合である。このとき、 $A = k[[t^h \mid h \in H]]$ がGorensteinであるための必要十分条件は、 H が数値半群として対称であることである (E. Kunz, 1970)。数値半群の対称性や、数値半群環の基本事項は次節で紹介する。

(2) $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ を体 $R_0 = k$ 上の標準的度数付き代数、つまり $R = k[R_1]$ であるとする。 R がCohen-Macaulay整域であるとき、 R がGorensteinであるための必要十分条件は R の h -vector が対称的であることである (R. P. Stanley, 1978)。

Gorenstein性からは、上述のような「対称性」を様々な場面で見出すことができる。つまり、Cohen-Macaulay環の中でも非常に美しい構造を持っているのであるが、その分かなり特殊であり、稀少であると考えられる。もう少し枠組みを広げた上で、Gorenstein性に準ずるような理論が展開できないだろうか、ということが、執筆者の目下の検討課題である。本稿では、この課題へのアプローチのひとつとして、1次元の環構造解析を基盤としながら一般次元の理論への展開を図ることを主眼に置き、1次元の局所環のプロトタイプとして数値半群環を取り上げる。まずは、数値半群と数値半群環の紹介から始めていきたい。

2 数値半群と数値半群環

2.1 数値半群

1次元整域の典型例として、数値半群環の基本的な概念を紹介することが本節の目的であるが、まずは数値半群から基本的な性質や記号を紹介していくことにしたい。以下、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ は非負整数全体のなす集合を表す。

定義 2.1. \mathbb{N} の部分モノイド H で、 $\mathbb{N} \setminus H$ が有限集合であるようなものを、数値半群と呼ぶ。

\mathbb{N} の部分モノイド H に対し、極小な生成系 $0 < a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ が一意的に存在する。つまり

$$H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{N} \right\}$$

が成り立つ。さらにこのとき、次が正しい。

命題 2.2. 次は同値である。

- (1) H は数値半群である。
- (2) $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ である。
- (3) ある $h \in H$ が存在して、 $h + 1 \in H$ である。
- (4) ある $h \in H$ が存在して、 $n \geq h$ なら $n \in H$ である。

ただし、 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は a_1, a_2, \dots, a_n の最大公約数を表す。

定義 2.3. H を数値半群とする。

- (1) $c(H) = \min\{h \in H \mid n \geq h \text{ なら } n \in H\}$ と定め、 H のコンダクターと呼ぶ。
- (2) $f(H) = c(H) - 1 = \max(\mathbb{Z} \setminus H)$ と定め、 H のフロベニウス数と呼ぶ。
- (3) $\text{PF}(H) = \{\alpha \in \mathbb{Z} \setminus H \mid \text{任意の } 0 < h \in H \text{ に対し、} \alpha + h \in H \text{ である}\}$ と定める。 $\alpha \in \text{PF}(H)$ のことを H の擬フロベニウス数と呼ぶ。
- (4) $K_H = \bigcup_{\alpha \in \text{PF}(H)} ((f(H) - \alpha) + H)$ と定め、 H の正準イデアルと呼ぶ。但し、 $z \in \mathbb{Z}$ に対し、 $z + H = \{z + h \mid h \in H\}$ である。

フロベニウス数の名前の由来は、フロベニウスの硬貨交換問題に起源があるものと考えられる。定義から明らかに $f(H) = \max \text{PF}(H)$ である。また、このことから $H \subseteq K_H \subseteq \mathbb{N}$ であることも確かめられる。まずは、例を用いて数値半群と、そのフロベニウス数および擬フロベニウス数を探ってみることにしたい。

例 2.4. $H_1 = \langle 4, 5, 6 \rangle$, $H_2 = \langle 3, 4, 5 \rangle$, $H_3 = \langle 5, 6, 8 \rangle$, $H_4 = \langle 6, 7, 11 \rangle$ とする。このとき

$$\begin{aligned} H_1 &= \{0, 4, 5, 6\} \cup \{h \mid h \geq 8\} \\ H_2 &= \{0\} \cup \{h \mid h \geq 3\} \\ H_3 &= \{0, 5, 6, 8\} \cup \{h \mid h \geq 10\} \\ H_4 &= \{0, 6, 7, 11, 12, 13, 14\} \cup \{h \mid h \geq 17\} \end{aligned}$$

であり,

$$\text{PF}(H_1) = \{7\}, \text{PF}(H_2) = \{1, 2\}, \text{PF}(H_3) = \{7, 9\}, \text{PF}(H_4) = \{15, 16\}$$

が確かめられる。

ここで、数値半群の対称性を以下で定義する。

定義 2.5. H が対称的であるとは、いかなる整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対しても、「 $a \in H \Leftrightarrow f(H) - a \notin H$ 」が成り立つことをいう。

注 2.6. 一般に、 $a \in H$ ならば $f(H) - a \notin H$ である。実際、 $a, f(H) - a \in H$ ならば、 $f(H) \in H$ となってしまう、フロベニウス数の定義に反するからである。

命題 2.7. 次は同値である。

- (1) H は対称的である。
- (2) 任意の整数 $0 \leq a \leq f(H)$ に対し、「 $a \in H \Leftrightarrow f(H) - a \notin H$ 」が成り立つ。
- (3) $\#(\mathbb{N} \setminus H) = \frac{f(H) + 1}{2}$ である。
- (4) $\text{PF}(H) = 1$ である。
- (5) $\text{PF}(H) = \{f(H)\}$ である。
- (6) $K_H = H$ である。

このとき、 $f(H)$ は奇数である。

例 2.8. 例 2.4 の記号のもとで、 H_1 は対称的であり、 $i \neq 1$ について H_i は対称的ではない。

対称性の亜種として、数値半群の擬対称性というものも定義されている。これも定義と簡単な特徴づけのみ述べておくことにしよう。

定義 2.9. H が擬対称的であるとは、 $f(H)$ が偶数であって、 $\frac{f(H)}{2}$ とは異なる整数 $a \in \mathbb{Z}$ に対して「 $a \in H \Leftrightarrow f(H) - a \notin H$ 」が成り立つことをいう。

命題 2.10. 次は同値である。

- (1) H は擬対称的である。
- (2) $f(H)$ は偶数であって、任意の整数 $0 \leq a \leq f(H)$ に対し、 $a \neq \frac{f(H)}{2}$ であるなら「 $a \in H \Leftrightarrow f(H) - a \notin H$ 」が成り立つ。
- (3) $\sharp(\mathbb{N} \setminus H) = \frac{f(H) + 2}{2}$ である。
- (4) $\text{PF}(H) = \left\{ \frac{f(H)}{2}, f(H) \right\}$ である。
- (5) $K_H = H \cup \left\{ \frac{f(H)}{2} \right\}$ である。

2.2 数値半群環

k を体とする。数値半群 $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ の k を係数環とする半群環、すなわち

$$k[[H]] = k[[t^h \mid h \in H]] = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_n}]] \subseteq k[[t]]$$

を k 上 H の数値半群環と呼ぶ。ただし、 $k[[t]]$ は k 上の形式的ベキ級数環である。拡大 $k[[H]] \subseteq k[[t]]$ が整であるから $k[[H]]$ の Krull 次元は 1 であり、もちろん整域である。よって特に、 $k[[H]]$ は 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環である。数値半群環は 1 次元の局所環解析の際の具体例として頻繁に登場する。

さて、 $A = k[[H]]$ とおく。このとき、 A の正準加群 K_A は以下のように求めることができる (cf. [7])。

$$K_A = \sum_{\alpha \in \text{PF}(H)} A t^{f(H) - \alpha} = \sum_{p \in K_H} k t^p$$

よって $\mu_A(K_A) = \sharp \text{PF}(H)$ であり、定理 1.3 を思い出すと A が Gorenstein であることと H が対称的であることが同値であることがわかる。このことを最初に提示したのは E. Kunz であるが、Kunz はより一般の形の定理を与えているので、ここに記しておくことにしたい。

定理 2.11 ([12]). (A, \mathfrak{m}) を 1 次元解析的既約な Noether 局所環とする。すなわち、 A の全商環 $Q(A)$ 内での整閉包 \bar{A} は、 A -加群として有限生成であるような離散的付値環である。さらに、 A と \bar{A} は剰余体を共有すると仮定する。 $v : Q(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ を離散的付値環 \bar{A} に対応する付値とする。このとき、 A が Gorenstein であることと、値半群 $v(A) = \{v(a) \mid a \in A\}$ が対称的であることは同値である。

Kunz の論文 [12] が出版されたのは 1970 年である。当時は Gorenstein 環の解析がまさに始められようとしている段階であり、その頃には Gorenstein 環の具体例自体がほとんど知られていなかったと耳にしたことがある。そのような背景のもとで見ると、Kunz の結果は Gorenstein 環の具体例を豊富に提供するという点で大きなインパクトがあったことが想像され、その後の Gorenstein 性解析の礎のひとつとなったと考えられる。また同時に、環 $A = k[[H]]$ の性質が、より単純な数値半群 H の形によって記述される、ということを確認し、数値半群を解析することの意義も主張したものとなっている。執筆者のこれまでの研究はこの Kunz の結果による示唆に多大な影響を受けており、数値半群の具体例解析から数値半群環の環構造解析へ繋げ、それを基盤として 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環論を展開し、最終的に一般次元の Cohen-Macaulay 局所環論へと発展させる、といった流れを目指しながら実施されている。

余談ではあるが、擬対称的な数値半群の半群環の持つ環構造を Kunz 環と名付けている文献もあるが (e.g. [1]), あまり定着はしていないように感じる。

ここまで、数値半群環と数値半群について概説した。数値半群は非常に具体的であり、かつ単純な構造を持っていることが伝わっていると思うが、実はそれにも関わらず、解明が不十分である問が多数残されているように感じられる。次節ではそのような問のひとつとして、定義方程式の決定問題を紹介したい。

3 数値半群環の定義イデアルおよび極小自由分解

以下、 k は体とし、 $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ とおく。 a_1, a_2, \dots, a_n は H の極小生成系であって、 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ であるとせよ。 $S = k[[X_1, X_2, \dots, X_n]]$ を k 上の形式的べき級数環とし、 $A = k[[H]]$ と定める。環の準同型写像 $\varphi_H : S \rightarrow A$ を $\varphi_H(X_i) = t^{a_i}$ ($1 \leq i \leq n$) によって定め、 $I_H = \text{Ker } \varphi_H$ とおく。 I_H を A の定義イデアルと呼ぶ。

問題 3.1. I_H の構造を決定せよ。例えば、 I_H の極小生成系は計算できるか。また、 A の極小自由分解を具体的に求めることは可能か。

I_H の極小生成系とは、空間 k^n 内で単項式によって定まる曲線

$$C = \{(t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_n} \mid t \in k)\}$$

の定義方程式に等しいことに注意しておきたい。

さて、 $n = 2$ のときは $I_H = (X_1^{a_2} - X_2^{a_1})$ であることが容易に確かめられる。 $n = 3$ のときには、J. Herzog [8] により精密に解析され、以下のように完全な解答が与えられている。

定理 3.2 ([8]). $n = 3$ とする。このとき、次は同値である。

(1) H は対称的である。つまり、 $A = k[[H]]$ は Gorenstein である。

(2) a_1, a_2, a_3 を並べ替えて、 $\gcd(a_1, a_2) = d \geq 2$ であって、かつ $a_3 \in \left\langle \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d} \right\rangle$ が成り立つようにできる。

このとき、 $I_H = (f_1 = X_1^{b_2} - X_2^{b_1}, f_2 = X_3^d - X_1^{c_1} X_2^{c_2})$ が成り立つ。ただし、 $b_1 = \frac{a_1}{d}$, $b_2 = \frac{a_2}{d}$ であり、 $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ は $a_3 = c_1 b_1 + c_2 b_2$ を満たすものである。もちろん、 A は極小自由分解

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{pmatrix}} S^2 \xrightarrow{(f_1 \ f_2)} S \rightarrow A \rightarrow 0$$

を持つ。

系 3.3. $n = 3$ とし、 a_1, a_2, a_3 はどの 2 つをとっても互いに素であると仮定すると、 $H = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ は対称的ではない。

定理 3.4. $n = 3$ とし、 H は対称的でないとする。このとき、ある整数 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, m_1, m_2, m_3 \geq 1$ が存在して

$$I_H = I_2 \begin{pmatrix} X_2^{m_2} & X_3^{m_3} & X_1^{m_1} \\ X_1^{\ell_1} & X_2^{\ell_2} & X_3^{\ell_3} \end{pmatrix}$$

が成り立つようにできる。ここで、 $I_2(M)$ は行列 M の 2 次小行列式全体で生成されるイデアルを表す。また、 A は極小自由分解

$$0 \rightarrow S^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} X_2^{m_2} & X_1^{\ell_1} \\ X_3^{m_3} & X_2^{\ell_2} \\ X_1^{m_1} & X_3^{\ell_3} \end{pmatrix}} S^3 \xrightarrow{(\Delta_1 \ -\Delta_2 \ \Delta_3)} S \rightarrow A \rightarrow 0$$

を持つ。但し、 $\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} X_3^{m_3} & X_1^{m_1} \\ X_2^{\ell_2} & X_3^{\ell_3} \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} X_2^{m_2} & X_1^{m_1} \\ X_1^{\ell_1} & X_3^{\ell_3} \end{pmatrix}$, $\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} X_2^{m_2} & X_3^{m_3} \\ X_1^{\ell_1} & X_2^{\ell_2} \end{pmatrix}$ である。

例 3.5. (1) $H = \langle 4, 5, 6 \rangle$ とする。このとき、 $\gcd(4, 6) = 2$ かつ $5 = \frac{4}{2} + \frac{6}{2} \in \left\langle \frac{4}{2}, \frac{6}{2} \right\rangle$ であるから、 H は対称的である。この H が対称的であることは、例 2.8 でも確認していた。また、 $I_H = (X_1^3 - X_3^2, X_2^2 - X_1 X_3)$ が定義イデアルである。但し、 $\varphi_H(X_1) = t^4$, $\varphi_H(X_2) = t^5$, $\varphi_H(X_3) = t^6$ としている。

(2) $H = \langle 3, 4, 5 \rangle$ のとき、 $3, 4, 5$ はどの 2 つも互いに素となっているので H は対称的ではない。このとき

$$k[[H]] \cong k[[X_1, X_2, X_3]] / (X_1^3 - X_2 X_3, X_2^2 - X_1 X_3, X_3^2 - X_1^2 X_2),$$

$$(X_1^3 - X_2 X_3, X_2^2 - X_1 X_3, X_3^2 - X_1^2 X_2) = I_2 \begin{pmatrix} X_2 & X_3 & X_1^2 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$$

である。

しかし、 $n \geq 4$ の場合は部分的に知られているに留まっている。例えば、以下のようなことは知られている。

- 事実 3.6.** (1) $n = 4$ であってかつ H が対称的であるときは、 I_H の生成系が具体的に求められており、 $\mu_S(I_H) = 3$ または $\mu_S(I_H) = 5$ である ([3])。
- (2) $n = 4$ であってかつ H が擬対称的であるときは、 I_H の生成系が具体的に求められており、 $\mu_S(I_H) = 5$ である ([10])。
- (3) $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ であって a_1, a_2, \dots, a_{n-1} が等差数列であるときは、 I_H の生成系が具体的に求められている ([15])。

執筆者は、後藤四郎とベトナム人研究者である D. V. Kien, H. L. Truong との共同研究により、 I_H の生成系と $\text{PF}(H)$ の間に見える深いつながりを記述することに成功している。

定理 3.7 ([4]). $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ に対し、次は同値である。

- (1) ある正の整数 $\alpha > 0$ が存在して、 $\text{PF}(H) = \{\alpha, 2\alpha, \dots, (n-1)\alpha\}$ である。
- (2) 上手く X_1, X_2, \dots, X_n の順序を入れ替えることによって、

$$I_H = I_2 \begin{pmatrix} X_2^{m_2} & X_3^{m_3} & \cdots & X_n^{m_n} & X_1^{m_1} \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} & X_n \end{pmatrix}$$

が成り立つような整数 $m_1, m_2, \dots, m_n \geq 1$ が存在するようにできる。

この定理 3.7 の結果を受けて、上述のベトナム人研究者 2 名に D. T. Cuong も交えて実施した議論の中で以下の予想を得た。

予想 3.8. $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ とし、 $\text{PF}(H) = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r\}$ とする。このとき次は同値である。

- (1) $r = n - 1$ であって、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ は等差数列である。
- (2) 上手く X_1, X_2, \dots, X_n の順序を入れ替えることによって、

$$I_H = I_2 \begin{pmatrix} X_2^{m_2} & X_3^{m_3} & \cdots & X_n^{m_n} & X_1^{m_1} \\ X_1^{\ell_1} & X_2^{\ell_2} & \cdots & X_{n-1}^{\ell_{n-1}} & X_n^{\ell_n} \end{pmatrix}$$

が成り立つような整数 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, m_1, m_2, \dots, m_n \geq 1$ が存在するようにできる。

定理 3.7 と予想 3.8 で, $\sharp \text{PF}(H) = n - 1$ であることは本質的である。また, 予想 3.8 の条件 (2) が満たされるとき, $k[[H]]$ の極小自由分解は行列

$$\begin{pmatrix} X_2^{m_2} & X_3^{m_3} & \cdots & X_n^{m_n} & X_1^{m_1} \\ X_1^{\ell_1} & X_2^{\ell_2} & \cdots & X_{n-1}^{\ell_{n-1}} & X_n^{\ell_n} \end{pmatrix}$$

の Eagon-Northcott 複体によって与えられる。

数値半群 H から数値半群環 $k[[H]]$ の定義イデアル I_H の生成系を求める簡便な計算式を見つけることは, ほとんど現実的ではない。一方, 擬フロベニウス数 $\text{PF}(H)$ がわかるとある程度類推はできるのではないかと, ということが予想 3.8 の本質的な主張である。

4 Gorenstein 性の一般化

第 1 節でも述べているように, Gorenstein 環は Cohen-Macaulay 環の中でも稀少である。実際, 系 3.3 が対称的な数値半群の稀少性の証拠の一つであるといえる。V. Barucci と R. Fröberg は数値半群の対称性を次のように一般化し, 数値半群環の環構造論を展開する試み [2] を提示している。Gorenstein 性の次に良い性質とはいかなるものであるかを探るための重要な視点を与えているように感じられる。以下, $\text{PF}^*(H) = \text{PF}(H) \setminus \{f(H)\}$ とおく。

定義 4.1 (cf. [2]). 数値半群 H が概対称的であるとは, 任意の整数 $a \in \mathbb{Z} \setminus \text{PF}^*(H)$ に対し, 「 $a \in H \Leftrightarrow f(H) - a \notin H$ 」が成り立つことをいう。

数値半群 H が対称的であることと $K_H = H$ であることが同値であったから, 対称の数値半群は概対称的である。また, 擬対称の数値半群も概対称的である。実際, 以下が知られている。

命題 4.2. 数値半群 H について, 以下は同値である。

- (1) H は概対称的である。
- (2) 任意の整数 $0 \leq a \leq f(H)$ に対し, $a \notin \text{PF}^*(H)$ であるなら 「 $a \in H \Leftrightarrow f(H) - a \notin H$ 」が成り立つ。
- (3) $\sharp(\mathbb{N} \setminus H) = \frac{f(H) + \sharp \text{PF}(H)}{2}$ である。
- (4) $\text{PF}(H) = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r\}$ としたとき, 任意の $1 \leq i \leq r - 1$ に対して $\alpha_i + \alpha_{r-i} = \alpha_r$ が成り立つ。
- (5) $M + K_H \subseteq H$ である。但し, $M = H \setminus \{0\}$ であり, $M + K_H = \{m + x \mid m \in M, x \in K_H\}$ である。

注 4.3. Barucci-Fröberg [2] の概対称的の定義は、実際には命題 4.2 (5) で与えられている。しかし、対称的・擬対称的数値半群に関する命題 2.7, 2.10 との対比がしやすいように、本稿では上述の定義を採用している。また、命題 4.2 の同値条件 (4) は、成博勝 [14] によって最初に指摘されたものである。

概対称な数値半群の解析を通じて、Barucci-Fröberg [2] では解析的不分岐な 1 次元の局所環に対して almost Gorenstein 性を以下のように定義している。

定義 4.4 ([2]). (A, \mathfrak{m}) を 1 次元解析的不分岐な Noether 局所環とする。 A が almost Gorenstein であるとは、 $\mathfrak{m}K_A \subseteq A$ が成り立つことをいう。すなわち、 K_A は A/\mathfrak{m} 上のベクトル空間である。

注 4.5. 執筆者は、後藤四郎, Tran Thi Phuong との共同研究 [5] により定義 4.4 を拡張し、一般の 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環に対する almost Gorenstein 性の定義を提示している。しかし、その定義を正確に述べるにはさらに記号を用意する必要が生じるため、今回はここに記すのを断念した。

定理 2.11 の類似として、Barucci-Fröberg は以下も示している。

命題 4.6 ([2]). (A, \mathfrak{m}) を 1 次元解析的既約な Noether 局所環とし、 $v(A)$ を定理 2.11 と同様に定める。このとき、 A が almost Gorenstein であることと $v(A)$ が概対称的であってかつ $\mu_A(K_A) = \#PF(v(A))$ であることは同値である。

上述したように、almost Gorenstein 性は数値半群および数値半群環に対する Barucci-Fröberg の成果 [2] は [5] によって一般の 1 次元の理論に拡張された。そして、後藤四郎, 高橋亮, 谷口直樹により一般次元の Cohen-Macaulay 環の理論へと発展され、現在に至っている。後藤-高橋-谷口の almost Gorenstein 性の定義は以下の通りである。

定義 4.7 ([6]). (A, \mathfrak{m}) を Cohen-Macaulay 局所環とする。 A が almost Gorenstein であるとは、完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow K_A \rightarrow C \rightarrow 0$$

が存在して、 $C = (0)$ であるか、または C が Ulrich 加群である、すなわち C の \mathfrak{m} に関する重複度 $e_{\mathfrak{m}}(C)$ と C の A -加群としての極小生成系の個数 $\mu_A(C)$ が一致することをいう。

注 4.8. 一般の Cohen-Macaulay A -加群 M に対して $e_{\mathfrak{m}}(M) \geq \mu_A(M)$ であるので、 C が Ulrich 加群であるとは、極小生成系の個数が取りうる最大であることを意味する。また、 $\dim A = 1$ であるときは、 C が A/\mathfrak{m} 上のベクトル空間であることと同値であり、これは [2] による 1 次元の定義 4.4 の拡張となっていることがわかる。

注 4.9. A が Gorenstein であることと、 A -加群として $A \cong K_A$ であることは同値であった。定義 4.7 の気持ちは、 $A \cong K_A$ とは限らなくても、 A は K_A に埋め込むことができている、その誤差が制御可能なものは十分に良い構造を持つに違いない、ということであると考えられる。

一方、2019 年には別の視点による Gorenstein 性の一般化概念が J. Herzog, 日比孝之, D. I. Stamate [9] によって提示されている。定義を述べるためにひとつ記号を準備する。可換環 A 上の加群 M に対し

$$\mathrm{tr}_A(M) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)} \mathrm{Im} f$$

と定め、 M のトレースと呼ぶ。もちろん $\mathrm{tr}_A(A) = A$ であるので、Cohen-Macaulay 局所環 A が Gorenstein であることと $\mathrm{tr}_A(K_A) = A$ であることは同値である。

定義 4.10 ([9]). (A, \mathfrak{m}) を Cohen-Macaulay 局所環とする。 A が nearly Gorenstein であるとは、 $\mathrm{tr}_A(K_A) \supseteq \mathfrak{m}$ が成り立つことをいう。

Nearly Gorenstein 性も 1 次元、特に数値半群環に対する考察を基盤としながら活発な議論が開始されつつある。例えば、数値半群環 $k[[H]]$ の nearly Gorenstein 性を $\mathrm{PF}(H)$ によって特徴づける以下の結果が知られている。

命題 4.11 ([13]). $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ を数値半群とし、 $\mathrm{PF}(H) = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r\}$ 。このとき、 $k[[H]]$ が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は、任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $1 \leq j \leq r$ が存在して、いかなる $1 \leq k \leq r$ に対しても $a_i + \alpha_j - \alpha_k \in H$ が成り立つことをいう。

Almost Gorenstein 性と nearly Gorenstein 性の関係性に関しては、以下が Herzog-Hibi-Stamate [9] によって提示されている。

命題 4.12 ([9]). (A, \mathfrak{m}) を Cohen-Macaulay 局所環とし、 $d = \dim A$ とする。

- (1) $d = 1$ のとき、 A が almost Gorenstein なら A は nearly Gorenstein である。
- (2) A が極小重複度を持つとき、 A が nearly Gorenstein なら A は almost Gorenstein である。

注 4.13. 講演の際、(2) は逆の主張が正しいと述べてしまった。上記が正しい主張であるので、この場を借りてお詫びして訂正したい。

例 4.14. 例 2.4 の記号のもとで、以下が正しい。

- (1) $k[[H_1]]$ は Gorenstein 環である。
- (2) $k[[H_2]]$ は Gorenstein でない almost Gorenstein 環である。

(3) $k[[H_3]]$ は almost Gorenstein でない nearly Gorenstein 環である。

(4) $k[[H_4]]$ は nearly Gorenstein でない。

Almost Gorenstein 性と nearly Gorenstein 性はどちらも、正準加群 K_A を指標として Gorenstein 性との差異を測り、Gorenstein に次ぐ良い構造とは何かを探る試みであるという共通点を持つ。数値半群環に限れば、 $\text{PF}(H)$ の言葉で対比をすることが可能ではあるが、一般の場合には解析のためのツールが若干異なっており、これらの性質を同時に取り扱うことには困難が生じているように執筆者は感じている。

5 2次小行列式で定まる環の nearly Gorenstein 性と almost Gorenstein 性

1次元の環に関しては、almost Gorenstein 性が nearly Gorenstein 性を導く。それでは、これらの差はどのような部分に見られるのだろうか。この間を探ることを目指し、以下のような状況設定のもとで検討したい。

設定 5.1. $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ を数値半群とし、 $A = k[[H]]$ とする。 A の定義イデアルが

$$I_H = I_2 \begin{pmatrix} X_2^{m_2} & X_3^{m_3} & \cdots & X_n^{m_n} & X_1^{m_1} \\ X_1^{\ell_1} & X_2^{\ell_2} & \cdots & X_{n-1}^{\ell_{n-1}} & X_n^{\ell_n} \end{pmatrix} \quad (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, m_1, m_2, \dots, m_n \geq 1)$$

という形をしていると仮定する。

このとき、以下が知られている。

定理 5.2 (cf. [6]). 設定 5.1 のもとで、 A が almost Gorenstein であるための必要十分条件は、以下のいずれかが成り立つことである。

(a) 任意の $1 \leq i \leq n$ に対し、 $m_i = 1$ である。

(b) 任意の $1 \leq i \leq n$ に対し、 $\ell_i = 1$ である。

命題 5.3 ([9]). 設定 5.1 のもとで、さらに $n = 3$ とする。このとき、 A が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は、任意の $1 \leq i \leq 3$ に対し、 $m_i = 1$ または $\ell_i = 1$ が成り立つことである。

執筆者は神代真也と中島大河との共同研究 [11] により、以下を得た。

定理 5.4 ([11]). 設定 5.1 のもとで、さらに A は almost Gorenstein ではないと仮定する。このとき次は同値である。

- (1) A は nearly Gorenstein である。
- (2) a_1, a_2, \dots, a_n の順序を並べ替えることで, $m_2 = m_3 = \dots = m_n = \ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_{n-2} = 1$ が成り立つようにできる。

注 5.5. 定理 5.4 は, 設定 5.1 のもとでは almost Gorenstein ではないような nearly Gorenstein 環はあまり多くないことを示唆している。実際, $\{\ell_i, m_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の中で almost Gorenstein 環であるために自由に取り得るパラメーターは n 個ある (定理 5.2 より) のに対し, almost Gorenstein ではない nearly Gorenstein 環であるためには 3 個しか自由にとることができない。

論文 [11] では, 同様の手法が適用できる状況を維持しつつ, 高次元化も検討している。 $I, J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ をとり, $S_J^I = k[[X_1, X_2, \dots, X_n, \{Y_i\}_{i \in I}, \{Z_j\}_{j \in J}]]$ を形式的ベキ級数環とする。また, $1 \leq r \leq n$ に対し

$$V_r = \begin{cases} X_r^{m_r} + Y_r & (r \in I) \\ X_r^{m_r} & (r \notin I) \end{cases} \quad U_r = \begin{cases} X_r^{\ell_r} + Z_r & (r \in J) \\ X_r^{\ell_r} & (r \notin J) \end{cases}$$

と定め,

$$D_J^I = \begin{pmatrix} V_2 & V_3 & \dots & V_n & V_1 \\ U_1 & U_2 & \dots & U_{n-1} & U_n \end{pmatrix}$$

とおく。このとき, 環 $A_J^I = S_J^I / I_2(D_J^I)$ は $p + q + 1$ 次元 Cohen-Macaulay 局所環である。但し, $\#I = p, \#J = q$ とする。容易に確かめられることであるが, A_J^I が nearly Gorenstein ならば $A = k[[H]]$ が nearly Gorenstein となる。つまり, A_J^I の nearly Gorenstein 性を議論する際は, a_1, a_2, \dots, a_n を上手く並べ替えて以下 (a), (b) のいずれかを仮定してよい。

- (a) $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$
- (b) $m_2 = m_3 = \dots = m_n = \ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_{n-2} = 1$

命題 5.6. $n = 3$ とする。次が成り立つ。

- (1) $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ のとき, R_J^I が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は, $I \cap J = \emptyset$ であって, 任意の $i \in I$ に対して $\ell_i = 1$ であることである。
- (2) $m_2 = m_3 = \ell_1 = 1$ のとき, R_J^I が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は, $I \cap J = \emptyset$ であって, $1 \notin J$ であり, さらに任意の $i \in I$ に対して $\ell_i = 1$ であることである。

以下, 整数 $z \in \mathbb{Z}$ に対し, $[z]$ によって $1 \leq [z] \leq n$ かつ $z \equiv [z] \pmod{n}$ を満たすような整数を表すことにする。

定理 5.7. $n \geq 4$ とする。 $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$ であるとき、次が成り立つ。

- (1) $1 \leq i \leq n$ について、 $R^{\{i\}}$ が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は $l_i = l_{[i+1]} = \cdots = l_{[i+n-3]} = 1$ である。
- (2) $1 \leq j \leq n$ について、 $R_{\{j\}}$ が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は $l_{[j+1]} = \cdots = l_{[j+n-3]} = 1$ である。
- (3) $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ について、 $R^{\{i_1, i_2\}}$ は nearly Gorenstein ではない。
- (4) $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ について、 $R_{\{j_1, j_2\}}$ が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は $n = 4$ かつ $(j_1, j_2) \in \{(1, 3), (2, 4)\}$ であって、さらに $l_{i+1} = l_{[j+1]} = 1$ であることである。
- (5) $1 \leq i, j \leq n$ について、 $R^{\{i\}}_{\{j\}}$ が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は $n = 4$ かつ $(i, j) \in \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$ であって、さらに $l_i = l_{[i+1]} = l_{[j+1]} = 1$ であることである。
- (6) $p + q \geq 3$ のとき、 R^I_J は nearly Gorenstein ではない。

定理 5.8. $n \geq 4$ とする。 $m_2 = m_3 = \cdots = m_n = l_1 = l_2 = \cdots = l_{n-2} = 1$ であるとき、次が成り立つ。

- (1) $1 \leq i \leq n$ について、 $R^{\{i\}}$ が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は $i = 1$ であるかまたは、 $i = n$ かつ $l_n = 1$ であることである。
- (2) $1 \leq j \leq n$ について、 $R_{\{j\}}$ が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は $j = n$ であるかまたは、 $j = n - 1$ かつ $l_n = 1$ であることである。
- (3) $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ について、 $R^{\{i_1, i_2\}}$ は nearly Gorenstein ではない。
- (4) $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$ について、 $R_{\{j_1, j_2\}}$ は nearly Gorenstein ではない。
- (5) $1 \leq i, j \leq n$ について、 $R^{\{i\}}_{\{j\}}$ が nearly Gorenstein であるための必要十分条件は $n = 4, i = 1, j = 3, l_4 = 1$ である。
- (6) $p + q \geq 3$ のとき、 R^I_J は nearly Gorenstein ではない。

以上の結果を総括して考えると、今回の形式では nearly Gorenstein 環はあまり高次元化できないことがわかる。実際、次のような状況となっている。

- $n = 3$ のとき、 A^I_J が nearly Gorenstein なら $\dim A^I_J \leq 4$ である。
- $n = 4$ のとき、 A^I_J が nearly Gorenstein なら $\dim A^I_J \leq 3$ であり、しかも $\dim A^I_J = 3$ となるような I, J は非常に限定的である。

- $n = 5$ のとき, A_J^I が nearly Gorenstein なら $\dim A_J^I \leq 2$ である。

前述の通り, nearly Gorenstein 性は Herzog-Hibi-Stamate [9] により提示されているが, これは 2019 年に出版されたばかりである。また, almost Gorenstein 環も最初の導入は 1997 年 [2] であるものの, 環論的な展開が広がりを見せ始めたのは 2013 年 [5] や 2014 年 [6] であり, 歴史はまだまだ浅い。これらの性質がどのような意味を持つのか, 本稿のタイトルの通り 1 次元解析を基盤としながら, これからの研究で解き明かしていきたい。

参考文献

- [1] V. Barucci, D. E. Dobbs, and M. Fontana, *Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analytically Irreducible Local Domains*, Mem. Amer. Math. Soc. (598), American Mathematical Society, 1997.
- [2] V. Barucci and R. Fröberg, *One-dimensional almost Gorenstein rings*, J. Algebra 188 (1997) 418–442.
- [3] H. Bresinsky, *Symmetric semigroups of integers generated by 4 elements*, Manuscripta Math. 17 (1975), 205–219.
- [4] S. Goto, D. V. Kien, N. Matsuoka, and H. L. Truong, *Pseudo-Frobenius numbers versus defining ideals in numerical semigroup rings*, J. Algebra 508 (2018), 1–15.
- [5] S. Goto, N. Matsuoka, and T. T. Phuong, *Almost Gorenstein rings*, J. Algebra 379 (2013), 355–381.
- [6] S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, *Almost Gorenstein rings - towards a theory of higher dimension*, J. Pure Appl. Algebra, 219 (2015), 2666–2712.
- [7] S. Goto and K. Watanabe, *On graded rings, I*, J. Math Soc. J. 30 (1978), 179–213.
- [8] J. Herzog, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. 3 (1970), 175–193.
- [9] J. Herzog, T. Hibi, and D. I. Stamate, *The trace of the canonical module*, Israel J. Math. 233 (2019), 133–165.
- [10] J. Komeda, *On the existence of Weierstrass points with a certain semigroup generated by 4 elements*, Tsukuba J. Math. 6 (1982), 237–270.

- [11] S. Kumashiro, N. Matsuoka, and T. Nakashima, *Nearly Gorenstein local rings defined by maximal minors of a $2 \times n$ matrix*, arXiv:2308.04234.
- [12] E. Kunz, *The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 748–751.
- [13] A. Moscariello and F. Strazzanti, *Nearly Gorenstein vs almost Gorenstein affine monomial curves*, Mediterr. J. Math. 18 (2021), 127.
- [14] H. Nari, *Symmetries on almost symmetric numerical semigroups*, Semigroup Forum 86 (2013), 140–154.
- [15] A. K. Roy, I. Sengupta, and G. Tripathi, *Minimal graded free resolutions for monomial curves in \mathbb{A}^4 defined by almost arithmetic sequences*, Comm. Algebra 45 (2017), 521–551.

Specht イデアルのグレブナー基底

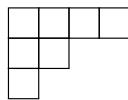
大杉英史 * (関西学院大学理学部)

概要

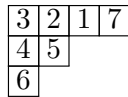
自然数 n の分割 λ を枠とする (ヤング) タブローに対して, シュペヒト多項式と呼ばれる多項式を対応させることができる. 分割 λ のシュペヒトイデアル (ガルニールイデアル) とは, λ を枠とするすべてのタブローのシュペヒト多項式で生成されるイデアルのことである. このシュペヒトイデアルは組合せ論的可換代数, 部分空間配置の組合せ論, グラフ理論など, 様々な分野において興味を持たれ, 研究されている. シュペヒトイデアルに関する特に重要な事実として, Haiman と Woo (unpublished work [6]) による, シュペヒトイデアルの被約性の証明, および, 普遍グレブナー基底と呼ばれる, 任意の単項式順序に関してグレブナー基底となる有限集合の構成が挙げられる. 本稿では, 上記の Haiman と Woo の結果の簡明な別証明 (村井聡氏, 柳川浩二氏との共同研究 [11]) や, シュペヒトイデアルのステイト多面体 (グレブナー扇を法扇として持つ多面体) の構成 (柳川浩二氏との共同研究 [12]) について紹介する.

1 シュペヒトイデアル

自然数 n の分割とは, 自然数の非増加列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ で $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = n$ をみたすものをいう. 自然数 n の分割全体を P_n で表す. n の分割に対して, ヤング図形を対応させることができる. 例えば, 7 の分割 $\lambda = (4, 2, 1)$ は, 以下のヤング図形で表される.



分割 $\lambda \in P_n$ を枠とする (ヤング) タブローとは, λ のヤング図形の各箱に, $\{1, 2, \dots, n\}$ の元を 1 つずつ書き入れたものをいう. 例えば, 以下は $\lambda = (4, 2, 1)$ を枠とするタブローである.



分割 λ を枠とするタブロー全体を $\text{Tab}(\lambda)$ とおく. タブロー $T \in \text{Tab}(\lambda)$ に対して,

- T が行標準であるとは, 各行の数字が左から右へ増加列となっているときにいう.
- T が列標準であるとは, 各列の数字が上から下へ増加列となっているときにいう.
- T が標準であるとは, T が列標準かつ行標準であるときにいう.

* ohsugi@kwansei.ac.jp

無限体 K 上の n 変数多項式環 $S = K[x_1, \dots, x_n]$ を考える. タブロー $T \in \text{Tab}(\lambda)$ に対して, シュペヒト多項式 $f_T \in S$ とは, i と j が T の同じ列にあり, j が i より下にあるようなすべての $x_i - x_j$ の積をいう. 分割 $\lambda \in P_n$ に対して,

$$I_\lambda := \langle f_T : T \in \text{Tab}(\lambda) \rangle \subset S$$

と定義し, λ を枠とするシュペヒトイデアルという.

例 1.1. タブロー $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 7 \\ \hline 4 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$ に対して, $f_T = (x_3 - x_4)(x_3 - x_6)(x_4 - x_6)(x_2 - x_5)$.

例 1.2. 分割 $\lambda = (3, 2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ に対して, I_λ の生成系は

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), \quad (x_1 - x_2)(x_3 - x_5), \quad (x_1 - x_2)(x_4 - x_5), \\ & (x_1 - x_3)(x_2 - x_4), \quad (x_1 - x_3)(x_2 - x_5), \quad (x_1 - x_3)(x_4 - x_5), \\ & (x_1 - x_4)(x_2 - x_3), \quad (x_1 - x_4)(x_2 - x_5), \quad (x_1 - x_4)(x_3 - x_5), \\ & (x_1 - x_5)(x_2 - x_3), \quad (x_1 - x_5)(x_2 - x_4), \quad (x_1 - x_5)(x_3 - x_4), \\ & (x_2 - x_3)(x_4 - x_5), \quad (x_2 - x_4)(x_3 - x_5), \quad (x_2 - x_5)(x_3 - x_4) \end{aligned}$$

であるが, 実際には (標準タブローに対応する) 下線の 5 個の多項式だけで生成できる.

シュペヒトイデアルは, 組合せ論的可換代数 [9, 13, 14, 15], 部分空間配置の代数・組合せ論 [1, 2, 3], グラフ理論 [5, 7, 8], 対称連立方程式 [10] など, 様々な観点から研究がなされ, 一般化 [4] も提案されている.

2 グレブナー基底入門

この章では, グレブナー基底に関する基礎的事項について説明する. 体 K 上の n 変数多項式環 $S := K[x_1, \dots, x_n]$ に属する単項式全体からなる集合上の全順序 $<$ が単項式順序であるとは,

- (i) 任意の単項式 $u \neq 1$ に対して, $1 < u$
- (ii) 任意の単項式 u, v, w に対して, 「 $u < v \Rightarrow uw < vw$ 」

をみたすときにいう. 2 変数以上の多項式環には, 無限個の単項式順序が存在するが, その中で重要な例をいくつか挙げる.

例 2.1 (辞書式順序 $(x_{i_1} > \dots > x_{i_n})$). まず, x_{i_1} に関して次数を比較して, 大きい方が大きい.

同じならば x_{i_2} に関して次数を比較して, 大きい方が大きい.

同じならば x_{i_3} に関して次数を比較して, 大きい方が大きい. . . .

例 2.2 (重み順序 $<_{\mathbf{w}}$). 非負ベクトル $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ と単項式順序 $<$ に対して,

$$\sum_{i=1}^n a_i w_i < \sum_{i=1}^n b_i w_i$$

または

$$\sum_{i=1}^n a_i w_i = \sum_{i=1}^n b_i w_i \text{ かつ } x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} < x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$$

をみたすとき, $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} <_{\mathbf{w}} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ と定義する. このとき, $<_{\mathbf{w}}$ は単項式順序である.

他に, 次数辞書式順序, 次数逆辞書式順序などが重要である. ここで, 多項式環 S の単項式順序 $<$ を 1 つ固定する. 0 でない多項式 $f \in S$ に対して, f に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のものを $\text{in}_{<}(f)$ で表す. また, イデアル $I \subset S$ に対して,

$$\text{in}_{<}(I) := \langle \text{in}_{<}(f) : 0 \neq f \in I \rangle$$

とおき, I のイニシャルイデアルと呼ぶ. 有限部分集合 $\{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ が $<$ に関する I のグレブナー基底であるとは, $\text{in}_{<}(I) = \langle \text{in}_{<}(g_1), \dots, \text{in}_{<}(g_t) \rangle$ が成り立つときにいう. 基本的な事実として

- グレブナー基底は必ず存在するが一意ではない.
- イデアル I のグレブナー基底は I を生成する.

が挙げられる. グレブナー基底にイデアルの元を有限個付け加えてもグレブナー基底となるが, そのような冗長な元を取り除いたとしても, グレブナー基底は一意には定まらない. 一意性を持たせるためには, さらに条件を追加する必要がある. イデアル $I \subset S$ のグレブナー基底 \mathcal{G} が被約であるとは, 以下の 2 条件が成り立つときにいう.

- 任意の $g \in \mathcal{G}$ はモニックである.
- 任意の $g \in \mathcal{G}$ に対して, g に現れるどの単項式も $\{\text{in}_{<}(g') : g \neq g' \in \mathcal{G}\}$ の元で割り切れない.

命題 2.3. イデアルと単項式順序を固定すると, 被約グレブナー基底は唯一つ存在する.

任意の単項式順序に関してイデアル $I \subset S$ のグレブナー基底になる有限集合を I の普遍グレブナー基底という. イデアル $I \subset S$ のイニシャルイデアルは, 高々有限個しか存在しないことが知られているので, 例えば, 以下の集合は I の普遍グレブナー基底である.

$$\bigcup_{<: S \text{ の単項式順序}} \mathcal{G}_{<}$$

(ただし, $\mathcal{G}_{<}$ は $<$ に関する I の被約グレブナー基底を表す.) ベクトル $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} < x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \stackrel{\text{def}}{\iff} \sum_{i=1}^n a_i w_i < \sum_{i=1}^n b_i w_i$$

と定義すると, S の単項式全体上の半順序となる.

- $0 \neq f \in S$ に対して、この順序で最大となる項の和を f のイニシャルフォームといい、 $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$ と表す。
- 斉次イデアル $I \subset S$ に対して、 $\text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \langle \text{in}_{\mathbf{w}}(f) : 0 \neq f \in I \rangle$ を I のイニシャルフォームイデアルという。
- I は斉次なので、任意の $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\text{in}_{\mathbf{w}_1}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}_2}(I)$ をみたす $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ が存在する。

斉次イデアル $I \subset S$ と、ベクトル $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$C[\mathbf{w}] := \{\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(I) = \text{in}_{\mathbf{w}'}(I)\}$$

$$\text{GF}(I) := \{\overline{C[\mathbf{w}]} : \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n\}$$

と定義する。ただし、 $\overline{C[\mathbf{w}]}$ は $C[\mathbf{w}]$ の閉包である。このとき、 $\text{GF}(I)$ は扇（原点からの錐からなる多面体的複体）であり、 I のグレブナー扇と呼ばれる。斉次イデアル $I \subset S$ に対して、 $\text{GF}(I)$ は完備である、すなわち、

$$\bigcup_{C \in \text{GF}(I)} C = \mathbb{R}^n$$

が成り立つ。凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ の法扇とは P の双対をいう。凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ が I のステイト多面体であるとは、 $\text{GF}(I)$ が P の法扇であるときにいう。以下のような1対1対応がある：

$$I \text{ のイニシャルイデアル} \longleftrightarrow I \text{ のステイト多面体の頂点}$$

3 被約性と普遍グレブナー基底

分割のシュペヒトイデアルを一般化し、フィルター \mathcal{F} のシュペヒトイデアルを定義する。分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_l) \in P_n$ が

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geq \mu_1 + \dots + \mu_k \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, \min\{m, l\}$$

をみたすとき、 $\lambda \succeq \mu$ と表す。これを支配的順序という。部分集合 $\mathcal{F} \subset P_n$ が P_n の lower filter であるとは、 $\lambda \in \mathcal{F}$ と $\mu \in P_n$ が $\mu \preceq \lambda$ をみたすならば $\mu \in \mathcal{F}$ が成り立つときにいう。また、 $\mathcal{F} \subset P_n$ が P_n の upper filter であるとは、 $\lambda \in \mathcal{F}$ と $\mu \in P_n$ が $\mu \succeq \lambda$ をみたすならば $\mu \in \mathcal{F}$ が成り立つときにいう。 P_n の lower filter \mathcal{F} に対して、

$$I_{\mathcal{F}} := \sum_{\lambda \in \mathcal{F}} I_{\lambda} \subset S$$

と定義し、 \mathcal{F} のシュペヒトイデアルという。

事実 3.1. $\mu \preceq \lambda$ ならば、 $I_{\mu} \subset I_{\lambda}$ である。

P_n の lower filter として $\mathcal{F} = \{\mu \in P_n : \mu \preceq \lambda\}$ を考えれば、 $I_{\lambda} = I_{\mathcal{F}}$ が成り立つので、フィルターのシュペヒトイデアルは分割のシュペヒトイデアルを一般化した概念である。

対称群 \mathfrak{S}_n の K^n への自然な作用を考える. 各点 $\mathbf{a} \in K^n$ に対する, この作用に関する \mathfrak{S}_n の固定化部分群は, ある $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) \in P_n$ について, $\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu_r}$ と同型となる. この分割 μ を \mathbf{a} の軌道型といい, $\Lambda(\mathbf{a})$ で表す.

例 3.2. $\Lambda((4, 0, 2, 4, 2, 4)) = (3, 2, 1)$.

分割 $\mu \in P_n$ に対して, $H_\mu = \{\mathbf{a} \in K^n : \Lambda(\mathbf{a}) = \mu\}$ とおく. 部分集合 $\mathcal{G} \subset P_n$ に対して,

$$J_{\mathcal{G}} = \left\{ f \in S : \text{任意の } \mathbf{a} \in \bigcup_{\mu \in \mathcal{G}} H_\mu \text{ に対して } f(\mathbf{a}) = 0 \right\}$$

と定義する. (注: これは被約イデアルである.)

補題 3.3. $\lambda \in P_n, T \in \text{Tab}(\lambda)$ とする. このとき, 任意の $\mathbf{a} \in H_\mu$ ($\mu \not\leq \lambda$) に対して, $f_T(\mathbf{a}) = 0$.

定理 3.4 (Haiman–Woo [6]). 空でない lower filter $\mathcal{F} \subset P_n$ に対して,

$$G_{\mathcal{F}} := \left\{ f_T : T \in \bigcup_{\lambda \in \mathcal{F}} \text{Tab}(\lambda) \right\}$$

とおくと, 以下が成り立つ.

- (i) $I_{\mathcal{F}} = J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ が成り立つ. 特に, $I_{\mathcal{F}}$ は被約である.
- (ii) $G_{\mathcal{F}}$ は $I_{\mathcal{F}}$ の普遍グレブナー基底である.

注意 3.5. $I_{\mathcal{F}} = \langle G_{\mathcal{F}} \rangle$ である. また, 補題 3.3 より, $G_{\mathcal{F}} \subset J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ が従う.

4 簡明な別証明

ここでは, [11] で与えた Haiman–Woo の結果の簡明な別証明について紹介する. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in P_n, 0 < k \in \mathbb{Z}$ に対して, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k + 1, \dots, \lambda_m)$ の成分を大きい順に並べ替えて得られる $n + 1$ の分割を $\lambda + \langle k \rangle$ で表す. (ただし, $k > m$ のときは, $\lambda + \langle k \rangle = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, 1)$ とする.)

例 4.1. $(4, 2, 2, 1) + \langle 3 \rangle = (4, 3, 2, 1)$. $(4, 2, 2, 1) + \langle 5 \rangle = (4, 2, 2, 1, 1)$.

補題 4.2. P_n の upper filter \mathcal{F} と, $\lambda \in P_{n-1}$ に対して,

$$\lambda + \langle j \rangle \in \mathcal{F} \Rightarrow \lambda + \langle i \rangle \in \mathcal{F} \text{ for all } i \leq j$$

証明. 任意の $\lambda \in P_{n-1}$ に対して, 「 $i \leq j \implies \lambda + \langle j \rangle \leq \lambda + \langle i \rangle$ 」であることから直ちに従う. \square

$\mathcal{F} \subset P_n$ に対して, $\mathcal{F}_k := \{\mu \in P_{n-1} : \mu + \langle k \rangle \in \mathcal{F}\}$ と定義する. もし, \mathcal{F} が upper (lower) filter ならば, \mathcal{F}_k もそうである.

例 4.3. $\mathcal{F} = \{(4, 1, 1), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6)\}$ に対して, $\mathcal{F}_1 = \{(3, 1, 1), (3, 2), (4, 1), (5)\}$, $\mathcal{F}_2 = \{(3, 2), (4, 1), (5)\}$, $\mathcal{F}_k = \{(4, 1), (5)\}$ for all $k \geq 3$.

補題 4.4. Upper filter $\mathcal{F} \subset P_n$ に対して,

$$f = g_d x_n^d + \cdots + g_1 x_n + g_0 \in J_{\mathcal{F}}$$

とする. ただし, $g_0, \dots, g_d \in K[x_1, \dots, x_{n-1}]$ かつ $g_d \neq 0$ である. このとき, $g_0, \dots, g_d \in J_{\mathcal{F}_{d+1}}$.

証明. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathcal{F}_{d+1}$, $\mathbf{a} \in H_{\lambda}$ とする. $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ は相異なり, 各 $\alpha_i \in K$ は \mathbf{a} に λ_i 回現れるとする. 前の補題より, 任意の $i = 1, \dots, d+1$ に対して, $\lambda + \langle i \rangle \in \mathcal{F}$ が成り立つ.

Case 1. ($m < d+1$ のとき) $\lambda + \langle d+1 \rangle = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, 1)$ なので, 各 $\alpha \in K \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ に対して, $(\mathbf{a}, \alpha) \in H_{\lambda + \langle d+1 \rangle}$. ゆえに, $f(\mathbf{a}, \alpha) = 0$.

Case 2. ($m \geq d+1$ のとき) $i = 1, 2, \dots, d+1$ に対して, $(\mathbf{a}, \alpha_i) \in H_{\lambda + \langle i \rangle}$ より, $f(\mathbf{a}, \alpha_i) = 0$.

いずれの場合も, 次数 d の多項式

$$f(\mathbf{a}, x_n) = \sum_{k=0}^d g_k(\mathbf{a}) x_n^k \in K[x_n]$$

が少なくとも $d+1$ 個の根を持つので, これは $K[x_n]$ のゼロ多項式である. ゆえに, 各 i に対して, $g_i(\mathbf{a}) = 0$ が成り立つ. よって, 各 i に対して, $g_i \in J_{\mathcal{F}_{d+1}}$ が成り立つ. \square

補題 4.5. $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset P_n$ を lower filter とすると, 辞書式順序 $<_{\text{lex}}$ ($x_1 < \cdots < x_n$) に関して,

$$G_{\mathcal{F}} = \left\{ f_T : T \in \bigcup_{\lambda \in \mathcal{F}} \text{Tab}(\lambda) \right\}$$

は, $J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ のグレブナー基底である.

補題 4.5 の証明のポイント

- $\mathcal{F}' = P_n \setminus \mathcal{F}$ とおくと, 補題 3.3 より, $G_{\mathcal{F}} \subset J_{\mathcal{F}'}$.
- あとは, 任意の $f \in J_{\mathcal{F}'}$ に対して, $\text{in}(f_{T'}) \mid \text{in}(f)$ をみたす $T' \in \text{Tab}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathcal{F}$) が存在することを示せばよい.
- T が列標準であり, 番号 i が T の d_i 番目の行にあるならば, $\text{in}(f_T) = \prod_{i=1}^n x_i^{d_i-1}$.
- n に関する帰納法で証明する. ($n = 1$ のときは自明.)

$f = g_d x_n^d + \cdots + g_1 x_n + g_0 \in J_{\mathcal{F}'}$ とおく. ただし, $g_0, \dots, g_d \in K[x_1, \dots, x_{n-1}]$ かつ $g_d \neq 0$ である. 補題 4.4 より, $g_d \in J_{\mathcal{F}'_{d+1}}$ である. また, 帰納法の仮定から, $G_{P_{n-1} \setminus \mathcal{F}'_{d+1}}$ は $J_{\mathcal{F}'_{d+1}}$ のグレブナー基底である. ゆえに, $\text{in}(f_T) \mid \text{in}(g_d)$ を満たす $T \in \text{Tab}(\mu)$, $\mu \in P_{n-1} \setminus \mathcal{F}'_{d+1}$ が存在する. (注: $g_d \neq 0$ かつ $J_{P_{n-1}} = \{0\}$ より, $\mathcal{F}'_{d+1} \neq P_{n-1}$.) $\lambda = \mu + \langle d+1 \rangle$ とおく. $1, 2, \dots, n-1$ が T と同じ位置にある $T' \in \text{Tab}(\lambda)$ を考える. $\mu \notin \mathcal{F}'_{d+1}$ より $\lambda \in \mathcal{F}$ であるから, $f_{T'} \in G_{\mathcal{F}}$

が成り立つ。 T における n の位置は、第 $(p+1)$ 行 ($p \leq d$) であるから、 $\text{in}(f_{T'}) = x_n^p \text{in}(f_T)$ は $\text{in}(f) = x_n^d \text{in}(g_d)$ を割り切る。ゆえに $G_{\mathcal{F}}$ は $J_{\mathcal{F}'}$ のグレブナー基底である。

Haiman–Woo の定理の別証明 ([11]). 集合 $G_{\mathcal{F}}$ は $J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ のグレブナー基底であるから、 $I_{\mathcal{F}} = \langle G_{\mathcal{F}} \rangle = J_{P_n \setminus \mathcal{F}}$ が成り立つ。特に、 $I_{\mathcal{F}}$ は被約であり、 $G_{\mathcal{F}}$ は辞書式順序 $(x_1 < \dots < x_n)$ に関して、 $I_{\mathcal{F}}$ のグレブナー基底である。任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、 $G_{\mathcal{F}} = \{\sigma f : f \in G_{\mathcal{F}}\}$ であるから、 $G_{\mathcal{F}}$ は辞書式順序 $(x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(n)})$ に関して、 $I_{\mathcal{F}}$ のグレブナー基底である。 $<$ を任意の単項式順序とする。 $<$ に関して $x_{i_1} < \dots < x_{i_n}$ が成り立つとする。 f_T は 1 次式の積であるから、 $\text{in}_{<}(f_T) = \text{in}_{<'}(f_T)$ が成り立つ。ただし、 $<'$ は辞書式順序 $(x_{i_1} < \dots < x_{i_n})$ である。ゆえに、 $G_{\mathcal{F}}$ は任意の単項式順序 $<$ に関して、 $I_{\mathcal{F}}$ のグレブナー基底である。 \square

注意 4.6. 定理 3.4 (2) の主張は有限体 K についても成り立つ。実際、 K が有限体でも、1 変数有理関数体 $K(t)$ は無限体であるから、 $K(t)$ が係数体なら定理 3.4 が成り立つ。各 f_T の係数は ± 1 であるから、 $G_{\mathcal{F}}$ にブッフバーガーの判定法を用いた場合、変数 t は決して現れない。

5 ステイト多面体

ベクトル $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\{(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) \in \mathbb{R}^n : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

の凸閉包を $P_n(u_1, \dots, u_n)$ で表す。特に、 $\Pi_n := P_n(1, 2, \dots, n)$ は n 次の置換多面体と呼ばれる。置換多面体 Π_n の法扇 Br_n は **braid 扇** と呼ばれる完備扇であり、超平面 $x_i - x_j = 0$ (for $\forall i \neq \forall j$) で与えられる。 Br_n の各極大錐は、ある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : w_{\sigma(1)} \leq w_{\sigma(2)} \leq \dots \leq w_{\sigma(n)}\}$$

と表せる。各 $0 \leq k < n$ に対して、

$$\Pi_{n,k} := P_n(1, 2, \dots, n-k-1, n-k, \dots, n-k)$$

とおく。このとき、 $\Pi_{n,k}$ の法扇の各極大錐は、ある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、

$$C_{\sigma,k} := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : w_{\sigma(1)} \leq w_{\sigma(2)} \leq \dots \leq w_{\sigma(n-k)}, \dots, w_{\sigma(n)}\}$$

と表せる。**一般化置換多面体** とは、辺の方向を維持しながら、置換多面体の頂点を移動して得られる多面体である。

補題 5.1. 各 $\Pi_{n,k}$ は一般化置換多面体である。

定理 5.2 ([12]). n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ($\lambda_m > 0$) に対して、

$$k := \min\{\lambda_{i-1} - \lambda_i : i = 2, 3, \dots, m\}$$

とおく。このとき、以下が成り立つ。

- (i) I_λ はちょうど $n!/(k+1)!$ 個のイニシャルイデアルを持つ.
- (ii) $\Pi_{n,k}$ は I_λ のステイト多面体である.
- (iii) I_λ のステイト多面体が (通常の) 置換多面体であることと, ある $i \leq m$ に対して, $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ が成り立つことは同値である.

