

第67回 代数学シンポジウム報告集

京都大学数理解析研究所+Zoom 配信

2022年8月30日～9月2日

2023年2月13日発行

2022年度 第67回 代数学シンポジウム 報告集

本書は令和4年8月30日から9月2日に京都大学数理解析研究所 420 教室での現地開催と Zoom 配信によるハイブリッド方式で開催された第67回代数学シンポジウムの報告集です。

記

日程：2022年8月30日（火）～9月2日（金）
会場：京都大学数理解析研究所 420 教室+Zoom 配信
開催方法：現地開催と Zoom 配信によるハイブリッド方式

(<https://mathsoc.jp/section/algebra/algsympo.html>)

会場責任者：森脇 淳

プログラム責任者：[群論・表現論] 山内 博・柳田 伸太郎 [数論] 原 隆・大野 泰生
[代数幾何] 岡田 拓三・渡邊 究 [環論] 早坂 太・神田 遼

シンポジウム責任者：小島 秀雄（連絡責任評議員）

プログラム

8月30日（火）

9:45–10:45 音喜多 純拓（千葉大学）

群環の中心とイデアル

11:00–12:00 森脇 湧登（理化学研究所）

二次元共形場理論の定式化とその構成

13:30–14:30 立谷 洋平（弘前大学）

代数的独立性の判定条件とその応用

14:45–15:45 鈴木 美裕（金沢大学）

周期積分と関数等式

16:00–17:00 太田 和惟（大阪大学）

惰性的素数における CM 楕円曲線の反円分岩澤理論

8月31日（水）

*9:45–10:45 朝倉 政典（北海道大学）

超幾何モチーフの1-拡大

*11:00–12:00 加塩 朋和（東京理科大学）

ガンマ関数の関数等式と CM 周期の単項関係式の対応とその応用

*13:30–14:30 中西 知樹（名古屋大学）

団代数と団散乱図式

*14:45–15:45 清水 健一（芝浦工業大学）

非半単純モジュラーテンソル圏

16:00–17:00 直井 克之（東京農工大学）

一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性と圏同値

9月1日(木)

*9:45–10:45 川北 真之 (京都大学数理解析研究所)

3次元の双有理幾何

*11:00–12:00 金銅 誠之 (名古屋大学)

Kummer surfaces and quadratic line complexes in characteristic 2

*13:30–14:30 源 泰幸 (大阪公立大学)

Quiver Heisenberg Algebras: a cubical analogue of preprojective algebras

*14:45–15:45 居相 真一郎 (北海道教育大学)

ブローアップ代数のゴレンシュタイン性について

16:00–17:00 長峰 孝典 (小山工業高等専門学校)

Samuel による UFD 判定の一般化とその応用

9月2日(金)

9:45–10:45 菊田 康平 (大阪大学)

K3 曲面の導来圏の自己同値群

11:00–12:00 橋詰 健太 (京都大学)

On lc-trivial fibrations with log big moduli parts

13:30–14:30 中村 勇哉 (東京大学)

hyperquotient 特異点の minimal log discrepancy

14:45–15:45 土谷 昭善 (東邦大学)

偏極トーリック多様体の断面種数と格子点の数え上げ

16:00–17:00 榎本 悠久 (大阪公立大学)

加群圏の部分圏のなす束の組合せ論

「*」の付いた講演は、専門分野以外の方も対象とした、サーベイなどを含む講演です。

目次

| | |
|--|-----|
| 音喜多 純拓 | |
| 群環の中心とイデアル | 6 |
| 森脇 湧登 | |
| 二次元共形場理論の定式化とその構成 | 10 |
| 立谷 洋平 | |
| 代数的独立性の判定条件とその応用 | 19 |
| 鈴木 美裕 | |
| 周期積分と関数等式 | 35 |
| 太田 和惟 | |
| 惰性的素数における CM 楕円曲線の反円分岩澤理論 | 47 |
| 朝倉 政典 | |
| 超幾何モチーフの 1-拡大 | 63 |
| 加塩 朋和 | |
| ガンマ関数の関数等式と CM 周期の単項関係式の対応とその応用 | 73 |
| 中西 知樹 | |
| 団代数と団散乱図式 | 85 |
| 清水 健一 | |
| 非半単純モジュラーテンソル圏 | 105 |
| 直井 克之 | |
| 一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性と圏同値 | 125 |
| 川北 真之 | |
| 3次元の双有理幾何 | 141 |
| 金銅 誠之 | |
| Kummer surfaces and quadratic line complexes in characteristic 2 | 153 |
| 源 泰幸 | |
| Quiver Heisenberg Algebras: a cubical analogue of preprojective algebras | 163 |
| 居相 真一郎 | |
| ブローアップ代数のゴレンシュタイン性について | 180 |
| 長峰 孝典 | |
| Samuel による UFD 判定の一般化とその応用 | 200 |
| 菊田 康平 | |
| K3 曲面の導来圏の自己同値群 | 213 |
| 橋詰 健太 | |
| On lc-trivial fibrations with log big moduli parts | 228 |
| 中村 勇哉 | |
| hyperquotient 特異点の minimal log discrepancy | 241 |
| 土谷 昭善 | |
| 偏極トーリック多様体の断面種数と格子点の数え上げ | 251 |
| 榎本 悠久 | |
| Combinatorics of lattices of subcategories of a module category | 259 |

群環の中心とイデアル

音喜多純拓 (千葉大学大学院理学研究院)

本稿は第 67 回代数学シンポジウム (京都大学数理解析研究所, 2022/8/30) における筆者の講演 (タイトルは上と同じ) の内容をまとめた概説である.

以下では G を有限群, k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とする. G の表現について考えるため, 一般の多元環の表現論と同様, 群環 kG をブロック分解する. すなわち kG を両側加群として直既約分解し, その直和因子の 1 つを B とし, ブロックと呼ぶ. 本分野では多元環の分離拡大から派生した概念である「不足群」を用いて, B の表現論的性質や環論的構造を解明する研究が進められており, 例えば巡回不足群を持つブロックの決定などが代表的な成果である (次章参照). 本稿で紹介するのはブロックの中心に関する筆者の研究であり, 筆者自身による予想や近年の結果を 3 章で述べる. この分野のより詳しい解説については永尾・津島「有限群の表現」(裳華房) を参照していただきたい.

1 不足群

B を群環 kG のブロックとする. G の部分群 H に対し, 自然な作用の制限によって kG , および B は両側 kH -加群と見なせる. このとき全射な B -両側加群としての準同型写像

$$\mu_H : B \otimes_{kH} B \rightarrow B, \quad \beta_1 \otimes \beta_2 \mapsto \beta_1 \beta_2$$

が存在するが, これはどのような場合に分裂するだろうか? ここでは $|H \setminus G|$ が p と素と仮定しよう. そして τ を

$$\tau : B \rightarrow B \otimes_{kH} B, \quad \beta \mapsto \frac{1}{|H \setminus G|} \sum_{t \in H \setminus G} \beta t^{-1} \otimes t \beta$$

(ここで b は B のブロック冪等元. この写像が well-defined であることの説明は省略) とすると $\mu_H \circ \tau$ が恒等写像となるので μ_H は分裂する (したがって特に G の Sylow p -部分群 S に対して μ_S は分裂する). では, この写像を用いて B の「不足群」を定義しよう.

定義 1.1. μ_H が分裂する G の部分群 H の中で極小なもの D を B の不足群 (defect group) という.

上記の理由により, 不足群は p -群として選べる. またすべての不足群は G -共役であることが知られている. 共役な群は同型であるから, 本質的には不足群はブロックに対して一意的に定まる p -群であると考えてよい. D の位数が p^d のとき d を不足数 (defect) という. 上の定義は多元環の分離拡大から派生した概念であり, B が「分離的」という性質にどの程度近い (または離れている) かを G の部分群を用いて測る目的がある. 例えば D が自明な群であるのは B が (通常の意味で) 分離的 k -多元環の場合に限り, このとき B は単純環である. 他にブロックと不足群の関係について知られている代表的な例としては以下の結果がある.

定理 1.2 (Rickard [8]). B が有限表現型となるのは D が巡回群のとき, かつそのときに限る. このとき B が

群環 kM と導来同値となるようなメタ巡回群 M が存在する. ここで M は D と巡回群 I の半直積で, I は D に忠実に作用し, 位数は $p-1$ の約数.

定理 1.3 (Erdmann [1]). $p = 2$, D が位数 4 の初等可換群のとき, B は kD , または kA_4 (ここで A_4 は 4 次交代群) に導来同値である. このとき B は tame 表現型である.

この他に B が tame 表現型になる場合として $p = 2$ で D が二面体群, 一般四元数群, 準二面体群の場合がある.

2 ブロックの中心

この章では本稿の主題であるブロックの中心と不足群の関係性について述べる. 前章と同様, B をブロック, その不足群を D とする. このとき B の中心 ZB は可換な局所環であり, その Jacobson 根基 J はただ一つの極大イデアルである. ZB の埋め込み次元 (embedding dimension, J/J^2 の k -次元) を r とし, $r \geq 1$ と仮定すると, J は r 個の元 x_1, \dots, x_r で生成される. このとき ZB の任意の元は, これらの積と単位元の線形和で表されるので, 多元環として次のように書ける:

$$ZB \simeq k[X_1, \dots, X_r \mid X_1, \dots, X_r \text{ の関係式}] \quad (\text{ただし } r = 0 \text{ のときは } ZB \simeq k)$$

ここで ZB の Loewy 列の長さ (Loewy length) を L とすると

$$L := \min\{l \geq 1 \mid J^l = 0\} = \max\{\deg(f) \mid f \in (\text{上の同型における右辺})\} + 1$$

である. では ZB の構造を決定できるいくつかの例を挙げよう.

例 1 D が自明な群の場合は $ZB \simeq k$.

例 2 $p = 2$, D が位数 2 の巡回群の場合. このとき $ZB \simeq kD \simeq k[X \mid X^2 = 0]$.

例 3 $p = 3$, D が位数 3 の巡回群の場合. このとき定理 1.2 より B は kD , または kS_3 (ただし S_3 は 3 次対称群) に導来同値である. 前者の場合は $ZB \simeq kD \simeq k[X \mid X^3 = 0]$. 後者の場合において S_3 の関係式を

$$\langle g, h \mid g^3 = h^2 = 1, gh = hg^2 \rangle$$

とすると S_3 の共役類は $\{1\}, \{g, g^2\}, \{h, gh, g^2h\}$ なので kS_3 の中心は $1, U := g + g^2, V := h + gh + g^2h$ を k -基底に持つ. ここで基底を $1, 1+U, V$ に取り直すと

$$\begin{aligned} (1+U)^2 &= 1 + 2U + U^2 = 1 + 2U + (g^2 + 2 + g) = 1 + 2U + (2+U) = 0, \\ V^2 &= \{(1+U)h\}^2 = (1+U)h(1+U)h = (1+U)^2h^2 = 0, \\ (1+U)V &= (1+U)\{(1+U)h\} = 0 \end{aligned}$$

より $ZB \simeq k[X, Y \mid X^2 = Y^2 = XY = 0]$ である.

この例で見たように ZB の構造を完全に決定できるのは不足群が特別な構造を持ついくつかの場合に限られている. そこで X_1, \dots, X_r に成り立つ関係式を探し, ブロックの解明に役立てようというのが本研究の動機である. すでに知られている性質として以下のものがある.

定理 2.1 (Külshammer [2], Okuyama [5]). 記号は上の通りとする.

- (1) D の指数 (exponent) を p^e とすると, J のすべての元は p^e 乗で 0 となる. 特に任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $(X_i)^{p^e} = 0$.
- (2) ZB の Loewy 列の長さ L は p^d 以下である (d は不足数).

ここで「 D の指数 (exponent)」とは, D の各元の位数の最大値, すなわち D の極大巡回部分群の位数である (一般の群の指数の定義はこれとは異なるが, p -群の場合はこのように解釈して差し支えない).

これらの結果に基づいて次章では ZB の Loewy 列に関する筆者自身の予想を紹介し, 現在までに得られている成果を述べる.

3 予想と結果

前章までと同様, B は kG のブロックで不足群 D を持つとする. また p^d, p^e をそれぞれ D の位数, および指数とする (すなわち d は不足数). ここでは ZB の Loewy 列の長さに関する問題を提起する. 定理 2.1 に基づき, d と e を用いて効率良く上限を与える方法を考えたい. そこで筆者が [6] において研究したのが次の予想である.

予想 (L) ZB の Loewy 列の長さは $m(p^e - 1) + p^n$ 以下ではないか? (ここで m, n は $d = me + n, e > n$ を満たす非負整数. ただし $d = 0$ の場合は除く)

この上限の式は常に p^d 以下になるので, この予想が正しければ定理 2.1 (2) の精密化になる. またこの式は d, e の単調増加関数になっている. 次の定理でこの予想が解決している場合を紹介する (Külshammer-Otokita-Sambale [3], Külshammer-Sambale [4], Otokita [6]).

定理 3.1. B , および D が以下のいずれかの条件を満たせば予想 (L) は正しい.

- (1) D が可換群
- (2) $p = 2, D$ がメタ巡回群
- (3) B が巡回超焦点部分群 (cyclic hyperfocal subgroup) を持つ. (例えば $p \neq 2, D$ がメタ巡回群の場合)
- (4) $p = 2, |D| \leq 16$

本稿の最後に, 上の予想とは別に, 下限に関する研究を挙げる.

定理 3.2 (Otokita [7]). D を可換群とし, $q = (p^e - 1)/(p - 1)$ とすると $z^q \neq 0$ となる ZB の Jacobson 根基の元 z が存在する. したがって ZB の Loewy 列の長さは $q + 1$ (すなわち $(p^e + p - 2)/(p - 1)$) 以上である.

参考文献

- [1] K. Erdmann, *Blocks whose defect groups are Klein four groups: a correction*, J. Algebra **76** (1982), 505–518.
- [2] B. Külshammer, *Bemerkungen über die Gruppenalgebra als symmetrische Algebra II*, J. Algebra **75** (1982), 59–69.
- [3] B. Külshammer, Y. Otokita and B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks II*, Nagoya Math. J.

234 (2019), 127–138.

- [4] B. Külshammer and B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks*, Q. J. Math. **69** (2018), 855–870.
- [5] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408.
- [6] Y. Otokita, *Loewy lengths of centers of blocks and exponents of defect groups*, J. Pure and Appl. Algebra **224** (2020).
- [7] Y. Otokita, *Lower bounds on Loewy lengths of centers of blocks*, Osaka J. Math. **58** (2021), 37–39.
- [8] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure and Appl. Algebra **61** (1989), 303–317.

二次元共形場理論の定式化とその構成

(Construction and Formulation of Conformal Field Theory)

理化学研究所 森脇 湧登

1 序文

非自明な四次元の場の量子論の構成は未だ成されていない。しかし場の量子論からは Seiberg-Witten 不変量や Chern-Simon 理論 (Jones 多項式) など数学の幅広い分野で重要な対象が自然と現れる。そこで、場の量子論と呼ばれる物理理論を数学的に理解することは重要である。高次元の場の量子論は難しいが、二次元で共形対称性を持つ場の量子論である二次元共形場理論は「場と場の積」のなす代数構造を用いて数学的に定式化することができる (フル頂点代数)。本稿ではこのフル頂点代数が、可換結合代数の一般化であることを解説し、その代数構造がリーマン面のモジュライ空間の operad 構造から現れることを説明する。本稿は [M1, M2, M3, M4, M5] に基づく。

2 共形場理論

2.1 場の量子論と相関関数

そもそも場の量子論とは「何を目的としてどんな構造を持った物理理論」だろうか。場の量子論の物理への応用は幅広く、また様々な構造を持っている。それらを記述することは到底筆者にはできないが、ここでは「相関関数」と呼ばれる物理量を中心に場の量子論の一つの側面について述べたい。

私たちは「モノを見る」ことでモノの形を知るが、モノを見るときは、光 (光子) をモノに当ててその散乱を観測していることに他ならない。同様に原子核や素粒子の構造を調べるためには、素粒子と素粒子をぶつけてその散乱過程を観測することが、基本的な手法となる。ぶつけるエネルギーに応じて、実験の結果は変わるため、素粒子の構造をより詳細に調べるには膨大なエネルギーが必要となる。加速器実験では素粒子を高速に加速させてそういった高いエネルギースケールを実現している。

こうした素粒子スケールの現象は量子の世界であるから、状態は量子力学と同様にベクトル空間で表される。(古典的な世界と違って異なる状態は重ね合わせが可能である) また相対論 $E = mc^2$ により、エネルギー E からは質量が生じる。すなわち散乱過程では様々な新しい素粒子が誕生しうる。よって相対論で不変な理論を作るためには状態のなすベクトル空間 F は必然的に無限次元でなくてはならない。量子力学と相対論のいくつかの要請を課すと、理論が場の量子論の形にならないといけないことは [We] において物理的に議論されている。

次に散乱過程を記述する数学的構造について述べる。場の量子論では理論が定義される時空を決める必要があるが、ここでは時空は時間方向に 1 次元、空間方向に 3 次元の自由度がある平坦な時空 \mathbb{R}^{1+3} を考える。 \mathbb{R}^{1+3} の n 個の点 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^{1+3}$ を取り、 n 個の状態 $a_1, \dots, a_n \in F$ を取る。そして時空の点 z_i に a_i の状態が置かれた物理状態 (図 1 を参照) を考える。相関関数は図 1 のような物理状態に対して、複素数を返す関数である。より形式的に述べると

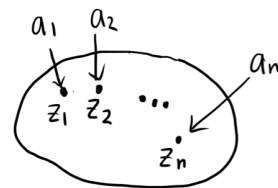


図 1:

$$X_n(\mathbb{R}^{1+3}) = \{(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{R}^{1+3})^n \mid z_i \neq z_j\}$$

を n 点の配位空間とすると、場の量子論の相関関数は

$$\text{Cor}_n : X_n(\mathbb{R}^{1+3}) \times F^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}$$

なる関数と理解できる (図 2)。

相関関数の物理的な意味を説明すると、状態のなすベクトル空間 F は粒子をラベルしてる。たとえば量子電磁気学と呼ばれる場の量子論の場合は電子や光子を表すベクトルが F には入っている。図 1 は z_i に粒子 a_i を置いた状態である。 z_1, \dots, z_n の第一成分は時間を表しているため、仮に z_1, \dots, z_k を過去と思い、 z_{k+1}, \dots, z_n を未来の時空の点だとする、過去に $(z_1, a_1), \dots, (z_k, a_k)$ であった物理状態が散乱過程を経て、 $(z_{k+1}, a_{k+1}), \dots, (z_n, a_n)$ になる確率 (複素数の絶対値を取ったものが確率を表す) を教えてくれるのが、相関関数である。

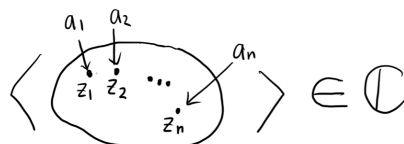


図 2:

Remark 2.1 相関関数が現実の現象を記述・予測する上でどのように役立つかはたとえば [PS] などを参照されたい。

相関関数が満たすべき公理系としてはたとえば Osterwalder–Schrader axioms が知られている。一方で、相関関数ではなくそれを”生成する”量子場を元に場の量子論を定式化することもでき、Wightman axioms として知られている [Ha]。

量子場とは大雑把にいつて状態 $a \in F$ 毎に定義される作用素値の超関数

$$O : F \times \mathbb{C} \rightarrow \text{End}F, \quad (a, z) \mapsto O_a(z) \quad (1)$$

のことである。量子場は別の見方をすると各時空の点 $z \in \mathbb{R}^{1+3}$ に対して、 F 上の積

$$\cdot_z : F \otimes F \rightarrow F, \quad a \cdot_z b = O_a(z)b \quad (2)$$

を定めているとも考えられる。

Remark 2.2 共形場理論の場合でも、 $O_a(z)$ が超関数であるため $a \cdot_z b$ は元の空間 F には入らず、 F をより大きくしたベクトル空間に入る。よって (2) は文字通りに *well-defined* とは言えない。 F が大きくなっていく様子をきちんと定式化した概念が Costello-Gwilliam の *factorization algebra* であり [CG]、 F をそのままにして z を形式的級数だと思ふことで、こうした解析的な困難を避けたアプローチが本稿で紹介するフル頂点代数である。

本稿では量子場を用いて Wightman axioms により近い定式化を行う。Wightman axioms は基本的には状態のなすベクトル空間 F がヒルベルト空間 (正定値内積) を持つことを仮定しているが、本稿のアプローチはより代数的でありそういった仮定は必要としないことは重要である。

2.2 二次元の共形場理論の代数構造

時空 \mathbb{R}^n 上の (ユークリッド的) 場の理論にはポアンカレ群 $\mathbb{R}^n \times SO(n)$ が作用する。この対称性がより大きな対称性 $\mathbb{R}^n \times SO(n) \subset SO(n+1, 1)$ (共形対称性) に拡張されている場の理論を共形場理論 (Conformal field theory) と呼ぶ。共形対称性は特にスケール変換 $x \mapsto rx$ を含む $r \in \mathbb{R}_>$ 。

以下、二次元の共形場理論を考える。また時空 \mathbb{R}^2 を \mathbb{C} とみなす。二次元共形場理論の状態の空間 F には、(大域的) 共形対称性 $SO(3, 1) \cong \text{PSL}_2\mathbb{C}$ が作用している。共形群 $\text{PSL}_2\mathbb{C}$ が 3 点の配位空間 $X_3(\mathbb{C})$ に三

重可移作用しているため、共形場理論が通常の場合の量子論に比べて理論的に簡単になる。詳細は省くが (日本語による数学的な説明は [M3] 参照)、(2) は二次元の共形場理論の場合

$$a \cdot_z b = \sum_{r,s \in \mathbb{R}} a_{r,s} b z^r \bar{z}^s \quad (3)$$

という級数展開を持つ。 $z \in \mathbb{C}$ を代入してしまうと Remark 2.2 に述べたように $a \cdot_z b \notin F$ となってしまうて、積の定義域と値域に困難が生じる。しかし、各 $z^r \bar{z}^s$ の係数 $a_{r,s}$ は F に入っており、well-defined な積

$$(r, s) : F \otimes F \rightarrow F, \quad (a, b) \mapsto a_{r,s} b \quad (r, s \in \mathbb{R}) \quad (4)$$

を定める。このように共形場理論ならば全てを束ねてしまうと ill-define になってしまう積を、well-defined な積の族 $\{(r, s) : F \otimes F \rightarrow F\}_{r,s \in \mathbb{R}}$ に分解することができる。また z, \bar{z} を形式的な変数と思い $\text{End} F$ 係数の形式的級数のなす空間 $\text{End} F[[z, \bar{z}, |z|^{\mathbb{R}}]]$ を考えると、(1) の量子場は線形作用素

$$O_{\bullet}(z) : F \rightarrow \text{End} F[[z, \bar{z}, |z|^{\mathbb{R}}]] \quad (5)$$

$$a \mapsto O_a(z) = \sum_{r,s \in \mathbb{R}} a_{r,s} z^r \bar{z}^s \quad (6)$$

として理解することができる。この線形作用素を共形場理論では頂点作用素と呼ぶ。

量子場から相関関数を復元するには、真空と呼ばれる特別なベクトル $|0\rangle \in F$ とその双対ベクトル $\langle 0| \in F^*$ を用いる。このとき相関関数は量子場を用いて次のように書ける:

$$\text{Cor}_n(a_1, z_1, \dots, a_n, z_n) = \langle 0| O_{a_1}(z_1) \cdots O_{a_{n-1}}(z_{n-1}) O_{a_n}(z_n) |0\rangle \quad (7)$$

$$= \langle 0| a_1 \cdot_{z_1} (\cdots (a_{n-1} \cdot_{z_{n-1}} (a_n \cdot_{z_n} |0\rangle)) \cdots) \rangle \quad (8)$$

$$\in \mathbb{C}[[z_1, \bar{z}_1, |z_1|^{\mathbb{R}}, \dots, z_n, \bar{z}_n, |z_n|^{\mathbb{R}}]]$$

ただし右辺は開部分集合

$$\{|z_1| > |z_2| > \cdots > |z_n|\} \subset X_n(\mathbb{C}) \quad (9)$$

において絶対収束する \mathbb{C} 値の形式的級数であり、この領域の上で左辺の関数と一致する。(8) は、通常の \mathbb{C} 代数における括弧付きの積 $a_1(a_2(a_3 a_4))$ を彷彿とさせる。 \mathbb{C} 代数の場合は

$$\begin{aligned} (\text{結合法則}) & \quad (ab)c = a(bc) \\ (\text{交換法則}) & \quad ab = ba \end{aligned} \quad (10)$$

を課すと全ての順序の括弧付きの積が等しくなることは代数学における非常に基本的な命題である。これを \mathbb{C} 代数の coherence Theorem と呼ぶことにする。Polyakov は共形場理論においても結合法則と交換法則を課すことで、(8) による全ての順序の括弧付きの積が解析接続をすると一致することを予想した (Bootstrap 仮説 [P])。本稿では以下、この Bootstrap 仮説を定式化し、その証明にリーマン面のモジュライ空間の operad 構造が重要な役割を果たすことを述べる。

2.3 樹と開領域

この章では一般の括弧積とその収束域 (9) を定義する。自然数 $n \geq 1$ に対して、 Tr_n を 1 から n までの数字の順序付きの括弧積とする。たとえば

$$\text{Tr}_3 = \{1(23), (12)3, 2(13), (21)3, 1(32), (13)2, 3(21), (32)1, 2(31), (23)1, 3(12), (31)2\}$$

である。頂点作用素 (6) と $A \in \text{Tr}_n$, $a_1, \dots, a_n \in F$ が与えられると、頂点作用素の括弧付きの合成が考えられる。たとえば $(31)(42) \in \text{Tr}_4$ に対しては、

$$\text{Cor}_{(31)(42)}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \langle 0 | (a_3 \cdot_{x_3} a_1) \cdot_{x_1} (a_4 \cdot_{x_4} a_2) \rangle$$

を対応させる。ただし $\text{Cor}_{(31)(42)}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ が $X_4(\mathbb{C})$ 上の相関関数 $\text{Cor}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ と一致するためには x_1, x_2, x_3, x_4 を次のように変数変換しないといけない

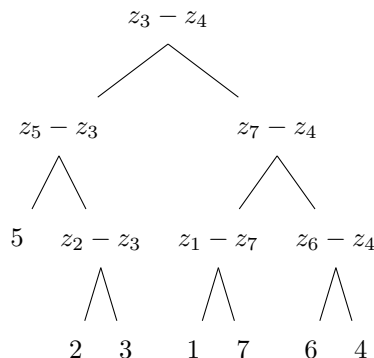
$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - z_2, & x_2 &= z_2, \\ x_3 &= z_3 - z_1, & x_4 &= z_4 - z_2. \end{aligned} \tag{11}$$

また $\text{Cor}_{1(2(34))}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ は開領域 (9) で絶対収束するが、 $\text{Cor}_{(31)(42)}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ は別の開領域

$$U_{(31)(42)} = \{|z_3 - z_1| < |z_1 - z_2|, |z_4 - z_2| < |z_1 - z_2|\} \subset X_4(\mathbb{C}) \tag{12}$$

で絶対収束する。一般に $A, B \in \text{Tr}_n$ に対して $U_A \cap U_B$ が空でないとは限らず、結合法則や交換法則は解析接続の意味での等号でしかないことに注意せよ。

変数変換のルールは樹を使って述べることができる。 Tr_n の元に対して自然に樹 (binary tree) を対応させることができる。たとえば図 3 の樹は $(5(23))((17)(64)) \in \text{Tr}_7$ に対応している。 $\text{Cor}_{(5(23))((17)(64))}$ を定義するのに必要な形式的変数 x_i と樹の頂点の間には自然な一対一対応がある。変数 x_i がどのように変数変換されるべきかは図 3 に記述されている。図 3 の頂点にかかれた $z_i - z_j$ は次のようなルールで決まっている: 頂点 v の左下の頂点の子孫である葉の中で一番右側の葉のラベルを i 、 v の全ての子孫である葉の中で一番右側の葉



のラベルを j としたとき、 v には $z_i - z_j$ が対応する。

図 3:

また各 $A \in \text{Tr}_n$ に対して開領域 U_A は、辺で繋がる全ての頂点に対して、上側の頂点を v 下側の頂点を w とすると $|x_w| < |x_v|$ という大小関係を課すことで定まる。たとえば図 3 の場合は

$$U_{(5(23))((17)(64))} = \{|z_2 - z_3| < |z_5 - z_3| < |z_3 - z_4|, |z_1 - z_7| < |z_7 - z_4| < |z_3 - z_4|, |z_6 - z_4| < |z_7 - z_4|\} \text{ となる。}$$

2.4 定式化: 定義と定理

この章ではフル頂点代数の定義を述べて、Coherence Theorem を説明する。簡単のためにコンパクトなフル頂点代数の定義を述べる [M2]。 F を \mathbb{R}^2 次元付きベクトル空間 $F = \bigoplus_{h, \bar{h}} F_{h, \bar{h}}$ とする。また F は次の三つの条件を満たすとする:

1. $h - \bar{h} \notin \mathbb{Z}$ ならば $F_{h, \bar{h}} = 0$;
2. ある N が存在して、 $h \leq N$ または $\bar{h} \leq N$ ならば $F_{h, \bar{h}} = 0$;

3. 任意の $H \in \mathbb{R}$ に対して $\sum_{\substack{h, \bar{h} \in \mathbb{R}^2 \\ h + \bar{h} < H}} \dim F_{h, \bar{h}}$ は有限.