参考文献

- [1] C. Berkesch Zamaere, S. Griffeth, and S.V. Sam, Jack polynomials as fractional quantum Hall states and the Betti numbers of the $(k+1)$ -equals ideal, *Comm. Math. Phys.* **330** (2014), 415–434.
- [2] A. Björner, I. Peeva and J. Sidman, Subspace arrangements defined by products of linear forms, *J. London Math. Soc.* (2) **71** (2005), 273–288.
- [3] A. Brookner, D. Corwin, P. Etingof, and S.V. Sam, On Cohen–Macaulayness of S_n -invariant subspace arrangements, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2016), 2104–2126.
- [4] S. Debus, P. Moustrou, C. Riener, H. Verdure, The poset of Specht ideals for hyperoctahedral groups, [arXiv:2206.08925](https://arxiv.org/abs/2206.08925)
- [5] J. de Loera, Gröbner bases and graph colorings, *Beiträge Algebra Geom.* **36** (1995), 89–96.
- [6] M. Haiman and A. Woo, Garnir modules, Springer fibers, and Ellingsrud–Strømme cells on the Hilbert Scheme of points, manuscript.
- [7] S.-Y.R. Li and W.C.W. Li, Independence numbers of graphs and generators of ideals, *Combinatorica* **1** (1981) 55–61.
- [8] L. Lovász, Stable sets and polynomials, *Discrete Math.* **124** (1994), 137–153 .
- [9] C. McDaniel and J. Watanabe, Principal radical systems, Lefschetz properties and perfection of Specht Ideals of two-rowed partitions, *Nagoya Math. J.* **247** (2022), 690–730.
- [10] P. Moustrou, C. Riener and H. Verdure, Symmetric ideals, Specht polynomials and solutions to symmetric systems of equations, *J. Symbolic Comput.* **107** (2021), 106–121.
- [11] S. Murai, H. Ohsugi and K. Yanagawa, A note on the reducedness and Gröbner bases of Specht ideals, *Comm. Algebra* **50** (2022), 5430–5434.
- [12] H. Ohsugi and K. Yanagawa, Gröbner fans of Specht ideals, [arXiv:2201.05325](https://arxiv.org/abs/2201.05325)
- [13] X. Ren and K. Yanagawa, Gröbner bases of radical Li-Li type ideals associated with partitions, *SIAM J. Discrete Math.* **37** (2023) 2382–2396.
- [14] K. Shibata and K. Yanagawa, Regularity of Cohen-Macaulay Specht ideals, *J. Algebra* **582** (2021), 73–87.
- [15] K. Shibata and K. Yanagawa, Elementary construction of the minimal free resolution of the Specht ideal of shape $(n-d, d)$, *J. Algebra* **634** (2023), 563–584.

正標数多重ポリログ関数の解析接続

古庄 英和

正標数関数体の世界においてポリログ関数や多重ポリログ関数の類似が [AT90, C] により考察されている。これらの関数は冪級数で定義されており、その級数の収束半径内でしか関数として定義されていない。これらの関数を Artin-Schreier 方程式を用いて全空間に解析接続していく [F22] の手法を説明する。

1. 標数 0 のポリログ関数の復習

複素数体 \mathbb{C} の場合と p -進 (p : 素数) の場合のポリログ関数の解析接続について手短かに復習する。

1.1. \mathbb{C} の場合. $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ とする。ポリログ関数 $\text{Li}_n(z)$ とは以下の冪級数で定義される複素関数である：

$$\text{Li}_n(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$$

この級数は $z \in \mathbb{C}$ が $|z| < 1$ のとき絶対収束するが以下の逐次微分方程式

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{Li}_{n-1}(z) & (n \geq 1) \\ \frac{1}{1-z} & (n = 1) \end{cases}$$

を反復積分を用いて逆算することにより半径 1 の開円盤を超えてポリログ関数の解析接続ができる。詳しくには $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の普遍被覆まで定義域を広げられて、これよりポリログ関数 $\text{Li}_n(z)$ の枝が生じるのである。また、特に $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ であることにも注意しておく。

1.2. p -進の場合. $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_p$ とする (\mathbb{C}_p は有理数体 \mathbb{Q} の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ の p -進距離による完備化のことである)。 p -進ポリログ関数は上の $\text{Li}_n(z)$ と同じ冪級数で定義される p -進関数であり、この級数は半径 1 の p -進開円盤内で収束する。 p -進ポリログ関数も上と同じ逐次微分方程式を満たしており、これを用いて半径 1 の p -進開円盤を超えての“解析接続”ができる。ここで使われるのは Coleman の p -進反復積分論 ([Co]) であり、定義域は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{1, \infty\}$ まで広げられる。そもそもこの Coleman

Date: 2023 年 12 月 10 日.

2023 年度代数学シンポジウム報告集原稿.

の p -進反復積分論は p -進対数 $\log : \mathbb{C}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^+$ の枝の取り方 (即ち、値 $\log(p) \in \mathbb{C}_p$ の決め方) に依存しているため、それに応じて解析接続された p -進ポリログ関数 $\text{Li}_n(z)$ も p -進対数の枝の取り方に応じて関数として変わっていくことを注意しておく (cf. [Co, F04])。

2. 正標数の場合

q を素数 p の冪, \mathbb{F}_q を位数 q の有限体, A を 1 変数多項式環 $\mathbb{F}_q[\theta]$, K を 1 変数有理関数体 $\mathbb{F}_q(\theta)$ (すなわち A の商体), K_∞ を $\mathbb{F}_q((\frac{1}{\theta}))$ (K の無限素点 ∞ の定める距離 $|\cdot|_\infty$ による完備化), \mathbb{C}_∞ を K_∞ の代数閉包 \bar{K}_∞ の無限素点による完備化とする。

2.1. ポリログ関数. $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_\infty$ とする。**Carlitz ポリログ関数**とは [AT90] で考察されている正標数の世界でのポリログ関数の類似物であり以下の冪級数で定義される:

$$\text{Li}_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{q^k}}{(L_k)^n}$$

(ただし $L_k := (\theta - \theta^q) \cdots (\theta - \theta^{q^k}) \in A$ である。) この冪級数は開単位円盤を含む領域 $D_n := \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid |z|_\infty < |\theta|_\infty^{\frac{nq}{q-1}}\}$ で収束する。

$n \in \mathbb{N}$, $Z \in \mathbb{T}$ とする。ここで \mathbb{T} とは Tate 代数、 $|t|_\infty \leq 1$ で収束する形式的冪級数 $f = \sum a_i t^i \in \mathbb{C}_\infty[[t]]$ 全体のなす代数に Gauss ノルム $\|f\|_\infty := \max_i \{|a_i|_\infty\}$ を入れたノルム付き代数のことである。[P, C] で考察されているいわゆる t -motivic **ポリログ関数**は以下の冪級数で定義される:

$$\mathfrak{Li}_n(Z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{(k)}}{(\mathbb{L}_k)^n}$$

(ここで $\mathbb{L}_k = (t - \theta^q) \cdots (t - \theta^{q^k}) \in K[t]$ とおいている。また $k \in \mathbb{Z}$, $f = \sum_i a_i t^i$ に対して Frobenius 捻り $f^{(k)}$ は $f^{(k)} := \sum_i a_i^{q^k} t^i$ で定義される。) この冪級数は $\mathbb{D}_n := \{Z \in \mathbb{T} \mid \|Z\|_\infty < |\theta|_\infty^{\frac{nq}{q-1}}\}$ 内で収束する。特に $Z = z \in D_n \subset \mathbb{C}_\infty$ のとき $t = \theta$ を代入すると

$$\mathfrak{Li}_n(z)|_{t=\theta} = \text{Li}_n(z)$$

となることに注意する。

2.2. 解析接続の第一ステップ. $n = 0$ の場合の t -motivic ポリログ関数

$$\mathfrak{Li}_0(Z) := \sum_{k=0}^{\infty} Z^{(k)} \quad (Z \in \mathbb{D}_0)$$

を考える。この関数は $Z \in \mathbb{D}_0$ に対して以下の Artin-Schreier 方程式を満たすことに注目する：

$$\mathfrak{L}i_0(Z) - \mathfrak{L}i_0(Z)^{(1)} = Z$$

これを受け $\mathbb{F}_q[t]$ -線型写像

$$\wp : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}; \quad f \mapsto f - f^{(1)}$$

を考える。この写像 \wp は全射でありかつ $\ker \wp = \mathbb{F}_q[t]$ であることに留意する。これより、本来 $\mathfrak{L}i_0(Z)$ は $Z \in \mathbb{D}_0$ に対して定義されていたが以下のようにして (値域は $\mathbb{T}/\mathbb{F}_q[t]$ になってしまうが) 定義域を \mathbb{T} までに広げられる：

$$\mathfrak{L}i_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/\mathbb{F}_q[t]; \quad Z \mapsto \wp^{-1}(Z).$$

また $\mathbb{T}_\infty (\subset \mathbb{T})$ を収束半径無限大の冪級数のなす代数とすると、そこへの制限は

$$\mathfrak{L}i_0|_{\mathbb{T}_\infty} : \mathbb{T}_\infty \rightarrow \mathbb{T}_\infty/\mathbb{F}_q[t]$$

を定める。

2.3. 解析接続の第二ステップ. 以下の冪級数

$$\Omega = \Omega(t) := (-\theta)^{\frac{-q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta^{q^i}}\right) \in \mathbb{C}_\infty[[t]]$$

が [AT90, T] において考察されている。この冪級数は \mathbb{T}_∞ に属しており

$$\Omega^{(-1)}(t) = (t - \theta)\Omega(t)$$

を満たしている。特殊値 $\tilde{\pi} := \frac{1}{\Omega(\theta)} \in \mathbb{C}_\infty$ は Carlitz 加群の周期を与え $2\pi\sqrt{-1}$ の正標数類似物と考えられている。 $Z \in \mathbb{D}_n$ のときに

$$\mathfrak{L}i_n(Z) = \Omega^{-n} \cdot \mathfrak{L}i_0(\Omega^n Z)$$

が成り立つことに着目する。本来 $\mathfrak{L}i_n(Z)$ は $Z \in \mathbb{D}_n$ に対して定義されていたが以下のようにして定義域を \mathbb{T} までに広げることができる：

$$\mathfrak{L}i_n : \mathbb{T} \rightarrow \Omega^{-n}\mathbb{T}/\Omega^{-n}\mathbb{F}_q[t]; \quad Z \mapsto \Omega^{-n} \mathfrak{L}i_0(\Omega^n Z).$$

特に \mathbb{T}_∞ への制限は

$$\mathfrak{L}i_n : \mathbb{T}_\infty \rightarrow \Omega^{-n}\mathbb{T}_\infty/\Omega^{-n}\mathbb{F}_q[t]$$

を定める。これに自然な埋め込み $\mathbb{C}_\infty \hookrightarrow \mathbb{T}_\infty$ と特殊化写像 $\mathbb{T}_\infty/\Omega^{-n}\mathbb{F}_q[t] \rightarrow \mathbb{C}_\infty/\tilde{\pi}^n A$ を繋げることにより

$$\vec{\text{Li}}_n : \mathbb{C}_\infty \hookrightarrow \mathbb{T}_\infty \rightarrow \Omega^{-n}\mathbb{T}_\infty/\Omega^{-n}\mathbb{F}_q[t] \rightarrow \mathbb{C}_\infty/\tilde{\pi}^n A$$

が定まる。これが $\text{Li}_n(z)$ の解析接続である。

Theorem 1 ([F22]). $\vec{\text{Li}}_n$ は局所解析的であり、 $z \in \mathbb{D}_n$ のとき

$$\vec{\text{Li}}_n(z) \equiv \text{Li}_n(z) \pmod{\tilde{\pi}^n A}$$

が成り立つ。

各 $z \in \mathbb{C}_\infty$ に対して $\vec{\text{Li}}_n(z) \in \mathbb{C}_\infty/\tilde{\pi}^n A$ の \mathbb{C}_∞ への持ち上げ $\text{Li}_n^o(z)$ を $\vec{\text{Li}}_n(z)$ の枝と呼び、また $\tilde{\pi}^n A$ を $\vec{\text{Li}}_n(z)$ のモノドロミー加群と呼ぶことにする。

\mathbb{C} の場合では $\text{Li}_n^o(z)$ と $\text{Li}_n^{o'}(z)$ を複素ポリログ関数 $\text{Li}_n(z)$ の二つの枝とした時、この二つの枝の差は

$$\text{Li}_n^o(z) - \text{Li}_n^{o'}(z) = \sum_{p+q+r=n} c_{p,q,r} (2\pi\sqrt{-1})^p \zeta(q) (\log z)^r \quad (c_{p,q,r} \in \mathbb{Q})$$

とかけるので正標数の場合では少々状況が異なることが観察される。

2.4. 多重ポリログ関数. $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}_\infty$ とする。[C, CM] では Carlitz ポリログ関数の多重化である以下の冪級数で定義される多変数関数が考察されている：

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}(z_1, \dots, z_d) = \sum_{0 \leq k_1 < \dots < k_d} \frac{z_1^{q^{k_1}} \cdots z_d^{q^{k_d}}}{L_{k_1}^{n_1} \cdots L_{k_d}^{n_d}}$$

この冪級数は

$$\mathbb{D}_{n_1, \dots, n_d} = \left\{ (z_i) \in \mathbb{C}_\infty^d \mid |z_1/\theta^{\frac{qn_1}{q-1}}|_q^{i_1} \cdots |z_d/\theta^{\frac{qn_d}{q-1}}|_q^{i_d} \rightarrow 0 \ (0 \leq i_1 < \dots < i_d \rightarrow \infty) \right\}$$

内で収束する。上で説明した Carlitz ポリログ関数の解析接続法と同様の議論を行うことで Carlitz 多重ポリログ関数は (1 変数関数として) 解析接続が行える：

Theorem 2 ([F22]). $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$ とする。 $z_1, \dots, z_{d-1} \in \mathbb{C}_\infty$ を固定する。局所解析的な \mathbb{F}_q -線型写像

$$\vec{\text{Li}}_{n_1, \dots, n_d}(z_1, \dots, z_{d-1}, -) : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty^d / M_{n_1, \dots, n_d}^{z_1, \dots, z_{d-1}}$$

で $(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{D}_{n_1, \dots, n_d}$ のとき

$$\vec{\text{Li}}_{n_1, \dots, n_d}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\pi}^{n_1 + \dots + n_{d-1}} \text{Li}_{n_d}(z_d) \\ \vdots \\ \tilde{\pi}^{n_1} \text{Li}_{n_2, \dots, n_d}(z_2, \dots, z_d) \\ \text{Li}_{n_1, \dots, n_d}(z_1, \dots, z_d) \end{pmatrix} \pmod{M_{n_1, \dots, n_d}^{z_1, \dots, z_{d-1}}}$$

がある。ここで $M_{n_1, \dots, n_d}^{z_1, \dots, z_{d-1}}$ は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\pi}^{n_d} M_{n_1, \dots, n_{d-1}}^{z_1, \dots, z_{d-2}} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \tilde{\pi}^{n_d} \begin{pmatrix} \tilde{\pi}^{n_1 + \dots + n_{d-1}} \\ \vec{\text{Li}}_{n_1, \dots, n_d}(z_1, \dots, z_{d-1}) \end{pmatrix}$$

で生成される \mathbb{C}_∞^d の部分 A -加群として帰納的に定義される。

$\vec{\text{Li}}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d) \in \mathbb{C}_{\infty}^d / M_{n_1, \dots, n_d}^{z_1, \dots, z_{d-1}}$ の \mathbb{C}_{∞}^d への持ち上げ
 $\vec{\text{Li}}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d) \in \mathbb{C}_{\infty}^d$ の最後の成分 $\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d)$
を $\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d)$ の枝と呼び $M_{n_1, \dots, n_d}^{z_1, \dots, z_{d-1}}$ をモノドロミー加群
と呼ぶ。

Carlitz 多重ポリログ関数のスター版

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\star}(z_1, \dots, z_d) = \sum_{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_d} \frac{z_1^{q^{k_1}} \cdots z_d^{q^{k_d}}}{L_{k_1}^{n_1} \cdots L_{k_d}^{n_d}}$$

に関しても同様の解析接続

$$\vec{\text{Li}}_{n_1, \dots, n_d}^{\star}(z_1, \dots, z_{d-1}, -) : \mathbb{C}_{\infty} \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}^d / M_{n_1, \dots, n_d}^{\star, z_1, \dots, z_{d-1}}$$

が [F22] で得られている。

2.5. **応用.** $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}_{\infty}$ とする。枝 $\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d)$
が Eulerian であるとは $\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d) / \tilde{\pi}^{n_1 + \dots + n_d} \in K$ が成り
立つこととする。この時以下が成り立つ:

Theorem 3 ([F22]). $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_d \in \bar{K}$ (\bar{K} は K の代数的
閉包) とする。このとき一つの枝 $\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d)$ が Eulerian
であると他の枝 $\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ'}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d)$ も Eulerian になる。

Proof. 以下の二つの議論を組み合わせるにより示せる。

- [CPY] と同様の議論を行うことにより $\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d)$
が Eulerian であると $\text{Li}_{n_1, \dots, n_i}^{\circ}(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i)$ ($1 \leq i < d$) も
Eulerian であることが従う。
- 二つの枝の差 $\text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ'}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d) - \text{Li}_{n_1, \dots, n_d}^{\circ}(z_1, \dots, z_{d-1}, z_d)$
はある $\alpha_i \in A$ ($0 \leq i < d$) を用いて $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \cdot \tilde{\pi}^{n_{i+1} + \dots + n_d} \text{Li}_{n_1, \dots, n_i}^{\circ}(z_1, \dots, z_i)$
とかける。

□

また上の定理は Carlitz 多重ポリログ関数のスター版でも同じ結果が
成り立つことも [F22] で示されている。

2023 年度代数学シンポジウムにて講演の機会をいただきました愛媛大学の山崎義徳氏及びこの原稿についてコメントをしてくださいました三柴善範氏に感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 JP18H01110, JP20H00115, JP21H00969, JP21H04430 の助成を受けております。

REFERENCES

- [AT90] Anderson, G.W. and Thakur, D.S., *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. **132** (1990), 159–191.
- [C] Chang, C.-Y., *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, Compositio Math. **150** (2014), 1789–1808.

- [CM] Chang, C.-Y. and Mishiba, Y., *On multiple polylogarithms in characteristic p : v -adic vanishing versus ∞ -adic Eulerianness*, Int. Math. Res. Notices. IMRN (2019), no. 3, 923–947.
- [CPY] Chang, C.-Y., Papanikolas, M., and Yu, J., *An effective criterion for Eulerian multizeta values in positive characteristic*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS)**21** (2019) , no. 2, 405–440.
- [Co] Coleman, R., *Dilogarithms, regulators and p -adic L -functions*, Invent. Math. **69** (1982), 171–208.
- [F04] Furusho, H., *p -adic multiple zeta values. I. p -adic multiple polylogarithms and the p -adic KZ equation*, Invent. Math. **155** (2004), 253–286.
- [F22] Furusho, H., *Analytic continuation of multiple polylogarithms in positive characteristic*, Tunisian. J. Math **4-3** (2022), 559-586.
- [P] Papanikolas, M. A., *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 123–174.
- [T] Thakur, D.S., *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email address: furusho@math.nagoya-u.ac.jp

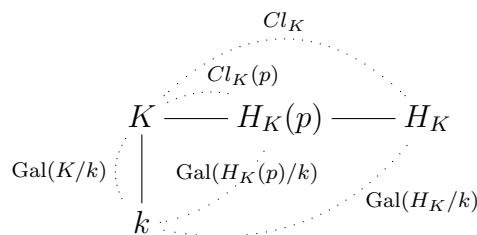
代数体の擬馴分岐副 p ガロア拡大について*

水澤 靖 (立教大学)

1 代数体

有限次代数体 K のイデアル類群 $Cl_K = I_K/P_K$ は, その整数環 \mathcal{O}_K の分数イデアル群 I_K の単項分数イデアル群 P_K による商である. そのアーベル群としての構造は, 代数的整数論の興味のひとつである. 定義のみから直接調べることも難しいが, 類体論によって, 代数体のガロア群として調べることができる: K の最大「不分岐」アーベル拡大体 H_K に対して, 同型 $Cl_K \simeq \text{Gal}(H_K/K)$ が定まる. この代数体 H_K は K の Hilbert 類体と呼ばれ, 次の性質をもつガロア拡大体として特徴付けられる: \mathcal{O}_K のどの素イデアル \mathfrak{p}_K に対しても, $\mathfrak{p}_K \in P_K$ であることと H_K/K で「完全分解」することは同値である.

さて, Cl_K がわからない状況では, H_K の存在はわかっているが, $\text{Gal}(H_K/K)$ もまだわかっていない状況である¹. 上の同型は, わからないものをわからないものに言い換えただけのように思われるかもしれないが, Cl_K へのガロア作用を通して調べるときに, 特に有効である. K/k がガロア拡大であるとき, H_K/k もガロア拡大である. このとき, $\text{Gal}(H_K/k)$ の内部自己同型 $x \mapsto \sigma x \sigma^{-1}$ によって $\sigma|_K \in \text{Gal}(K/k)$ を $x \in \text{Gal}(H_K/K)$ に作用させると, 同型 $Cl_K \simeq \text{Gal}(H_K/K)$ は $\text{Gal}(K/k)$ -加群としての同型である. よって Cl_K をガロア加群として調べることは, H_K/k がどのようなガロア拡大か (ガロア群はどのくらいの大きさで, どのような構造か) を調べることに同値になる. 特に, 特別な分岐条件をもつガロア拡大の大きさや構造を調べることに²に帰着される.



素数 p に対して, K 上 p 冪次である H_K の最大部分体 $H_K(p)$ は Hilbert p -類体と呼ばれる. Cl_K の p -Sylow 群を $Cl_K(p)$ と表せば, やはり同様にガロア加群として $Cl_K(p) \simeq$

*ここでの「擬馴分岐」は講演者があてがった造語であり, 一般にこのように使われている用語ではありません. 科研費 (課題番号 JP22K03268) の助成を受けています.

¹ Cl_K がわかったとしても, H_K を具体的に構成することは課題として残る. (類体の構成問題)

²分岐条件付きガロア逆問題に関連した問題とも言えるかもしれない.

$\text{Gal}(H_K(p)/K)$ である. さらに K/k が p 拡大 (p 冪次のガロア拡大) ならば, $H_K(p)/k$ も p 拡大である. 有限 p 群の理論も応用して, $Cl_K(p)$ とともに, その分岐条件付き p 拡大としての構造を調べたい.

2 分解群と惰性群

上で述べている「分岐・不分岐」は, 代数体の拡大における素イデアル分解 (と無限素点) の様子を表している. ガロア拡大では Hilbert 理論によって, 中間体における分解の様子を群論的に追いかけることができる.

L/K を代数体のガロア拡大とし, $G = \text{Gal}(L/K)$ とおく. \mathcal{O}_L の素イデアル \mathfrak{p}_L に対し, $\mathfrak{p}_K = \mathfrak{p}_L \cap \mathcal{O}_K$ は \mathcal{O}_K の素イデアルである. このとき $\mathfrak{p}_L | \mathfrak{p}_K$ と書く. \mathfrak{p}_L を動かさない $\sigma \in G$ は G の部分群を成し, L, K それぞれを \mathfrak{p}_L 進距離, \mathfrak{p}_K 進距離で完備化した局所体 $L_{\mathfrak{p}_L}/K_{\mathfrak{p}_K}$ のガロア群と同型になる:

$$Z = Z(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_K) = \{\sigma \in G \mid \mathfrak{p}_L^\sigma = \mathfrak{p}_L\} \simeq \text{Gal}(L_{\mathfrak{p}_L}/K_{\mathfrak{p}_K}).$$

$\sigma \in Z$ は有限体 $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L$ に作用するため, Z から有限体のガロア群への準同型が得られるが, それは全射となる. その核として, 惰性群が定まる:

$$T = T(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_K) = \text{Ker}(Z \rightarrow \text{Gal}((\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_L)/(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K))).$$

$\sigma \in G$ に対して $\sigma T \sigma^{-1} = T(\mathfrak{p}_L^\sigma/\mathfrak{p}_K)$, $\sigma Z \sigma^{-1} = Z(\mathfrak{p}_L^\sigma/\mathfrak{p}_K)$ である. Z, T の固定体 L^Z, L^T に対応して素イデアルの拡大列が得られ, 各中間体の整数環において次のように素イデアル分解する:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \mathfrak{p}_L & \\
 \left. \begin{array}{c} e \\ \left| \right. \\ T \\ \left| \right. \\ L^T \\ \left| \right. \\ f \\ \left| \right. \\ Z \\ \left| \right. \\ L^Z \\ \left| \right. \\ K \end{array} \right\} G & \begin{array}{l} \left| \right. \text{分岐} \\ \left| \right. \text{惰性} \\ \left| \right. \text{分解} \end{array} & \begin{array}{l} \mathfrak{p}_{L^T} \mathcal{O}_L = (\mathfrak{p}_L)^e \\ \mathfrak{p}_{L^Z} \mathcal{O}_{L^T} = \mathfrak{p}_{L^T} \\ Z \text{ が正規部分群なら } \mathfrak{p}_K \mathcal{O}_{L^Z} = \prod_{\bar{\sigma} \in G/Z} \mathfrak{p}_{L^Z}^{\bar{\sigma}} \end{array}
 \end{array}$$

$e = e(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_K) = |T|$ を分岐指数, $f = f(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_K) = |Z/T|$ を剰余次数という. 中間体 M に対して連鎖律が成り立つ: $e(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_K) = e(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_M)e(\mathfrak{p}_M/\mathfrak{p}_K)$, $f(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_K) = f(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_M)f(\mathfrak{p}_M/\mathfrak{p}_K)$.³ L/K において, $e = 1$ であるとき \mathfrak{p}_L は不分岐であるといい, $\forall \mathfrak{p}_L | \mathfrak{p}_K$ が不分岐であるとき \mathfrak{p}_K は不分岐であるという. 剰余体 $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K$ の標数が e と素であるとき (すなわち $\mathfrak{p}_K \nmid e$ であるとき) \mathfrak{p}_K は馴分岐であるという. $ef = |Z| = 1$ であるとき, \mathfrak{p}_K は完全分解するという.

素イデアル \mathfrak{p}_K は K に非アルキメデスの距離を定めるが, アルキメデスの距離は無限素点 $[v_K] = \{v_K, J \circ v_K\}$ から定まる. $v_K: K \hookrightarrow \mathbb{C}$ は体の単射準同型であり, J は複素共

³ K 上ガロアでない M にも, この連鎖律が成り立つように分岐指数と剰余次数が定義される.

役写像である. $v_L|_K = v_K$ である無限素点 $[v_L], [v_K]$ に対し, $v_K(K) \subset \mathbb{R}$ かつ $v_L(L) \not\subset \mathbb{R}$ であるとき $[v_L]$ は分岐しているという. 分岐している $[v_L]$ が存在するとき, $[v_K]$ は分岐しているという. 無限素点に対しても, 惰性群 (と分解群) を

$$T = T(v_L/v_K) = \{1, v_L^{-1} \circ J \circ v_L\} = Z$$

で定める. 分岐指数 $e = |T| \in \{1, 2\}$ であり, $e = 1$ であるとき不分岐である.

どの素点 (素イデアルと無限素点) も不分岐である拡大を不分岐拡大という. 特に不分岐ガロア拡大では, $Z \simeq Z/T$ は有限体のガロア群であり, フロベニウス写像 $\text{Frob}_{\mathfrak{p}_K}$ で生成される. $L = H_K$ とすると, 先の類体論の同型写像は次で与えられる:

$$Cl_K \simeq \text{Gal}(H_K/K) : \mathfrak{p}_K P_K \mapsto \text{Frob}_{\mathfrak{p}_K}.$$

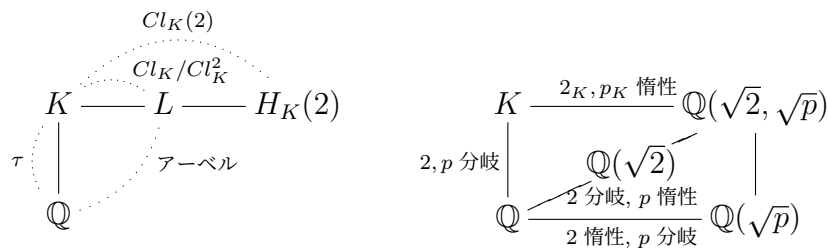
どの素イデアルも馴分岐である拡大を馴分岐拡大という. このとき, どの惰性群 T も巡回群である. p 拡大では, 馴分岐であることと p 上不分岐であることは同値である.

3 応用例

ここまでの内容と 2 次体の理論を使って, 次のような例が得られる:

例. 素数 p は $p \equiv 5 \pmod{8}$ であるとする. このとき, 実 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2p})$ に対して $H_K(2) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$, 特に $Cl_K(2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.

(証明) $\text{Gal}(H_K(2)/K)^2$ の固定体 L は, ガロア群が基本アーベル 2 群であるような K 上の不分岐 2 拡大で最大のものである. その最大性から L/\mathbb{Q} もガロア拡大であり, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ -加群として $I_K/I_K^2 P_K \simeq Cl_K/Cl_K^2 \simeq \text{Gal}(L/K)$ である. $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{1, \tau\}$ とする. $\forall \mathfrak{a} \in I_K$ に対して, $\mathfrak{a}^{\tau+1} = \mathfrak{a} \mathcal{O}_K \in P_K$ ($\exists a \in \mathbb{Q}$) ゆえ, $\mathfrak{a}^\tau \equiv \mathfrak{a}^{-1} \equiv \mathfrak{a} \pmod{I_K^2 P_K}$, すなわち $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は Cl_K/Cl_K^2 に自明に作用する. これは L/\mathbb{Q} がアーベル拡大であることを意味する.



$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ で分岐する素数はそれぞれ 2 と p のみである. K/\mathbb{Q} で分岐する素数は 2 と p のみである. よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})/\mathbb{Q}$ では, 惰性群の一意性および分岐指数の連鎖律を用いると, 分岐する素数は 2 と p のみであり, どちらも分岐指数は 2 である. よって特に, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})/K$ は不分岐拡大, すなわち $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p}) \subset L$ で, $|\text{Gal}(L/\mathbb{Q})| \geq 4$ である. 2_L と p_L をそれぞれ 2 と p の上の L の素イデアルとすると, L/K は不分岐拡大ゆえ $e(2_L/2) = e(p_L/p) = 2$ である. すなわち, 惰性群 $T(2_L/2), T(p_L/p)$ は位数 2 の巡回群で

ある. $T(2_L/2)T(p_L/p)$ の固定体は \mathbb{Q} 上の不分岐拡大であるが, 非自明なもの存在しないので, $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = T(2_L/2)T(p_L/p)$ である. 特に $|\text{Gal}(L/\mathbb{Q})| = |T(2_L/2)T(p_L/p)| \leq 4$ ゆえ $|\text{Gal}(L/\mathbb{Q})| = 4$ で, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p})$ である.

$Cl_K/Cl_K^2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ゆえ $Cl_K(2)$ は巡回群で, $Cl_K(2) \simeq \text{Gal}(H_K(2)/K)$ ゆえ $H_K(2)/K$ は巡回拡大である. $p \equiv 5 \pmod{8}$ ゆえ 2 は $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ で惰性する. よって $f(2_L/2) \geq 2$ ゆえ, $f(2_L/2)e(2_L/2) \leq 4$ であることから $f(2_L/2) = 2$ である. $f(2_L/2_K) = f(2_L/2)/f(2_K/2) = 2$ ゆえ, 2_K は L/K で惰性する. $G = \text{Gal}(H_K(2)/K)$ において, 2_K 上の素イデアルの分解群と惰性群を Z, T とする. $H_K(2)/K$ は不分岐拡大ゆえ, $|T| = 1$ である. もし $G \neq Z$ とすると, $Z \subset G^2 = \text{Gal}(H_K(2)/L)$ ゆえ $L \subset H_K(2)^Z$ すなわち L/K で 2_K が惰性せず矛盾する. よって $G = Z \simeq Z/T$ であるので, G は Frob_{2_K} で生成される. $(2_K)^2 = 2\mathcal{O}_K \in P_K$ ゆえ $2_K P_K \in Cl_K(2)$ であり, $Cl_K(2) \simeq G : 2_K P_K \leftrightarrow \text{Frob}_{2_K}$ ゆえ, $2_K P_K$ で生成される $Cl_K(2)$ の位数は 2 である. $|G| = 2$ ゆえ, $H_K(2) = L$ でもある. \square

この証明では “ $a^2 = 1 \Leftrightarrow a^{-1} = a$ ” であることも用いているが, 馴分岐でない素数 2 に対しても惰性群が巡回群であることが有効に働いている. このような効果が期待できる状況を, なるべく広く, 代数体の副 p 拡大において考察したい.

4 副 p 拡大

無限次ガロア拡大 L/K の素点に対しても, 分解群 Z と惰性群 T は同様に定まる. 開正規部分群 $N \subset \text{Gal}(L/K)$ に対して, ZN/N と TN/N はそれぞれ L^N/K における分解群と惰性群である. ガロア群が副 p 群 (有限 p 群の射影極限と同型) であるガロア拡大を副 p 拡大という. 有限次代数体 K の副 p 拡大 L/K の分解群 $Z(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_K)$ は, 局所体の副 p 拡大 $L_{\mathfrak{p}_L}/K_{\mathfrak{p}_K}$ のガロア群である. $K_{\mathfrak{p}_K}$ の最大副 p 拡大 $K_{\mathfrak{p}_K}(p)/K_{\mathfrak{p}_K}$ のガロア群の商であるが, $\text{Gal}(K_{\mathfrak{p}_K}(p)/K_{\mathfrak{p}_K})$ の構造は, 馴分岐か否かによって様子が大きく異なる:

$$Z(\mathfrak{p}_L/\mathfrak{p}_K) \leftarrow \text{Gal}(K_{\mathfrak{p}_K}(p)/K_{\mathfrak{p}_K}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, \text{ 特に 惰性群 } \simeq \mathbb{Z}_p & (\mathfrak{p}_K \nmid p) \\ \text{自由副 } p \text{ 群 または Demuškin 群} & (\mathfrak{p}_K | p) \end{cases}$$

馴分岐素点の惰性群は, 結び目の管状近傍の境界 (トーラス) の基本群 $\pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の類似と見做され, それに基づいて数論トポロジーも発展している ([15, 16]). その一方で, 馴分岐でない p 上の惰性群は巨大で扱いにくい. そこで, p 上の惰性群も巡回群であるように分岐を制限したい. 特に, p 上の分岐は \mathbb{Z}_p 拡大に沿った分岐だけに制限してみる.

p 進整数環 $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の加法群は巡回 p 群の射影極限であり, ガロア群がそれと同型な副 p 拡大を \mathbb{Z}_p 拡大という. 代数体 K としては有限次代数体を考えており, その \mathbb{Z}_p 拡大 K_∞/K は p 外不分岐である. (よって特に, K の馴分岐巡回副 p 拡大は有限次でなければならない.) K_∞/K で分岐する素イデアルの集合を Σ とする. また,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\mathfrak{p}_K : \text{素イデアル} \mid |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K| \equiv 1 \pmod{p}\}, \\ \mathcal{S}_\infty &= \{[v_K] : \text{無限素点} \mid v_K(K) \subset \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

とおく. p 上でなく $S \cup S_\infty$ にも属さない素点は, どんな副 p 拡大でも分岐しない. これから考察する副 p 拡大では, 分岐し得る K の素点は有限個に制限し, その p 上でない素点の有限集合として,

$$S \subset S \cup S_\infty$$

を設定する. ただし, 無限素点が分岐し得るのは副 2 拡大のみゆえ, $p \neq 2$ のときは $S \subset S$ であるとする. この S に対して, K_∞ 上の最大 S 外不分岐副 p 拡大を $(K_\infty)_S$ とすると, $(K_\infty)_S$ は K 上の副 p 拡大でもあり, そのガロア群を $\tilde{G}_{S, K_\infty/K}$ とおく.

$$\begin{array}{ccc} K_\infty & \text{-----} & (K_\infty)_S \\ \mathbb{Z}_p \downarrow & & \uparrow \\ K & \text{-----} & \tilde{G}_{S, K_\infty/K} = \text{Gal}((K_\infty)_S/K) \end{array}$$

この $S \cup S$ 外不分岐な副 p 拡大 $(K_\infty)_S/K$ においては, p 上素点 $\mathfrak{p}_K|p$ の分解群も, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ と同型な局所ガロア群の商と同型である. その局所ガロア群は, $K_{\mathfrak{p}_K}$ の不分岐 \mathbb{Z}_p 拡大 $K_{\mathfrak{p}_K}^{\text{ur } \mathbb{Z}_p}$ と K_∞ との合成体のガロア群であり, やはり $\pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に類似する:

$$Z(\mathfrak{p}_{(K_\infty)_S}/\mathfrak{p}_K) \leftarrow \text{Gal}(K_{\mathfrak{p}_K}^{\text{ur } \mathbb{Z}_p} K_\infty/K_{\mathfrak{p}_K}) \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, \text{ 特に 惰性群 } \simeq \mathbb{Z}_p \quad (\mathfrak{p}_K|p)$$

この副 p 拡大 $(K_\infty)_S/K$ では, p 上素点も含めて, どの惰性群も副 p 巡回群である. この点で馴分岐拡大に似ていることから, ここではこのような拡大を「擬馴分岐」副 p 拡大と呼ぶことにしたい.

5 岩澤理論

擬馴分岐副 p 拡大における p 上素点の惰性群の巡回性は, \mathbb{Z}_p 拡大の岩澤理論でも有効に働いていた. 実際, K_∞ の最大不分岐アーベル副 p 拡大 $(K_\infty)_\emptyset^{\text{ab}}$ は K 上の擬馴分岐副 p 拡大であり, 岩澤類数公式

$$|Cl_{K_n}(p)| = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu} \quad (\forall n \gg 0) \quad (K_n \text{ は } K_\infty/K \text{ の } p^n \text{ 次部分拡大})$$

の証明でも, $(K_\infty)_\emptyset^{\text{ab}}/K$ での惰性群の様子を調べている ([20, §13.3]). また, $K = \mathbb{Q}$ のときに $\lambda = \mu = \nu = 0$ であることを導く岩澤 [7] の定理 ([20, §10.1]) の証明でも, 先の例と同種の議論をしている. さらに数論トポロジーの観点からも, $\tilde{G}_{S, K_\infty/K}$ は絡み目群 $\pi_1(S^3 \setminus \text{絡み目})$ によく類似し, \mathbb{Z}_p 拡大の岩澤理論を, 絡み目の Alexander-Fox 理論と並行する理論として捉えやすくなる ([12, 15, 16]).

$\tilde{G}_{S, K_\infty/K}$ の閉部分群 $\text{Gal}((K_\infty)_S/K_\infty)$ の最大副 p アーベル商 X_S は, K_∞ の最大 S 外不分岐アーベル副 p 拡大 $(K_\infty)_S^{\text{ab}}/K_\infty$ のガロア群である. それらには \mathbb{Z}_p 拡大のガロア群 $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$ が $\tilde{G}_{S, K_\infty/K}$ の内部自己同型を介して作用し, $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 加群としての X_S を岩澤加群という. $\Gamma = \langle \gamma^{\mathbb{Z}_p} \rangle$ の生成元 γ をひとつ定めると, 冪級数環との Serre 同型

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[t]] \simeq \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] : 1+t \leftrightarrow \gamma$ を介して, 岩澤加群は Λ 加群とみなすことができる. このとき, 馴分岐岩澤加群 X_S は有限生成捩れ Λ 加群である.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_S & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 & K_\infty & \text{---} & (K_\infty)^\text{ab}_S & \text{---} & (K_\infty)_S \\
 & | & & & & \curvearrowleft \\
 \gamma^{\mathbb{Z}_p} & K_n & & & & \tilde{G}_{S, K_\infty/K} \\
 & |_{p^n} & & & & \\
 & K & & & &
 \end{array}$$

特に $S = \emptyset$ のときは $(K_\infty)_\emptyset^\text{ab} = \bigcup_n H_{K_n}(p)$ であり, 不分岐岩澤加群 X_\emptyset は $Cl_{K_n}(p)$ のノルムによる射影極限と同型であり, 岩澤類数公式に現れる岩澤不変量 λ, μ, ν はその Λ 加群構造を反映する. X_\emptyset と基本 Λ 加群との擬同型 (核と余核が有限な Λ 準同型)

$$X_\emptyset \sim \bigoplus_i \Lambda / f_i \Lambda$$

の選び方に依らずに, 単項イデアル $(\prod f_i) \Lambda = p^\mu P(t) \Lambda$ の生成元 $p^\mu P(t)$ が, $P(t)$ はモニックかつ $P(t) \equiv t^\lambda \pmod{p}$, $\lambda = \deg P(t)$ であるように定まる. この岩澤多項式 $p^\mu P(t)$ が, 絡み目の \mathbb{Z} 被覆の Alexander 多項式の類似である ([12, 15, 16]).

$X_\emptyset \simeq \varprojlim Cl_{K_n}(p)$ であったように, それを最大副 p アーベル商とする $\text{Gal}((K_\infty)_\emptyset / K_\infty)$ は, K_n の最大不分岐副 p 拡大のガロア群の射影極限 $\varprojlim \text{Gal}((K_n)_\emptyset / K_n)$ と同型である. $\text{Gal}((K_\infty)_\emptyset / K_\infty)$ を Γ の作用を通して調べる非アーベル岩澤理論 ([17, 18]) は, $\tilde{G}_{\emptyset, K_\infty/K}$ を調べる理論として捉えることもできる.

6 KOCH 型群表示

以上の背景をふまえて, 擬馴分岐副 p 拡大のガロア群 $\tilde{G}_{S, K_\infty/K}$ の群構造を記述したい. 特に, 副 p 群としての群表示を得たい. 文字 x_1, \dots, x_d で生成される階数 d の自由副 p 群 F から副 p 群 G への全射準同型があり, その核 R が副 p 語 $\rho_1, \dots, \rho_r \in F$ を含む最小の閉正規部分群であるとき, G の群表示を

$$G \simeq F/R = \langle x_1, \dots, x_d \mid \rho_1, \dots, \rho_r \rangle^{\text{副}p}$$

のように表す. このような最小の d, r を $d(G), r(G)$ とする.

Koch は代数体 K の最大 S 外不分岐副 p 拡大 K_S のガロア群の群表示を, 基本的な仮定の下で与えている ([9]). 特に, その群表示の生成元 x_1, \dots, x_d として惰性群の生成元を採用し, 各関係式 ρ_i は局所ガロア群 $\text{Gal}(K_{\mathfrak{p}_K}(p)/K_{\mathfrak{p}_K}) \simeq \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ の関係式 $x^{|O_K/\mathfrak{p}_K|} y x^{-1} y^{-1}$ から来ることを示している. 同様の議論を辿ることにより, 次の結果が得られる:

定理 0 (Salle [19], Blondeau-Lebacque-Maire [2], Mizusawa [13], El Habibi-Mizusawa [3]). 基本的な仮定の下, $\tilde{G}_{S, K_\infty/K}$ も Koch 型の群表示を持つ.

Koch 型の群表示として実際に記述したのは [13] からであるが, その先行研究でも本質的には扱われている. $K_\infty = K\mathbb{Q}_\infty$ のとき, Salle [19] は $d(\tilde{G}_{S,K_\infty/K})$ と $r(\tilde{G}_{S,K_\infty/K})$ の Shafarevich 型公式を与え, Blondeau-Lebacque-Maire [2] はコホモロジーを通して生成元と関係式を扱い, p コホモロジー次元 $\text{cd}_p(\tilde{G}_{S,K_\infty/K})$ が 2 になり得ることを示している. ここでは [13] の結果の一部を紹介したい. l_i は素数を表す.

定理 1. $K = \mathbb{Q}$ とし, $p = 2$ なら $S = \{\ell_1, \dots, \ell_d, v_\mathbb{Q}\}$, $p \neq 2$ なら $S = \{\ell_1, \dots, \ell_d\}$ とする. $l_0 = p$ とおく. このとき, $\tilde{G}_{S,\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}}$ は次の群表示を持つ:

$$\tilde{G}_{S,\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}} \simeq F/R = \langle x_0, \dots, x_d \mid x_0 y_0 x_0^{-1} y_0^{-1}, x_1^{\ell_1} y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}, \dots, x_d^{\ell_d} y_d x_d^{-1} y_d^{-1} \rangle^{\text{副}p}$$

ただし, $x_i R$ は $T(\ell_i, (\mathbb{Q}_\infty)_S / \ell_i)$ の生成元に対応し, $y_i R$ は $\text{Frob}_{\ell_i} \in Z(\ell_i, (\mathbb{Q}_\infty)_S / \ell_i)$ に対応する.

この群表示は, 次をみたすように構成できる: 副 p 語 y_i を

$$y_i \equiv x_d^{l_{id}} \cdots x_1^{l_{i1}} x_0^{l_{i0}} \pmod{[F, F]}$$

と表したとき $l_{ij} \in \mathbb{Z}_p$ ($i \neq j$) は, $j \neq 0$ なら $l_{ij} \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \ell_i \in (\mathbb{F}_{\ell_j}^\times)^p$ であり, $p \neq 2$ なら $l_{i0} = (1+p)^{-l_{i0}}$, $p = 2$ なら $5^{-l_{i0}} = \ell_i^* := (-1)^{(\ell_i-1)/2} \ell_i \equiv 1 \pmod{4}$ である. $i = j$ のときは $l_{ii} = 0$ とする. (この l_{ij} が絡み目の「まつわり数」の類似である.) 特に $p = 2$, $i \neq j \neq 0$ のとき $(-1)^{l_{ij}} = \left(\frac{\ell_i}{\ell_j}\right)$ は平方剰余記号であり, さらに

$$y_i \equiv x_d^{l_{id}} \cdots x_1^{l_{i1}} x_0^{l_{i0}} \prod_{a < b} (x_a x_b x_a^{-1} x_b^{-1})^{c_{iab}} \pmod{[[F, F], F]}$$

と表すと, $c_{iab} \in \mathbb{Z}_2$ は Rédei 記号とも結びつく: $l_{ab} \equiv l_{ba} \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, 次のようなガロア拡大 $K_{a,b}/\mathbb{Q}$ が存在する:

$$\begin{array}{c} \{l_a, l_b, v_\mathbb{Q}\} \text{ 外不分岐 8 次二面体拡大} \\ \mathbb{Q} \text{ --- } \mathbb{Q}(\sqrt{\ell_a^* \ell_b^*}) \text{ --- } \cdot \text{ --- } K_{a,b} : \text{Rédei 拡大} \\ \phantom{\mathbb{Q} \text{ --- } \mathbb{Q}(\sqrt{\ell_a^* \ell_b^*}) \text{ --- } \cdot \text{ --- } K_{a,b} : \text{Rédei 拡大}} \text{ } \\ \phantom{\mathbb{Q} \text{ --- } \mathbb{Q}(\sqrt{\ell_a^* \ell_b^*}) \text{ --- } \cdot \text{ --- } K_{a,b} : \text{Rédei 拡大}} v_\mathbb{Q} \text{ 外不分岐 4 次巡回拡大} \end{array}$$

さらに $l_{ia} \equiv l_{ib} \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, $(-1)^{c_{iab}} = [l_a, l_b, l_i]$ が Rédei 記号であり, $[l_a, l_b, l_i] = 1$ であることと, ℓ_i が $K_{a,b}/\mathbb{Q}$ で完全分解することが同値である.

7 応用

$\tilde{G}_{S,K_\infty/K}$ と絡み目群の類似に基づくと, 定理 1 は以下のように応用できる. $p = 2$, $S = \{\ell_1, \ell_2, v_\mathbb{Q}\}$ とし, $D = \ell_1^* \ell_2^*$ とする. 改めて $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ とおき, $K_\infty = K\mathbb{Q}_\infty$ とする. $D < 0$ なら $S_0 = \emptyset$ とし, $D > 0$ なら $S_0 = \{v_K, v'_K\}$ を K の無限素点の集合とする

と、次のような体の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & X_{S_0} & & & \\
& & & \text{---} & & & \\
\mathbb{Q}_\infty & \text{---} & K_\infty & \text{---} & (K_\infty)_{S_0}^{\text{ab}} & \text{---} & (K_\infty)_{S_0} & \text{---} & (\mathbb{Q}_\infty)_S \\
| & & | & & & & & & \\
\mathbb{Q} & \text{---} & K & \cdots & \tilde{G}_{S_0, K_\infty/K} & \cdots & \tilde{G}_{S, \mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}} & &
\end{array}$$

Fröhlich と Koch のアイデア ([8]) に倣うと, $\tilde{G}_{S, \mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}}$ の Koch 型群表示から, $\tilde{G}_{S_0, K_\infty/K}$ の群表示が部分的に得られる. そこから Alexander-Fox 理論に倣って, その部分商である狭義不分岐岩澤加群 X_{S_0} の Fitting イデアル $\text{Fitt}_A X_{S_0}$ を近似計算することができる. 完全列 $A^r \xrightarrow{A} A^d \rightarrow X_{S_0} \rightarrow 0$ をみたす表現行列 A の $d \times d$ 小行列式で生成される A のイデアルが $\text{Fitt}_A X_{S_0}$ である. ここでは y_i を $\text{mod}[[F, F], F]$ で近似していることから, A の極大イデアル $\mathfrak{m} = (2, T)$ の 3 乗を法とした精度で近似できる.

補題. $D = \ell_1^* \ell_2^* \equiv 5 \pmod{8}$ と仮定すると, イデアル $\text{Fitt}_A X_{S_0} + \mathfrak{m}^3$ は, \mathfrak{m}^3 と次の 3 つの元で生成される: $\text{Fitt}_A X_{S_0} + \mathfrak{m}^3 = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2) + \mathfrak{m}^3$,

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \left(c_{10} c_{002} + c_{02} \frac{c_{10}(c_{10}-1)}{2} \right) t^2 - c_{10} c_{02} t + 2c_{12}(c_{01} + c_{02}) \\
&\quad + 2(c_{12}(c_{10} c_{02} + c_{001} + c_{002}) + c_{01} c_{102} + c_{02} c_{101} + c_{10} c_{012}) t \\
&\quad + 4(c_{12} c_{01} c_{02} + c_{112}(c_{01} + c_{02})), \\
\Delta_1 &= \left(c_{10} \frac{c_{20}(c_{20}-1)}{2} + c_{20} \frac{c_{10}(c_{10}-1)}{2} \right) t^2 - c_{10} c_{20} t + 2(c_{12} c_{20} + c_{21} c_{10}) \\
&\quad + 2\left(c_{12} \frac{c_{20}(c_{20}-1)}{2} + c_{21} \frac{c_{10}(c_{10}-1)}{2} + c_{10} c_{20}(c_{12} + c_{21}) + c_{10} c_{202} + c_{20} c_{101} \right) t \\
&\quad + 4(c_{12} c_{21}(c_{10} + c_{20}) + c_{21}(c_{101} + c_{102}) + c_{12}(c_{201} + c_{202}) + c_{10} c_{212} + c_{20} c_{112}), \\
\Delta_2 &= \left(c_{20} c_{001} + c_{01} \frac{c_{20}(c_{20}-1)}{2} \right) t^2 - c_{01} c_{20} t + 2c_{21}(c_{01} + c_{02}) \\
&\quad + 2(c_{21}(c_{01} c_{20} + c_{001} + c_{002}) + c_{01} c_{202} + c_{02} c_{201} + c_{20} c_{012} + c_{01} c_{20} c_{02}) t \\
&\quad + 4(c_{21} c_{01} c_{02} + c_{212}(c_{01} + c_{02})),
\end{aligned}$$

ただし, $\{0, 1\} \ni c_{ij} \equiv l_{ij} \pmod{2}$ ($j \neq 0$), $c_{i0} = l_{i0}$ である.

$D < 0$ のときは $X_{S_0} = X_\emptyset$ であり, Ferrero [4] の定理から $X_\emptyset \simeq A/P(t)A$ すなわち $\text{Fitt}_A X_\emptyset = P(t)A$ であることがわかる. ℓ_1, ℓ_2 に $\deg P(t) = 2$ であるように条件をつけると, 岩澤多項式 $P(t)$ を (低い精度ではあるが) 近似計算できる.

定理 2. $\ell_1 \equiv 9 \pmod{16}$, $\ell_2 \equiv 3 \pmod{8}$, $\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right) = 1$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-\ell_1 \ell_2})$ のとき, 次が成り立つ:

- (1) $P(t) \equiv t^2 + \left\{1 + \left(\frac{2}{\ell_1}\right)_4\right\} t + 2\left\{1 - \left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)_4\right\} \pmod{4\mathbb{Z}_2 t + 8\mathbb{Z}_2}$
- (2) $\left\{1 + \left(\frac{2}{\ell_1}\right)_4\right\}/2 \equiv c_{012} + c_{201} \pmod{2}$

ただし $(\frac{\ell}{\ell_1})_4$ は, $(\frac{\ell}{\ell_1})_4 = \pm 1 \equiv \ell^{\frac{\ell_1-1}{4}} \pmod{\ell_1}$ で定まっている 4 冪剰余記号である.

c_{aab} や c_{bab} が 4 冪剰余記号に対応している. 岩澤多項式 $P(t)$ は, p 進 L 関数の岩澤構成と岩澤主予想 (Mazur-Wiles の定理) を介して個別に近似計算できるが, (1) では冪剰余記号を用いて, 個別ではなく統一して記述できているところが利点である⁴. また, (1) の系として得られる (2) は, $K_{1,2}K_{0,1}/\mathbb{Q}$ での分解法則と捉えることができる.

一方で $D > 0$ のときは, 同じ補題から次の結果が得られる.

定理 3. $\ell_1 \equiv 7 \pmod{16}$, $\ell_2 \equiv 3 \pmod{8}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\ell_1\ell_2})$ のとき, 次が成り立つ:

$$(3) X_{S_0} \simeq \Lambda/(2, T^2) \quad (\text{アーベル群としては } (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \text{ に同型})$$

$$(4) \tilde{G}_{S_0, K_\infty/K} \simeq \langle a, b \mid b^2, b^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}aba \rangle^{\text{副}2} \simeq D_{2^\infty} \rtimes \mathbb{Z}_2$$

定理 2 と定理 3 は同じ補題から導かれているにもかかわらず, 定理 2 の $X_{S_0} = X_\emptyset$ は階数 2 の自由 \mathbb{Z}_2 加群である一方で, 定理 3 では X_{S_0} は有限である. 補題における l_{ij} や c_{iab} たちが, D の正負 (即ち $l_i \pmod{4}$) に応じて, 次の予想に反しないように値をとっているところが興味深く感じられる.

Greenberg 予想 ([6]). $\forall v_K, v_K(K) \subset \mathbb{R}$ (K が総実) ならば, $K_\infty = K\mathbb{Q}_\infty$ に対して X_\emptyset は有限 (即ち $\lambda = \mu = 0$) であろう.

以上は [13] で得た結果であるが, [14] では次の定理を, 定理 1 から再現している.

山本の定理 ([21, 22]). $p \neq 2$, $S = \{\ell_1, \ell_2\}$ とし, K/\mathbb{Q} を S 外不分岐 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ 拡大とする. このとき, X_\emptyset が自明 (即ち $\lambda = \mu = \nu = 0$) となる必要十分条件は

$$l_{01}l_{12}l_{20} \not\equiv l_{02}l_{21}l_{10} \pmod{p}$$

である.

さらに [3] では, より一般の場合を扱い, その一部として次の定理を得ている. さらにそこから, Greenberg 予想の十分条件を与える福田-小松の判定法 [5] の一部も再現できている.

定理 4. $p \neq 2$ とし, K は実 2 次体で, p は K/\mathbb{Q} で $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ のように分解するとする. このとき $|Cl_K(p)| = 1$ ならば, $\exists S = \{\mathfrak{p}_0\}$,

$$\tilde{G}_{S, K_\infty/K} \simeq \langle x_1, x_2 \mid x_0^{|O_K/\mathfrak{p}_0|} y_0 x_0^{-1} y_0^{-1}, x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}, x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} \rangle^{\text{副}p}$$

ただし, $x_i R$ は $T(\mathfrak{p}_{i, (K_\infty)_S}/\mathfrak{p}_i)$ の生成元に対応し, $y_i R$ は $\text{Frob}_{\mathfrak{p}_i} \in Z(\mathfrak{p}_{i, (K_\infty)_S}/\mathfrak{p}_i)$ に対応する.

Koch 型群表示が得られ, そこから以上のような応用も得られたことは, 擬馴分岐副 p 拡大の利点である. 山本の定理の必要十分条件は, その関数体類似が [1] で得られており, また, より大きな S に対する同種の条件が [10, 11] にも現れている. 擬馴分岐副 p 拡大を考えることが, 今後の発展に繋がることを期待したい.

⁴岩澤主予想も用いていない.

参考文献

- [1] A. Aiba, On the vanishing of Iwasawa invariants of geometric cyclotomic \mathbb{Z}_p -extensions, *Acta Arith.* **108** (2003), no. 2, 113–122.
- [2] J. Blondeau, P. Lebacque and C. Maire, On the cohomological dimension of some pro- p -extensions above the cyclotomic \mathbb{Z}_p -extension of a number field, *Mosc. Math. J.* **13** (2013), no. 4, 601–619.
- [3] A. El Habibi and Y. Mizusawa, On pro- p -extensions of number fields with restricted ramification over intermediate \mathbb{Z}_p -extensions, *J. Number Theory* **231** (2022), 214–238.
- [4] B. Ferrero, The cyclotomic \mathbf{Z}_2 -extension of imaginary quadratic fields, *Amer. J. Math.* **102** (1980), no. 3, 447–459.
- [5] T. Fukuda and K. Komatsu, On the λ invariants of \mathbf{Z}_p -extensions of real quadratic fields, *J. Number Theory* **23** (1986), no. 2, 238–242.
- [6] R. Greenberg, On the Iwasawa invariants of totally real number fields, *Amer. J. Math.* **98** (1976), no. 1, 263–284.
- [7] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20** (1956), 257–258.
- [8] H. Koch, On p -extensions with given ramification, Appendix 1 in; K. Haberland, *Galois cohomology of algebraic number fields*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
- [9] H. Koch, *Galois theory of p -extensions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [10] J. Labute, Mild pro- p -groups and Galois groups of p -extensions of \mathbb{Q} , *J. Reine Angew. Math.* **596** (2006), 155–182.
- [11] J. Labute, Linking numbers and the tame Fontaine-Mazur conjecture, *Ann. Math. Qué.* **38** (2014), no. 1, 61–71.
- [12] B. Mazur, Remarks on the Alexander polynomial, unpublished paper, 1963/1964. http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/alexander_polynomial.pdf
- [13] Y. Mizusawa, On pro- p link groups of number fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), no. 10, 7225–7254.
- [14] Y. Mizusawa and G. Yamamoto, Iwasawa invariants and linking numbers of primes, *Adv. Stud. Pure Math.*, **86** “Development of Iwasawa theory—the centennial of K. Iwasawa’s birth” (2020), 639–654.
- [15] M. Morishita, *Knots and Primes - An Introduction to Arithmetic Topology*, Springer, 2012.
- [16] 森下 昌紀, 結び目と素数, シュプリンガー現代数学シリーズ 15, 丸善出版, 2012.

- [17] M. Ozaki, Non-abelian Iwasawa theory of \mathbb{Z}_p -extensions, *J. Reine Angew. Math.* **602** (2007), 59–94.
- [18] 尾崎 学, \mathbf{Z}_p -拡大の非アーベル岩澤理論 : 概説と展望, 数理解析研究所講究録別冊 **B64** (2017), 313–330.
- [19] L. Salle, Sur les pro- p -extensions à ramification restreinte au-dessus de la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique d'un corps de nombres, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **20** (2008), no. 2, 485–523.
- [20] L. C. Washington, Introduction to cyclotomic fields, second edition, Graduate Texts in Mathematics **83**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [21] G. Yamamoto, On the vanishing of Iwasawa invariants of absolutely abelian p -extensions. *Acta Arith.* **94** (2000), no. 4, 365–371.
- [22] 山本 現, 素数のまつわり数と \mathbf{Z}_p 拡大について (第 11 回北陸数論研究集会, 金沢, 2012) , 報告集 (2013), 8–20.

アフィン・グラスマン多様体の 同変シューベルト・カルキュラス

池田岳 (早稲田大学 基幹理工学部)

概要

アフィン・グラスマン多様体のトーラス同変ホモロジー群は可換環の構造を持つ。シューベルト基底も備えているので古典的なシューベルト・カルキュラスに類似する問題が生じる。ピーターソンの理論によると、非自明な形で量子コホモロジー環と関係するので、現代のシューベルト・カルキュラスにおいては一つの魅力的なトピックスである。講演ではシンプレクティック群のアフィン・グラスマン多様体について述べた ([4]) が、本稿では特殊線型群を例として基本的な構成法を解説する。

今回の講演は、数理解析研究所の共同利用「変換群の幾何とトポロジー」2023年6月13日(火)～6月16日(金)において行った内容と大きく重複しているため、この報告集ではシンポジウム当日の講演内容についてはごく簡単に触れるにとどめ、講演で扱わなかったことを含めて述べることにする。本稿の §1 は [1] の一部とほぼ完全に重複している。

1 アフィン・シューベルト・カルキュラスとは

D. Peterson の理論 [16] が 1995 年に現れてから、アフィン・シューベルト・カルキュラスに興味を持たれている。この節ではその概要を述べる。

1.1 アフィン・グラスマン多様体

G を複素数体 \mathbb{C} 上で定義された単純で単連結な線型代数群とする。 $\mathbb{O} = \mathbb{C}[[t]]$ を 1 変数の形式的冪級数環とし、 $\mathbb{F} = \text{Frac}(\mathbb{O})$ をその商体、すなわち形式的ローラン級数の環 $\mathbb{C}((t))$ とする。 A を可換 \mathbb{C} 代数とすると A 値点集合¹ $G(A)$ は群をなす。商集合 $G(\mathbb{F})/G(\mathbb{O})$ を G のアフィン・グラスマン多様体と呼ぶ。

T を G の極大トーラスとする。 T の指標群² (加法群とみなす) を \hat{T} とする。 T 同変コホモロジー環 $H_T^*(\text{pt})$ は対称代数 $\text{Sym}(\hat{T})$ と同一視できる。以下、代数はすべて \mathbb{C} に係数拡大したものを考える。 T のリー代数を \mathfrak{h} とするとき $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (座標環) である。

1.2 アフィン・シューベルト・カルキュラス

以上の設定のもとで T 同変ホモロジー群 $H_*^T(\text{Gr}_G)$ を考える。これは自然に可換 S 代数の構造を持つ。また Gr_G のシューベルト部分多様体に対応する類の全体が自然な S 基底をな

¹例えば $G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$ ならば $\text{SL}_n(A)$ は成分が A の n 次正方行列で行列式が 1 であるもののなす群。

² T から \mathbb{C}^\times への群準同型を T の指標と呼ぶ。 T の指標の集合は関数としての掛け算でアーベル群の構造を持つ。

す。これをシューベルト基底と呼ぶ。\$(G, T)\$ のワイル群を \$W\$ とし、\$W_{\text{af}}\$ をアフィン・ワイル群とする。シューベルト基底の自然な添字集合は、商集合 \$W_{\text{af}}/W\$ の最短代表系 \$W_{\text{af}}^0\$ である。シューベルト基底を \$\{\xi_w\}_{w \in W_{\text{af}}^0}\$ と書くとき

$$\xi_w \xi_v = \sum_{u \in W_{\text{af}}^0} c_{wv}^u \xi_u$$

によって「構造定数」\$c_{wv}^u \in S\$ を定められる。この構造定数を求めようという問題は「シューベルト・カルキュラス」の類似であると考えられる。\$H_*^T(\text{Gr}_G)\$ の積はコホモロジー環もしくは Chow 環における交叉積とは異なるので「」(括弧)をつけた。

\$B\$ を \$T\$ を含む \$G\$ のボレル部分群³とすると \$T\$ 同変量子コホモロジー環 \$QH_T^*(G/B)\$ と \$H_*^T(\text{Gr}_G)\$ とは、適当な局所化を行うと同型であることが知られている。両者のシューベルト類同士の明示的な関係もある。これを Peterson 同型と呼ぶ。\$QH_T^*(G/B)\$ の構造定数は交点数の一般化と考えられる Gromov-Witten 不変量を用いて定義されているので、\$H_*^T(\text{Gr}_G)\$ の構造定数を求める問題は、本来のシューベルト・カルキュラスと極めて非自明な形で関係しているのである。

1.3 \$H_*^T(\text{Gr}_G)\$ の実現 — Peterson 代数

\$H_*^T(\text{Gr}_G)\$ のシューベルト基底に関する構造定数を求めるという問題を考えるにあたって、環 \$H_*^T(\text{Gr}_G)\$ の取り扱いやすい記述が望まれる。一般の \$G\$ について適用可能な \$H_*^T(\text{Gr}_G)\$ の実現として、アフィン・ニルヘッケ環 \$\mathbb{A}_{\text{af}}\$ によるものが知られているので、ここで紹介しておく。この内容の原典は Peterson による講義 [16] であるが、[9] など学ぶことができる。

\$\mathbb{A}_{\text{af}}\$ は「差分商作用素」で生成される非可換な \$S\$ 代数である。\$\mathbb{A}_{\text{af}}\$ には \$w \in W_{\text{af}}\$ で添字づけられる \$S\$ 基底 \$A_w\$ が存在する。その構成を説明しよう。\$G\$ のリー代数 \$\mathfrak{g}\$ のカルタン部分代数 \$\mathfrak{h}\$ に関する単純ルートの集合を \$\{\alpha_i \mid i \in I\}\$ とする。最高ルートを \$\theta\$ とし \$\alpha_0 = -\theta\$ とおく。\$S\$ へのアフィン・ワイル群 \$W_{\text{af}} = \langle s_i \mid i \in \{0\} \cup I \rangle\$ の作用を \$s_0\$ を \$s_\theta\$ として作用させることで定める (レベル 0 作用)。\$S^{\text{rat}}\$ を \$S\$ の商体とし \$S^{\text{rat}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W_{\text{af}}]\$ における積を

$$(f \otimes w) \cdot (g \otimes v) = fw(g) \otimes wv \quad (f, g \in S^{\text{rat}}, w, v \in W_{\text{af}})$$

により定める。\$i \in \{0\} \cup I\$ に対して

$$A_i = \frac{1}{\alpha_i} (1 - s_i) \tag{1.1}$$

とおく。\$w \in W_{\text{af}}\$ に対して \$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}\$ を簡約表示とすると \$A_w = A_{i_1} \cdots A_{i_r}\$ は簡約表示の選び方によらない。\$\{A_w \mid w \in W_{\text{af}}\}\$ は \$S\$ 上線型独立である。ここで \$\mathbb{A}_{\text{af}} = \bigoplus_{w \in W_{\text{af}}} SA_w\$ とおく。\$\mathbb{A}_{\text{af}}\$ において \$S\$ の元は一般には中心的ではなく

$$Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S) := \{a \in \mathbb{A}_{\text{af}} \mid as = sa \text{ for all } s \in S\}$$

は \$\mathbb{A}_{\text{af}}\$ 中の非自明な部分 \$S\$ 代数をなす。これを **Peterson 代数** と呼ぶ。実はこれは可換であって \$H_*^T(\text{Gr}_G)\$ と同型であることが知られている ([16], [7])。さらに、\$w \in W_{\text{af}}^0\$ に対して、同型 \$H_*^T(\text{Gr}_G) \cong Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)\$ によって \$\xi_w\$ に対応する元を \$j_w\$ とするとき

$$j_w = A_w + \sum_{v \in W_{\text{af}} \setminus W_{\text{af}}^0} j_w^v A_v \quad (j_w^v \in S)$$

³線型代数群 \$G\$ の連結で可解な閉部分群のうち極大なものをボレル部分群 (Borel subgroup) と呼ぶ。

という姿をした $Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)$ の元として一意的に定まる。また $Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)$ には \mathbb{A}_{af} が作用して

$$A_i \cdot j_w = \begin{cases} j_{s_i w} & (\ell(s_i w) = \ell(w) + 1) \\ 0 & (\ell(s_i w) = \ell(w) - 1) \end{cases}$$

が成り立つ。以上の記述はとても見事だが、定義通りに j_w を計算しようとしてもかなり困難である。実際、係数 j_w^v を決定することは構造定数を決定するのと同様くらい難しい。

そこで、 $H_*^T(\text{Gr}_G)$ を、より取り扱いの容易な環で置き換えて、その中でシューベルト基底を自由に計算できることが望ましい。

2 対称関数を用いる構成

講演では $G = \text{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の場合に $H_*^T(\text{Gr}_G)$ と同型な環を対称関数を用いて構成する内容を説明した ([4])。この内容は [1] と重複するので、ここでは $G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$ の場合の同様の構成について述べる。

2.1 k -シューア関数

最も基本的な $G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$ のホモロジー $H_*(\text{Gr}_{\text{SL}_n})$ に関する結果は Lam による。マクドナルド多項式の問題と関連して Lapointe–Lascoux–Morse [14] により k -シューア関数というものが導入された。これはアトムと呼ばれるある種のタブローに関する和として純粋に組合せ的に記述されるものであった。その後、Lapointe–Morse [?] により対称関数としての k -シューア関数が定義された。背景や基礎的な事項については [8] が詳しい。

Lam [7] は非同変のホモロジー群 $H_*(\text{Gr}_{\text{SL}_n})$ を対称関数環により実現し、さらにシューベルト類と k -シューア関数との同一視を確立した。以下、この結果を解説する。

$Z_{\mathbb{A}_{\text{af}}}(S)$ は同変ホモロジー $H_*^T(\text{Gr}_{\text{SL}_n})$ と同型であるが、一方、非同変のホモロジー群 $H_*(\text{Gr}_{\text{SL}_n})$ の実現のために Lam はアフィン・フォーミン・スタンレー代数を導入した。一旦、 G は一般の型とする。 \mathbb{A}_{af}^0 を A_w ($w \in W_{\text{af}}$) で生成される \mathbb{Z} 代数とする。 $\phi_0 : S \rightarrow \mathbb{Z}$ を 0 において値をとる写像とする。 \mathbb{A}_{af} から \mathbb{A}_{af}^0 への写像 ϕ_0 を (同じ記号で) $\phi_0(\sum_w a_w A_w) = \sum_w \phi_0(a_w) A_w$ により定める。アフィン・フォーミン・スタンレー代数は ϕ_0 による \mathbb{A}_{af} の像 $\mathbb{B}_{\text{af}} = \phi_0(\mathbb{A}_{\text{af}})$ として定義される。Lam によると

$$\mathbb{B}_{\text{af}} = \{a \in \mathbb{A}_{\text{af}}^0 \mid \text{すべての } s \in S \text{ について } \phi_0(as) = \phi_0(s)a\}$$

が成り立つ。非同変のシューベルト類は

$$j_w^0 = A_w + \sum_{v \in W_{\text{af}} \setminus W_{\text{af}}^0, \ell(v) = \ell(w)} j_w^v A_v$$

という形の \mathbb{B}_{af} の元として特徴づけられる。 $\ell(v) = \ell(w)$ という条件をつけるので $j_w^v \in \mathbb{Z}$ である。

$G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$ の場合にもどり Lam [7] の構成を簡単に説明する。 $1 \leq i \leq n-1$ に対して $\rho_i = s_{i-1} \cdots s_1 s_0$ は W_{af}^0 の元である。Lam は以下の記述

$$j_{\rho_i}^0 = \sum_{w \text{ は cyclically decreasing}} A_w$$

を与えた。 $\{0, 1, \dots, n-1\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元からなるワード $i_1 \cdots i_r$ において $i, i+1$ が含まれるとき $i+1$ が i よりも先行する (左にある) とき $i_1 \cdots i_r$ は cyclically decreasing であると

いう. $w \in W_{\text{af}} = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ が cyclically decreasing であるとは cyclically decreasing なワード $i_1 \dots i_r$ があって $w = s_{i_1} \dots s_{i_r}$ と表せることをいう.

例えば $n = 3$ の場合

$$j_{\rho_2}^0 = A_1 A_0 + A_2 A_1 + A_0 A_2 \quad (2.1)$$

である. 添字は $n = 3$ を法として考えるので $i = 2, i + 1 = 0$ と見ている.

このような元が重要なのは

$$\mathbb{B}_{\text{af}} = \mathbb{Z}[j_{\rho_1}^0, j_{\rho_2}^0, \dots, j_{\rho_{n-1}}^0]$$

が成立するためである. また $j_{\rho_1}^0, j_{\rho_2}^0, \dots, j_{\rho_{n-1}}^0$ は代数的独立であり $H_*(\text{GrSL}_n)$ は $n - 1$ 変数の多項式環と同型である. この事実そのものは $H_*(\text{GrSL}_n)$ は $H_*(\Omega SU(n))$ と同型であるということを使えば Bott が示している. ここで $\Omega SU(n)$ はユニタリー群 $SU(n)$ の基点付きループ空間である. Lam は $j_{\rho_i}^0$ を $h_i \in \Lambda$ と同一視することにより j_w^0 が k -シューア関数 $s_w^{(n-1)}$ と一致することを証明した.

2.2 Double k -シューア関数

Lam-Shimozono [10] は Lam [7] の結果を Molev が導入した関数を用いて同変に拡張した. ここでは, Lam-Shimozono とは異なるアプローチで double k -シューア関数を導入した最近の成果 [5] について述べる. 実は, この方法は K 理論の場合に拡張できることが既にわかっているのだが, ホモロジーの場合に限定して述べる.

$\text{SL}_n(\mathbb{C})$ の極大トーラス T の指標群 \hat{T} を $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}a_i / \mathbb{Z}(a_1 + \dots + a_n)$ と実現し, S を対称代数 $\text{Sym}(\hat{T}) = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n] / (a_1 + \dots + a_n)$ とする. $k = n - 1$ として, 変数 y_1, \dots, y_k の形式的幕級数環 $S[[y_1, \dots, y_k]]$ に変数の置換により S_k の作用を考え, その不変部分環 $S[[y_1, \dots, y_k]]^{S_k}$ を $\hat{\Lambda}^S$ と書く.

$\text{SL}_n(\mathbb{C})$ の双対ルート格子を $Q^\vee = \{\sum_{i=1}^n c_i \varepsilon_i \mid \sum_{i=1}^n c_i = 0\}$ と実現する. $\theta^\vee := \varepsilon_1 - \varepsilon_n$ とおくとワイル群 $W = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle = S_n$ は a_i の置換として S に作用する. s_i の作用を s_i^a と書く. S への作用と Q^\vee への作用を合わせて, S 係数の Q^\vee の群環 $S[Q^\vee]$ への W の作用に拡張する. これを同様に s_i^a と表す. $\gamma \in Q^\vee$ に対して, 対応する群環の元を t_γ により表す.

定理 2.1 ([5]). $S[Q^\vee]$ への W の作用を拡張して W_{af} の作用を

$$s_0(f) = t_{\theta^\vee} s_\theta^a(f)$$

により定めることができる.

この作用をさらに \mathbb{A}_{af} の作用に拡張するために S を局所化する. ルート α の逆 α^{-1} を S に添加して得られる環を S^Δ とする.

定理 2.2 ([5]). $S^\Delta[Q^\vee]$ 上の線型変換 A_i を

$$A_i(f) = \frac{f - s_i f}{\alpha_i}, \quad 0 \leq i \leq n - 1$$

により定めることができる. S の元の掛け算と A_i とにより $S^\Delta[Q^\vee]$ は \mathbb{A}_{af} 加群の構造を持つ.

定理 2.3 ([5]). $w \in W_{\text{af}}^0$ に対して $\hat{j}_w = A_w(1)$ と定め, $S^\Delta[Q^\vee]$ において \hat{j}_w が生成する S 加群を \mathcal{H}_G とする. \mathcal{H}_G は $H_*^T(\text{Gr}_G)$ と同型な S 代数である. \hat{j}_w はシューベルト類 ξ_w と対応する.

例 2.4. $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ の場合は

$$\hat{j}_{s_0} = \frac{t_{\theta^\vee} - 1}{a_1 - a_3}, \quad \hat{j}_{s_1 s_0} = \frac{(1 - \frac{t_2}{t_3})a_1 + (\frac{t_1}{t_3} - 1)a_2 - (\frac{t_1}{t_3} - \frac{t_2}{t_3})a_3}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}$$

などである.

以上 3 つの定理は一般の G でも成立する. A 型などの古典群の場合は, 対称関数と関連づけてさらに扱いやすい関数を導入できる. 以下 $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ とする. y_1, \dots, y_k を変数とする S 係数の対称な形式冪級数環 $S[[y_1, \dots, y_k]]^{S_k}$ を $\hat{\Lambda}^S$ とする. $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\Omega(a_i|y) = \prod_{j=1}^k (1 - a_i y_j)^{-1} \in \hat{\Lambda}^S$$

とおく. Q^\vee の群環 $S[Q^\vee]$ から $\hat{\Lambda}^S$ への環準同型を

$$t_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \mapsto \frac{\Omega(a_i|y)}{\Omega(a_j|y)} \quad (1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$$

によって定める. この準同型で $S[Q^\vee]$ を $\hat{\Lambda}^S$ に埋め込んでしまうのが便利である.

定理 2.5 ([5]). $\hat{\Lambda}^S$ への W の作用を拡張して W_{af} の作用を

$$s_0(f) = t_{\theta^\vee} s_\theta^a(f)$$

により定めることができる. また $\hat{\Lambda}^S$ 上の線型変換 A_i を

$$A_i(f) = \frac{f - s_i f}{\alpha_i}, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

により定めることができる. S の元の掛け算と A_i とにより $\hat{\Lambda}^S$ は \mathbb{A}_{af} 加群の構造を持つ.

定理 2.6 ([5]). $w \in W_{\mathrm{af}}^0$ に対して $s_w^{(k)}(y|a) = A_w(1) \in \hat{\Lambda}^S$ と定め, $\hat{\Lambda}^S$ において $s_w^{(k)}(y|a)$ が生成する S 加群を $\hat{\Lambda}_{(n)}^S$ とする. $\hat{\Lambda}_{(n)}^S$ は $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ と同型な S 代数である. $s_w^{(k)}(y|a)$ はシューベルト類 σ_w と対応する. $S \rightarrow \mathbb{Z}$ を $a_i = 0$ における特殊化とすると $\mathbb{Z} \otimes_S \hat{\Lambda}_{(n)}^S = \Lambda_{(n)}$ とみなすことができ $s_w^{(k)}(y|0)$ は k -シューア関数と一致する.

$\mathcal{H}_{\mathrm{SL}_n}$ と $\hat{\Lambda}_{(n)}^S$ は S 代数として同型であるが $\hat{\Lambda}_{(n)}^S$ の方が計算には適している. なぜなら $\mathcal{H}_{\mathrm{SL}_n}$ はルートによる局所化で分母にはルートの高いべきがどんどん現れるのに対して $\hat{\Lambda}_{(n)}^S$ の対応する元は S 係数の (対称な) 形式的冪級数である. 特に $a_i = 0$ と特殊化することができる大きな利点である.

$s_w^{(k)}(y|a)$ を 2 重 k -シューア関数と呼ぶ. Lam–Shimozono [10] では Molev の理論に基づいて「2 重 k -シューア関数」を導入している.

例 2.7. $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ の場合

$$s_{s_0}^{(2)}(y|a) = \frac{y_1 + y_2 - (a_1 + a_3)y_1 y_2}{(1 - a_1 y_1)(1 - a_1 y_2)},$$

$$s_{s_1 s_0}^{(2)}(y|a) = \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 - (a_1 + a_2 + a_3)(y_1 + y_2)(y_1 + y_2 + y_3) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)y_1^2 y_2^2}{(1 - a_1 y_1)(1 - a_1 y_2)(1 - a_2 y_1)(1 - a_2 y_2)}$$

である. それぞれ

$$s_{s_0}^{(2)}(y|0) = y_1 + y_2, \quad s_{s_1 s_0}^{(2)}(y|0) = y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2$$

と特殊化される.

2.3 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の場合

$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の場合に前節と同様のことを実行するにはシューアの Q 関数の同変版である factorial Q 関数 ([6], [3]) の双対として $\hat{P}_\lambda(y|a)$ という関数を用いる. ここで λ は strict partition (狭義減少する分割) である. $\hat{P}_\lambda(y|a)$ の導入は中川・成瀬 [15] による. $Q_\lambda(x|a)$ を factorial Q 関数とすると

$$\prod_{i,j} \frac{1+x_i y_j}{1-x_i y_j} = \sum_{\lambda} \hat{P}_\lambda(y|a) Q_\lambda(x|a). \quad (2.2)$$

によって $\hat{P}_\lambda(y|a)$ は定義される.

$\hat{\Lambda}_{(n)}^S$ と類似する環として $\hat{\Gamma}_{(n)}^S = S[\hat{P}_i(y|a) \mid 1 \leq i \leq 2n]$ を用いて定理 2.6 と同様の結果を示すことができる. その際, 非同変の場合のシューベルト類に対応する関数は Lam-Schilling-Shimozono [12] による $P_w^{(n)}(y)$ と一致する. 詳細については [1], [4] を参照されたい.

3 ピエリ規則

2重 k -シューア関数を用いて実行可能な計算の例としてリエリの規則を紹介する. リエリの規則は $j_{\rho_i} j_w$ の展開を具体的に与える公式であり Lam-Shimozono [11] において証明された. ピーターソン代数 $Z_{\mathrm{af}}(S)$ において j_{ρ_i} を A_w の線型結合として記述できればリエリの規則はすぐに従うことがわかっている.

以下では $s_{\rho_i}^{(k)}(y|a) s_w^{(k)}(y|a)$ をテイラー展開することで j_{ρ_i} の明示形を導いている.

例 3.1. $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ の場合

$$\begin{aligned} j_{\rho_1} &= A_0 + A_1 + A_2 + (a_1 - a_2)A_{21} + (a_1 - a_3)A_{01} + (a_2 - a_3)A_{12} + (a_1 - a_3)A_{02} \\ &\quad + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)A_{021} + (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)A_{012} + (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)A_{121} \\ &\quad + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)A_{0121} \\ j_{\rho_2} &= A_{10} + A_{21} + A_{02} + (a_1 - a_3)A_{021} + (a_1 - a_3)A_{010} + (a_2 - a_3)A_{102} + (a_2 - a_3)A_{121} \\ &\quad + (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)A_{0102} + (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)A_{0121}. \end{aligned}$$

(2.1) と比較せよ.

例 3.2. $SL_4(\mathbb{C})$ の場合

$$\begin{aligned} j_{\rho_1} = & A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \\ & + (a_1 - a_2)A_{21} + (a_1 - a_3)A_{32} + (a_1 - a_4)A_{31} \\ & + (a_2 - a_4)A_{12} + (a_3 - a_4)A_{23} \\ & + (a_1 - a_4)A_{01} + (a_1 - a_4)A_{02} + (a_1 - a_4)A_{03} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)A_{321} + (a_1 - a_2)(a_1 - a_4)A_{021} \\ & + (a_1 - a_2)(a_2 - a_4)A_{121} + (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)A_{231} \\ & + (a_2 - a_4)(a_3 - a_4)A_{123} + (a_1 - a_4)^2 A_{031} \\ & + (a_1 - a_3)(a_3 - a_4)A_{232} + (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)A_{032} \\ & + (a_1 - a_4)(a_2 - a_4)A_{012} + (a_1 - a_4)(a_3 - a_4)A_{023} \\ & + (a_1 - a_3)(a_2 - a_4)A_{312} \\ & + (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_4)A_{0312} \\ & + (a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)A_{0123} + (a_1 - a_2)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)A_{1231} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_4)(a_3 - a_4)A_{0231} + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_3 - a_4)A_{2321} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)A_{0321} + (a_1 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)A_{3123} \\ & + (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_3 - a_4)A_{0232} + (a_1 - a_2)(a_1 - a_4)(a_2 - a_4)A_{0121} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)A_{3121} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)A_{01231} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)A_{12321} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_3 - a_4)A_{02321} \\ & + (a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)A_{01232} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_4)A_{01321} \\ & + (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)A_{012321} \end{aligned}$$

謝辞

講演の機会を与えてくださいました世話人の皆様、特に筑波大学の桑原敏朗様、また、報告集のお世話をしてくださった高橋篤史様に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 池田岳, シンプレクティック群のアフィン・グラスマン多様体のトーラス同変シューベルト類, 数理解析研究所講究録.
- [2] 池田岳, Symplectic affine Grassmannian の同変 Schubert 類, 数理解析研究所講究録 No. 1870, (2013)
- [3] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, Adv. Math. 215, 1–23 (2007)
- [4] T. Ikeda and S. Iwao, M. Shimozono, Equivariant homology of the affine Grassmannian of the symplectic group, in preparation
- [5] T. Ikeda, M. Shimozono, and K. Yamaguchi, K -theoretic double k -Schur functions, in preparation

- [6] V. Ivanov. Interpolation analogues of Schur Q-functions. (English summary) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 307 (2004), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 10, 99–119, 281–282; reprinted in J. Math. Sci. (N.Y.) 131, no. 2, 5495–5507 (2005)
- [7] T. Lam, Schubert polynomials for the affine Grassmannian. J. Amer. Math. Soc. 21, no. 1, 259–281 (2008)
- [8] T. Lam, L. Lapointe, J. Morse, A. Schilling, M. Shimozono, and M. Zabrocki. k -Schur functions and affine Schubert calculus. Fields Institute Monographs, 33. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, viii+219 pp (2014)
- [9] T. Lam and M. Shimozono. Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian, Acta Math. **204** 49–90 (2010)
- [10] T. Lam and M. Shimozono, k -Double Schur functions and equivariant (co)homology of the affine Grassmannian, Math. Ann. 356, 1379–1404 (2013)
- [11] T. Lam and M. Shimozono. Equivariant Pieri rule for the homology of the affine Grassmannian. J. Algebraic Combin. 36, no. 4, 623–648 (2012)
- [12] T. Lam, A. Schilling, and M. Shimozono. Schubert polynomials for the affine Grassmannian of the symplectic group. Math. Z. **264**, no. 4, 765–811 (2010)
- [13] L. Lapointe, A. Lascoux, and J. Morse, Tableaux atoms and a new Macdonald positivity conjecture, Duke Math. J. **116** (1), 103–146 (2003)
- [14] L. Lapointe and J. Morse, A k -tableaux characterization of k -Schur functions, Adv. Math. **213**(1), 183–204 (2007)
- [15] M. Nakagawa and H. Naruse, Generalized (co)homology of the loop spaces of classical groups and the universal factorial Schur P- and Q-functions. (English summary) Schubert calculus—Osaka 2012, 337–417, Adv. Stud. Pure Math., **71**, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2016)
- [16] D. Peterson. MIT lecture notes, (1997)

交差族の組合せ論とその周辺

徳重 典英 (琉球大学教育学部)

1 はじめに

有限集合を固定して、例えば $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とし、その部分集合族 (a family of subsets) $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ を考える。ただし $2^{[n]}$ は $[n]$ の部分集合全体 (べき集合) である。部分集合族 \mathcal{F} が交差性の条件

$$F \cap F' \neq \emptyset \quad (1)$$

をみたすとき \mathcal{F} を交差族とよび $|\mathcal{F}|$ をそのサイズという。

問題 1 交差族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ の最大サイズは何か？

それは 2^{n-1} である。 $[n]$ の各部分集合 F について、 F とその補集合 $[n] \setminus F$ を組にすると、 $2^{[n]}$ は 2^{n-1} 個の組に分割される。 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ を交差族としよう。 $F \in \mathcal{F}$ なら $[n] \setminus F \notin \mathcal{F}$ だから、 $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ がわかる。等号成立の \mathcal{F} としては、例えば要素 1 を含む部分集合全体 $\{F \in 2^{[n]} : 1 \in F\}$ をとればよい。このように $|\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F| = 1$ をみたす交差族を「一点を固定する交差族」という。一般に各 $0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ について

$$\mathcal{F}_i := \{F \in 2^{[n]} : |F \cap [2i+1]| \geq i+1\} \quad (2)$$

とおくと、これもサイズ 2^{n-1} の交差族である。 \mathcal{F}_0 は一点を固定するが、 $i \geq 1$ ならば \mathcal{F}_i が固定する点はない。

上の問題は難しくないが、部分集合を選ぶ範囲を $2^{[n]}$ から $\binom{[n]}{k} := \{F \subset [n] : |F| = k\}$ に取り替えたらどうだろうか。

問題 2 交差族 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ の最大サイズは何か？

もし $n < 2k$ であれば $\binom{[n]}{k}$ 自身が交差族である。また $n \geq 2k$ のとき、要素 1 を固定する k 点部分集合族

$$\mathcal{F} = \left\{ F \in \binom{[n]}{k} : 1 \in F \right\}$$

はサイズ $\binom{n-1}{k-1}$ の交差族である。実は次が成り立つ。

定理 1 (Erdős–Ko–Rado [14]) $n \geq 2k$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族ならば、 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ である。さらに $n > 2k$ でサイズが $\binom{n-1}{k-1}$ の交差族は一点を固定する。

この結果は Erdős, Ko, Rado の三人がケンブリッジに滞在していた 1930 年代後半に得られたが、論文 [14] が出版されたのは 1960 年代に入ってからだった。Erdős によれば、当時ケンブリッジではこのような結果に誰も興味を示さなかったという。彼らの論文はその後、多数の論文に引用され¹⁾ 交差族に関する研究の出発点のひとつになった。

交差族の研究は (1) のような交差性の条件をみたす部分集合族などについてその最大サイズを評価し、それが決定できる場合には最大サイズを達成する構造を調べる。本稿では典型的な交差性と対応する結果、それらの代数的な証明手法や関連する未解決問題を紹介する。

2 Erdős–Ko–Rado の定理の証明とその q 類似

Erdős–Ko–Rado の定理の証明は簡明で短いものも知られているが、ここでは線形代数を利用する証明を紹介し、次節以降でその手法の拡張や一般化をおこなう。

まずグラフの用語を確認しよう。有限集合 V と E が $E \subset \binom{V}{2}$ をみたすとき、 $G = (V, E)$ をグラフ、 V を頂点集合、 E を辺集合という。二頂点 $x, y \in V$ が $\{x, y\} \in E$ をみたすとき、 x と y は隣接するといひ $x \sim y$ とかく。頂点 $x \in V$ に対して x と隣接する頂点の個数を x の次数とよび、次数が一定のグラフを正則グラフ（一定値が d ならば d 正則グラフ）という。頂点の部分集合 $I \subset V$ が独立集合とは、 I 内のどの 2 点

1) 2023 年 12 月 12 日の時点で MathSciNet によれば 649 の論文、87 のレビューに引用されている。

も隣接しないことである。そのような I の最大サイズを G の独立数とよび $\alpha(G)$ とかく。交差族が独立集合に対応するようなグラフを構成できれば、交差族の最大サイズ問題を独立数の評価問題に落とし込める。

グラフ $G = (V, E)$ の隣接行列 $A = (a_{x,y})$ を定義しよう。これは $|V|$ 次実対称行列で $x, y \in V$ に対してその (x, y) 成分を

$$a_{x,y} = \begin{cases} 1 & x \sim y \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定める。隣接行列の固有値はグラフのラベル付けに依存しないから、これをグラフの固有値という。頂点数が N の連結²⁾な d 正則グラフの最大固有値は d である。さらに最小固有値を λ_{\min} とすると

$$\alpha(G) \leq \frac{-\lambda_{\min}}{d - \lambda_{\min}} N \quad (3)$$

が成り立つ。これを Hoffman の ratio bound [29] という。

(3) の証明 グラフ G は連結で N 頂点 d 正則であるとし、その隣接行列を A とする。固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, 対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ とし、これが標準内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して正規直交基底であるとしよう。成分が全部 1 のベクトル $\mathbf{1}$ は固有値 d の固有ベクトルだから $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}$ としておく。このとき $\lambda_1 = d$ である。任意の独立集合 $I \subset V(G)$ をとり、そのサイズを α (つまり $|I| = \alpha \leq \alpha(G)$), I の特性ベクトルを $\mathbf{1}_I$ とする。すなわち $(\mathbf{1}_I)_x$ は $x \in I$ なら 1, そうでなければ 0 である。 I の 2 点を結ぶ辺はないから $x \sim y$ なら $(\mathbf{1}_I)_x (\mathbf{1}_I)_y = 0$ である。したがって

$$\langle \mathbf{1}_I, A \mathbf{1}_I \rangle = \sum_x \sum_y a_{x,y} (\mathbf{1}_I)_x (\mathbf{1}_I)_y = \sum_{x \sim y} (\mathbf{1}_I)_x (\mathbf{1}_I)_y = 0$$

である。ここで $\mathbf{1}_I = \sum \alpha_i \mathbf{v}_i$ と展開すると

$$\alpha = \langle \mathbf{1}_I, \mathbf{1}_I \rangle = \langle \sum \alpha_i \mathbf{v}_i, \sum \alpha_i \mathbf{v}_i \rangle = \sum \alpha_i^2$$

を得る。これと $\langle \mathbf{1}_I, A \mathbf{1}_I \rangle = 0$ から

$$0 = \langle \sum \alpha_i \mathbf{v}_i, \sum \alpha_i \lambda_i \mathbf{v}_i \rangle = \sum \alpha_i^2 \lambda_i \geq d \alpha_1^2 + \lambda_{\min} \sum_{i \geq 2} \alpha_i^2 = d \alpha_1^2 + \lambda_{\min} (\alpha - \alpha_1^2)$$

2) どの 2 頂点も辺を辿って到達できること。

である。この不等式に

$$\alpha = \langle \mathbf{1}_I, \mathbf{1} \rangle = \langle \sum \alpha_i \mathbf{v}_i, \sqrt{N} \mathbf{v}_1 \rangle = \alpha_1 \sqrt{N}$$

を代入して整理すると ratio bound の不等式 (3) を得る。 \square

以下 $n \geq 2k$ を仮定し、Kneser グラフ $G_{n,k} = (V, E)$ を

$$V = \binom{[n]}{k}, \quad E = \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : x \cap y = \emptyset\}$$

と定める。これは $\binom{n}{k}$ 頂点 $\binom{n-k}{k}$ 正則グラフで、固有値は

$$\left\{ (-1)^i \binom{n-k-i}{k-i} : i = 0, 1, \dots, k \right\},$$

対応する重複度は $\binom{n}{i} - \binom{n-1}{i-1}$ である³⁾。特に最大固有値は $\binom{n-k}{k}$ 、最小固有値は $-\binom{n-k-1}{k-1}$ で、ratio bound (3) により

$$\alpha(G_{n,k}) \leq \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

がしたがう。一方、 $G_{n,k}$ の独立集合は $\binom{[n]}{k}$ 上の交差族であるから、上の不等式から定理 1 の不等式が得られた。

この証明の利点として、定理 1 の q 類似が同様の方法で得られる。ここで q を素数べきとし、 \mathbb{F}_q を q 元体とする。さらに V_n を \mathbb{F}_q 上の n 次元ベクトル空間とし、その k 次元部分空間全体を $\left[\begin{smallmatrix} V_n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ とかくと $\left| \left[\begin{smallmatrix} V_n \\ k \end{smallmatrix} \right] \right| = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ である。ただし

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{k-i} - 1}$$

とする。部分空間族 $\mathcal{F} \subset \left[\begin{smallmatrix} V_n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ が交差族であるとは、任意の $F, F' \in \mathcal{F}$ について

$$\dim(F \cap F') \neq 0$$

が成り立つことである。交差族 \mathcal{F} の最大サイズを求めるために、Kneser グラフの q 類似であるグラフ $G_{n,k}^{(q)} = (V, E)$ を

$$V = \left[\begin{smallmatrix} V_n \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad E = \{\{x, y\} \in \left[\begin{smallmatrix} V_n \\ 2 \end{smallmatrix} \right] : \dim(x \cap y) = 0\}$$

3) 例えば [28] の 6 章参照。

と定める。これは $\binom{n}{k}$ 頂点 $\binom{n-k}{k}$ 正則グラフで、最小固有値は $-\binom{n-k-1}{k-1}$ である⁴⁾。このグラフに ratio bound (3) を適用して

$$\alpha(G_{n,k}^{(q)}) \leq \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

を得る。つまり次のことがわかった。

定理 2 (Hsieh [30]) $n \geq 2k$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族ならば、 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ である。

3 測度版 EKR

前節では k 点部分集合族 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ のサイズとして部分集合の個数を数えた。ここで k の制限のかわりに集合族 \mathcal{F} を $\Omega := 2^{[n]}$ からとり、部分集合の要素数に応じて重みをつけてその和に注目しよう。このため実数 $p \in (0, 1)$ を固定して $F \in \Omega$ の重みを

$$w(F) := p^{|F|}(1-p)^{n-|F|}$$

とし、測度 $\mu_p : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ を $\mathcal{F} \in 2^\Omega$ に対して

$$\mu_p(\mathcal{F}) := \sum_{F \in \mathcal{F}} w(F) \quad (4)$$

と定める⁵⁾。これは

$$\mu_p(\Omega) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

をみたすので確率測度⁶⁾である。また (2) の \mathcal{F}_0 を $\mathcal{F}_0 = \{\{1\} \cup G : G \in 2^{[n] \setminus \{1\}}\}$ と考えると重みが $w(\{1\} \cup G) = p \cdot p^{|G|}(1-p)^{(n-1)-|G|}$ と表せることから

$$\mu_p(\mathcal{F}_0) = p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = p$$

4) 例えば [28] の 9 章参照。

5) この測度は $[n]$ の各要素を独立ランダムに確率 p で選んで得られるランダム部分集合 X_p が \mathcal{F} に入る確率 $\mathbb{P}[X_p \in \mathcal{F}]$ と解釈できる。

6) 組合せ論の問題としては、単にハイパーグラフの大きさを辺の重みの和で測るというだけで確率測度である必要はないが、確率測度であれば確率論の道具を使える利点がある。一方、重みに負の値も許すことが本質的な場合 (例えば [43] の定理 1.2) もある。より一般的な重み付けに関する交差族の結果は [5] に詳しい。この点について質問して下さった方に感謝します。

を得る。実は $p \leq \frac{1}{2}$ ならば \mathcal{F}_0 より大きい測度をもつ交差族はない。

定理 3 $p \leq \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が交差族ならば、 $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p$ である。さらに $p < \frac{1}{2}$ で測度が p の交差族は一点を固定する。

定理 3 の条件 $p \leq \frac{1}{2}$ は、次の意味で最善である。すなわち、 $p > \frac{1}{2}$ ならば交差族 $\tilde{\mathcal{F}}$ を $\tilde{\mathcal{F}} = \{F \in 2^{[n]} : |F| > \frac{n}{2}\}$ と定めると $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = 1$ である。

定理 3 の ratio bound を用いた証明を紹介するため、隣接行列を拡張しよう。(3) の証明では隣接行列 $A = (a_{x,y})$ の次の性質を利用した。

- (i) A の行和は正で一定。
- (ii) $x \not\sim y$ なら $a_{x,y} = 0$ 。
- (iii) A の固有ベクトルからなる直交基底がとれる。

そこでこれらの条件をみたす行列を改めて隣接行列とよぼう（擬隣接行列ともいう）。この定義では $x \sim y$ であっても $a_{x,y} = 1$ を要求しない。また (iii) が成り立つような内積が入っていれば、 A は対称行列でなくてもよい。隣接行列の定義をこのように変更しても前節にのべた (3) の証明はそのまま通用する。ただし (3) の d は固有ベクトル $\mathbf{1}$ に対応する固有値に置き換える。以下の証明は Friedgut [26] による。

定理 3 の証明の概略 定理 1 の証明に Kneser グラフを使ったように、定理 3 の証明のためにグラフ $G = (V, E)$ を構成しよう。頂点集合は $V = 2^{[n]}$ とし、辺集合は $E = \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : x \cap y = \emptyset\}$ とする。このとき G の独立集合 $I \subset V$ は交差族である。このグラフの隣接行列 A を

$$A := A_1 \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_1 \quad (n \text{ times})$$

と定義する（以下、この右辺を $A_1^{\otimes n}$ ともかく）。ただし

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 - \frac{p}{1-p} & \frac{p}{1-p} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。このとき $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$ で、条件 (i) が成り立つ。 A の定義式右辺の i 番目の A_1 の行、列は $\emptyset, \{i\}$ の順に対応し、したがって A の行、列はそれぞれ

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}, \dots$$

の順に紐付けられる。この対応で条件 (ii) がみたされることがわかる。条件 (iii) のために μ_p から定まる内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ を $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^V$ に対して

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_p := \sum_{x \in V} (\mathbf{u})_x (\mathbf{v})_x \mu_p(\{x\})$$

と定義する。このとき $\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle_p = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_p$ で (iii) が成り立つ。

行列 A の固有値、固有ベクトルは Kneser グラフの場合よりも容易に得られる。実際、 $x \in 2^{[n]}$ に対応する固有値は $(-\frac{p}{1-p})^{|x|}$ で、特に $\mathbf{1}$ に対応する固有値（最大固有値）は 1、最小固有値は $-\frac{p}{1-p}$ である。したがって ratio bound より

$$\alpha(G) \leq \frac{\frac{p}{1-p}}{1 + \frac{p}{1-p}} = p$$

を得る。これで定理 3 の不等式が証明できた。 □

定理 3 と定理 1 は、

$$p \iff \frac{k}{n} \tag{5}$$

を介して対応している。実際、 $\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n} \binom{n}{k}$ に注意すると定理 1 は次のように書き換えられる。

$\frac{k}{n} \leq \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族ならば、 $|\mathcal{F}| / \binom{n}{k} \leq \frac{k}{n}$ である。さらに $\frac{k}{n} < \frac{1}{2}$ でサイズの比（サイズを $\binom{n}{k}$ で割った値）が $\frac{k}{n}$ の交差族は一点を固定する。

このように交差族 \mathcal{F} に関する結果は、 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ のサイズに関するものと $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ の μ_p 測度に関するものが (5) を通して対応していることがある。そのような場合には片方の結果が他方を導くのに役立つことが多い。しかし片方の結果から他方の（等価な）結果を自動的に得るようなメタ定理は知られていない。

問題 3 定理 1 と定理 3 を特別な場合を含むような、より一般の定理を見つけよ。

問題 4 定理 3 の q 類似（定理 2 の測度版）を見つけよ。

4 t 交差族

部分集合族 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ は任意の $F, F' \in \mathcal{F}$ について $|F \cap F'| \geq t$ をみたすとき、 t 交差族という。サイズ $\binom{n-t}{k-t}$ の t 交差族の例として $\{F \in \binom{[n]}{k} : [t] \subset F\}$ がある。このように $|\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F| = t$ をみたす交差族を「 t 点を固定する交差族」という。

定理 4 $n \geq (t+1)(k-t+1)$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が t 交差族ならば、 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-t}{k-t}$ である。さらに $n > (t+1)(k-t+1)$ でサイズが $\binom{n-t}{k-t}$ の t 交差族は t 点を固定する。

この結果よりやや弱い主張が Erdős, Ko, Rado [14] や Frankl [19] によって組合せ論的手法で得られていたが、最終的に Wilson [45] は ratio bound を用いて定理 4 を完全に証明した。なお後述する定理 5 は定理 4 を含むもっと強い結果であり、これは組合せ論的な証明しか知られていない。

Wilson の証明ではまず Kneser グラフを一般化して $G_{n,k,t} = (V, E)$ を $V = \binom{[n]}{k}$, $E = \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : |x \cap y| < t\}$ と定める。このグラフの独立集合は t 交差族なので、独立数を ratio bound で評価したい。それには「よい」隣接行列 $A = (a_{x,y})$ が必要で、 $a_{x,y}$ の値を $|x \cap y|$ に応じて「うまく」調整しなければならない。結論だけ書けば

$$A = \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^{t-1-i} \binom{k-1-i}{k-t} \binom{n-k-t+i}{k-t}^{-1} B_{k-i}$$

とすればよい。ただし B_j は $\binom{n}{k}$ 次行列で、その (x, y) 成分は $\binom{|x \cap y|}{j}$ である。この隣接行列に ratio bound を適用すると $n \geq (t+1)(k-t+1)$ ならば目標の上界 $\alpha(G_{n,k,t}) \leq \binom{n-t}{k-t}$ が得られる。さらに固有空間を詳しく見ることで、 $n > (t+1)(k-t+1)$ ならば等号を成立させる独立集合が t 点を固定することもわかる⁷⁾。

実は $n = (t+1)(k-t+1)$ のときは、サイズが $\binom{n-t}{k-t}$ の t 交差族は t 点を固定するものだけではない。ここで $i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-t}{2} \rfloor$ に対して、部分集合族 \mathcal{F}_i を

$$\mathcal{F}_i := \left\{ F \in \binom{[n]}{k} : |F \cap [t+2i]| \geq t+i \right\}$$

7) 例えば [28] の 8 章を見よ。

と定めると、これらは t 交差族であり i が異なれば同型でない。ただし 2 つの部分集合族 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset 2^{[n]}$ が同型とは、 $[n]$ 上の置換 σ が存在して $\mathcal{G} = \{\{\sigma(x) : x \in F\} : F \in \mathcal{F}\}$ をみたすことと定義する。 $n \geq (t+1)(k-t+1)$ ならば $\max_i |\mathcal{F}_i| = |\mathcal{F}_0|$ であり、 $n = (t+1)(k-t+1)$ ならば $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_1|$ である。 $n < 2k-t$ ならば $\binom{[n]}{k}$ は t 交差族であるが、 $n \geq 2k-t$ のときの t 交差族の最大サイズは何か？ それは $\max_i |\mathcal{F}_i|$ である。Ahlsweede と Khachatryan は純粋に組合せ論的な手法でこの強い結果⁸⁾を得た。

定理 5 (Ahlsweede–Khachatryan [2, 3]) $n \geq k \geq t \geq 1$, $0 \leq i \leq \frac{n-t}{2}$ とし、 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ を t 交差族とする。もし

$$(k-t+1) \left(2 + \frac{t-1}{i+1}\right) < n < (k-t+1) \left(2 + \frac{t-1}{i}\right)$$

ならば⁹⁾、 $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_i|$ であり、等号成立は同型を除いて \mathcal{F}_i に限る。もし

$$(k-t+1) \left(2 + \frac{t-1}{i+1}\right) = n$$

ならば、 $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_i| = |\mathcal{F}_{i+1}|$ であり、等号成立は同型を除いて \mathcal{F}_i と \mathcal{F}_{i+1} に限る¹⁰⁾。

定理 5 の測度版¹¹⁾を述べるため、 t 交差族 $\mathcal{G}_i \subset 2^{[n]}$ ($0 \leq i \leq \frac{n-t}{2}$) を次で定める。

$$\mathcal{G}_i := \left\{ G \in 2^{[n]} : |G \cap [t+2i]| \geq t+i \right\}.$$

定理 6 $n \geq t \geq 1$, $0 \leq i \leq \frac{n-t}{2}$ とし、 $\mathcal{G} \subset 2^{[n]}$ を t 交差族とする。もし

$$\frac{i}{t+2i-1} < p < \frac{i+1}{t+2i+1}$$

ならば、 $\mu_p(\mathcal{G}) \leq \mu_p(\mathcal{G}_i)$ であり、等号成立は同型を除いて \mathcal{G}_i に限る。もし

$$p = \frac{i+1}{t+2i+1}$$

ならば、 $\mu_p(\mathcal{G}) \leq \mu_p(\mathcal{G}_i) = \mu_p(\mathcal{G}_{i+1})$ であり、等号成立は同型を除いて \mathcal{G}_i と \mathcal{G}_{i+1} に限る¹²⁾。

8) 定理 5 は特別な場合 ($i=0$ の場合) として定理 4 を含む。

9) ただし $i=0$ のときは $(k-t+1)(t+1) < n$ と読み替える。

10) ただし $i=0$ かつ $t=1$ の場合を除く。

11) 定理 6 は例えば [1, 10, 39, 16] にやや弱い形からより精密な形の定式化が見られる。

12) ただし $i=0$ かつ $t=1$ の場合を除く。

定理 6 の $p \leq \frac{1}{t+1}$ ($i = 0$) の場合、つまり定理 4 の測度版は Friedgut [26] によって ratio bound を利用する証明が与えられた。これは前節で述べた定理 3 の証明を拡張したもののだが、隣接行列の成分は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^t)$ からとる。彼は後に隣接行列を実行列として構成する方法も見出し、それは [15] に紹介されている。

問題 5 定理 5 の $n < (t+1)(k-t+1)$ の場合、および定理 6 の $p > \frac{1}{t+1}$ の場合について、代数的な証明を見つけよ¹³⁾。

$n \geq k \geq t \geq 1$ とし、 V_n を \mathbb{F}_q 上の n 次元ベクトル空間とする。部分空間族 $\mathcal{F} \subset \left[\begin{smallmatrix} V_n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ が t 交差するとは、任意の $F, F' \in \mathcal{F}$ について $\dim(F \cap F') \geq t$ が成り立つことである。このとき定理 5 の q 類似が ratio bound から得られる。

定理 7 (Frankl–Wilson [25]) $\mathcal{F} \subset \left[\begin{smallmatrix} V_n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ を t 交差族とする。このとき $n \geq 2k$ ならば $|\mathcal{F}| \leq \left[\begin{smallmatrix} n-t \\ k-t \end{smallmatrix} \right]$ であり、等号成立は $n > 2k$ ならば、ある $T \in \left[\begin{smallmatrix} V_n \\ t \end{smallmatrix} \right]$ について $\mathcal{F} = \{F \in \left[\begin{smallmatrix} V_n \\ k \end{smallmatrix} \right] : T \subset F\}$ に限る。 $2k - t < n \leq 2k$ ならば $|\mathcal{F}| \leq \left[\begin{smallmatrix} 2k-t \\ k \end{smallmatrix} \right]$ であり、等号成立は $n < 2k$ ならば、ある $W \in \left[\begin{smallmatrix} V \\ 2k-t \end{smallmatrix} \right]$ について $\mathcal{F} = \left[\begin{smallmatrix} W \\ k \end{smallmatrix} \right]$ に限る。

ちょうど $n = 2k$ の場合の極値構造 (サイズ最大の \mathcal{F} の構造) は定理 7 の 2 種類の構造に限られる。これは田中 [37] によってはじめて証明された。

問題 6 定理 7 の組合せ論的な証明を見つけよ。

5 互いに交差する集合族と半正定値計画法

二つの部分集合族 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ は、任意の $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ に対して $A \cap B \neq \emptyset$ をみたすとき、互いに交差するという。Pyber は定理 1 を互いに交差する集合族に拡張することを考えた。実際、定理 1 および定理 3 は以下のような自然な拡張をもつ。

13) これには次節で紹介する半正定値計画法が有効かもしれない。

定理 8 ([33, 32]) $n \geq 2k \geq 2l$ で $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ と $\mathcal{B} \subset \binom{[n]}{l}$ が互いに交差するならば、 $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}$ である。

定理 9 ([40, 36]) $\frac{1}{2} \geq p_1 \geq p_2$ で $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$ と $\mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ が互いに交差するならば、 $\mu_{p_1}(\mathcal{A})\mu_{p_2}(\mathcal{B}) \leq p_1 p_2$ である。

同様に定理 2 も拡張できる。これを述べるため、 V_n を \mathbb{F}_q 上の n 次元ベクトル空間とし、 V_n の部分空間族 \mathcal{A}, \mathcal{B} が互いに交差するとは、任意の $A \in \mathcal{A}$ と $B \in \mathcal{B}$ が $\dim(A \cap B) \neq 0$ をみたすことと定義する。このとき次が成り立つ。

定理 10 (Suda–Tanaka [35]) $n \geq 2k \geq 2l$ で $\mathcal{A} \subset \binom{V_n}{k}$ と $\mathcal{B} \subset \binom{V_n}{l}$ が互いに交差するならば、 $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}$ である。

定理 8 と定理 9 ははじめ組合せ論的な方法で証明された。また $k = l$ あるいは $p_1 = p_2$ の場合に限ると、これら 3 つの結果は ratio bound の議論を拡張して示すこともできる¹⁴⁾。一方、定理 10 の組合せ論的な証明は知られていない。須田と田中は対応する半正定値計画問題を解くことで定理 10 を証明し、同時にこれら 3 つの結果を証明する統一的な枠組みを与えた。半正定値計画法は線形計画法の拡張で、後者の変数が実数を動くのに対して、前者では変数は実対称半正定値行列を動く。線形計画法と同様に半正定値計画でも主問題に対応する双対問題があり、それらの間に弱双対性が成り立つ¹⁵⁾。

ここでは定理 9 を例に半正定値計画法がどのように利用できるのかを略述する。やや一般的な設定を扱うため、与えられた二部グラフ G の頂点集合の二部分割を $V(G) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ とし、 $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ とおく。頂点の部分集合 $U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ が互いに独立であるとは、 U_1 と U_2 の間に辺がないことである。そのような集合で測度の積 $\mu_{p_1}(U_1)\mu_{p_2}(U_2)$ が最大となるものを見つきたい。ただし μ_{p_i} は Ω_i 上の任意の測度である。

行と列が Ω でインデックスされた実行列全体を $\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ 、列ベクトル全体を \mathbb{R}^{Ω} とかき、 $\mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_j}$ と \mathbb{R}^{Ω_i} も同様に定める。成分が全部 1 の行列を $J_{i,j} \in \mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_j}$ とかき、

14) 例えば [24] の 28 章または [41] 参照。

15) 半正定値計画法の概説、入門書として [38, 27] などがある。

$x \in \Omega_i, y \in \Omega_j$ に対して (x, y) 成分のみ 1, その他の成分が 0 の行列を $E_{x,y} \in \mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_j}$ とし、対角成分 (x, x) (ただし $x \in \Omega_i$) が $\mu_{p_i}(\{x\})$ である対角行列を $\Delta_i \in \mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_i}$ とかく。実対称行列で $\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ に属するもの全体を $S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ とし、 $X \in S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ が半正定値であることを $X \succeq 0$, 成分がすべて非負であることを $X \geq 0$ とかく。 $X, Y \in S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ に対して、その内積を $\text{trace}(X^T Y)$ と定義し $X \bullet Y$ とかく。

ここで $X \in S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ を変数とする次の半正定値主問題を考える：

$$\begin{aligned}
\text{(P): maximize} \quad & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2} \Delta_2 \\ \frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1} \Delta_1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X \\
\text{subject to} \quad & \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \bullet X = 1, \\
& \begin{bmatrix} 0 & E_{x,y} \\ E_{y,x} & 0 \end{bmatrix} \bullet X = 0 \text{ for } x \in \Omega_1, y \in \Omega_2, x \sim y, \\
& X \succeq 0, X \geq 0.
\end{aligned}$$

グラフ G の互いに独立な集合 $U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ から問題 (P) の実行可能解が得られる。実際、 U_i の特性ベクトルを $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{\Omega_i}$ (縦ベクトル) とし、

$$X_{U_1, U_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_{p_1}(U_1)}} \mathbf{x}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_{p_2}(U_2)}} \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_{p_1}(U_1)}} \mathbf{x}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_{p_2}(U_2)}} \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}^T \in S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$$

とおくと、 X_{U_1, U_2} は (P) の実行可能解でその目的関数の値は

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2} \Delta_2 \\ \frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1} \Delta_1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X_{U_1, U_2} = \sqrt{\mu_{p_1}(U_1) \mu_{p_2}(U_2)}$$

である。

上に述べた主問題に対応する双対問題は

$$\begin{aligned}
\text{(D): minimize} \quad & \alpha + \beta \\
\text{subject to} \quad & S := \begin{bmatrix} \alpha \Delta_1 & -\frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2} \Delta_2 \\ -\frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1} \Delta_1 & \beta \Delta_2 \end{bmatrix} \\
& + \sum_{x \sim y} \gamma_{x,y} \begin{bmatrix} 0 & E_{x,y} \\ E_{y,x} & 0 \end{bmatrix} - Z \succeq 0, \\
& Z \geq 0
\end{aligned}$$

である。ただし $\alpha, \beta, \gamma_{x,y} \in \mathbb{R}$ および $Z \in SR^{\Omega \times \Omega}$ が変数で、 $\sum_{x \sim y}$ は隣接する $x \in \Omega_1, y \in \Omega_2$ の和を意味する。このとき $i = 1, 2$ に対して $\Delta_i \bullet (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top) = \mu_i(U_i)$ であり、 $x \sim y$ ならば $E_{x,y} \bullet (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^\top) = 0$ である。さらに弱双対性から $\alpha + \beta$ は $\sqrt{\mu_{p_1}(U_1)\mu_{p_2}(U_2)}$ の上界を与えるので、次が成り立つ¹⁶⁾。

定理 11 二部グラフ G の二部分割を $V(G) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ とし、 $i = 1, 2$ に対して Ω_i 上の測度を μ_{p_i} とする。グラフ G において $U_1 \subset \Omega_1$ と $U_2 \subset \Omega_2$ が互いに独立で、 $(\alpha, \beta, \gamma_{x,y}, Z)$ が双対問題 (D) の実行可能解であれば、

$$\mu_{p_1}(U_1)\mu_{p_2}(U_2) \leq (\alpha + \beta)^2 \quad (6)$$

が成り立つ。

定理 9 を示すため、 Ω_1, Ω_2 をそれぞれ $2^{[n]}$ のコピーとし、二部グラフ G を

$$V(G) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2, \quad E(G) = \{\{x, y\} : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2, x \cap y = \emptyset\}$$

と定義する。さらに測度 μ_{p_i} を (4) で定め、この設定で (6) の右辺が最適値 $p_1 p_2$ となるような実行可能解を見つけよう。実際、次の $(\alpha, \beta, \gamma_{x,y}, Z)$ がそれを与え、ここから定理 9 が得られる。

$$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{p_1 p_2}}{2}, \quad \sum_{x \sim y} E_{x,y} = \frac{1 - p_2}{2} \Delta_1^{\otimes n} A_{1,2}^{\otimes n}, \quad Z = \frac{(p_1 - p_2)p_2}{2\sqrt{p_1 p_2}} \begin{bmatrix} \Delta_1 A_{1,1}^{\otimes n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ただし

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 - p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix}, \quad A_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p_j}{1-p_i} & \frac{p_j}{1-p_i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする¹⁷⁾。

二つの部分集合族 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ は、任意の $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ に対して $|A \cap B| \geq t$ をみたすとき、互いに t 交差するという。同様に互いに t 交差する部分空間族も定義できる。

16) 詳しくは [36] または [24] の 29 章を見よ。

17) 詳しくは [36] または [24] の 30 章を見よ。

定理 8–10 をこの形に拡張することが考えられるが、 $k = l$ あるいは $p_1 = p_2$ の場合の一部を除いて未解決である。例えば定理 9 は次の形の拡張が期待できるだろう¹⁸⁾。

予想 7 $\frac{1}{t+1} \geq p_1 \geq p_2$ で $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$ と $\mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ が互いに t 交差するならば、 $\mu_{p_1}(\mathcal{A})\mu_{p_2}(\mathcal{B}) \leq (p_1 p_2)^t$ である。

6 対称群における交差族

$[n]$ 上の置換全体 (n 次対称群) を S_n とかく。置換 $\sigma \in S_n$ を順列 $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ と同一視し、二つの置換 σ, τ の共通部分を $\sigma \cap \tau := \{i \in [n] : \sigma(i) = \tau(i)\}$ と定めて S_n における交差族を定義しよう。すなわち、置換の部分集合 $\mathcal{F} \subset S_n$ が交差族であるとは、任意の $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$ についてある i が存在して $\sigma(i) = \tau(i)$ をみたすことである。

任意の $i, j \in [n]$ を固定したとき $\{\sigma \in S_n : \sigma(i) = j\}$ はサイズ $(n-1)!$ の交差族である。この形の交差族を S_n の 1-coset とよぶ。 S_n の交差族の最大サイズは Deza ら [9] によって決定されたが、さらに Cameron ら [7] と Larose ら [31] は独立に極値構造が一意的であることも示した。まとめると次が成り立つ。

定理 12 $\mathcal{F} \subset S_n$ が交差族ならば、 $|\mathcal{F}| \leq (n-1)!$ である。等号成立の \mathcal{F} は S_n の 1-coset に限る。

この定理の不等式は clique–coclique bound から容易に得られる¹⁹⁾が、ここでは ratio bound から導いてみよう。固定点を持たない置換 (derangement) 全体を

$$D := \{\sigma \in S_n : \text{任意の } i \in [n] \text{ について } \sigma(i) \neq i\}$$

とおき、さらに $d := |D|$ とおく。 D による Cayley グラフ $G = (V, E)$ は

$$V = S_n, \quad E = \{\{\sigma, \tau\} : \sigma\tau^{-1} \in D\}$$

と定義される。このグラフで $\sigma \not\sim \tau$ は、ある $i \in [n]$ が存在して $\sigma(i) = \tau(i)$ が成り立

18) 予想 7 は $p_1 = p_2$ かつ $t \geq 14$ のとき [20]、あるいは $p_1 = p_2 \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ かつ $t \geq 2$ のとき [42] 正しいことがわかっている。

19) 例えば [28] の 14 章 p. 261.