線形作用素 $L(0), \bar{L}(0) \in \text{End}F$ を次の条件で定める:

$$L(0)|_{F_{h, \bar{h}}} = h \text{id}_{F_{h, \bar{h}}}, \quad \bar{L}(0)|_{F_{h, \bar{h}}} = \bar{h} \text{id}_{F_{h, \bar{h}}}.$$

コンパクトなフル頂点代数とは上記の三条件を満たす \mathbb{R}^2 次数付きベクトル空間 F と線形作用素

$$\begin{aligned} O_\bullet(z) : F &\rightarrow \text{End}F[[z, \bar{z}, |z|^{\mathbb{R}}]] \\ a &\mapsto O_a(z) = \sum_{r, s \in \mathbb{R}} a_{r, s} z^r \bar{z}^s \end{aligned} \quad (13)$$

および真空と呼ばれるゼロでないベクトル $|0\rangle \in F_{0,0}$ で以下の条件を満たすものである:

1. 任意の $a \in F$ に対して $O_a(z)|0\rangle \in F[[z, \bar{z}]$ かつ $\lim_{z \rightarrow 0} O_a(z)|0\rangle = a$;
2. $O_{|0\rangle}(z) = \text{id}_F$;
3. 任意の $a \in F$ に対して

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} O_a(z) &= [L(0), O_a(z)] - O_{L(0)a}(z) \\ \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} O_a(z) &= [\bar{L}(0), O_a(z)] - O_{\bar{L}(0)a}(z). \end{aligned}$$

4. 任意の a_1, a_2, a_3 と $u \in F^\vee$ に対して、 $\langle u, a_1 \cdot_{z_1} (a_2 \cdot_{z_2} a_3) \rangle$ は $\{|z_2| < |z_1| \in (\mathbb{C}^\times)^2\}$ において絶対収束、 $\langle u, (a_1 \cdot_{z_0} a_2) \cdot_{z_2} a_3 \rangle$ は $\{|z_0| < |z_2| \in (\mathbb{C}^\times)^2\}$ において絶対収束。
5. 任意の a_1, a_2, a_3 と $u \in F^\vee$ に対して、ある $X_2(\mathbb{C}^\times) = \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid z_1 \neq z_2\}$ 上の実解析的関数 F_{a_1, a_2, a_3} で、

$$\begin{aligned} F_{a_1, a_2, a_3}|_{|z_1| > |z_2|} &= u(a_1 \cdot_{z_1} (a_2 \cdot_{z_2} a_3)) \\ F_{a_1, a_2, a_3}|_{|z_2| > |z_1|} &= u(a_2 \cdot_{z_2} (a_1 \cdot_{z_1} a_3)) \\ F_{a_1, a_2, a_3}|_{|z_2| > |z_0|} &= u((a_1 \cdot_{z_0} a_2) \cdot_{z_2} a_3) \end{aligned} \quad (14)$$

を満たすものが存在する。ただし $z_0 = z_1 - z_2$ 。

Remark 2.3 (14) は結合法則と交換法則に対応する。実際、 $a(bc) = b(ac)$ は $c = 1$ とすることで交換法則を導く。より交換法則に近い形で同値な公理を書くこともできるが、ここではそれはしない ([M1] を参照)。

F をコンパクトなフル頂点代数とする。また $O_{X_n(\mathbb{C})}^{\text{real analytic}}$ を $X_n(\mathbb{C})$ 上の実解析的な関数のなす関数環とする。

フル頂点代数 F が coherent (物理の言葉では consistent) であるとは、任意の $n \geq 0$ に対してある線形写像

$$F^{\otimes n} \rightarrow O_{X_n(\mathbb{C})}^{\text{real analytic}}$$

があって、任意の A と $a_1, \dots, a_n \in F$ に対して、 $\text{Cor}_A(a_1, \dots, a_n)$ が U_A において絶対収束し、

$$\text{Cor}(a_1, \dots, a_n)|_{U_A} = \text{Cor}_A(a_1, \dots, a_n)$$

が成り立つことを言う。

我々はフル頂点代数の coherence をある条件の下で証明した。以下ではその条件を述べるために準備を行う。

F をコンパクトなフル頂点代数とする。線形写像 $L(-1), \bar{L}(-1) \in \text{End}F$ を $a \in F$ に対して

$$O_a(z)|0\rangle = a + (L(-1)a)z + (\bar{L}(-1)a)\bar{z} + \dots$$

によって定める。すなわち $L(-1)a, \bar{L}(-1)a$ は z, \bar{z} の係数。すると $L(-1), \bar{L}(-1)$ は次の性質を満たす [M2]:

$$\begin{aligned} O_{L(-1)a}(z) &= [L(-1), O_a(z)] = \frac{d}{dz} O_a(z) \\ O_{\bar{L}(-1)a}(z) &= [\bar{L}(-1), O_a(z)] = \frac{d}{d\bar{z}} O_a(z). \end{aligned} \quad (15)$$

よって

$$\begin{aligned} F_L &= \{a \in F \mid \bar{L}(-1)a = 0\}, \\ F_R &= \{a \in F \mid L(-1)a = 0\} \end{aligned}$$

とおくと、 $a \in F_L$ に対して対応する量子場 $O_a(z)$ は (15) より

$$\frac{d}{d\bar{z}} O_a(z) = 0$$

を満たす。すなわち $O_a(z)$ は正則な場になっており、(3) より

$$O_a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n,-1} z^n$$

という級数展開を持つことが分かる (反正則な形式的変数が現れない)。このような正則な形式的変数のみが現れる代数は 80 年代に Borchers が導入した頂点代数と呼ばれる代数になっている [B]。フル頂点代数は頂点代数の一般化になっている。まとめると次が成立する [FLM, LL, FB, M2]:

Proposition 2.1 F をフル頂点代数とすると、 F_L, F_R は頂点代数の構造を持つ。逆に \mathbb{Z} 次数付き頂点代数はフル頂点代数である。

Remark 2.4 Borchers の頂点代数はカイラル共形場理論と呼ばれる物理理論の数学的な定式化になっている。一方でカイラルでないフルの共形場理論は Huang-Kong によって *full field algebra* として定式化された [HK]。我々はこの定式化は 2.2 章の最後で述べられた Polyakov の *Bootstrap* 仮説に基づいた *full field algebra* の再定式化になっている [P]。

$C_1(F)$ を次のベクトルで貼られる F の部分空間とする:

$$\{v(-1, -1)a, w(-1, -1)a \mid a \in F, v \in F_L, w \in F_R\}.$$

フル頂点代数が C_1 余有限であるとは、 $F/C_1(F)$ が有限次元ベクトル空間であることをいう。このとき [M4] の結果を用いるとことで、次が成り立つ [M5]:

Theorem 2.1 C_1 余有限なフル頂点代数は *coherent* である。

Remark 2.5 C_1 余有限という条件は有理的な共形場理論ならばいつでも満たされる条件であり非常に多くの例で満たされる (たとえば [M6] の *code CFT* はその例)。一方で、 C_1 余有限は変形では保たれないので [M2] で構成された *CFT* の変形を行うと C_1 余有限でない *CFT* をいくらでも作ることができる。しかし [M2] の変形は *coherence* を保つことは簡単に分かる。 C_1 余有限という条件を緩めて、[M7] で構成された *generic level* の *WZW* 模型を含むように定理を述べることもできるが、ここでは割愛する [M5]。

次の章では証明のアイデアを簡潔に述べる。

2.5 Moduli space の operad 構造と基本亜群の生成元

交換法則と結合法則が、結合代数の coherence を導くことは結合代数の場合は 樹 (binary tree) を調べることで組み合わせ論的に示すことができる。これは operad の言葉で言えば 可換代数 operad Com の生成元が、「交換法則と結合法則」であるということに他ならない。共形場理論の coherence も operad を通じて述べるができる。共形場理論の相関関数は配位空間 $X_r(\mathbb{C})$ の上に住んでいる。 $X_r(\mathbb{C})$ は点付きリーマン面のモジュライ空間であり、リーマン面の張り合わせにより、 $\{X_r(\mathbb{C})\}_{r \geq 0}$ の適切なコンパクト化の上には operad の構造が入る (図 4 参照)。この operad は Fulton-MacPherson operad と呼ばれる。

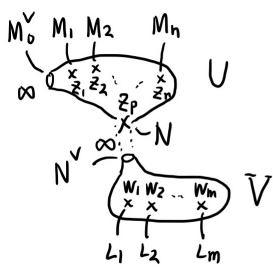


図 4:

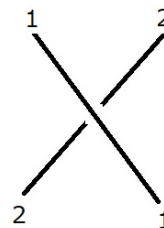


図 5:

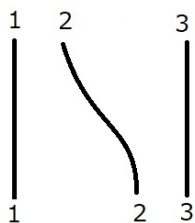


図 6:

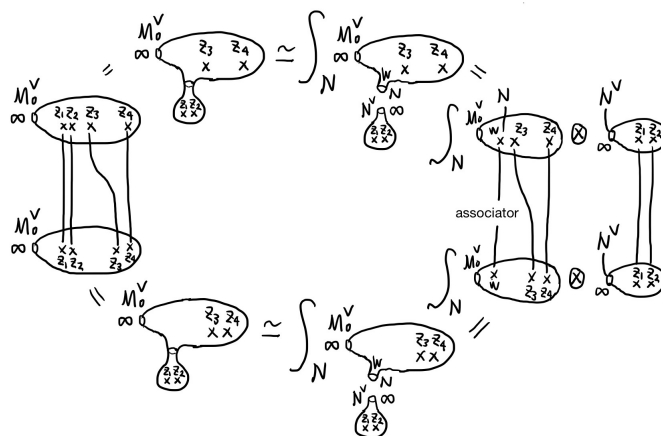


図 7:

共形場理論の consistency とは、基本的には相関関数がリーマン面の張り合わせと整合的であることと同値である。 C_1 余有限という条件を課すと、相関関数たちが holonomic D 加群の解になることが分かり [M4]、整合性を相関関数のモノドロミーのレベルでチェックすれば十分である。これは Fulton-MacPherson operad を up to homotopy で考えれば良いことに対応する。Fulton-MacPherson operad の基本亜群のなす operad は colored parenthesized braid operad と呼ばれる [T, Ba, F]。

[M4] では C_1 余有限という条件の下で、相関関数たちのモノドロミーが colored parenthesized braid operad の表現を成すことを示した [M4, 定理 6.21]。

colored parenthesized braid operad の元は大雑把に言って配位空間 $X_r(\mathbb{C})$ の道 (基本亜群 $\Pi_1(X_r(\mathbb{C}))$ の射) である。共形場理論の coherence は colored parenthesized braid operad が braiding と associator (交換法則と結合法則 の対応物) から生成されることから従う (図 7 はその一例)。ここで braiding は図 5 の $X_2(\mathbb{C})$ 内の道、associator は図 6 の $X_3(\mathbb{C})$ 内の道。

本稿では、二次元の場の量子論の性質を調べる上で、リーマン面のモジュライ空間の operad 構造が重要な役割を果たすことを述べた。高次元の場の量子論において operad はどのような役割を果たすだろうか。

参考文献

- [B] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **83**, 1986, (10), 3068–3071.
- [Ba] D. Bar-Natan, On associators and the Grothendieck-Teichmüller group. I, Selecta Math. (N.S.), 4, 1998, (2), 183–212.
- [CG] K. Costello and O. Gwilliam, Factorization algebras in quantum field theory. Vol. 1, New Mathematical Monographs, **31**, Cambridge University Press, Cambridge, 2017, ix+387.
- [F] B. Fresse, Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups. Part 1, Mathematical Surveys and Monographs, 217, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [FB] E. Frenkel and D. Ben-Zvi, Vertex algebras and algebraic curves, Mathematical Surveys and Monographs, **88**, Second, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Applied Mathematics, **134**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [FRS] J. Fuchs, I. Runkel and C. Schweigert, Conformal correlation functions, Frobenius algebras and triangulations, Nucl. Phys. **624** 2002, 452–468.
- [HK] Y.-Z. Huang, L. Kong, Full field algebras, Comm. Math. Phys., **272**, 2007, (2), 345–396.
- [LL] J. Lepowsky and H. Li, Introduction to vertex operator algebras and their representations, Progress in Mathematics, **227**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.
- [Ha] R. Haag, Local quantum physics, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [M1] Y. Moriwaki, Full vertex algebra and bootstrap – consistency of four point functions in 2d CFT, arXiv:2006.15859 [q-alg].
- [M2] Y. Moriwaki, Two-dimensional conformal field theory, current-current deformation and mass formula, arXiv:2007.07327 [q-alg].
- [M3] Y. Moriwaki, 二次元共形場理論の consistency と full 頂点代数, 数理解析研究所講究録, 2189, (2021), 87-100.
- [M4] Y. Moriwaki, Vertex operator algebra and colored parenthesized braid operad, arXiv:2209.10443.
- [M5] Y. Moriwaki, Consistency of two-dimensional conformal field theory, in preparation.
- [M6] Y. Moriwaki, Code conformal field theory and framed algebra, arXiv:2104.10094.
- [M7] Quantum coordinate ring in WZW model and affine vertex algebra extensions, Sel. Math. New Ser. 28, 68 (2022), doi.org/10.1007/s00029-022-00782-2.
- [MS] G. Moore and N. Seiberg, Classical and quantum conformal field theory, Comm. Math. Phys. **123**, 1989, 177–254.
- [P] A. M. Polyakov, Non-Hamiltonian approach to conformal quantum field theory, Ž. Èksper. Teoret. Fiz., **66**, 1974, 23–42.

- [PS] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1995.
- [T] D. E. Tamarkin,, Formality of chain operad of little discs, Lett. Math. Phys., 66, 2003, (1-2), 65–72.
- [We] S. Weinberg, The quantum theory of fields. Vol. I, Modern applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

代数的独立性の判定条件とその応用

立谷 洋平 (弘前大学 理工学研究科)*

目次

| | | |
|----------|-------------------------------|-----------|
| 1 | 超越数と代数的独立性 | 2 |
| 1.1 | Liouville の定理と超越数 | 2 |
| 1.2 | 代数的独立性 | 4 |
| 1.3 | Adams の定理とその後の進展 | 4 |
| 2 | 保型関数の値の数論的性質 | 6 |
| 2.1 | Nesterenko の定理とその応用 | 6 |
| 2.2 | フィボナッチ数列を含む無限積 | 9 |
| 2.3 | ルカ数列を含む無限積 | 9 |
| 3 | 代数的独立性の判定条件 | 10 |
| 3.1 | 主定理とその証明の概略 | 10 |
| 3.2 | 主定理の応用 | 12 |
| | 参考文献 | 13 |

2020 Mathematics Subject Classification: Primary 11J85; Secondary 11J81, 11F03, 11B39

キーワード: 超越数, 代数的独立性, 保型関数, Nesterenko の定理, 無限積, フィボナッチ数列, ルカ数列

はじめに

本稿の目的は, 数の超越性や代数的独立性に関する先行結果の紹介および筆者らによる最近の結果 [17] の報告である. 本稿は全 3 章からなり, 各章の内容は以下の通りである.

1 章では, 研究背景として超越数論における基本的な結果を述べる. はじめに, 代数的数の有理数近似に関する Liouville の定理 (定理 1.1) を証明し, その応用として超越数の実例を与える. その後, ネイピア数 e や円周率 π の超越性を導く Lindemann の定理 (定理 1.2) および指数関数値の代数的独立性に関する Lindemann-Weierstrass の定理 (定理 1.3) を紹介する. また後半では, Liouville のアイデアを巧妙に利用し, 代数的独立となる数集合の実例を与えた Adams の定理 (定理 1.5) について解説する. 一般に, 代数的独立性を導くプロセスは複雑かつ予備知識を必要とする場合が多いが, Adams の証明は Liouville の手法の拡張となってお

*〒 036-8561 青森県弘前市文京町 3 番地 弘前大学理工学研究科
e-mail: tachiya@hirosaki-u.ac.jp

り読み易いと思う。対象とする数集合は限定的ではあるが、代数的独立性の証明法の一端を感じて頂きたい。証明についても省略せずに詳しく述べた。

2章では、超越数論の分野に大きな進展を与えた Nesterenko の定理 (定理 2.1) を紹介し、その直接的な応用として導かれる代数的独立性に関する先行結果について述べる。その後、3章では Nesterenko の定理をある条件下で改良し、より一般の保型関数値の代数的独立性を導く判定条件を与える。本判定条件は、2つの関数値の代数的独立性と関数の比の非定数性が同値であることを主張するものであり、その応用は多岐にわたる。章の最後に、実際の応用例として、フィボナッチ数列やルカ数列を含む無限級数・無限積の代数的独立性に関する結果を与える。本研究結果は、Daniel Duverney 氏 (Baggio Engineering School, Lille), Carsten Elsner 氏 (FHDW–University of Applied Sciences, Hannover), 金子昌信氏 (九州大学) との共同研究に基づくものである。

謝辞

本稿は、第 67 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演を元に作成されたものです。講演の機会を与えてくださったプログラム責任者の原隆先生、大野泰生先生、ならびにシンポジウム責任者の小島秀雄先生、会場責任者の森脇淳先生に心より感謝申し上げます。また、代数学シンポジウムの運営に携わったすべての方々にも、この場をお借りして深く御礼申し上げます。本研究は科研費 (課題番号:18K03201, 22K03263) の助成を受けております。

1 超越数と代数的独立性

1.1 Liouville の定理と超越数

零でない整数係数多項式の根となる複素数を代数的数という。一方、代数的数でない複素数を超越数という。この定義によって、複素数は代数的数と超越数に二分される。例えば、有理数 a/b は多項式 $bx - a$ の根であるので代数的数である。また、無理数 $\sqrt{2}$ や虚数単位 i についても、それぞれ多項式 $x^2 - 2$, $x^2 + 1$ の根であるので代数的数である。特に、代数的数の集合は体をなす。

一方、超越数となると定義の性格上その存在すら明らかではない。実際、G.W. Leibniz や L. Euler らによって超越数の概念は既に認識されていたようであるが、具体的な超越数については 1844 年の J. Liouville による結果 [25, 26] まで一つも知られていなかった。超越数の実例は、ディオファントス近似に関する次の定理の応用として導かれる。

定理 1.1 (J. Liouville [27]). α を次数 d の代数的数とする。このとき、 α のみに依存する正定数 c が存在し、不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^d} \quad (1.1)$$

が α と異なるすべての有理数 p/q ($q > 0$) に対して成り立つ。

注意 1.1. α の次数が 2 以上のとき α は有理数ではないので、定理 1.1 における「 α と異なる」という表現は不要である。

証明. α と異なる有理数 p/q ($q > 0$) を固定する。はじめに、 $|\alpha - p/q| < 1$ の場合を考える。 α の \mathbb{Z} 上の最小多項式を $P(x)$ とおく。ここで、 $d = \deg P(x)$, $P(p/q) \neq 0$ に注意すれば

$$|P(p/q)| \geq \frac{1}{q^d}. \quad (1.2)$$

一方, $P(x)$ の $x = \alpha$ におけるテーラー展開 $P(x) = \sum_{i=0}^d c_i(x - \alpha)^i$ に $x = p/q$ を代入すると, $c_0 = P(\alpha) = 0$ より

$$|P(p/q)| \leq \sum_{i=1}^d |c_i| \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|^i \leq C \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|. \quad (1.3)$$

ここで, $C := \sum_{i=1}^d |c_i|$ であるが c_d は $P(x)$ の最高次の係数であるので, $C \geq c_d \geq 1$. よって, (1.2), (1.3) より

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C^{-1}}{q^d}. \quad (1.4)$$

不等式 (1.4) は $|\alpha - p/q| > 1$ のときも成り立つ. □

定理 1.1 は, 不等式 (1.1) の意味において, 代数的数の有理数近似には限界があることを主張している. 言い換えれば, 非常に良い有理数近似をもつような数は超越数でなくてはならない. この事実は, 超越数の具体例を与える.

系 1.1. $\alpha := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0.11000100000000000000000000001000 \dots$ は超越数.

証明. α を次数 d の代数的数と仮定する. いま, α の第 n 部分和

$$\frac{p_n}{q_n} := \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k!}}, \quad q_n := 10^{n!}$$

は α と異なる有理数であるので, 定理 1.1 より α のみに依存する正定数 c が存在し, $n \geq 1$ に対して

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{c}{q_n^d} \quad (1.5)$$

が成り立つ. 一方, $n \geq 1$ に対して

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \leq \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \leq \frac{2}{10^{(n+1)!}} = \frac{2}{q_n^{n+1}}. \quad (1.6)$$

不等式 (1.5), (1.6) は n が十分大きいとき両立しないので矛盾. □

Liouville による超越数の発見を契機として, 様々な数の超越性が明らかにされた. 1873 年, Ch. Hermite は自然対数の底 $e = 2.71828 \dots$ の超越性を示した. その後, F. Lindemann(1882) は Hermite の方法を一般化し, 次の結果を得た.

定理 1.2 (F. Lindemann [24]). α が零でない代数的数ならば, e^α は超越数.

定理 1.2 において $\alpha = 1$ とおけば, Hermite の結果である e の超越性が従う. さらに, 定理 1.2 より代数的数 $\alpha \neq 0, 1$ に対して, $\log \alpha$ は超越数であることがわかる. ここで, $\log \alpha$ は対数関数 $\log z$ の固定された分枝に $z = \alpha$ を代入した値である. 特に, 円周率 $\pi = -i \operatorname{Log}(-1)$ は超越数である. また代数的数 $\alpha \neq 0$ に対して, $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ は超越数である. 実際, $\sin \alpha$ が代数的数であると仮定すれば, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ より $\cos \alpha$ も代数的数. したがって, $\sin \alpha + i \cos \alpha = e^{i\alpha}$ は代数的数. これは定理 1.2 に矛盾. 同様に, $\cos \alpha, \tan \alpha$ が超越数であることもわかる. その後, 定理 1.2 は次のように一般化された.

定理 1.3 (Lindemann-Weierstrass の定理). $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を相異なる代数的数とする. このとき, $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_n}$ は任意の代数体上で線形独立である.

定理 1.3 は, Lindemann によって主張され, 1885 年に K. Weierstrass [41] により証明が与えられた. それゆえ, 定理 1.3 は Lindemann-Weierstrass の名を冠している. なお, ごく最近, Yu. V. Nesterenko [30] により Lindemann-Weierstrass の定理の新たな証明が報告された. 超越数論におけるその他の古典的な結果や近年の研究動向については, 文献 [4, 22, 28, 38, 40] などを参照するとよい.

1.2 代数的独立性

複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ に対して,

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$$

となる零でない n 変数整数係数多項式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が存在するとき, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は \mathbb{Q} 上代数的従属であるという. そのような多項式が存在しないとき, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は \mathbb{Q} 上代数的独立と呼ばれる. したがって, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ が \mathbb{Q} 上代数的独立ならば, 各 α_j ($j = 1, 2, \dots, n$) は超越数である. 一般に, 与えられた数集合に対する代数的従属性・独立性を決定することは難しい問題である. 歴史上初めて代数的独立性が示された数集合の実例は, 指数関数値の集合である. これは, Lindemann-Weierstrass の定理 (定理 1.3) と同値である次の主張により与えられる.

定理 1.4. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を \mathbb{Q} 上線形独立な代数的数とする. このとき, $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_n}$ は \mathbb{Q} 上代数的独立である.

例えば, $e, e^{\sqrt{2}}, e^{\sqrt{3}}$ は \mathbb{Q} 上代数的独立である. つまり, $P(e, e^{\sqrt{2}}, e^{\sqrt{3}}) = 0$ をみたす非零整数係数多項式 $P(x_1, x_2, x_3)$ は存在しない.

1.3 Adams の定理とその後の進展

超越性や代数的独立性を導く手法・過程は, 与えられた数の固有の性質に強く依存するため, その意味で万能的な手法は存在しない. それこそが本分野の難しきであり面白きであると筆者は感じている. 本節では, 代数的独立性を導く手法の一例として, W. W. Adams の証明法を紹介したい. 証明のアイデアは 1.1 節で述べた Liouville の定理 (定理 1.1) の証明を基盤としたものであるため, 予備知識を必要とせず比較的理解しやすいと思う. 以下, 複素数 a_1, a_2, \dots, a_n に対して, $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} = 1$ をみたすような整数 i_j ($j = 1, 2, \dots, n$) が $i_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) の場合に限るとき, a_1, a_2, \dots, a_n は乗法的独立であるという. 例えば, 相異なる有理素数 p_1, p_2, \dots, p_n は乗法的独立である.

定理 1.5 (W. W. Adams [1]). 正整数 a_1, a_2, \dots, a_n が乗法的独立であるならば,

$$\alpha_1 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1^{k!}}, \quad \alpha_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_2^{k!}}, \quad \dots, \quad \alpha_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{k!}}$$

は \mathbb{Q} 上代数的独立である.