つことと同値である。したがって $U \subset V$ が独立集合であるとき、かつそのときに限り U は交差族である。

グラフ G は $n!$ 頂点 d 正則であるが、さらに Renteln [34] は最小固有値が $-\frac{d}{n-1}$ であることを示した。したがって ratio bound から $\alpha(G) \leq (n-1)!$ であり、定理 12 の不等式が得られた。

置換の部分集合 $\mathcal{F} \subset S_n$ が t 交差族であるとは、任意の $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$ について

$$|\{i \in [n] : \sigma(i) = \tau(i)\}| \geq t$$

をみたすことである。例えば $\mathcal{F}_0 := \{\sigma \in S_n : \text{任意の } i \in [t] \text{ について } \sigma(i) = i\}$ はサイズ $(n-t)!$ の t 交差族である。ここで $\tau, \tau' \in S_n$ について $\tau\mathcal{F}_0\tau' := \{\tau\sigma\tau' : \sigma \in \mathcal{F}_0\}$ をみたす集合を S_n の t -coset とよぶ。Ellis らはここまでに紹介した交差族に対する手法に対称群の表現論を交えて次の結果を得た。

定理 13 (Ellis–Friedgut–Pilpel [12]) $n \gg t$ で $\mathcal{F} \subset S_n$ が t 交差族ならば、 $|\mathcal{F}| \leq (n-t)!$ である。等号成立の \mathcal{F} は S_n の t -coset に限る。

この定理は [12] において $t \geq 4$ ならば $n \geq 2t+1$ で成り立つと予想されており、[13] では $n > \exp(Ct \log t)$ ならば正しいことが示されている。より一般の予想を述べるため、 $0 \leq i \leq \frac{n-t}{2}$ に対して $[t+2i]$ 中に少なくとも $t+i$ 個の固定点をもつ S_n の元全体を \mathcal{F}_i とする。次の予想は定理 5 の対称群版と見なせる。

予想 8 ([12]) $\mathcal{F} \subset S_n$ が t 交差族ならば、 $|\mathcal{F}| \leq \max_i |\mathcal{F}_i|$ である。等号成立の \mathcal{F} はある $\tau, \tau' \in S_n$ に対して $\tau\mathcal{F}_i\tau'$ と表せるものに限る。

\mathcal{F}_1 の置換は $[t+2]$ のすべてを固定するものが $(n-t-2)!$ 個、 $[t+2]$ の中のちょうど $t+1$ 個を固定するものが $(t+2)(n-t-2) \cdot (n-t-2)!$ 個ある。これと $|\mathcal{F}_0| = (n-t)!$ を比べると、 $t \geq 4$ のとき $|\mathcal{F}_0| > |\mathcal{F}_1|$ となるには $n \geq 2t+1$ が必要なことがわかる。

7 3重交差族

部分集合族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ は任意の $F, F', F'' \in \mathcal{F}$ について $F \cap F' \cap F'' \neq \emptyset$ をみたすとき、3重交差族という。そのような \mathcal{F} は (通常の2重) 交差族でもあるので定理 3 により $p \leq \frac{1}{2}$ ならば $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p$ である。一方、 $p > \frac{1}{2}$ のとき (2重) 交差族の測度は p では抑えられないが、3重交差族では事情が異なる。

定理 14 $p \leq \frac{2}{3}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が3重交差族ならば、 $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p$ である。さらに $p < \frac{2}{3}$ で測度が p の3重交差族は一点を固定する。

この定理は $p > \frac{2}{3}$ では成り立たない。実際、 $\tilde{\mathcal{F}} = \{F \in 2^{[n]} : |F| > \frac{2n}{3}\}$ とおくと、これは3重交差族であるが $p > \frac{2}{3}$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = 1$ である。

定理 14 は Frankl ら [21] により示され、またこれに対応する k グラフおよび q 類似の結果が、それぞれ Frankl [18] および Chowdhury ら [8] によって得られており、これらの証明はすべて組合せ論的なものであった。これに対して Filmus らは [17] においてハイパーグラフの ratio bound を導入し定理 14 (の不等式) に代数的な証明を与えた。[43] ではその方法を踏襲して極値構造を決定した。

定理 14 を代数的に扱うため、ハイパーグラフ $\mathcal{H} = (V, E)$ を

$$V = 2^{[n]}, \quad E = \{\{u, v, w\} \in \binom{V}{3} : u \cap v \cap w = \emptyset\}$$

と定める。このとき $U \subset V$ が独立集合であることと、 U が3重交差族であることは同値である。そこでハイパーグラフ \mathcal{H} に ratio bound を適用したい。しかしそもそもハイパーグラフの「固有値」とは何だろうか？ Filmus らはハイパーグラフから誘導される複数の重み付きグラフを考え、それらの固有値からハイパーグラフの ratio bound を導入して定理 14 に代数的な証明を与えた。同様の試みはほかにもいくつかあるが、現時点では Filmus らのものが最も成功しているように思われる。しかしながら彼らの手法をそのまま適用しても、対応する k グラフや q 類似の結果は得られない。したがって Filmus らの ratio bound あるいはその使い方にもまだ改良の余地があると考えられる。

問題 9 定理 14 の k グラフ版や q 類似を証明できるように、グラフの固有値や ratio bound をハイパーグラフに拡張せよ。

部分集合族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ は任意の $F, F', F'' \in \mathcal{F}$ について $|F \cap F' \cap F''| \geq t$ をみたすとき、3重 t 交差族という。各 $i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-t}{3} \rfloor$ に対し

$$\mathcal{F}_i := \{F \in 2^{[n]} : |F \cap [3i+t]| \geq 2i+t\}$$

と定めると、これは3重 t 交差族である。定理 6 から次のことが予想される。

予想 10 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が3重 t 交差族ならば、 $\mu_p(\mathcal{F}) \leq \max_i \mu_p(\mathcal{F}_i)$ である。

ここで $p_0(t) := \frac{2}{\sqrt{4t+9}-1}$ とおくと、 $p \leq p_0$ のとき

$$\max_i \mu_p(\mathcal{F}_i) = \mu_p(\mathcal{F}_0) = p^t$$

であり、 $p > p_0$ ならば $\max_i \mu_p(\mathcal{F}_i) > p^t$ である。乱歩法という組合せ論的手法で次のことが示されている。

定理 15 ([44]) $t \geq 15$ かつ $p \leq p_0(t)$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が3重 t 交差族ならば、 $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p^t$ である。さらに $p < p_0(t)$ で測度が p^t の3重交差族は t 点を固定する。

問題 11 定理 15 を $t \geq 2$ で証明せよ。また代数的な証明を与えよ。

定理 8 を3個の集合族に拡張することも考えられる。次の結果も組合せ論的な議論で示されているが、その手法は定理 15 で用いられているものとは全く異なる。

定理 16 ([22]) $\frac{k}{n} \leq \frac{2}{3}$ で $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \binom{[n]}{k}$ が任意の $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}$ について $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ をみたせば、 $|\mathcal{A}||\mathcal{B}||\mathcal{C}| \leq \binom{n-1}{k-1}^3$ である。

問題 12 定理 16 の測度版、 q 類似を与えよ²⁰⁾。

20) q 類似については geometric spread の構造が詳しくわかれば [22] の手法が使えるかもしれない。

8 文献案内

交差族全般に関する（代数的な手法も含む）概説としては [11] がよい。これは本稿で扱わなかった極値構造の安定性も紹介している。組合せ論寄りの概説では [6, 23] がある。[28] は Erdős–Ko–Rado の定理の拡張や一般化を代数的に扱ったテキスト²¹⁾で、本稿で省略した証明のいくつかが詳しく解説されている。[4] はこれより広い範囲の極値集合論の話題に関する線形代数手法を扱っており、この分野の古典である。ただし内容のほとんどは 1992 年までに書かれた。より新しい話題（例えば半正定値計画法の利用など）については [24] で補うとよいだろう。[46] は [4] が入手困難であった頃に、そのごく一部を日本語で解説したものである。

参考文献

- [1] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian. The diametric theorem in Hamming spaces-optimal anticode. *Adv. in Appl. Math.*, 20 (1998) 429–449.
- [2] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian. The complete intersection theorem for systems of finite sets. *European J. Combin.*, 18 (1997) 125–136.
- [3] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian. A Pushing–pulling method: new proofs of intersection theorems *Combinatorica*, 19 (1999) 1–15.
- [4] L. Babai, P. Frankl. Linear algebra methods in combinatorics. [version 2.2](#). October 2022.
- [5] Bey, C., Engel, K.: Old and new results for the weighted t -intersection problem via AK-methods. *Numbers, Information and Complexity*, Althofer, Ingo, Eds. et al., Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, (2000) 45–74.
- [6] P. Borg. Intersecting families of sets and permutations: a survey. *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*, 21 (2012) 543–559.
- [7] P. Cameron, C.Y. Ku. Intersecting families of permutations. *Europ. J. Combin.*, 24 (2003) 881–890.
- [8] A. Chowdhury, B. Patkós. Shadows and intersections in vector spaces. *J. Combin. Theory (A)*, 117 (2010) 1095–1106.
- [9] M. Deza, P. Frankl. On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance. *J. Combin. Theory (A)*, 22 (1977) 352–360.
- [10] I. Dinur, S. Safra. On the Hardness of Approximating Minimum Vertex-Cover. *Annals of Mathematics*, 162 (2005) 439–485.

21) typo に注意しながら読めば代数的組合せ論の入門書としてもよい本である。

- [11] D. Ellis. Intersection problems in extremal combinatorics: theorems, techniques and questions old and new. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 481 Cambridge University Press, Cambridge, 2022, 115–173.
- [12] D. Ellis, E. Friedgut, H. Pilpel. Intersecting families of permutations. *J. Amer. Math. Soc.*, 24 (2011) 649–682.
- [13] D. Ellis, N. Lifshitz. Approximation by juntas in the symmetric group, and forbidden intersection problems. *Duke Math. J.* 171 (2022) 1417–1467.
- [14] P. Erdős, C. Ko, R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 12 (1961) 313–320.
- [15] Y. Filmus. Spectral methods in extremal combinatorics. [PhD thesis](#). University of Toronto 2013.
- [16] Y. Filmus. The weighted complete intersection theorem. *J. Combin. Theory (A)*, 151 (2017) 84–101
- [17] Y. Filmus, K. Golubev, N. Lifshitz. High dimensional Hoffman bound and applications in extremal combinatorics. *Algebr. Comb.*, 4 (2021) 1005–1026.
- [18] P. Frankl. On Sperner families satisfying an additional condition. *J. Combin. Theory (A)*, 20 (1976) 1–11.
- [19] P. Frankl. The Erdős–Ko–Rado theorem is true for $n = ckt$. *Combinatorics Vol. I*, 365–375, Colloq. math. Soc. János Bolyai, 18, North–Holland, 1978.
- [20] P. Frankl, S. J. Lee, M. Siggers, N. Tokushige. An Erdős–Ko–Rado theorem for cross t -intersecting families. *J. Combin. Theory (A)*, 128 (2014) 207–249.
- [21] P. Frankl, N. Tokushige. Weighted multiply intersecting families. *Studia Sci. Math. Hungarica*, 40 (2003) 287–291.
- [22] P. Frankl, N. Tokushige. On r -cross intersecting families of sets. *Combin. Probab. Comput.* 20 (2011) 749–752.
- [23] P. Frankl, N. Tokushige. Invitation to intersection problems for finite sets. *J. Combin. Theory (A)*, 144 (2016) 157–211.
- [24] P. Frankl, N. Tokushige. Extremal problems for finite sets. Stud. Math. Libr., 86 American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, viii+224 pp.
- [25] P. Frankl, R. M. Wilson. The Erdős–Ko–Rado theorem for vector spaces. *J. Combin. Theory (A)*, 43 (1986) 228–236.
- [26] E. Friedgut. On the measure of intersecting families, uniqueness and stability. *Combinatorica* 28 (2008) 503–528.
- [27] B. Gärtner, J. Matoušek. Approximation algorithms and semidefinite programming. Springer, Heidelberg, 2012. xii+251 pp.
- [28] C. Godsil, K. Meagher. Erdős–Ko–Rado theorems: algebraic approaches. Cambridge Stud. Adv. Math., 149 Cambridge University Press, Cambridge, 2016, xvi+335 pp.
- [29] W. H. Haemers. Hoffman’s ratio bound. *Linear Algebra Appl.*, 617 (2021) 215–219.
- [30] W. N. Hsieh. Intersection theorems for systems of finite vector spaces. *Discrete Math.* 12 (1975) 1–16.

- [31] B. Larose, C. Malvenuto. Stable sets of maximal size in Kneser-type graphs. *European J. Combin.*, 25 (2004) 657–673.
- [32] M. Matsumoto and N. Tokushige, The exact bound in the Erdős-Ko-Rado theorem for cross-intersecting families, *J. of Combin. Theory (A)*, 52:90–97, 1989.
- [33] L. Pyber. A new generalization of the Erdős-Ko-Rado theorem, *J. Combin. Theory (A)*, 43:85–90, 1986.
- [34] P. Renteln. On the spectrum of the derangement graph. *Electron. J. Combin.*, 14 (2007) Research Paper 82, 17 pp.
- [35] S. Suda, H. Tanaka, A cross-intersection theorem for vector spaces based on semidefinite programming, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 46 (2014) 342–348.
- [36] Suda, S., Tanaka, H., Tokushige, N.: A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures. *Math. Program. Ser A*, 166 (2017) 113–130
- [37] H. Tanaka. Classification of subsets with minimal width and dual width in Grassmann, bilinear forms and dual polar graphs. *J. Combin. Theory (A)*, 113 (2006) 903–910.
- [38] M. J. Todd, Semidefinite optimization, *Acta Numer.* 10 (2001) 515–560.
- [39] N. Tokushige. Intersecting families — uniform versus weighted. *Ryukyu Math. J.*, 18 (2005) 89–103.
- [40] N. Tokushige. On cross t -intersecting families of sets. *J. Comb. Theory (A)*, 117 (2010) 1167–1177.
- [41] N. Tokushige, The eigenvalue method for cross t -intersecting families, *J. Algebraic Combin.* 38 (2013) 653–662.
- [42] N. Tokushige. Cross t -intrsecting integer sequences from weighted Erdős–Ko–Rado. *Combin. Probab. Comput.*, 22 (2013) 622–637.
- [43] N. Tokushige. Application of hypergraph Hoffman’s bound to intersecting families. *Algebr. Comb.*, 5 (2022) 537–557.
- [44] N. Tokushige. The maximum measure of 3-wise t -intersecting families. *European J. Combin.*, 110 (2023) Paper No. 103703.
- [45] R. M. Wilson. The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem. *Combinatorica*, 4 (1984) 247–257.
- [46] 徳重典英. 極値集合論における線形代数手法. 数理解析研究所講究録 1956 (RIMS 共同研究「デザイン、符号、グラフおよびその周辺」) 2015年7月 101–110.

群環上の台 τ 傾加群

小境 雄太*

概要

本稿は、2023 年に開催された第 68 回代数学シンポジウムにおいて著者が行った講演に関する報告である。

謝辞

第 68 回代数学シンポジウムにおける講演の機会をいただき、世話人の皆様に感謝申し上げます。特に、講演のご依頼をくださいました信州大学の花木章秀先生に心からお礼申し上げます。

1 はじめに

本稿では、第 68 回代数学シンポジウムの著者の講演で解説した小塩遼太郎氏との共同研究によって得られた成果 [12] について解説・報告する。

有限群のモジュラー表現論において、ブルエ予想とよばれる重要な問題がある。これは、有限群の群環のブロックの導来同値に関する予想であり、ブルエ予想が成り立つ例はいくつか確認されているものの、未だ解決には至っていない。ブルエ予想は、群環のブロック上の、適当な条件を満たす傾複体を構成することで解決されるが、傾複体を構成することは容易ではない。一方で、近年、Adachi-Iyama-Reiten により [1] において導入された台 τ 傾加群という、 τ 傾理論における重要な対象は、二項傾複体とよばれる良い性質をもった傾複体と一対一対応するため、群環上の台 τ 傾加群の豊富な構成や分類はブルエ予想の解決の糸口となる。さらに、群環上の台 τ 傾加群は二項傾複体のみならず表現論的に重要なさまざまな対象と一対一対応下にあるため、台 τ 傾加群の構成や分類は、実質的には、対応する対象のそれを意味する。

本研究では、群環上の台 τ 傾加群を豊富に構成することで、ブルエ予想の解決の糸口を得ると同時に、有限群のモジュラー表現論に関する τ 傾理論を発展させることを目的とする。

2 背景

本稿では、特に断らない限り、多元環とは代数的閉体 k 上の有限次元多元環とし、多元環 Λ に対して、 Λ -加群といったら、有限生成左 Λ -加群を意味するものとする。また、有限生成左 Λ -加群の有界導来圏を $D^b(\Lambda)$ で表すことにする。

*東京理科大学, kozakai@rs.tus.ac.jp

有限群のモジュラー表現論とは、有限群 G と正標数 p をもつ体 k に対して、群環 kG 上の加群を研究することである。有限群のモジュラー表現論は、1930年代頃から始まり、現在に至るまで、膨大な研究が行われてきた。群環 kG 上の加群を調べることは、多元環としての kG の直既約直和分解 $kG = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ に対して、それぞれの直既約な多元環 B_i 上の加群を考えることと同値である。この各 B_i を有限群 kG のブロックとよぶ。群環 kG のブロックのなかでも、自明な1次元 kG -加群 $k_G := k(\sum_{g \in G} g)$ を零化しない唯一のブロックは、主ブロックとよばれ、多くのよい性質をもつと同時に、群環 kG の情報も多くもっている。

一方で、有限次元多元環 Λ, Γ に対して、 Λ 上の有界導来圏と Γ 上のそれは三角圏の構造をもつ。この2つの有界導来圏が三角圏として同値なとき、 Λ と Γ は導来同値という。以下に述べる、ブルエ予想は、この主ブロックの導来同値に関する予想であり、有限群のモジュラー表現論において、長い間考えられている未解決問題である。

予想 2.1. 有限群 G および、 G のシロー p -部分群 P に対して、 P が可換群であるならば、 kG の主ブロック $B_0(G)$ と P の正規化群 $kN_G(P)$ の主ブロック $B_0(N_G(P))$ は導来同値になるのではないか？

有限群 G と G のシロー p -部分群 P に対して、 P の正規化群 $N_G(P)$ の群環 $kN_G(P)$ や、その主ブロック $B_0(N_G(P))$ は、 G のそれらに比べて調べやすく、多くのことが知られている。一方で、 kG の主ブロック $B_0(G)$ が $kN_G(P)$ の主ブロック $B_0(N_G(P))$ が導来同値であると、 $B_0(N_G(P))$ のさまざまな情報が $B_0(G)$ に遺伝する。そのため、ブルエ予想が解決すると、比較的扱いやすい $B_0(N_G(P))$ の情報を介して $B_0(G)$ の多くの情報が得られ、有限群のモジュラー表現論は劇的に発展する。

与えられた2つの有限次元多元環に対して、それらが導来同値であるかを調べる際、次の定理は役立つ。

定理 2.2 ([16, THEOREM 6.4]). 有限次元多元環 Λ および Γ に関して、次の条件は同値である。

- (1) Λ と Γ は導来同値である。
- (2) ある射影 Λ -加群の複体 T で次の条件を満たすものが存在する。
 - (a) $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T, T[i]) = 0$ が任意の $i \neq 0$ で成り立つ。ここで、 $T[i]$ とは、 T の i -シフトを表す。
 - (b) T の直和を取る操作、直和因子を取る操作、写像錐 (mapping cone) を取る操作、シフトを取る操作により、 Λ と同型な複体を作ることができる (ただし、ここでいう同型は $D^b(\Lambda)$ での同型である)。
 - (c) T の導来圏における自己準同型環の反転環 $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)^{op}$ が Γ と同型となる。

上記の定理の(2)の(a),(b),(c)を満たす射影加群の複体は傾複体とよばれる。(ちなみに、条件(a)の「任意の $i \neq 0$ 」を「任意の $i > 0$ 」で書き換えたものは、準傾複体 (silting complex) とよばれる。) 上記の定理より、多元環 Λ と Γ の導来同値をいうためには、 Λ 上の傾複体 T を構成し、その自己準同型環の反転環 $\text{End}_{D^b(\Lambda)}(T)^{op}$ が Γ と同型となることを示すのが一般的である。

3章で述べるように、 τ 傾理論の主役である台 τ 傾加群は、群環においては二項傾複体と一対一対応する。ここで、二項傾複体とは、0次と-1次以外のホモロジーが消えているような傾複

体のことをいう。したがって、群環上での台 τ 傾加群を豊富に与えることは、それ上の二項傾複体を豊富に与えることにつながる。さらに、台 τ 傾加群は表現論的に重要な多くの対象と一対一に対応する。したがって、群環上の台 τ 傾加群を分類することや、豊富に与えることはモジュラー表現論を大きく発展させる。

3 τ 傾理論

τ 傾理論は、2014年に [1] により導入された理論であり、傾理論の一般化である。これは、一般の有限次元多元環に関する理論であり、この理論の主役は、台 τ 傾加群という、Auslander-Reiten 変換 τ を用いて定義される特別な加群である。台 τ 傾加群は、二項準傾複体や左有限な半煉瓦、二項単純系をはじめとする表現論的に重要な多くの対象と一対一に対応する。さらに、群環や、そのブロック上の二項準傾複体は、二項傾複体と一致する。したがって、群環や、そのブロック上の台 τ 傾加群を分類することは、二項傾複体をはじめとする、多くの対象を分類することと同義であり、先述のブルエ予想の解決策に繋がる。

定義 3.1 ([1, DEFINITION 0.1.]). (1) Λ -加群 M が τ リジッドであるとは、 $\text{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$ が成り立つときをいう。

(2) Λ -加群 M が τ 傾加群であるとは、 M が τ リジッドであり、 $|M| = |\Lambda|$ が成り立つときをいう。(ただし、 $|M|$ は M の互いに非同型な直既約因子の個数を表す。特に、 $|\Lambda|$ は、単純 Λ -加群の同型類の個数と一致する。)

(3) Λ 加群 M が台 τ 傾加群であるとは、ある Λ のべき等元 e が存在して、 M が $\Lambda/\Lambda e\Lambda$ -加群として τ 傾加群になるときをいう、

注意 3.2. 代数学シンポジウムの講演においては、上記の定義を使用せず、[2, Proposition 1.8] で与えられた以下の同値な定義を採用した：

Λ -加群 M が台 τ 傾加群であるとは、 M が τ リジッドであり、 $|M| = s(M)$ が成り立つときをいう。ただし、 $s(M)$ は、 M の組成因子として現れる非同型な単純加群の個数を表す。

注意 3.3. Λ が対称多元環であるとき、任意の Λ -加群 M に対して、 τM は $\Omega^2 M$ と同型となる。特に、 Λ が群環やそのブロック多元環であるときにも、上記の同型は成り立つ。

以下、 Λ -加群または Λ -加群の複体 M, N に対して、 $\text{add } M$ によって M の有限直和の直和因子全体を表し、 $M =_{\text{add}} N$ は $\text{add } M = \text{add } N$ を意味するものとする。この関係 “ $=_{\text{add}}$ ” は Λ -加群上、または Λ -加群の複体上の同値関係を与え、 $s\tau$ -tilt Λ によって、 Λ 上の台 τ 傾加群のこの同値関係に関する同値類、2-silt Λ 、2-tilt Λ によって、それぞれ Λ 上の二項準傾複体、二項傾複体のこの同値関係に関する同値類を表す。

以上の設定で、 $M, N \in s\tau$ -tilt Λ に対して、 $\text{Fac } M$ によって M の有限直和の剰余加群全体を表し、

$$M \leq N :\Leftrightarrow \text{Fac } M \subset \text{Fac } N$$

と定義することで、 $s\tau$ -tilt Λ は半順序集合の構造をもつ ([1, Section 2.4])。また、 $X, Y \in 2\text{-silt } \Lambda$ に対して、

$$X \leq Y :\Leftrightarrow \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(Y, X[i]) = 0 \quad (\forall i > 0)$$

と定義することで、2-silt Λ は半順序集合の構造をもつ ([3, THEOREM 2.11]). 次の定理により、上記の半順序集合が同型であることが示された。

定理 3.4 ([1, THEOREM 3.2]). 有限次元多元環 Λ に対して、2-silt Λ と $s\tau$ -tilt Λ は半順序集合として同型である。この同型は、以下の対応で与えられる。

- 2-silt $\Lambda \ni P^\bullet \mapsto H^0(P^\bullet) \in s\tau$ -tilt Λ
- $s\tau$ -tilt $\Lambda \ni M \mapsto (P^{-1} \oplus P \xrightarrow{(f \ 0)} P^0) \in 2$ -silt Λ

ただし、 $H^0(P^\bullet)$ は P^\bullet の 0 次のホモロジー、 $(P^{-1} \xrightarrow{f} P^0)$ は M の極小射影分解 $(\dots \rightarrow P^{-1} \xrightarrow{f} P^0 \rightarrow M)$ から得られる複体、 P は射影 Λ -加群で、 $\text{Hom}_\Lambda(P, M) = 0$ かつ $|P| + |M| = |\Lambda|$ となるものを表す。

注意 3.5. 対称多元環上の準傾複体と傾複体は一致する ([3, EXAMPLE 2.8.]). つまり、 Λ が対称多元環や有限群の群環、そのブロックであるとき、上記の定理は、 $s\tau$ -tilt Λ と 2-tilt Λ が半順序集合として同型であることを意味する。したがって、群環やそのブロック上の台 τ 傾加群の分類は、それら上の二項傾複体の分類と同義となる。

また、有限次元多元環 Λ に対して、 Λ 上の台 τ 傾加群は表現論的に重要な多くの対象と一対一対応する。したがって、有限群の群環 kG に対して、それの上の台 τ 傾加群を構成・分類することは、対応する表現論的な対象のそれらにもあたるため、 kG の研究に役立つ。ここでは、どのような対象と一対一対応があるかを紹介する。

定理 3.6 ([1, 7, 10, 15]). Λ を有限次元多元環とする。 $s\tau$ -tilt Λ は次の集合と一対一対応下にある。

- 台 τ^{-1} 傾加群 (support τ^{-1} -tilting module) の add-同値類の集合 $s\tau^{-1}$ -tilt Λ
- 二項準傾複体 (two-term silting complex) の add-同値類の集合 2-silt Λ
- 二項余準傾複体 (two-term cosilting complex) の add-同値類の集合 2-cosilt Λ
- 関手的有限なねじれ類 (functorially finite torsion class) の集合 f-tors Λ
- 関手的有限なねじれ自由類 (functorially finite torsion-free class) の集合 f-torf Λ
- 左有限 (left finite) な半煉瓦 (semibrick) の集合 f_L -sbrick Λ
- 右有限 (right finite) な半煉瓦の集合 f_R -sbrick Λ
- 二項単純系 (two-term simple-minded collection) の集合 2-smd Λ
- $D^b(\Lambda)$ において length heart をもつ intermediate t-structure の集合 int-t-str Λ
- 左有限な Λ -mod の広大部分圏 (wide subcategory) の集合 f_L -wide Λ
- 右有限な Λ -mod の広大部分圏 (wide subcategory) の集合 f_R -wide Λ

4 先行研究

群環上の台 τ 傾加群はまだまだ発展途上であるが、知られている結果もいくつかある。この章では、それらの一部について簡単に紹介する。この章では k を正標数 p をもつ代数的閉体、 G を有限群とする。

4.1 群環 kG の τ 傾有限性について

有限次元多元環 Λ 上の台 τ 傾加群の同型類が有限個しか存在しないとき、この多元環 Λ を τ 傾有限多元環 (τ -tilting finite algebra) という。 τ 傾有限多元環は、それ上の任意のねじれ類、および、ねじれ自由類が関手的有限となるなどよい性質をもつ。まずは、群環 kG の τ 傾有限性についての先行研究を紹介する。

群環 kG のブロック B および G の p -部分群 D に対して、自然な全射準同型

$$\pi_D : B \otimes_{kD} B \rightarrow B(b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2)$$

が分裂全射であるような最小位数をもつ D が共役を除いて一意的に存在する。これをブロック B の不足群 (defect group) という。群環 kG のブロック B およびその不足群 D に関しては次のことが知られている。

- kG の主ブロックの不足群は G のシロー p -部分群である。
- $D = \{e\} \Leftrightarrow B$ が単純環
- D が非自明な巡回群 $\Leftrightarrow B$ が Brauer tree 多元環 $\Leftrightarrow B$ が単純環でなく有限表現型
- ($p = 2$ として) $D \in \{\text{クラインの四元群, 二面体群, 準二面体群, 一般四元数群}\} \Leftrightarrow B$ が Brauer tree 多元環でない Brauer graph 多元環 $\Leftrightarrow B$ が tame 表現型
- D が上記のどれでもない $\Leftrightarrow B$ が無限表現型

上記の事実から、例えば G がシロー p -部分群に巡回群 (あるいは二面体群) をもつのであれば、 kG のブロックは Brauer tree 多元環 (あるいは Brauer graph 多元環) か単純環 (つまり行列環) のいずれかになる。

kG のブロック B の不足群 D が巡回群であるならば、 B は有限表現型、すなわち直既約 kG -加群の同型類が有限個しかないため、 τ 傾有限多元環となる。特に、 G がシロー p -部分群 P に巡回群をもてば、 kG は τ 傾有限多元環である。(これは kG の任意のブロックの不足群は P に含まれるため、巡回群となる。したがって、 kG のすべてのブロックは有限表現型であるからである。)

kG のブロックが tame 表現型のときの τ 傾有限性については次のことが知られている。

定理 4.1 ([8, Theorem 16]). kG のブロック B が tame 表現型 (つまり B の不足群がクラインの四元群, 二面体群, 準二面体群, 一般四元数群のいずれかになる) ならば、 B は τ 傾有限である。すなわち、 B 上の台 τ 傾加群の個数は有限である。

4.2 $s\tau$ -tilt kG の半順序集合としての構造について

3章で述べたように、 kG 上の台 τ 傾加群 M_1, M_2 に対して、

$$M_1 \leq M_2 \Leftrightarrow \text{Fac } M_1 \subset \text{Fac } M_2$$

と定めることで、 $s\tau$ -tilt kG は半順序集合の構造をもつ。この章では、半順序集合としての $s\tau$ -tilt kG の構造に関する先行研究を紹介する。

4.1章でも述べたように、 kG のブロック B が非自明な巡回群を不足群にもつならば、 B は Brauer tree 多元環となる。そのため、Brauer tree 多元環の研究は、“ある意味”で巡回不足群をもつブロックの研究ともいえる。（ここで“ある意味で”と書いたのは、有限群のブロックとして実現されない Brauer tree 多元環もあるからである。）Brauer tree 多元環の τ 傾加群の研究に関しては、例えば次のものがある。

- Star 型の Brauer tree 多元環 B に対して、 $s\tau$ -tilt B のハッセ図を与えるアルゴリズムが与えられた [2]。
- Line 型の Brauer tree 多元環 B に対して、 $s\tau$ -tilt B のハッセ図を与えるアルゴリズムが与えられた [4]。
- kG のブロック B が Brauer tree 多元環で e 個の単純加群をもつとき、 B 上の台 τ 傾加群の個数は、 $\binom{2e}{e}$ で与えられる [6, Theorem 1.1]。

有限群のブロックが τ 傾有限多元環であるときは次のことが知られている。

定理 4.2 ([13]). G, H を有限群とし、 B を $k[G \times H]$ のブロックとする。このとき、 B が τ 傾有限であるならば、ある kG または kH のブロック B' が存在し、 $s\tau$ -tilt $B \cong s\tau$ -tilt B' となる。

また、有限群 G と G の正規部分群 N に対して、誘導関手 Ind_N^G が $s\tau$ -tilt kN と $s\tau$ -tilt kG の同型を与える場合もある。

定理 4.3 ([11]). N がシロー p -部分群に巡回群をもち、 G/N が p -群であるとする。このとき、誘導関手により、 $s\tau$ -tilt kN と $s\tau$ -tilt kG の半順序集合としての同型が与えられる：

$$\text{Ind}_N^G := kG \otimes_{kN} - : s\tau\text{-tilt } kN \xrightarrow{\cong} s\tau\text{-tilt } kG$$

また、有限群 G の正規部分群 N を適当にとることにより、 $s\tau$ -tilt kG と $s\tau$ -tilt $k[G/N]$ が同型となる場合もある。

定理 4.4 ([9]). N を G の中心 $Z(G)$ に含まれる G の p -部分群とする。このとき、対応 $M \mapsto M/J(kN)M$ により、半順序集合としての同型 $s\tau$ -tilt $kG \cong s\tau$ -tilt $k[G/N]$ が与えられる。

5 主結果

この章では、 τ 傾理論に有限群のモジュラー表現論の道具を用いて得られた群環上の台 τ 傾加群に関する結果を [12] に基づいて紹介する。

この章では、 G は有限群、 N は G の正規部分群、 k は正標数 p をもつ代数的閉体を表すものとする。また、 $\text{Ind}_N^G : kN\text{-mod} \rightarrow kG\text{-mod}$ により誘導関手、 $\text{Res}_N^G : kG\text{-mod} \rightarrow kN\text{-mod}$ により制限関手を表す。

次の定理は、 kG 上の台 τ 傾加群の kN への制限に関するものである。

定理 5.1. kG 上の台 τ 傾加群 M が次の 2 条件を満たすとする。

- M は相対 N -射影的、すなわち M が $\text{Ind}_N^G \text{Res}_N^G M$ の直和因子として現れる。
- $\text{Ind}_N^G \text{Res}_N^G M \in \text{add } M$

このとき、 $\text{Res}_N^G M$ は kN 上の台 τ 傾加群となる。さらに、 kG 上の台 τ 傾加群 M_1, M_2 が上記の 2 条件を満たし、 $M_1 \leq M_2$ となるとき、 $\text{Res}_N^G M_1 \leq \text{Res}_N^G M_2$ が $s\tau$ -tilt kN で成り立つ。

次の定理を述べる前に、 kN -加群 X の G -不変性について定義する。 kN -加群 X と $g \in G$ から、次のように kN -加群 gX を構成できる。

- 集合としては $gX = \{gx \mid x \in X\}$ で定める。
- $n \in N$ の $gx \in gX$ への作用が次で与えられる： $n \cdot gx := g(g^{-1}ngx)$

この kN -加群 gX を用いて、 kN -加群 X の G -不変性を次のように定める。

定義 5.2. kN -加群 X が G -不変であるとは、任意の $g \in G$ に対して、 $gX \cong X$ が成り立つときをいう。

次の定理は、定理 5.1 の条件と同値な条件を与え、さらに誘導関手が $s\tau$ -tilt kN のある部分集合から $s\tau$ -tilt kG のある部分集合への半順序同型を与えるものである。

定理 5.3. kG 上の台 τ 傾加群 M に対して、次の条件は同値である。

- M は相対 N -射影的かつ $\text{Ind}_N^G \text{Res}_N^G M \in \text{add } M$ が成り立つ。
- ある G -不変な kN 上の台 τ 傾加群 X が存在して、 $M =_{\text{add}} \text{Ind}_N^G X$ が成り立つ。
- $S \otimes_k M \in \text{add } M$ が任意の単純 $k[G/N]$ -加群 S について成り立つ。

さらに、 kG 上の台 τ 傾加群で上記の同値条件を満たすものの全体（を “ $=_{\text{add}}$ ” で割ったもの）を $(s\tau\text{-tilt } kG)^*$ と表したとき、誘導関手 Ind_N^G により $(s\tau\text{-tilt } kN)^G$ と $(s\tau\text{-tilt } kG)^*$ の間の半順序集合としての同型が与えられる：

$$\text{Ind}_N^G : (s\tau\text{-tilt } kN)^G \xrightarrow{\cong} (s\tau\text{-tilt } kG)^*$$

ただし、 $(s\tau\text{-tilt } kN)^G$ は G -不変な kN 上の台 τ 傾加群全体（を “ $=_{\text{add}}$ ” で割ったもの）を表す。

以下に、上記の定理の証明のキーとなった定理を述べる。

定理 5.4 (フロベニウスの相互律). G を有限群, H をその部分群, X を kG -加群, Y を kH -加群とする。このとき、次の同型が成り立つ。

$$\mathrm{Hom}_{kG}(X, \mathrm{Ind}_H^G Y) \cong \mathrm{Hom}_{kH}(\mathrm{Res}_H^G X, Y), \mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Ind}_H^G Y, X) \cong \mathrm{Hom}_{kH}(Y, \mathrm{Res}_H^G X)$$

定理 5.5 (マッキーの分解公式). G を有限群, H, H' をその部分群, M を kH -加群とする。このとき、次の kH' -加群としての同型が成り立つ。

$$\mathrm{Res}_{H'}^G \mathrm{Ind}_H^G M \cong \bigoplus_{g \in H \backslash G / H'} \mathrm{Ind}_{gHg^{-1} \cap H'}^{H'} \mathrm{Res}_{gHg^{-1} \cap H'}^{gHg^{-1}} gM$$

ここで、 $gM := \{gm \mid m \in M\}$ とは、 $ghg^{-1} \in gHg^{-1}$ の $gm \in gM$ への作用が、 $ghg^{-1} \cdot gm := g(hm)$ で与えられる $k[gHg^{-1}]$ -加群である。

特に、 $N := H = H'$ が G の正規部分群で、 M が kN -加群であるときは、次の kN -加群としての同型が成り立つ。

$$\mathrm{Res}_N^G \mathrm{Ind}_N^G M \cong \bigoplus_{g \in G/N} gM$$

6 応用

この章でも、前章と同様に、特に断りがない限り、 G は有限群, N は G の正規部分群, k は正標数 p をもつ代数的閉体を表すものとし、主定理の適用例をみる。

6.1 $(G : N) = p^n$ の場合の $s\tau$ -tilt kG と $s\tau$ -tilt kN の比較

まずは、モジュラー表現論でよく知られている事実をいくつか紹介する。

定義 6.1. k 上 1 次元ベクトル空間 k に対して、 G の各要素が恒等的に作用し、それを線形に拡張したものは kG -加群になる。これを自明な kG -加群とよび、 k_G で表す。つまり、自明な kG -加群 k_G とは、 G の作用が次のように与えられる kG -加群である：

$$g \cdot x := x \quad (g \in G, x \in k)$$

注意 6.2. 自明な kG -加群 k_G は $k(\sum_{g \in G} g)$ と同型となる。また、 $\dim k_G = 1$ であるため、 k_G は単純 kG -加群である。

一般に単純 kG -加群の同型類は複数個あるが、 p -群については次のことが知られている。

命題 6.3. Q を p -群とする。このとき、自明な kQ -加群 k_Q は唯一の単純 kQ -加群である。

M_1, M_2 を kG -加群とし、 $m_1 \otimes m_2 \in M_1 \otimes M_2 =: M_1 \otimes_k M_2$ および $g \in G$ に対して、 $g(m_1 \otimes m_2) := gm_1 \otimes gm_2$ と定めることで、 $M_1 \otimes M_2$ は kG -加群になる。これに関して、次の命題は用意に証明できる。

命題 6.4. k_G を自明な kG -加群, M を任意の kG -加群としたとき, 次の kG -加群としての同型が成り立つ。

$$k_G \otimes M \cong M$$

以上の命題と定理 5.3 を組み合わせることで次の定理を得る。

定理 6.5. G/N が p -群であるならば, 誘導関手は次の半順序集合としての同型を引き起こす:

$$\text{Ind}_N^G : (\text{s}\tau\text{-tilt } kN)^G \xrightarrow{\cong} \text{s}\tau\text{-tilt } kG$$

6.2 直既約 τ リジッド kG -加群のヴァーテックスについて

次に, 主定理の適用例として, 直既約 τ リジッド kG -加群のヴァーテックスについて考察する。 τ -リジッド加群は次で定義される。

定義 6.6. Λ を有限次元多元環とする。 Λ -加群 M が τ リジッドであるとは, 次の条件が成り立つときをいう:

$$\text{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$$

τ -リジッド加群について次のことが知られている。

命題 6.7 ([1, PROPOSITION 2.17.]). Λ を有限次元多元環, M を τ リジッドな Λ -加群とする。このとき, ある Λ -加群 X が存在し, $M \oplus X$ が台 τ 傾加群となる。

次に直既約 kG -加群のヴァーテックス (vertex) についてみる。次に直既約 kG -加群のヴァーテックスは次で定義される。

定義 6.8. M を直既約 kG -加群とする。 $\text{Ind}_Q^G \text{Res}_Q^G M$ が直和因子に M をもつような G の p -部分群 Q が共役を除いて一意的に存在する。これを, M のヴァーテックスとよぶ。

直既約 kG -加群 M に対して, M が射影加群であることと, M のヴァーテックスが自明な部分群 $\{e\}$ であることは同値である。直既約 kG -加群 M のヴァーテックスのイメージとしては, M が「どれくらい射影加群から離れているか?」という 1 つの尺度を与えるものでもある。有限群のモジュラー表現論において, 与えられた加群のヴァーテックスを調べる研究は多く行われてきた。定理 6.5 と後にあげる事実を用いて, 直既約 τ リジッド kG -加群のヴァーテックスに関する次の定理を得た。

定理 6.9. 任意の直既約 τ リジッド kG -加群のヴァーテックスが G のシロー p -部分群に真に含まれる必要十分条件は, $(G : N) = p^n$ ($\exists n \geq 0$) となる G の正規部分群 N が存在することである。

証明に使った道具は以下の通りである。

- $\text{Ext}_{kG}^1(k_G, k_G) \neq 0$ であるための必要十分条件は, G の正規部分群 N で, それの G における指数が p べきとなるものが存在することである (例えば [14, Chap. I, Corollary 10.13] をご参照ください)。

- k_G の単純性より, $\overline{\text{Hom}}_{k_G}(k_G, \tau k_G) \cong \text{Hom}_{k_G}(k_G, \tau k_G)$ が成り立つ。ここで, $\overline{\text{Hom}}_{k_G}(k_G, \tau k_G)$ は以下の商ベクトル空間を表す:

$$\text{Hom}_{k_G}(k_G, \tau k_G) / \{ f \in \text{Hom}_{k_G}(k_G, \tau k_G) \mid f \text{ は射影 } kG\text{-加群を経由する} \}$$

- 有限次元多元環 Λ および Λ -加群 M, M' に対して, $\overline{\text{Hom}}_{\Lambda}(M, \tau M') \cong \text{DExt}_{\Lambda}^1(M', M)$ が成り立つ。(この同型は Auslander-Reiten duality とよばれる。)
- 自明な kG -加群 k_G はヴァーテックスに G のシロー p -部分群をもつ。

参考文献

- [1] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, τ -tilting theory. *Compos. Math.* **150** (2014), no. 3, 415–452.
- [2] T. Adachi, The classification of τ -tilting modules over Nakayama algebras. *J. Algebra* **452** (2016), 227–262.
- [3] T. Aihara, O. Iyama, Silting mutation in triangulated categories. *J. Lond. Math. Soc.* (2) **85** (2012), no. 3, 633–668.
- [4] T. Aoki, *Classifying torsion classes for algebras with radical square zero via sign decomposition*. *J. Algebra* **610** (2022), 167–198.
- [5] S. Asai, *Semibricks*. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2020, no. 16, 4993–5054.
- [6] H. Asashiba, Y. Mizuno, K. Nakashima, *Simplicial complexes and tilting theory for Brauer tree algebras*. *J. Algebra* **551** (2020), 119–153.
- [7] T. Brüstle, D. Yang, *Ordered exchange graphs*. *Advances in representation theory of algebras*, 135–193, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.
- [8] F. Eisele, G. Janssens, T. Raedschelders, *A reduction theorem for τ -rigid modules*. *Math. Z.* **290** (2018), no. 3–4, 1377–1413.
- [9] N. Hirmae, *Reduction theorem for support τ -tilting modules over group algebras*. arXiv:2211.04030 (2023).
- [10] S. Koenig, D. Yang, *Silting objects, simple-minded collections, t -structures and co- t -structures for finite-dimensional algebras*. *Doc. Math.* **19** (2014), 403–438.
- [11] R. Koshio, Y. Kozakai, *On support τ -tilting modules over blocks covering cyclic blocks*. *J. Algebra* **580** (2021), 84–103.
- [12] R. Koshio, Y. Kozakai, *Normal subgroups and support τ -tilting modules*. arXiv:2301.04963 (2023).

- [13] Y. Kozakai, *On τ -tilting finiteness of block algebras of direct products of finite groups*. Bull. Iranian Math. Soc. **49** (2023), no. 3, Paper No. 34, 9 pp.
- [14] P. Landrock. *Finite group algebras and their modules, volume 84 of London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [15] F. Marks, J. Šťovíček, *Torsion classes, wide subcategories and localisations*. Bull. Lond. Math. Soc. **49** (2017), no. 3, 405–416.
- [16] J. Rickard. *Morita theory for derived categories*. J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456.

量子 Grothendieck 環について

藤田 遼 (Ryo FUJITA)*

概要

本稿における量子 Grothendieck 環とは、アフィン量子群の有限次元表現のなすモノイダル圏の Grothendieck 環の量子変形として定義される非可換環を指す。これは標準基底 (canonical basis) と呼ばれる良い基底を備え、既約表現の q 指標の決定アルゴリズムに関する予想 (Kazhdan-Lusztig 型予想) の定式化に用いられる。ADE 型アフィン量子群の場合には中島籠多様体上の偏屈層による標準基底の幾何学的解釈があり、これを用いて Kazhdan-Lusztig 型予想が正しいことと標準基底に関する種々の正值性が証明される。同等の幾何学的解釈が未だ知られていない残りの BCFG 型については、上記 Kazhdan-Lusztig 型予想と正值性は未解決問題として残っていたが、最近になって団代数や量子群の圏化理論との関係が明らかになり、この問題に関してもある程度の進展が見られた。本稿では David Hernandez 氏, Se-jin Oh 氏, 大矢浩徳氏との共同研究 [6, 5] に基づき、こうした最近の進展について述べる。^{*1}

1 アフィン量子群の有限次元表現論

まず、アフィン量子群の有限次元表現論の基礎事項について大雑把に説明する。

1.1 アフィン量子群の有限次元表現

アフィン量子群は複素有限次元単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の「量子アフィン化」にあたる代数系である。「量子アフィン化」は「アフィン化」と「量子化」をあわせたものと理解される。ここで、Lie 代数 \mathfrak{g} の「アフィン化」は、ループ Lie 代数 $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ の 1 次元中心拡大として定義されるアフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}} := L\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}K$ (K は中心元) を指す。これは \mathbb{C} 上の無限次元 Lie 代数である。一方、Lie 代数 \mathfrak{g} の「量子化」とは普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の 1 パラメータ変形として定義される量子群 (量子包絡環) $U_q(\mathfrak{g})$ を指す。これは量子パラメータ $q \in \mathbb{C}^{\times}$ に依存し、 $q = 1$ で普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を復元するような、非余可換 Hopf 代数である。したがって、Lie 代数 \mathfrak{g} の「量子アフィン化」であるところのアフィン量子群 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ は、アフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ の普遍包絡環 $U(\hat{\mathfrak{g}})$ を量子パラメータ $q \in \mathbb{C}^{\times}$ を用いて非余可換に変形して得られる Hopf 代数である。アフィン量子群 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ は可解格子模型や量子可積分系など理論物理の文脈で導入された代数系であるが、純粋に表現論的な視点からも非常に面白い研究対象である。本稿では特にその有限次元表現について論じる。

以下、量子パラメータ $q \in \mathbb{C}^{\times}$ は 1 の冪根でないとし、Hopf 代数 $U \in \{U(\mathfrak{g}), U(\hat{\mathfrak{g}}), U_q(\mathfrak{g}), U_q(\hat{\mathfrak{g}})\}$ の有限次元 (タイプ 1) 表現のなす圏を $\text{Rep } U$ と書き表す。これは自然に \mathbb{C} 線形モノイダル・アーベル圏を成す。ここで「アフィン化」、「量子化」に伴って $\text{Rep } U$ の構造がどのように変化するかを見ておく。

* 京都大学数理解析研究所, e-mail: rfujita@kurims.kyoto-u.ac.jp

^{*1} なお、本稿は第 64 回代数シンポジウムにおける大矢浩徳氏の講演 [16] のその後にあたる内容を含んでいる。[16] では本稿で割愛した量子 Grothendieck 環とその標準基底の代数的構成の詳細も解説されている。

まず、よく知られているように圏 $\text{Rep } U(\mathfrak{g})$ はアーベル圏として半単純（任意の対象が既約対象の有限直和に分解する）であり、モノイダル圏として対称 (symmetric) である。後者は、Lie 代数の表現のテンソル積について、テンソル成分の単純な入れ替えによって異なる順序のテンソル積表現の間に表現としての自然な同型が作れることから自明である。同様に、圏 $\text{Rep } U(\hat{\mathfrak{g}})$ もモノイダル圏として対称である。しかし半単純性は失われ、圏 $\text{Rep } U(\hat{\mathfrak{g}})$ の対象の間には非自明な拡大が存在しうる。一方、圏 $\text{Rep } U_q(\mathfrak{g})$ では、逆に半単純性は保たれるが、モノイダル圏としての対称性が失われる。これは量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ が Hopf 代数 $U(\mathfrak{g})$ の非余可換変形であることから来ている。ただし、圏 $\text{Rep } U_q(\mathfrak{g})$ は組紐テンソル圏 (braided tensor category) ではある。すなわち任意の $V, W \in \text{Rep } U_q(\mathfrak{g})$ について非自明な同型 $R_{V,W}: V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$ が存在する。テンソル積の非対称性とは $R_{W,V} \circ R_{V,W} \neq \text{id}_{V \otimes W}$ を意味する。

このように、「アフィン化」はアーベル圏としての半単純性を失わせる方向に、「量子化」はモノイダル圏としての対称性を失わせる方向に変化をもたらす。このことから「量子アフィン化」、すなわち圏 $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ においてはアーベル圏としての半単純性とモノイダル圏としての対称性がともに失われていると想像され、実際にそうなっている。表にまとめると以下のようになる。

圏	アーベル圏として	モノイダル圏として
$\text{Rep } U(\mathfrak{g})$	半単純	対称
$\text{Rep } U_q(\mathfrak{g})$	半単純	非対称
$\text{Rep } U(\hat{\mathfrak{g}})$	非半単純	対称
$\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$	非半単純	非対称

さらに言うと、圏 $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ はモノイダル圏として組紐テンソル圏ですらない。実際、 $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ において

$$V \otimes W \not\cong W \otimes V \quad (1)$$

なる既約表現の組 (V, W) がたくさん存在する。その意味で、圏 $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ は「非可換な」モノイダル圏であると言える。このような状況において、「では、具体的に (1) のような非可換現象はいつ起こるのか?」という問いは基本的であると思われる。後で圏 $\text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の圏代数構造について述べるが、それはこの問いに部分的な解答を与えるという点で重要である（後の注意 4.7 を参照）。

1.2 Grothendieck 環と q 指標

モノイダル圏を調べる上で Grothendieck 環を考えることは基本的である。一般に、モノイダル・アーベル圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes)$ に対し、その Grothendieck 環とは、アーベル圏としての Grothendieck 群

$$K(\mathcal{C}) := \bigoplus_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}[X] \left/ \left\langle \begin{array}{l} [X] = [Y] + [Z], \\ \text{if } 0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0 \text{ exact in } \mathcal{C} \end{array} \right. \right.$$

に積を $[X] \cdot [Y] := [X \otimes Y]$ と定義して得られる環であった。ただし、テンソル積 \otimes が関手として双完全であることを仮定する。さらにもし圏 \mathcal{C} の各対象が有限長の組成列を持つならば、既約対象の同型類のなす集合 $\text{irr } \mathcal{C}$ は $K(\mathcal{C})$ の \mathbb{Z} 加群としての自由基底を与える。この基底に関する環 $K(\mathcal{C})$ の構造定数はすべて非負整数になる。これは、任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ について

$$[X] \cdot [Y] = [X \otimes Y] = \sum_{L \in \text{irr } \mathcal{C}} [X \otimes Y : L][L]$$

と展開したときの係数 $[X \otimes Y : L]$ が組成重複度で与えられることから直ちに従う。

例 1.1 (古典的な指標理論). 例として $\mathcal{C} = \text{Rep } U(\mathfrak{g})$ のときを考える. このとき, Grothendieck 環 $K(\text{Rep } U(\mathfrak{g}))$ は表現の指標の成す環と同一視される. 任意の表現 $V \in \text{Rep } U(\mathfrak{g})$ に対して Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ の作用に関するスペクトル分解を考えることでその指標 $\chi(V)$ が定まり, これは環の埋め込み

$$\chi: K(\text{Rep } U(\mathfrak{g})) \hookrightarrow \mathbb{Z}[P] = \mathbb{Z}[y_i^{\pm 1} \mid i \in I]$$

を導く. ここで, I は \mathfrak{g} の Dynkin 図形の頂点集合, $P = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i$ はウェイト格子, $y = e^{\varpi_i}$ とした. さらに, χ の像は Weyl 群不変式のなす部分環と一致する. なお, 圏 $\text{Rep } U(\mathfrak{g})$ の各既約表現はある支配的ウェイト $\lambda \in P^+ := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i$ を最高ウェイトに持つ最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ として構成され, これにより P^+ と $\text{irr } \text{Rep } U(\mathfrak{g})$ の間に 1:1 対応がある. 既約指標 $\chi(V(\lambda))$ は Weyl の指標公式によって明示的かつ統一的に書き下すことができることも思い出しておく.

さて, これ以降はアフィン量子群の有限次元表現のみを考えるので,

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} := \text{Rep } U_q(\hat{\mathfrak{g}})$$

とおく. 圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ に属する既約表現は, 古典的な最高ウェイトによる分類 (例 1.1) の類似で, ℓ 最高ウェイトによる分類 (ℓ はループの意) が知られている [2]. これによれば, 基本 ℓ ウェイトの集合 $\{\varpi_{i,a} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^\times\}$ で生成される可換自由モノイド $\mathcal{P}^+ := \bigoplus_{i \in I, a \in \mathbb{C}^\times} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_{i,a}$ の各元 λ に対し既約 ℓ 最高ウェイト表現 $L(\lambda) \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ が定まり, これにより集合 \mathcal{P}^+ と $\text{irr } \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ の間に 1:1 対応がある. ここで基本 ℓ ウェイト $\varpi_{i,a}$ が Dynkin 図形の頂点 $i \in I$ だけでなく, 複素数 $a \in \mathbb{C}^\times$ との組でラベル付けられていることに注意する. このパラメータ $a \in \mathbb{C}^\times$ はだいたいループ化変数 z の作用の固有値に対応するもので, スペクトル変数と呼ばれる.

古典的な指標 χ の自然な類似として, 各表現 V に対して量子ループ Cartan 部分環 $U_q(L\mathfrak{h})$ の作用に関するスペクトル分解を考えることで定まる q 指標 $\chi_q(V)$ がある. これは E. Frenkel–Reshetikhin [4] によって導入され, 環の埋め込み

$$\chi_q: K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) \hookrightarrow \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}} := \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^\times] \quad (2)$$

を導くことが証明された. このことから特に, Grothendieck 環 $K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ は可換であることが従う. 圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ は (1) の意味で非可換なモノイダル圏であったから, これは非自明な帰結である. 圏のレベルでは非可換だが, 対象の間の拡大の情報を忘れた Grothendieck 環のレベルでは可換になるというのである.

例 1.2 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合). $V_a := L(\varpi_a)$ を 2次元基本表現 ($a \in \mathbb{C}^\times$) とすると, その q 指標は $\chi_q(V_a) = Y_a + Y_{aq^2}^{-1}$ である. 2つの基本表現 V_a と V_b のテンソル積を考える.

- $a/b \notin \{q^2, q^{-2}\}$ のとき, テンソル積は既約で, $V_a \otimes V_b \cong L(\varpi_a + \varpi_b) \cong V_b \otimes V_a$ となる.
- $b = aq^2$ のとき, テンソル積は可約で, $L := L(\varpi_a + \varpi_{aq^2})$ とおいて 2つの短完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow V_a \otimes V_{aq^2} \rightarrow L \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow L \rightarrow V_{aq^2} \otimes V_a \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0.$$

がある. 両者はともに分裂せず, したがって $V_a \otimes V_{aq^2} \not\cong V_{aq^2} \otimes V_a$ であるが, Grothendieck 環では $[V_a] \cdot [V_{aq^2}] = [L] + 1 = [V_{aq^2}] \cdot [V_a]$ となるから確かに可換である. またこの完全列から L の q 指標は

$$\chi_q(L) = \chi_q(V_a)\chi_q(V_{aq^2}) - 1 = Y_a Y_{aq^2} + Y_a Y_{aq^4}^{-1} + Y_{aq^2}^{-1} Y_{aq^4}^{-1}$$

と計算できる.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ (A_1 型) のときは, $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ に属するすべての既約表現の指標が計算でき, 明示的に書き下せる [1]. しかし, A_1 型でない一般の \mathfrak{g} については, 基本表現 $L(\varpi_{i,a})$ や Kirilov–Reshetikhin 加群のような特別なクラスを除いて, 既約 q 指標を統一的に書き下すことは現時点ではできていない. 特に, Weyl の指標公式のような明示公式は知られていない. こうした (特に表現のなす圏が非半単純であるような) 状況における既約指標の決定問題に対して, しばしば Kazhdan–Lusztig 型のアプローチが有効である. これを次節で説明する.

2 量子 Grothendieck 環

2.1 元来の Kazhdan–Lusztig 理論

元来の Kazhdan–Lusztig 理論は, 複素単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の既約最高ウェイト表現の指標決定問題に関するものである. \mathfrak{g} の無限次元最高ウェイト表現を含むある良いアーベル圏 \mathcal{O}_0 (正確には BGG 圏 \mathcal{O} の主ブロック) に属する既約表現は \mathfrak{g} の Weyl 群によるラベル付け $\text{irr } \mathcal{O}_0 = \{L_w \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$ を持つ. その Grothendieck 群 $K(\mathcal{O}_0)$ には, 既約表現のなす基底 $\{[L_w] \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$ に加えて, Verma 加群 (普遍最高ウェイト表現) のなす基底 $\{[M_w] \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$ が存在する. 既約表現の指標を直接決定するのは難しいが, Verma 加群の指標は簡単にわかる. そこで組成重複度 $[M_w : L_v]$ を求める問題を考える.

Kazhdan–Lusztig [13] は $K(\mathcal{O}_0) \cong \mathbb{Z}W_{\mathfrak{g}}$ と見て, 群代数 $\mathbb{Z}W_{\mathfrak{g}}$ の 1 パラメータ変形として岩堀–Hecke 環 $\mathcal{H}_t(W_{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{w \in W_{\mathfrak{g}}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]T_w$ を考え, その standard 基底 $\{T_w \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$ からある条件で特徴づけられる標準基底 (canonical basis) $\{C_w \mid w \in W_{\mathfrak{g}}\}$ (Kazhdan–Lusztig 基底とも言う) を代数的に構成した. この構成は標準基底の各元を standard 基底から帰納的に得るアルゴリズムを与え, 特に 2 つの基底の間の変換行列 $(p_{w,v}(t))$ が帰納的に計算できる. このとき「変換行列の係数 $p_{w,v}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が特殊化 $t = 1$ で組成重複度 $[M_w : L_v]$ に一致する」というのが Kazhdan–Lusztig 予想である. これは, 「同一視 $K(\mathcal{O}_0) \cong \mathbb{Z}W_{\mathfrak{g}}$ を $T_w|_{t=1} = [M_w]$ ($\forall w \in W_{\mathfrak{g}}$) なるように取ったとき $C_w|_{t=1} = [L_w]$ ($\forall w \in W_{\mathfrak{g}}$) となる」と言い換えられる.

予想自体はこのように代数的に定式化されるが, Beilinson–Bernstein および Brylinski–Kashiwara によるその最初の証明には旗多様体の幾何を用いる必要があったことにも注意を向けておく.

2.2 量子 Grothendieck 環とその標準基底

圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ における既約 q 指標の決定問題に対して同様の Kazhdan–Lusztig 型アプローチを考えたい. これが Grothendieck 環 $K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ の 1 パラメータ変形 $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$, すなわち量子 Grothendieck 環を導入する動機である. 量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ は当初 \mathfrak{g} が ADE 型のときに Nakajima [14] および Varagnolo–Vasserot [15] によって幾何を用いて構成され, 後に Hernandez [7] が一般型の \mathfrak{g} に対して代数的構成を与えた. ここでは Hernandez の流儀に従って, 量子 Grothendieck 環の代数的構成を大雑把に説明する. それは以下の可換図式にまとめられる:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\chi_q} & \bigcap_{i \in I} \text{Ker } S_i \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}} = \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1} \mid i \in I, a \in \mathbb{C}^{\times}] \\ \uparrow t=1 & & \uparrow t=1 \\ K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) & := & \bigcap_{i \in I} \text{Ker } S_{i,t} \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t} = (\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{Z}[t^{\pm 1}], *) \end{array}$$

準同型 χ_q によって通常の Grothendieck 環 $K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ が Laurent 多項式環 $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}}$ に埋め込まれることを思い出そう. そこでまず新たに変数 $t^{1/2}$ を導入し $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}}$ の非可換変形として量子トラス $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t}$ を考える. これは自由

$\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ 加群 $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}] = \bigoplus_{m \in \mathcal{M}_{\mathfrak{g}}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]m$ (ここで $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}}$ は Y 変数たちの Laurent 単項式の集合) に適当な歪対称双線形形式 $\gamma: \mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \times \mathcal{M}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ を用いて新たな積 $*$ を

$$m * m' := t^{\gamma(m, m')} mm'$$

のように入れて定まる非可換環である. この双線形形式 γ は \mathfrak{g} の量子 Cartan 行列 (Cartan 行列の 1 パラメータ変形) を用いて適切に定義される. 次に量子 Grothendieck 環を $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}, t}$ の部分環として定義する. [4, 3] により, χ_q の像は $\mathcal{Y}_{\mathfrak{g}}$ の中でいわゆるスクリーニング作用素 S_i ($i \in I$) の核の共通部分として記述できることが知られている (これは例 1.1 において χ の像が Weyl 群不変式環として書けたことの類似である). そこでこの記述に倣って, スクリーニング作用素の t 変形 $S_{i,t}$ を適切に定め, 量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ をその共通核 $\bigcap_{i \in I} \text{Ker } S_{i,t} \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}, t}$ として定義する. 各 $i \in I$ について $\text{Ker } S_{i,t} \subset \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}, t}$ は $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -部分代数として簡単に書けるが, ここでは割愛する.

続いて量子 Grothendieck 環の標準基底の構成を述べる. 圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ においては, 通常の Kazhdan–Lusztig 理論における Verma 加群の対応物として, standard 加群 (または局所 Weyl 加群) と呼ばれる基本表現のテンソル積

$$M(\lambda) := L(\varpi_{i_1, a_1}) \otimes \cdots \otimes L(\varpi_{i_n, a_n})$$

を考える. ただし, 順序 $\lambda = \varpi_{i_1, a_1} + \cdots + \varpi_{i_n, a_n}$ は $k < l$ ならば $a_k/a_l \notin q^{\mathbb{Z}_{>0}}$ なるようにとる. 加群 $M(\lambda)$ は $L(\lambda)$ を唯一の単純商に持ち, 集合 $\{[M(\lambda)] \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$ は Grothendieck 環 $K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ の \mathbb{Z} 上の基底を成す. その t 類似として, 量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ 上の standard 基底 $\{M_t(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$ を

$$M_t(\lambda) := t^{-\gamma(m)} L_t(\varpi_{i_1, a_1}) * \cdots * L_t(\varpi_{i_n, a_n})$$

によって定める. ここで, $\gamma(m) := \sum_{1 \leq k < l \leq n} \gamma(Y_{i_k, a_k}, Y_{i_l, a_l})$ であり, $L_t(\varpi_{i, a})$ は $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ の元であって $L_t(\varpi_{i, a}) = Y_{i, a} +$ (ある変数 $Y_{j, b}$ の負冪を含む Laurent 単項式の線形結合) という形に書けるものとして一意的に決まる. この $L_t(\varpi_{i, a})$ は特徴づけから帰納的に計算可能な元であり, $L_t(\varpi_{i, a})|_{t=1} = \chi_q(L(\varpi_{i, a}))$ を満たすことも分かる. したがって特に各 $\lambda \in \mathcal{P}^+$ について $M_t(\lambda)$ も原理的に計算可能であって, $M_t(\lambda)|_{t=1} = \chi_q(M(\lambda))$ を満たす. こうして得られた基底 $\{M_t(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$ を standard 基底として, 通常の Kazhdan–Lusztig 理論のときと全く同じやり方で $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ の標準基底 $\{L_t(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$ を構成することができる (Nakajima [14], Hernandez [7]). 標準基底の各元 $L_t(\lambda)$ はしばしば既約 (q, t) -指標と呼ばれる. 実際, \mathfrak{g} が ADE 型のとき, Kazhdan–Lusztig 予想の圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ における類似として次が成り立つことが分かっている.

定理 2.1 (Nakajima [14], Kazhdan–Lusztig 型予想). Lie 代数 \mathfrak{g} が ADE 型のとき, 任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ について等式

$$L_t(\lambda)|_{t=1} = \chi_q(L(\lambda)) \quad (3)$$

が成り立つ.

また, $L_t(\lambda)$ が既約 q 指標 $\chi_q(L(\lambda))$ の t 類似であるとすれば, ある種の正値性が期待される. 実際, Lie 代数 \mathfrak{g} が ADE 型のとき, 以下の 2 つの正値性が成り立つことが分かっている.

定理 2.2 (Nakajima [14] + Varagnolo–Vasserot [15]). Lie 代数 \mathfrak{g} が ADE 型のとき, 以下が成り立つ:

- (P1) 任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ について, $L_t(\lambda) \in \mathcal{Y}_{\mathfrak{g}, t}$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{\pm 1/2}]$ に係数を持つ;
- (P2) 量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ の標準基底 $\{L_t(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{P}^+\}$ に関する構造定数はすべて $\mathbb{Z}_{\geq 0}[t^{\pm 1/2}]$ に属する.

通常の Kazhdan–Lusztig 予想の最初の証明が幾何学的だったのと同様に，上記定理 2.1 & 2.2 の証明には中島箴多様体の幾何を用いる．この幾何学的手法は今のところ ADE 型の場合にしか適用できない．しかし，標準基底は \mathfrak{g} の型に関わらず代数的に定義されるので，もちろん以下の予想が立つ．

予想 2.3 (Hernandez). 定理 2.1 & 2.2 の主張は一般の単純 Lie 代数 \mathfrak{g} について（特に BCFG 型のときにも）正しい．

2.3 主定理

本稿の主定理は予想 2.3 を部分的に解決する以下の結果である．

定理 2.4 ([6, 5]). 定理 2.2, すなわち量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ の標準基底に関する正值性 (P1) と (P2) は一般の単純 Lie 代数 \mathfrak{g} について正しい．また，等式 (3) は少なくとも以下の 2 つの場合について正しい：

- (ア) \mathfrak{g} が B 型のとき（任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ に対して），
- (イ) $L(\lambda)$ が「到達可能 (reachable)」のとき（任意型の \mathfrak{g} に対して）．

ここで，到達可能性は団代数の圏化理論から来る術語であり，4 節で説明される（定義 4.6 を参照）．我々の証明は幾何を直接的には用いないが，代わりに団代数の理論や量子群の圏化理論などを援用する．本稿の残りの部分で，この定理 2.4 の証明の概略を説明する．

3 異なる型の量子 Grothendieck 環の間の同型

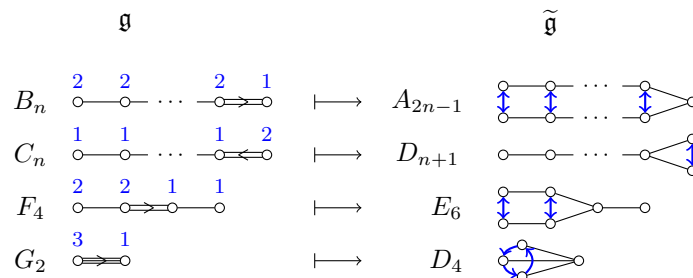
3.1 同型 Ψ

定理 2.4 の証明の鍵となるのが，次に述べる事実である．

定理 3.1 ([6]). Lie 代数 \mathfrak{g} は BCFG 型とする．このとき $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数の同型

$$\Psi: K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\cong} K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})$$

であって標準基底を標準基底に写すものが存在する．ただし， $\tilde{\mathfrak{g}}$ は \mathfrak{g} を展開 (unfolding) して得られる ADE 型 Lie 代数であり，具体的には以下の Dynkin 図形の対応で与えられる：



ここで，左辺の Dynkin 図形の各頂点 i の上に青字で記した整数 $d_i \in \{1, 2, 3\}$ は対称化数，すなわち $(c_{ij})_{i,j \in I}$ を \mathfrak{g} の Cartan 行列としたとき $d_i c_{ij} = d_j c_{ji} \ (\forall i, j \in I)$ を満たす数である．感覚的な言い方になるがこれを Dynkin 図形の「厚み」とみなして「厚い」部分をスライスすることで右辺の ADE 型 Dynkin 図形が得られ

る仕組みになっている．もう少し正確に言えば， \mathfrak{g} の Dynkin 図形における頂点 $i \in I$ が $\tilde{\mathfrak{g}}$ の Dynkin 図形において青い矢印で示した自己同型でうつり合う d_i 個の頂点に分かれる．

定理 3.1 の同型 Ψ によって， $BCFG$ 型の量子 Grothendieck 環と ADE 型の量子 Grothendieck 環が直接的に結びつく． ADE 型量子 Grothendieck 環においては中島叡多様体の幾何を用いて標準基底が良い性質を持つことがすでに示されており，同型 Ψ を介してそうした良い性質が $BCFG$ 型へと伝播する．この事実が主定理 2.4 の証明の肝心な部分である．例えば， ADE 型の量子 Grothendieck 環の構造定数の正値性 (P2) はすでにわかっているので，直ちに次が従う．

系 3.2 (正値性の伝播)． \mathfrak{g} が $BCFG$ 型のときも，構造定数の正値性 (P2) は正しい．

本稿では定理 3.1 の証明の詳細については立ち入らないが，少しだけコメントをしておく．同型 Ψ の構成は，量子 Grothendieck 環 $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}})$ の生成元と関係式による上手い表示を見つけ，それを $K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})$ の表示と比較して一致することを確認することによる．したがって構成は純代数的である．しかし，その上手い表示を得るために，圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ のコア部分圏と呼ばれる良い部分圏が \mathfrak{g} に付随する Lie 群の極大冪単部分群の量子座標環の圏化を与えるという事実などを用いる．*2

3.2 B 型における Kazhdan–Lusztig 型予想の証明 (= 同型 $\Psi|_{t=1}$ の圏化)

次に B 型における Kazhdan–Lusztig 型予想をどのように証明するか簡単に述べる．これは一言で言えば，同型 Ψ に対応する圏の関係性を見出すことよってなされる． \mathfrak{g} が B_n 型のとき $\tilde{\mathfrak{g}}$ は A_{2n-1} 型であるが，以下ではこの型を強調して $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} = \mathcal{C}_{B_n}$, $\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}} = \mathcal{C}_{A_{2n-1}}$ のように書くことにする．Kashiwara–Kim–Oh による次の結果は，実際に圏 \mathcal{C}_{B_n} の $\mathcal{C}_{A_{2n-1}}$ の間に強い関係性があることを示していた．

定理 3.3 (Kashiwara–Kim–Oh [10])． $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ が (B_n, A_{2n-1}) 型のとき， \mathcal{T} を GL 型アフィン Hecke 環の表現たちから生じる適当なモノイダル圏として，2つのモノイダル完全関手

$$\mathcal{C}_{B_n} \leftarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}_{A_{2n-1}}, \quad (4)$$

が存在する．これらは環同型

$$F: K(\mathcal{C}_{B_n}) \simeq K(\mathcal{C}_{A_{2n-1}})$$

を導き，既約表現の同型類の 1:1 対応を与える．

我々は定理 3.3 の同型 F と定理 3.1 の同型 Ψ を比較することで以下の結果を得た．

定理 3.4 ([9, 6])．以下の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} K_t(\mathcal{C}_{B_n}) & \xrightarrow{\Psi} & K_t(\mathcal{C}_{A_{2n-1}}) \\ t=1 \downarrow & & \downarrow t=1 \\ K(\mathcal{C}_{B_n}) & \xrightarrow{F} & K(\mathcal{C}_{A_{2n-1}}). \end{array}$$

特に \mathfrak{g} が B 型のとき，任意の $\lambda \in \mathcal{P}^+$ について等式 (3) は正しい．

*2 コア部分圏については第 67 回代数学シンポジウムの直井克之氏の講演 [17] でも解説されている．

同型 F と同型 Ψ の構成は独立であり、したがって定理 3.4 が非自明な主張であることに注意する。

注意 3.5. \mathfrak{g} が CFG 型の場合には定理 3.3 のような圏間の関係性は現時点で知られていない。コア部分圏と呼ばれる圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ の部分圏に制限すれば類似の結果がある（例えば [17] を参照）のだが、残念ながらそれは Kazhdan–Lusztig 型予想を解決するためには十分でない。

4 量子団代数を用いた解釈

本節では到達可能表現に対する Kazhdan–Lusztig 予想をどのように証明するか説明する。これは圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ の良い部分圏が団代数のモノイダル圏化を与えているという事実を本質的に用いて証明される。そこでまずその良い部分圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^- \subset \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ を導入する。

4.1 Hernandez–Leclerc の部分圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$

パリティ関数 $\varepsilon: I \rightarrow \{0, 1\}$ であって、Dynkin 図形において i と j が隣接するならば $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_j + \min(d_i, d_j) \pmod{2}$ を満たすものを一つ固定する。そのようなパリティ関数の選び方は 2 通りしかなく、取り方の違いは以下の議論において本質的でない。

定義 4.1 (Hernandez–Leclerc [8]). 圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$ を圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ の Serre 部分圏として以下の条件で定義する：

$$L(\lambda) \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^- \iff \lambda \in (\mathcal{P}^+)^- := \bigoplus_{i \in I, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_{i, q^{-\varepsilon_i - 2k}}.$$

圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$ は圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ のモノイダル部分圏であるが、これは次の事実により圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ のモノイダル圏としての情報を本質的にすべて含んでいると言える。

命題 4.2. 圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ の任意の素 (prime) な既約表現は、適切にスペクトル変数シフト $\sigma_c: L(\varpi_{i,a}) \mapsto L(\varpi_{i,ca})$ を施せば圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$ に入る。（ここで既約表現が素であるとは 2 つ以上の非自明な既約表現のテンソル積と同型にならないことをいう。）

4.2 団代数と籠の変異

モノイダル圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$ はある団代数 (cluster algebra) のモノイダル圏化を与える。その意味を説明するために、ここで団代数についての予備知識をごく簡単に述べておく。

ループおよび有向 2 サイクルを持たない籠 Q に付随して、団代数 $A(Q)$ が定義される。これは有理関数体 $\mathbb{Q}(x_i \mid i \in Q_0)$ の部分環である。ここで Q_0 は籠 Q の頂点集合である。本稿では団代数 $A(Q)$ の具体的な定義などについては立ち入らない。後で必要となる以下の事実だけをpushしておく。

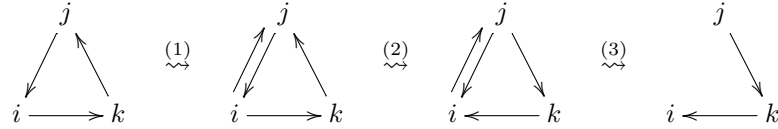
- $A(Q)$ は団単項式 (cluster monomial) からなる \mathbb{Z} 上線形独立な部分集合 CM を持つ。
- 集合 CM の極大積閉部分集合は「団」と呼ばれる*3。例えば変数 x_i ($i \in Q_0$) たちの単項式のなす集合 $\{\prod_{i \in Q_0} x_i^{n_i} \mid (n_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}\}$ は 1 つの「団」であり、これを「初期団 (initial cluster)」と呼ぶ。任意の

*3 普通、団 (cluster) といえばそのような極大積閉部分集合の中の既約元 (団変数) の集合の方を指すので、ここでの「団」の用法はその意味で正しくない。その弁解の意も込めて「」をつけている。

「団」は「初期団」から変異 (mutation) と呼ばれる $\mathbb{Q}(x_i \mid i \in Q_0)$ 上の双有理変換を有限回合成して得られる。

- 変異はまた簇の変異と呼ばれる組合せ論的手続きを伴って帰納的に定義される。一般に、簇 Q の頂点 $k \in Q_0$ における変異は、以下の3つの操作からなる：

- (1) 各部分簇 $(i \rightarrow k \rightarrow j) \subset Q$ ごとに新しい矢 $i \rightarrow j$ を加える；
- (2) 頂点 k に接するすべての矢の向きを反転する；
- (3) 2 サイクルを生じた場合、それを取り除く。



これによって得られた簇を $\mu_k Q$ と書く。このとき、団代数の定義より以下のような可換図式がある：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}(x_i)_{i \in Q_0} & \xrightarrow{\text{変異}} & \mathbb{Q}(x_i)_{i \in Q_0} \\
 \cup & & \cup \\
 A(\mu_k Q) & \xrightarrow{\cong} & A(Q) \\
 \cup & & \cup \\
 \text{CM} & \xrightarrow{1:1} & \text{CM}.
 \end{array} \tag{5}$$

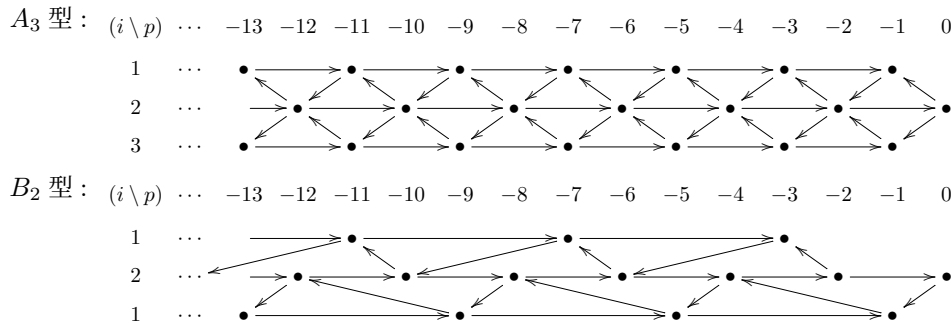
有理関数体 $\mathbb{Q}(x_i \mid i \in Q_0) = \text{Frac} \mathbb{Z}[x_i^{\pm 1} \mid i \in Q_0]$ を適当な量子トーラスの分数体に置き換えることによって、量子団代数 $A_t(Q)$ の概念も定義される。もちろん図式 (5) の t 類似も存在する。

4.3 モノイダル圏化定理とその量子化

定義 4.3 ([8]). 単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に付随して、(無限) 簇 $\Gamma_{\mathfrak{g}}^-$ を次で定める：

- 頂点集合 $(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-)_0 := \{(i, -\varepsilon_i - 2k) \mid i \in I, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$;
- 矢はすべて重複度 1 であり、 $(i, p) \rightarrow (j, s) \iff c_{ij} \neq 0 \ \& \ s - d_j = p - d_i + d_i c_{ij}$.

例 4.4 (A_3 型 & B_2 型).



以上の準備の下で、圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$ に関するモノイダル圏化定理を述べることができる。

定理 4.5 (Kashiwara–Kim–Oh–Park [12], Hernandez–Leclerc 予想 [8]). 圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-$ は団代数 $A(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-)$ のモノイダル圏化を与える、すなわち次のような同型がある：

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\eta}_{\mathfrak{g}}: A(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-) & \xrightarrow{\cong} & K(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-) \\
 \cup & & \cup \\
 \text{CM} & \hookrightarrow & \text{irr } \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-.
 \end{array}$$

定義 4.6. $\bar{\eta}_{\mathfrak{g}}(\text{CM})$ に属する既約表現は到達可能 (reachable) であるという.

注意 4.7. 1つの「団」に属する到達可能表現たちの任意のテンソル積は既約となり、したがってそれらは特にテンソル積に関して可換な既約表現の族を成す. こうして得られる既約表現の可換族は極大な族であることも知られている ([11]). その意味で定理 4.5 は圏 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}$ における既約表現のテンソル積がいつ可換になるかを (少なくとも部分的に) 記述するものだと思うことができる.

我々はモノイダル圏化定理 4.5 の t 類似にあたる次の主張を証明した.

定理 4.8 ([5]). 団代数 $A(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-)$ は量子団代数 $A_t(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-)$ にアップグレードされ,

$$\begin{aligned} \eta_{\mathfrak{g}}: A_t(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-) &\xrightarrow{\cong} K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-) \\ \text{CM}_t &\hookrightarrow \{L_t(\lambda)\}_{\lambda \in (\mathcal{P}^+)^-} \end{aligned}$$

なる $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ -代数の同型 $\eta_{\mathfrak{g}}$ であって, $\eta_{\mathfrak{g}}|_{t=1} = \bar{\eta}_{\mathfrak{g}}$ を満たすものが存在する.

系 4.9. 等式 (3) は任意の到達可能な既約表現 $L(\lambda)$ について正しい.

定理 4.8 の証明には, 同型 Ψ の団代数解釈 (以下の定理 4.10) を本質的に用いる.

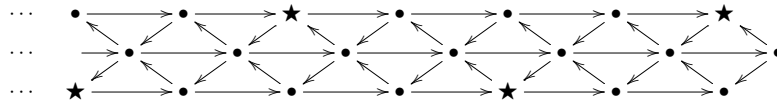
4.4 同型 Ψ の量子団代数を用いた解釈

以下, \mathfrak{g} を BCFG 型 Lie 代数, $\tilde{\mathfrak{g}}$ をその展開 ADE 型 Lie 代数とする. 先述の同型 Ψ (の制限) は $K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-)$ と $K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}^-)$ の同型を導く.

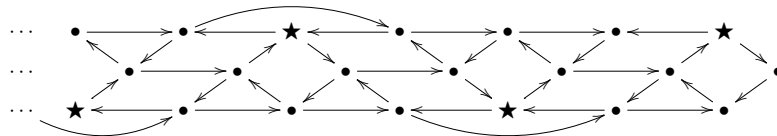
定理 4.10 ([5]). ある変異の (無限) 列から決まる量子団代数の間の同型 $\Phi: A_t(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-) \xrightarrow{\cong} A_t(\Gamma_{\tilde{\mathfrak{g}}}^-)$ であって, 次の図式を可換にするものが存在する:

$$\begin{array}{ccc} A_t(\Gamma_{\mathfrak{g}}^-) & \xrightarrow{\Phi} & A_t(\Gamma_{\tilde{\mathfrak{g}}}^-) \\ \eta_{\mathfrak{g}} \downarrow & & \downarrow \eta_{\tilde{\mathfrak{g}}} \\ K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^-) & \xrightarrow{\Psi} & K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}^-). \end{array}$$

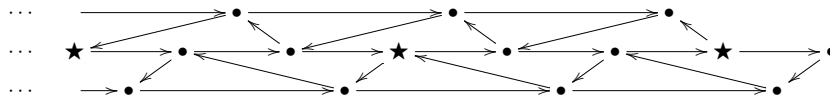
例 4.11. 例えば $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ が (B_2, A_3) 型のを考える. 籠 $\Gamma_{A_3}^-$ から出発して



★ でマークされた頂点にて変異を施すと,



を得る. これは籠 $\Gamma_{B_2}^-$



に一致する.

4.5 応用：置換公式

主定理 2.4 の証明とは直接関係ないが、定理 4.10 の応用として、次のような興味深い結果が得られる.

定理 4.12 ([5]). $\mathbb{Q}(t^{1/2})$ 上の斜体の同型 $\tilde{\Psi}: \text{Frac}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t}) \xrightarrow{\sim} \text{Frac}(\mathcal{Y}_{\tilde{\mathfrak{g}},t})$ であって、次の図式を可換にするものが存在する：

$$\begin{array}{ccc} \text{Frac}(\mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t}) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \text{Frac}(\mathcal{Y}_{\tilde{\mathfrak{g}},t}) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{Y}_{\mathfrak{g},t} & & \mathcal{Y}_{\tilde{\mathfrak{g}},t} \\ \cup & & \cup \\ K_t(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\Psi} & K_t(\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}). \end{array}$$

特に、同型 $\tilde{\Psi}$ は既約 (q, t) -指標の $1:1$ 対応を導く. $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ が (B_n, A_{2n-1}) 型のときは、 $\tilde{\Psi}|_{t=1}$ は既約 q -指標の $1:1$ 対応を導く.

例 4.13. 再び $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}})$ が (B_2, A_3) 型のときを考える. 先述の例 4.11 から、以下の双有理変換が得られる.

$$\tilde{\Psi}|_{t=1}(Y_{i,p}) = \begin{cases} Y_{1,-3-8m}Y_{1,-1-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-3-12m), \\ Y_{1,-5-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-7-12m), \\ Y_{1,-7-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-11-12m), \\ Y_{2,-8m} & \text{if } (i,p) = (2,-12m), \\ Y_{2,-2-8m}Y_{1,-1-8m}^{-1} + Y_{1,-3-8m} & \text{if } (i,p) = (2,-2-12m), \\ (Y_{1,-1-8m}^{-1} + Y_{2,-2-8m}Y_{1,-3-8m})^{-1} & \text{if } (i,p) = (2,-4-12m), \\ Y_{2,-4-8m} & \text{if } (i,p) = (2,-6-12m), \\ Y_{3,-7-8m} + Y_{2,-6-8m}Y_{3,-5-8m}^{-1} & \text{if } (i,p) = (2,-8-12m), \\ (Y_{2,-6-8m}^{-1}Y_{3,-7-8m} + Y_{3,-5-8m}^{-1})^{-1} & \text{if } (i,p) = (2,-10-12m), \\ Y_{3,-1-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-1-12m), \\ Y_{3,-3-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-5-12m), \\ Y_{3,-7-8m}Y_{3,-5-8m} & \text{if } (i,p) = (1,-9-12m). \end{cases}$$

ここで $m \in \mathbb{Z}$ であり、簡単のため $Y_{i,p} := Y_{i,q^p}$ とおいた. 例えば、 B_2 型の 5 次元基本表現の q -指標

$$\chi_q(L_{B_2}(\varpi_{1,q^{-7}})) = Y_{1,-7} + Y_{2,-6}Y_{2,-4}Y_{1,-3}^{-1} + Y_{2,-6}Y_{2,-2}^{-1} + Y_{1,-5}Y_{2,-4}^{-1}Y_{2,-2}^{-1} + Y_{1,-1}^{-1}$$

は変換 $\tilde{\Psi}|_{t=1}$ の下で、

$$\begin{aligned} & Y_{1,-5} + \frac{Y_{2,-4}}{(Y_{1,-1}^{-1} + Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3})Y_{1,-3}Y_{1,-1}} + \frac{Y_{2,-4}}{Y_{2,-2}Y_{1,-1}^{-1} + Y_{1,-3}} + \frac{Y_{3,-3}(Y_{1,-1}^{-1} + Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3})}{Y_{2,-2}Y_{1,-1}^{-1} + Y_{1,-3}} + Y_{3,-1}^{-1} \\ &= Y_{1,-5} + Y_{2,-4} \frac{Y_{1,-3}^{-1}Y_{1,-1}^{-1} + Y_{2,-2}^{-1}}{Y_{1,-1}^{-1} + Y_{2,-2}^{-1}Y_{1,-3}} + Y_{3,-3}Y_{2,-2}^{-1} + Y_{3,-1}^{-1} \\ &= Y_{1,-5} + Y_{2,-4}Y_{1,-3}^{-1} + Y_{3,-3}Y_{2,-2}^{-1} + Y_{3,-1}^{-1} \end{aligned}$$

に写る. これは A_3 型の 4 次元基本表現の q 指標 $\chi_q(L_{A_3}(\varpi_{1,q^{-5}}))$ にほかならない.

謝辞

本稿は 2023 年 8–9 月に名古屋大学で行われた第 68 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演内容をまとめたものである。講演の機会を与えてくださりシンポジウムの運営にご尽力された世話人の先生方に深く御礼申し上げます。本稿の内容に関する筆者の研究は日本学術振興会海外特別研究員制度および科研費 (No. 23K12955) の助成を受けています。

参考文献

- [1] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 142(2):261–283, 1991.
- [2] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. Quantum affine algebras and their representations. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of *CMS Conf. Proc.*, pages 59–78. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [3] Edward Frenkel and Evgeny Mukhin. Combinatorics of q -characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 216(1):23–57, 2001.
- [4] Edward Frenkel and Nicolai Reshetikhin. The q -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of \mathcal{W} -algebras. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, volume 248 of *Contemp. Math.*, pages 163–205. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [5] Ryo Fujita, David Hernandez, Se-jin Oh, and Hironori Oya. Isomorphisms among quantum grothendieck rings and cluster algebras. preprint. arxiv:2304.02562v2.
- [6] Ryo Fujita, David Hernandez, Se-jin Oh, and Hironori Oya. Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and propagation of positivity. *J. Reine Angew. Math.*, 785:117–185, 2022.
- [7] David Hernandez. Algebraic approach to q, t -characters. *Adv. Math.*, 187(1):1–52, 2004.
- [8] David Hernandez and Bernard Leclerc. A cluster algebra approach to q -characters of Kirillov-Reshetikhin modules. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 18(5):1113–1159, 2016.
- [9] David Hernandez and Hironori Oya. Quantum Grothendieck ring isomorphisms, cluster algebras and Kazhdan-Lusztig algorithm. *Adv. Math.*, 347:192–272, 2019.
- [10] Masaki Kashiwara, Myungho Kim, and Se-jin Oh. Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type A and B. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 118(1):43–77, 2019.
- [11] Masaki Kashiwara, Myungho Kim, Se-jin Oh, and Euiyong Park. Monoidal categorification and quantum affine algebras. *Compos. Math.*, 156(5):1039–1077, 2020.
- [12] Masaki Kashiwara, Myungho Kim, Se-jin Oh, and Euiyong Park. Monoidal categorification and quantum affine algebras II. Preprint, arxiv:2103.10067v3, 2021.
- [13] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53(2):165–184, 1979.
- [14] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and t -analogs of q -characters of quantum affine algebras. *Ann. of Math. (2)*, 160(3):1057–1097, 2004.

- [15] M. Varagnolo and E. Vasserot. Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings. In *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)*, volume 210 of *Progr. Math.*, pages 345–365. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.
- [16] 大矢 浩徳. 「非対称型量子ループ代数の既約表現の q 指標について」. 第 64 回代数学シンポジウム報告集.
- [17] 直井 克之. 「一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性と圏同値」. 第 67 回代数学シンポジウム報告集.

頂点代数とモジュラー微分方程式

有家 雄介*

鹿児島大学教育学部

1 はじめに

頂点作用素代数 V の既約加群 $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{h+n}$ の指標

$$Z_M(\tau) = \text{tr}_M q^{L_0 - c/24} = \sum_{n=0}^{\infty} \dim M_{h+n} q^{n-c/24}$$

を考える. ここで, c は V の中心電荷, h は共形ウエイトとよばれる有理数で, M_{h+n} は次数作用素 L_0 に関する有限次元の固有空間である. Y. Zhu ([17]) は V が有理的かつ C_2 -cofinite とよばれる条件を満たすとき, 既約加群の指標 Z_M は $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ とおくと τ の関数として複素上半平面 \mathbb{H} において正則であり, 既約加群の指標で張られる空間は変換

$$Z_M(\tau) \mapsto Z_M\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

により不変であることを証明した. この証明の重要なステップとして, 解空間が指標の張る空間を含む微分方程式が存在することが示されている ([6, 17]). ここで現れる微分方程式はモジュラー微分方程式とよばれている.

正整数 d に対して, その指標が d 階のモジュラー微分方程式の解となるような頂点作用素代数はどのくらい存在するか, という問題を考える. $d = 1$ のときは解は定数しかないので, 対応する頂点作用素代数は自明なものに限る. $d = 2$ の場合には, 対応する頂点作用素代数は, 中心電荷 $-22/5$ のヴィラソロ頂点作用素代数と単純リー代数 $A_1, A_2, G_2, D_4, F_4, E_6, E_7, E_8$

*arika@edu.kagoshima-u.ac.jp

に付随するレベル1のアフィン頂点作用素代数であることが [13, 14] において示されている.

$d = 3$ の場合には対応する頂点作用素代数は無限個現れることが知られている ([2]). そこで, ウェイト1の空間が自明であるようなものだけを考えて, 中心電荷の候補は有限個となり, すべてリストアップできる ([3, 7, 8, 15, 16]). さらに, 中心電荷が $164/5$ と $236/7$ の場合を除いて対応する頂点作用素代数の候補も見つかっている ([8, 15, 16]).

本稿では, どのように中心電荷の方法のリストが得られるかを解説し, さらに中心電荷 $164/5$ と $236/7$ の場合に, 対応する C_2 -cofinite かつ有理的な頂点作用素代数が存在しないことの証明について解説する.

2 モジュラー微分方程式

この節ではモジュラー微分方程式の定義を紹介し, その基本的な性質について述べる. 以下

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

ウェイト $2k$ の Eisenstein 級数を

$$E_{2k}(\tau) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)q^n, \quad q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H}$$

とする. ここで B_{2k} はベルヌーイ数, $\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$, \mathbb{H} は複素上半平面とする. ウェイト k のセール微分 D_k を

$$D_k = q \frac{d}{dq} - \frac{k}{12} E_2(\tau)$$

とし, その合成を

$$D_k^p = D_{k+2(p-1)} \circ \cdots \circ D_{k+2} \circ D_k$$

で定める.

定義 1. 微分方程式

$$D_0^p f(\tau) + \sum_{i=0}^{p-2} P_i(\tau) D_0^i f(\tau) = 0$$

は $P_i(\tau)$ がウエイト $2(p-i)$ のモジュラー形式のとき, **モジュラー微分方程式**とよばれる.

一般にモジュラー微分方程式の解空間は変換

$$f(\tau) \mapsto f|_0\gamma(\tau) = \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

により不変であって, $q=0$ にのみ確定特異点を持つ確定特異点型の微分方程式となることが知られている ([11]).

3 頂点作用素代数とその指標

この節では頂点作用素代数とその加群の指標について説明する. ただし, 頂点作用素代数の解説については, 指標を定義するために必要な条件に絞って説明するので, 正確な頂点作用素代数の定義や例については, [10] や [12] を参照のこと.

次数付きベクトル空間 $V = \bigoplus_{n=0} V_n$ と線形写像 $Y : V \rightarrow \text{End}(V)[[z, z^{-1}]]$, および真空ベクトルと呼ばれる元 $\mathbf{1} \in V_0$ とヴィラソロ元 $\omega \in V_2$ の組 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ が頂点作用素代数であるとは, 以下の公理を満たすことである.

- 任意の $a, b \in V$ に対してある $N > 0$ が存在して, $Y(a, z)b \in V[[z]]z^N$.
- 任意の $a, b \in V$ に対して $N > 0$ であって

$$(z-w)^N Y(a, z)Y(b, w) = (z-w)^N Y(b, w)Y(a, z)$$

となるものが存在する.

- $Y(\mathbf{1}, z) = \text{id}_V, Y(a, z)\mathbf{1} = a + V[[z]]z$ ($a \in V$).
- $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とするとき,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n, 0} c \quad (1)$$

が成り立つ. ここで $c \in \mathbb{C}$ であり, c を V の中心電荷という.

- $[L_{-1}, Y(a, z)] = \frac{d}{dz} Y(a, z)$ ($a \in V$).

- $V_n = \{a \in V \mid L_0 v = nv\}$, $\dim V_n < \infty$.

次数0の空間が1次元, すなわち $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ となるとき, V は CFT 型であるという.

頂点作用素代数 V の加群とは, ベクトル空間 M と線形写像 $Y_M : V \rightarrow \text{End}(M)[[z, z^{-1}]$ の組であって然るべき条件を満たすものである. ここで, $Y_M(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^M(z^{-n-2})$ とすると, L_n^M たちは V と同じ中心電荷 c の関係式 (1) を満たす. 加群 M が既約であれば, ある複素数 $h \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{h+n}, \quad M_{h+n} = \{v \in M \mid L_0 v = (h+n)v\}, \quad \dim M_{h+n} < \infty$$

となる. ここで現れる h を M の**共形ウエイト**という. また, 既約加群 M の指標を以下で定義する.

$$Z_M = \sum_{n=0}^{\infty} \dim M_{h+n} q^{n+h-c/24}.$$

ここで, q は不定元とする.

頂点作用素代数 V が**有理的**であるとは, すべての加群が完全可約であることをいう. また, V が C_2 -**cofinite** であるとは, V の部分空間 $C_2(V) = \text{span}\{a_{-2}b \mid a, b \in V\}$ (ただし $Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ とする) による商空間 $V/C_2(V)$ が有限次元であることを言う. 頂点作用素代数が C_2 -cofinite ならば様々なよい性質が成り立つ. 本稿に関係する性質としては

- 既約加群は有限個 ([17]).
- 中心電荷 c と共形ウエイト h は有理数 ([1]).
- すべての既約加群の指標を解に持つようなモジュラー微分方程式が存在する ([6, 17]).
- $Z_M(\tau)$ を Z_M において $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ ($\tau \in \mathbb{H}$) とおいたものとする, $Z_M(\tau)$ は \mathbb{H} 上の正則関数を定める ([17]).

さらに頂点作用素代数 V が C_2 -cofinite かつ有理的であれば, 既約加群の指標のモジュラー不変性が成り立つ.

定理 1 ([17]). 頂点作用素代数 V が C_2 -cofinite かつ有理的であるとする. また, M^0, \dots, M^d を V の既約加群の完全代表系とする. このとき,

$$Z_{M^i}|_0\gamma(\tau) = \sum_{j=0}^d \gamma_{ij} Z_{M^j}(\tau), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

を満たす複素数 γ_{ij} が存在する.

4 3階のモジュラー微分方程式と頂点作用素代数

この節では, C_2 -cofinite かつ有理的な CFT 型の単純頂点作用素代数でその指標が3階の MLDE の解になるようなものの分類について説明する.

§1 でも紹介したように, 指標が2階のモジュラー微分方程式の解になるような頂点作用素代数はその中心電荷の候補が有限個になるが, 指標が3階のモジュラー微分方程式の解になるような CFT 型の頂点作用素代数は無数個存在することが知られている. 例えば, B_ℓ 型のレベル1のアフイン頂点作用素代数の指標はそのランクによらず3階のモジュラー微分方程式の解になる ([2]). そこで, 追加の条件として, 頂点作用素代数 V の次数1の部分空間が $\{0\}$ であることを仮定する. このとき, V の指標 $Z_V(\tau)$ は $q^{-c/24}(1 + mq^2 + \dots)$ と表せる. これを3階のモジュラー微分方程式

$$D_0^3(f) + xE_4(\tau)D_0(f) + yE_6(\tau)f = 0$$

に代入して最初の3つの項の係数を比較すると,

$$576cx - 13824y + c^3 + 12c^2 = 0, \quad (2)$$

$$480cx + 24192y - c^2 - 24c = 0 \quad (3)$$

および,

$$\begin{aligned} c^3m - 132c^2m - 864c^2 + 576cmx + 5760cm \\ + 1244160cx - 41472c - 27648y - c^2 - 24c = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

を得る. (2) と (3) から

$$x = \frac{-7c^2 - 80c + 96}{5952}, \quad y = \frac{5c^3 + 66c^2 + 144c}{214272} \quad (5)$$

となる. これを (4) に代入して整理すると, 有理数 c と正整数 m の関係式

$$70c^3 - 1496m - c^2(2m - 955) + 2c(55m + 1195) = 0$$

が得られる. この方程式を満たす組 $(c, m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_{>0}$ は 41 個あることがわかる ([3, §4]). それぞれの c に対して (5) を用いて対応する MLDE を決定し, その $Z_V(\tau)$ に対応する解の係数を求め, 高い次数の係数として分数や負の数が現れるものを除外すると表 1 の c のリストが得られる. また, 2 つを除いた (c, m) に対して, 対応する頂点作用素代数が見つかった ([3, 8, 16]).

表 1: c, m と対応する VOA の候補

c	m	VOA
$-68/7$	1	$c_{2,7}$
$-44/5$	2	$c_{2,5}^{\otimes 2}$
$1/2$	1	$c_{3,4}$
8	156	$V_{\sqrt{2}E_8}^+$
16	2296	$V_{BW_{16}}^+$
$47/2$	96256	$VB_{\mathbb{Z}}^{\natural}$
24	196884	V^{\natural}
32	139504	○
$164/5$	90118	×
$236/7$	63366	×
40	20620	○

表 1 の VOA の欄について説明しよう. $c_{p,q}$ は中心電荷 $c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$ のヴィラソロ頂点作用素代数である. $c_{2,5}^{\otimes 2}$ は中心電荷 $c_{2,5} = -22/5$ のヴィラソロ頂点作用素代数の 2 つのテンソル積を表す. V_L^+ は正定値偶格子から構成される格子頂点作用素代数の, 格子の -1 倍から誘導される自己同型による固定点代数を表す. BW_{16} はランク 16 の Barnes-Wall 格子である. $VB_{\mathbb{Z}}^{\natural}$ はベビーモンスター頂点作用素超代数の偶部分, V^{\natural} はムーンシャイン頂点作用素代数である. ○ は, ランク 32 と 40 の extremal unimodular 格子 L の V_L^+ を拡大して得られる代数である¹.

以下の定理が本稿の主定理である.

¹講演では ○ に対応する VOA は予想されているだけで知られていない, と述べたがそれは誤りで, 実際に構成されて指標も計算できる. ご指摘いただいた島倉裕樹氏に感謝する.

定理 2 ([4]). 表 1 の $c = 164/5$ と $236/7$ に対応する C_2 -cofinite かつ有理的な頂点作用素代数は存在しない.

5 解の表示とモジュラー変換

この節では表 1 の $c = 164/5$ と $c = 236/7$ のときに現れるモジュラー微分方程式の解の表示とそのモジュラー変換について述べる. $c = 164/5$ のとき, (5) よりモジュラー微分方程式は

$$D_0^3(f) - \frac{169}{100}E_4D_0(f) + \frac{1271}{1080}E_6f = 0 \quad (6)$$

となる. フロベニウスの方法を用いると, この微分方程式の解は

$$\begin{aligned} f_1 &= q^{-41/30}(1 + 90118q^2 + 53459408q^3 + \dots), \\ f_2 &= q^{5/6}(10168 + 3704965q + 338289360q^2 + \dots), \\ f_3 &= q^{31/30}(615164 + 152560672q + 11717226984q^2 + \dots) \end{aligned}$$

となる.

命題 3 ([3]). モジュラー微分方程式 (6) の解 f_1, f_2, f_3 は 82 次の斉次多項式 $k_1(x, y)$ と $k_2(x, y)$ を用いて

$$f_1 = k_1(\phi, \psi), \quad f_2 = k_2(\phi, \psi), \quad f_3 = k_1(\psi, -\phi)$$

$$\phi = q^{-1/60} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})}, \quad \psi = q^{11/60} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})}.$$

この命題に現れる関数 ψ は, 中心電荷 $c_{2,5} = -22/5$ のヴィラソロ頂点作用素代数の指標であり, ϕ はその共形ウエイト $-1/5$ の既約加群の指標である. この関数の S 変換はよく知られているように,

$$\begin{pmatrix} \psi|_0S \\ \phi|_0S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{5}{8}\right)} & 2\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}\right)} \\ 2\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}\right)} & 2\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{5}{8}\right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (7)$$

である (例えば [9] 等を参照). そこで, $k_1(x, y)$ と $k_2(x, y)$ の具体形と (7) を組み合わせることにより,

$$\begin{pmatrix} f_1|_0S \\ f_2|_0S \\ f_3|_0S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{5} + 5)/10 & 10\sqrt{5} & (5 - \sqrt{5})/10 \\ 1/25\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -1/25\sqrt{5} \\ (5 - \sqrt{5})/10 & -10\sqrt{5} & (\sqrt{5} + 5)/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

となることがわかる.

中心電荷が $c = 236/7$ の場合も同様の手法で解のモジュラー変換を計算することができる. $c = 236/7$ の場合に現れるモジュラー微分方程式は

$$D_0^3(f) - \frac{149}{84}E_4D_0(f) + \frac{93869}{74088}E_6f = 0 \quad (9)$$

であり, その解は

$$\begin{aligned} g_1 &= q^{59/42}(1 + 63366q^2 + 46421200q^3 + \dots), \\ g_2 &= q^{37/42}(715139 + 257698784q^2 + 24078730130q^3 + \dots), \\ g_3 &= q^{43/42}(848656 + 232637826q + 19201964416q^2 + \dots) \end{aligned}$$

となる. このとき, 次が成り立つ.

命題 4. モジュラー微分方程式 (9) の解 g_1, g_2, g_3 は以下の 3 つの関数の 64 次の斉次多項式として表せる.

$$\begin{aligned} x &= q^{17/42} \prod_{\substack{n>0 \\ n \neq 0, \pm 1 \pmod{7}}} (1 - q^n)^{-1}, \\ y &= q^{5/42} \prod_{\substack{n>0 \\ n \neq 0, \pm 2 \pmod{7}}} (1 - q^n)^{-1}, \\ z &= q^{-1/42} \prod_{\substack{n>0 \\ n \neq 0, \pm 3 \pmod{7}}} (1 - q^n)^{-1}. \end{aligned}$$

この命題に現れる関数 x, y, z も命題 3 の場合と同様に, $c_{2,7} = -68/7$ のヴィラソロ頂点作用素代数とその既約加群の指標であり, そのモジュラー変換もよく知られている ([9]). これらの情報を用いて, S 変換を計算すると,

$$\begin{pmatrix} g_1|_0S \\ g_2|_0S \\ g_3|_0S \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) & -\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) & -\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

となる.

注意 1. 表 1 に現れる上記以外の中心電荷に対応するモジュラー微分方程式の解もヴィラソロ頂点作用素代数とその既約加群の指標の斉次多項式として表せる. 特に, $c = 8, 16, 24, 32, 40$ の場合には, $c_{3,4} = 1/2$ のヴィラソロ頂点作用素代数とその既約加群の指標の多項式となる.

6 定理 2 の証明

この節では、定理 2 の証明を述べる。まず、証明に用いる大域次元とその定義に必要な量子次元について説明しよう。

頂点作用素代数 V は C_2 -cofinite かつ有理的とし、 M^0, \dots, M^d を V の既約加群の完全代表系とする。このとき、 V -加群 M^i の量子次元を

$$\text{qdim}_V M^i = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{Z_{M^i}(\sqrt{-1}y)}{Z_V(\sqrt{-1}y)}$$

で定める。また、 V の大域次元を

$$\text{glob}(V) = \sum_{i=0}^d (\text{qdim}_V M^i)^2$$

で定める。このとき、次の定理が成り立つことが知られている。

定理 5 ([5]). V を CFT 型とし、 $M^0 = V$ とする。さらに、 M^1, \dots, M^d の共形ウェイトは正であるとする。このとき、

- (1) $\text{glob}(V) = 1/S_{00}^2$. ただし、 $Z_V(-1/\tau) = \sum_{i=0}^d S_{0i} Z_{M^i}(\tau)$.
- (2) $\text{qdim}_V M^i \geq 1$.

大域次元の定義と定理 5 の (2) から定理 5 の条件を満たす V の大域次元は、 V の既約加群の個数以上になる。

定理 2 は、 C_2 -cofinite かつ有理的でその指標が f_1 もしくは g_1 であるような V が存在することを仮定して、(8) または (10) を用いて V の大域次元を 2 通りに評価して矛盾を導くことにより示される。実際そのような V が存在すれば、 V は定理 5 の仮定を満たすことが簡単に証明できる (詳しくは [4] を参照)。このとき、(8) または (10) と定理 5 (2) より、 V の大域次元は

$$\left(\frac{10}{5 + \sqrt{5}} \right)^2 = 1.909\dots, \quad \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \cos(3\pi/14) \right)^2 = 2.862\dots \quad (11)$$

である。一方、やはり (8) または (10) から V は少なくとも 3 つの既約加群をもつので、その大域次元は 3 以上となり (11) に矛盾する。

参考文献

- [1] G. Anderson, G. Moore, Rationality in conformal field theory, *Comm. Math. Phys.*, **117**, no. 3, 441–450, (1988)
- [2] Y. Arike, M. Kaneko, K. Nagatomo, Y. Sakai, Affine vertex operator algebras and modular linear differential equations, to appear in *Lett. Math. Phys.*, **106**, No. 5, 693–718 (2016)
- [3] Y. Arike, K. Nagatomo, Y. Sakai, Characterization of the simple Virasoro vertex operator algebras with 2 and 3-dimensional space of characters, *Contemp. Math.*, **695**, 175–204 (2017)
- [4] Y. Arike, K. Nagatomo, Y. Sakai, Vertex operator algebras with central charges $164/5$ and $236/7$, *Commun. Number Theory Phys.*, **14**, No. 3, 487–509 (2020)
- [5] C. Dong, X. Jiao, F. Xu, Quantum dimensions and quantum Galois theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, No. 12, 6441–6469 (2013)
- [6] C. Dong, H. Li, G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine, *Commun. Math. Phys.*, **214**, 1–56 (2000)
- [7] Hampapura, H. R. and Mukhi, S.: Two-dimensional RCFT's without Kac-Moody symmetry, *JHEP* **07** 138 (2016)
- [8] G. Höhn, Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.*, **217**, No. 5, 2301–2335 (2008)
- [9] K. Iohara and Y. Koga, *Representation theory of the Virasoro algebra*, Springer-Verlag, London, 2011.
- [10] J. Lepowsky and H.-S. Li, *Introduction to vertex operator algebras and their representations*, *Prog. Math.*, Birkhäuser, Boston, 2004.
- [11] G. Mason, Vector-valued modular forms and linear differential operators, *Int. J. Number Theory*, **3**, no. 3, 377–390 (2007)

- [12] A. Matsuo and K. Nagatomo, *Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields*, MSJ Memoirs, **4**, Mathematical Society of Japan, 1999.
- [13] S. D. Mathur, S. Mukhi and A. Sen, On the classification of rational conformal field theories, Phys. Letter B, **213**, No. 3, 303–308 (1988)
- [14] Mathur, S. D., Mukhi, S. and Sen, A.: Reconstruction of conformal field theories from modular geometry on the torus Nucl. Phys. B. **318** 483–540 (1988)
- [15] Tuite, M. P.: Exceptional vertex operator algebras and the Virasoro algebra, Contemp. Math. **497** 213–225 (2009)
- [16] M. P. Tuite, and H. D. Van, On exceptional vertex operator (super) algebras, In: Mason G., Penkov I., Wolf J. A. (eds), *Developments and Retrospectives in Lie Theory: Algebraic Methods*, Dev. Math., **38**, 351–384. Springer, Cham (2014)
- [17] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, J. Amer. Math. Soc., **9**, 237–302 (1996)

Linear Diophantine equations on Piatetski-Shapiro sequences

齋藤 耕太 (筑波大学)

概要

任意の実数 x に対して x の整数部分を $[x]$ とかく. 任意の非整数 $\alpha > 1$ に対して, 数列 $([n^\alpha])_{n=1}^\infty$ を指数 α の Piatetski-Shapiro 列と呼び, $\text{PS}(\alpha) = \{[n^\alpha] \mid n = 1, 2, \dots\}$ とおく. 本稿では線形 Diophantine 方程式 $x + y = z$ が解 $(x, y, z) \in \text{PS}(\alpha)^3$ を無限個持つような実数 $\alpha > 1$ について議論する. 九州大学の松坂俊輝氏との共同研究で, 上記の性質を満たす $\alpha > 2$ が $[2, \infty)$ 上稠密に非加算無限個存在することを明らかにした. また, 最近得られた単独の結果として, ほとんど至る $\alpha > 3$ に対して $x + y = z$ の解 $(x, y, z) \in \text{PS}(\alpha)^3$ が高々有限個であることを示した.

1 はじめに

正整数全体の集合を \mathbb{N} とおく. 任意の実数 x に対して, x の整数部分を $[x]$ とかく. また, $\{x\} = x - [x]$ と定める. 任意の非整数 $\alpha \geq 1$ に対して, $([n^\alpha])_{n=1}^\infty$ を指数 α の Piatetski-Shapiro 列と呼ぶ*1. 任意の $\alpha \geq 1$ に対して $\text{PS}(\alpha) = \{[n^\alpha] \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく. 本稿では $\text{PS}(\alpha)$ 上の線形不定方程式について議論する. まず, 実数 $\alpha \geq 1$ を固定し,

$$[p^\alpha] + [q^\alpha] = [r^\alpha] \tag{1.1}$$

の解 $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ の無限性/有限性を考える. まず $\alpha \geq 3$ が整数のとき, 方程式 (1.1) は解 $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ を持つだろうか? 古典的にとてもよく知られているフェルマーの最終定理である. 様々数学者がこの問題の解決に貢献し最終的には Wiles により任意の整数 $\alpha \geq 3$ に対して解の非存在性が示された [Wil95]. 今回はこの古典的問題を実数に延長する.

問題 1.1. 方程式 (1.1) が無限個の解を持つような実数 $\alpha \geq 1$ の分布を求められるのか?

実数への延長を考えるモチベーションの1つとして, 「 \mathbb{Z} と \mathbb{R} との間にある相互関係を観察する」ということが挙げられる. 問題 1.1 のように古典的な \mathbb{Z} の問題を \mathbb{R} へと拡張することで, \mathbb{Z} が \mathbb{R} へどのように影響を及ぼすのかを将来的には調べたい.

$\alpha \geq 1$ が非整数の場合について専門家の間では知られていたとされる次の結果を紹介する. 文献

*1 任意の $1 < \alpha < 12/11$ に対して $[n^\alpha]$ という形の素数が無限個存在することを証明した Ilya Piatetski-Shapiro にちなんでこの名前がつけられている [Pya53].

上は [FW09] で確認できるが、おそらくこの論文よりも前に知られていただろう。

定理 1.2. 任意の $\alpha \in (1, 2)$ に対して, (1.1) は無限個の解 $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ をもつ.