証明. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は \mathbb{Q} 上代数的従属であると仮定する. このとき, 零でない多項式 $P \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ で, $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ をみたすものが存在する. はじめに, 整数 $m \geq 1$ に対して

$$R_{\ell, m} := \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{\ell}^k} = \frac{r_{\ell, m}}{a_{\ell}^{m!}}, \quad \ell = 1, 2, \dots, n,$$

とおき, 無限個の m に対して $P(R_{1, m}, R_{2, m}, \dots, R_{n, m}) \neq 0$ が成り立つことを示す. もしそうでなければ, 十分大きいすべての整数 m に対して

$$P\left(\frac{r_{1, m}}{a_1^{m!}}, \frac{r_{2, m}}{a_2^{m!}}, \dots, \frac{r_{n, m}}{a_n^{m!}}\right) = 0. \quad (1.7)$$

以下, 多項式 P の $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ におけるテーラー展開を

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{I \in \Lambda} c_I (x_1 - \alpha_1)^{i_1} (x_2 - \alpha_2)^{i_2} \cdots (x_n - \alpha_n)^{i_n} \quad (1.8)$$

とおく. 多項式 P は零でないので, $S := \{I \in \Lambda \mid c_I \neq 0\}$ は空でない有限集合. また, a_1, a_2, \dots, a_n は乗法的独立であるので,

$$a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_n^{j_n} = \min\{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} \mid I := (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S\}$$

となる $J_0 := (j_1, j_2, \dots, j_n) \in S$ が唯一存在する. このとき, (1.7), (1.8) より十分大きい m に対して

$$c_{J_0} \left(\frac{r_{1, m}}{a_1^{m!}} - \alpha_1\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{r_{n, m}}{a_n^{m!}} - \alpha_n\right)^{j_n} = - \sum_{I \in \Lambda \setminus \{J_0\}} c_I \left(\frac{r_{1, m}}{a_1^{m!}} - \alpha_1\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{r_{n, m}}{a_n^{m!}} - \alpha_n\right)^{i_n}. \quad (1.9)$$

よって, 不等式

$$\frac{1}{a_{\ell}^{(m+1)!}} < \alpha_{\ell} - R_{\ell, m} = \alpha_{\ell} - \frac{r_{\ell, m}}{a_{\ell}^{m!}} < \frac{2}{a_{\ell}^{(m+1)!}}, \quad \ell = 1, 2, \dots, n, \quad (1.10)$$

に注意すれば, (1.9) より

$$0 < |c_{J_0}| \leq 2^d \sum_{I \in \Lambda \setminus \{J_0\}} |c_I| \left(\frac{a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_n^{j_n}}{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}}\right)^{(m+1)!} \quad (1.11)$$

が成り立つ. ここで, d は多項式 P の総次数である. しかし, 任意の $I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \Lambda \setminus \{J_0\}$ に対して, $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} > a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_n^{j_n}$ であるので, 十分大きい m に対して (1.11) は成立しない. 以上より, 無限個の m に対して $P(R_{1, m}, R_{2, m}, \dots, R_{n, m}) \neq 0$ が成り立つ.

以下, $P(R_{1, m}, R_{2, m}, \dots, R_{n, m}) \neq 0$ をみたす m について考える. 必要があれば適当に順序を入れ替えることにより $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ としてよい. このとき, P は整数係数多項式であるので

$$|P(R_{1, m}, R_{2, m}, \dots, R_{n, m})| \geq \frac{1}{a_n^{m!d}}. \quad (1.12)$$

また, $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ であるので (1.8) より

$$\begin{aligned} |P(R_{1, m}, R_{2, m}, \dots, R_{n, m})| &\leq \sum_{I \in \Lambda} |c_I| \left|\frac{r_{1, m}}{a_1^{m!}} - \alpha_1\right|^{i_1} \cdots \left|\frac{r_{n, m}}{a_n^{m!}} - \alpha_n\right|^{i_n} \\ &\leq \sum_{I \in \Lambda} |c_I| \cdot \max \left\{ \left|\frac{r_{\ell, m}}{a_{\ell}^{m!}} - \alpha_{\ell}\right| \mid \ell = 1, 2, \dots, n \right\} \\ &\leq C \|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - (R_{1, m}, R_{2, m}, \dots, R_{n, m})\|. \end{aligned} \quad (1.13)$$

ここで, $C := \sum_{I \in \Lambda} |c_I| > 0$ であり, $\|\cdot\|$ は \mathbb{R}^n 上のユークリッド距離を表す. よって, (1.12), (1.13) より

$$\|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - (R_{1,m}, R_{2,m}, \dots, R_{n,m})\| \geq \frac{C^{-1}}{a_n^{m!d}}. \quad (1.14)$$

一方, 不等式 (1.10) より

$$\|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - (R_{1,m}, R_{2,m}, \dots, R_{n,m})\| \leq \sum_{\ell=1}^n |\alpha_\ell - R_{\ell,m}| < \frac{2n}{a_1^{(m+1)!}}. \quad (1.15)$$

しかし, 不等式 (1.14), (1.15) は m が十分大きいとき両立しないので矛盾. \square

例 1.1. $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{k!}$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/3^{k!}$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/5^{k!}$ は \mathbb{Q} 上代数的独立.

注意 1.2. Liouville の定理 (定理 1.1) の証明と同様に, 「零でない有理整数の絶対値は 1 以上」という基本的事実が定理 1.5 の証明においても重要な役割を果たしている (不等式 (1.2), (1.12) 参照).

Liouville の級数 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$ に代表される空隙級数の値の代数的独立性に関する研究は, J. v. Neumann [31] や O. Perron [35] らの仕事もあり, 1900 年代に大きく進展した (cf. [2, 11, 36, 37]). 例えば, P. Bundschuh-F.-J. Wylegala [8] は, 絶対値が異なる代数的数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) に対して, $f(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は \mathbb{Q} 上代数的独立であることを示している. 特に, 任意の整数 $n \geq 2$ に対して, $n-1$ 個の数 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/m^{k!}$ ($m = 2, 3, \dots, n$) は \mathbb{Q} 上代数的独立である. D. Masser は, この結果を包括する次の予想を提出した.

予想 1.1 (Masser 予想). $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を $0 < |\alpha_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) をみたす代数的数とする. このとき, α_i/α_j ($1 \leq i < j \leq n$) が 1 のべき根でないならば, $f(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_i^{k!}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は \mathbb{Q} 上代数的独立である.

予想 1.1 において, α_i/α_j が 1 のべき根でないという条件は必要である. 実際, $\alpha_1 = \zeta\alpha_2$ (ζ は 1 のべき根) ならば, 十分大きい整数 k に対して $\alpha_1^{k!} = (\zeta\alpha_2)^{k!} = \alpha_2^{k!}$ が成り立つため, $f(\alpha_1)$ と $f(\alpha_2)$ は \mathbb{Q} 上代数的従属となる. 予想 1.1 に関しては, Masser 自身によって $n = 2$ の場合が示され, その後, 西岡 [32, 33] によって $n = 2, 3$ の場合およびその p 進版が証明された. これらの仕事を経て, Masser 予想は最終的に西岡 [34] により肯定的に解決された.

2 保型関数の値の数論的性質

本章では, アイゼンシュタイン級数値の代数的独立性に関する Nesterenko の結果とその直接的な応用について述べる. 以下, $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ は上半平面を表すものとする.

2.1 Nesterenko の定理とその応用

整数 $k \geq 2$ に対して, 正規化されたアイゼンシュタイン級数 $E_{2k}(\tau)$ は

$$E_{2k}(\tau) = \frac{1}{2\zeta(2k)} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

により定義される. ここで, $\zeta(s)$ はリーマンゼータ関数である. よく知られているように, 関数 $E_{2k}(\tau)$ は重さ $2k$ の保型形式であり, そのフーリエ級数展開は

$$E_{2k}(\tau) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n \tau} \quad (2.1)$$

により与えられる. ここで, $\sigma_{2k-1}(n) := \sum_{d|n} d^{2k-1}$ ($n \geq 1$) は約数関数, B_{2k} は $2k$ 番目のベルヌーイ数である. 特に, $k = 2, 3$ のとき

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi i n \tau}, \quad E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2\pi i n \tau}. \quad (2.2)$$

また, (2.1) の右辺に $k = 1$ を代入して得られる級数を関数 $E_2(\tau)$ として定める:

$$E_2(\tau) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n \tau}, \quad \tau \in \mathbb{H}. \quad (2.3)$$

1996 年, Nesterenko はアイゼンシュタイン級数の値の代数的独立性に関する次の定理を証明した.

定理 2.1 (Yu. V. Nesterenko [29]). 任意の $\tau \in \mathbb{H}$ に対して, $e^{\pi i \tau}$, $E_2(\tau)$, $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ のうち少なくとも 3 つの数は \mathbb{Q} 上代数的独立である.

特に, $e^{\pi i \tau}$ ($\tau \in \mathbb{H}$) が代数的数ならば, 3 つの数 $E_2(\tau)$, $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ は \mathbb{Q} 上代数的独立である. この事実と, (2.2), (2.3) および約数関数の母関数のランベルト級数表示

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} z^n}{1 - z^n}, \quad |z| < 1$$

を組み合わせれば, 任意の代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) に対して 3 つの数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \alpha^n}{1 - \alpha^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \alpha^n}{1 - \alpha^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \alpha^n}{1 - \alpha^n}$$

が \mathbb{Q} 上代数的独立であることもわかる. また, $E_8(\tau) = E_4(\tau)^2$, $E_{10}(\tau) = E_4(\tau)E_6(\tau)$ のように, すべての $E_{2k}(\tau)$ ($k \geq 4$) は 2 つの関数 $E_4(\tau)$ と $E_6(\tau)$ の多項式として表すことができるので, 定理 2.1 の主張はアイゼンシュタイン級数の値全体に波及する. 例えば, $e^{\pi i \tau}$ ($\tau \in \mathbb{H}$) が代数的数ならば, 3 つの数 $E_2(\tau)$, $E_8(\tau)$, $E_{10}(\tau)$ もまた \mathbb{Q} 上代数的独立である.

アイゼンシュタイン級数をはじめとして, 強い対称性をもつ保型形式の世界では, 関数の間に非自明な代数関係式が豊富に存在する. それゆえ, 定理 2.1 を起点として幅広い保型形式の特殊値の数論的性質を導くことが可能となる. 例えば, K. Barré-Sirieix ら [5] は $q := e^{2\pi i \tau}$ が代数的数となるような $\tau \in \mathbb{H}$ に対して, 楕円モジュラー関数

$$j(\tau) := 1728 \frac{E_4(\tau)^3}{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots \quad (2.4)$$

の値は超越数であることを示したが, この結果は定理 2.1 の系として捉えることができる. また, D. Bertrand はアイゼンシュタイン級数とテータ零値

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_2(\tau) := 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i (n+1/2)^2 \tau}, \\ \vartheta_3(\tau) := 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}, \\ \vartheta_4(\tau) := 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 \tau}, \end{array} \right.$$

の間の関係式に着目し, 定理 2.1 から次の結果を導いた.

定理 2.2 (D. Bertrand [6]). $\alpha, \beta, \gamma \in \{2, 3, 4\}$, $\alpha \neq \beta$ とする. このとき, 任意の $\tau \in \mathbb{H}$ に対して, $e^{\pi i \tau}$, $\vartheta_\alpha(\tau)$, $\vartheta_\beta(\tau)$, $D\vartheta_\gamma(\tau)$ のうち少なくとも 3 つの数は \mathbb{Q} 上代数的独立である. ここで, $D := \frac{1}{\pi i} \frac{d}{d\tau}$.

定理 2.2 より, 代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) に対して, 3 つの数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^{n^2} \quad (2.5)$$

のうち, 任意の 2 つの数は \mathbb{Q} 上代数的独立であることがわかる. 特に, これらはすべて超越数である. 一方, ヤコビの恒等式 $\vartheta_3(\tau)^4 = \vartheta_2(\tau)^4 + \vartheta_4(\tau)^4$ ($\tau \in \mathbb{H}$) から, (2.5) における 3 つの数は \mathbb{Q} 上代数的従属である. なお, Bertrand とは独立に, Duverney-西岡 (啓)-西岡 (久)-塩川 [12, 15] らも定理 2.1 の応用として, テータ零値とその導関数の値の代数的独立性に関する結果を導いている.

定理 2.1, 2.2 には, フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ やルカ数列 $\{L_n\}$ を含む無限級数・無限積への興味深い応用がある. ここで, 数列 $\{F_n\}$, $\{L_n\}$ はそれぞれ次の漸化式により定義される:

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0), & F_0 &= 0, & F_1 &= 1, \\ L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n \quad (n \geq 0), & L_0 &= 2, & L_1 &= 1. \end{aligned}$$

例えば, $\tau_0 \in \mathbb{H}$ を $e^{\pi i \tau_0} = (3 - \sqrt{5})/2$ をみたす複素数とすると, 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \vartheta_2(\tau_0)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}} = \frac{1}{4} (\vartheta_3(\tau_0)^2 - 1) \quad (2.6)$$

が成り立つことが知られている (cf. [7, § 3.7 Comments and Exercises]). ここで, 定理 2.2 を応用すれば, $e^{\pi i \tau_0}$ は代数的数であるので, (2.6) の右辺に現れる 2 つの数 $\vartheta_2(\tau_0)$, $\vartheta_3(\tau_0)$ は \mathbb{Q} 上代数的独立であることがわかる. したがって, 等式 (2.6) より 2 つの逆数和 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/L_{2n}$ の \mathbb{Q} 上の代数的独立性が従う. また, Duverney-西岡 (啓)-西岡 (久)-塩川は, 定理 2.1 を応用することによって, 任意の整数 $s \geq 1$ に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}^s} \quad (2.7)$$

はすべて超越数であることを示している (cf. [14, 15]). その後, この方面の応用研究は急速に進み, 現在では (2.7) の数を含むような幅広い数集合に対して代数的独立性が議論されている (cf. [18, 19, 20, 21]). その一方で, フィボナッチ数やルカ数の基本的な逆数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} = 3.35988\dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n} = 1.96285\dots$$

に対しては, (2.6) のような保型形式の特殊値による表現は発見されておらず, それゆえ定理 2.1, 2.2 の直接的な応用として数論的性質を導出するまでには至っていない. 特に, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/L_n$ の超越性は未解決である. なお, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/L_n$ がともに無理数であることは, R. André-Jeannin [3] によって証明されている (cf. [9, 13, 39]).

2.2 フィボナッチ数列を含む無限積

最近, フィボナッチ数列を含む無限積

$$\xi_1 := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{F_n}\right) = 13.15096\dots, \quad \xi_2 := \prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{F_n}\right) = 0.18978\dots$$

に対して, テータ零値の特殊値による明示的な表現

$$\xi_1 = 2\beta^{-5/4} \frac{\vartheta_2(\tau_0)}{\vartheta_4(4\tau_0)}, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{5}}{6} \beta^{-5/4} \frac{\vartheta_2(\tau_0)\vartheta_3(\tau_0)\vartheta_4(\tau_0)}{\vartheta_4(4\tau_0)} \quad (2.8)$$

が見出され, 定理 2.2 の新たな応用として, ξ_1, ξ_2 の \mathbb{Q} 上の代数的独立性が明らかにされた ([16]). ここで, $\tau_0 \in \mathbb{H}$ は

$$e^{\pi i \tau_0} = \beta := \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

をみたす複素数である. 実際, ξ_1, ξ_2 の \mathbb{Q} 上の代数的独立性は次のようにして導かれる. まず, 表現 (2.8) およびテータ零値の間の関係式を用いると等式

$$\xi_1^3 \xi_2 = \frac{16\sqrt{5}}{3} \beta^{-5} \vartheta_2(2\tau_0)^2, \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\sqrt{5}}{12} \vartheta_4(2\tau_0)^2 \quad (2.9)$$

が得られる. このとき, $e^{\pi i (2\tau_0)} = \beta^2$ は代数的数であるので, 定理 2.2 より (2.9) の右辺に現れる 2 つの数 $\vartheta_2(2\tau_0), \vartheta_4(2\tau_0)$ は \mathbb{Q} 上代数的独立である. したがって, (2.9) より 2 つの数 ξ_1, ξ_2 も \mathbb{Q} 上代数的独立であることがわかる. 特に, ξ_1, ξ_2 はともに超越数である. なお, ξ_1 の超越性のみを示す場合は, 定理 2.2 は必要としない. 実際, 等式

$$\xi_1^2 = 8\beta^{-5/2} \frac{\vartheta_2(2\tau_0)}{\vartheta_4(2\tau_0)}$$

と楕円モジュラー関数 (2.4) のテータ零値による表現

$$j(\tau) = 256 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}, \quad \lambda := \lambda(\tau) = \frac{\vartheta_2(\tau)^4}{\vartheta_3(\tau)^4},$$

および先に述べた $j(\tau)$ の値の超越性に関する Barré-Sirieix らの結果 [5] を組み合わせることとて, ξ_1 の超越性は直ちに導かれる.

2.3 ルカ数列を含む無限積

さて, 2.2 節における議論はルカ数列を含む無限積

$$\nu_1 := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{L_n}\right) = 4.79628\dots, \quad \nu_2 := \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{L_n}\right) = 0.33589\dots$$

に対しても適用できるだろうか. すなわち, 定理 2.2 の直接的な応用として ν_1, ν_2 の代数的独立性を導くことはできるだろうか. 2.2 節における ξ_1, ξ_2 に対する議論を整理すれば, この問いは, 次のように二つに分けて述べることができる.

問 1. ν_1, ν_2 をテータ零値の特殊値として明示的に表現することはできるか?

問2. そのような表現が存在するとき, (テータ零値の間の代数関係を利用して) 代数的独立性が既知であるテータ零値の特殊値を ν_1, ν_2 により生成できるか?

(なお, ξ_1, ξ_2 の場合は表現 (2.8), (2.9) が問1, 問2に対する肯定的な回答を与えている). 問1に対しては, ξ_1, ξ_2 の場合と同様に, テータ零値の三重積公式を利用することによって次のような表現が得られた.

$$\nu_1^3 = 2\beta^{-3/4}\vartheta_2^2(\tau_0)\vartheta_2(3\tau_0) \cdot \frac{\vartheta_4(4\tau_0)}{\vartheta_2(2\tau_0)} \cdot \frac{\vartheta_4^2(6\tau_0)}{\vartheta_4^2(2\tau_0)}, \quad (2.10)$$

$$\nu_2^3 = \frac{1}{20\sqrt{5}}\beta^{-3/4}\vartheta_2^2(\tau_0)\vartheta_2(3\tau_0) \cdot \frac{\vartheta_4(2\tau_0)}{\vartheta_2(2\tau_0)} \cdot \frac{\vartheta_4(4\tau_0)}{\vartheta_4(6\tau_0)}. \quad (2.11)$$

ここで, これらの表現を用いて問2に対する回答を試みるならば, 表現 (2.10), (2.11) を起点として ν_1, ν_2 の代数的独立性を導く新たな関係式を見つける必要があるが, 残念ながら (2.9) に対応するような所望の関係式を導出することはできなかった. また, 問2 そのものに対しても肯定的な回答を与える表現が存在するか否かは現在まで判明していない. それゆえ, ξ_1, ξ_2 の場合と異なり, 定理 2.2 の直接的な応用として ν_1, ν_2 の代数的独立性を導くことは難しい状況にある.

改めて状況を整理してみる. そもそも ν_1, ν_2 のテータ零値による表現に着目 (執着?) した理由は, 定理 2.2 の直接的な応用を見据えたためであった. 本方針は既知の研究結果に当てはめるといって単純明快ではあるが, 対象とする数が (2.10), (2.11) のような複雑な表現をもつ場合はうまく機能しない. また仮に ν_1, ν_2 に対して定理 2.2 の枠組みにのせる戦略が遂行できたとしても, 対象とする数集合が変わる度に同様の困難はつきまとうため, 実用面においては一定の課題が残るものである.

この問題を解消すべく, 本研究ではこれまでと逆方向のアプローチを採用した. 具体的には, 定理 2.2 の根源である Nesterenko の定理 2.1 を, より一般の保型関数が扱える形に拡張することを試みた. 言わば, ν_1, ν_2 がもつ保型関数値による表現が (複雑であろうが) そのまま適用できるように定理の側を書き直したわけである. 幸いなことに本計画は功を奏し, 対象とする数が保型関数値による表現をもつことさえ確認できれば, 代数的独立性を議論できることがわかった (定理 3.1 参照). すなわち, 上述の問1 に対して肯定的な回答を与えれば, 問2 に対する回答は与えずとも, 代数的独立性を判定できる状況を構築することができたわけである. 次章では, 主定理 3.1 と証明の概略, そして ν_1, ν_2 の代数的独立性を含めたいくつかの応用について解説する.

3 代数的独立性の判定条件

本章の内容は, Daniel Duverney 氏, Carsten Elsner 氏, 金子昌信氏 との共同研究 [17] に基づくものである. 主定理 (定理 3.1) は, 2つの保型関数の値が代数的独立となるための必要十分条件を与えたものであるが, その証明は前章で述べた Nesterenko の定理を基盤とする.

3.1 主定理とその証明の概略

はじめに主定理を述べるための準備を行う. $N \geq 1$ を整数とし, $\Gamma(N)$ をレベル N の主合同部分群とする:

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

定義 3.1. k を整数とし, $f(\tau)$ を \mathbb{H} 上の有理型関数とする. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して, 関数 $f|[\gamma]_k$ の $\tau \in \mathbb{H}$ における値を

$$f(\tau)|[\gamma]_k := (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

と定める. 関数 $f(\tau)$ が次の 2 つの条件をみたすとき, $f(\tau)$ を $\Gamma(N)$ に関する重さ k の保型関数という (cf. [23, p. 125]).

- (i) 任意の $\gamma \in \Gamma(N)$ に対して, $f|[\gamma]_k = f$.
- (ii) 任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して, 関数 $f|[\gamma]_k$ は次の形のフーリエ級数展開をもつ.

$$f(\tau)|[\gamma]_k = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau / N}. \quad (3.1)$$

さらに, 関数 $f(\tau)$ が \mathbb{H} 上正則であり, かつ (3.1) においてすべての $n < 0$ に対し $a_n = 0$ であるならば, $f(\tau)$ を $\Gamma(N)$ に関する重さ k の保型形式という.

主結果は以下の通りである.

定理 3.1. $N \geq 1$ を整数とする. 関数 $f_1(\tau), f_2(\tau)$ を, それぞれ $\Gamma(N)$ に関する重さ k_1, k_2 の零でない保型関数とし, それらの $e^{2\pi i \tau / N}$ に関するフーリエ級数展開の係数は円分体 $\mathbb{Q}(e^{2\pi i / N})$ に属するとする. また $\tau_0 \in \mathbb{H}$ を, 関数 $f_1(\tau), f_2(\tau)$ の零点でも極でもなく, $e^{\pi i \tau_0}$ が代数的数であるような複素数とする. このとき, 2 つの値 $f_1(\tau_0)$ と $f_2(\tau_0)$ が \mathbb{Q} 上代数的独立であるための必要十分条件は, 関数の比 $f_1(\tau)^{k_2} / f_2(\tau)^{k_1}$ が定数でないことである.

定理 3.1 は, 条件をみたす 2 つの保型関数値の代数的独立性は, より単純に関数としての性質に帰着されることを主張している. それゆえ, 本結果は応用面において有用である. 定理 3.1 の応用例については次節で詳しく述べることとして, ここでは, 定理 3.1 の証明について解説する.

以下, $\Gamma(N)$ に関する重さ 0 の保型関数のうち, そのフーリエ級数展開の係数が円分体 $\mathbb{Q}(e^{2\pi i / N})$ に含まれるものすべてを有理数体 \mathbb{Q} に添加して得られる体を \mathfrak{F}_N とおく. このとき, $\mathfrak{F}_1 = \mathbb{Q}(j(\tau))$ であり, また $\mathfrak{F}_N / \mathfrak{F}_1$ はガロア拡大となることが知られている (cf. [10, Chapter 15, A]). ここで, $j(\tau)$ は (2.4) で与えた楕円モジュラー関数である. 定理 3.1 の証明には次の補題を用いる.

補題 3.1 ([17, Lemma 1]). $N \geq 1$ を整数, $x(\tau), y(\tau) \in \mathfrak{F}_N$ とする. また, $\tau_0 \in \mathbb{H}$ は関数 $x(\tau), y(\tau)$ の極ではないとする. このとき, $y(\tau)$ が定数でないならば, $x(\tau_0)$ は $\mathbb{Q}(y(\tau_0))$ 上代数的である.

定理 3.1 の証明の概略. はじめに, $f_1^{k_2} / f_2^{k_1}$ が定数であると仮定する. もし, f_2 が定数ならば, $f_2 \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i / N})$ は代数的数. 以下, f_2 は定数でないとする. このとき, $f_1^{k_2} / f_2^{k_1}$ は定数であるので, k_1, k_2 の少なくとも一つが零でなければ, $f_1(\tau_0)$ と $f_2(\tau_0)$ は \mathbb{Q} 上代数的従属である. また, $k_1 = k_2 = 0$ ならば, $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}_N$ であるので補題 3.1 より $f_1(\tau_0)$ は $\mathbb{Q}(f_2(\tau_0))$ 上代数的である. よって, $f_1(\tau_0)$ と $f_2(\tau_0)$ は \mathbb{Q} 上代数的従属である.

次に, $f_1^{k_2} / f_2^{k_1}$ が定数でないと仮定する. このとき, k_1, k_2 の少なくとも一つは零でないので, $k_1 \neq 0$ としてよい ($k_1 = 0, k_2 \neq 0$ ならば, 以下において $f_1^{k_2} / f_2^{k_1}$ を $f_2^{k_1} / f_1^{k_2}$ に置き換えて議論すればよい). ここで, $E_4 := E_4(\tau)$ を重さ 4 のアイゼンシュタイン級数とすれば, 関数

$$x(\tau) := \frac{E_4^{k_1}}{f_1^4}, \quad y(\tau) := \frac{f_1^{k_2}}{f_2^{k_1}} \quad (3.2)$$

はともに \mathfrak{F}_N に属する. また, $y(\tau)$ は定数でないので, 補題 3.1 より $x(\tau_0)$ は $\mathbb{Q}(y(\tau_0))$ 上代数的である. したがって,

$$E_4(\tau_0)^{k_1} = x(\tau_0) \cdot f_1(\tau_0)^4$$

は $\mathbb{Q}(y(\tau_0), f_1(\tau_0)) \subseteq \mathbb{K} := \mathbb{Q}(f_1(\tau_0), f_2(\tau_0))$ 上代数的. よって, $k_1 \neq 0$ に注意すれば, $E_4(\tau_0)$ は \mathbb{K} 上代数的である. また, (3.2) において $x(\tau)$ を $x(\tau) := E_6^{k_1}/f_1^6$ に置き換えて同様の議論を行えば, $E_6(\tau_0)$ も \mathbb{K} 上代数的であることがわかる. 以上により, 超越次数に関する次の不等式を得る.

$$\begin{aligned} 2 &\geq \text{trans. deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} \\ &= \text{trans. deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}(E_4(\tau_0), E_6(\tau_0)) \\ &\geq \text{trans. deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(E_4(\tau_0), E_6(\tau_0)) = 2. \end{aligned}$$

ここで, 最後の等式は Nesterenko の定理 2.1 を用いた (実際は, 2 つの数 $E_4(\tau_0)$ と $E_6(\tau_0)$ に対する \mathbb{Q} 上の代数的独立で十分である). したがって, $\text{trans. deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{K} = 2$ であるので, $f_1(\tau_0)$ と $f_2(\tau_0)$ は \mathbb{Q} 上代数的独立である. \square

3.2 主定理の応用

定理 3.1 を応用して, ルカ数列を含む 2 つの無限積

$$\nu_1 := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{L_n}\right), \quad \nu_2 := \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{L_n}\right)$$

が \mathbb{Q} 上代数的独立であることを示そう. 2.3 節では, テータ零値を用いた表現 (2.10), (2.11) を与えたが, 本節では議論の簡略化のためデデキントエータ関数

$$\eta(\tau) := e^{\pi i \tau / 12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \quad \tau \in \mathbb{H},$$

を用いた表現

$$\nu_1 = 2\beta^{-1/4} \cdot \frac{\eta(2\tau_0)^3}{\eta(\tau_0)^2} \cdot \frac{\eta(3\tau_0)}{\eta(4\tau_0)}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^{-1/4} \cdot \frac{\eta(2\tau_0)^2}{\eta(3\tau_0)} \cdot \frac{\eta(6\tau_0)}{\eta(4\tau_0)} \quad (3.3)$$

を採用する. ここで, $\tau_0 \in \mathbb{H}$ は $e^{\pi i \tau_0} = \beta := (\sqrt{5} - 1)/2$ をみたす複素数である. よく知られているように, $\eta(\tau)^{24}$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 12 の保型形式である. 以下, 関数 f_1, f_2 を

$$f_1(\tau) := g_1(\tau)^{24}, \quad f_2(\tau) := g_2(\tau)^{24}$$

と定める. ここで,

$$g_1(\tau) := \frac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)^2} \cdot \frac{\eta(3\tau)}{\eta(4\tau)}, \quad g_2(\tau) := \frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(3\tau)} \cdot \frac{\eta(6\tau)}{\eta(4\tau)}. \quad (3.4)$$

このとき, 関数 f_1, f_2 はともに $\Gamma(12)$ に関する重さ 12 の保型形式であり, $e^{2\pi i \tau / 12}$ に関するフーリエ級数展開の係数は有理数である. また, $e^{\pi i \tau_0} = (\sqrt{5} - 1)/2$ は代数的数であり, 関数の比

$$\frac{f_1(\tau)^{12}}{f_2(\tau)^{12}} = \left(\frac{g_1(\tau)}{g_2(\tau)}\right)^{288} = \left(\frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)^2} \cdot \frac{\eta(3\tau)^2}{\eta(6\tau)}\right)^{288}$$

は定数ではない. よって, 定理 3.1 を適用することにより, 2つの数 $f_1(\tau_0) = g_1(\tau_0)^{24}$, $f_2(\tau_0) = g_2(\tau_0)^{24}$ は \mathbb{Q} 上代数的独立であること, すなわち $g_1(\tau_0)$ と $g_2(\tau_0)$ は \mathbb{Q} 上代数的独立であることがわかる. ここで, (3.3), (3.4) より

$$\nu_1 = 2\beta^{-1/4}g_1(\tau_0), \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^{-1/4}g_2(\tau_0)$$

であるので, 2つの数 ν_1, ν_2 は \mathbb{Q} 上の代数的独立である.

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ やルカ数列 $\{L_n\}$ を含むいくつかの無限級数・無限積は, デデキントエータ関数の特殊値による表現をもつことがわかっている (cf. [17, pp. 7,8]). それゆえ, 上述の議論のように定理 3.1 を応用することで, 代数的独立性に関する結果を導くことができる. 例えば, 論文 [17] においては以下の結果が得られた.

定理 3.2 ([17, Theorem 2]). 4つの無限積

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{F_n}\right), & \xi_2 &:= \prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{F_n}\right), \\ \nu_1 &:= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{L_n}\right), & \nu_2 &:= \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{L_n}\right) \end{aligned}$$

のうち, 任意の2つの数は \mathbb{Q} 上代数的独立. 一方, 任意の3つの数は \mathbb{Q} 上代数的従属.

系 3.1. 定理 3.2 と同じ主張が次の4つの無限積に対しても成り立つ.

$$\begin{aligned} \xi_3 &:= \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{F_n}\right), & \xi_4 &:= \prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{F_n}\right), \\ \nu_3 &:= \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{L_n}\right), & \nu_4 &:= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{L_n}\right). \end{aligned}$$

系 3.1 は定理 3.2 と等式

$$\xi_3 = 6\xi_2, \quad 12\xi_4 = \xi_1, \quad 2\sqrt{5}\nu_3 = \nu_1, \quad \nu_4 = 2\sqrt{5}\nu_2$$

から直ちに従う.

定理 3.3 ([17, Theorem 3]). 6つの数

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}}, & \xi_5 &:= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{F_{2n-1}}\right), & \xi_6 &:= \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{F_{2n-1}}\right), \\ \lambda_2 &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}}, & \nu_5 &:= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{L_{2n}}\right), & \nu_6 &:= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{L_{2n}}\right) \end{aligned}$$

のうち, \mathbb{Q} 上代数的従属となる3つの例外 $\{\xi_5, \nu_5\}$, $\{\xi_5, \nu_6\}$, $\{\nu_5, \nu_6\}$ を除いて, 任意の2つの数は \mathbb{Q} 上代数的独立. 一方, 任意の3つの数は \mathbb{Q} 上代数的従属.

なお, 定理 3.3 において除外された3つの例外に対しては, デデキントエータ関数の間の代数関係式を経由して, 具体的な従属関係式が得られている. 例えば, 整数係数多項式

$$S(X, Y) := 2^{12}(3X - Y)(X + Y)^3 - X^3Y^5(3X + Y)^8$$

は, $(X, Y) = (\nu_5^2, \nu_6^2)$ で消滅する.

参考文献

- [1] W. W. Adams, On the algebraic independence of certain Liouville numbers, *J. Pure Appl. Algebra* **13** (1978), 41–47.
- [2] M. Amou, On algebraic independence of special values of gap series, *Tohoku Math. J.* **37** (1985), 385–393.
- [3] R. André-Jeannin, Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), 539–541.
- [4] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, London-New York, 1975.
- [5] K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain and G. Philibert, Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin, *Invent. Math.* **124** (1996), 1–9.
- [6] D. Bertrand, Theta functions and transcendence, *Ramanujan J.* **1** (1997), 339–350.
- [7] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *Pi and the AGM*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, **4**, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- [8] P. Bundschuh and F.-J. Wylegala, Über algebraische Unabhängigkeit bei gewissen nicht-fortsetzbaren Potenzreihen, *Arch. Math.* **34** (1980), 32–36.
- [9] P. Bundschuh and K. Väänänen, Arithmetical investigations of a certain infinite product, *Compositio Math.* **91** (1994), 175–199.
- [10] D. A. Cox, *Primes of the Form $x^2 + ny^2$* , second ed., Pure and Applied Mathematics (Hoboken), John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2013.
- [11] A. Durand, Indépendance algébrique de nombres complexes et critère de transcendance, *Compositio Math.* **35** (1977), 259–267.
- [12] D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka and I. Shiokawa, Transcendence of Jacobi’s theta series, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **72** (1996), 202–203.
- [13] D. Duverney, Irrationalité de la somme des inverses de la suite de Fibonacci, *Elem. Math.* **52** (1997), 31–36.
- [14] D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka and I. Shiokawa, Transcendence of Rogers-Ramanujan continued fraction and reciprocal sums of Fibonacci numbers, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **73** (1997), 140–142.
- [15] D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka and I. Shiokawa, Transcendence of Jacobi’s theta series and related results, *Number theory (Eger, 1996)* 157–168, *de Gruyter, Berlin*, 1998.
- [16] D. Duverney and Y. Tachiya, Algebraic independence of certain infinite products involving the Fibonacci numbers, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **97** (2021), 29–31.
- [17] D. Duverney, C. Elsner, M. Kaneko and Y. Tachiya, A criterion of algebraic independence of values of modular functions and an application to infinite products involving Fibonacci and Lucas numbers, *Res. Number Theory* **8** (2022), Paper No. 31.

- [18] C. Elsner, S. Shimomura and I. Shiokawa, Algebraic relations for reciprocal sums of Fibonacci numbers, *Acta Arith.* **130** (2007), 37–60.
- [19] C. Elsner, S. Shimomura and I. Shiokawa, Algebraic relations for reciprocal sums of odd terms in Fibonacci numbers, *Ramanujan J.* **17** (2008), 429–446.
- [20] C. Elsner, S. Shimomura and I. Shiokawa, Algebraic independence results for reciprocal sums of Fibonacci numbers, *Acta Arith.* **148** (2011), 205–223.
- [21] C. Elsner and N. Technau, On linear relations for Dirichlet series formed by recursive sequences of second order, *J. Aust. Math. Soc.* **110** (2021), 406–430.
- [22] N. I. Fel’dman and Y. V. Nesterenko, *Number Theory, IV: Transcendental numbers*, edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **44**, Springer, 1998.
- [23] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, **97**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [24] F. Lindemann, Üeber die Zahl π , *Math. Ann.* **20** (1882), 213–225.
- [25] J. Liouville, Mémoires et communications des Membres et des correspondants de l’Académie, *C. R. Acad. Sci. Paris* **18** (1844), 883–885.
- [26] J. Liouville, Nouvelle démonstration d’un théorème sur les irrationnelles algébriques, inséré dans le Compte rendu de la dernière séance, *C. R. Acad. Sci. Paris* **18** (1844), 910–911.
- [27] J. Liouville, Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n’est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *J. Math. pures appl.* **16** (1851), 133–142.
- [28] M. R. Murty and P. Rath, *Transcendental Numbers*, Springer, New York, 2014.
- [29] Yu. V. Nesterenko, Modular functions and transcendence questions, *Mat. Sb.* **187** (1996), 65–96; *English transl. Sb. Math.* **187** (1996), 1319–1348.
- [30] Yu. V. Nesterenko, Lindemann-Weierstrass theorem, *Translation of Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* 2021, no. 6, 3–7. *Moscow Univ. Math. Bull.* **76** (2021), 239–243.
- [31] J. v. Neumann, Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen, *Math. Ann.* **99** (1928), 134–141.
- [32] K. Nishioka, Algebraic independence of certain power series of algebraic numbers, *J. Number Theory* **23** (1986), 354–364.
- [33] K. Nishioka, Algebraic independence of three Liouville series, *Arch. Math.* **47** (1986), 117–120.
- [34] K. Nishioka, Proof of Masser’s conjecture on the algebraic independence of values of Liouville series, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **62** (1986), 219–222.
- [35] O. Perron, Über mehrfach transzendente Erweiterungen des natürlichen Rationalitätsbereichs, *S.-B. Bayer Akad. Wiss. H.* **2** (1932), 79–86.

- [36] W. M. Schmidt, Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), 475–478.
- [37] I. Shiokawa, Algebraic independence of certain gap series, *Arch. Math.* **38** (1982), 438–442.
- [38] 塩川宇賢, 無理数と超越数, 森北出版株式会社, 1999.
- [39] Y. Tachiya, Irrationality of certain Lambert series, *Tokyo J. Math.* **27** (2004), 75–85.
- [40] M. Waldschmidt, *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups*, Grundlehren Math. Wiss. **326**, Springer, 2000.
- [41] K. Weierstrass, Zu Lindemann’s Abhandlung: Über die Ludolph’sche Zahl, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1885), 1067–1085.

線型周期と ε -二分法

鈴木美裕

目次

| | |
|-----------------------------------|----|
| 1. LLC (局所 Langlands 対応) | 2 |
| 2. PTB (Prasad-Takloo-Bighash 予想) | 4 |
| 3. GGP (Gan-Gross-Prasad 予想) | 6 |
| 4. 精密化 | 8 |
| 参考文献 | 11 |

保型形式とは代数群 G 上の関数であり、保型形式の**周期** (*period*) とは部分群 H 上での保型形式の積分である。そのような積分が 0 であるかどうかと、保型形式に付随する保型 L 関数の零点の存在とが深く関係していることは古くから知られており、多くの研究がなされている。

保型形式の空間に実現される表現を扱う保型表現論の立場から見ると、周期とは、部分群 H の作用で不変な線型形式のことである。そのような線型形式は、しばしば局所体上の群 (p 進群や Lie 群) の表現の上の線型形式の無限積に分解される。従って、保型形式の周期に関する問題のある部分は、局所体上の群の表現に関する類似の問題へと帰着される。

本稿では、局所体上の一般線型群 (とその内部形式) の表現が、**線型周期**と呼ばれる周期をもつための条件に関する予想 (**Prasad-Takloo-Bighash 予想**, 略称 PTB 予想) について説明する。

PTB 予想は、局所体上の群の表現のパラメータづけ (**局所 Langlands 対応**, 略称 LLC) に基づいて、周期をもつ表現を特徴づける予想である。局所体上の群の表現の分類に関する問題が一般に「Langlands プログラム」と呼ばれるのに対して、PTB 予想のような、周期をもつ表現の特徴づけに関する問題は「**相対 Langlands プログラム**」と呼ばれている。

「相対 Langlands プログラム」の適切な枠組みや定式化と言えるものは、まだはっきりとは確立されておらず、いくつかの興味深い現象が散在的に証明され、あるいは予想されているだけである。本稿の後半では、それらの散在的に発見されている現象の中で最も「成功している」局所 **Gan-Gross-Prasad 予想** (略称 GGP 予想) について簡単に触れた後、GGP 予想をモデルケースとして、PTB 予想の精密化となるような予想を定式化する。

本稿は、2022 年 8 月 30 日に第 67 回代数学シンポジウムで行われた講演「周期積分と関数等式」に基づくものであり、アリゾナ大学の薛航 (Hang Xue) 氏との共同研究 [SX] および北海道大学の田森宥好氏との共同研究 [ST] の内容を含む。

1. LLC (局所 LANGLANDS 対応)

この節では、一般線型群とその内部形式の局所 Langlands 対応 (LLC) について、PTB 予想の主張を述べるのに必要な事項をまとめる。

基礎体 F を局所体、 D を F 上の中心的斜体とし、 $\dim_F(D) = d^2$ とする。群 $G = \mathrm{GL}_m(D)$ は、局所体 F の位相から自然に定まる位相に関して局所コンパクト位相群になる。このような形の群を、一般線型群 $\mathrm{GL}_n(F)$ の内部形式という。ただし、 $n = md$ とおいた。

本稿全体を通して、群 G の表現とは複素ベクトル空間上の表現とし、 F が非アルキメデス局所体の場合は滑らかな (smooth) 許容 (admissible) 表現を、 $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ の場合は SAF 表現¹を指すものとする。群 G の既約表現 (の同型類) の集合を、 $\mathrm{Irr}(G)$ と表わす。

一般に、連結簡約代数群 G に対して、Langlands 双対群と呼ばれる \mathbb{C} 上の簡約代数群 \widehat{G} が定義される。上で定義した群 G の Langlands 双対群は、 $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ である。

局所体 F の Weil 群を W_F と表わし、Weil-Deligne WD_F を以下で定義する：

$$WD_F = \begin{cases} W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & F \text{ が非アルキメデス局所体のとき} \\ W_F & F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \text{ のとき} \end{cases}$$

準同型 $\phi: WD_F \rightarrow \widehat{G}$ のうち、いくつかの条件を満たすものを G の L -パラメータという。まずは $G = \mathrm{GL}_n(F)$ の場合に、 $\mathrm{GL}_n(F)$ の L -パラメータを定義する。

定義 1.1. 準同型 $\phi: WD_F \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であって、以下の 3 条件を満たすものを $\mathrm{GL}_n(F)$ の L -パラメータという (2 番目の条件は、 F が非アルキメデス局所体のときのみ考える)。

- $\phi|_{W_F}: W_F \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は W_F の滑らかな表現、
- $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}: \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現、
- 任意の $\sigma \in W_F$ に対して $\phi(\sigma, 1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は半単純元。

2 つの L -パラメータの間の同値関係を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の元による共役で定め、 $\mathrm{GL}_n(F)$ の L -パラメータの同値類の集合を $\Phi_F(\mathrm{GL}_n)$ (あるいは単に $\Phi(\mathrm{GL}_n)$) と表わす。

L -パラメータ $\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n)$ が Weil-Deligne 群 WD_F の n 次元表現として既約であるとき、 ϕ は離散的 (discrete) であるといい、離散的な L -パラメータの同値類の集合を $\Phi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)$ と表わす。任意の L -パラメータ $\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n)$ は、離散的な L -パラメータによる直和分解

$$(1.1) \quad \phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \cdots \oplus \phi_r, \quad \phi_i \in \Phi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_{n_i}), \quad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$

をもつ。このとき、 ϕ が $G = \mathrm{GL}_m(D)$ の L -パラメータであるとは、全ての n_i が d の倍数であることをいう。群 $G = \mathrm{GL}_m(D)$ の L -パラメータの同値類の集合を $\Phi_F(G)$ (あるいは単に $\Phi(G)$) と表わす。

群 G に対する局所 Langlands 対応とは、全単射 $\mathrm{rec}_G: \mathrm{Irr}(G) \rightarrow \Phi(G)$ であって、いくつかの「良い性質」を満たすものことである。以下、全単射 rec_G が満たす「良い性質」のごく一部を列記する。勿論これらだけでは rec_G を一意に特徴づけることはできないことを注意しておく。全単射 rec_G の性質に関するより詳しい解説としては、[三枝 14, §3.1] 及び [ABPS16, §2] を参照。

¹smooth admissible moderate growth Fréchet representation のこと。

全単射 rec_G が満たす「良い性質」の一部

- (a) 任意の表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ に対して, $\text{rec}_G(\pi^\vee) = \text{rec}_G(\pi)^\vee$ が成り立つ. ここで, \vee は反傾 (contragredient) 表現を表わす. また, 表現 π の中心指標が自明であることと, L -パラメータ $\text{rec}_G(\pi)$ の像が $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ に含まれることは同値である.
- (b) 表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ が離散系列表現であることと, $\text{rec}_G(\pi)$ が離散的な L -パラメータであることは同値である. ただし, π が離散系列表現であるとは, G の適当な指標 χ であって, $\pi \otimes \chi$ がユニタリ表現であり, $\pi \otimes \chi$ の 0 でない行列係数が $\text{PGL}_m(D)$ 上 2 乗可積分になるようなものが存在することをいう.
- (c) L -パラメータ $\phi \in \Phi(G)$ を (1.1) の形で離散的な L -パラメータの直和に分解し, 各 i に対して $m_i := n_i/d$ とおいて, $\text{rec}_{\text{GL}_{m_i}(D)}(\pi_i) = \phi_i$ となるように離散系列表現 $\pi_i \in \text{Irr}(\text{GL}_{m_i}(D))$ をとる. このとき, 適当な置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ であって, $\phi = \text{rec}_G(\pi)$ を満たす G の表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ が, 放物型誘導表現 $\pi_{\sigma(1)} \times \pi_{\sigma(2)} \times \cdots \times \pi_{\sigma(r)}$ の唯一の既約商となるようなものが存在する.

注 1.2. 性質 (c) では, G の既約表現の表現論的な構成に関して, 暗に次のような事実も述べている:

任意の既約表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ に対して, 分割 $m = m_1 + \cdots + m_r$ と $\text{GL}_{m_i}(D)$ の既約離散系列表現 $\pi_i, i = 1, \dots, r$ であって, π が放物型誘導表現 $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_r$ の唯一の既約商となるようなものが存在する.

さらに, このような離散系列表現 π_1, \dots, π_r は, 並び替えを除いて π から一意的に決まる. このとき,

$$\pi = \pi_1 \boxplus \pi_2 \boxplus \cdots \boxplus \pi_r = \bigoplus_{i=1}^r \pi_i$$

と表わし, 右辺を π_1, \dots, π_r の **Langlands 和** (*Langlands sum*) という.

上記の性質 (a)–(c) はいずれも, G の表現の構造と Weil-Deligne 群 WD_F の表現としての L -パラメータの構造とが, LLC を通して整合的に対応していることを示している. さらに rec_G は, 表現論的な構造だけでなく, 整数論的な構造とも, 次のような意味で整合的である. 局所体 F の非自明な加法指標 ψ を 1 つ固定する. L -パラメータ $\phi \in \Phi(\text{GL}_n)$ に対して, L 因子および ε 因子とよばれる複素関数 $L(s, \phi)$ と $\varepsilon(s, \phi, \psi)$ が定義される. 詳細は [Tat, §3] と [GR10, §2] を参照. 次の定理は, rec_G が L 因子と ε 因子を「保つ」対応であることを示す.

定理 1.3 ([Hen00], [Kna94], [Bad08] §6). 全単射 rec_G は L 因子と ε 因子を保つ. つまり, 任意の既約表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ に対して

$$L(s, \pi) = L(s, \text{rec}_G(\pi)), \quad \varepsilon(s, \pi, \psi) = \varepsilon(s, \text{rec}_G(\pi), \psi).$$

ただし, $L(s, \pi)$ と $\varepsilon(s, \pi, \psi)$ は, [GJ72] で定義された, 表現 π の L 因子および ε 因子とする.

L -パラメータが自己双対的 (self-dual) であるとき, その ε 因子から **ルート数** (*root number*) という符号が次のように定義される.

命題 1.4 (cf. [GGP12] §5). L -パラメータ $\phi \in \Phi(G)$ に対して, $\text{rec}_G(\pi) = \phi$ となる G の表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ をとり, その中心指標を ω_π とする. このとき,

$$\varepsilon(\frac{1}{2}, \phi, \psi)\varepsilon(\frac{1}{2}, \phi^\vee, \psi) = \varepsilon(\frac{1}{2}, \pi, \psi)\varepsilon(\frac{1}{2}, \pi^\vee, \psi) = \omega_\pi(-1)$$

が成り立つ. ただし, ω_π は F^\times の指標とみなしている. さらに, π が自己双対的であって ω_π が自明指標であるとき (つまり $\phi = \phi^\vee$ かつ ϕ の像が $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ に含まれるとき), 符号 $\varepsilon(\frac{1}{2}, \pi, \psi) = \varepsilon(\frac{1}{2}, \phi, \psi) \in \{\pm 1\}$ は加法指標 ψ のとり方によらない. これを $\varepsilon(\pi)$ または $\varepsilon(\phi)$ と表わし, π または ϕ のルート数という.

次節で PTB 予想を述べる際に必要になる, L -パラメータに関する用語をいくつか定義しておく.

定義 1.5. 局所体 F の有限次拡大 E をとり, WD_E を WD_F の部分群とみなす. 群 $\text{GL}_n(F)$ の L -パラメータ $\phi \in \Phi_F(\text{GL}_n)$ の WD_E への制限

$$\text{bc}_{E/F}(\phi) := \phi|_{WD_E} \in \Phi_E(\text{GL}_n)$$

を ϕ の**底変換** (*base change*) という.

定義 1.6. 正整数 n が偶数であるとする. L -パラメータ $\phi \in \Phi(\text{GL}_n)$ の像が (適当な $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -共役をとると) シンプレクティック群 $\text{Sp}_n(\mathbb{C})$ に含まれるとき, ϕ は**シンプレクティック型** (*of symplectic type*) であるという.

L -パラメータ $\phi \in \Phi(\text{GL}_n)$ がシンプレクティック型であるとき, $\phi = \phi^\vee$ かつ ϕ の像は $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ に含まれるので, ルート数 $\varepsilon(\phi)$ が定義できる. また, シンプレクティック型という性質は底変換で保たれるので, ϕ がシンプレクティック型ならば, $\text{bc}_{E/F}(\phi)$ のルート数 $\varepsilon(\text{bc}_{E/F}(\phi))$ も定義される.

定義 1.7. 表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ に対して, 対応する L -パラメータを $\phi = \text{rec}_G(\pi)$ とおく. また, ϕ に対応する $\text{GL}_n(F)$ の表現を $\pi' := \text{rec}_{\text{GL}_n(F)}^{-1}(\phi)$ とする. 表現 π が**生成的** (*generic*) であるとは, 対応する $\text{GL}_n(F)$ の表現 π' が生成的²であることとする.

2. PTB (PRASAD-TAKLOO-BIGHASH 予想)

一般に, 局所体 F 上の簡約代数群 G の表現 π に対して, その (H, χ) -周期とは, $\text{Hom}_H(\pi, \chi)$ の元のことをいう. ここで, H は G の F 上定義された閉部分群であり, χ は H の指標である. また, 0 でない (H, χ) -周期をもつとき, 表現 π は (H, χ) -**格別** ((H, χ) -*distinguished*) であるという. 特に, 指標 χ が自明指標であるときは, 単に H -周期, H -格別という. さらに, 部分群 H が明らかな場合は H -も省略する.

以下, 前節の記号を引き続き使う. 特に $G = \text{GL}_m(D)$ は $\text{GL}_n(F)$ の内部形式とする. PTB 予想では, G の表現の線型周期を考える. これは次のように定義される. 局所体 E を F の 2 次拡大とし, F -代数の埋め込み $E \hookrightarrow M_m(D)$ が存在すると仮定する. これは, n が偶数であることと同値である. そのような埋め込みを 1 つとって E^\times は $G = M_m(D)^\times$ の部分群とみなし, H を E^\times の G における中心化群とする³. このように定義した閉部分群 H に関する周期を, ここでは**線型周期**とよぶ.

²群 $\text{GL}_n(F)$ の生成的な表現の定義は, 例えば [BZ76, Definition 5.7] を参照. ただし, [BZ76] では generic ではなく “non-degenerate(非退化)” という用語を使っている.

³このとき, H は G の対称部分群 (F 上定義された G のある対合の固定点のなす群) であり, $\text{GL}_{n/2}(E)$ の内部形式である.