Sketch of Proof. 任意の $\alpha \in (1, 2)$ と $h \in \mathbb{N}$ を固定する. $p \in \mathbb{N}$ をとる. このとき,

$$\delta = \delta(p) := -\{(p+h)^\alpha\} + \{p^\alpha\}$$

とおくと, $[(p+h)^\alpha] - [p^\alpha] = (p+h)^\alpha - p^\alpha + \delta$ となる. Taylor の定理から,

$$(p+h)^\alpha - p^\alpha = \alpha h p^{\alpha-1} + O_\alpha(h^2 p^{\alpha-2})$$

が成立する. したがって, $\delta' = \delta + \{\alpha h p^{\alpha-1}\}$ とおくと

$$[(p+h)^\alpha] - [p^\alpha] = [\alpha h p^{\alpha-1}] + O_\alpha(h^2 p^{\alpha-2}) + \delta'$$

を得る. このとき, $1 < \alpha < 2$ を思い出すと, 十分大きい定数 $M > 0$ を用いて p が $Mh^{2/(2-\alpha)} \leq p$ を満たせば Landau の O で書かれた誤差項は小さくなる. δ' という小数部分由来の項を一様分布論を用いてコントロールすることで $0 \leq O_\alpha(h^2 p^{\alpha-2}) + \delta' < 1$ なる $p \in \mathbb{N}$ を無限個発見することができる. したがって, 適当な $p \in \mathbb{N}$ に対して,

$$[(p+h)^\alpha] - [p^\alpha] = [\alpha h p^{\alpha-1}] \tag{1.2}$$

となる. $0 < \alpha - 1 < 1$ により, 数列 $[\alpha h p^{\alpha-1}]$ ($p \geq Mh^{2/(2-\alpha)}$) の増大度を考えると \mathbb{N} に十分 dense に分布している. したがって, $0 \leq O_\alpha(h^2 p^{\alpha-2}) + \delta' < 1$ を満たし $[\alpha h p^{\alpha-1}] \in \text{PS}(\alpha)$ となる $p \in \mathbb{N}$ を無限個発見することができる. よって, (1.1) を満たす解が無限個存在する. \square

注意 1.3. 講演後に「 $\alpha > 2$ のとき, Taylor 展開の項をさらに増やしていけば解が求められるのではないか?」といった質問をいただいた. 例えば $2 < \alpha < 3$ のとき, 同様の方法で

$$[(p+h)^\alpha] - [p^\alpha] = \left[\alpha h p^{\alpha-1} + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) h^2 p^{\alpha-2} \right] + O(h^3 p^{\alpha-3}) + \delta''$$

というように適当な小数部分から定まる誤差項 δ'' を用いて表すことはできる. しかしながら, $1 < \alpha - 1 < 2$ により, $\alpha h p^{\alpha-1}$ の項が大きくなってしまい, $\text{PS}(\alpha)$ の元になるように調節することが非常に難しくなる. したがって, 現段階でこの方法で $\alpha > 2$ のとき解を構成することはできていない.

次に非整数 $\alpha > 2$ について述べる. この場合の方程式 (1.1) の可解性や非可解性の研究はこれまでなされていなかった. 本稿の筆者は九州大学の松坂俊輝氏との共同研究で解の無限性について以下を明らかにした.

定理 1.4 ([MS21]). 任意の実数 $2 < s < t$ に対して,

$$\dim_{\mathbb{H}}\{\alpha \in [s, t] \mid (1.1) \text{ が無限個の解 } (p, q, r) \in \mathbb{N}^3 \text{ をもつ}\} \geq s^{-3}.$$

ここで、 $\dim_{\mathbb{H}} F$ は集合 $F \subseteq \mathbb{R}$ の Hausdorff 次元を指す。Hausdorff 次元とは集合の複雑さを実数値で表すものであり、よりラフに言うともゼロ集合のサイズ測る尺度である。集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に対して、 $\dim_{\mathbb{H}} A$ は 0 から 1 までの実数値をとる。次元がより 1 に近い方が連続的な構造を含み、逆により 0 に近い方が離散的な構造をとる。実際に A の Lebesgue 測度が正であるとき、 $\dim_{\mathbb{H}} A = 1$ となり A が可算集合であるとき $\dim_{\mathbb{H}} A = 0$ である。 C を Cantor の 3 進集合とすると、 $\dim_{\mathbb{H}} C = \log 2 / \log 3 = 0.6309 \dots$ となる。特に、 $\dim_{\mathbb{H}} A > 0$ ならば A は非可算集合となる。Hausdorff 次元については [Fal14] が詳しい。

各実数 $2 < s < t$ に対して、

$$\mathcal{A}(s, t) = \{ \alpha \in [s, t] \mid (1.1) \text{ が無限個の解 } (p, q, r) \in \mathbb{N}^3 \text{ をもつ} \}$$

とおく。 $\mathcal{A}(s, t)$ が空集合でないということも示されていなかったが、定理 1.4 の帰結として $\mathcal{A}(s, t)$ が非可算無限集合で $[s, t]$ に稠密であることを明らかにした。さらにその非可算無限の大きさを Hausdorff 次元を用いて定量的に下から評価した。

Sketch of Proof of Theorem 1.4. 任意の実数 $2 < s < t$ を固定する。 $\alpha \in \mathcal{A}(s, t)$ なる元をどうやって見つけるのかについて述べる。

Step 1. 適当な $p, q, r \in \mathbb{N}$ に対して、

$$p^\alpha + q^\alpha = r^\alpha$$

を満たす実数 $\alpha = \alpha(p, q, r) \in [s, t]$ を見つける。この実数 α は $f(u; p, q, r) = p^u + q^u - r^u$ とおき中間値の定理を用いて f の零点の存在を示すことで発見できる。

Step 2. 上記の (p, q, r) を固定する。任意 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $(np)^\alpha + (nq)^\alpha = (nr)^\alpha$ となる。したがって、 $\delta(n) = \delta(n; p, q, r) := \{(np)^\alpha\} + \{(nq)^\alpha\} - \{(nr)^\alpha\}$ とおくと

$$\lfloor (nr)^\alpha \rfloor = \lfloor (np)^\alpha \rfloor + \lfloor (nq)^\alpha \rfloor + \delta(n)$$

が成立する。一様分布論により小数部分をコントロールすることで $|\delta(n)| < 1$ となるような $n \in \mathbb{N}$ を無限個みつけることができる。このような無限個の n に対して、 $\lfloor (nr)^\alpha \rfloor = \lfloor (np)^\alpha \rfloor + \lfloor (nq)^\alpha \rfloor$ が成立する。□

注意 1.5. 講演した際に「小数部分をコントロールすることで $|\delta(n)| < 1$ となるような $n \in \mathbb{N}$ を無限個みつける」という部分が上手く説明できなかつたため本稿で補足する。例えば、無理数 $\beta > 0$ と整数 $a \geq 2$ を固定する。このとき、 $\lfloor a\beta n \rfloor = a\lfloor \beta n \rfloor$ を満たすような $n \in \mathbb{N}$ は存在するだろうか？これは Kronecker の稠密定理により示すことができる。実際、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\lfloor a\beta n \rfloor = a\beta n - \{a\beta n\} = a\lfloor \beta n \rfloor + a\{\beta n\} - \{a\beta n\} \tag{1.3}$$

となる。任意の実数 $x, y > 0$ に対して $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$ により、 $|a\{\beta n\} - \{a\beta n\}| \leq 2a\{\beta n\}$ を得る。したがって、 β が無理数であるから Kronecker の稠密定理により $0 \leq \{\beta n\} \leq 1/(4a)$ となるような $n \in \mathbb{N}$ が存在する。すなわち、 $|a\{\beta n\} - \{a\beta n\}| \leq 1/2$ であり、(1.3) により $\lfloor a\beta n \rfloor = a\lfloor \beta n \rfloor$ を得る。

上記の証明では $\{\beta n\}$ をコントロールするため Kronecker の稠密定理を用いた. 定理 1.4 の証明でもこのように小数部分をコントロールする (具体的には Discrepancy と呼ばれる量を指数和を使って評価する) 議論を行うことで $|\delta(n)| < 1$ を示し, 整数の離散性から $\delta(n) = 0$ を導く. 一様分布論や小数部分の扱いについては [DT97, KN74] が詳しい.

先に述べた通り Fermat の最終定理により, $\alpha \geq 3$ が整数であるとき方程式 (1.1) は 1 つも解を含まない. しかしながら, 非整数の場合は定理 1.4 による状況が異なる (場合が多くある). この可解性と非可解性の違いを代数的特徴づけできないだろうか? 講演では紹介できなかった次の問題を提示する.

問題 1.6. 方程式 (1.1) が解を無限個含む場合とそうでない場合が判定できるような α に関する代数的な条件はあるか? 例えば, α が有理数の場合と代数的無理数の場合で (1.1) の解の有限性/無限性に違いはあるだろうか?

代数的には非常に難しい問題であると筆者は考えているが測度論的な解の有限性と無限性には以下の特徴付けができる.

定理 1.7 ([Sai23, Theorem 2.1]). 任意の $3 < s < t$ に対して, $\dim_{\text{H}} \mathcal{A}(s, t) \leq 3/s$ となる. 特に, ほとんど至る $\alpha > 3$ に対して方程式 (1.1) は高々有限個しか解を持たない.

したがって, 定理 1.2 と定理 1.7 を合わせることで次が成立する:

- 任意の $1 < \alpha < 2$ に対して (1.1) は無限個の解を含む;
- ほとんど至る $\alpha > 3$ に対して (1.1) は高々有限個しか解を持たない.

すなわち, (1.1) が解を無限個もつような $2 < \alpha < 3$ を集めた集合の測度はよくわかっていない. さらに, 高々有限個しか解をもたないような $2 < \alpha < 3$ は存在することもわかっていない.

問題 1.8. 任意の $2 < s < t < 3$ に対して, $\mathcal{A}(s, t)$ の Lebesgue 測度は正であるか?

筆者はほとんど至る $2 < \alpha < 3$ に対して, 方程式 (1.1) は無限個解を含むと予想している. そう思う理由として, $2 < \alpha < 3$ を固定し, Heuristic な観察を行う. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ に対して, $\mathbf{1}_A(\cdot)$ を A の特性関数と定める. このとき, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{x \leq N} \mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(x) \asymp N^{1/\alpha}$$

となる. したがって, 平均的に $\mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(x)$ と $N^{1/\alpha-1}$ は等しくなる. ここでは平均ではなく各 $x \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(x)$ と $N^{1/\alpha-1}$ が概ね等しいとして計算する. このとき

$$\sum_{\substack{x, y, z \leq N \\ x+y=z}} \mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(x) \mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(y) \mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(z) \sim \sum_{\substack{x, y, z \leq N \\ x+y=z}} N^{3/\alpha-3} \sim cN^{3/\alpha-1}$$

と推定できる. ただし, c は正の定数. $\alpha < 3$ のとき $3/\alpha - 1 > 0$ となるため, $N \rightarrow \infty$ とするこ

とで (1.1) が無限個解をもつことが期待できる。

上記の計算において $\mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(x) = N^{1/\alpha-1}$ という全く成り立たない等式を仮定していることに注意しなくてはならないが本稿の筆者は一考の価値はあると考えている。例えば

$$\sum_{\substack{x,y,z \leq N \\ x+y=z}} \mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(x)\mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(y)\mathbf{1}_{\text{PS}(\alpha)}(z) \gg N^{3/\alpha-1}$$

という式が成立するような α を集めた集合の測度を求めることはできないだろうか？問題が無限個の解を見つけることよりも論理的には難しくなっているが、定量化することで何かわかることがあるかもしれない。

注意 1.9. 講演中に「そもそも $\mathcal{A}(s, t)$ は可測集合であるか？」といった質問をいただいたがその場で回答できなかったため、本稿で可測性の補足を行う。本質的には $t > 0$ を固定し、 $f_t(u) := \lfloor t^u \rfloor$ ($u \in \mathbb{R}$) が区分的に連続であり、したがって可測関数となることから $\mathcal{A}(s, t)$ の可測性が導かれる。より厳密に議論するために $P(\alpha)$ を α を自由変数としてもつ命題とする。集合の内包的表記 $\{\alpha \in [s, t] \mid P(\alpha)\}$ を単に $\{P(\alpha)\}$ と記すこととする。このとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s, t) &= \{(1.1) \text{ が無限個の解をもつ}\} \\ &= \{\forall M \in \mathbb{N} \exists r \geq M \exists p, q \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \lfloor p^\alpha \rfloor + \lfloor q^\alpha \rfloor = \lfloor r^\alpha \rfloor\} \\ &= \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \bigcup_{r \geq M} \bigcup_{p, q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \\ x+y=z}} \{x = \lfloor p^\alpha \rfloor\} \cap \{y = \lfloor q^\alpha \rfloor\} \cap \{z = \lfloor r^\alpha \rfloor\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\{x = \lfloor p^\alpha \rfloor\} = [s, t] \cap [\log x / \log p, \log(x+1) / \log p)$ は可測集合であるから、 $\mathcal{A}(s, t)$ も可測集合となる。

2 定理 1.7 の証明の概略

任意の $3 < s < t$ を固定する。このとき、 $\mathcal{L}(\mathcal{A}(s, t)) = 0$ となることの証明の概略を述べる。ただし、 $\mathcal{L}(\cdot)$ を 1 次元 Lebesgue 測度と定める。

Step 1. ある区間の族 $(J(p, q, r))_{p, q, r}$ が存在して、 $\mathcal{A}(s, t) \subseteq \bigcup_{r \geq M} \bigcup_{1 \leq p, q < r} J(p, q, r)$ となる。実際、 $\alpha \in \mathcal{A}(s, t)$ をとる。このとき、ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} &\text{無限個の } (p, q, r) \in \mathbb{N}^3 \text{ が存在して, } \lfloor p^\alpha \rfloor + \lfloor q^\alpha \rfloor = \lfloor r^\alpha \rfloor \\ &\Rightarrow \forall M \in \mathbb{N} \exists r \geq M \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ with } 1 \leq p, q < r \text{ s.t. } |(p/r)^\alpha + (q/r)^\alpha - 1| \leq Cr^{-s} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $E(u; P, Q) = P^u + Q^u$ と定め、

$$J(p, q, r) = \{\alpha \in [s, t] \mid E(u; p/r, q/r) \in [1 - Cr^{-s}, 1 + Cr^{-s}]\}$$

とおくと、 $\mathcal{A}(s, t) \subseteq \bigcup_{r \geq M} \bigcup_{1 \leq p, q < r} J(p, q, r)$ を得る。

Step 2. $\mathcal{L}(J(p, q, r)) \leq C'r^{-s}$ となる p, q, r には依らない定数 $C' > 0$ が存在する.

実際, 逆関数定理で $E(\cdot; p/r, q/r)$ の逆関数の存在を保証し, 逆関数の微分を用いると証明できる (本来は $C'r^{-s}$ にある重み w をかけた不等式が得られるが本稿では省略する).

Step 3. $\mathcal{L}(\mathcal{A}(s, t)) = 0$ となる.

実際, Step 1 と Step 2 により, 任意の $M \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}(s, t)) \leq \sum_{r \geq M} \sum_{1 \leq p, q < r} \mathcal{L}(J(p, q, r)) \leq \sum_{r \geq M} \sum_{1 \leq p, q < r} C'r^{-s} \leq C' \sum_{r \geq M} r^{-s+2}.$$

したがって, $s > 3$ により最右辺の級数は収束する. したがって, $M \rightarrow \infty$ とすることで $\mathcal{L}(\mathcal{A}(s, t)) = 0$ を得る. □

この証明では Lebesgue 測度 $\mathcal{L}(\cdot)$ を用いたが Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^\sigma(\cdot)$ に取り替えることで Hausdorff 次元の上からの評価を得ることができる. さらにこの方法はより一般の方程式についても証明することができ, 固定した $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, 方程式 $y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ (y_1, x_1, \dots, x_n) $\in \text{PS}(\alpha)^{n+1}$ についても同様の次元の上界を求めることができる [Sai23, Theorem 2.1, Theorem 2.2]. 方程式 (1.1) については [Sai23, Theorem 2.1] の最も簡単な場合として [Sai23, Section 3] で計算を行っている.

謝辞

第 68 回代数学シンポジウムでの講演の機会を下さり, 世話人の先生方に心より感謝いたします. また, 講演中や講演後に質問やディスカッションを沢山してくださり, 参加された方々にも御礼申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 JP22KJ0375 の助成を受けたものです.

参考文献

- [DT97] M. Drmota, R.F. Tichy, *Sequences, discrepancies and applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1651, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [Fal14] K. Falconer, *Fractal geometry*, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014, Mathematical foundations and applications.
- [FW09] N. Frantzikinakis, and M. Wierdl, *A Hardy field extension of Szemerédi's theorem*, Adv. Math. **222**(2009), no. 1, 1–43
- [KN74] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974, Pure and Applied Mathematics.
- [MS21] T. Matsusaka, K. Saito, *Linear Diophantine equations in Piatetski-Shapiro sequences*, Acta Arith. **200**(2021), no. 1, 91–110.

- [Pya53] I. I. Pyateckii-Šapiro, *On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$* , Mat. Sbornik N.S. **33/75** (1953), 559–566.
- [Sai23] K. Saito, *Finiteness of solutions to linear diophantine equations on piatetski-shapiro sequences*, preprint (2023), available at <https://arxiv.org/abs/2306.17813>.
- [Wil95] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 443–551.

一般線型群上のアルキメデス Whittaker 関数 と局所ゼータ積分

宮崎 直 (北里大学一般教育部)

本稿は、第 68 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演 (2023 年 9 月 1 日) に基づいて、無限素点における一般線型群上の Whittaker 関数と局所ゼータ積分の明示的研究に関する近年の進展について解説するものである。保型 L 関数の研究において、ゼータ積分と呼ばれる積分表示を用いる方法 (Rankin-Selberg 法) は主要な研究方法の 1 つであり、この方法による研究は大域的な解析と各素点における局所的な解析に分けられる。局所的な解析の主な目的は、局所群の既約許容表現に付随する球関数の積分変換である局所ゼータ積分と局所 L -因子の関係について調べることであり、無限素点 (アルキメデス素点) においては 1990 年代から織田孝幸やその周辺の人々によって、Whittaker 関数などの球関数の明示公式や局所ゼータ積分の明示的な計算の研究が進められてきた。一般線型群の不分岐主系列表現の場合については、石井と Stade の共著論文 [IS1], [IS2] において、 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ 上の不分岐 Whittaker 関数の帰納的な明示公式が与えられ、実素点における $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ の局所ゼータ積分の明示的な計算に応用されている。近年、石井と Stade の不分岐な場合についての研究は主系列表現の特殊な有理型切断を用いて解釈できることがわかり、石井と筆者の共著論文 [IM] や Humphries の論文 [Hu] において、無限素点における $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ の局所ゼータ積分の明示的な計算結果がより一般の場合に与えられた。本稿では、これらのような近年の進展とその応用について解説する。

1 大域的な背景

1.1 大域的 Whittaker 関数

この章では、Whittaker 関数と保型カスプ表現の関係や Rankin-Selberg 法について簡単に説明する。この章の内容について詳しく知りたい場合には、たとえば、Cogdell のレクチャーノート [Co]などを参照してほしい。

F を代数体とし、 $\Sigma_F, \Sigma_{F,\infty}, \Sigma_{F,\mathrm{fin}}$ をそれぞれ F の素点、無限素点、有限素点の集合とする。 $\mathbf{A}_F = \prod'_{v \in \Sigma_F} F_v$ を F のアデール環とし、 $F_\infty := \prod_{v \in \Sigma_{F,\infty}} F_v$, $\mathbf{A}_{F,\mathrm{fin}} := \prod'_{v \in \Sigma_{F,\mathrm{fin}}} F_v$ とおく。また、 $v \in \Sigma_{F,\mathrm{fin}}$ に対して \mathcal{O}_{F_v} を F_v の整数環とし、 $\hat{\mathcal{O}}_F := \prod_{v \in \Sigma_{F,\mathrm{fin}}} \mathcal{O}_{F_v}$ とおく。 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ に対し、次で特徴づけられる $F \setminus \mathbf{A}_F$ の標準指標 $\psi_\varepsilon = \otimes_{v \in \Sigma_F} \psi_{\varepsilon,v}$ をとる：

$$\psi_{\varepsilon,v}(t) := \begin{cases} \exp(2\pi\varepsilon\sqrt{-1}t) & (F_v = \mathbf{R} \text{ のとき}), \\ \exp(2\pi\varepsilon\sqrt{-1}(t + \bar{t})) & (F_v = \mathbf{C} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (t \in F_v, v \in \Sigma_{F,\infty}).$$

GL_n の上三角極大ユニポテント部分群

$$N_n := \{x = (x_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n \mid x_{i,i} = 1 \ (1 \leq i \leq n), \ x_{j,k} = 0 \ (1 \leq k < j \leq n)\}$$

をとり, $N_n(F) \backslash N_n(\mathbf{A}_F)$ の指標 ψ_{ε, N_n} を

$$\psi_{\varepsilon, N_n}(x) := \psi_{\varepsilon}(x_{1,2} + x_{2,3} + \cdots + x_{n-1,n}) \quad (x = (x_{i,j}) \in N_n(\mathbf{A}_F))$$

で定める. Shalika [Sha] によるカスプ形式の Fourier 展開を紹介しよう. (π, H_{π}) を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ の滑らかな既約保型カスプ表現とする. カスプ形式 $\varphi \in H_{\pi}$ に対し, 大域的 Whittaker 関数を

$$W_{\varphi, \psi_{\varepsilon}}(g) := \int_{N_n(F) \backslash N_n(\mathbf{A}_F)} \varphi(xg) \psi_{-\varepsilon, N_n}(x) dx \quad (g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F))$$

で定義すると, φ は大域的 Whittaker 関数 $W_{\varphi, \psi_{\varepsilon}}$ を用いて

$$\varphi(g) = \sum_{\gamma \in N_{n-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(F)} W_{\varphi, \psi_{\varepsilon}} \left(\begin{pmatrix} \gamma & \\ & 1 \end{pmatrix} g \right) \quad (g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F))$$

と Fourier 展開される. ここで, π の大域的 Whittaker 模型を $\mathcal{W}(\pi, \psi_{\varepsilon}) := \{W_{\varphi, \psi_{\varepsilon}} \mid \varphi \in H_{\pi}\}$ で定義すると, この Fourier 展開より, 自然な射 $H_{\pi} \ni \varphi \mapsto W_{\varphi, \psi_{\varepsilon}} \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{\varepsilon})$ は同型写像であることがわかる (逆写像が Fourier 展開で与えられる).

各素点 $v \in \Sigma_F$ において $\mathrm{GL}_n(F_v)$ のある既約許容表現 (π_v, H_{π_v}) が存在し,

$$\pi \cong \pi_{\infty} \otimes \pi_{\mathrm{fin}}, \quad \pi_{\infty} := \widehat{\otimes}_{v \in \Sigma_{F, \infty}} \pi_v, \quad \pi_{\mathrm{fin}} := \otimes'_{v \in \Sigma_{F, \mathrm{fin}}} \pi_v$$

が成り立つ. この π_v を v における π の局所成分という. また, 無限素点 $v \in \Sigma_{F, \infty}$ では, π_v は $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の既約 Casselman–Wallach 表現 (§2.1 参照) であり, 上記の π_{∞} の定義式において $\widehat{\otimes}$ は位相的なテンソル積を表している. 各 $v \in \Sigma_F$ において局所成分 π_v の Whittaker 模型 $\mathcal{W}(\pi_v, \psi_{\varepsilon, v})$ が定義され,

$$\mathcal{W}(\pi_{\infty}, \psi_{\varepsilon, \infty}) := \widehat{\otimes}_{v \in \Sigma_{F, \infty}} \mathcal{W}(\pi_v, \psi_{\varepsilon, v}), \quad \mathcal{W}(\pi_{\mathrm{fin}}, \psi_{\varepsilon, \mathrm{fin}}) := \otimes'_{v \in \Sigma_{F, \mathrm{fin}}} \mathcal{W}(\pi_v, \psi_{\varepsilon, v})$$

とおくと, $(\otimes_{v \in \Sigma_{F, \infty}} W_v) \otimes (\otimes_{v \in \Sigma_{F, \mathrm{fin}}} W_v) \mapsto \prod_{v \in \Sigma_F} W_v$ で特徴づけられる同型写像

$$\mathcal{W}(\pi_{\infty}, \psi_{\varepsilon, \infty}) \otimes \mathcal{W}(\pi_{\mathrm{fin}}, \psi_{\varepsilon, \mathrm{fin}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}(\pi, \psi_{\varepsilon})$$

が存在する. ここで, 局所的な Whittaker 関数のオイラー積 $\prod_{v \in \Sigma_F} W_v$ は

$$\left(\prod_{v \in \Sigma_F} W_v \right)(g) := \prod_{v \in \Sigma_F} W_v(g_v) \quad (g = (g_v)_{v \in \Sigma_F} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F))$$

で定まる $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ 上の関数であり, 制限テンソル積 $\otimes'_{v \in \Sigma_{F, \mathrm{fin}}} \mathcal{W}(\pi_v, \psi_{\varepsilon, v})$ は次の条件を満たす $\otimes_{v \in \Sigma_{F, \mathrm{fin}}} W_v$ が張る $\otimes_{v \in \Sigma_{F, \mathrm{fin}}} \mathcal{W}(\pi_v, \psi_{\varepsilon, v})$ の部分空間である:

(条件) 有限個を除くすべての $(\psi_{\varepsilon, v}$ と π_v が不分岐な) $v \in \Sigma_{F, \mathrm{fin}}$ に対して, $W_v = W_{\pi_v, \varepsilon}^{\circ}$ が成り立つ. ここで, $W_{\pi_v, \varepsilon}^{\circ}$ は定数倍を除いて唯一つの $\mathcal{W}(\pi_v, \psi_{\varepsilon, v})$ の $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{F_v})$ -不変元 (不分岐 Whittaker 関数) を $W_{\pi_v, \varepsilon}^{\circ}(1_n) = 1$ を満たすように正規化したものである.

1.2 Rankin–Selberg 法 ($\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1}$ の場合)

(π, H_π) と $(\pi', H_{\pi'})$ をそれぞれ $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ と $\mathrm{GL}_m(\mathbf{A}_F)$ の滑らかな既約保型カスプ表現とし、 F の素点 v における π と π' の局所成分をそれぞれ π_v と π'_v で表す。各 $v \in \Sigma_F$ において、局所 L -因子 $L_v(s, \pi_v \times \pi'_v)$ と局所 ε -因子 $\varepsilon(s, \pi_v \times \pi'_v, \psi_{\varepsilon, v})$ が定義され、そのオイラー積

$$L(s, \pi \times \pi') := \prod_{v \in \Sigma_F} L_v(s, \pi_v \times \pi'_v), \quad \varepsilon(s, \pi \times \pi') := \prod_{v \in \Sigma_F} \varepsilon_v(s, \pi_v \times \pi'_v, \psi_{\varepsilon, v})$$

によって $\pi \times \pi'$ の保型 L 関数 $L(s, \pi \times \pi')$ と大域的 ε -因子 $\varepsilon(s, \pi \times \pi')$ が定義される。保型 L 関数 $L(s, \pi \times \pi')$ を定義するオイラー積は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいときに絶対収束する。また、大域的 ε -因子 $\varepsilon(s, \pi \times \pi')$ を定義するオイラー積は実質的には有限積であり、下記の保型 L 関数の関数等式 (1.1) より $\varepsilon(s, \pi \times \pi')$ は $\psi_\varepsilon = \otimes_{v \in \Sigma_F} \psi_{\varepsilon, v}$ に依存しないことがわかる。

定理 1.1. $L(s, \pi \times \pi')$ は全 s 平面上の有理型関数に解析接続され、関数等式

$$L(s, \pi \times \pi') = \varepsilon(s, \pi \times \pi') L(1-s, \pi^\vee \times \pi'^\vee) \quad (1.1)$$

を満たす。ここで、 π^\vee と π'^\vee はそれぞれ π と π' の反傾表現を表す。また、 $L(s, \pi \times \pi')$ は、 $n > m$ なら整関数であり、 $n = m$ なら高々2つの極をもつ。

Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika の一連の論文 [JPSS1], [JPSS2], [JS] によって、定理 1.1 の Rankin–Selberg 法による証明が与えられている。ここでは、 $m = n - 1$ の場合に Rankin–Selberg 法による定理 1.1 の証明の流れを紹介する。

Step 1. 大域的な解析：大域的ゼータ積分を発見し、その性質を調べる。

カスプ形式 $\varphi \in H_\pi$, $\varphi' \in H_{\pi'}$ に対し、大域的ゼータ積分を

$$Z(s, \varphi, \varphi') := \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_F)} \varphi \begin{pmatrix} h & \\ & 1 \end{pmatrix} \varphi'(h) |\det(h)|_{\mathbf{A}_F}^{s-1/2} dh$$

で定義する。カスプ形式は急減少であるので、この定義の右辺は全 s 平面で絶対収束して整関数を定める。また、変数変換 $h \rightarrow {}^t h^{-1}$ により、大域的関数等式

$$Z(s, \varphi, \varphi') = Z(1-s, \varphi^\vee, \varphi'^\vee) \quad (1.2)$$

が得られる。ここで、 $\varphi^\vee(g) := \varphi({}^t g^{-1}) \in H_{\pi^\vee}$, $\varphi'^\vee(h) := \varphi'({}^t h^{-1}) \in H_{\pi'^\vee}$ とする。

また、 $W_{\varphi, \psi_\varepsilon} = \prod_{v \in \Sigma_F} W_v$, $W_{\varphi', \psi_{-\varepsilon}} = \prod_{v \in \Sigma_F} W'_v$ とオイラー積分分解できる φ, φ' を選ぶと、

$$Z(s, \varphi, \varphi') = \prod_{v \in \Sigma_F} Z_v(s, W_v, W'_v) \quad (\mathrm{Re}(s) \gg 0)$$

と分解できる。ここで、局所ゼータ積分 $Z_v(s, W, W')$ は次で定義される：

$$Z_v(s, W, W') := \int_{\mathrm{N}_{n-1}(F_v) \backslash \mathrm{GL}_{n-1}(F_v)} W \begin{pmatrix} h & \\ & 1 \end{pmatrix} W'(h) |\det(h)|_{F_v}^{s-1/2} dh.$$

Step 2. 局所的な解析：各素点で局所ゼータ積分と局所 L -因子の関係を調べる.

すべての素点 $v \in \Sigma_F$ と Whittaker 関数 $W \in \mathcal{W}(\pi_v, \psi_{\varepsilon, v})$, $W' \in \mathcal{W}(\pi'_v, \psi_{-\varepsilon, v})$ に対して,
 $e_v(s, W, W') := \frac{Z_v(s, W, W')}{L_v(s, \pi_v \times \pi'_v)}$ は整関数に解析接続され、局所関数等式

$$\omega_{\pi'_v}(-1)^{n-1} \epsilon_v(s, \pi_v \times \pi'_v, \psi_{\varepsilon, v}) e_v(s, W, W') = e_v(1-s, W^\vee, W'^\vee) \quad (1.3)$$

を満たす. ここで, $\omega_{\pi'_v}$ は π'_v の中心指標であり, $W^\vee \in \mathcal{W}(\pi_v^\vee, \psi_{-\varepsilon, v})$, $W'^\vee \in \mathcal{W}(\pi'_v{}^\vee, \psi_{\varepsilon, v})$ は

$$W^\vee(g) := W\left(\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} t g^{-1}\right), \quad W'^\vee(h) := W'\left(\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} t h^{-1}\right)$$

で定義される. さらに, 任意の $s_0 \in \mathbf{C}$ に対して, ある $W \in \mathcal{W}(\pi_v, \psi_{\varepsilon, v})$, $W' \in \mathcal{W}(\pi'_v, \psi_{-\varepsilon, v})$ が存在して, $e_v(s_0, W, W') \neq 0$ が成り立つ.

また, $\psi_{\varepsilon, v}$, π_v , π'_v が不分岐であるような $v \in \Sigma_{F, \text{fin}}$ においては, 新谷 [Shi] によって与えられた (正規化された) 不分岐 Whittaker 関数 $W_{\pi_v, \varepsilon}^\circ$, $W_{\pi'_v, -\varepsilon}^\circ$ の明示公式を用いて,

$$Z_v(s, W_{\pi_v, \varepsilon}^\circ, W_{\pi'_v, -\varepsilon}^\circ) = L_v(s, \pi_v \times \pi'_v), \quad \text{つまり, } e_v(s, W_{\pi_v, \varepsilon}^\circ, W_{\pi'_v, -\varepsilon}^\circ) = 1$$

が示されている. この等式と局所関数等式 (1.3) により, $\psi_{\varepsilon, v}$, π_v , π'_v が不分岐であるような $v \in \Sigma_{F, \text{fin}}$ に対しては $\epsilon_v(s, \pi_v \times \pi'_v, \psi_{\varepsilon, v}) = 1$ である.

Step 3. 大域的な解析と局所的な解析から結論を導く.

$W_{\varphi, \psi_\varepsilon} = \prod_{v \in \Sigma_F} W_v$, $W_{\varphi', \psi_{-\varepsilon}} = \prod_{v \in \Sigma_F} W'_v$ とオイラー積分できる $\varphi \in H_\pi$, $\varphi' \in H_{\pi'}$ をとる. さらに, Σ_F の有限部分集合 S を, すべての $v \in \Sigma_F \setminus S$ に対して $W_v = W_{\pi_v, \varepsilon}^\circ$, $W'_v = W_{\pi'_v, -\varepsilon}^\circ$ (特に $\psi_{\varepsilon, v}$, π_v , π'_v は不分岐) が成り立つようにとる. このとき,

$$Z(s, \varphi, \varphi') = L(s, \pi \times \pi') \prod_{v \in S} e_v(s, W_v, W'_v)$$

が成り立つ. ここで, $Z(s, \varphi, \varphi')$ と $e_v(s, W_v, W'_v)$ は整関数であり, 任意の $s_0 \in \mathbf{C}$ に対して適当に W_v, W'_v を選べば $e_v(s_0, W_v, W'_v) \neq 0$ となるので, $L(s, \pi \times \pi')$ は整関数に解析接続される. また, カスプ形式 $\varphi' \in H_{\pi'}$ の左 $\text{GL}_{n-1}(F)$ -不変性より $\prod_{v \in \Sigma_F} \omega_{\pi'_v}(-1) = 1$ であることに注意すると, 大域的関数等式 (1.2) と局所関数等式 (1.3) より, 保型 L 関数の関数等式 (1.1) が得られる.

注意 1.2. 扱いは少し煩雑になるが, $m = n - 1$ 以外の場合でも定理 1.1 の証明の流れは同じである. $m < n - 1$ の場合には, 大域的ゼータ積分は “ GL_n から GL_{m+1} への射影” を用いて定義され, $\pi_v \times \pi'_v$ と $\pi_v^\vee \times \pi'_v{}^\vee$ の局所ゼータ積分は異なる形になる. $m = n$ の場合には, 大域的ゼータ積分は 2 つのカスプ形式と Eisenstein 級数から定義されて (Eisenstein 級数に由来する) 極をもつ可能性があり, 局所ゼータ積分は 2 つの Whittaker 関数と Schwartz 関数から定義されるものになる (§3.1 参照). また, 解析接続, 関数等式とともに $\text{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ の保型表現の逆定理の条件となる保型 L 関数 $L(s, \pi \times \pi')$ の縦帯状領域上での有界性はとても重要な性質であるが, 説明が煩雑になるのを避けるために本稿では扱わない.

さて、前述した Rankin–Selberg 法による定理 1.1 の証明の概略では、大域的ゼータ積分の性質から保型 L 関数の性質を導出するために、局所的な解析で局所ゼータ積分と局所 L -因子の関係を明確にしている。特に、 $\psi_{\varepsilon,v}, \pi_v, \pi'_v$ が不分岐であるような $v \in \Sigma_{F,\text{fin}}$ (不分岐有限素点) においては、不分岐 Whittaker 関数の明示公式を用いる計算によって、それらが定義する局所ゼータ積分は局所 L -因子と一致することが示されている。本稿では、このような不分岐有限素点における結果の類似を無限素点において考える。2章では、 F の無限素点 v において、 $\text{GL}_n(F_v)$ の主系列表現に付随する Whittaker 関数の明示公式を紹介する。3章では、「無限素点における局所ゼータ積分が局所 L -因子と一致するような Whittaker 関数は存在するのか?」という問いに対して、現時点までに得られている結果を紹介する。そして、4章では、3章で紹介する結果の保型 L 関数の臨界値の研究への応用について紹介する。

2 主系列 Whittaker 関数の明示公式

2.1 Whittaker 関数の定義

2章と3章では無限素点 v のみを扱うので、添字の v を省略する。特に、 $F = \mathbf{R}$ または $F = \mathbf{C}$ とする。 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とおき、 F の標準指標 ψ_ε と F 上のノルム $|\cdot|_F$ を

$$\begin{cases} \psi_\varepsilon(t) := \exp(2\pi\varepsilon\sqrt{-1}t), & |t|_F = |t|_{\mathbf{R}} := |t| & (F = \mathbf{R} \text{ のとき}), \\ \psi_\varepsilon(t) := \exp(2\pi\varepsilon\sqrt{-1}(t + \bar{t})), & |t|_F = |t|_{\mathbf{C}} := |t|^2 & (F = \mathbf{C} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (t \in F)$$

で定める。また、 $N_n(F)$ の指標 ψ_{ε, N_n} を

$$\psi_{\varepsilon, N_n}(x) := \psi_\varepsilon(x_{1,2} + x_{2,3} + \cdots + x_{n-1,n}) \quad (x = (x_{i,j}) \in N_n(F))$$

で定める。 $\text{GL}_n(F)$ の部分群 A_n と極大コンパクト部分群 K_n を

$$A_n := \{a = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i > 0 \ (1 \leq i \leq n)\}, \quad K_n := \begin{cases} \text{O}(n) & (F = \mathbf{R} \text{ のとき}), \\ \text{U}(n) & (F = \mathbf{C} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する。

(π, H_π) を $\text{GL}_n(F)$ の Casselman–Wallach 表現とする、すなわち、 (π, H_π) は緩増加で滑らかな Fréchet 許容表現であり、付随する $(\mathfrak{gl}_n(F), K_n)$ -加群が有限生成であるとする。このとき、

$$\mathcal{T}(\pi(x)f) = \psi_{\varepsilon, N_n}(x)\mathcal{T}(f) \quad (x \in N_n(F), f \in H_\pi)$$

を満たす連続な複素線型形式 $\mathcal{T}: H_\pi \rightarrow \mathbf{C}$ を H_π 上の ψ_ε -形式という。 ψ_ε -形式について、次の重複度 1 定理と呼ばれる定理が成り立つ。

定理 2.1 (Shalika [Sha]). π が既約なとき、 H_π 上の ψ_ε -形式のなす空間は高々 1 次元である。

π は既約であるとする。 H_π 上の非自明な ψ_ε -形式 \mathcal{T} が存在するとき、 π はジェネリックであるといい、 π の Whittaker 模型 $\mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)$ を

$$\mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon) := \{\mathcal{W}_\mathcal{T}(f) \mid f \in H_\pi\}, \quad \mathcal{W}_\mathcal{T}(f)(g) := \mathcal{T}(\pi(g)f) \quad (g \in \text{GL}_n(F))$$

で定義する。また、 $\mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)$ の元を π に付随する Whittaker 関数という。

2.2 主系列表現と Jacquet 積分

GL_n の下三角極大ユニポテント部分群 N_n^{op} と極大トーラス T_n を

$$\begin{aligned} N_n^{\mathrm{op}} &:= \{x = (x_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n \mid x_{i,i} = 1 \ (1 \leq i \leq n), \ x_{j,k} = 0 \ (1 \leq j < k \leq n)\}, \\ T_n &:= \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathrm{GL}_n\} \end{aligned}$$

で定義する. $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbf{C}^n$ とおき,

$$\chi_{d,\nu}(a) := \prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{|a_i|} \right)^{d_i} |a_i|^{\nu_i}, \quad \rho_n(a) := \prod_{i=1}^n |a_i|^{\frac{n+1}{2}-i} \quad (a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in T_n(F))$$

とおく. このとき, $\mathrm{GL}_n(F)$ の主系列表現 $(\pi_{d,\nu}, I(d,\nu))$ を

$$\begin{aligned} I(d,\nu) &:= \left\{ f \in C^\infty(\mathrm{GL}_n(F)) \mid \begin{array}{l} f(xag) = \chi_{d,\nu}(a)\rho_n(a)^{-1}f(g) \\ (x \in N_n^{\mathrm{op}}(F), a \in T_n(F), g \in \mathrm{GL}_n(F)) \end{array} \right\}, \\ (\pi_{d,\nu}(g)f)(h) &= f(hg) \quad (g, h \in \mathrm{GL}_n(F), f \in I(d,\nu)) \end{aligned}$$

で定義する. $F = \mathbf{R}$ の場合, $\chi_{d+l,\nu} = \chi_{d,\nu}$ ($l \in 2\mathbf{Z}^n$) より, $d \in \{0, 1\}^n$ としてよい. また, 主系列表現 $\pi_{d,\nu}$ はほとんどの ν に対して既約であることが知られている.

注意 2.2. GL_n の 2 つの Borel 部分群 $B_n := N_n T_n$ (上三角) と $B_n^{\mathrm{op}} := N_n^{\mathrm{op}} T_n$ (下三角) を考える. 本稿では Jacquet [Ja3] に倣って $\pi_{d,\nu} = \mathrm{Ind}_{B_n^{\mathrm{op}}(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\chi_{d,\nu})$ を主系列表現としているが, 保型形式論では $\mathrm{Ind}_{B_n(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\chi_{d,\nu})$ を主系列表現の定義とする場合が多い. これらの 2 つの実現は, 次の同型写像を用いて書き換えることができる:

$$\mathrm{Ind}_{B_n^{\mathrm{op}}(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\chi_{d,\nu}) \rightarrow \mathrm{Ind}_{B_n(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\chi_{d^*,\nu^*}); \quad f \mapsto f^*(g) := f\left(\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} g\right).$$

ここで, $d^* := (d_n, d_{n-1}, \dots, d_1)$, $\nu^* := (\nu_n, \nu_{n-1}, \dots, \nu_1)$ とする.

$\mathrm{Re}(\nu_1) < \mathrm{Re}(\nu_2) < \dots < \mathrm{Re}(\nu_n)$ のとき, Jacquet 積分 $\mathcal{J}_\varepsilon: I(d,\nu) \rightarrow \mathbf{C}$ を

$$\mathcal{J}_\varepsilon(f) = \int_{N_n(F)} f(x)\psi_{-\varepsilon, N_n}(x) dx \quad (f \in I(d,\nu))$$

で定義する. 標準切断を用いる解析接続によって, Jacquet 積分 \mathcal{J}_ε はすべての $\nu \in \mathbf{C}^n$ に拡張され, 非自明な $I(d,\nu)$ 上の ψ_ε -形式を定める. さらに, 次が成り立つ:

- $F = \mathbf{C}$ の場合, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現は, 同型を除いて既約な主系列表現のみである.
- $F = \mathbf{R}$ の場合, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現は, 同型を除いて $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の放物型部分群の本質的離散系列表現から誘導される既約表現 (既約な主系列表現を含む) のみであり, これらの表現は主系列表現の部分表現として具体的に実現できる. さらに, Jacquet 積分 \mathcal{J}_ε はそれらの部分表現に制限しても非自明である.

2.3 K_n の既約有限次元表現の構成

優整ウェイトの集合 Λ_n を

$$\Lambda_n := \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n\}$$

で定義すると、最高ウェイト理論により、 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ の既約有限次元正則表現の同型類は Λ_n でパラメーターづけされる。 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ に対し、最高ウェイト λ の $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ の既約有限次元正則表現 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ は次のような具体的な実現をもつ：

$$V_\lambda := \mathbf{C}\text{-span} \left\{ \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{I \in \mathbf{I}_{n,k}} (\det_I z)^{l_I} \mid \begin{array}{l} l_I \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \quad (I \in \mathbf{I}_{n,k}, 1 \leq k \leq n-1), \\ \sum_{I \in \mathbf{I}_{n,k}} l_I = \lambda_k - \lambda_{k+1} \quad (1 \leq k \leq n-1) \end{array} \right\},$$

$$\tau_\lambda(g)f(z) := (\det g)^{\lambda_n} f(zg) \quad (g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), f(z) \in V_\lambda).$$

ここで、 $z = (z_{i,j})$ は変数を成分とする n 次正方行列であるとし、

$$\mathbf{I}_{n,k} := \{I \subset \{1, 2, \dots, n\} \mid \#I = k\},$$

$$\det_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} z := \det \begin{pmatrix} z_{1,i_1} & z_{1,i_2} & \cdots & z_{1,i_k} \\ z_{2,i_1} & z_{2,i_2} & \cdots & z_{2,i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{k,i_1} & z_{k,i_2} & \cdots & z_{k,i_k} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)$$

とする。また、 $F = \mathbf{C}$ の場合には、 τ_λ の $K_n = \mathrm{U}(n)$ への制限 $\tau_\lambda|_{K_n}$ は既約である。 $F = \mathbf{R}$ の場合には、一般には τ_λ の $K_n = \mathrm{O}(n)$ への制限 $\tau_\lambda|_{K_n}$ は既約ではないが、 $\lambda \in \{0, 1\}^n \cap \Lambda_n$ ならば $\tau_\lambda|_{K_n}$ は既約である。

n 次対称群 \mathfrak{S}_n の \mathbf{C}^n 上の作用を

$$\sigma z := (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)}) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n, z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n)$$

で定める。任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、 $\sigma\lambda$ は τ_λ のウェイトであり、そのウェイト空間は 1 次元である。ここで、

$$u_{\sigma\lambda} := \prod_{k=1}^{n-1} (\det_{\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\}} z)^{\lambda_k - \lambda_{k+1}} \in V_\lambda$$

とおくと、 $u_{\sigma\lambda}$ は (定数倍を除いて唯 1 つの) ウェイト $\sigma\lambda$ の V_λ のウェイトベクトルである。特に、 u_λ は V_λ の最高ウェイトベクトルである。

2.4 極小 K_n -タイプ Whittaker 関数の正規化

$d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbf{C}^n$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とおく。ただし、 $F = \mathbf{R}$ の場合は $d \in \{0, 1\}^n$ とする。本稿では主に、主系列表現 $\pi_{d,\nu}$ の (Vogan の意味での) 極小 K_n -タイプにおける Whittaker 関数について考える。

$\Lambda_n \cap \{\sigma d \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ の唯一つの元を d^{dom} とおくと, Frobenius 相互律により, $\tau_{d^{\text{dom}}}|_{K_n}$ は $\pi_{d,\nu}$ の極小 K_n -タイプであり, $\text{Hom}_{K_n}(V_{d^{\text{dom}}}, I(d,\nu))$ は 1 次元空間であることがわかる. $v \in V_{d^{\text{dom}}}$ に対して, 正規化された極小 K_n -タイプ Whittaker 関数 $\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v)$ を

$$\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v) := (\varepsilon\sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^n (n-i)d_i} \left\{ \prod_{1 \leq i < j \leq n} \Gamma_F(\nu_j - \nu_i + 1 + \frac{|d_j - d_i|}{c_F}) \right\} W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(f_{d,\nu}(v))$$

で定義する. ここで, $f_{d,\nu}$ は $f_{d,\nu}(u_d)(1_n) = 1$ で正規化される $\text{Hom}_{K_n}(V_{d^{\text{dom}}}, I(d,\nu))$ の元であり,

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(f)(g) &:= \mathcal{J}_\varepsilon(\pi_{d,\nu}(g)f) & (f \in I(d,\nu), g \in \text{GL}_n(F)), \\ \Gamma_{\mathbf{R}}(s) &:= \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}), & \Gamma_{\mathbf{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s), & c_{\mathbf{R}} := 1, & c_{\mathbf{C}} := 2 \end{aligned}$$

とする. $\pi_{d,\nu}$ が既約なとき, $\pi_{d,\nu} \cong \pi_{\sigma d, \sigma\nu}$ ($\sigma \in \mathfrak{S}_n$) と重複度 1 定理 (定理 2.1) より,

$$\mathcal{W}(\pi_{d,\nu}, \psi_\varepsilon) = \mathcal{W}(\pi_{\sigma d, \sigma\nu}, \psi_\varepsilon) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

が成り立つ. 次の命題より, 上記の正規化は \mathfrak{S}_n の作用で不変であることがわかる.

命題 2.3 (Jacquet [Ja1], 原–宮崎–並川 [HMN, Proposition 5.3]). $g \in \text{GL}_n(F)$, $v \in V_{d^{\text{dom}}}$ に対して, $\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v)(g)$ は ν の整関数であり, $\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v)(g) = \mathbf{W}_{\sigma d, \sigma\nu}^{(\varepsilon)}(v)(g)$ ($\sigma \in \mathfrak{S}_n$) を満たす.

Jacquet [Ja1] はより一般の群の場合に Weyl 群の作用に関する Jacquet 積分の関数等式を証明しており, 命題 2.3 の $\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}$ の不変性はその特殊な場合と見なすことができる. しかしながら, 特定の K_n -タイプにおける Jacquet 積分をどのように正規化すれば, 命題 2.3 のような不変性の形の等式を得られるのかということは, Jacquet [Ja1] の結果からは非自明であるように (少なくとも筆者には) 思われる. 原, 並川と筆者の共著論文 [HMN] では, 後述する命題 2.6 を用いて $F = \mathbf{C}$ の場合に命題 2.3 を証明しており, $F = \mathbf{R}$ の場合についても同様に証明できる. 以降では, 正規化された極小 K_n -タイプ Whittaker 関数 $\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v)$ ($v \in V_{d^{\text{dom}}}$) の明示公式について考える. 岩澤分解 $\text{GL}_n(F) = \text{N}_n(F)A_nK_n$ と

$$\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v)(xak) = \psi_{\varepsilon, \text{N}_n}(x) \mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(\tau_{d^{\text{dom}}}(k)v)(a) \quad (x \in \text{N}_n(F), a \in A_n, k \in K_n)$$

より, A_n -同型成分 $\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v)|_{A_n}$ ($v \in V_{d^{\text{dom}}}$) の明示的な表示を与えればよいことに注意しておく.

2.5 石井–Stade の明示公式

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbf{C}^n$, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{Z}^n$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とおく. この節では, 不分岐主系列表現 $\pi_{\mathbf{0}, \nu}$ に付随する不分岐 Whittaker 関数に関する石井–Stade の帰納的な明示公式を紹介する. $n > 1$ とし, $\hat{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}$, $\hat{\mathbf{0}} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{Z}^{n-1}$ とおく. Stade と石井は Jacquet 積分を明示的に計算することで, 次の定理を得た.

定理 2.4 (石井–Stade [IS1, Theorem 14]). $F = \mathbf{R}$ であるとき, $a = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$ に対して,

$$\mathbf{W}_{\mathbf{0}, \nu}^{(\varepsilon)}(\mathbf{u}_0)(a) = \int_{A_{n-1}} \mathbf{W}_{\hat{\mathbf{0}}, \hat{\nu}}^{(\varepsilon)}(\mathbf{u}_{\hat{\mathbf{0}}})(t) \left(\frac{\det a}{\det t} \right)^{\nu_n} \Phi_n(a; t) dt$$

が成り立つ. ここで, $t = \text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \in A_{n-1}$ とし,

$$\Phi_n(a; t) := \frac{\rho_n(a)}{\rho_{n-1}(t)} \exp \left(-\pi \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{t_i^2}{a_{i+1}^2} + \frac{a_i^2}{t_i^2} \right) \right), \quad dt := \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2 dt_i}{t_i}$$

とする.

定理 2.4 の明示公式は次の Mellin–Barnes 型の積分表示に書き換えられる:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{0}, \nu}^{(\varepsilon)}(\mathbf{u}_0)(a) = \frac{a_n^{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n} \rho_n(a)}{(4\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \int_{s^{(n)}} V_\nu^{(n)}(s^{(n)}) \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{a_j}{a_{j+1}} \right)^{-s_j^{(n)}} ds_j^{(n)}.$$

ここで, $s_j^{(n)}$ の積分路は $\sigma_j^{(n)} - \sqrt{-1}\infty \rightarrow \sigma_j^{(n)} + \sqrt{-1}\infty$ とし, $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, \dots, s_{n-1}^{(n)})$ とする. また, 積分核 $V_\nu^{(n)}(s^{(n)})$ と積分路の実部 $\sigma_j^{(n)}$ については, $n = 2$ のときは

$$V_\nu^{(2)}(s_1^{(2)}) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s_1^{(2)} + \nu_1) \Gamma_{\mathbf{R}}(s_1^{(2)} + \nu_2), \quad \sigma_1^{(2)} > \max\{-\text{Re}(\nu_1), -\text{Re}(\nu_2)\}$$

とし, $n \geq 3$ のときは帰納的に

$$\begin{aligned} V_\nu^{(n)}(s^{(n)}) &= \Gamma_{\mathbf{R}}(s_1^{(n)} + \nu_n) \Gamma_{\mathbf{R}}(s_{n-1}^{(n)} + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{n-1}) \\ &\times \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}} \int_{s^{(n-1)}} V_{\hat{\nu}}^{(n-1)}(s^{(n-1)}) \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma_{\mathbf{R}}(s_j^{(n)} - s_j^{(n-1)}) \Gamma_{\mathbf{R}}(s_{j+1}^{(n)} - s_j^{(n-1)} + \nu_n) ds_j^{(n-1)}, \\ \sigma_j^{(n)} &> \max\{\sigma_j^{(n-1)}, \sigma_{j-1}^{(n-1)} - \text{Re}(\nu_n)\} \quad (1 \leq j \leq n-1) \end{aligned}$$

となるようにとる. ただし, $\sigma_0^{(n-1)} = 0$, $\sigma_{n-1}^{(n-1)} := -\sum_{i=1}^{n-1} \text{Re}(\nu_i)$ とする.

本稿では Jacquet 積分を計算することによって求められた Whittaker 関数の明示公式のみを紹介するが, $(\mathfrak{gl}_n(F), K_n)$ 加群構造から導出される偏微分方程式系を解くことで Whittaker 関数の明示公式を求める手法もある. 以下の場合については, 偏微分方程式系を解くことで $\text{GL}_n(F)$ のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現の極小 K_n -タイプにおける Whittaker 関数の Mellin–Barnes 型の積分表示が与えられている:

- $F = \mathbf{R}$, 一般の次数 n , 既約な主系列表現 $\pi_{d, \nu}$ の場合: 石井–織田 [IO]
- $F = \mathbf{R}$, $n = 3$, 既約な主系列表現以外の場合: 宮崎 [Mi1]
- $F = \mathbf{R}$, $n = 4$, 既約な主系列表現以外の場合: 平野–石井–宮崎 [HIM2]
- $F = \mathbf{C}$, $n = 3$, 既約な主系列表現 $\pi_{d, \nu}$ の場合: 平野–織田 [HO]

$\mathrm{GL}_2(F)$ の場合については、任意の $\mathrm{GL}_2(F)$ のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現のすべての K_2 -タイプにおいて、Whittaker 関数の Mellin–Barnes 型の積分表示が与えられている (たとえば, [HIM1] 参照). Whittaker 関数の Mellin–Barnes 型の積分表示は無限素点における局所ゼータ積分の明示的な計算に適しており, 石井と Stade による不分岐主系列表現に対する $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ および $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{GL}_m$ の局所ゼータ積分の計算 [IS2] や平野, 石井と筆者による一般のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現に対する $\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$ の局所ゼータ積分の計算 [HIM1] などにおいて重要な役割を果たしている.

注意 2.5. $(\mathfrak{gl}_n(F), K_n)$ 加群構造から導出される偏微分方程式系を解いて明示公式を求める手法では, 極小 K_n -タイプにおける Whittaker 関数は定数倍を除いて唯一つの緩増加な解として特徴づけられるため, Jacquet 積分から定まる Whittaker 関数と一致させるには定数倍の調整が必要である. 既約な主系列表現の場合については, 後述する系 2.7 と比較することで, この定数倍の調整は可能である. また, 既約な主系列表現以外の場合については, $n = 3$ のときは Eisenstein 級数の Fourier 展開を書き下すために筆者 [Mi2, Proposition 6.13] が定数倍の調整を行っている.

2.6 Godement 切断による一般化

この節では, Jacquet [Ja3, §7.1] によって導入された Godement 切断という主系列表現の有理型切断を紹介し, それを用いて石井–Stade の明示公式 (定理 2.4) を拡張できることを説明する.