線型周期は定数倍を除いて一意であることが、ほとんどの場合に示されている。これを**重複度 1 定理** (*multiplicity one theorem*) という。

定理 2.1 ([Guo97], [BM19], [Lu22]). 局所体 F の標数が 2 でないとする。このとき、任意の既約表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ に対して $m(\pi) := \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(\pi, \mathbb{C})$ とおくと、 $m(\pi) \leq 1$ が成り立つ。

PTB 予想は、表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ が H -格別であるための必要条件を、 L -パラメータとルート数によって記述する予想である。

予想 2.2 ([PTB11] §11, Conjecture 1). 表現 π が H -格別ならば、次の 2 条件が成り立つ: 対応する L -パラメータを $\phi = \text{rec}_G(\pi)$ とおくと、

- (1) L -パラメータ ϕ はシンプレクティック型である,
- (2) 底変換 $\text{bc}_{E/F}(\phi)$ のルート数が $\varepsilon(\text{bc}_{E/F}(\phi)) = (-1)^m$ を満たす。

さらに、 π が離散系列表現ならば、 π が H -格別であることと条件 (1), (2) は同値である。

注 2.3. Prasad と Takloo-Bighash による元の予想は、予想 2.2 とは以下の点で異なる:

- 元の予想では、より一般に (H, χ) -格別表現を考えている。ここで、 χ は E^\times の指標であって、被約ノルムと合成して H の指標とみなしたものである。
- [PTB11] では、標数 0 の非アルキメデス局所体の場合のみを扱っている。
- 元の予想では、表現 π が生成的であるという条件が課されている。この条件は予想 2.2 の真偽には影響しないということが、[Suz21] で示されている。

直近 3 年ほどの研究で、少なくとも体 F の標数が 0 ならば、PTB 予想は多くの場合正しいということが示されている。本節の残りで、これまでにわかっていることについて説明する。

定義 2.4. 表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ であって、次の条件を満たす離散系列表現 $\pi_i \in \text{Irr}(\text{GL}_{m_i}(D))$, $\pi_j \in \text{Irr}(\text{GL}_{m_j}(D))$ による Langlands 和 (注 1.2 参照) の表示

$$\pi = \bigsqcup_{i \in I_\pi} \pi_i \boxplus \bigsqcup_{j \in J_\pi} (\pi_j \boxplus \pi_j^\vee), \quad m = \sum_{i \in I_\pi} m_i + 2 \sum_{j \in J_\pi} m_j$$

をもつものの集合を $\text{Irr}^\circ(G)$ とおく:

- 任意の $i \in I_\pi$ に対して、 $n_i = m_i d$ は偶数かつ π_i は格別。
- 任意の $i, i' \in I_\pi$ に対して、 $i \neq i'$ ならば $\pi_i \not\cong \pi_{i'}$ 。

集合 $\text{Irr}^\circ(G)$ を使うと、現在までに証明されている事実は次のようにまとめられる。

定理 2.5 ([Suz21], [Xue21], [Séc], [SX], [ST]). 体 F の標数が 2 でないとする。

- (1) 表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ が格別ならば $\pi \in \text{Irr}^\circ(G)$ である。
- (2) 体 F の標数が 0 であって \mathbb{Q}_2 の拡大体ではないとする。また、表現 $\pi \in \text{Irr}(G)$ が離散系列表現であるとする。このとき、 π が格別であることと予想 2.2 の条件 (1), (2) は同値である。
- (3) さらに、 F が \mathbb{Q}_p ($p \neq 2$) の有限次拡大であるとし、 $\pi \in \text{Irr}(G)$ が生成的であるとする。このとき、 π が格別であることと $\pi \in \text{Irr}^\circ(G)$ は同値である。

特に, 定理 2.5 の (1) と (2) から次が従う.

系 2.6. 体 F の標数が 0 であって \mathbb{Q}_2 の拡大体ではないとする. このとき, PTB 予想は正しい.

3. GGP (GAN-GROSS-PRASAD 予想)

序文で述べたように, 本節では局所 GGP 予想についてごく簡単にまとめる. 予想の詳しい主張については [GP92] または [GGP12, §17] を参照.

局所 GGP 予想は, 局所体上の古典群の対の表現が Bessel 周期 (または Fourier-Jacobi 周期) をもつための条件を与える予想である. ここでは, 特殊直交群 (special orthogonal group) であって余階数 (corank) が 1 の場合のみ扱うことにする⁴.

局所体 F 上の $n+1$ 次元の非退化な 2 次空間 V と, V の余次元 1 の非退化な部分空間 W をとる. ただし, V から定まる特殊直交群 $\mathrm{SO}(V)$ は準分裂 (quasi-split) であるとする. また, $\mathrm{SO}(W)$ は自然に $\mathrm{SO}(V)$ の部分群とみなせることに注意する. 表現を考える群は $G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(W)$ であり, 周期を考える部分群 H は, $\mathrm{SO}(W)$ を G に対角に埋め込んだものである. 前節までと同様, 既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ が $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C}) \neq 0$ を満たすとき, π は H -格別 (H -distinguished) であるという. 部分群 H に関する周期を Bessel 周期という. Bessel 周期に対しても, 線型周期の場合と同様に重複度 1 定理が示されている.

定理 3.1 ([AGRS10], [Wal12c], [SZ12]). 局所体 F の標数が 0 であるとする. このとき, 任意の既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $m(\pi) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C})$ とおくと, $m(\pi) \leq 1$ が成り立つ.

GGP 予想の主張について説明する前に, 群 G に対する局所 Langlands 予想の主張について説明しておく. 連結簡約代数群 G の Langlands 双対群 \widehat{G} は次のようになる:

$$\widehat{G} = \begin{cases} \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) & n \text{ が偶数のとき,} \\ \mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}_{n-1}(\mathbb{C}) & n \text{ が奇数のとき.} \end{cases}$$

一般線型群の場合と同様に, 準同型 $\phi: WD_F \rightarrow \widehat{G} \rtimes W_F$ のうち, いくつかの条件を満たすものを G の L -パラメータといい, それらの同値類の集合を $\Phi(G)$ と表わす. また, L -パラメータ $\phi \in \Phi(G)$ に対して, 有限群 S_ϕ を次のように定義する.

定義 3.2. 代数群 $Z_{\widehat{G}}(\phi)$ の連結成分のなす群 $Z_{\widehat{G}}(\phi)/Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ$ を S_ϕ と表わす. これを ϕ の S -群 (S -group, component group) という. ただし, $Z_{\widehat{G}}(\phi)$ は ϕ の像の \widehat{G} における中心化群であり, $Z_{\widehat{G}}(\phi)^\circ$ はその単位元を含む連結成分である.

上で定義した S -群 S_ϕ は, 一般の連結簡約代数群でも同じように定義される. LLC の主張では, S -群の既約表現が重要な役割を果たす. 群 G は特殊直交群の積なので, 任意の L -パラメータ $\phi \in \Phi(G)$ に対して S_ϕ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の有限個の直積と同型である. 特に, S_ϕ の既約表現は 2 次指標のみである⁵.

⁴GGP 予想は, Gross と Prasad [GP92] によって 90 年代に発表された特殊直交群の表現に関する予想を, Gan, Gross, Prasad [GGP12] の 3 人が一般の古典群に拡張したものである. その意味で, 本稿で説明する予想は Gross-Prasad 予想と呼ばれることも多い.

⁵一般の簡約代数群の場合, S -群は可換とは限らず, 2 次元以上の既約表現をもつこともある.

一般線型群の場合と違い、特殊直交群 G の LLC では、 G だけでなく G の純内部形式 (*pure inner form*) と呼ばれる複数の群の表現を一斉に扱う必要がある。体 F 上の $n+1$ 次元の非退化な 2 次空間 V' であって、 V と同じ判別式をもつものから定まる特殊直交群 $\mathrm{SO}(V')$ を、 $\mathrm{SO}(V)$ の純内部形式という。そのような V' と、 n 次元の非退化な 2 次空間 W' であって W と同じ判別式をもつものに対して、 $G' = \mathrm{SO}(V') \times \mathrm{SO}(W')$ は G の純内部形式である。群 G の純内部形式の集合を $X(G)$ とする。

さらに、 W' が V' の部分空間であって、その直交補空間が W の V における直交補空間と同型であるとき、 G' は G の **relevant** な純内部形式という。純内部形式 G' が relevant ならば、 $\mathrm{SO}(W')$ を G' に対角に埋め込むと部分群 H' が得られるので、 G' の表現の H' に関する周期を考えることができる。

群 G とその純内部形式に対する局所 Langlands 予想とは、全射

$$\mathrm{rec}_G : \coprod_{G' \in X(G)} \mathrm{Irr}(G') \rightarrow \Phi(G)$$

であって、いくつもの「良い性質」を満たすものが存在するという主張である。

全単射 rec_G に期待される「良い性質」の一部

(a) 各 L -パラメータ $\phi \in \Phi(G)$ に対して、ファイバー $\Pi_\phi := \mathrm{rec}_G^{-1}(\phi)$ は有限集合である。これを ϕ の L -パケット (*L-packet*) という。 L -パケットの位数は S_ϕ の既約表現の個数に等しい。今の場合、 S_ϕ は可換群なので $|\Pi_\phi| = |S_\phi|$ が成り立つ。

(b) 任意の $\pi \in \Pi_\phi$ に対して次が成り立つ:

$$L(s, \pi) = L(s, \phi), \quad \varepsilon(s, \pi, \psi) = \varepsilon(s, \phi, \psi).$$

ただし、 $L(s, \pi)$ と $\varepsilon(s, \pi, \psi)$ は [Sha90] で定義された、表現 π の L 因子および ε 因子とする。

(c) 群 G の Whittaker データ⁶ θ を 1 つとると、 θ に関して生成的な表現は、各 L -パケットに高々 1 つ含まれる。また、全単射

$$J_\theta : \Pi_\phi \rightarrow \mathrm{Irr}(S_\phi)$$

が定まる。 L -パケット Π_ϕ が生成的な表現を含むとき、 Π_ϕ に含まれる θ に関して生成的な表現の J_θ による像は S_ϕ の自明表現である。

以下、群 G の Whittaker データ θ を固定する。各 L -パラメータ $\phi \in \Phi(G)$ に対して χ_ϕ を、 ϕ の部分表現のルート数を使って [GGP12, §6, §17] で明示的に構成された S_ϕ の 2 次指標とする。

予想 3.3 ([GGP12] Conjecture 17.1, Conjecture 17.3). 群 G とその純内部形式に対して局所 Langlands 予想が成り立つと仮定する。生成的な表現を含む L -パケット Π_ϕ を考える。

- (1) L -パケット Π_ϕ は、 G の relevant な純内部形式の格別な表現をただ 1 つ含む。
- (2) L -パケット Π_ϕ に含まれるただ 1 つの格別な表現 π に対して、 $J_\theta(\pi) = \chi_\phi$ が成り立つ。

局所体 F の標数が 0 のとき、この予想は以下の論文においてすでに証明されている:

- F が \mathbb{Q}_p の有限次拡大のとき... [Wal10], [Wal12a], [Wal12b], [MW12]
- $F = \mathbb{R}$ のとき... [Luo], [Che], [CL]

⁶Whittaker データの定義などについては、[GP92] または [GGP12, §9] を参照。

- $F = \mathbb{C}$ のとき ... [Möl], [Che]

4. 精密化

PTB 予想は, ルート数を用いて格別な表現のある種の特徴づけを与えているという点で GGP 予想とよく似ているが, いくつかの点で異なっている. 例えば,

- GGP 予想は生成的な表現を含む L -パッケージに属する表現が格別かどうかを判定する必要十分条件を与えているのに対し, PTB 予想では任意の既約表現に対して格別であるための必要条件を与えている.
- GGP 予想では, L -パッケージ内のどの表現が格別であるかを, S -群の指標によって決定しているが, PTB 予想の設定では rec_G が全単射なので, 通常の意味での L -パッケージは 1 元集合となってしまう, S -群の表現を考えることは無意味に思える.

これらの点を考慮して, この節では, GGP 予想の主張の形に合わせて PTB 予想を精密化する.

上で 2 つ挙げた GGP 予想との相違点のうち後者は, LLC の定式化そのものに起因する問題である. 従って, これを解決するためには, LLC の定式化を見直すことが必要になる.

Arthur [Art06] は, 前節で述べたものとは少し違った S -群の定義を提案している. この新しい S -群の定義を採用すると, $\text{GL}_n(F)$ の内部形式の表現を全てまとめて分類することが可能になり, L -パッケージは一般に 1 元集合ではなくなる. ここでは, [ABPS16] に従って, この形の LLC の主張を述べる.

まずは, $\text{GL}_n(F)$ の内部形式のパラメータを与える. 群 $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ の中心を $Z(\text{SL}_n(\mathbb{C}))$ と表わす. これは 1 の n 乗根全体のなす群であり, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型である.

定義 4.1. 以下, D は F 上の中心的斜体とし, $h(D)$ でその Hasse 不変量を表わす. Hasse 不変量 $h(D)$ は, $\dim_F(D) = d^2$ とするとき, 1 の原始 d 乗根であることに注意する.

- (1) 群 $\text{GL}_n(F)$ の F 上の内部形式の全体 $\{\text{GL}_m(D) \mid \dim_F(D) = d^2, md = n\}$ を $\tilde{X}_F(\text{GL}_n)$ (あるいは単に $\tilde{X}(\text{GL}_n)$) と表わす.
- (2) 群 $G \in \tilde{X}(\text{GL}_n)$ に対して, $Z(\text{SL}_n(\mathbb{C}))$ の指標 χ_G を, $\chi_G(\zeta_n) = h(D)$ を満たすものとして定める. ただし, $\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right)$ とする.

次に, [Art06] で導入された S -群と, それに対応する「拡張された」 L -パッケージの定義を述べる.

定義 4.2. L -パラメータ $\phi \in \Phi(\text{GL}_n)$ を 1 つとる.

- (1) 有限群 \mathcal{S}_ϕ を, \mathbb{C} 上の代数群 $Z_{\text{SL}_n(\mathbb{C})}(\phi)$ の連結成分のなす群 $Z_{\text{SL}_n(\mathbb{C})}(\phi)/Z_{\text{SL}_n(\mathbb{C})}(\phi)^\circ$ とする. これを, ϕ の S -群 (S -group, component group) という. ただし, $Z_{\text{SL}_n(\mathbb{C})}(\phi)$ は ϕ の像の $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ における中心化群であり, $Z_{\text{SL}_n(\mathbb{C})}(\phi)^\circ$ はその単位元を含む連結成分である.
- (2) 各 $G \in \tilde{X}(\text{GL}_n)$ に対して $\Pi_\phi(G) := \text{rec}_G^{-1}(\phi)$ とし, 有限集合 $\Pi_\phi \subset \coprod_{G \in \tilde{X}(\text{GL}_n)} \text{Irr}(G)$ を

$$\Pi_\phi := \coprod_{G \in \tilde{X}(\text{GL}_n)} \Pi_\phi(G)$$

で定め, これを L -パッケージという.

S -群 S_ϕ は $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))/ (Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \cap Z_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})}(\phi)^\circ)$ と同型であり、特に有限巡回群であって、位数は n の約数である。さらに、 ϕ が離散的ならば $S_\phi = Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ が成り立つ。また、各 $\Pi_\phi(G)$ は $\phi \in \Phi(G)$ ならば 1 元集合であり、そうでなければ空集合である。

定義 4.2 で定義した S -群 S_ϕ と L -パッケージ Π_ϕ を使うと、 $\mathrm{GL}_n(F)$ とその内部形式の LLC は次のように一まとめにして扱うことができる。

定理 4.3 ([ABPS16] Lemma 2.1, Theorem 2.2). L -パラメータ $\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n)$ をとる。

- (1) 群 $G \in \tilde{X}(\mathrm{GL}_n)$ に対応する指標 $\chi_G \in \mathrm{Irr}(Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})))$ が ϕ の S -群を経由する、つまり以下の図式を可換にする S_ϕ の指標が存在することと、 $\phi \in \Phi(G)$ 、つまり $\Pi_\phi(G) \neq \emptyset$ は同値である。

$$\begin{array}{ccc} Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\chi_G} & \mathbb{C}^\times \\ \downarrow & \circlearrowleft & \nearrow \chi_\pi \\ S_\phi & & \end{array}$$

このとき誘導される S_ϕ の指標を、 $\Pi_\phi(G) = \{\pi\}$ となる表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ を使って χ_π と表わす。

- (2) 内部形式全体をわたる表現の集合 $\coprod_{G \in \tilde{X}(\mathrm{GL}_n)} \mathrm{Irr}(G)$ の非交和分解

$$\coprod_{G \in \tilde{X}(\mathrm{GL}_n)} \mathrm{Irr}(G) = \coprod_{\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n)} \Pi_\phi$$

が成り立つ。さらに、写像 $\Pi_\phi \rightarrow \mathrm{Irr}(S_\phi)$; $\pi \mapsto \chi_\pi$ は全単射である。

定理 4.3 の形の LLC を使って、PTB 予想の精密化にあたる予想を定式化する。まず、次のような形の L -パラメータの集合を考える。

定義 4.4. L -パラメータ $\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n)$ であって、次の条件を満たす離散的な L -パラメータ $\phi_i \in \Phi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_{n_i})$, $\phi_j \in \Phi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_{n_j})$ による直和分解

$$\phi = \bigoplus_{i \in I_\phi} \phi_i \oplus \bigoplus_{j \in J_\phi} (\phi_j \oplus \phi_j^\vee), \quad n = \sum_{i \in I_\phi} n_i + 2 \sum_{j \in J_\phi} n_j$$

をもつものの集合を $\Phi^\circ(\mathrm{GL}_n)$ とおく：

- 任意の $i \in I_\phi$ に対して、 n_i は偶数かつ ϕ_i はシンプレクティック型。
- 任意の $i, i' \in I_\phi$ に対して、 $i \neq i'$ ならば $\phi_i \neq \phi_{i'}$ 。

定義 2.4 と定義 4.4 を比較すると、 $\mathrm{Irr}^\circ(G)$ に属する表現の L -パラメータは $\Phi^\circ(\mathrm{GL}_n)$ の元であることがわかる⁷。従って、定理 2.5 (1) の主張から次が得られる。

定理 4.5. 局所体 F の標数が 0 であるとし、既約表現 $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ が格別表現であるとする。このとき、 $\mathrm{rec}_G(\pi) \in \Phi^\circ(\mathrm{GL}_n)$ である。

⁷ここで、離散系列表現に対する予想 2.2 の前半の主張を一部使っていることに注意する。これは F の標数が 0 の場合 [Xue21] において証明されている。

以下では $\Phi^\circ(\mathrm{GL}_n)$ に属する L -パラメータと、それに対応するような表現だけを扱うことにする。さらに, GGP 予想に合わせて生成的な表現を含む L -パッケージを考える。そのような L -パッケージ内のどの表現が格別であるかを, S -群の指標によって記述する予想を定式化する。

予想 4.6. L -パラメータ $\phi \in \Phi^\circ(\mathrm{GL}_n)$ を 1 つとる。ただし, Π_ϕ が生成的な表現を含むとする。このとき, 表現 $\pi \in \Pi_\phi$ が格別であるための必要十分条件は, 任意の $i \in I_\phi$ に対して

$$\varepsilon(\mathrm{bc}_{E/F}(\phi_i)) = \chi_\pi(\zeta_n)^{\frac{1}{2} \dim(\phi_i)}$$

が成り立つことである。ただし, $\dim(\phi_i)$ は ϕ_i を Weil-Deligne 群 WD_F の表現とみなしたときの次元である。上式の両辺とも ± 1 のいずれかであることを注意する。

特に ϕ が離散的であるとき, $\pi \in \Pi_\phi$ が格別であるための必要十分条件は

$$\varepsilon(\mathrm{bc}_{E/F}(\phi)) = \chi_\pi(-1)$$

で与えられ, Π_ϕ に属する n 個の表現のうちの半分が格別であって, 残り半分は格別でない。

注 4.7. 予想 4.6 は, F が \mathbb{Q}_p ($p \neq 2$) の有限次拡大のとき正しい。これは定理 2.5 から直ちに従う。

注 4.8. GGP 予想では, 生成的な表現を含む L -パッケージにはちょうど 1 つ格別な表現が含まれていた。重複度 1 定理 (定理 3.1) より, これは次のように言い換えられる: L -パッケージ上の重複度の和

$$m(\Pi_\phi) := \sum_{\pi \in \Pi_\phi} m(\pi)$$

は一定の値 1 である。

一方で, PTB 予想の場合, ϕ を動かすごとに $m(\Pi_\phi)$ の値は変動し, Π_ϕ が生成的な表現を含んでいても一定ではない。ただし, L -パラメータ ϕ がシンプレクティック型で離散的ならば

$$m(\Pi_\phi) = \frac{n}{2}$$

となって一定値になる。

このような違いは, Bessel 周期と線型周期の間の以下の 2 つの相違点に原因があると考えられる:

- いずれの場合も, 代数多様体 G/H への G の Borel 部分群の作用は Zariski 開軌道をもつ。そのような等質空間を**球多様体** (*spherical variety*) という。GGP 予想の場合 Borel 部分群の開軌道はただ 1 つであるのに対して, PTB 予想の場合, 開軌道は複数ある。
- 群 G の任意の既約**緩増加** (*tempered*) 表現 (resp. 既約離散系列表現) の行列係数が $H/(Z(G) \cap H)$ 上で可積分であるとき, 球多様体 G/H は**強緩増加** (*strongly tempered*), (resp. **強離散的** (*strongly discrete*)) であるという。ただし, $Z(G)$ は G の中心を表わす。GGP 予想の場合 G/H は強緩増加であるが, PTB 予想の場合は強離散的であって強緩増加ではない。

一般に, 強緩増加な球多様体であって Borel 部分群の開軌道がただ 1 つであるものに対して, GGP 予想のような現象が成り立つと期待されている⁸ (例えば [SV17], [WZ]などを参照)。PTB 予想は, こ

⁸[SV17]によると, 「球多様体が type N spherical root を持たない」という条件も必要である。

これらの条件が満たされない場合に, GGP 予想のような格別表現の記述がどこまで成立するのか, どのように一般化されるのかを探る 1 つの手がかりになると考えられる.

謝辞. 代数学シンポジウムでの講演の機会を下さった, 世話人の皆様に感謝申し上げます. 特に, 数論のプログラム責任者である原隆先生 (津田塾大学), 大野泰生先生 (東北大学) およびシンポジウム責任者の森脇淳先生 (京都大学) に心より感謝いたします. また, 跡部発先生 (北海道大学) に原稿を読んでいただき有益な助言を賜りました. この場を借りてお礼申し上げます.

参考文献

- [Art06] J. Arthur, *A note on L -packets*, Pure Appl. Math. Q., **2**, no. 1, 2006, pp.199–217. [MR2217572](#), DOI 10.4310/PAMQ.2006.v2.n1.a9 [↑8](#)
- [ABPS16] A.-M. Aubert, P. Baum, R. Plymen, and M. Solleveld, *The local Langlands correspondence for inner forms of SL_n* , Res. Math. Sci., **3**, no. 32, 2016, pp.34 pp. [MR3579297](#), DOI 10.1186/s40687-016-0079-4 [↑2](#), [8](#), [9](#)
- [AGRS10] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, and G. Schiffmann, *Multiplicity one theorems*, Ann. Math., **172**, no. 2, 2010, pp.1407–1434. [MR2680495](#), DOI 10.4007/annals.2010.172.1407 [↑6](#)
- [Bad08] A. I. Badulescu, *Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations*, Invent. Math., **172**, no. 2, 2008, pp.383–438. [MR2390289](#), DOI 10.1007/s00222-007-0104-8 [↑3](#)
- [BM19] P. Broussous and N. Matringe, *Multiplicity one for pairs of Prasad–Takloo-Bighash type*, Int. Math. Res. Not. IMRN, in press, 2019. [MR4338222](#), DOI 10.1093/imrn/rnz254 [↑5](#)
- [BZ76] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-archimedean local field*, Uspehi Math. Nauk, **31**, no. 3(189), 1976, pp.5–70. [MR0425030](#) [↑4](#)
- [Che] C. Chen, *The local Gan-Gross-Prasad conjecture for special orthogonal groups over archimedean local fields*, preprint; available at [arXiv:2102.11404](#) [↑7](#), [8](#)
- [CL] C. Chen and Z. Luo, *The local Gross-Prasad conjecture over \mathbb{R} : Epsilon dichotomy*, preprint; available at [arXiv:2204.01212](#) [↑7](#)
- [GGP12] W.-T. Gan, B. Gross, and D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L -values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, Astérisque, **346**, 2012. [MR3052279](#), DOI 10.24033/ast.912 [↑4](#), [6](#), [7](#)
- [GJ72] R. Godement and H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 260, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. [MR0342495](#) [↑3](#)
- [GP92] B. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}* , Can. J. Math., **44**, no. 5, 1992, pp.974–1002. [MR1186476](#), DOI 10.4153/CJM-1992-060-8 [↑6](#), [7](#)
- [GR10] B. H. Gross and M. Reeder, *Arithmetic invariants of discrete Langlands parameters*, Duke Math. J., **154**, no. 3, 2010, pp.431–508. [MR2730575](#), DOI 10.1215/00127094-2010-043 [↑3](#)
- [Guo97] J. Guo, *Uniqueness of generalized Waldspurger model for $GL(2n)$* , Pacific J. Math., **180**, no. 2, 1997, pp.273–289. [MR1487565](#), DOI 10.2140/pjm.1997.180.273 [↑5](#)
- [Hen00] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique*, Invent. Math., **139**, 2000, pp.439–455. [MR1738446](#), DOI 10.1007/s002220050012 [↑3](#)
- [Kna94] A. W. Knaapp, *Local Langlands correspondence: The Archimedean case*, Motives, Proc. Sym. Pure Math., vol. 55, part 2, A.M.S., 1994, pp. 393–410, DOI 10.1090/pspum/055.2. [MR1265560](#) [↑3](#)
- [Lu22] H. Lu, *Multiplicity one for the pair $(GL_n(D), GL_n(E))$* , Transformation Groups, 2022, DOI 10.1007/s00031-022-09713-z [↑5](#)

- [Luo] Z. Luo, *A local trace formula for the local Gross-Prasad conjecture for special orthogonal groups*, preprint; available at [arXiv:2009.13947](https://arxiv.org/abs/2009.13947) ↑7
- [三枝 14] Y. 三枝, *GL(n) の局所ラングランズ対応*, 第 21 回整数論サマースクール「 p 進簡約群の表現論入門」報告集, 2014, available at https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/pdf/GL_n-LLC.pdf ↑2
- [Möl] J. Möllers, *Symmetry breaking operators for strongly spherical reductive pairs and the Gross-Prasad conjecture for complex orthogonal groups*, preprint; available at [arXiv:1705.06109](https://arxiv.org/abs/1705.06109) ↑8
- [MW12] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les groupes spéciaux orthogonaux : le cas général*, *Astérisque*, **347**, 2012, pp.167–216. [MR3155346](https://doi.org/10.24033/ast.920), DOI 10.24033/ast.920 ↑7
- [PTB11] D. Prasad and R. Takloo-Bighash, *Bessel models for GSp(4)*, *J. Reine Angew. Math.*, **655**, 2011, pp.189–243. [MR2806111](https://doi.org/10.1515/CRELLE.2011.045), DOI 10.1515/CRELLE.2011.045 ↑5
- [Sha90] F. Shahidi, *A proof of Langlands’ conjecture on Plancherel measures; complementary series of p -adic groups*, *Ann. Math.*, **132**, no. 2, 1990, pp.273–330. [MR1070599](https://doi.org/10.2307/1971524), DOI 10.2307/1971524 ↑7
- [Séc] V. Sécherre, *Représentations cuspidales de $GL_r(D)$ distinguées par une involution intérieure*, preprint; available at [arXiv:2005.05615](https://arxiv.org/abs/2005.05615) ↑5
- [Suz21] M. Suzuki, *Classification of standard modules with linear periods*, *J. Number Theory*, **218**, 2021, pp.302–310. [MR4157701](https://doi.org/10.1016/j.jnt.2020.07.005), DOI 10.1016/j.jnt.2020.07.005 ↑5
- [ST] M. Suzuki and H. Tamori, *Epsilon dichotomy for linear models: the Archimedean case*, preprint; available at [arXiv:2207.00743](https://arxiv.org/abs/2207.00743) ↑1, 5
- [SV17] Y. Sakellaridis and A. Venkatesh, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*, *Astérisque*, 2017. [MR3764130](https://doi.org/10.1016/j.jnt.2020.07.005) ↑10
- [SX] M. Suzuki and H. Xue, *Linear intertwining periods and epsilon dichotomy for linear models*, preprint, available at https://www.math.arizona.edu/~xuehang/intertwining_v1.pdf ↑1, 5
- [SZ12] B. Sun and C.-B. Zhu, *Multiplicity one theorems: the Archimedean case*, *Ann. Math.*, **175**, no. 1, 2012, pp.23–44. [MR2874638](https://doi.org/10.2307/1971524) ↑6
- [Tat] J. Tate, *Number theoretic background*, *Automorphic Forms, Representations, and L-Functions*, *Poc. Sym. Pure Math.*, vol. 33, part 2, A.M.S., 1979, pp. 3–26, DOI 10.1090/pspum/033.2. [MR546607](https://doi.org/10.2307/1971524) ↑3
- [Wal10] J.-L. Waldspurger, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad*, *Compos. Math.*, **146**, no. 5, 2010, pp.1180–1290. [MR2684300](https://doi.org/10.1112/S0010437X10004744), DOI 10.1112/S0010437X10004744 ↑7
- [Wal12a] ———, *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, 2e partie : Extension aux représentations tempérées*, *Astérisque*, **346**, 2012, pp.171–312. [MR3202558](https://doi.org/10.24033/ast.915), DOI 10.24033/ast.915 ↑7
- [Wal12b] ———, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux*, *Astérisque*, **347**, 2012, pp.103–166. [MR3155345](https://doi.org/10.24033/ast.918), DOI 10.24033/ast.918 ↑7
- [Wal12c] ———, *Une variante d’un résultat de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann*, *Astérisque*, **346**, 2012, pp.313–318. [MR3202559](https://doi.org/10.24033/ast.916), DOI 10.24033/ast.916 ↑6
- [WZ] C. Wan and L. Zhang, *Multiplicities for strongly tempered spherical varieties*, preprint, available at [2204.07977](https://arxiv.org/abs/2204.07977) ↑10
- [Xue21] H. Xue, *Epsilon dichotomy for linear models*, *Algebra Number Theory*, **15**, no. 1, 2021, pp.173–215. [MR4226986](https://doi.org/10.2140/ant.2021.15.173), DOI 10.2140/ant.2021.15.173 ↑5, 9

鈴木美裕 (Suzuki Miyu)

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町, 京都大学 理学研究科 数学教室

suzuki.miyu.4c@kyoto-u.ac.jp

惰性的素数における CM 楕円曲線の反円分岩澤理論

太田 和惟* (大阪大学理学研究科)

概要

本稿は、2022 年に開催された第 67 回代数学シンポジウムにおいて著者が行った講演に関する報告である。

1 はじめに

本稿では、第 67 回代数学シンポジウムの著者の講演で解説した、Ashay Burungale 氏と小林真一氏との共同研究によって得られた成果 [4, 5] について報告する。

素数 p が虚二次体 K で完全分解する場合の CM 楕円曲線の岩澤理論は非常に理解が進んでいるが、惰性する場合は未知な部分が多い。そのような状況で、Rubin [23] は惰性的素数の場合の反円分岩澤理論の先駆的な研究を行い重要な礎を築き、基本的な予想 (Rubin 予想) を提出した。本稿では、[4] の主結果である Rubin 予想の証明と、[4, 5] においてそれがどのような数論的な応用をもたらすかを概説する。

構成は次のようになっている。§2 で CM 楕円曲線の岩澤理論的現象を観察しモチベーションを簡単に確認する。§3 で Rubin 予想の主張を説明し、[4] の主結果を解説する。§4 で主結果から得られる数論的応用を概説し、§5 で Rubin 予想の証明について解説する。

2022 年 12 月 31 日

本研究は JSPS 科研費 JP17K14173, JP21K13774, JP22H00096 の助成を受けたものです。

*kazutoota@math.sci.osaka-u.ac.jp

■謝辞 第 67 回代数学シンポジウムにおける講演の機会をいただき、会場責任者である森脇淳氏、シンポジウム責任者である小島秀雄氏、および数論のプログラム責任者である原隆氏 (津田塾大学) と大野泰生氏に感謝いたします。特に、講演の依頼をくださいました原隆氏に心からお礼申し上げます。

本稿を通じて使う記号

$p \geq 5$ を素数とし、埋め込み $\iota: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}, \iota_p: \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。 \mathbb{Q} や \mathbb{Q}_p の有限次拡大 L に対し、 \mathcal{O}_L で L の整数環を表し、 G_L で L の絶対 Galois 群を表す。

整数 $n \geq 1$ に対し、 μ_n で 1 の n 乗根全体のなす群を表し、 L が \mathbb{Q}_p の有限次拡大のとき、 $\mathcal{O}_L(1) := \varprojlim_n \mu_{p^n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L$ とおく。

2 CM 楕円曲線の岩澤理論

この節では、CM 楕円曲線の岩澤理論を簡単に概説する。

Coates-Wiles [8] の Birch and Swinnerton-Dyer 予想 (BSD 予想) に対する初めての一般的な結果に代表されるように、CM 楕円曲線の岩澤理論は目覚ましい数論的な成果をもたらしてきた。岩澤理論では、代数体 K 上の数論的な対象 (K 上の楕円曲線や G_K の p 進表現など) に付随する数論的な群や (p 進) L 関数の、 \mathbb{Z}_p 拡大 K_∞/K (つまり、 $\text{Gal}(K_\infty/K) \cong \mathbb{Z}_p$ となるアーベル拡大) における振る舞いが中心的な対象であるが、その様相は素数 p と \mathbb{Z}_p 拡大に大きく依存する。これを観察してみよう。

E を p で良還元をもつ \mathbb{Q} 上の楕円曲線とし、虚二次体 K で虚数乘法をもつとする (つまり、 $\text{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong K$)。 K の円分 \mathbb{Z}_p 拡大を K_∞^{cyc} で表し、反円分 \mathbb{Z}_p 拡大 (cf. (4.1)) を K_∞^{ac} で表す。下の定理 2.1 より、 $\text{rank} E(L)$ ($K \subseteq L \subsetneq K_\infty$) の漸近的な振る舞いが、 \mathbb{Z}_p 拡大 K_∞/K と p に強く依存することがわかる。

定理 2.1 $w_{E/\mathbb{Q}} = \pm 1$ を E のルートナンバーとする (特に、 $w_{E/\mathbb{Q}} = (-1)^{\text{ord}_{s=1} L(E,s)}$)。 $n \geq 0$ に対し、 $K \subseteq K_n \subseteq K_\infty$ を $[K_n : K] = p^n$ となる唯一の部分体とする。このとき、 $n \gg 0$ に対し、

$$\text{rank} E(K_n) - \text{rank} E(K_{n-1}) = \begin{cases} 0 & (K_\infty = K_\infty^{\text{cyc}}), \\ c_1(p^n - p^{n-1}) & (K_\infty = K_\infty^{\text{ac}}, p \text{ が } K \text{ で完全分解}), \\ c_n(p^n - p^{n-1}) & (K_\infty = K_\infty^{\text{ac}}, p \text{ が } K \text{ で惰性}). \end{cases}$$

ここで, $c_n := \begin{cases} 0 & ((-1)^{n+1} = w_{E/\mathbb{Q}}), \\ 2 & ((-1)^{n+1} = -w_{E/\mathbb{Q}}). \end{cases}$

注意 2.2 (1) 上の定理は, Gross-Zagier, Kolyvagin, Greenberg, Rohrlich, Rubin らの結果から従う (cf. [2, 10]). $K_\infty = K_\infty^{\text{ac}}$ で p が K で惰性する場合は Greenberg (未出版) によるが, [5] にも証明がある.

(2) $K_\infty = K_\infty^{\text{ac}}$ とし, φ を E に付随する K 上の Hecke 指標とすると, $L(E/K_n, s) = \prod_{\chi \in (\text{Gal}(K_n/K))^\wedge} L(\varphi\chi, s)^2$ なので (χ は $\text{Gal}(K_n/K)$ の指標全体をわたる), BSD 予想により $\text{rank}E(K_n)$ の振る舞いは, $\text{ord}_{s=1}L(\varphi\chi, s)$ や $\varphi\chi$ のルートナンバーの振る舞いと関係が深いと期待される. これについては (3.1), (4.3) を参照されたい.

$K_\infty = K_\infty^{\text{cyc}}$ の場合は円分岩澤理論とよばれ, 楕円曲線に限らず非常に一般的な数論的な対象に対して, 岩澤理論の中核をなす, p 進 L 関数と Selmer 群の等価性を予想するタイプの岩澤主予想が定式化されるなど理解が進んでいる (cf. [19]). p が K で完全分解する場合は, E が p で良通常還元をもつので, 「通常」の場合 (より一般に Panchishkin 条件を満たす場合) の岩澤理論として, やはり一般的な設定で同タイプの岩澤主予想が考察されている (cf. [11]). しかし, $K_\infty = K_\infty^{\text{ac}}$ で p が惰性する場合は Panchishkin 条件を満たさない場合の反円分岩澤理論となり, 上記の一般的に展開されている岩澤理論の枠に当てはまらず, p 進 L 関数や Selmer 群に関する一般的な予想もない. 定理 2.1 で観察された「 n の偶奇に $\text{rank}E(K_n)$ の振る舞いが依る」という不思議な現象はこの場合の豊穡な岩澤理論のほんの一部の現れだと考えられ, より深く理解するために, まずは CM 楕円曲線の場合を考察して一般化への最初のステップとしたい.

しかし, p が惰性する場合の CM 楕円曲線の反円分岩澤理論は, p 進 L 関数の存在自体も非自明で, 未知の部分も多かった. 例えば, p が完全分解するとき, \mathbb{Z}_p 拡大の局所単数群から定まる岩澤加群は階数が 1 となり, 楕円単数が生成する部分加群による商がトーションとなり, その特性イデアルが p 進 L 関数の生成するイデアルと一致するということが本質的に重要であった. 一方で, p が惰性する時は, 同様の性質を満たす p 進 L 関数は構成されておらず, 局所単数群の岩澤加群も階数が 2 になってしまい, ナイーブな類似が成り立たない.

Rubin [23] は p が惰性する場合の基礎的な研究を行い, 以下で解説するように, 局

所単数群の階数 1 の部分加群で, 注意 2.2 (2) で述べたようなルートナンバーの振る舞いを反映するものを 2 つ導入し (cf. 定義 3.1), p 進 L 関数を導入するなど (cf. 定義 4.1), 重要な成果をあげた. Rubin 予想は, この 2 つの階数 1 の部分加群が直和分解を与えるというものであり, シンプルではあるが驚くほど多くの応用をもたらす.

3 主結果

この節では, Rubin 予想 (予想 3.3) の正確な主張を述べ, [4] の主定理を紹介する.

3.1 記号

Ψ を \mathbb{Q}_p の不分岐二次拡大とし, \mathcal{F} をパラメーターが $-p$ の \mathcal{O}_Ψ 上の Lubin-Tate 形式群とすると, $T_{\mathcal{F}} := \varprojlim \mathcal{F}[p^n]$ は G_Ψ が連続的に作用する階数 1 の \mathcal{O}_Ψ 上の自由加群で, この作用を与える指標を $\kappa : G_\Psi \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{O}_\Psi}(T_{\mathcal{F}}) = \mathcal{O}_\Psi^\times$ で表す. $\tau \in \text{Gal}(\Psi/\mathbb{Q}_p)$ を非自明な元とし, $\kappa^\tau : G_\Psi \rightarrow \mathcal{O}_\Psi^\times$ を, $\kappa^\tau(g) = \kappa(\tilde{\tau}^{-1}g\tilde{\tau})$ で定義する (ただし, $\tilde{\tau} \in G_{\mathbb{Q}_p}$ は位数 2 の τ のリフトを表す). 指標 κ/κ^τ の核に Galois 理論で対応する Ψ の拡大体はただ一つの \mathbb{Z}_p 拡大 Ψ_∞/Ψ を含む (Ψ の反円分 \mathbb{Z}_p 拡大とよぶ). $\Gamma = \text{Gal}(\Psi_\infty/\Psi)$ とおき, $\Lambda = \mathcal{O}_\Psi[[\Gamma]] := \varprojlim_n \mathcal{O}_\Psi[\Gamma/\Gamma^{p^n}]$ を対応する岩澤代数とすると, $T_{\mathcal{F}}^{\otimes -1}(1) := \text{Hom}_{\mathcal{O}_\Psi}(T_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_\Psi(1))$ と

$$\mathbb{T} := \text{Hom}_{\mathcal{O}_\Psi}(T_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_\Psi(1)) \otimes_{\mathcal{O}_\Psi} \Lambda$$

にも G_Ψ が作用する. ここで, $g \in G_\Psi$ は $[g^{-1}] \in \Lambda^\times$ による積で Λ に作用するものとする ($[g]$ は g の $G_\Psi \rightarrow \Gamma \subseteq \Lambda^\times$ における像を表す).

3.2 Rubin 予想

まず, Rubin 予想の主張を述べるためにいくつかの記号を導入する. Ξ を Γ の $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 値有限指標全体のなす集合を表し,

$$\begin{aligned} \Xi^+ &= \{ \chi \in \Xi \mid \chi \text{ の導手が } p^{2m} \ (m \in \mathbb{Z}) \}, \\ \Xi^- &= \{ \chi \in \Xi \mid \chi \text{ の導手が } p^{2m+1} \ (m \in \mathbb{Z}) \} \end{aligned}$$

とおく (これは, 分解 $\Xi = \Xi^+ \sqcup \Xi^-$ を与える). $\chi \in \Xi$ に対し,

$$\exp_\chi^* : H^1(\Psi, \mathbb{T}) \rightarrow \Psi(\text{Im}(\chi))$$

を, χ での特殊化 $\Lambda \rightarrow \mathcal{O}_\Psi[\text{Im}(\chi)]$ が誘導する

$$H^1(\Psi, \mathbb{T}) \rightarrow H^1(\Psi, T_{\mathcal{F}}^{\otimes -1}(1)(\chi))$$

と双対指数写像 (dual exponential map)

$$H^1(\Psi, T_{\mathcal{F}}^{\otimes -1}(1)(\chi)) \rightarrow \text{coLie}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_\Psi} \Psi(\text{Im}(\chi)) = \Psi(\text{Im}(\chi))$$

の合成として定義する (最後の同一視は, $\text{coLie}(\mathcal{F})$ の \mathcal{O}_Ψ 上の基底を固定することで定める).

定義 3.1 (Rubin [23]) ガロワコホモロジー群 $H^1(\Psi, \mathbb{T})$ の部分加群 $H_\pm^1(\Psi, \mathbb{T})$ を次で定義する.

$$H_\pm^1(\Psi, \mathbb{T}) = \{ x \in H^1(\Psi, \mathbb{T}) \mid \text{任意の } \chi \in \Xi^\mp \text{ に対し } \exp_\chi^*(x) = 0 \}.$$

注意 3.2 (1) Ξ^\pm は CM 楕円曲線に付随する K 上の Hecke 指標のルートナンバーの振る舞いと非常に関係が深い. K を p で不岐な虚二次体とする. E を K で虚数乗法をもつ \mathbb{Q} 上の楕円曲線とし, p で良還元をもつとする. E に付随する K の Hecke 指標を φ とし, K_∞/K を反円分 \mathbb{Z}_p 拡大とする. 任意の有限指標 $\chi: \text{Gal}(K_\infty/K) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対し, Hecke 指標 $\varphi\chi$ のルートナンバーを $w(\varphi\chi)$ とすると $w(\varphi\chi) \in \{\pm 1\}$ が成り立ち, さらに χ の導手を p^n とすると

$$w(\varphi\chi) = \begin{cases} w_{E/\mathbb{Q}} & (p \text{ が } K \text{ で完全分解}), \\ (-1)^n w_{E/\mathbb{Q}} & (p \text{ が } K \text{ で惰性}). \end{cases} \quad (3.1)$$

したがって, p が K で惰性するとき, $\varepsilon = w_{E/\mathbb{Q}} \in \{\pm 1\}$ とおくと, $\chi \in \Xi^{\pm\varepsilon}$ であることと $w(\varphi\chi) = \pm 1$ であることが同値となる (ただし, Γ を分解群と見なすことで $\text{Gal}(K_\infty/K)$ と同一視した). このとき, $z \in H^1(\Psi, \mathbb{T})$ を楕円単数から定まるコホモロジー類の像とすると, $\chi \in \Xi$ に対して $\exp_\chi^*(z)$ は $L(\varphi\chi^{-1}, 1)$ の代数的部分で書けるので (cf. (4.1)),

$$z \in H_\varepsilon^1(\Psi, \mathbb{T}) \quad (3.2)$$

がわかる.

- (2) Rubin のオリジナルの定義は, 局所単数群から定まる岩澤加群の部分加群として定義されるものだったが, それと定義 3.1 のものは自然に同一視できる (cf. [5, §2]).

Rubin は, $H_{\pm}^1(\Psi, \mathbb{T})$ が階数 1 の自由 Λ 加群であり, $H_{+}^1(\Psi, \mathbb{T}) \cap H_{-}^1(\Psi, \mathbb{T}) = \{0\}$ であることを示し (cf. [23, Proposition 8.1]), 次のように $H_{\pm}^1(\Psi, \mathbb{T})$ が, $H^1(\Psi, \mathbb{T})$ における互いの補空間になっていることを予想した.

予想 3.3 (Rubin [23]) 次が成り立つ:

$$H^1(\Psi, \mathbb{T}) = H_{+}^1(\Psi, \mathbb{T}) \oplus H_{-}^1(\Psi, \mathbb{T}).$$

注意 3.4 予想 3.3 は局所的な主張で, 素数 p にしかよらない (§2 でとった虚二次体や楕円曲線にはよらない).

この予想が正しいというのが, [4] の主結果である:

定理 3.5 予想 3.3 は正しい.

予想 3.3 は一見すると非常にシンプルな予想だが, 驚くほど様々な応用をもたらす. 次の節ではその応用について概観する. 定理 3.5 の証明は §5 で解説する.

4 CM 楕円曲線の数論への応用

この節では, 予想 3.3 の, 特に Rubin が導入した p 進 L 関数への応用を中心に概説する. 簡単のため, 本稿では類数が 1 の虚二次体の場合の応用を述べるが, この節で述べる定理はより一般的な設定で成り立つ (cf. [4, 5]). また, ここで述べられない応用もいくつかあり, それらについては [5, 7] を参照されたい.

4.1 記号

K を p が惰性する虚二次体とし, K_{∞}^{full} を K の全ての \mathbb{Z}_p 拡大の合成体とすると, これは $\text{Gal}(K_{\infty}^{\text{full}}/K) \cong \mathbb{Z}_p^{\oplus 2}$ となる K のアーベル拡大で, $\text{Gal}(K_{\infty}^{\text{full}}/K)$ に $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{1, \tau\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が作用する. $\text{Gal}(K_{\infty}^{\text{full}}/K)^{\pm}$ を τ が ± 1 で作用する部分加群とすると, これは \mathbb{Z}_p 上階数 1 の自由加群である. 反円分 \mathbb{Z}_p 拡大 K_{∞} は $\text{Gal}(K_{\infty}^{\text{full}}/K)^+$ の固定体として定義される (なお, $\text{Gal}(K_{\infty}^{\text{full}}/K)^-$ の固定体が K_{∞}^{cyc} である). 以下, 注意 3.2 のように, $\text{Gal}(K_{\infty}/K)$ と $\text{Gal}(\Psi_{\infty}/\Psi)$ を同一視する.

E を K で CM をもつ \mathbb{Q} 上の楕円曲線で, p で良還元をもつものとする. 素イデアル $p\mathcal{O}_K$ での E の極小 Weierstrass 方程式を固定すると, E の形式群 \hat{E} と \mathcal{F} との

\mathcal{O}_Ψ 上の同型が得られ, Galois 表現 $G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(E))$ の G_Ψ への制限は §3.1 で導入した表現 $G_\Psi \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{O}_\Psi}(T_{\mathcal{F}})$ と同一視される. φ を E_K (E の K への底変換) に付随する K 上の Hecke 指標とし, \mathfrak{f} をその導手とする.

4.2 Rubin の p 進 L 関数

この小節では, Rubin の p 進 L 関数を導入する.

$v_{\pm} \in H_{\pm}^1(\Psi, \mathbb{T})$ を Λ 上の基底とする. 次を満たすような楕円単数のコホモロジー類の像 $z_\varphi \in H^1(\Psi, \mathbb{T})$ をとる: 任意の $\chi \in \Xi$ に対し,

$$\exp_{\chi}^*(z_\varphi) = \frac{L_{\text{pf}}(\varphi\chi^{-1}, 1)}{\Omega_K}. \quad (4.1)$$

ここで, $L_{\text{pf}}(\varphi\chi^{-1}, s)$ は pf を割る素点での Euler 因子を除いた L 関数, $\Omega_K \in \mathbb{C}^\times$ は CM 周期を表す.

定義 4.1 $\varepsilon = w(\varphi) \in \{\pm 1\}$ (φ のルートナンバー) とおくと, $z_\varphi \in H_\varepsilon^1(\Psi, \mathbb{T})$ であることに注意し (cf. 注意 3.2), $\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon) \in \Lambda$ を

$$\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon)v_\varepsilon = z_\varphi$$

で定義する.

注意 4.2 定義から明らかに, Λ のイデアルの等式

$$\text{char}_\Lambda(H_\varepsilon^1(\Psi, \mathbb{T})/\Lambda z_\varphi) = (\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon))$$

を得る. ここで, char_Λ は特性イデアルを表す. 上の等式は, §2 で簡単に説明した p が K で完全分解のときの p 進 L 関数と楕円単数の間にある関係の類似になっている.

(4.1) より, $\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon)$ は次のような補間性質をもつ.

命題 4.3 任意の $\chi \in \Xi^\varepsilon$ に対して,

$$\chi(\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon)) = \frac{1}{\exp_{\chi^{-1}}^*(v_\varepsilon)} \cdot \frac{L_{\text{pf}}(\varphi\chi, 1)}{\Omega_K}. \quad (4.2)$$

ここで, χ が誘導する \mathcal{O}_Ψ 代数の準同型 $\Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を同じ記号 χ で表す.

注意 4.4 (1) 定理 3.5 から, $\exp_{\chi}^*(v_\varepsilon) \neq 0$ がわかる (cf. [23, Lemma 10.1]).

- (2) p が K で完全分解するときの p 進 L 関数の補間公式には一般化 Gauss 和と p 進周期が表れるが, (4.2) の $\exp_{\chi^{-1}}^*(v_\varepsilon)$ は Gauss 和のような形をしており, またある種の p 進周期のようなものではないかと期待される (cf. [23, page 421]).
- (3) [6] では $\exp_{\chi}^*(v_\varepsilon)$ の p 進付値を決定し, その応用として, $\chi \in \Xi^\varepsilon$ を動くときの $L_{\text{pf}}(\varphi\chi, 1)/\Omega_K$ の p 進付値の漸近公式を得られている.

4.3 Rubin の p 進 L 関数の特殊値

命題 4.3 では, $\chi \in \Xi^\varepsilon$ での特殊値が考察されているが, Rubin [23] は $\chi \in \Xi^{-\varepsilon}$ での特殊値がどうなるかを問いかけている. この小節では $\chi \in \Xi^{-\varepsilon}$ での特殊値に関して得られた [5] の結果を概説する.

まず, $\chi \in \Xi^{-\varepsilon}$ のとき, (4.2) は有限個の例外を除いて成り立たないことに注意する. 実際, 無限個の $\chi \in \Xi^{-\varepsilon}$ に対し (4.2) が成り立つと仮定すると, $L(\varphi\chi, 1) = 0$ なので (注意 3.2), $\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon)$ は無限個の零点をもつ Λ の元になり $\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon) = 0$ となるが, 有限個の $\chi \in \Xi^\varepsilon$ を除いて (4.2) の右辺は非零なので (cf. [20]), これは矛盾である.

$\chi \in \Xi^{-\varepsilon}$ のとき, 常に $L(\varphi\chi, 1) = 0$ なので, 近年では BDP 公式 (Bertolini-Darmon-Prasanna [3]) と呼ばれ重要な役割を果たしているものの類似として, 素朴には $\chi(\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon))$ と楕円曲線の有理点とが結びつくのではないかと期待されるが, その期待に応えるのが次の定理である.

定理 4.5 $\varepsilon := w_{E/\mathbb{Q}} = -1$ とする. このとき, 次を満たす $P \in E(\mathbb{Q})$ と $c_P \in \mathbb{Q}^\times \mathcal{O}_K^\times$ が存在する.

- (1) χ が自明指標 $\mathbb{1} \in \Xi^+ = \Xi^{-\varepsilon}$ のとき,

$$\mathbb{1}(\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon)) = (1 + p^{-1}) \frac{\log_{\hat{E}}(P)^2}{\log_{\hat{E}}(\mathbb{1}(v_-))} c_P.$$

ここで, $\mathbb{1}$ が誘導する準同型写像

$$H^1(\Psi, \mathbb{T}) \rightarrow H^1(\Psi, T_{\mathcal{F}}^{\otimes -1}(1)) \cong H^1(\Psi, T_p(E))^\tau$$

(($-$) $^\tau$ は複素共役 τ による $\text{Gal}(\Psi/\mathbb{Q}_p)$ の作用のひねりを表す) を同じ記号 $\mathbb{1}$ で表し, $\log_{\hat{E}}$ は \hat{E} に付随する形式対数を表す ($H_-^1(\Psi, \mathbb{T})$ の定義か

ら $\exp_{\mathbb{1}}^*(v_-) = 0$ なので, $\mathbf{1}(v_-) \in H^1(\Psi, T_p(E))^\tau$ は Kummer 写像による $\hat{E}(\mathcal{O}_\Psi)$ の像に属することに注意する).

(2) P がねじれ元でないことと $\text{ord}_{s=1} L(E, s) = 1$ が同値.

(3) 上の (2) が成り立つとき,

$$c_P = \frac{L'(E, 1)}{\Omega_K \langle P, P \rangle_{\text{NT}}}.$$

ここで, $\langle -, - \rangle_{\text{NT}}$ は Néron-Tate 高さ対を表す.

注意 4.6 p が K で完全分解するときの定理 4.5 の類似は Rubin によって示されている (cf. [25]).

$\text{Sel}(K_n, T_p(E)) \subseteq H^1(K_n, T_p(E))$ を通常のコmpactな Selmer 群とする. $\text{Gal}(K_n/K)$ が作用する \mathcal{O}_Ψ 加群 M と $\text{Gal}(K_n/K)$ の指標 χ に対して

$$M^\chi = \{ x \in M \otimes_{\mathcal{O}_\Psi} \mathcal{O}_{\Psi(\mu_{p^n})} \mid \text{任意の } \sigma \in \text{Gal}(K_n/K) \text{ に対して, } \sigma x = \chi(\sigma)x \}$$

とおく.

χ が自明指標でない場合にも, 定理 4.5 に比べると精密さは欠けるが, 次のような結果を得られる.