$d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbf{C}^n$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とおく. ただし, $F = \mathbf{R}$ の場合は $d \in \{0, 1\}^n$ とする. $n > 1$ とし, $\hat{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{n-1}) \in \mathbf{Z}^{n-1}$, $\hat{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}$ とおく. $\mathcal{S}(M_{m,n}(F))$ を $M_{m,n}(F)$ 上の Schwartz 関数の空間とする. $f \in I(\hat{d}, \hat{\nu})$, $\phi \in \mathcal{S}(M_{n-1,n}(F))$ に対し, Godement 切断 $g_{d_n, \nu_n}^+(f, \phi)$ を

$$\begin{aligned} g_{d_n, \nu_n}^+(f, \phi)(g) &:= \left(\frac{\det g}{|\det g|} \right)^{d_n} |\det g|_F^{\nu_n + (n-1)/2} \\ &\times \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(F)} \phi((h, \mathbf{0}_{n-1,1})g) f(h^{-1}) \left(\frac{\det h}{|\det h|} \right)^{d_n} |\det h|_F^{\nu_n + n/2} dh \quad (g \in \mathrm{GL}_n(F)) \end{aligned}$$

で定義する. ここで, $\mathbf{0}_{n-1,1} := {}^t(0, 0, \dots, 0) \in M_{n-1,1}(F)$ とする. $g_{d_n, \nu_n}^+(f, \phi)(g)$ の定義式の右辺は $\mathrm{Re}(\nu_n - \nu_i) > -1$ ($1 \leq i \leq n-1$) で絶対収束し, 全 ν_n 平面に有理型接続され, $g_{d_n, \nu_n}^+(f, \phi) \in I(d, \nu)$ となる. さらに, Godement 切断に対応する Whittaker 関数に対し,

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(g_{d_n, \nu_n}^+(f, \phi))(g) &= \mathcal{J}_\varepsilon(\pi_{d, \nu}(g) g_{d_n, \nu_n}^+(f, \phi)) \\ &= \left(\frac{\det g}{|\det g|} \right)^{d_n} |\det g|_F^{\nu_n + (n-1)/2} \int_{\mathrm{GL}_{n-1}(F)} \left(\int_{M_{n-1,1}(F)} \phi((h, hz)g) \psi_{-\varepsilon}(e_{n-1}z) dz \right) \\ &\times W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(f)(h^{-1}) \left(\frac{\det h}{|\det h|} \right)^{d_n} |\det h|_F^{\nu_n + n/2} dh \quad (g \in \mathrm{GL}_n(F)) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 0, 1) \in M_{1, n-1}(F)$ とする. この右辺の積分はすべての $\nu_n \in \mathbf{C}$ で絶対収束する.

d^{dom} と \widehat{d}^{dom} をそれぞれ $\Lambda_n \cap \{\sigma d \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ と $\Lambda_{n-1} \cap \{\sigma \widehat{d} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}\}$ の唯1つの元とする。
 $c_{\mathbf{R}} := 1$, $c_{\mathbf{C}} = 2$ とおく。また、標準 Schwartz 関数の空間を

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{M}_{m,n}(F)) := \{\phi(z) = p(z, \bar{z}) \mathbf{e}_{(m,n)}(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{M}_{m,n}(F)) \mid p \text{ は多項式関数}\}$$

で定義する ($F = \mathbf{R}$ の場合は $\bar{z} = z$ である)。ここで、

$$\mathbf{e}_{(m,n)}(z) := \exp(-\pi c_F \text{Tr}({}^t z \bar{z})) \quad (z \in \mathbb{M}_{m,n}(F)) \quad (2.1)$$

とする。

命題 2.6 (石井–宮崎 [IM, Lemma 5.2], 原–宮崎–並川 [HMN, Lemma 5.6]). $0 \neq v' \in V_{\widehat{d}^{\text{dom}}}$ と $v \in V_{d^{\text{dom}}}$ に対し、ある $\phi_{v',v} \in \mathcal{S}_0(\mathbb{M}_{n-1,n}(F))$ が存在し、

$$g_{d_n, \nu_n}^+(\mathbf{f}_{\widehat{d}, \widehat{\nu}}(v'), \phi_{v',v}) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \Gamma_F(\nu_n - \nu_i + 1 + \frac{|d_n - d_i|}{c_F}) \right) \mathbf{f}_{d, \nu}(v)$$

が成り立つ ($\phi_{v',v}$ は v' と v のみに依存する具体的な関数)。これより、

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{d, \nu}^{(\varepsilon)}(v)(g) &= (\varepsilon \sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1} d_i} \left(\frac{\det g}{|\det g|} \right)^{d_n} |\det g|_F^{\nu_n + (n-1)/2} \\ &\quad \times \int_{\text{GL}_{n-1}(F)} \left(\int_{\mathbb{M}_{n-1,1}(F)} \phi_{v',v}((h, hz)g) \psi_{-\varepsilon}(e_{n-1}z) dz \right) \\ &\quad \times \mathbf{W}_{\widehat{d}, \widehat{\nu}}^{(\varepsilon)}(v')(h^{-1}) \left(\frac{\det h}{|\det h|} \right)^{d_n} |\det h|_F^{\nu_n + n/2} dh \end{aligned}$$

が成り立つ。

[IM] では $d \in \Lambda_n$ の場合 ($F = \mathbf{R}, \mathbf{C}$), [HMN] では $F = \mathbf{C}$ の一般の d の場合に命題 2.6 を証明している ($F = \mathbf{R}$ の一般の d の場合の証明は、 $F = \mathbf{C}$ の一般の d の場合とほぼ同様である)。また、命題 2.6 は石井–Stade の明示公式 (定理 2.4) の一般化と見なせる。実際、 $d \in \Lambda_n$ のとき、命題 2.6 で $\mathbf{W}_{d, \nu}^{(\varepsilon)}(\mathbf{u}_d)|_{A_n}$ を書き下すことで次の系を得る。

系 2.7 (石井–宮崎 [IM, Theorem A.1]). $d \in \Lambda_n$ のとき、 $a = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$ に対し、

$$\mathbf{W}_{d, \nu}^{(\varepsilon)}(\mathbf{u}_d)(a) = (\varepsilon \sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1} d_i} \int_{A_{n-1}} \mathbf{W}_{\widehat{d}, \widehat{\nu}}^{(\varepsilon)}(\mathbf{u}_{\widehat{d}})(t) \left(\frac{\prod_{i=1}^n a_i^{\nu_n c_F + d_i - d_n}}{\prod_{i=1}^{n-1} t_i^{\nu_n c_F + d_i - d_n}} \right) \Phi_n(a; t) dt$$

が成り立つ。ここで、 $t = \text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \in A_{n-1}$ とし、

$$\Phi_n(a; t) := \frac{\rho_n(a)}{\rho_{n-1}(t)} \exp\left(-\pi c_F \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{t_i^2}{a_{i+1}^2} + \frac{a_i^2}{t_i^2} \right)\right), \quad dt := \prod_{i=1}^{n-1} \frac{2c_F dt_i}{t_i}$$

とする。

注意 2.8. 一般の $v \in V_{d^{\text{dom}}}$ に対して, 命題 2.6 で $\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v)|_{A_n}$ を書き下すことが可能かどうかは未確認だが, $F = \mathbf{C}$ の一般の d の場合にかき下すには, かなり複雑な計算が必要となると思われる. $F = \mathbf{R}$ の場合については, 注意 2.5 でも述べたように, 石井–織田 [IO] の公式と系 2.7 を比較して定数倍を調整することで, $\mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v)|_{A_n}$ ($v \in V_{d^{\text{dom}}}$) の明示公式が得られる.

注意 2.9. Humphries [Hu, §9.3] は, $\text{GL}_n(F)$ の任意のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現 π を主系列表現 $\pi_{d,\nu}$ の部分表現として実現し, π の新形式 K_n -タイプにおいて命題 2.6 の類似の結果を得ている. ここで, π の新形式 K_n -タイプとは, K_{n-1} -不変ベクトルを含む π の K_n -タイプのうち Hecke 次数が最小のものであり, その重複度は 1 である.

3 アルキメデス局所ゼータ積分

3.1 $\text{GL}_n \times \text{GL}_m$ の局所ゼータ積分

(π, H_π) と $(\pi', H_{\pi'})$ をそれぞれ $\text{GL}_n(F)$ と $\text{GL}_m(F)$ のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現とする. $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)$, $W' \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{-\varepsilon})$ とする. このとき, $\text{GL}_n \times \text{GL}_m$ の局所ゼータ積分は次のように定義される.

- $\text{GL}_n \times \text{GL}_{n-1}$ の場合 ($m = n - 1$):

$$Z(s, W, W') := \int_{\text{N}_{n-1}(F) \backslash \text{GL}_{n-1}(F)} W \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix} W'(g) |\det g|_F^{s-1/2} dg.$$

- $\text{GL}_n \times \text{GL}_n$ の場合 ($m = n$):

$$Z(s, W, W', \phi) := \int_{\text{N}_n(F) \backslash \text{GL}_n(F)} W(g) W'(g) \phi(e_n g) |\det g|_F^s dg.$$

ここで, $e_n := (0, 0, \dots, 0, 1) \in \text{M}_{1,n}(F)$ とし, $\phi \in \mathcal{S}(\text{M}_{1,n}(F))$ とする.

- その他の場合 ($m < n - 1$): 省略する (本稿では, ほぼ扱わない).

これらの局所ゼータ積分は $\text{Re}(s)$ が十分大きいときに絶対収束する. $L(s, \pi \times \pi')$ を $\pi \times \pi'$ の局所 L -因子とする. $\mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)$ の K_n -有限部分を $\mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$ で表し, $\mathcal{W}(\pi', \psi_{-\varepsilon})$ の K_m -有限部分を $\mathcal{W}(\pi', \psi_{-\varepsilon})_{K_m}$ で表す. Jacquet [Ja3] は Godement 切断を用いて局所ゼータ積分の解析接続と局所関数等式の証明を改良し, さらに次の定理を証明した.

定理 3.1 (Jacquet [Ja3, Theorem 2.7]). 次が成り立つ:

- (1) $m = n - 1$ のとき, ある正の整数 r が存在し, $\sum_{i=1}^r Z(s, W_i, W'_i) = L(s, \pi \times \pi')$ となるような $W_i \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$, $W'_i \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{-\varepsilon})_{K_{n-1}}$ ($1 \leq i \leq r$) が存在する.
- (2) $m = n$ のとき, ある正の整数 r が存在し, $\sum_{i=1}^r Z(s, W_i, W'_i, \phi_i) = L(s, \pi \times \pi')$ となるような $W_i \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$, $W'_i \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{-\varepsilon})_{K_n}$, $\phi_i \in \mathcal{S}_0(\text{M}_{1,n}(F))$ ($1 \leq i \leq r$) が存在する.

Cogdell のレクチャーノート [Co, Lecture 8, §4] などによれば, 定理 3.1 は $m < n - 1$ の場合には拡張できないと広く信じられている. このことを踏まえて, 次のような問題を考える.

問題. $m \in \{n, n - 1\}$ のとき, $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ の局所ゼータ積分が局所 L -因子 $L(s, \pi \times \pi')$ と一致するような Whittaker 関数 $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$, $W' \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{-\varepsilon})_{K_m}$ は存在するか?

次の場合については, $\mathrm{GL}_n(F)$ と $\mathrm{GL}_m(F)$ の任意のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現 π, π' に対して, $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ の局所ゼータ積分が局所 L -因子 $L(s, \pi \times \pi')$ と一致するような $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)_{K_n}$, $W' \in \mathcal{W}(\pi', \psi_{-\varepsilon})_{K_m}$ が発見されている:

- $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$ の場合 ($n = 2, m = 1$): Jacquet–Langlands [JL], Popa [Po]
- $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ の場合 ($n = 2, m = 2$): Jacquet [Ja2], 宮崎 [Mi3]
- $\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$ の場合 ($n = 3, m = 2$): 平野–石井–宮崎 [HIM1]

さて, $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbf{C}^n$, $d' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_m) \in \mathbf{Z}^m$, $\nu' = (\nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_m) \in \mathbf{C}^m$ とおく. ただし, $F = \mathbf{R}$ の場合は $d \in \{0, 1\}^n$, $d' \in \{0, 1\}^m$ とする. このとき, 主系列表現 $\pi_{d, \nu}$ と $\pi_{d', \nu'}$ に対し, $L(s, \pi_{d, \nu} \times \pi_{d', \nu'})$ は次のように定義される:

- $F = \mathbf{R}$ の場合:
$$L(s, \pi_{d, \nu} \times \pi_{d', \nu'}) := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \nu_i + \nu'_j + |d_i - d'_j|)$$
- $F = \mathbf{C}$ の場合:
$$L(s, \pi_{d, \nu} \times \pi_{d', \nu'}) := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \Gamma_{\mathbf{C}}(s + \nu_i + \nu'_j + \frac{|d_i + d'_j|}{2})$$

$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{Z}^n$, $\widehat{\mathbf{0}} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{Z}^{n-1}$ とおく. Stade は一般の次数の場合に, π と π' がともに不分岐主系列表現であれば上記の問題は肯定的に解決されることを示した.

定理 3.2 (Stade [St1], [St2]). $F = \mathbf{R}$ とする. $m = n - 1$ であり, $d = \mathbf{0}$, $d' = \widehat{\mathbf{0}}$ であるとき,

$$Z(s, \mathbf{W}_{\mathbf{0}, \nu}^{(\varepsilon)}(\mathbf{u}_0), \mathbf{W}_{\widehat{\mathbf{0}}, \nu'}^{(-\varepsilon)}(\mathbf{u}_{\widehat{\mathbf{0}}})) = L(s, \pi_{\mathbf{0}, \nu} \times \pi_{\widehat{\mathbf{0}}, \nu'})$$

が成り立つ. また, $m = n$ であり, $d = d' = \mathbf{0}$ であるとき,

$$Z(s, \mathbf{W}_{\mathbf{0}, \nu}^{(\varepsilon)}(\mathbf{u}_0), \mathbf{W}_{\mathbf{0}, \nu'}^{(-\varepsilon)}(\mathbf{u}_0), \mathbf{e}_{(1, n)}) = L(s, \pi_{\mathbf{0}, \nu} \times \pi_{\mathbf{0}, \nu'})$$

が成り立つ. ここで, $\mathbf{e}_{(1, n)}$ は (2.1) で定義される標準 Schwartz 関数である.

注意 3.3. Stade [St1], [St2] は不分岐 Whittaker 関数の $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_{n-2}(\mathbf{R})$ の帰納的な明示公式を用いて定理 3.2 を示しているが, 石井–Stade [IS2] によって定理 2.4 (石井–Stade の明示公式) を用いた簡明な証明に改良されている. また, 石井–Stade [IS2] によって, $m = n - 2$ の場合については不分岐 Whittaker 関数から定義される局所ゼータ積分はある Barnes 積分が定める s の関数と局所 L -因子との積になることが示されている.

$l \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し, $\mathcal{S}_0(M_{1,n}(F))$ の部分空間 $\mathcal{S}_l^{(n)}$ と $\mathcal{S}_{-l}^{(n)}$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_l^{(n)} &:= \{p(z)\mathbf{e}_{(1,n)}(z) \in \mathcal{S}_0(M_{1,n}(F)) \mid p \text{ は } l \text{ 次同次多項式}\}, \\ \mathcal{S}_{-l}^{(n)} &:= \{p(\bar{z})\mathbf{e}_{(1,n)}(z) \in \mathcal{S}_0(M_{1,n}(F)) \mid p \text{ は } l \text{ 次同次多項式}\}\end{aligned}$$

で定義し, 右移動で K_n -加群と見なす. $d^{\text{dom}} = (d_1^{\text{dom}}, d_2^{\text{dom}}, \dots, d_n^{\text{dom}})$ を $\Lambda_n \cap \{\sigma d \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ の唯一つの元とし, $d'^{\text{dom}} = (d_1'^{\text{dom}}, d_2'^{\text{dom}}, \dots, d_m'^{\text{dom}})$ を $\Lambda_m \cap \{\sigma d' \mid \sigma \in \mathfrak{S}_m\}$ の唯一つの元とする. ここで,

$$\mathcal{H}_{d^{\text{dom}}, d'^{\text{dom}}} := \begin{cases} \text{Hom}_{K_{n-1}}(V_{d^{\text{dom}}} \otimes V_{d'^{\text{dom}}}, \mathbf{C}_{\text{triv}}) & (m = n - 1 \text{ のとき}), \\ \text{Hom}_{K_n}(V_{d^{\text{dom}}} \otimes V_{d'^{\text{dom}}} \otimes \mathcal{S}_{l_0}^{(n)}, \mathbf{C}_{\text{triv}}) & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく. ただし, $\mathbf{C}_{\text{triv}} := \mathbf{C}$ は自明な K_m 加群とし, $F = \mathbf{R}$ のときは $l_0 := |\sum_{i=1}^n (d_i^{\text{dom}} - d_i'^{\text{dom}})|$, $F = \mathbf{C}$ のときは $l_0 := -\sum_{i=1}^n (d_i^{\text{dom}} + d_i'^{\text{dom}})$ とする. 石井と筆者の共著論文 [IM] と Humphries の論文 [Hu] において, 次のような 2 種類の定理 3.2 の拡張が得られている.

定理 3.4 (石井–宮崎 [IM, Theorem 2.7, Theorem 2.14]+命題 2.3, 参考 [HMN, Proposition 5.9]). $m = n - 1$ のとき, $\mathcal{H}_{d^{\text{dom}}, d'^{\text{dom}}} \neq \{0\}$ ならば, $v \in V_{d^{\text{dom}}}$, $v' \in V_{d'^{\text{dom}}}$ に対し,

$$Z(s, \mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v), \mathbf{W}_{d',\nu'}^{(-\varepsilon)}(v')) = (\varepsilon\sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1} d_i'} L(s, \pi_{d,\nu} \times \pi_{d',\nu'}) \Psi(v \otimes v')$$

が成り立つ. $m = n$ のとき, $\mathcal{H}_{d^{\text{dom}}, d'^{\text{dom}}} \neq \{0\}$ ならば, $v \in V_{d^{\text{dom}}}$, $v' \in V_{d'^{\text{dom}}}$, $\phi \in \mathcal{S}_{l_0}^{(n)}$ に対し,

$$Z(s, \mathbf{W}_{d,\nu}^{(\varepsilon)}(v), \mathbf{W}_{d',\nu'}^{(-\varepsilon)}(v'), \phi) = L(s, \pi_{d,\nu} \times \pi_{d',\nu'}) \Psi(v \otimes v' \otimes \phi)$$

が成り立つ. ここで, Ψ は $d^{\text{dom}}, d'^{\text{dom}}$ のみに依存する $\mathcal{H}_{d^{\text{dom}}, d'^{\text{dom}}}$ の 0 でない具体的な元である. また, これらの式の左辺は, 局所ゼータ積分が定義する $\mathcal{H}_{d^{\text{dom}}, d'^{\text{dom}}}$ の元による $v \otimes v'$ および $v \otimes v' \otimes \phi$ の像と見なせることに注意しておく (特に, $\mathcal{H}_{d^{\text{dom}}, d'^{\text{dom}}} = \{0\}$ ならば 0 である).

定理 3.5 (Humphries [Hu, Theorem 4.17]). π を $\text{GL}_n(F)$ のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現とする. $\mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)$ の新形式 K_n -タイプに属する K_{n-1} -不変な Whittaker 関数 $W_{\pi,\varepsilon}^{\text{new}}$ と $\phi_\pi^{\text{new}} \in \mathcal{S}_0(M_{1,n}(F))$ が存在して, 次を満たす:

- $m = n - 1$ のとき, 任意の $\nu' \in \mathbf{C}^{n-1}$ に対し, $Z(s, W_{\pi,\varepsilon}^{\text{new}}, \mathbf{W}_{\hat{\mathbf{0}},\nu'}^{(-\varepsilon)}(u_{\hat{\mathbf{0}}})) = L(s, \pi \times \pi_{\hat{\mathbf{0}},\nu'})$.
- $m = n$ のとき, 任意の $\nu' \in \mathbf{C}^n$ に対し, $Z(s, W_{\pi,\varepsilon}^{\text{new}}, \mathbf{W}_{\mathbf{0},\nu'}^{(-\varepsilon)}(u_{\mathbf{0}}), \phi_\pi^{\text{new}}) = L(s, \pi \times \pi_{\mathbf{0},\nu'})$.

注意 3.6. $\mathcal{S}_{l_0}^{(n)}$ は $\text{GL}_n \times \text{GL}_n$ の大域的ゼータ積分の定義に用いる Eisenstein 級数のなす表現の局所成分 (退化主系列表現) の極小 K_n -タイプに対応する. 定理 3.4 の Ψ については, [IM] において $\text{GL}_n(\mathbf{C})$ の既約有限次元正則表現の Gelfand–Tsetlin 基底を用いた明示的な記述が与えられている. また, 定理 3.5 において, $\mathcal{W}(\pi, \psi_\varepsilon)$ の新形式 K_n -タイプに属する K_{n-1} -不変な Whittaker 関数のなす空間は 1 次元である.

3.2 局所ゼータ積分の漸化式

定理 3.4 と定理 3.5 はともに局所ゼータ積分の 2 種類の漸化式を用いて証明されている. この節では, それらの漸化式を紹介する (詳しくは, [IM, §3] を参照). §2.6 と §3.1 の記法を用いる. $f \in I(d, \nu)$, $\phi \in \mathcal{S}(M_n(F))$, $l \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{C}$ とおき, $\operatorname{Re}(s)$ は十分大きいと仮定する. このとき, 畳み込み切断 $g_{l,s}^\circ(f, \phi) \in I(d, \nu)$ を

$$g_{l,s}^\circ(f, \phi)(g) = \int_{\mathrm{GL}_n(F)} f(gh)\phi(h) \left(\frac{\det h}{|\det h|} \right)^l |\det h|_F^{s+(n-1)/2} dh \quad (g \in \mathrm{GL}_n(F))$$

で定義すると, その Whittaker 関数に対し,

$$W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(g_{l,s}^\circ(f, \phi))(g) = \int_{\mathrm{GL}_n(F)} W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(f)(gh)\phi(h) \left(\frac{\det h}{|\det h|} \right)^l |\det h|_F^{s+(n-1)/2} dh \quad (g \in \mathrm{GL}_n(F))$$

が成り立つ. 畳み込み切断を導入して, Jacquet [Ja3] による定理 3.1 の証明の一部を変形することによって, 次の漸化式が得られる.

漸化式 1 ($\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1}$): $m = n > 1$ のとき,

$$\begin{aligned} Z(s, W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(f), W_{\mathcal{J}_{-\varepsilon}}(g_{d'_n, \nu'_n}^+(f', \phi_1)), \phi_2) &= Z(s, W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(g_{d'_n, s+\nu'_n}^\circ(f, \phi_0)), W_{\mathcal{J}_{-\varepsilon}}(f')) \\ (f \in I(d, \nu), f' \in I(\widehat{d}', \widehat{\nu}'), \phi_1 \in \mathcal{S}(M_{n-1, n}(F)), \phi_2 \in \mathcal{S}(M_{1, n}(F))) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\phi_0 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)$ ($z_1 \in M_{n-1, n}(F)$, $z_2 \in M_{1, n}(F)$) とする.

漸化式 2 ($\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_{n-1} \times \mathrm{GL}_{n-1}$): $m = n - 1$ のとき,

$$\begin{aligned} Z(s, W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(g_{d'_n, \nu'_n}^+(f, \phi_0)), W_{\mathcal{J}_{-\varepsilon}}(f')) &= Z(s, W_{\mathcal{J}_\varepsilon}(f), W_{\mathcal{J}_{-\varepsilon}}(g_{d'_n, s+\nu'_n}^\circ(f', \phi_1)), \mathcal{F}_\varepsilon(\phi_2)) \\ (f \in I(\widehat{d}, \widehat{\nu}), f' \in I(d', \nu'), \phi_1 \in \mathcal{S}(M_{n-1}(F)), \phi_2 \in \mathcal{S}(M_{n-1, 1}(F))) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\phi_0(z_1, z_2) = \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)$ ($z_1 \in M_{n-1}(F)$, $z_2 \in M_{n-1, 1}(F)$) とし,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\phi_2)(t) = \int_{M_{n-1, 1}(F)} \phi_2(z)\psi_{-\varepsilon}(tz) dz \quad (t \in M_{1, n-1}(F))$$

とする.

これらの漸化式を適切な f, f', ϕ_1, ϕ_2 について書き下すことによって, 定理 3.4 と定理 3.5 は証明されている. 定理 3.5 の主張は $\mathrm{GL}_n(F)$ の一般のジェネリックな既約 Casselman–Wallach 表現 π に対するものだが, Humphries [Hu, §9] は π を主系列表現の部分表現として実現して, これらの漸化式を用いている. また, Humphries は漸化式 2 を直接用いるのが困難な場合には, π を

$$W_{\pi, \varepsilon}^{\mathrm{new}} \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix} = W_{\pi^*, \varepsilon}^{\mathrm{new}} \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (g \in \mathrm{GL}_{n-1}(F))$$

を満たす π^* に置き換えて計算を実行するなどの技巧的な工夫をしている.

4 保型 L 関数の臨界値の研究への応用

4.1 Whittaker 周期

この章では、定理 3.4 の保型 L 関数の臨界値の研究への応用についてする（詳しくは [HMN] を参照）。大域的な対象を扱うため、2 章と 3 章で省略していた添字の v を省略せず書くことにする。この節では、まず Raghuram–Shahidi [RS] の Whittaker 周期を定義する。

F は総虚代数体であるとし、 I_F を埋め込み $F \rightarrow \mathbf{C}$ 全体の集合とする。複素素点 $v \in \Sigma_{F,\infty}$ に対応する 2 つの埋め込み $F \rightarrow \mathbf{C}$ のうち 1 つを任意に選んで固定し、 v をその埋め込みと同一視することによって、 $\Sigma_{F,\infty}$ を I_F の部分集合と見なす。

$$\tilde{K}_{n,\infty} := \prod_{v \in \Sigma_{F,\infty}} \tilde{K}_{n,v}, \quad \tilde{K}_{n,v} := F_v^\times K_{n,v} = \mathbf{C}^\times \mathbf{U}(n)$$

とおく。 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_{F,\mathrm{fin}})$ のコンパクト開部分群 $\mathcal{K}^{(n)}$ に対して、 $Y_{\mathcal{K}}^{(n)} := \mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F) / \tilde{K}_{\infty}^{(n)} \mathcal{K}^{(n)}$ とおく。 $\mathrm{GL}_n(F_\infty)$ の Lie 代数の複素化を $\mathfrak{g}_{n,\infty} := \mathfrak{gl}_n(F_\infty) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ で表す。また、 $v \in \Sigma_{F,\infty}$ に対して、 $\mathrm{GL}_n(F_v)$ と $\tilde{K}_{n,v}$ の Lie 代数の複素化をそれぞれ $\mathfrak{g}_{n,v}$ と $\tilde{\mathfrak{k}}_{n,v}$ で表す。

$\lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in I_F}$, $\lambda_\sigma = (\lambda_{\sigma,1}, \lambda_{\sigma,2}, \dots, \lambda_{\sigma,n}) \in \Lambda_n$ とおく。 λ は純性ウエイト $\mathbf{w} \in \mathbf{Z}$ をもつとする、すなわち、すべての $\sigma \in I_F$ に対して、 $\lambda_\sigma^\vee = \lambda_\sigma - \mathbf{w}$ が成り立つとする。 $\mathcal{V}(\lambda^\vee)$ を

$$V(\lambda^\vee) := \bigotimes_{\sigma \in I_F} V_{\lambda_\sigma^\vee}, \quad \lambda_\sigma^\vee := (-\lambda_{\sigma,n}, -\lambda_{\sigma,n-1}, \dots, -\lambda_{\sigma,1}) \in \Lambda_n$$

に付随する局所系とし、 $H_{\mathrm{cusp}}^\bullet(Y^{(n)}, \mathcal{V}(\lambda^\vee))$ を直極限 $\lim_{\mathcal{K}^{(n)}} H_{\mathrm{cusp}}^\bullet(Y_{\mathcal{K}}^{(n)}, \mathcal{V}(\lambda^\vee))$ で定義する。 (π, H_π) を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ の滑らかな既約保型カスプ表現とする。 π は λ に関してコホモロジカルであると仮定する、すなわち、 $H_{\mathrm{cusp}}^\bullet(Y^{(n)}, \mathcal{V}(\lambda^\vee))[\pi_{\mathrm{fin}}] \neq \{0\}$ が成り立つと仮定する。ここで、 $b_{n,v} := \frac{n(n-1)}{2}$ ($v \in \Sigma_{F,\infty}$) とおくと、 $H_{\mathrm{cusp}}^k(Y^{(n)}, \mathcal{V}(\lambda^\vee)) \neq \{0\}$ が成り立つ最小の次数 k の値は $b_n := \prod_{v \in \Sigma_{F,\infty}} b_{n,v}$ であり、同型

$$H_{\mathrm{cusp}}^{b_n}(Y^{(n)}, \mathcal{V}(\lambda^\vee))[\pi_{\mathrm{fin}}] \cong \mathcal{W}(\pi_{\mathrm{fin}}, \psi_{\varepsilon,\mathrm{fin}}) \otimes H^{b_n}(\mathfrak{g}_{n,\infty}, \tilde{K}_{n,\infty}; \mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_{\varepsilon,\infty}) \otimes V(\lambda^\vee)) \quad (4.1)$$

が成り立つ。このとき、 $(\mathfrak{g}_{n,\infty}, \tilde{K}_{n,\infty})$ -コホモロジー $H^{b_n}(\mathfrak{g}_{n,\infty}, \tilde{K}_{n,\infty}; \mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_{\varepsilon,\infty}) \otimes V(\lambda^\vee))$ は 1 次元空間である。 $H^{b_n}(\mathfrak{g}_{n,\infty}, \tilde{K}_{n,\infty}; \mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_{\varepsilon,\infty}) \otimes V(\lambda^\vee))$ の生成元 $[\pi_\infty]_\varepsilon$ をとって固定し、

$$\Phi_\pi: \mathcal{W}(\pi_{\mathrm{fin}}, \psi_{\varepsilon,\mathrm{fin}}) \rightarrow H_{\mathrm{cusp}}^{b_n}(Y^{(n)}, \mathcal{V}(\lambda^\vee))[\pi_{\mathrm{fin}}]$$

を同型 (4.1) によって $W \mapsto W \otimes [\pi_\infty]_\varepsilon$ から誘導される射とする。 $\mathbf{Q}(\pi)$ を π の有理性の体とすると、 $\mathcal{W}(\pi_{\mathrm{fin}}, \psi_{\varepsilon,\mathrm{fin}})$ と $\mathcal{V}(\lambda^\vee)$ はそれぞれ $\mathbf{Q}(\pi)$ -有理構造 $\mathcal{W}(\pi_{\mathrm{fin}}, \psi_{\varepsilon,\mathrm{fin}})_{\mathbf{Q}(\pi)}$ と $\mathcal{V}(\lambda^\vee)_{\mathbf{Q}(\pi)}$ をもち、ある $p^b(\pi) \in \mathbf{C}^\times$ が存在して、

$$p^b(\pi)^{-1} \Phi_\pi(\mathcal{W}(\pi_{\mathrm{fin}}, \psi_{\varepsilon,\mathrm{fin}})_{\mathbf{Q}(\pi)}) \subset H_{\mathrm{cusp}}^{b_n}(Y^{(n)}, \mathcal{V}(\lambda^\vee)_{\mathbf{Q}(\pi)})$$

が成り立つ。この $p^b(\pi)$ を (Raghuram–Shahidi の) π の Whittaker 周期という。 Whittaker 周期 $p^b(\pi)$ は $\mathbf{Q}(\pi)^\times$ のスカラー倍を除いて決まり、 $[\pi_\infty]_\varepsilon$ の選び方に依存することに注意しておく。

この節の最後に、原、並川と筆者の共著論文 [HMN] における $[\pi_\infty]_\varepsilon$ の構成について紹介する。各複素素点 $v \in \Sigma_{F,\infty}$ において、 $d_{v,i} := 2\lambda_{v,i} + n + 1 - 2i - w$ ($1 \leq i \leq n$) とおき、 $d_v := (d_{v,1}, d_{v,2}, \dots, d_{v,n}) \in \Lambda_n$, $\nu_v := (w/2, w/2, \dots, w/2)$ とおくと、 π の局所成分 π_v は既約な主系列表現 π_{d_v, ν_v} と同型である。これより、同型

$$H^{\text{bn}}(\mathfrak{g}_{n,\infty}, \tilde{K}_{n,\infty}; \mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_{\varepsilon,\infty}) \otimes V(\lambda^\vee)) \cong \bigotimes_{v \in \Sigma_{F,\infty}} H^{\text{bn},v}(\mathfrak{g}_{n,v}, \tilde{K}_{n,v}; \mathcal{W}(\pi_{d_v, \nu_v}, \psi_{\varepsilon,v}) \otimes V(\lambda^\vee)_v)$$

に沿って $[\pi_\infty]_\varepsilon = \otimes_{v \in \Sigma_{F,\infty}} [\pi_{d_v, \nu_v}]_\varepsilon$ と分解できるので、各複素素点 $v \in \Sigma_{F,\infty}$ において $[\pi_{d_v, \nu_v}]_\varepsilon$ を構成すればよい。ここで、 $g \in \text{GL}_n(F_v) = \text{GL}_n(\mathbf{C})$ は $V(\lambda^\vee)$ の局所成分 $V(\lambda^\vee)_v := V_{\lambda_v^\vee} \otimes V_{\lambda_v^\vee}$ に $\tau_{\lambda_v^\vee}(g) \otimes \tau_{\lambda_v^\vee}(\bar{g})$ で作用するものとする。さらに、同型

$$\begin{aligned} & H^{\text{bn},v}(\mathfrak{g}_{n,v}, \tilde{K}_{n,v}; \mathcal{W}(\pi_{d_v, \nu_v}, \psi_{\varepsilon,v}) \otimes V(\lambda^\vee)_v) \\ & \cong \left(\mathcal{W}(\pi_{d_v, \nu_v}, \psi_{\varepsilon,v}) \otimes \bigwedge^{\text{bn},v} (\mathfrak{g}_{n,v}/\tilde{\mathfrak{k}}_{n,v})^\vee \otimes V(\lambda^\vee)_v \right)^{K_{n,v}} \end{aligned}$$

が成り立つ。 π_{d_v, ν_v} の $K_{n,v}$ -タイプのうち $(\bigwedge^{\text{bn},v} (\mathfrak{g}_{n,v}/\tilde{\mathfrak{k}}_{n,v})^\vee \otimes V(\lambda^\vee)_v)^\vee$ の既約成分として現れるのは極小 $K_{n,v}$ -タイプ τ_{d_v} のみであり、その重複度は1である。[HMN] では、Gelfand–Tsetlin 基底を用いて $(V_{d_v} \otimes \bigwedge^{\text{bn},v} (\mathfrak{g}_{n,v}/\tilde{\mathfrak{k}}_{n,v})^\vee \otimes V(\lambda^\vee)_v)^{K_{n,v}}$ の (定数倍を除いて唯1つの) 元を構成し、その $\mathbf{W}_{d_v, \nu_v}^{(\varepsilon)} \otimes \text{id} \otimes \text{id} \otimes \text{id}$ による像をとることによって $[\pi_{d_v, \nu_v}]_\varepsilon$ の明示的な構成を与えた。さらに [HMN] では、Gelfand–Tsetlin 基底を用いて $V(\lambda^\vee)$ の有理構造や整構造の具体的な記述を与え、次節の定理 4.3 の仮定のもとで Whittaker 周期 $p^b(\pi)$ を整構造に対して定義している。

4.2 $\text{GL}_n \times \text{GL}_{n-1}$ の保型 L 関数の臨界値

$n > 1$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_\sigma)_{\sigma \in I_F}$, $\mu_\sigma = (\mu_{\sigma,1}, \mu_{\sigma,2}, \dots, \mu_{\sigma,n-1}) \in \Lambda_{n-1}$ とし、 $\boldsymbol{\mu}$ は純性ウェイト w' をもつとする。 $(\pi', H_{\pi'})$ を $\text{GL}_{n-1}(\mathbf{A}_F)$ の滑らかな既約保型カスプ表現とし、 π' は $\boldsymbol{\mu}$ に関してコホモロジカルであると仮定する。 $\mathbf{Q}(\pi, \pi') := \mathbf{Q}(\pi)\mathbf{Q}(\pi')$ を $\mathbf{Q}(\pi)$ と $\mathbf{Q}(\pi')$ の合成体とする。

$$\text{Crit}(\pi \times \pi') := \{m \in \mathbf{Z} \mid -\lambda_{\sigma, n+1-i} \geq \mu_{\sigma,i} + m \geq -\lambda_{\sigma, n-i} \quad (\sigma \in I_F, 1 \leq i \leq n-1)\}$$

とおく。 $\text{Crit}(\pi \times \pi') \neq \emptyset$ のとき、 $L(s, \pi \times \pi')$ の臨界点全体の集合は $\{\frac{1}{2} + m \mid m \in \text{Crit}(\pi \times \pi')\}$ で与えられることが知られている。

定理 4.1 (Raghuram [Ra]). $\text{Crit}(\pi \times \pi') \neq \emptyset$ とする。 $m \in \text{Crit}(\pi \times \pi')$ に対して、

$$\mathcal{I}_\infty(\tfrac{1}{2} + m; [\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon}) \frac{L_{\text{fin}}(\tfrac{1}{2} + m, \pi_{\text{fin}} \times \pi'_{\text{fin}})}{p^b(\pi)p^b(\pi')} \in \mathbf{Q}(\pi, \pi')$$

が成り立つ。ここで、 $\mathcal{I}_\infty(\frac{1}{2} + m; [\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon})$ は $m, [\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon}$ に依存する複素数であり、各 $v \in \Sigma_{F,\infty}$ における極小 $K_{n,v} \times K_{n-1,v}$ -タイプの局所ゼータ積分の $s = \frac{1}{2} + m$ での値の線型結合の積で与えられる。

注意 4.2. この章では F を総虚代数体としているが, Raghuram [Ra] は定理 4.1 を総虚とは限らない一般の代数体に対して証明している. また, 一般の代数体の場合に, Li-Liu-Sun [LLS] は無限素点における周期関係式を構成し, 定理 4.1 の複素数 $\mathcal{I}_\infty(\frac{1}{2} + m; [\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon})$ を明示的に書き下している. ただし, [LLS] では $[\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon}$ を明示的に構成しているわけではなく, 自明な局所系に対する $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1}$ の局所ゼータ積分を用いて $[\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon}$ を正規化している.

筆者は原, 並川との共著論文 [HMN] において, §4.1 で述べたように $[\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon}$ を構成し, 定理 3.4 を用いて $\mathcal{I}_\infty(\frac{1}{2} + m; [\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon})$ を明示的に計算した. 注意 4.2 で紹介した Li-Liu-Sun [LLS] の研究と比較すると, 我々の結果には F が総虚であるという仮定が必要であるものの, $(\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1})$ の局所ゼータ積分とは無関係に $[\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon}$ を明示的に構成して, 結果を得ることができている. これにより, π に関連する他の保型 L 関数 (たとえば, 注意 4.5 で後述する $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ の保型 L 関数など) の臨界値の代数性や整性についても, 共通の Whittaker 周期 $p^b(\pi)$ を用いて考えることができる.

[HMN] の主定理を紹介するために, さらにいくつか仮定をしよう. $\widehat{\mathcal{O}}_F$ のイデアル \mathfrak{N} に対し,

$$\mathcal{K}_{n,1}(\mathfrak{N}) := \{k = (k_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(\widehat{\mathcal{O}}_F) \mid k_{n,1}, k_{n,2}, \dots, k_{n,n-1}, k_{n,n} - 1 \in \mathfrak{N}\}.$$

とおく. $(\pi_{\mathrm{fin}})^{\mathcal{K}_{n,1}(\mathfrak{N})} \neq \{0\}$ となる $\widehat{\mathcal{O}}_F$ のイデアル \mathfrak{N} が存在し, そのうち最大のものを \mathfrak{N}_π とすると, F の判別式 D_F と \mathfrak{N}_π は互いに素であると仮定する. また, $(\pi'_{\mathrm{fin}})^{\mathrm{GL}_{n-1}(\widehat{\mathcal{O}}_F)} \neq \{0\}$ と仮定する. これらの仮定のもとで, 局所系やコホモロジーに整構造を導入し, Whittaker 周期 $p^b(\pi)$ を定義し直すことで, 次の結果を得た.

定理 4.3 (原-宮崎-並川 [HMN, Theorem 2.25]). p を $p > \max\{\lambda_{\sigma,1} - \lambda_{\sigma,n} + n - 2 \mid \sigma \in I_F\}$ を満たす素数とする. \mathfrak{P} を p 上の $\mathbf{Q}(\pi, \pi')$ の素点とし, $\mathbf{Q}(\pi, \pi')$ の整数環の \mathfrak{P} での局所化を $\mathcal{O}(\pi, \pi')_{(\mathfrak{P})}$ で表す. $\mathrm{Crit}(\pi \times \pi') \neq \emptyset$ のとき, $m \in \mathrm{Crit}(\pi \times \pi')$ に対して,

$$\mathcal{C}(m, \pi \times \pi') \frac{L(\frac{1}{2} + m, \pi \times \pi')}{p^b(\pi)p^b(\pi')} \in \mathcal{O}(\pi, \pi')_{(\mathfrak{P})}$$

が成り立つ. ここで,

$$\mathcal{C}(m, \pi \times \pi') := 2^{-2b_n} (\sqrt{-1})^{-b_{n-1}} (-\sqrt{-1})^{(n-1)w' \cdot \#\Sigma_{F,\infty} \omega_{\pi'}} (\delta)^{-1} (-1)^{(m+1)b_n} D_F^{mn(n-1)/2}$$

とし, δ は $\widehat{\mathcal{O}}_F$ の共役差積を生成する有限イデール, $\omega_{\pi'}$ は π' の中心指標とする.

注意 4.4. F が実素点をもつ場合, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_F)$ の滑らかなコホモロジカル既約保型カスプ表現 π の実素点における局所成分 π_v は既約な主系列表現と同型ではないため, [HMN] の手法で定理 4.3 を一般の代数体に拡張するためには, 定理 3.4 をより一般の表現に拡張する必要がある. (他にも局所系の有理構造や整構造に関する問題もある.) $\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$ の場合については, 石井, 平野と筆者の共著論文 [HIM1] の結果を用いて, 原, 並川 [HN] が実素点における $\mathcal{I}_\infty(\frac{1}{2} + m; [\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon})$ の明示的計算を実行している.

注意 4.5. Raghuram の $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1}$ の場合の結果 (定理 4.1) と同様の結果を, Grenié [Gr] は $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ (F は総虚代数体) の場合に得ている. $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ の場合についても, 定理 4.1 の $\mathcal{I}_\infty(\frac{1}{2} + m; [\pi_\infty]_\varepsilon, [\pi'_\infty]_{-\varepsilon})$ にあたる部分を定理 3.4 を用いて計算することで Grenié [Gr] の結果を精密化できることがわかっており, 現在, 原, 並川との共同研究を進行中である.

参考文献

- [Co] James W. Cogdell. Lectures on L -functions, converse theorems, and functoriality for GL_n . In *Lectures on automorphic L -functions*, Vol. 20 of *Fields Inst. Monogr.*, pp. 1–96. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [Gr] Loïc Grenié. Critical values of automorphic L -functions for $GL(r) \times GL(r)$. *Manuscripta Math.*, Vol. 110, No. 3, pp. 283–311, 2003.
- [HMN] Takashi Hara, Tadashi Miyazaki, and Kenichi Namikawa. Uniform integrality of critical values of the Rankin-Selberg L -function for $GL_n \times GL_{n-1}$. *preprint* (arXiv:2308.12200).
- [HN] Takashi Hara and Kenichi Namikawa. A cohomological interpretation of archimedean zeta integrals for $GL_3 \times GL_2$. *Res. Number Theory*, Vol. 7, No. 4, Paper No. 68, 2021.
- [HIM1] Miki Hirano, Taku Ishii, and Tadashi Miyazaki. Archimedean zeta integrals for $GL(3) \times GL(2)$. *Mem. Amer. Math. Soc.*, Vol. 278, No. 1366, pp. 1–136, 2022.
- [HIM2] Miki Hirano, Taku Ishii, and Tadashi Miyazaki. Whittaker functions on $GL(4, \mathbb{R})$ and archimedean Bump-Friedberg integrals. *in preparation*.
- [HO] Miki Hirano and Takayuki Oda. Calculus of principal series Whittaker functions on $GL(3, \mathbb{C})$. *J. Funct. Anal.*, Vol. 256, No. 7, pp. 2222–2267, 2009.
- [Hu] Peter Humphries. Archimedean newform theory for GL_n . *preprint* (arXiv:2008.12406).
- [IM] Taku Ishii and Tadashi Miyazaki. Calculus of archimedean Rankin-Selberg integrals with recurrence relations. *Represent. Theory*, Vol. 26, pp. 714–763, 2022.
- [IO] Taku Ishii and Takayuki Oda. Calculus of principal series Whittaker functions on $SL(n, \mathbf{R})$. *J. Funct. Anal.*, Vol. 266, No. 3, pp. 1286–1372, 2014.
- [IS1] Taku Ishii and Eric Stade. New formulas for Whittaker functions on $GL(n, \mathbb{R})$. *J. Funct. Anal.*, Vol. 244, No. 1, pp. 289–314, 2007.
- [IS2] Taku Ishii and Eric Stade. Archimedean zeta integrals on $GL_n \times GL_m$ and $SO_{2n+1} \times GL_m$. *Manuscripta Math.*, Vol. 141, No. 3-4, pp. 485–536, 2013.
- [JL] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on $GL(2)$* . Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [Ja1] Hervé Jacquet. Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley. *Bull. Soc. Math. France*, Vol. 95, pp. 243–309, 1967.
- [Ja2] Hervé Jacquet. *Automorphic forms on $GL(2)$. Part II*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 278. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [Ja3] Hervé Jacquet. Archimedean Rankin-Selberg integrals. In *Automorphic forms and L -functions II. Local aspects*, Vol. 489 of *Contemp. Math.*, pp. 57–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [JPSS1] Hervé Jacquet, Ilja Piatetski-Shapiro, and Joseph Shalika. Conducteur des représentations génériques du groupe linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 292, No. 13, pp. 611–616, 1981.
- [JPSS2] Hervé Jacquet, Ilja Piatetski-Shapiro, and Joseph Shalika. Rankin-Selberg convolutions. *Amer. J. Math.*, Vol. 105, No. 2, pp. 367–464, 1983.
- [JS] Hervé Jacquet and Joseph Shalika. Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, Vol. 2 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pp. 125–207. Weizmann, Jerusalem, 1990.

- [LLS] Jian-Shu Li, Dongwen Liu, and Binyong Sun. Period relations for Rankin-Selberg convolutions for $GL(n) \times GL(n-1)$. *preprint* (arXiv:2109.05273).
- [Mi1] Tadashi Miyazaki. Whittaker functions for generalized principal series representations of $SL(3, \mathbf{R})$. *Manuscripta Math.*, Vol. 128, No. 1, pp. 107–135, 2009.
- [Mi2] Tadashi Miyazaki. The Eisenstein series for $GL(3, \mathbf{Z})$ induced from cusp forms. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, Vol. 82, No. 1, pp. 1–41, 2012.
- [Mi3] Tadashi Miyazaki. The local zeta integrals for $GL(2, \mathbf{C}) \times GL(2, \mathbf{C})$. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, Vol. 94, No. 1, pp. 1–6, 2018.
- [Po] Alexandru A. Popa. Whittaker newforms for Archimedean representations. *J. Number Theory*, Vol. 128, No. 6, pp. 1637–1645, 2008.
- [Ra] A. Raghuram. Critical values of Rankin-Selberg L -functions for $GL_n \times GL_{n-1}$ and the symmetric cube L -functions for GL_2 . *Forum Math.*, Vol. 28, No. 3, pp. 457–489, 2016.
- [RS] A. Raghuram and Freydoon Shahidi. On certain period relations for cusp forms on GL_n . *Int. Math. Res. Not. IMRN*, pp. Art. ID rnn 077, 23, 2008.
- [Sha] J. A. Shalika. The multiplicity one theorem for GL_n . *Ann. of Math. (2)*, Vol. 100, pp. 171–193, 1974.
- [Shi] Takuro Shintani. On an explicit formula for class-1 “Whittaker functions” on GL_n over P -adic fields. *Proc. Japan Acad.*, Vol. 52, No. 4, pp. 180–182, 1976.
- [St1] Eric Stade. Mellin transforms of $GL(n, \mathbb{R})$ Whittaker functions. *Amer. J. Math.*, Vol. 123, No. 1, pp. 121–161, 2001.
- [St2] Eric Stade. Archimedean L -factors on $GL(n) \times GL(n)$ and generalized Barnes integrals. *Israel J. Math.*, Vol. 127, pp. 201–219, 2002.

宮崎 直, 〒 252-0373 神奈川県相模原市南区北里 1-15-1 北里大学一般教育部数学単位
e-mail : miyaza@kitasato-u.ac.jp

Norm one tori and Hasse norm principle

Akinari Hoshi (Niigata University)

In this talk, I explain the content of the papers Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY22], [HKY23].

1 Introduction

Let k be a field, \bar{k} be a fixed separable closure of k and $\mathcal{G} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ be the absolute Galois group of k . Let T be an algebraic k -torus, i.e. a group k -scheme with fiber product (base change) $T \times_k \bar{k} = T \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k} \simeq (\mathbb{G}_{m, \bar{k}})^n$; k -form of the split torus $(\mathbb{G}_m)^n$. Then there exists the minimal (canonical) finite Galois extension K/k with Galois group $G = \text{Gal}(K/k)$ such that T splits over K : $T \times_k K \simeq (\mathbb{G}_{m, K})^n$. It is also well-known that there is the duality between the category of G -lattices, i.e. finitely generated $\mathbb{Z}[G]$ -modules which are \mathbb{Z} -free as abelian groups, and the category of algebraic k -tori which split over K (see Ono [Ono61, Section 1.2], Voskresenskii [Vos98, page 27, Example 6] and Knus, Merkurjev, Rost and Tignol [KMRT98, page 333, Proposition 20.17]). Indeed, if T is an algebraic k -torus, then the character module $\hat{T} = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ of T may be regarded as a G -lattice. Let X be a smooth k -compactification of T , i.e. smooth projective k -variety X containing T as a dense open subvariety, and $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. There exists such a smooth k -compactification of an algebraic k -torus T over any field k (due to Hironaka [Hir64] for $\text{char } k = 0$, see Colliot-Thélène, Harari and Skorobogatov [CTHS05, Corollaire 1] for any field k). A \mathcal{G} -lattice P is said to be *permutation* if P has a \mathbb{Z} -basis permuted by \mathcal{G} and a \mathcal{G} -lattice F is said to be *flabby* (resp. *coflabby*) if $\hat{H}^{-1}(\mathcal{H}, F) = 0$ (resp. $H^1(\mathcal{H}, F) = 0$) for any closed subgroup $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ where \hat{H} is the Tate cohomology.

Theorem 1.1 (Voskresenskii [Vos69, Section 4, page 1213], [Vos70, Section 3, page 7], see also [Vos98, Section 4.6], [Kun07, Theorem 1.9], [Vos74] and [CT07, Theorem 5.1, page 19] for any field k). *Let k be a field and $\mathcal{G} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Let T be an algebraic k -torus, X be a smooth k -compactification of T and $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Then there exists an exact sequence of \mathcal{G} -lattices*

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{Q} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0$$

where \hat{Q} is permutation and $\text{Pic } \bar{X}$ is flabby.

We have $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \simeq H^1(G, \text{Pic } X_K)$ where K is the splitting field of T , $G = \text{Gal}(K/k)$ and $X_K = X \times_k K$. Hence Theorem 1.1 says that for G -lattices $M = \hat{T}$ and $P = \hat{Q}$, the exact sequence $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow \text{Pic } X_K \rightarrow 0$ gives a flabby resolution of M and the flabby class of M is $[M]^{fl} = [\text{Pic } X_K]$ as G -lattices (see [HKY22, Section 3], cf. Endo and Miyata's theorem [EM75, Lemma 1.1]).

Let k be a global field, i.e. a number field (a finite extension of \mathbb{Q}) or a function field of an algebraic curve over \mathbb{F}_q (a finite extension of $\mathbb{F}_q(t)$). Let T be an algebraic k -torus and $T(k)$ be the group of k -rational points of T . Then $T(k)$ embeds into $\prod_{v \in V_k} T(k_v)$ by the diagonal map where V_k is the set of all places of k and k_v is the completion of k at v . Let $\overline{T(k)}$ be the closure of $T(k)$ in the product $\prod_{v \in V_k} T(k_v)$. The group

$$A(T) = \left(\prod_{v \in V_k} T(k_v) \right) / \overline{T(k)}$$

is called *the kernel of the weak approximation* of T . We say that T has the *weak approximation property* if $A(T) = 0$.

Let E be a principal homogeneous space (= torsor) under T . *Hasse principle holds for E* means that if E has a k_v -rational point for all k_v , then E has a k -rational point. The set $H^1(k, T)$ classifies all such

torsors E up to (non-unique) isomorphism. We define *the Shafarevich-Tate group*

$$\text{III}(T) = \text{Ker} \left\{ H^1(k, T) \xrightarrow{\text{res}} \bigoplus_{v \in V_k} H^1(k_v, T) \right\}.$$

Then Hasse principle holds for all torsors E under T if and only if $\text{III}(T) = 0$.

Theorem 1.2 (Voskresenskii [Vos69, Theorem 5, page 1213], [Vos70, Theorem 6, page 9], see also [Vos98, Section 11.6, Theorem, page 120]). *Let k be a global field, T be an algebraic k -torus and X be a smooth k -compactification of T . Then there exists an exact sequence*

$$0 \rightarrow A(T) \rightarrow H^1(k, \text{Pic } \overline{X})^\vee \rightarrow \text{III}(T) \rightarrow 0$$

where $M^\vee = \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ is the Pontryagin dual of M . Moreover, if L is the splitting field of T and L/k is an unramified extension, then $A(T) = 0$ and $H^1(k, \text{Pic } \overline{X})^\vee \simeq \text{III}(T)$.

For the last assertion, see [Vos98, Theorem, page 120]. It follows that $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) = 0$ if and only if $A(T) = 0$ and $\text{III}(T) = 0$, i.e. T has the weak approximation property and Hasse principle holds for all torsors E under T . Theorem 1.2 was generalized to the case of linear algebraic groups by Sansuc [San81].

The norm one torus $R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ of K/k is the kernel of the norm map $R_{K/k}(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{G}_m$ where $R_{K/k}$ is the Weil restriction (see [Vos98, page 37, Section 3.12]). Such a torus $R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ is biregularly isomorphic to the norm hypersurface $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ where $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ is the polynomial of total degree n defined by the norm map $N_{K/k} : K^\times \rightarrow k^\times$. When K/k is a finite Galois extension, we have that:

Theorem 1.3 (Voskresenskii [Vos70, Theorem 7], Colliot-Thélène and Sansuc [CTS77, Proposition 1]). *Let k be a field and K/k be a finite Galois extension with Galois group $G = \text{Gal}(K/k)$. Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k and X be a smooth k -compactification of T . Then $H^1(H, \text{Pic } X_K) \simeq H^3(H, \mathbb{Z})$ for any subgroup H of G . In particular, $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq H^1(G, \text{Pic } X_K) \simeq H^3(G, \mathbb{Z})$ which is isomorphic to the Schur multiplier $M(G)$ of G .*

In other words, for G -lattice $J_G = \widehat{T}$, $H^1(H, [J_G]^{fl}) \simeq H^3(H, \mathbb{Z})$ for any subgroup H of G and $H^1(G, [J_G]^{fl}) \simeq H^3(G, \mathbb{Z}) \simeq H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$; the Schur multiplier of G . By the exact sequence $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow J_G \rightarrow 0$, we also have $\delta : H^1(G, J_G) \simeq H^2(G, \mathbb{Z}) \simeq G^{ab} \simeq G/[G, G]$ where δ is the connecting homomorphism and G^{ab} is the abelianization of G .

Let K be a finitely generated field extension of a field k . A field K is called *rational over k* (or *k -rational* for short) if K is purely transcendental over k , i.e. K is isomorphic to $k(x_1, \dots, x_n)$, the rational function field over k with n variables x_1, \dots, x_n for some integer n . K is called *stably k -rational* if $K(y_1, \dots, y_m)$ is k -rational for some algebraically independent elements y_1, \dots, y_m over K . Two fields K and K' are called *stably k -isomorphic* if $K(y_1, \dots, y_m) \simeq K'(z_1, \dots, z_n)$ over k for some algebraically independent elements y_1, \dots, y_m over K and z_1, \dots, z_n over K' . When k is an infinite field, K is called *retract k -rational* if there is a k -algebra R contained in K such that (i) K is the quotient field of R , and (ii) the identity map $1_R : R \rightarrow R$ factors through a localized polynomial ring over k , i.e. there is an element $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, which is the polynomial ring over k , and there are k -algebra homomorphisms $\varphi : R \rightarrow k[x_1, \dots, x_n][1/f]$ and $\psi : k[x_1, \dots, x_n][1/f] \rightarrow R$ satisfying $\psi \circ \varphi = 1_R$ (cf. [Sal84]). K is called *k -unirational* if $k \subset K \subset k(x_1, \dots, x_n)$ for some integer n . It is not difficult to see that “ k -rational” \Rightarrow “stably k -rational” \Rightarrow “retract k -rational” \Rightarrow “ k -unirational”.

An algebraic k -torus T is said to be *k -rational* (resp. *stably k -rational*, *retract k -rational*) if the function field $k(T)$ of T is k -rational (resp. stably k -rational, retract k -rational).

Note that an algebraic k -torus T is always k -unirational (see [Vos98, page 40, Example 21]). Tori of dimension n over k correspond bijectively to the elements of the set $H^1(\mathcal{G}, \text{GL}_n(\mathbb{Z}))$ where $\mathcal{G} = \text{Gal}(k_s/k)$ since $\text{Aut}((\mathbb{G}_m)^n) = \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. The algebraic k -torus T of dimension n is determined uniquely by the integral representation $h : \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ up to conjugacy, and the group $h(\mathcal{G})$ is a finite subgroup of $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ (see [Vos98, page 57, Section 4.9]).

There are 2 (resp. 13, 73, 710, 6079) \mathbb{Z} -classes forming 2 (resp. 10, 32, 227, 955) \mathbb{Q} -classes in $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z})$ (resp. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$). It is easy to see that all the 1-dimensional algebraic k -tori T , i.e. the trivial torus \mathbb{G}_m and the norm one torus $R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ of K/k with $[K : k] = 2$, are k -rational. Voskresenskii [Vos67] proved that all the 13 cases of 2-dimensional algebraic k -tori, which correspond to 13 \mathbb{Z} -conjugacy classes of finite subgroups of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, are k -rational. Note that whether all the 13 cases indeed occur or not depends on a base field k . The same applies for the numbers 15, 216 and 3003 in Theorems 1.4, 1.5 and 1.6 below. We also note that T is retract k -rational $\Rightarrow H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) = 0$ and over global field k , $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) = 0 \Rightarrow A(T) \simeq \mathrm{III}(T) = 0$ (see also Manin [Man74, §30]).

Kunyavskii [Kun90] solved the rationality problem for 3-dimensional algebraic k -tori. In the classification, there exist 73 cases of 3-dimensional algebraic k -tori which correspond to 73 \mathbb{Z} -conjugacy classes of finite subgroups of $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, and 15 cases of them are not k -rational (resp. not stably k -rational, not retract k -rational). Using the classification, Kunyavskii [Kun84] showed that only 2 cases of algebraic k -tori of dimension 3 satisfy the non-vanishing $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \neq 0$ among the 15 cases of non-rational k -tori. These two k -tori are norm one tori $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ with $[K : k] = 4$:

Theorem 1.4 (Kunyavskii [Kun84, Proposition 1]). *Let k be a field, T be an algebraic k -torus of dimension 3 and X be a smooth k -compactification of T . Then, among the (at most) 15 cases of non-rational algebraic k -tori T ,*

$$H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } T = R_{K_1/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m) \text{ or } R_{K_2/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where K_1/k (resp. K_2/k) is a field extension of degree 4 whose Galois closure L_1/k (resp. L_2/k) satisfies $\mathrm{Gal}(L_1/k) \simeq V_4$; the Klein four group (resp. $\mathrm{Gal}(L_2/k) \simeq A_4$; the alternating group of degree 4). In particular, if k is a global field, then $A(T) \simeq \mathrm{III}(T) = 0$ except for $T = R_{K_1/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $T = R_{K_2/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$.

Hoshi and Yamasaki [HY17] classified stably/retract k -rational algebraic k -tori of dimensions 4 and 5. In the classification, there exist 710 (resp. 6079) cases of 4-dimensional (resp. 5-dimensional) algebraic k -tori which correspond to 710 (resp. 6079) \mathbb{Z} -conjugacy classes of finite subgroups of $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ (resp. $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$), and 216 (resp. 3003) cases of them are not retract k -rational.

The first main result (Theorem 1.5 and Theorem 1.6) of the paper [HKY22] is to classify the algebraic k -tori T with non-vanishing $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \neq 0$ in dimensions 4 and 5:

Theorem 1.5 (Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY22, Theorem 1.5], see [HKY22, Theorem 4.1] for the detailed statement). *Let k be a field, T be an algebraic k -torus of dimension 4 and X be a smooth k -compactification of T . Among the (at most) 216 cases of not retract rational algebraic k -tori T , there exist 2 (resp. 20, 194) cases of algebraic k -tori with $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ (resp. $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) = 0$).*

Theorem 1.6 (Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY22, Theorem 1.6], see [HKY22, Theorem 4.2] for the detailed statement). *Let k be a field, T be an algebraic k -torus of dimension 5 and X be a smooth k -compactification of T . Among the (at most) 3003 cases of not retract rational algebraic k -tori T , there exist 11 (resp. 263, 2729) cases of algebraic k -tori with $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ (resp. $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) = 0$).*

Note that Hoshi and Yamasaki [HY17, Chapter 7] showed the vanishing $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \simeq H^1(G, [\widehat{T}]^{fl}) = 0$ for any Bravais group G of dimension $n \leq 6$ (see also [Vos83], [Vos98, Section 8]). There exists 1 (resp. 5, 14, 64, 189, 841) Bravais group of dimension $n = 1$ (resp. 2, 3, 4, 5, 6) (see [HY17, Example 4.16]).

Let G be a finite group and M be a G -lattice. We define

$$\mathrm{III}_\omega^i(G, M) := \mathrm{Ker} \left\{ H^i(G, M) \xrightarrow{\mathrm{res}} \bigoplus_{g \in G} H^i(\langle g \rangle, M) \right\} \quad (i \geq 1).$$

The following is a theorem of Colliot-Thélène and Sansuc [CTS87]:

Theorem 1.7 (Colliot-Thélène and Sansuc [CTS87, Proposition 9.5 (ii)], see also [San81, Proposition 9.8] and [Vos98, page 98]). *Let k be a field with $\text{char } k = 0$ and K/k be a finite Galois extension with Galois group $G = \text{Gal}(K/k)$. Let T be an algebraic k -torus which splits over K and X be a smooth k -compactification of T . Then we have*

$$\text{III}_\omega^2(G, \widehat{T}) \simeq H^1(G, \text{Pic } X_K) \simeq \text{Br}(X)/\text{Br}(k)$$

where $\text{Br}(X)$ is the étale cohomological Brauer Group of X (it is the same as the Azumaya-Brauer group of X for such X , see [CTS87, page 199]).

In other words, for G -lattice $M = \widehat{T}$, we have $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq H^1(G, \text{Pic } X_K) \simeq H^1(G, [M]^{fl}) \simeq \text{III}_\omega^2(G, M) \simeq \text{Br}(X)/\text{Br}(k)$ (for the flabby class $[M]^{fl}$ of M , see [HKY22, Section 3]). Hence Theorem 1.4, Theorem 1.5 and Theorem 1.6 compute $H^1(G, [M]^{fl}) \simeq \text{III}_\omega^2(G, M) \simeq \text{Br}(X)/\text{Br}(k)$ where $M = \widehat{T}$. We also see $\text{Br}_{\text{nr}}(k(X)/k) = \text{Br}(X) \subset \text{Br}(k(X))$ (see Colliot-Thélène [CTS07, Theorem 5.11], Saltman [Sal99, Proposition 10.5]).

Let k be a global field, K/k be a finite extension and \mathbb{A}_K^\times be the idele group of K . We say that *the Hasse norm principle holds for K/k* if $(N_{K/k}(\mathbb{A}_K^\times) \cap k^\times)/N_{K/k}(K^\times) = 1$ where $N_{K/k}$ is the norm map.

Hasse [Has31, Satz, page 64] proved that the Hasse norm principle holds for any cyclic extension K/k but does not hold for bicyclic extension $\mathbb{Q}(\sqrt{-39}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}$. For Galois extensions K/k , Tate [Tat67] gave the following theorem:

Theorem 1.8 (Tate [Tat67, page 198]). *Let k be a global field, K/k be a finite Galois extension with Galois group $\text{Gal}(K/k) \simeq G$. Let V_k be the set of all places of k and G_v be the decomposition group of G at $v \in V_k$. Then we have*

$$(N_{K/k}(\mathbb{A}_K^\times) \cap k^\times)/N_{K/k}(K^\times) \simeq \text{Coker} \left\{ \bigoplus_{v \in V_k} \widehat{H}^{-3}(G_v, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{cores}} \widehat{H}^{-3}(G, \mathbb{Z}) \right\}$$

where \widehat{H} is the Tate cohomology. In particular, the Hasse norm principle holds for K/k if and only if the restriction map $H^3(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{res}} \bigoplus_{v \in V_k} H^3(G_v, \mathbb{Z})$ is injective.

Let S_n (resp. A_n , D_n , C_n) be the symmetric (resp. the alternating, the dihedral, the cyclic) group of degree n of order $n!$ (resp. $n!/2$, $2n$, n). Let $V_4 \simeq C_2 \times C_2$ be the Klein four group.

If $G \simeq C_n$ is cyclic, then $\widehat{H}^{-3}(G, \mathbb{Z}) \simeq H^3(G, \mathbb{Z}) \simeq H^1(G, \mathbb{Z}) = 0$ and hence the Hasse's original theorem follows. If there exists a place v of k such that $G_v = G$, then the Hasse norm principle also holds for K/k . For example, the Hasse norm principle holds for K/k with $G \simeq V_4$ if and only if there exists a place v of k such that $G_v = V_4$ because $H^3(V_4, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and $H^3(C_2, \mathbb{Z}) = 0$. The Hasse norm principle holds for K/k with $G \simeq (C_2)^3$ if and only if (i) there exists a place v of k such that $G_v = G$ or (ii) there exist places v_1, v_2, v_3 of k such that $G_{v_i} \simeq V_4$ and $H^3(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{res}} H^3(G_{v_1}, \mathbb{Z}) \oplus H^3(G_{v_2}, \mathbb{Z}) \oplus H^3(G_{v_3}, \mathbb{Z})$ is an isomorphism because $H^3(G, \mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$ and $H^3(V_4, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ono [Ono63] established the relationship between the Hasse norm principle for K/k and the Hasse principle for all torsors under the norm one torus $R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ of K/k :

Theorem 1.9 (Ono [Ono63, page 70], see also Platonov [Pla82, page 44], Kunyavskii [Kun84, Remark 3], Platonov and Rapinchuk [PR94, page 307]). *Let k be a global field and K/k be a finite extension. Then*

$$\text{III}(R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)) \simeq (N_{K/k}(\mathbb{A}_K^\times) \cap k^\times)/N_{K/k}(K^\times).$$

In particular, $\text{III}(R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)) = 0$ if and only if the Hasse norm principle holds for K/k .

The Hasse norm principle for Galois extensions K/k was investigated by Gerth [Ger77], [Ger78] and Gurak [Gur78a], [Gur78b], [Gur80] (see also [PR94, pages 308–309]), etc. Gurak [Gur78a] showed that the Hasse norm principle holds for Galois extension K/k if all the Sylow subgroups of $\text{Gal}(K/k)$ are cyclic. Note

that this also follows from Theorem 1.9 and the retract k -rationality of $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ due to Endo and Miyata [EM75, Theorem 2.3].

However, for non-Galois extension K/k , very little is known about the Hasse norm principle. Bartels [Bar81a] (resp. [Bar81b]) showed that the Hasse norm principle for K/k holds when $[K : k]$ is prime (resp. $\text{Gal}(L/k) \simeq D_n$). The former case also follows from Theorem 1.9 and the retract k -rationality of $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ due to Colliot-Thélène and Sansuc [CTS87, Proposition 9.1].

Theorem 1.10 (Voskresenskii and Kunyavskii [VK84], see also Voskresenskii [Vos88, Theorem 4, Corollary]). *Let k be a number field, K/k be a finite extension of degree n and L/k be the Galois closure of K/k with $\text{Gal}(L/k) \simeq S_n$; the symmetric group of degree n . Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k and X be a smooth k -compactification of T . Then $H^1(S_n, \text{Pic } X_L) = 0$. In particular, T has the weak approximation property and the Hasse norm principle holds for K/k .*

Theorem 1.11 (Macedo [Mac20]). *Let k be a number field, K/k be a finite extension of degree $n \geq 5$ and L/k be the Galois closure of K/k with $\text{Gal}(L/k) \simeq A_n$; the alternating group of degree $n \geq 5$. Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k . Then $\text{III}_\omega^2(A_n, \widehat{T}) = 0$. In particular, T has the weak approximation property and the Hasse norm principle holds for K/k .*

Remark 1.12. Applying Theorem 1.2 to $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$, it follows from Theorem 1.9 that $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) = 0$ if and only if $A(T) = 0$ and $\text{III}(T) = 0$, i.e. T has the weak approximation property and the Hasse norm principle holds for K/k . In the algebraic language, the latter condition $\text{III}(T) = 0$ means that for the corresponding norm hypersurface $f(x_1, \dots, x_n) = b$, it has a k -rational point if and only if it has a k_v -rational point for any valuation v of k where $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ is the polynomial of total degree n defined by the norm map $N_{K/k} : K^\times \rightarrow k^\times$ and $b \in k^\times$ (see [Vos98, Example 4, page 122]).

Let nTm be the m -th transitive subgroup of S_n up to conjugacy (see Butler and McKay [BM83], [GAP]).

Let k be a number field, K/k be a field extension of degree n and L/k be the Galois closure of K/k with $\text{Gal}(L/k) \simeq G$. Then we may regard G as the transitive subgroup $G = nTm \leq S_n$. Let v be a place of k and G_v be the decomposition group of G at v . Using Theorem 1.4, Kunyavskii [Kun84] gave a necessary and sufficient condition for the Hasse norm principle for $n = 4$:

Theorem 1.13 (Kunyavskii [Kun84, page 1899]). *Let k be a number field, K/k be a field extension of degree 4 and L/k be the Galois closure of K/k . Let $G = \text{Gal}(L/k) = 4Tm$ ($1 \leq m \leq 5$) be a transitive subgroup of S_4 and $H = \text{Gal}(L/K)$ with $[G : H] = 4$. Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k . Then $A(T) \simeq \text{III}(T) = 0$ except for $4T2 \simeq V_4$ and $4T4 \simeq A_4$. For $4T2 \simeq V_4$ and $4T4 \simeq A_4$, either (i) $A(T) = 0$ and $\text{III}(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ or (ii) $A(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and $\text{III}(T) = 0$, and the following conditions are equivalent:
(ii) $A(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and $\text{III}(T) = 0$;
(iii) there exists a place v of k (which ramifies in L) such that $V_4 \leq G_v$.*

Drakokhrust and Platonov [DP87] gave a necessary and sufficient condition for the Hasse norm principle for $n = 6$ ($G = 6Tm$ ($1 \leq m \leq 16$)):

Theorem 1.14 (Drakokhrust and Platonov [DP87, Lemma 12, Proposition 6, Lemma 13]). *Let k be a number field, K/k be a field extension of degree 6 and L/k be the Galois closure of K/k . Let $G = \text{Gal}(L/k) = 6Tm$ ($1 \leq m \leq 16$) be a transitive subgroup of S_6 and $H = \text{Gal}(L/K)$ with $[G : H] = 6$. Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k . Then $\text{III}(T) = 0$ except for $6T4 \simeq A_4$ and $6T12 \simeq A_5$. For $6T4 \simeq A_4$ and $6T12 \simeq A_5$, (i) $\text{III}(T) \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; and (ii) $\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k (which ramifies in L) such that $V_4 \leq G_v$.*

The number of transitive subgroups nTm of S_n ($2 \leq n \leq 15$) up to conjugacy is given as follows (see Butler and McKay [BM83] for $n \leq 11$, Royle [Roy87] for $n = 12$, Butler [But93] for $n = 14, 15$ and [GAP]):

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
# of nTm	1	2	5	5	16	7	50	34	45	8	301	9	63	104

The following theorem which is one of the main results of the paper [HKY22] classifies the norm one tori $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ with non-vanishing $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \neq 0$ for $[K : k] = n \leq 15$ and $n \neq 12$.

Theorem 1.15 (Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY22, Theorem 1.15]). *Let $2 \leq n \leq 15$ be an integer with $n \neq 12$. Let k be a field, K/k be a separable field extension of degree n and L/k be the Galois closure of K/k . Assume that $G = \text{Gal}(L/k) = nTm$ is a transitive subgroup of S_n and $H = \text{Gal}(L/K)$ with $[G : H] = n$. Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k of dimension $n - 1$ and X be a smooth k -compactification of T . Then $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \neq 0$ if and only if G is given as in Table 1. In particular, if k is a number field and L/k is an unramified extension, then $A(T) = 0$ and $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq \text{III}(T)$.*

Table 1: $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq H^1(G, [J_{G/H}]^{fl}) \neq 0$ where $G = nTm$ with $2 \leq n \leq 15$ and $n \neq 12$

G	$H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq H^1(G, [J_{G/H}]^{fl})$
$4T2 \simeq V_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$4T4 \simeq A_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$6T4 \simeq A_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$6T12 \simeq A_5$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T2 \simeq C_4 \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T3 \simeq (C_2)^3$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$
$8T4 \simeq D_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T9 \simeq D_4 \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T11 \simeq (C_4 \times C_2) \rtimes C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T13 \simeq A_4 \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T14 \simeq S_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T15 \simeq C_8 \rtimes V_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T19 \simeq (C_2)^3 \rtimes C_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T21 \simeq (C_2)^3 \times C_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T22 \simeq (C_2)^3 \rtimes V_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T31 \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_2) \rtimes C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T32 \simeq ((C_2)^3 \rtimes V_4) \rtimes C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T37 \simeq \text{PSL}_3(\mathbb{F}_2) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$8T38 \simeq (((C_2)^4 \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$9T2 \simeq (C_3)^2$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$9T5 \simeq (C_3)^2 \rtimes C_2$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$9T7 \simeq (C_3)^2 \times C_3$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$9T9 \simeq (C_3)^2 \times C_4$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$9T11 \simeq (C_3)^2 \times C_6$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$9T14 \simeq (C_3)^2 \times Q_8$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$9T23 \simeq ((C_3)^2 \rtimes Q_8) \rtimes C_3$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$10T7 \simeq A_5$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$10T26 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq A_6$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$10T32 \simeq S_6$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$14T30 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_{13})$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$15T9 \simeq (C_5)^2 \times C_3$	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$15T14 \simeq (C_5)^2 \times S_3$	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Remark 1.16. In Table 1, only the abelian groups of prime exponent p appear as $H^1(k, \text{Pic } \overline{X})$. However, we find that $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ for $G = 12T31 \simeq (C_4)^2 \rtimes C_3$ and $G = 12T57 \simeq ((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_3$ by using the same technique as in the proof of Theorem 1.21.

Additionally, by using the same method of Theorem 1.21, we obtain the vanishing $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) = 0$ for the 5 Mathieu groups $M_n \leq S_n$ where $n = 11, 12, 22, 23, 24$ (see Dixon and Mortimer [DM96, Chapter 6], Gorenstein, Lyons and Solomon [GLS98, Chapter 5] for the 5 Mathieu groups):

Theorem 1.17 (Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY22, Theorem 1.17]). *Let k be a field, K/k be a separable field extension of degree n and L/k be the Galois closure of K/k . Assume that $G = \text{Gal}(L/k) = M_n \leq S_n$ ($n = 11, 12, 22, 23, 24$) is the Mathieu group of degree n and $H = \text{Gal}(L/K)$ with $[G : H] = n$. Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k of dimension $n - 1$ and X be a smooth k -compactification of T . Then $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) = 0$. In particular, if k is a number field, then $A(T) = 0$ and $\text{III}(T) = 0$.*

Let $Z(G)$ be the center of a group G , $[G, G]$ be the commutator group of G and $\text{Syl}_p(G)$ be a p -Sylow subgroup of G where p is a prime. Let $\text{Orb}_G(i)$ be the orbit of $1 \leq i \leq n$ under the action of $G \leq S_n$.

By Theorem 1.21, we obtain the following theorem which gives a necessary and sufficient condition for the Hasse norm principle for K/k where $[K : k] = n \leq 15$ and $n \neq 12$. Note that a place v of k with non-cyclic decomposition group G_v as in Theorem 1.18 must be ramified in L because if v is unramified, then G_v is cyclic.

Theorem 1.18 (Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY22, Theorem 1.18]). *Let $2 \leq n \leq 15$ be an integer with $n \neq 12$. Let k be a number field, K/k be a field extension of degree n and L/k be the Galois closure of K/k . Assume that $G = \text{Gal}(L/k) = nTm$ is a transitive subgroup of S_n , $H = \text{Gal}(L/K)$ with $[G : H] = n$ and G_v is the decomposition group of G at a place v of k . Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k of dimension $n - 1$ and X be a smooth k -compactification of T . Then $A(T) \simeq \text{III}(T) = 0$ except for the cases in Table 1. For the cases in Table 1 except for $G = 8T3$, either (a) $A(T) = 0$ and $\text{III}(T) \simeq H^1(k, \text{Pic } \overline{X})$ or (b) $A(T) \simeq H^1(k, \text{Pic } \overline{X})$ and $\text{III}(T) = 0$. For $G = 8Tm$ ($m = 9, 11, 15, 19, 22, 32$), we assume that H is the stabilizer of one of the letters in G . Then a necessary and sufficient condition for $\text{III}(T) = 0$ is given as in Table 2.*

Table 2: $\text{III}(T) = 0$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(G_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = nTm$ as in Table 1

G	$\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k such that
$4T2 \simeq V_4$	$V_4 \leq G_v$ (Tate [Tat67] for $4T2 \simeq V_4$)
$4T4 \simeq A_4$	(Kunyavskii [Kun84] for $4T4 \simeq A_4$)
$6T4 \simeq A_4$	$V_4 \leq G_v$ (Drakokhrust and Platonov [DP87])
$6T12 \simeq A_5$	
$8T3 \simeq (C_2)^3$	see the second paragraph after Theorem 1.8 (Tate [Tat67])
$8T4 \simeq D_4$	
$8T13 \simeq A_4 \times C_2$	
$8T14 \simeq S_4$	$V_4 \leq G_v$ (Tate [Tat67] for $8T4 \simeq D_4$)
$8T37 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$	
$8T2 \simeq C_4 \times C_2$	
$8T21 \simeq (C_2)^3 \rtimes C_4$	$G_v = G$ (Tate [Tat67] for $8T2 \simeq C_4 \times C_2$)
$8T31 \simeq (C_2)^4 \rtimes V_4$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap [\text{Syl}_2(G), \text{Syl}_2(G)] = 1$ with $\text{Syl}_2(G) \triangleleft G$ (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 8$ and $V_4 \cap Z(G) = 1$), (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $(C_4 \times C_2) \cap [\text{Syl}_2(G), \text{Syl}_2(G)] \simeq C_2$ (equivalently, $C_4 \times C_2$ is transitive in S_8) or (iii) $(C_2)^3 \rtimes C_4 \leq G_v$
$8T38 \simeq 8T31 \times C_3$	
$8T9 \simeq D_4 \times C_2$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 8$ and $V_4 \cap [G, G] = 1$; or (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$
$8T11 \simeq Q_8 \rtimes C_2$	$C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $C_4 \times C_2$ is transitive in S_8
$8T15 \simeq C_8 \rtimes V_4$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 8$ and $V_4 \cap [G, G] = 1$ (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 8$ and V_4 is not in A_8) or (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $(C_4 \times C_2) \cap [G, G] \simeq C_2$ (equivalently, $C_4 \times C_2$ is transitive in S_8)
$8T19 \simeq (C_2)^3 \rtimes C_4$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap Z(G) = 1$ and $V_4 \cap Z^2(G) \simeq C_2$ with the upper central series $1 \leq Z(G) \leq Z^2(G) \leq G$ (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 8$ and $V_4 \cap Z(G) = 1$); or (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $C_4 \times C_2$ is not transitive in S_8 or $[G, G] \leq C_4 \times C_2$
$8T22 \simeq (C_2)^3 \rtimes V_4$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 8$ and $V_4 \cap Z(G) = 1$ or (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $C_4 \times C_2$ is transitive in S_8
$8T32 \simeq 8T22 \times C_3$	
$9T2 \simeq (C_3)^2$	
$9T5 \simeq (C_3)^2 \rtimes C_2$	
$9T7 \simeq (C_3)^2 \rtimes C_3$	
$9T9 \simeq (C_3)^2 \rtimes C_4$	$(C_3)^2 \leq G_v$ (Tate [Tat67] for $9T2 \simeq (C_3)^2$)
$9T11 \simeq (C_3)^2 \rtimes C_6$	
$9T14 \simeq (C_3)^2 \rtimes Q_8$	
$9T23 \simeq 9T14 \times C_3$	
$10T7 \simeq A_5$	$V_4 \leq G_v$
$10T26 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$	$D_4 \leq G_v$
$10T32 \simeq S_6$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $N_{\tilde{G}}(V_4) \simeq C_8 \times (C_2 \times C_2)$ for the normalizer $N_{\tilde{G}}(V_4)$ of V_4 in \tilde{G} with the normalizer $\tilde{G} = N_{S_{10}}(G) \simeq \text{Aut}(G)$ of G in S_{10} (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 10$) or (ii) $D_4 \leq G_v$ where $D_4 \leq [G, G] \simeq A_6$
$14T30 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_{13})$	$V_4 \leq G_v$
$15T9 \simeq (C_5)^2 \rtimes C_3$	
$15T14 \simeq (C_5)^2 \rtimes S_3$	$(C_5)^2 \leq G_v$

We determine 64 cases with $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \neq 0$ when $[K : k] = 12$ as follows: (Note that there exist exactly 301 transitive subgroups $12Tm$ of S_{12} up to conjugacy (see Royle [Roy87] and [GAP]).)

Theorem 1.19 (Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY23, Theorem 1.1]). *Let k be a field, K/k be a separable field extension of degree 12 and L/k be the Galois closure of K/k . Assume that $G = \text{Gal}(L/k) = 12Tm$ ($1 \leq m \leq 301$) is a transitive subgroup of S_{12} and $H = \text{Gal}(L/K)$ with $[G : H] = 12$. Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k of dimension 11 and X be a smooth k -compactification of T . Then $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \neq 0$ if and only if G is given as in Table 3. In particular, if k is a number field and L/k is an unramified extension, then $A(T) = 0$ and $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \simeq \text{III}(T)$.*

In Table 3, $V_4 \simeq C_2 \times C_2$ is the Klein four group, Q_8 is the quaternion group of order 8, $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$ is the projective special linear group of degree 2 over the finite field \mathbb{F}_{11} of 11 elements, and $S_n(m)$ and $A_n(m)$ mean that $S_n(m) \simeq S_n = mTx \leq S_m$ and $A_n(m) \simeq A_n = mTx \leq S_m$ respectively.

Table 3: $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \simeq H^1(G, [J_{G/H}]^{fl}) \neq 0$ with $G = 12Tm$ ($1 \leq m \leq 301$)

G	$H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \simeq H^1(G, [J_{G/H}]^{fl})$
$12T2 \simeq C_6 \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T3 \simeq D_6$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T4 \simeq A_4(12)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T7 \simeq A_4(6) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T9 \simeq S_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T10 \simeq S_3 \times V_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T16 \simeq (S_3)^2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T18 \simeq S_3 \times C_6$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T20 \simeq A_4(4) \times C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T31 \simeq (C_4)^2 \rtimes C_3$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
$12T32 \simeq (C_2)^4 \rtimes C_3$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$
$12T33 \simeq A_5(12)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T34 \simeq (S_3)^2 \rtimes C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T37 \simeq (S_3)^2 \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T40 \simeq ((C_3)^2 \rtimes C_4) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T43 \simeq A_4(4) \times S_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T47 \simeq (C_3)^2 \rtimes Q_8$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T52 \simeq (A_4 \times V_4) \rtimes C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T54 \simeq (S_4 \times C_2) \rtimes C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T55 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_3) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T56 \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_3) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T57 \simeq ((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_3$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
$12T59 \simeq (C_2)^3 \rtimes A_4(6)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T61 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_2) \rtimes C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T64 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T65 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_3) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T66 \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_3) \rtimes C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T70 \simeq (S_3)^2 \times C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T71 \simeq (C_3)^3 \rtimes V_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T74 \simeq S_5(12)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T75 \simeq A_5(6) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T77 \simeq (S_3)^2 \rtimes V_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Table 3 (continued): $H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq H^1(G, [J_{G/H}]^{fl}) \neq 0$ with $G = 12Tm$ ($1 \leq m \leq 301$)

G	$H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq H^1(G, [J_{G/H}]^{fl})$
$12T88 \simeq (C_2)^4 \rtimes A_4(6)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T92 \simeq (((C_4)^2 \rtimes C_2) \rtimes C_3) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T93 \simeq (((C_4 \rtimes C_4) \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T96 \simeq (((C_4)^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T97 \simeq (((C_4)^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T100 \simeq (((C_2)^4 \rtimes C_3) \rtimes C_2) \times C_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T102 \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_3) \times C_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T117 \simeq (S_3)^3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T122 \simeq ((C_3)^2 \times Q_8) \times C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T130 \simeq (C_3)^4 \rtimes V_4 \simeq C_3 \wr V_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T132 \simeq ((C_3)^3 \times V_4) \times C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T133 \simeq (C_3)^3 \times A_4(4)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T144 \simeq (C_2)^5 \times A_4(6)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T168 \simeq (C_3)^4 \rtimes (C_2)^3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T171 \simeq (C_3)^4 \rtimes (C_4 \times C_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T172 \simeq (C_3)^4 \times D_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T174 \simeq (C_3)^4 \times Q_8$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T176 \simeq ((C_3)^3 \times C_2) \times A_4(4)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T179 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T188 \simeq (C_2)^6 \times A_4(6) \simeq C_2 \wr A_4(6)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T194 \simeq (C_3)^4 \times A_4(4) \simeq C_3 \wr A_4(4)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T210 \simeq (C_3)^4 \times (D_4 \times C_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T214 \simeq (C_3)^4 \times ((C_4 \times C_2) \times C_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T230 \simeq (C_2)^5 \times A_5(6)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T232 \simeq ((C_3)^4 \times Q_8) \times C_3$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T234 \simeq ((C_3)^4 \times C_2) \times A_4(4)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T242 \simeq (C_3)^4 \times ((C_2)^3 \times V_4)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T246 \simeq (C_3)^4 \times ((C_2)^3 \times C_4)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T255 \simeq (C_2)^6 \times A_5(6) \simeq C_2 \wr A_5(6)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T261 \simeq (S_3)^4 \times V_4 \simeq S_3 \wr V_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T271 \simeq ((C_3)^4 \times (C_2)^3) \times A_4(4)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$12T280 \simeq (S_3)^4 \times A_4(4) \simeq S_3 \wr A_4(4)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Remark 1.20. Theorem 1.19 enables us to obtain the group $T(k)/R$ of R -equivalence classes over a local field k via $T(k)/R \simeq H^1(k, \text{Pic } \overline{X}) \simeq H^1(G, [J_{G/H}]^{fl})$ for norm one tori $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ with $[K : k] = 12$ (see Colliot-Thélène and Sansuc [CTS77, Corollary 5, page 201], Voskresenskii [Vos98, Section 17.2] and Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY22, Section 7, Application 1]).

By Theorem 1.19 and Ono's theorem (see Theorem 1.9) which claims that the Hasse norm principle holds for K/k if and only if $\text{III}(T) = 0$ where $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ is the norm one torus of K/k , the Hasse norm principle holds for K/k with $[K : k] = 12$ as in the cases in Theorem 1.19 except for the cases as in Table 1. By using Drakokhrust and Platonov's method (see [HKY23, Section 6] for details) and some new useful functions of GAP [GAP] provided in [HKY23, Section 7], we will prove the following main theorem of this paper which gives a necessary and sufficient condition for the Hasse norm principle for K/k with $[K : k] = 12$:

Theorem 1.21 (Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY23, Theorem 1.3]). *Let k be a number field, K/k be a field extension of degree 12 and L/k be the Galois closure of K/k . Let $G = \text{Gal}(L/k) = 12Tm$ ($1 \leq m \leq 301$) be a transitive subgroup of S_{12} , $H = \text{Gal}(L/K)$ with $[G : H] = 12$ and G_v be the decomposition group of G at a place v of k . Let $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ be the norm one torus of K/k of dimension 11 and X be a smooth k -compactification of T . Then $A(T) \simeq \text{III}(T) = 0$ except for the 64 cases in Table 3. For the 64 cases in Table 3 except for 3 cases $G = 12T31, 12T32, 12T57$ as in Tables 4-3, 4-4, 4-5, we have either (a) $A(T) = 0$ and $\text{III}(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ or (b) $A(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and $\text{III}(T) = 0$. We assume that H is the stabilizer of one of the letters in G . Then $\text{III}(T)$ is given as in Tables 4-1 to 4-5. Moreover, for the cases in Table 4-1 and Table 4-3, $\text{III}(T)$ is also given for general $H \leq G$ with $[G : H] = 12$.*

In Tables 4-1 to 4-5, $M_{16} = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^5 \rangle$ is the modular type 2-group of order 16, $Z(G)$ is the center of a group G , $D(G)$ is the derived subgroup of G and $D^i(G) := D(D^{i-1}(G))$ is the i -th derived subgroup ($D^0(G) := G$), $\text{Syl}_p(G)$ is a p -Sylow subgroup of G where p is a prime number, $N_G(G')$ is the normalizer of a subgroup $G' \leq G$, $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup of G , i.e. the intersection of all maximal subgroups of G , and $\text{Orb}_G(i)$ is the orbit of $1 \leq i \leq n$ under the action of $G \leq S_n$.

Note that a place v of k with non-cyclic decomposition group G_v as in Tables 4-1 to 4-5 must be ramified in L because if v is unramified, then G_v is cyclic.

Table 4-1: $\text{III}(T) = 0$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = 12Tm$ as in Table 3

G	$\text{III}(T) \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and $\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k such that
$12T2 \simeq C_6 \times C_2$ $12T3 \simeq D_6$ $12T4 \simeq A_4(12)$ $12T16 \simeq (S_3)^2$ $12T18 \simeq S_3 \times C_6$ $12T20 \simeq A_4(4) \times C_3$ $12T33 \simeq A_5(12)$ $12T70 \simeq (S_3)^2 \times C_3$ $12T71 \simeq (C_3)^3 \rtimes V_4$ $12T130$ $\simeq (C_3)^4 \rtimes V_4 \simeq C_3 \wr V_4$ $12T132 \simeq ((C_3)^3 \rtimes V_4) \rtimes C_3$ $12T133 \simeq (C_3)^3 \rtimes A_4(4)$ $12T179 \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_{11})$ $12T194$ $\simeq (C_3)^4 \rtimes A_4(4) \simeq C_3 \wr A_4(4)$	$V_4 \leq G_v$ (Tate [Tat67] for $12T2, 12T3, 12T4$)
$12T7 \simeq A_4(6) \times C_2$ $12T9 \simeq S_4$ $12T74 \simeq S_5(12)$ $12T75 \simeq A_5(6) \times C_2$	$V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap D(G) = V_4$ (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$) with $D(G) \simeq V_4, A_4, A_5, A_5$ for $12T7, 12T9, 12T74, 12T75$ respectively
$12T34 \simeq (S_3)^2 \rtimes C_2$ $12T172 \simeq (C_3)^4 \rtimes D_4$	$D_4 \leq G_v$
$12T40 \simeq ((C_3)^2 \rtimes C_4) \times C_2$ $12T171 \simeq (C_3)^4 \rtimes (C_4 \times C_2)$	$C_4 \times C_2 \leq G_v$
$12T43 \simeq A_4(4) \times S_3$	$V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap S_3 = 1$ for the unique characteristic subgroup $S_3 \triangleleft G$ of order 6 (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$)
$12T47 \simeq (C_3)^2 \rtimes Q_8$ $12T122 \simeq ((C_3)^2 \rtimes Q_8) \rtimes C_3$ $12T174 \simeq (C_3)^4 \rtimes Q_8$ $12T232 \simeq ((C_3)^4 \rtimes Q_8) \rtimes C_3$	$Q_8 \leq G_v$
$12T52 \simeq (A_4 \times V_4) \rtimes C_2$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap (A_4 \times V_4) \simeq C_2$, $V_4 \cap Z(G) = 1$ and $V_4 \cap D^2(G) = 1$ for the characteristic subgroup $A_4 \times V_4 \triangleleft G$ of order 48 (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $V_4 \cap D^2(G) = 1$), (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $(C_4 \times C_2) \cap (A_4 \times C_4) \simeq V_4$ (resp. $C_4 \times C_2 \leq S_4 \times C_2$) for the characteristic subgroup $A_4 \times C_4 \triangleleft G$ (resp. $S_4 \times C_2 \triangleleft G$) of order 48 (resp. 48) (equivalently, $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$), or (iii) $D_4 \leq G_v$ where $D_4 \cap A_4 \simeq V_4$ (resp. $D^2(G) \leq D_4$) for the unique characteristic subgroup $A_4 \triangleleft G$ (resp. the characteristic subgroup $D^2(G) \simeq V_4 \triangleleft G$) of order 12 (resp. 4) (equivalently, $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$)
$12T55 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_3) \times C_2$	$C_4 \times C_4 \leq G_v$

Table 4-1 (continued): $\text{III}(T) = 0$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = 12Tm$ as in Table 3

G	$\text{III}(T) \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and $\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k such that
$12T64 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2$	(i) $D_4 \leq G_v$ where $\Phi(D^2(G)) \leq D_4$ for the unique characteristic subgroup $\Phi(D^2(G)) \simeq V_4 \triangleleft G$ of order 4 (equivalently, $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$), or (ii) $(C_4)^2 \leq G_v$
$12T65 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2$	(i) $M_{16} \leq G_v$, or (ii) $(C_4)^2 \leq G_v$
$12T96$ $\simeq (((C_4)^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2) \times C_2$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap \text{Syl}_2(D(G)) = 1$ and $V_4 \cap Z(G) = 1$ (resp. $V_4 \cap \text{Syl}_2(D(G)) = 1$ and $V_4 \cap Z(G) = 1$, resp. $V_4 \cap Z(G) = 1$ and $V_4 \cap Z(G) = 1$), for characteristic subgroups $D(G) \simeq (C_4)^2 \rtimes C_3$, $\text{Syl}_2(D(G)) \simeq (C_4)^2$, $Z(G) \simeq C_2$, $\Phi(\text{Syl}_2(D(G))) \simeq V_4 \triangleleft G$ (equivalently, $V_4 \cap Z(G) = 1$ with $Z(G) \simeq C_2$ and $V_4 \cap D(G) = 1$ with $D(G) \simeq (C_4)^2 \rtimes C_3$), (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $(C_4 \times C_2) \cap 12T55 \simeq V_4$ (resp. $(C_4 \times C_2) \cap \text{Syl}_2(12T55) \simeq V_4$) for the unique characteristic subgroup $12T55 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_3) \times C_2 \triangleleft G$ (resp. $\text{Syl}_2(12T55) \simeq (C_4)^2 \times C_2 \triangleleft G$) of order 96 (resp. 32) (equivalently, $(C_4 \times C_2) \cap Z(G) \simeq C_2$ and $(C_4 \times C_2) \cap D(G) \simeq C_2$), (iii) $D_4 \leq G_v$ where $D_4 \cap D(G) \simeq V_4$ (resp. $D_4 \cap \text{Syl}_2(D(G)) \simeq V_4$, resp. $\Phi(\text{Syl}_2(D(G))) \leq D_4$) with $\text{Syl}_2(D(G)) \simeq (C_4)^2 \triangleleft G$, $\Phi(\text{Syl}_2(D(G))) \simeq V_4 \triangleleft G$ (equivalently, $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$), or (iv) $(C_4)^2 \leq G_v$
$12T97$ $\simeq (((C_4)^2 \rtimes C_3) \rtimes C_2) \times C_2$	(i) $(C_4)^2 \leq G_v$, (ii) $C_8 \times C_2 \leq G_v$, or (iii) $M_{16} \leq G_v$ where $M_{16} \cap D(G) \simeq C_4 \times C_2$ (equivalently, $ \text{Orb}_{M_{16}}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{M_{16}}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$) with $D(G) \simeq (C_4)^2 \rtimes C_3$.
$12T117 \simeq (S_3)^3$ $12T176 \simeq ((C_3)^3 \rtimes C_2) \rtimes A_4(4)$	$V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap \text{Dih}((C_3)^3) = 1$ for the unique characteristic subgroup $\text{Dih}((C_3)^3) \simeq (C_3)^3 \rtimes C_2 \triangleleft G$ of order 54 (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$)
$12T168 \simeq (C_3)^4 \times (C_2)^3$ $12T234 \simeq ((C_3)^4 \rtimes C_2) \rtimes A_4(4)$	$V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap \text{Dih}((C_3)^4) = 1$ for the unique characteristic subgroup $\text{Dih}((C_3)^4) \simeq (C_3)^4 \rtimes C_2 \triangleleft G$ of order 162 (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$)
$12T246 \simeq (C_3)^4 \times ((C_2)^3 \rtimes C_4)$	$\text{Syl}_2(G) \simeq (C_2^3) \rtimes C_4 \leq G_v$
$12T261 \simeq (S_3)^4 \rtimes V_4 \simeq S_3 \wr V_4$ $12T280$ $\simeq (S_3)^4 \rtimes A_4(4) \simeq S_3 \wr A_4(4)$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $V_4 \cap (S_3)^4 = 1$ (resp. $V_4 \cap D(12T261) = 1$) for the unique characteristic subgroup $(S_3)^4 \triangleleft G$ (resp. $D(12T261) \simeq (C_3)^4 \rtimes (C_2)^3 \triangleleft G$) of order 1296 (resp. 648) (equivalently, $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$), (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $(C_4 \times C_2) \cap (S_3)^4 \simeq C_2$ (resp. $(C_4 \times C_2) \cap D(12T261) \simeq C_2$) with $(S_3)^4 \triangleleft G$ (resp. $D(12T261) \simeq (C_3)^4 \rtimes (C_2)^3 \triangleleft G$) (equivalently, $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$), (iii) $D_4 \leq G_v$ where $D_4 \cap (S_3)^4 \simeq C_2$ with $(S_3)^4 \triangleleft G$ (equivalently, $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$), (iv) $Q_8 \leq G_v$, or (v) $(C_2)^3 \rtimes C_3 \leq G_v$

Table 4-2: $\text{III}(T) = 0$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = 12Tm$ as in Table 3

G	$\text{III}(T) \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and $\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k such that
$12T10 \simeq S_3 \times V_4$ $12T37 \simeq (S_3)^2 \times C_2$	$V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$
$12T54 \simeq (S_4 \times C_2) \rtimes C_2$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $V_4 \cap D(G) \simeq C_2$ with $D(G) \simeq A_4 \times C_2$, (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, or (iii) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$, $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, and $D^2(G) \leq D_4$ with $D^2(G) \simeq V_4 \triangleleft G$
$12T56 \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_3) \times C_2$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and (i-1) $V_4 \cap D(G) \simeq C_2$ with $D(G) \simeq (C_2)^4 \triangleleft G$, $V_4 \cap Z(G) = 1$ with $Z(G) \simeq C_2 \triangleleft G$ and any non-zero element of V_4 is a product of 4 (different) transpositions or, (i-2) $V_4 \leq D(G)$, $V_4 \cap Z(G) = 1$ and V_4 is not a normal subgroup of $N_{S_{12}}(G)$ with $N_{S_{12}}(G) \simeq (((C_2)^4 \rtimes C_2) \times C_2) \rtimes C_3 \times C_2$
$12T59 \simeq (C_2)^3 \rtimes A_4(6)$ $12T88 \simeq (C_2)^4 \rtimes A_4(6)$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $V_4 \cap Z(\text{Syl}_2(G)) = 1$ for the characteristic subgroup $Z(\text{Syl}_2(G)) \simeq V_4 \triangleleft G$ of order 4 with $\text{Syl}_2(G) \simeq (C_2)^3 \rtimes V_4 \triangleleft G$, or (ii) $(C_4 \times C_2) \rtimes C_2 \leq G_v$
$12T61 \simeq ((C_4)^2 \rtimes C_2) \rtimes C_3$	(i) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, and $D_4 \cap N_8 \simeq C_2$ for the unique characteristic subgroup $N_8 \simeq (C_2)^3 \triangleleft G$ of order 8, or (ii) $(C_4)^2 \leq G_v$
$12T66 \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_3) \times C_2$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $N_G(V_4) \simeq (C_2)^4 \rtimes C_3$, or (ii) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$
$12T77 \simeq (S_3)^2 \times V_4$ $12T210 \simeq (C_3)^4 \times (D_4 \times C_2)$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$, (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$, or (iii) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$
$12T92$ $\simeq (((C_4)^2 \rtimes C_2) \times C_3) \times C_2$	(i) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, and $D_4 \cap N_{16} \simeq C_2$ for the unique characteristic subgroup $N_{16} \simeq (C_2)^4 \triangleleft G$ of order 16, or (ii) $(C_4)^2 \leq G_v$
$12T93$ $\simeq (((C_4 \rtimes C_4) \times C_2) \times C_2) \times C_3$	(i) $C_4 \rtimes C_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{C_4 \rtimes C_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{C_4 \rtimes C_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, or (ii) $(C_4 \rtimes C_2) \rtimes C_4 \leq G_v$
$12T100$ $\simeq (((C_2)^4 \rtimes C_3) \times C_2) \times C_2$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and (i-1) $N_G(V_4) \simeq (C_2)^4$, (i-2) $N_G(V_4) \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_3) \times C_2$, or (i-3) $N_G(V_4) \simeq (C_2)^5$ and any non-zero element of V_4 is a product of 4 (different) transpositions, or (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, or (iii) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$

Table 4-2 (continued): $\text{III}(T) = 0$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = 12Tm$ as in Table 3

G	$\text{III}(T) \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and $\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k such that
$12T102 \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_3) \rtimes C_4$	<p>(i) $V_4 \leq G_v$ where $\text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and (i-1) $V_4 \cap D(G) \simeq C_2$ with $D(G) \simeq (C_2)^4 \rtimes C_3 \triangleleft G$, $V_4 \cap Z(G) = 1$ with $Z(G) \simeq C_2 \triangleleft G$ and any non-zero element of V_4 is a product of 4 (different) transpositions or, (i-2) $V_4 \leq D(G)$, $V_4 \cap Z(G) = 1$ and V_4 is not a normal subgroup of G,</p> <p>(ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $\text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $\text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, or</p> <p>(iii) $G_{16,3} := (C_4 \times C_2) \rtimes C_2 \leq G_v$ where $\text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $\text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$</p>
$12T144 \simeq (C_2)^5 \rtimes A_4(6)$	<p>(i) $V_4 \leq G_v$ where $\text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$, $V_4 \cap D^2(G) = 1$ with $D^2(G) \simeq (C_2)^3 \triangleleft G$ and $N_G(V_4) \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_3) \times C_2$ is transitive in S_{12},</p> <p>(ii) $(C_4)^2 \leq G_v$,</p> <p>(iii) $G_{16,3} := (C_4 \times C_2) \rtimes C_2 \leq G_v$ where $\text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$,</p> <p>(iv) $C_4 \rtimes C_4 \leq G_v$, or</p> <p>(v) $(C_4 \times C_2) \rtimes C_4 \leq G_v$</p>
$12T188 \simeq (C_2)^6 \rtimes A_4(6) \simeq C_2 \wr A_4(6)$	<p>(i) $V_4 \leq G_v$ where $\text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $V_4 \cap E_{64} = 1$ for the unique characteristic subgroup $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$ of order 64,</p> <p>(ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $\text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$ and $\text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 2$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$,</p> <p>(iii) $D_4 \leq G_v$ where $\text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 4 (resp. 8) of $1 \leq i \leq 12$, $\text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 8 (resp. 4) of $1 \leq i \leq 12$, $D_4 \cap E_{64} \simeq C_2$ (resp. C_2) with $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$ and $D_4 \cap ((C_4)^2 \times C_2) \simeq C_2$ (resp. C_4) for the unique characteristic subgroup $(C_4)^2 \times C_2 \triangleleft G$ of order 32,</p> <p>(iv) $(C_4)^2 \leq G_v$ where (iv-1) $\text{Orb}_{(C_4)^2}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$, $\text{Orb}_{(C_4)^2}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$ or (iv-2) $\text{Orb}_{(C_4)^2}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $(C_4)^2 \cap E_{64} \simeq (C_4)^2$ with $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$,</p> <p>(v) $G_{16,3} := (C_4 \times C_2) \rtimes C_2 \leq G_v$ where (v-1) $\text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$, $G_{16,3} \cap G_{64} \simeq (C_4 \times C_2) \rtimes C_2$ (resp. $C_4 \times C_2$), $G_{16,3} \cap G_{128} \simeq (C_2)^3$ (resp. $C_4 \times C_2$) and $G_{16,3} \cap E_{64} \simeq V_4$ (resp. V_4), or (v-2) $\text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$, $\text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, $G_{16,3} \cap G_{64} \simeq V_4$ (resp. $(C_2)^3$), $G_{16,3} \cap G_{128} \simeq C_4 \times C_2$ (resp. $(C_4 \times C_2) \rtimes C_2$) and $G_{16,3} \cap E_{64} \simeq V_4$ (resp. V_4) for the unique characteristic subgroup $G_{64} \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_2) \times C_2 \triangleleft G$ of order 64, the unique characteristic subgroup $G_{128} \simeq (((C_2)^4 \rtimes C_2) \times C_2) \times C_2 \triangleleft G$ of order 128 and $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$, or</p> <p>(vi) $C_4 \rtimes C_4 \leq G_v$ where (vi-1) $\text{Orb}_{C_4 \rtimes C_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$, $\text{Orb}_{C_4 \rtimes C_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$ or (vi-2) $\text{Orb}_{C_4 \rtimes C_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $(C_4 \rtimes C_4) \cap ((C_4)^2 \times C_2) \simeq C_4 \times C_2$ for the unique characteristic subgroup $(C_4)^2 \times C_2 \triangleleft G$ of order 32, or</p> <p>(vii) $(C_4 \times C_2) \rtimes C_4 \leq G_v$</p>

Table 4-2 (continued): $\text{III}(T) = 0$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = 12Tm$ as in Table 3

G	$\text{III}(T) \leq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and $\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k such that
$12T214$ $\simeq (C_3)^4 \rtimes ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2)$	(i) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, (ii) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, or (iii) $Q_8 \leq G_v$
$12T230 \simeq (C_2)^5 \rtimes A_5(6)$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $V_4 \cap E_{32} = 1$ for the unique characteristic subgroup $E_{32} \simeq (C_2)^5 \triangleleft G$ of order 32, (ii) $(C_4)^2 \leq G_v$, (iii) $G_{16,3} := (C_4 \times C_2) \rtimes C_2 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$, $ \text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$ and $G_{16,3} \cap E_{32} \simeq V_4$ for $E_{32} \simeq (C_2)^5 \triangleleft G$, (iv) $C_4 \rtimes C_4 \leq G_v$, or (v) $(C_4 \times C_2) \rtimes C_4 \leq G_v$
$12T242$ $\simeq (C_3)^4 \rtimes ((C_2)^3 \rtimes V_4)$ $12T271$ $\simeq ((C_3)^4 \rtimes (C_2)^3) \rtimes A_4(4)$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$, (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, (iii) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 8$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, or (iv) $Q_8 \leq G_v$
$12T255$ $\simeq (C_2)^6 \rtimes A_5(6) \simeq C_2 \wr A_5(6)$	(i) $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $V_4 \cap E_{64} = 1$ for the unique characteristic subgroup $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$ of order 64, (ii) $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$, $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 2$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$ and $(C_4 \times C_2) \cap E_{64} \simeq C_2$ for $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$, (iii) $D_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 4$ for 4 (resp. 8) of $1 \leq i \leq 12$, $ \text{Orb}_{D_4}(i) = 2$ for 8 (resp. 4) of $1 \leq i \leq 12$, $D_4 \cap E_{64} \simeq C_2$ (resp. C_2) for $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$ and $N_G(D_4) \simeq D_4 \times (C_2)^3$ (resp. $D_4 \times V_4$), (iv) $(C_4)^2 \leq G_v$ where (iv-1) $ \text{Orb}_{(C_4)^2}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$, $ \text{Orb}_{(C_4)^2}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$ or (iv-2) $ \text{Orb}_{(C_4)^2}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $(C_4)^2 \leq D(G)$ with $D(G) \simeq (C_2)^5 \rtimes A_5 \triangleleft G$, (v) $G_{16,3} := (C_4 \times C_2) \rtimes C_2 \leq G_v$ where (v-1) $ \text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$, $ \text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$ and $G_{16,3} \cap E_{64} \simeq V_4$ for $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$ or (v-2) $ \text{Orb}_{G_{16,3}}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$ $G_{16,3} \cap E_{64} \simeq V_4$ with $E_{64} \simeq (C_2)^6 \triangleleft G$, and $N_G(G_{16,3}) \simeq ((C_2)^4 \rtimes C_2) \times C_2$ or $((C_4 \times V_4) \rtimes C_2) \times C_2$, (vi) $C_4 \rtimes C_4 \leq G_v$ where (vi-1) $ \text{Orb}_{C_4 \rtimes C_4}(i) = 4$ for 8 of $1 \leq i \leq 12$, $ \text{Orb}_{C_4 \rtimes C_4}(i) = 2$ for 4 of $1 \leq i \leq 12$ or (vi-2) $ \text{Orb}_{C_4 \rtimes C_4}(i) = 4$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $C_4 \rtimes C_4 \leq D(G)$ with $D(G) \simeq (C_2)^5 \rtimes A_5 \triangleleft G$, or (vii) $(C_4 \times C_2) \rtimes C_4 \leq G_v$

Table 4-3: $\text{III}(T)$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = 12T31$ as in Table 3

G	$\text{III}(T) \leq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
$12T31 \simeq (C_4)^2 \rtimes C_3$	(I) $\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k such that $(C_4)^2 \leq G_v$; (II) $\text{III}(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ if and only if there exists a place v of k such that $V_4 \leq G_v$ and (I) does not hold

Table 4-4: $\text{III}(T)$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = 12T57$ as in Table 3

G	$\text{III}(T) \leq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
$12T57 \simeq ((C_4 \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_3$	(I) $\text{III}(T) = 0$ if and only if there exists a place v of k such that $\text{Syl}_2(G) \simeq (C_4 \times C_2) \rtimes C_4 \leq G_v$; (II) $\text{III}(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ if and only if there exists a place v of k such that $C_4 \times C_2 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 4$ for 4 (resp. 8) of $1 \leq i \leq 12$ and $ \text{Orb}_{C_4 \times C_2}(i) = 2$ for 8 (resp. 4) of $1 \leq i \leq 12$ and (I) does not hold

Table 4-5: $\text{III}(T)$ for $T = R_{K/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ and $G = \text{Gal}(L/k) = 12T32$ as in Table 3

G	$\text{III}(T) \leq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$
$12T32 \simeq (C_2)^4 \rtimes C_3$	(I) $\text{III}(T) = 0$ if and only if (I-i) there exists a place v of k such that $\text{Syl}_2(G) \simeq (C_2)^4 \leq G_v$, or (I-ii) there exist places v_1, v_2 of k such that $V_4 \simeq V_4^{(1)} \leq G_{v_1}$, $V_4 \simeq V_4^{(2)} \leq G_{v_2}$ where $ \text{Orb}_{V_4^{(1)}}(i) = \text{Orb}_{V_4^{(2)}}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and $V_4^{(1)} \neq V_4^{(2)}$; (II) $\text{III}(T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ if and only if there exists a place v of k such that $V_4 \leq G_v$ where $ \text{Orb}_{V_4}(i) = 2$ for any $1 \leq i \leq 12$ and (I) does not hold

Remark 1.22. As a consequence of Theorem 1.21, we obtain the Tamagawa number $\tau(T)$ of norm one tori $T = R_{k/k}^{(1)}(\mathbb{G}_m)$ over a number field k via Ono’s formula $\tau(T) = |H^1(G, J_{G/H})|/|\text{III}(T)|$ where $H^1(G, J_{G/H})$ is given as in Section 9 (Appendix) of the arXiv version (arXiv:1910.01469) of [HKY22] (see Ono [Ono63, Main theorem, page 68], Voskresenskii [Vos98, Theorem 2, page 146] and Hoshi, Kanai and Yamasaki [HKY22, Section 8, Application 2]).

References

- [Bar81a] H.-J. Bartels, *Zur Arithmetik von Konjugationsklassen in algebraischen Gruppen*, J. Algebra **70** (1981) 179–199.
- [Bar81b] H.-J. Bartels, *Zur Arithmetik von Diedergruppenerweiterungen*, Math. Ann. **256** (1981) 465–473.
- [But93] G. Butler, *The transitive groups of degree fourteen and fifteen*, J. Symbolic Comput. **16** (1993) 413–422.
- [BM83] G. Butler, J. McKay, *The transitive groups of degree up to eleven*, Comm. Algebra **11** (1983) 863–911.
- [CT07] J.-L. Colliot-Thélène, *Lectures on Linear Algebraic Groups*, Beijing lectures, Moning side centre, April 2007, <https://www.math.u-psud.fr/~colliot/BeijingLectures2Juin07.pdf>.
- [CTHS05] J.-L. Colliot-Thélène, D. Harari, A. N. Skorobogatov, *Compactification équivariante d’un tore (d’après Brylinski et Künnemann)*, Expo. Math. **23** (2005) 161–170.
- [CTS77] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977) 175–229.
- [CTS87] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori: Applications*, J. Algebra **106** (1987) 148–205.
- [CTS07] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, Algebraic groups and homogeneous spaces, 113–186, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., 19, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.
- [DM96] J. D. Dixon, B. Mortimer, *Permutation groups*, Graduate Texts in Mathematics, 163. Springer-Verlag, New York, 1996. xii+346 pp.
- [DP87] Yu. A. Drakokhrust, V. P. Platonov, *The Hasse norm principle for algebraic number fields*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **50** (1986) 946–968; translation in Math. USSR-Izv. **29** (1987) 299–322.
- [EM75] S. Endo, T. Miyata, *On a classification of the function fields of algebraic tori*, Nagoya Math. J. **56** (1975) 85–104. Corrigenda: Nagoya Math. J. **79** (1980) 187–190.
- [GAP] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.9.3; 2018. (<http://www.gap-system.org>).
- [Ger77] F. Gerth III, *The Hasse norm principle in metacyclic extensions of number fields*, J. London Math. Soc. (2) **16** (1977) 203–208.
- [Ger78] F. Gerth III, *The Hasse norm principle in cyclotomic number fields*, J. Reine Angew. Math. **303/304** (1978) 249–252.
- [GLS98] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups*, Number 3, Part I, Chapter A: Almost simple \mathcal{K} -groups, Mathematical Surveys and Monographs, 40.3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, xvi+419 pp.

- [Gur78a] S. Gurak, *On the Hasse norm principle*, J. Reine Angew. Math. **299/300** (1978) 16–27.
- [Gur78b] S. Gurak, *The Hasse norm principle in non-abelian extensions*, J. Reine Angew. Math. **303/304** (1978) 314–318.
- [Gur80] S. Gurak, *The Hasse norm principle in a compositum of radical extensions*, J. London Math. Soc. (2) **22** (1980) 385–397.
- [Has31] H. Hasse, *Beweis eines Satzes und Wiederlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1931) 64–69.
- [Hir64] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II.*, Ann. of Math. (2) **79** (1964) 109–203; 205–326.
- [HKY22] A. Hoshi, K. Kanai, A. Yamasaki, *Norm one tori and Hasse norm principle*, Math. Comp. **91** (2022) 2431–2458.
- [HKY23] A. Hoshi, K. Kanai, A. Yamasaki, *Norm one tori and Hasse norm principle, II: Degree 12 case*, J. Number Theory **244** (2023) 84–110.
- [HY17] A. Hoshi, A. Yamasaki, *Rationality problem for algebraic tori*, Mem. Amer. Math. Soc. **248** (2017) no. 1176, v+215 pp.
- [KMRT98] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The book of involutions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, xxii+593 pp.
- [Kun84] B. E. Kunyavskii, *Arithmetic properties of three-dimensional algebraic tori*, (Russian) Integral lattices and finite linear groups, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **116** (1982) 102–107, 163; translation in J. Soviet Math. **26** (1984) 1898–1901.
- [Kun90] B. E. Kunyavskii, *Three-dimensional algebraic tori*, Selecta Math. Soviet. **9** (1990) 1–21.
- [Kun07] B. E. Kunyavskii, *Algebraic tori — thirty years after*, Vestnik Samara State Univ. (2007) 198–214.
- [Mac20] A. Macedo, *The Hasse norm principle for A_n -extensions*, J. Number Theory **211** (2020) 500–512.
- [Man74] Yu. I. Manin, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, North-Holland Mathematical Library 4, North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [Ono61] T. Ono, *Arithmetic of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **74** (1961) 101–139.
- [Ono63] T. Ono, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. of Math. (2) **78** (1963) 47–73.
- [Pla82] V. P. Platonov, *Arithmetic theory of algebraic groups*, (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **37** (1982) 3–54; translation in Russian Math. Surveys **37** (1982) 1–62.
- [PR94] V. P. Platonov, A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen, Pure and applied mathematics, 139, Academic Press, 1994.
- [Roy87] G. F. Royle, *The transitive groups of degree twelve*, J. Symbolic Comput. **4** (1987) 255–268.
- [Sal84] D. J. Saltman, *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Israel J. Math. **47** (1984) 165–215.
- [Sal99] D. J. Saltman, *Lectures on division algebras*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 94, Published by American Mathematical Society, Providence, RI; on behalf of Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1999. viii+120 pp.

- [San81] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, (French) J. Reine Angew. Math. **327** (1981) 12–80.
- [Tat67] J. Tate, *Global class field theory*, Algebraic Number Theory, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union, Edited by J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, 162–203, Academic Press, London; Thompson Book Co., Inc., Washington, D.C. 1967.
- [Vos67] V. E. Voskresenskii, *On two-dimensional algebraic tori II*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967) 711–716; translation in Math. USSR-Izv. **1** (1967) 691–696.
- [Vos69] V. E. Voskresenskii, *The birational equivalence of linear algebraic groups*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **188** (1969) 978–981; erratum, ibid. 191 1969 nos., 1, 2, 3, vii; translation in Soviet Math. Dokl. **10** (1969) 1212–1215.
- [Vos70] V. E. Voskresenskii, *Birational properties of linear algebraic groups*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970) 3–19; translation in Math. USSR-Izv. **4** (1970) 1–17.
- [Vos74] V. E. Voskresenskii, *Stable equivalence of algebraic tori*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** (1974) 3–10; translation in Math. USSR-Izv. **8** (1974) 1–7.
- [Vos83] V. E. Voskresenskii, *Projective invariant Demazure models*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982) 195–210, 431; translation in Math USSR-Izv. **20** (1983) 189–202.
- [Vos88] V. E. Voskresenskii, *Maximal tori without affect in semisimple algebraic groups*, (Russian) Mat. Zametki **44** (1988) 309–318; translation in Math. Notes **44** (1988) 651–655.
- [Vos98] V. E. Voskresenskii, *Algebraic groups and their birational invariants*, Translated from the Russian manuscript by Boris Kunyavskii, Translations of Mathematical Monographs, 179. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [VK84] V. E. Voskresenskii, B. E. Kunyavskii, *Maximal tori in semisimple algebraic groups*, Kuibyshev State Inst., Kuibyshev (1984). Deposited in VINITI March 5, 1984, No. 1269-84 Dep. (Ref. Zh. Mat. (1984), 7A405 Dep.).

Akinari Hoshi
 Department of Mathematics
 Niigata University, Niigata 950–2181, Japan
 E-mail: hoshi@math.sc.niigata-u.ac.jp
 Web: <http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/>