定理 4.7 $\chi \in \Xi^{-\varepsilon}$ とし, 導手を $p^{n+1} > 1$ であるとする. このとき, 次を満たす $z_\chi \in \text{Sel}(K_n, T_p(E))^{\chi^{-1}}$ が存在する.

(1)

$$\chi(\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon)) = \exp_{\chi^{-1}}^*(v_{-\varepsilon}) \log_{\hat{E}}(\text{loc}_p(z_\chi)).$$

ここで $\text{loc}_p : \text{Sel}(K_n, T_p(E)) \rightarrow \hat{E}(\mathcal{O}_{\Psi_n})$ は局所化写像を表す.

(2) $\text{ord}_{s=1} L(\varphi\chi, s) = 1$ ならば, $z_\chi \in (E(K_n) \otimes_{\mathcal{O}_K} \Psi)^{\chi^{-1}}$ の生成元となる.

注意 4.8 (1) 定理 4.5, 4.7 の証明については本稿で解説しないが, 鍵の一つは定理 3.5 によってガロワコホモロジー $H^1(\Psi, \mathbb{T})$ の構造がよくわかり $\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon)$ の, いわゆる Coleman 構成ができることである. χ が自明指標であるときは, さらに p 進 Gross-Zagier 公式 (cf. [16]) などの p 進高さ関数に関する諸公式が重要な役割を果たす.

(2) (ここでは、 p が K で完全分解してもよいとする.) [20] より、 $n \gg 0$ に対し、

$$\text{ord}_{s=1} L(\varphi\chi, s) = \frac{1 - w(\varphi\chi)}{2} = \begin{cases} c_1/2 & (p \text{ が } K \text{ で完全分解}) \\ c_n/2 & (p \text{ が } K \text{ で惰性}) \end{cases} \quad (\chi \in \Xi_n). \quad (4.3)$$

ここで、 Ξ_n は導手 p^{n+1} である $\text{Gal}(K_\infty/K)$ 上の指標全体のなす集合を表し、二つ目の等式は (3.1) による. $(E(K_n)/E(K_{n-1})) \otimes_{\mathcal{O}_K} \Psi(\mu_{p^n}) = \bigoplus_{\chi \in \Xi_n} (E(K_n) \otimes_{\mathcal{O}_K} \Psi)^\chi$ なので、定理 2.1, 4.7 より、 p が K で惰性するとき、 $(-1)^{n+1} = -\varepsilon$ となる $n \gg 0$ に対し $(E(K_n)/E(K_{n-1})) \otimes_{\mathcal{O}_K} \Psi(\mu_{p^n})$ の生成元は $\{z_\chi\}_{\chi \in \Xi_n}$ で与えられる.

4.4 岩澤主予想

Agboola-Howard [1] の結果と定理 3.5 を合わせて、 p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_\varepsilon)$ をある種の Selmer 群と結びつける岩澤主予想が成り立つことを説明する.

導手が p^{n+1} を割る $\chi \in \Xi$ と $x \in \hat{E}(\mathcal{O}_{\Psi_n})$ に対し、

$$\lambda_\chi(x) = p^{-n} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(\Psi_n/\Psi)} \chi^{-1}(\sigma) \log_{\hat{E}}(x^\sigma) \in \Psi_n(\text{Im}(\chi))$$

とおく. また、

$$\hat{E}(\mathcal{O}_{\Psi_n})^\pm = \left\{ x \in \hat{E}(\mathcal{O}_{\Psi_n}) \mid \text{任意の } \chi \in \Xi^\pm \text{ に対し, } \lambda_\chi(x) = 0 \right\}$$

とおく.

定義 4.9 (1) $H_\pm^1(\Psi_n, E[p^\infty]) \subseteq H^1(\Psi_n, E[p^\infty])$ を、 $\hat{E}(\mathcal{O}_{\Psi_n}) \otimes_{\mathcal{O}_\Psi} \Psi/\mathcal{O}_\Psi$ の Kummer 写像における像で定義する.

(2) $\text{Sel}_\pm(K, E[p^\infty]) \subseteq H^1(K, E[p^\infty])$ を

$$\begin{aligned} & \text{Sel}_\pm(K_n, E[p^\infty]) \\ &= \ker \left(H^1(K_n, E[p^\infty]) \longrightarrow \frac{H^1(K_{n,p}, E[p^\infty])}{H_\pm^1(K_{n,p}, E[p^\infty])} \times \prod_{v \nmid p} H^1(K_{n,v}, E[p^\infty]) \right) \end{aligned}$$

で定義する. ただし、 v は K_n の p を割らない有限素点を渡り、 $K_{n,v}$ は v での完備化を表し、 $K_{n,p}$ は p を割る K_n の唯一の素点における完備化を表す.

定理 4.10 \mathcal{X}_{\pm} を $\varinjlim_n \text{Sel}_{\pm}(K_n, E[p^{\infty}])$ の Pontryagin 双対で定義する. $\varepsilon = w_{E/\mathbb{Q}}$ とする. このとき, Λ のイデアルの等式

$$\text{char}_{\Lambda}(\mathcal{X}_{-\varepsilon}) = (\mathcal{L}_p(\varphi, \Omega_K, v_{\varepsilon})) \quad (4.4)$$

が成り立つ.

証明 Rubin [24] が示した二変数岩澤主予想を用いて, Agboola-Howard [1] が (4.4) を予想 3.3 に帰着した. このことと定理 3.5 より定理 4.10 が従う. \square

5 定理 3.5 の証明

この節では, 定理 3.5 の証明について解説する. 記号は §3 と同じものとする.

5.1 Rubin の判定法

Rubin は予想 3.3 を, ある種の L 関数の法 p 消滅性を満たす CM 楕円曲線と, 法 p 消滅性を満たす CM 点 (あるいは, Heegner 点) の族の存在に帰着した. その議論を辿ることにより, 次を示すことができる.

定理 5.1 次の二つの主張 (a), (b) が正しければ, 予想 3.3 は正しい.

(a) $p \exp_{\mathbb{1}}(\xi) \not\equiv 0 \pmod{p}$ となる $\xi \in H^1_{+}(\Psi, \mathbb{T})$ が存在する. ここで,

$$p \exp_{\mathbb{1}} : H^1(\Psi, \mathbb{T}) \rightarrow H^1(\Psi, T_{\mathcal{F}}^{\otimes -1}(1)) \xrightarrow{p \exp^*} \text{coLie}_{\mathcal{O}_{\Psi}}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_{\Psi}$$

なので, 上の合同式が意味をもつことに注意する.

(b) 次の 2 条件を満たす $(c_n) \in \prod_{n \geq 0} \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\Psi_n})$ が存在する.

$$\text{Tr}_{n+1/n} c_{n+1} = -c_{n-1} \quad (n \geq 1), \quad (5.1)$$

$$\text{Tr}_{1/0} c_1 \not\equiv 0 \pmod{p} \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\Psi}). \quad (5.2)$$

ここで, $\text{Tr}_{n+1/n} : \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\Psi_{n+1}}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}_{\Psi_n})$ はトレース写像を表す.

証明 本質的に [23, Theorem 8.4] の証明の議論からわかる. \square

注意 5.2 (1) 上の主張 (a), (b) と CM 楕円曲線, CM 点との関係を述べる.

(a) p が惰性する虚二次体 K と \mathcal{O}_K で虚数乘法をもつヒルベルト類体上の楕円曲線 E で諸性質を満たすものを取り, その K への Weil 制限に対応する K 上の Hecke 指標 φ が $w(\varphi) = 1$ を満たすと仮定すると, 対応する楕円単数のコホモロジー類 z_φ が注意 3.2 (1) と同様に $H_+^1(\Psi, \mathbb{T})$ の元を与える. さらに, $L(\varphi, 1)$ の代数部分の法 p 非消滅性を仮定すると (a) が成り立つことがわかる. Rubin はこのことを用いて, (a) が成り立つ素数 p の集合は密度 1 であることを示した (cf. [23, Proposition 8.2]).

(b) p が惰性する虚二次体 K と \mathcal{O}_K で虚数乘法をもつヒルベルト類体上の楕円曲線 E をとり, モジュラー曲線 $X_0(N)$ から E への射を固定する (N は E の導手). $X_0(N)$ 上の CM 点の族の像によって, (5.1) を満たす族が構成できる. しかしながら, (5.2) が非常に難しい.

(2) Rubin は $5 \leq p \leq 1000$ で $p \not\equiv 1 \pmod{12}$ となる素数に対して (a), (b) が成り立つことを確かめている (cf. [23, Computation])

(3) \mathbb{Q}_p の円分 \mathbb{Z}_p 拡大に沿った局所有理点の族で (b) と同様の性質を満たすものは, 超特異還元をもつ楕円曲線の円分岩澤理論において非常に重要な役割を果たしていることから (cf. [15, 17]), (b) の族も反円分岩澤理論で重要な役割を果たすと期待され, 構成が望まれてきた. 円分 \mathbb{Z}_p 拡大は高さ 1 の Lubin-Tate 形式群の等分点から得られ, Perrin-Riou 理論 (cf. [18]) が族の構成においても非常に本質的な役割を果たすが, 反円分 \mathbb{Z}_p 拡大は高さ 2 の Lubin-Tate 形式群の等分点から得られる拡大の部分拡大として得られ, このような状況における Perrin-Riou 理論や近年進展している (φ, Γ) 加群の理論は未だ有理点の構成へ応用できないように思われる. 本稿で説明する [4] における局所有理点の族の構成はこれらの p 進表現の理論は使わずに行われ, [4] の幾何的な構成がこれらの理論にも新たな視点を与えるのではないかと期待している.

上の定理より, 定理 3.5 を示すためには, 任意の $p \geq 5$ に対して, (a), (b) が成り立つことを示せばよい. 以下では, その証明について概説する. 詳細は原論文 [4] を参照されたい.

5.2 (a) の証明

[23] が出版された頃にはなかった Finis [9] の L 関数の法 p 非消滅性と楕円単数の捻りを用いることで証明する.

p が惰性する虚二次体 F と無限型 $(1, 0)$ で, $w(\varphi) = 1$ などのいくつかの条件を満たす F 上の Hecke 指標 φ をとり \mathfrak{f} をその導手とする. $l \nmid 2p$ を F で完全分解する素数とすると, [9] により, 有限個の有限反円分指標 $\nu : G_F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ で導手が l のべきを割るものを除いて,

$$\frac{L_{l\mathfrak{f}}(\varphi\nu, 1)}{\Omega_F} \not\equiv 0 \pmod{p}. \quad (5.3)$$

(5.3) を満たす有限反円分指標 ν を一つ固定し, 楕円単数の捻りを用いて次の性質を満たす $\xi_\nu \in H^1(\Psi, \mathbb{T}) \otimes \mathcal{O}_\Psi[\text{Im}(\nu)]$ が構成できる (cf. [14, Proposition 15.9]): 任意の $\chi \in \Xi$ に対して

$$\exp_\chi^*(\xi_\nu) = \frac{L_{p\mathfrak{f}}(\varphi\nu\chi^{-1}, 1)}{\Omega_F}. \quad (5.4)$$

$\chi \in \Xi^\pm$ に対し $w(\varphi\nu\chi^{-1}) = \pm 1$ がわかるので, (5.4) より $\xi_\nu \in H_+^1(\Psi, \mathbb{T}) \otimes \mathcal{O}_\Psi[\text{Im}(\nu)]$ を得る. (5.3) と (5.4) より, $p \exp_1(\xi_\nu) \not\equiv 0 \pmod{p}$ を得る. これから (a) が従う.

5.3 (b) の証明

5.3.1 アイデア

注意 5.2 で述べたように, CM 点の族から (5.1) を満たす族を構成できる. (5.2) を示すには, 局所化写像 $E(K) \rightarrow E(\Psi)$ における像の p 非可除性を確かめる必要があるが, 局所化写像の余核は一般に難しい (CM 点の $E(K)$ における p 非可除性に関する結果は [26] によって得られている).

[4] における鍵となるアイデアは, CM 点 (大域的) の代わりに, 形式 CM 点 (局所的) を考えるというものである. $x = (A_x, C_x) \in X_0(N)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ (C_x はレベル構造, つまり位数 N の A_x の巡回部分群) が CM 点であるとは, 大雑把には, A_x が CM 楕円曲線であるような有理点であった. 一方, A_x 自体は CM 楕円曲線でないかもしれないが, その形式群 \hat{A}_x が $\text{End}(\hat{A}) \otimes \mathbb{Q}_p \cong \Psi$ を満たすとき, $x = (A_x, C_x) \in X_0(N)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ を形式 CM 点とよぶ. たとえば, p で良超特異還元をもつ \mathbb{Q}_p 上の楕円曲線 A は

$\text{End}(\hat{A}) \otimes \mathbb{Q}_p \cong \Psi$ を満たす.

5.3.2 $(c_n)_n$ の大雑把な構成

E を \mathbb{Q} 上の楕円曲線で p で良超特異還元をもつものとし, その導手を N とする. 形式群 \hat{E} は \mathcal{F} と \mathcal{O}_Ψ 上同型であることに注意する. $\pi: X_0(N) \rightarrow E$ を保型性から定まる射とし, 必要なら E を同種でとりかえることにより π は強 Weil とする. E の \mathbb{Z}_p 上のネロンモデルを \mathcal{E} とし, $X_0(N)$ の \mathbb{Z}_p 上の整モデルを \mathcal{X} とする. \mathcal{E} の普遍性から定まる射 $\mathcal{X}_0(N) \rightarrow \mathcal{E}$ の特殊ファイバーを $\bar{\pi}: \mathcal{X}_0(N)_{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}$ と表す. $\mathcal{X}_0(N)_{\mathbb{F}_p}$ の超特異楕円曲線に対応する点の個数の評価と (モジュラー曲線の種数公式などを用いた) $\bar{\pi}$ の分岐点の評価などにより, $x_0 = (A_0, C_0) \in \mathcal{X}_0(N)(\mathcal{O}_\Psi)$ であって,

$$\begin{aligned} \text{End}(\hat{A}_0) &\cong \mathcal{O}_\Psi \\ c &:= (p+1)\pi(x_0) \in \hat{E}(\mathcal{O}_\Psi) \setminus p\hat{E}(\mathcal{O}_\Psi) \end{aligned} \quad (5.5)$$

となるものが構成できる.

Gross [13] により, p 同種写像の列

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow \cdots$$

であって, $\text{End}(\hat{A}_n) \cong \mathbb{Z}_p + p^n \mathcal{O}_{\Psi_n}$ となるものが構成できる. A_0 のレベル構造 C_0 は A_n のレベル構造を誘導し, 形式 CM 点 $x_n \in \mathcal{X}_0(N)$ を得る. $\pi(x_{n+1}) \in E$ は Ψ_n の適当な $(p+1)$ 次拡大体上で定義され, $c_n \in E(\Psi_n)$ を $\pi(x_{n+1})$ のトレースとして定義すると, (c_n) は (5.1) と $\text{Tr}_{1/0}(c_1) = -c$ を満たすことが示せ, (5.5) より (5.2) を満たすことがわかる. このようにして, (b) の証明がなされる.

参考文献

- [1] A. Agboola and B. Howard, *Anticyclotomic Iwasawa theory of CM elliptic curves. II*, Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 5-6, 611–621.
- [2] A. Agboola and B. Howard, *Anticyclotomic Iwasawa theory of CM elliptic curves*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 4, 1001–1048.
- [3] M. Bertolini, H. Darmon and K. Prasanna, *Generalised Heegner cycles and p -adic Rankin L -series*, Duke Math Journal **162** (2013), no. 6, 1033–1148.

- [4] A. Burungale, S. Kobayashi and K. Ota, *Rubin’s conjecture on local units in the anticyclotomic tower at inert primes*, Ann. of Math. (2) **194** (2021), no. 3, 943–966.
- [5] A. Burungale, S. Kobayashi and K. Ota, *p -adic L -functions and rational points on CM elliptic curves at inert primes*, preprint.
- [6] A. Burungale, S. Kobayashi and K. Ota, *The p -adic valuation of local resolvents, generalized gauss sums and anticyclotomic Hecke L -values of imaginary quadratic fields at inert primes*, in preparation.
- [7] A. Burungale, S. Kobayashi, K. Ota and S. Yasuda, *Kato’s epsilon conjecture for anticyclotomic CM deformations at inert primes*, preprint.
- [8] J. Coates and A. Wiles, *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **39** (1977), no. 3, 223–251.
- [9] T. Finis, *Divisibility of anticyclotomic L -functions and theta functions with complex multiplication*, Ann. of Math. (2) **163** (2006), no. 3, 767–807.
- [10] R. Greenberg, *On the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **72** (1983), no. 2, 241–265.
- [11] R. Greenberg, *Iwasawa theory and p -adic deformations of motives*, Motives (Seattle, WA, 1991), 193–223, Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [12] R. Greenberg, *Introduction to Iwasawa theory for elliptic curves*, Arithmetic algebraic geometry (Park City, UT, 1999), 407–464, IAS/Park City Math. Ser., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [13] B. Gross, *On canonical and quasicanonical liftings*, Invent. Math. **84** (1986), no. 2, 321–326.
- [14] K. Kato, *p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. III. Astérisque No. 295 (2004), ix, 117–290.
- [15] S. Kobayashi, *Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes*, Invent. Math. **152** (2003), no. 1, 1–36.
- [16] S. Kobayashi, *The p -adic Gross–Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes*, Invent. Math. **191** (2013), no. 3, 527–629.
- [17] B. Perrin-Riou, *Théorie d’Iwasawa p -adique locale et globale*, Invent. Math.

- 99** (1990), no. 2, 247–292.
- [18] B. Perrin-Riou, *Théorie d’Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local*, With an appendix by Jean-Marc Fontaine. *Invent. Math.* **115** (1994), no. 1, 81–161.
- [19] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p -adiques des représentations p -adiques*, *Astérisque* No. 229 (1995), 198 pp.
- [20] D. Rohrlich, *On L -functions of elliptic curves and anticyclotomic towers*, *Invent. Math.* **75** (1984), no. 3, 383–408.
- [21] D. Rohrlich, *On L -functions of elliptic curves and cyclotomic towers*, *Invent. Math.* **75** (1984), no. 3, 409–423.
- [22] K. Rubin, *Elliptic curves with complex multiplication and the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*, *Invent. Math.* **64** (1981), no. 3, 455–470.
- [23] K. Rubin, *Local units, elliptic units, Heegner points and elliptic curves*, *Invent. Math.* **88** (1987), no. 2, 405–422.
- [24] K. Rubin, *The “main conjectures” of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, *Invent. Math.* **103** (1991), no. 1, 25–68.
- [25] K. Rubin, *p -adic L -functions and rational points on elliptic curves with complex multiplication*, *Invent. Math.* **107** (1992), no. 2, 323–350.
- [26] W. Zhang, *Selmer groups and the indivisibility of Heegner points*, *Camb. J. Math.* **2** (2014), no. 2, 191–253.

超幾何モチーフの1-拡大

朝倉政典 (北大理)

1 はじめに

複素数 α_i, β_j をパラメーターとする超幾何級数とは、次で定義される冪級数である。

$${}_nF_{n-1} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \end{matrix}; t \right) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_i \cdots (\alpha_n)_i}{(\beta_1)_i \cdots (\beta_{n-1})_i} \frac{t^i}{i!}.$$

ここで $(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+i-1)$ は Pochhammer の記号である。これは $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に解析接続され、多価解析関数になる。これを超幾何関数という (e.g. [SI]). 特に、 $n=2$ のときガウスの超幾何関数とよばれている。

超幾何関数の複素関数としての性質は古くからよく研究されてきた ([NIST] には超幾何関数に関する多くの公式が掲載されている)。この関数が顕著に現れるのは、代数多様体の周期積分としてである。例えば、楕円曲線 $y^2 = x(1-x)(1-tx)$ の周期積分は次のようにガウスの超幾何関数で表される。

$$\int_0^1 \frac{dx}{y} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-tx)}} = \pi {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}; t \right).$$

また、K3 曲面や Calabi-Yau 多様体にも周期積分が超幾何関数で表されるものが多数知られている。このように、周期積分が超幾何関数で表されるとき、あるいはもっと一般に、超幾何関数と何らかの意味で関連付けられているとき、そのような代数多様体のコホモロジーを“超幾何モチーフ”と呼んでいる。ただし、筆者の知る限り、数学的对象としての確立された超幾何モチーフの定義はないようであり、状況や設定に応じて用語を使い分けているのが現状と思われる。本稿では、超幾何モチーフを、超幾何微分方程式

$$P_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} := \prod_i (D_t - \beta_i + 1) - t \prod_j (D_t + \alpha_j), \quad \left(D_t := t \frac{d}{dt} \right)$$

に、ホッジ構造とフロベニウス構造を付加した対象として定義する (定義 2.4).

本稿の主題は、超幾何モチーフ H の 1-拡大

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathbb{Q}(r) \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

である. これは, 筆者が長年研究している p 進レギュレーター (サントミックレギュレーター) と密接に関係している (cf. §3.2). 超幾何モチーフの 1-拡大の完全な分類を与えること, そしてその拡大データを具体的に決定することが目標である. 本稿では, H が $\beta_j = 1$ を満たす超幾何モチーフのとき special とよび, special な超幾何モチーフの 1-拡大の分類についての最近の研究を紹介する. また最後に述べる, $t = 0$ における退化ファイバーの p 進レギュレーターを p 進 polygamma 関数で記述できるだろうという予想を認めれば, 上記 1-拡大から定まるサントミックレギュレーターが完全に決定できることを紹介する.

2 超幾何モチーフ

2.1 超幾何級数, 超幾何微分方程式

K を標数 0 の体とする. $\alpha \in K$ に対し, $(\alpha)_i := \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + i - 1)$ (Pochhammer の記号) と書く. $\alpha_i, \beta_j \in K$ であって $\beta_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を満たすものに対し,

$$F_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}(t) = {}_nF_{n-1} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \end{matrix}; t \right) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_i \cdots (\alpha_n)_i}{(\beta_1)_i \cdots (\beta_{n-1})_i} \frac{t^i}{i!} \in K[[t]]$$

を超幾何級数という. 超幾何級数は, 微分作用素

$$P_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} := D_t \prod_i (D_t + \beta_i - 1) - t \prod_j (D_t + \alpha_j), \quad D_t = t \frac{d}{dt}.$$

の定める超幾何微分方程式

$$P_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} y = 0$$

の解になっており, 逆に, $P_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}} y = 0$ を満たす $t = 0$ で極をもたない冪級数解は, $F_{\underline{\alpha}, \underline{\beta}}(t)$ の定数倍しかない.

2.2 超幾何モチーフ

p を素数, $W = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を Witt 環, $K = \text{Frac}(W)$ を商体とする. F を W の Frobenius とする. W -スキーム S に対し, $S_K := S \times_W K$, $S_{\overline{\mathbb{F}}_p} := S \times_W \overline{\mathbb{F}}_p$ と書く.

W 上有限生成な可換環 $A = W[t_1, \dots, t_n]/I$ に対し, $A^\dagger := W[t_1, \dots, t_n]^\dagger / IW[t_1, \dots, t_n]^\dagger$ は弱完備化を表す. ここで,

$$W[t_1, \dots, t_n]^\dagger = \left\{ \sum a_I t^I \mid |a_I|_p r^{|I|} \rightarrow 0 \quad (\exists r \in \mathbb{R}_{>1}) \right\}.$$

A^\dagger 上の (p -th) Frobenius 写像とは, F -線形 (i.e. $\sigma(\alpha x) = F(\alpha)\sigma(x)$) かつ $\sigma(x) \equiv x^p \pmod{p}$ を満たす環準同型写像をいう. A が W 上スムーズのとき, Frobenius 写像が存在することが知られている (Artin の近似定理). 以下, $A_K^\dagger := A^\dagger \otimes_W K$ と書く.

定義 2.1 埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定する. S を W 上スムーズなアフィンスキーム, $\sigma : \mathcal{O}(S)^\dagger \rightarrow \mathcal{O}(S)^\dagger$ を *Frobenius* 写像とする. \mathcal{D}_{S_K} を \mathcal{O}_{S_K} 上の微分作用素の層とする. データ

$$(H_B, H_{\text{dR}}, W_\bullet, F^\bullet, c, \Phi)$$

を次のものとする.

- H_B は $S(\mathbb{C})^{an}$ 上の有限次元 \mathbb{Q} ベクトル空間の局所系,
- H_{dR} は \mathcal{O}_{S_K} 上有限階数である左 \mathcal{D}_{S_K} -加群,
- $c : \mathcal{O}_{S_{\mathbb{C}}}^{an} \otimes_{\mathbb{Q}} H_B \cong \mathcal{O}_{S_{\mathbb{C}}}^{an} \otimes_{\mathcal{O}_S} H_{\text{dR}}$ は比較同型,
- $W_\bullet = (W_{B,\bullet}, W_{\text{dR},\bullet})$ はそれぞれ, H_B, H_{dR} の重さフィルトレーションの組,
- F^\bullet は H_{dR} のホッジフィルトレーション,
- $H_{\text{dR}}^\dagger := \mathcal{O}(S)_K^\dagger \otimes_{\mathcal{O}(S_K)} H_{\text{dR}}$ として, $\Phi : \sigma^* H_{\text{dR}}^\dagger \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^\dagger$ は $\mathcal{O}(S)_K^\dagger$ -加群の同型写像.

このときアーベル圏 $F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ を, 次の (i), (ii) を満たす $(H_B, H_{\text{dR}}, W_\bullet, F^\bullet, c, \Phi)$ からなる圏として定義する.

- (i) $(H_B, H_{\text{dR}}, W_\bullet, F^\bullet, c)$ は $S(\mathbb{C})$ 上の混合ホッジ構造の許容変動 (*admissible variation of mixed Hodge structure*),
- (ii) $\Phi(W_{\text{dR},i}) \subset W_{\text{dR},i}$ かつ $\Phi \nabla = \nabla \Phi$. ここで $\nabla : H_{\text{dR}} \rightarrow \Omega_{S_K/K}^1 \otimes H_{\text{dR}}$ は \mathcal{D}_{S_K} の左作用から定まる接続である.

定義 2.2 *Tate object*

$$\mathbb{Q}(r) = (\mathbb{Q}(r), \mathcal{O}_{S_K}, W_\bullet, F^\bullet, c, \Phi) \in F\text{-VMHS}(S, \sigma)$$

を, $\text{Gr}_{-2r}^W \mathbb{Q}(r) = \mathbb{Q}(r)$, $\text{Gr}_F^{-r} \mathcal{O}_{S_K} = \mathcal{O}_{S_K}$, $\Phi = p^{-r} \sigma$ なるものとして定める.

スムーズな W -スキームの射 $f : U \rightarrow S$ が一定の条件を満たすとき, $F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ の対象

$$H^i(U/S) = (R^i f_*^{an} \mathbb{Q}, H_{\text{dR}}^i(U_K/S_K), W_\bullet, F^\bullet, c, \Phi)$$

が自然に定まる. これは次の定理から従う.

定理 2.3 (比較同型, cf. [AM, 2.5]) $f : U \rightarrow S$ を *smooth* 射で, 境界に関して “よい条件” を満たすものとする. このときリジッドコホモロジーとの比較同型

$$\mathcal{O}(S)_K^\dagger \otimes_{\mathcal{O}(S)} H_{\text{dR}}^i(U_K/S_K) \xrightarrow{\cong} H_{\text{rig}}^i(U_{\mathbb{F}_p}/S_{\mathbb{F}_p}), \quad i \geq 0$$

が成り立つ.

定義 2.4 (超幾何モチーフ) $S = \text{Spec } W[t, (t - t^2)^{-1}]$ とする.

- (1) $H \in F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ は, ホッジ構造としての重さが d であり, かつある $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap (0, 1]$ があって, 左 \mathcal{D}_{S_K} -加群の同型

$$H_{\text{dR}} \cong \bigoplus \mathcal{D}_S / \mathcal{D}_S P_{\alpha, \beta}$$

が存在するとする. このとき, H を **重さ d の超幾何モチーフ** という.

- (2) 上で, $0 < \alpha_i < 1$ かつ $\beta_j = 1$ と取れ, さらに, $d \geq 0$ で $P_{\underline{\alpha}} := P_{\underline{\alpha}, (1, \dots, 1)}$ のランクが $d + 1$ であるとき, 超幾何モチーフ H を **special** という.

2.3 超幾何モチーフの例

(定義 2.4 の意味で) 超幾何モチーフを与える多様体の例は多数知られている. 以下, $S = \text{Spec } W[t, (t - t^2)^{-1}]$ とする.

楕円曲線. $p > 2$ とし, $f: E \rightarrow S$ を Weierstrass 方程式 $y^2 = x(1-x)(1-tx)$ の定める楕円曲線とする. このとき, $F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ の対象

$$H^1(E/S) = (R^1 f_* \mathbb{Q}, H_{\text{dR}}^1(E_K/S_K), W_{\bullet}, F^{\bullet}, c, \Phi) \in F\text{-VMHS}(S, \sigma)$$

が定まる. ドラムコホモロジーについて, 同型

$$H_{\text{dR}}^1(E_K/S_K) \cong \mathcal{D}_{S_K} / \mathcal{D}_{S_K} P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

が成り立つ. 従って, $H^1(E/S)$ は重さ 1 の **special** な超幾何モチーフである.

Dwork K3. $p > 2$ とし, $f: X \rightarrow S$ を $tx_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 4x_0x_1x_2x_3$ の定める 4 次曲面の族とする. このとき, $F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ の対象

$$H^2(X/S) = (R^2 f_* \mathbb{Q}, H_{\text{dR}}^2(E_K/S_K), W_{\bullet}, F^{\bullet}, c, \Phi) \in F\text{-VMHS}(S, \sigma)$$

が定まる. $T(X/S) = H^2(X/S)/\text{NS}(X/S)$ とおくと, 同型

$$T(X/S)_{\text{dR}} \cong \mathcal{D}_{S_K} / \mathcal{D}_{S_K} P_{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}}$$

が成り立つ. 従って, $T(X/S)$ は重さ 2 の **special** な超幾何モチーフである.

BCM モチーフ. 斉次式

$$\sum_{i=0}^n x_i = 0, \quad \prod_{i \in I} x_i^{n_i} = t \prod_{j \in J} x_j^{m_j}.$$

の定める射影多様体を **BCM 多様体** という (BCM=Beukers, Cohen, Mellit). BCM 多様体のコホモロジーから超幾何モチーフ (special でないものを含む) を構成できる (具体的な構成は [RR] を参照).

大坪. 最近, 大坪紀之氏は, アフィン方程式

$$x_i^N + y_i^N = 1 (i = 1, 2, \dots, d), \quad (-1)^d t x_1^N \cdots x_d^N = y_1^N \cdots y_d^N$$

で定義される多様体を考え, コホモロジーが超幾何モチーフ (special でないものを含む) を与えることを示した.

[As3]. アフィン多様体

$$\prod_{i=0}^d (1 - x_i^{n_i}) = t$$

の d 次コホモロジーの重さ d の部分は, special な超幾何モチーフを与える. この多様体の特徴は, ミルナー K 群に高次 Ross シンボルが定義されることである,

$$\left\{ \frac{1 - x_0}{1 - \zeta_0 x_0}, \dots, \frac{1 - x_d}{1 - \zeta_d x_d} \right\}.$$

これは次節で述べる超幾何モチーフの 1-拡大を与える.

3 超幾何モチーフの 1-拡大

3.1 Special な超幾何モチーフの拡大群

$H \in F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ に対し, 拡大群

$$\text{Ext}_{(S, \sigma)}(\mathbb{Q}, H) := \text{Ext}_{F\text{-VMHS}(S, \sigma)}(\mathbb{Q}, H)$$

は, 完全列

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

の同型類として定義される. 一般論より, 拡大群はアーベル群の構造をもつ. $e_{\text{dR}} \in F^0 M_{\text{dR}}$ を $1 \in \mathcal{O}_S$ の持ち上げとすると, 写像

$$\delta : \text{Ext}_{(S, \sigma)}(\mathbb{Q}, H) \longrightarrow F^0 W_0 H_{\text{dR}}^1(S, H_{\text{dR}}) \cap H_B^1(S(\mathbb{C}), H_B),$$

を次で定める.

$$\delta : (0 \rightarrow H \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0) \mapsto \nabla(e_{\text{dR}}).$$

$S = \text{Spec } W[t, (t-t^2)^{-1}]$ とし, $H_{\text{HG}} \in F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ を重さ d の special な超幾何モチーフとする. このとき, 拡大群

$$\text{Ext}_{(S, \sigma)}(\mathbb{Q}, H_{\text{HG}}(d+1)), \quad (H_{\text{HG}}(j) := H_{\text{HG}} \otimes \mathbb{Q}(j))$$

について次の定理が成り立つ.

定理 3.1 分解

$$H_{\text{HG,dR}} = \bigoplus_{\alpha} H_{\alpha}, \quad H_{\alpha} \cong \mathcal{D}_{S_K} / \mathcal{D}_{S_K} P_{\alpha}$$

を固定し, p_{α} を H_{α} への射影とする. $1_{\mathcal{D}_{S_K}}$ に対応する元を $\omega_{\alpha} \in H_{\alpha}$ と書く. このとき次が成り立つ.

(1) $H = H_{\text{HG}}(d+1)$ に対する写像 δ は単射である.

(2) 次のいずれかを満たすとする.

(i) $d \geq 2$.

(ii) $d = 1$ であり, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ としたとき $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 1$.

このとき

$$\text{Im}(p_{\underline{\alpha}}\delta) \subset \mathbb{Q} \cdot C_{\underline{\alpha}} \frac{dt}{t} \otimes \omega_{\underline{\alpha}}, \quad \exists C_{\underline{\alpha}} \in K^{\times}. \quad (3.1)$$

(3) $d = 1$ で $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ とする. このとき

$$\text{Im}(p_{\underline{\alpha}}\delta) \subset \left\langle C_{\underline{\alpha}} \frac{dt}{t} \otimes \omega_{\underline{\alpha}}, C'_{\underline{\alpha}} \frac{dt}{t-1} \otimes \omega_{\underline{\alpha}} \right\rangle_{\mathbb{Q}}, \quad \exists C_{\underline{\alpha}}, C'_{\underline{\alpha}} \in K^{\times}. \quad (3.2)$$

上の定理の証明のスケッチを述べる. 写像 δ が単射であることは, $F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ でなく $\text{VMHS}(S)$ のときは, $H^0(S(\mathbb{C}), H_{\text{HG},B}) = 0$ という事実から従う. 従って, 完全列 $0 \rightarrow H_{\text{HG}}(d+1) \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0$ の δ による像が消えれば, この完全列は Hodge 構造として分裂する. $F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ のときの単射性を示すには, この分裂が Frobenius 作用についても両立することを示す. (3.1) と (3.2) の証明では,

$$F^{d+1}W_{2d+2}H_{\text{dR}}^1(S, H_{\text{dR}})$$

を具体的に求めることが大部分を占める. その際, H は complex variation of Hodge structure として構造が一意に定まっているという事実を使う ([De, 1.13]).

3.2 p 進レギュレーター

定理 3.1 より, $H(d+1)$ による 1-拡大がどのくらい存在するかある程度分かった. 次のステップは, その拡大のデータを求めることである. 写像

$$R_{\sigma} : \text{Ext}_{(S,\sigma)}(\mathbb{Q}, H) \longrightarrow H_{\text{dR}}^{\dagger} / (1-\Phi)F^0H_{\text{dR}}^{\dagger}, \quad (0 \rightarrow H \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0) \mapsto e_{\text{dR}} - \Phi(e_{\text{dR}})$$

と定義する. R_{σ} の与える $H_{\text{dR}}^{\dagger} / (1-\Phi)F^0H_{\text{dR}}^{\dagger}$ の元を拡大データという. これはサントミックレギュレーター写像と次のように関係している.

定理 3.2 ([AM, 3.3]) U, S を W 上のスムーズアフィンスキームとし, $f : U \rightarrow S$ をスムーズ射で, “よい条件” を満たすものとする. このとき, シンボル写像

$$[-]_{U/S} : K_m^M(\mathcal{O}(U)) \longrightarrow \text{Ext}_{(S,\sigma)}(\mathbb{Q}, R^{m-1}f_*\mathbb{Q}(m))$$

があつて, W -有理点 $x \in S(W)$ で σ で固定されるものに対し, $U_x = f^{-1}(x)$ とおくと,

$$R_\sigma([\xi]_{U/S})|_{U_x} \in H_{\text{dR}}^{m-1}(U_{x,K}/K)/(1-p^{-m}\Phi)F^m H_{\text{dR}}^{m-1}(U_{x,K}/K)$$

は, *Besser* のサントミックレギュレーターに一致する.

3.3 p 進 polygamma 関数

整数 $r \in \mathbb{Z}$ および $z \in \mathbb{Z}_p$ に対し,

$$\tilde{\psi}_p^{(r)}(z) = \lim_{n \in \mathbb{Z}_{>0}, n \rightarrow z} \sum_{1 \leq k < n, p \nmid k} \frac{1}{k^{r+1}} \quad (3.3)$$

とおく. 次の事実から, これは well-defined であり \mathbb{Z}_p 上の連続関数を定めることが従う.

$$\sum_{1 \leq k < p^s, p \nmid k} k^m \equiv \begin{cases} -p^{s-1} & p \geq 3 \text{ and } (p-1)|m \\ 2^{s-1} & p = 2 \text{ and } 2|m \\ 1 & p = 2 \text{ and } s = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \pmod{p^s}. \quad (3.4)$$

p 進オイラー定数

$$\gamma_p = - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{p^s} \sum_{0 \leq j < p^s, p \nmid j} \log(j), \quad (\log = \text{Iwasawa log}).$$

とする. $L_p(s, \chi)$ を p 進 L 関数として, p 進 polygamma 関数を次で定義する ([A1]).

$$\psi_p^{(r)}(z) = \begin{cases} -\gamma_p + \tilde{\psi}_p^{(0)}(z) & r = 0 \\ -L_p(1+r, \omega^{-r}) + \tilde{\psi}_p^{(r)}(z) & r \neq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

ただし, 本稿では $\psi_p^{(r)}(z)$ は現れず, $\tilde{\psi}_p^{(r)}(z)$ のみ扱う.

3.4 退化ファイバーの p 進レギュレーターについての予想

$S = \text{Spec } W[t, (t-t^2)^{-1}]$ とし, $H \in F\text{-VMHS}(S, \sigma)$ を重さ $d > 0$ の special HGM とする. また Frobenius σ は $\sigma(t) = ct^p$, $c \in 1 + pW$ で与えられているとする. 同型

$$H_{\text{dR}} = \bigoplus H_\alpha, \quad H_\alpha \cong \mathcal{D}_S / \mathcal{D}_S P_\alpha$$

を固定する. $\omega_\alpha \in H_\alpha$ を $1_{\mathcal{D}_S} + \mathcal{D}_S P_\alpha$ に対応する元とする. $\widehat{H}_\alpha := K[[t]] \otimes_{\mathcal{O}(S)} H_\alpha$ の $K[[t]]$ 上の基底

$$\widehat{H}_\alpha = \langle \widehat{\omega}_\alpha^{(0)}, \widehat{\omega}_\alpha^{(1)}, \dots, \widehat{\omega}_\alpha^{(d)} \rangle$$

で次を満たすものをとる (このような基底は一意的に存在する).

- $D_t \widehat{\omega}_\alpha^{(0)} = 0$,
- $\widehat{\omega}_\alpha^{(d)} = F_\alpha(t)^{-1} \omega_\alpha$, ここで $F_\alpha(t) = F_{\alpha, (1, \dots, 1)}(t)$ は超幾何級数,
- 各 $i \in \{1, \dots, d\}$ に対し, $\exists G_\alpha^{(i-1)} \in 1 + tK[[t]]$ があって $D_t \widehat{\omega}_\alpha^{(i)} = G_\alpha^{(i-1)} \widehat{\omega}_\alpha^{(i-1)}$ を満たす.

X_i を次数 i の不定元とし, 形式的な展開式

$$\begin{aligned} & \exp\left(X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \frac{1}{4}X_4 + \dots\right) \\ &= 1 + \overbrace{X_1}^{\text{degree 1}} + \overbrace{\left(\frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}X_2\right)}^{\text{degree 2}} + \overbrace{\left(\frac{1}{6}X_1^3 + \frac{1}{2}X_1X_2 + \frac{1}{3}X_3\right)}^{\text{degree 3}} + \dots \\ &= 1 + P_1(X) + P_2(X) + P_3(X) + \dots \end{aligned}$$

によって多項式 $P_i(X)$ を定める.

$$\kappa_{i,\alpha} := \begin{cases} \sum_m \widetilde{\psi}_p^{(0)}(\alpha_m) - p^{-1} \log c & i = 1 \\ \sum_m \widetilde{\psi}_p^{(i-1)}(\alpha_m) & i \geq 2. \end{cases}$$

とおく.

予想 3.3 $\xi \in \text{Ext}_{(S,\sigma)}(\mathbb{Q}, H(d+1))$ を

$$\delta(\xi) = \sum_\alpha C_\alpha \frac{dt}{t} \omega_\alpha$$

を満たすものとする.

$$R_\sigma(\xi) = \sum_\alpha C_\alpha \sum_i \widehat{\varepsilon}_{i,\alpha}(t) \widehat{\omega}_\alpha^{(i)}$$

とするとき,

$$\widehat{\varepsilon}_{d-i,\alpha}(0) = (-1)^i P_{i+1}(\kappa_\alpha), \quad i = 0, 1, \dots, d. \quad (3.6)$$

ここで, $P(\kappa_\alpha)$ は各 X_i に $\kappa_{i,\alpha}$ を代入した値を表す.

次の定理は, [A1, Theorem 4.8] の証明と同じ方法で示すことができる.

定理 3.4 $i = 0$ のときは (3.6) は正しい.

予想 3.3 を認めれば, R_σ は基底 $\{\omega_\alpha^{(i)}\}_i$ を用いて具体的に記述できる. すると, 代数的ドラムコホモロジーの基底 $\{D_i^i \omega_\alpha\}_i$ による記述が得られ, その行列成分はすべて overconvergent でなくてはならない. 逆に, この overconvergence によって予想 3.3 にある定数項が特徴づけられると推測できるので, [KT] にあるテクニックを使って定数項を数値計算することができる. こうして数多くの例を計算した結果, 予想 3.3 にある式を予想するに至った.

重さ d の special な超幾何モチーフ H_{HG} に対する拡大群

$$\text{Ext}_{(S,\sigma)}(\mathbb{Q}, H_{\text{HG}}(d+1))$$

の研究は, 代数的 K 理論では $d+1$ 次ミルナー K 群のレギュレーターの研究に相当する. 他の次数 $\text{Ext}_{(S,\sigma)}(\mathbb{Q}, H_{\text{HG}}(j))$ についての研究は, まだ途上であるが, いくつかの興味深い計算結果がある. また, ここまで基底 S を $\text{Spec } W[t, (t-t^2)^{-1}]$ に限定してきたが, 周期積分と超幾何関数を慣れ親しんだ人たちからすれば, その被覆曲線に一般化しておくのが自然であろうし, GKZ 方程式の観点からは, S を高次元化するのが自然な流れである. それらについては, 今後の課題である.

参考文献

- [A1] Asakura, M., *New p -adic hypergeometric functions and syntomic regulators*. arXiv.1811.03770.
- [A2] Asakura, M., *Frobenius action on a hypergeometric curve and an algorithm for computing values of Dwork's p -adic hypergeometric functions*. Transcendence in algebra, combinatorics, geometry and number theory, 1–45, Springer Proc. Math. Stat., **373**, Springer, Cham, 2021.
- [As3] Asakura, M., *A generalization of the Ross symbols in higher K -groups and hypergeometric functions I*, arXiv.2003.10652
- [AM] Asakura, M., Miyatani, K., *Milnor K -theory, F -isocrystals and syntomic regulators*. arXiv:2007.14255.
- [De] Deligne, P., *Un théorème de finitude pour la monodromie*. In Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984), volume **67** of Progr. Math., pages 1–19. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.
- [Ke1] Kedlaya, K., *p -adic differential equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **125**. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

- [Ke2] Kedlaya, K., *Frobenius structures on hypergeometric equations*. Arithmetic, geometry, cryptography, and coding theory 2021, 133–158, Contemp. Math., **779**, Amer. Math. Soc.
- [KT] Kedlaya, K., Tuitman, J., *Effective convergence bounds for Frobenius structures on connections*. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **128** (2012), 7–16.
- [Ko] Koblitz, N., *p-adic analysis: a short course on recent work*. London Mathematical Society Lecture Note Series, **46**. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.
- [LS] Le Stum, B., *Rigid cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics, 172. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xvi+319 pp.
- [RR] Roberts, D., Rodriguez Villegas, F., *Hypergeometric Motives*. arXiv:2109.00027.
- [SI] Slater, L., *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1966.
- [NIST] *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Edited by Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert and Charles W. Clark. Cambridge Univ. Press, 2010.

ガンマ関数の関数等式と CM 周期の単項関係式の対応とその応用

加塩朋和*

本稿は第 67 回代数学シンポジウムにおける同タイトルの講演内容をまとめたものです。この場を借りて、講演と寄稿の機会を与えて下さった代数学シンポジウム責任者の小島秀雄先生 (新潟大学), 数論プログラム委員の大野泰生先生 (東北大学), 原隆先生 (津田塾大学) に心より感謝申し上げます。

Abstract

Euler のガンマ関数は倍数公式や反射公式などの関数等式を満たしている。一方で CM 周期は, (特別な場合には) 虚数乗法型の代数曲線の周期積分を使って定義され, 幾何的な性質から導かれる単項関係式を満たしている。Chowla-Selberg 公式や Rohrlich の公式により, ガンマ関数の特殊値と虚二次体や円分体の CM 周期を結びつけることができ, その結果タイトルにある “対応” が生まれることになる。本稿ではこれらの事実を概観したのち, この “対応” の p 進類似を解説する。特に応用として, Fermat 曲線の Frobenius 行列に関する Coleman の公式の “部分的な別証明” を紹介する。

1 Euler のガンマ関数とその特殊値

Euler のガンマ関数は次式で定義される。

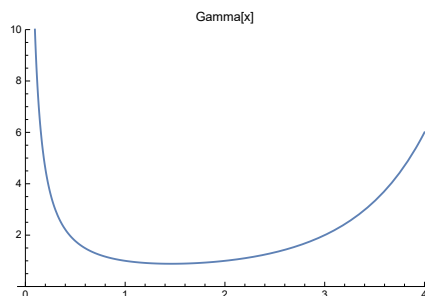
$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\operatorname{Re}(z) > 0).$$

この定義から直ちに

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1, \\ z\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} (t^z)' e^{-t} dt = \Gamma(z+1) \end{aligned}$$

が導ける。これらを合わせて自然数点での明示公式が得られる:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n \in \mathbb{N}).$$



*東京理科大学, kashio_tomokazu@ma.noda.tus.ac.jp

次に、本稿では有理数点での値に着目したい。例えば

$$\begin{aligned}\Gamma(1/4) &= 3.625609908\dots, \\ \Gamma(1/3) &= 2.678938534\dots, \\ \Gamma(1/2) &= 1.772453850\dots, \\ \Gamma(2/3) &= 1.354117939\dots, \\ \Gamma(3/4) &= 1.225416702\dots, \dots\end{aligned}$$

などである。これら一つ一つは見てすぐに意味が分かるような数値ではない(と思う)。しかし、値達の間には

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2)^2 &= 3.141592653\dots = \pi, \\ \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\pi} &= 1.414213562\dots = \sqrt{2}, \\ \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}{\pi} \cdot \frac{3}{2} &= 1.732050807\dots = \sqrt{3}\end{aligned}$$

などの関係式が存在する。これらの関係式は、以下の関数等式の、特別な場合であることが分かる。

$$\begin{aligned}\text{反射公式} \dots \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z}, \\ \text{倍数公式} \dots \prod_{k=0}^{d-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{d}\right) &= d^{\frac{1}{2}-dz} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(dz) \quad (d \in \mathbb{N}).\end{aligned}\tag{1}$$

本稿では、関係式だけでなく、有理数点での値 $\Gamma(a/n)$ そのものにも、CM 周期と呼ばれる幾何的な不変量としての意味付けが与えられることを観察する。この意味付けを通して、

“ガンマ関数の関数等式” と “CM 周期の単項関係式” の対応

を調べることが、本稿のテーマとなる。

本稿の概要を述べる。§2ではCM周期と呼ばれる幾何的な不変量を復習する。このCM周期を記述するには、志村の周期記号が非常に便利である。§3ではCM周期が満たすいくつかの単項関係式を紹介する。§4では Δ 関数や η 関数の特殊値に関する Chowla-Selberg 公式と、Fermat 曲線の周期積分に関する Rohrlich の公式を復習する。これらの公式を通して、ガンマ関数の有理数点での値 $\Gamma(a/n)$ にCM周期としての意味付けを与えることができる。その結果 §5において、タイトルにもある“ガンマ関数の関数等式とCM周期の単項関係式の対応”が観察できる。§6では、上記のストーリーの p 進類似物たちを紹介する。また §7では、Fermat 曲線上の絶対フロベニウス作用を p 進ガンマ関数で表した Coleman の公式を紹介する。§8の内容が本稿における主結果 ([Ka3] の主結果) である。 p 進ガンマ関数は関数等式である程度特徴付けられる。そしてその関数等式に対応する単項関係式を“Fermat 曲線上の絶対フロベニウス作用”も満たすことを示す。その結果、Coleman の公式が“ある程度自動的に成立する”ことが示せる。

2 CM 周期と志村の周期記号

総実代数体の虚二次拡大体を CM 体と呼ぶ. 虚二次体や円分体はその特別な場合である. 整数論において, CM 体 K に関連する以下の不変量がよく研究されてきた.

- K の虚数乗法 (Complex Multiplication) を持つアーベル多様体の周期.
- K の代数的 Hecke 指標の L 関数の臨界値.
- K の最大総実部分体上の Hilbert 保型形式の CM 点での特殊値.

これらは統一的な表記ができ, ある意味で同じ不変量であることが知られている. より具体的には, 上記 3 つの値の超越数部分が

円周率 π と, $[K : \mathbb{Q}]^2$ 個の不変量 $p_K(\sigma, \tau)$ 達の単項式

として書ける (σ, τ は $\text{Hom}(K, \mathbb{C}) := “K の \mathbb{C} への埋め込み全体”$ を動く). これは Riemann ゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}$ の非負整数点での値の超越数部分が π の冪で与えられる事:

$$\zeta(2n) = \pi^{2n} \cdot \frac{2^{2n-1} |B_{2n}|}{(2n)!} \in \pi^{2n} \cdot \overline{\mathbb{Q}} \quad (0 \leq n \in \mathbb{Z})$$

の類似といえよう. [Yo, p62, Theorem 1.2, p64, Theorem 1.4, p65, Theorem 1.5] に具体的な式がある. より詳しくは [Sh] を参照して欲しい.

不変量 $p_K(\sigma, \tau)$ は志村の周期記号, または CM 周期と呼ばれる. 円周率 π のようにはっきり値が与えられているのではなく, $\mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$ の元として与えられる. 本稿では正確な定義は与えない. 話を簡単にするために, K を虚二次体として例を紹介する. この場合 K の \mathbb{C} への埋め込みは恒等写像 id と複素共役写像 ρ の二つであり, 志村の周期記号は

$$p_K(\text{id}, \text{id}), p_K(\rho, \rho), p_K(\text{id}, \rho), p_K(\rho, \text{id}) \in \mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

の四つがあり, これらは以下で与えられる. 代数体上定義された楕円曲線 $E: y^2 = f(x)$ で K の虚数乗法を持つもの, すなわち

$$\text{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong K$$

となるものをとる. $E(\mathbb{C})$ 上の非自明な閉路 γ に対し, 志村の周期記号の値はそれぞれ

$$p_K(\text{id}, \text{id}) = p_K(\rho, \rho) := \pi^{-1} \int_{\gamma} \frac{dx}{y} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}, \quad (2)$$

$$p_K(\text{id}, \rho) = p_K(\rho, \text{id}) := \int_{\gamma} \frac{xdx}{y} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \quad (3)$$

となる. 最右辺の積分値は楕円曲線 E のモデルや閉路 γ のとり方によるが, $\pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}$ で well-defined, すなわち虚二次体 K のみよることが示せる. 一般の CM 体の場合の周期記号の定義には, Eq. (2), Eq. (3) のような周期積分を “分解” する操作と理論が必要になる.

より具体的に

$$\text{レムニスケート周率 } \varpi := 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2.622057554 \dots$$

を考えよう. これは円周率

$$\pi := 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

の類似物でもある. 対応する楕円曲線

$$E: y^2 = 1 - x^4$$

を考える. E 上の自己準同型として

$$“\sqrt{-1} \text{ 倍}” = [\phi: (x, y) \mapsto (\sqrt{-1}x, y)] \in \text{End}(E) \text{ s.t. } \phi^4 = \text{id}_E$$

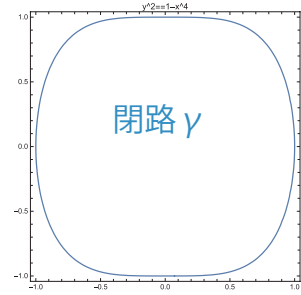
が存在するので, E は虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の虚数乘法をもつ.
 $\gamma = E(\mathbb{R})$ を $E(\mathbb{C})$ の閉路と考えて積分を計算すると

$$\int_{\gamma} \frac{dx}{y} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_1^{-1} \frac{dx}{-\sqrt{1-x^4}} = 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\varpi$$

となり, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の CM 周期は

$$p_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(\text{id}, \text{id}) \equiv \pi^{-1}\varpi \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}$$

と書ける.



3 CM 周期の “単項関係式”

CM 周期は様々な単項関係式を満たすことが知られている. 本稿では特に以下の 2 種類に注目する.

- 複素共役 $\rho \in \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ と, $\sigma, \tau \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})$ に対し

$$p_K(\sigma, \tau)p_K(\sigma, \rho \circ \tau) \equiv 1 \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}.$$

- 体拡大 $K \subset L$ (K, L は共に CM 体) と $\tau \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})$, $\tilde{\sigma} \in \text{Hom}(L, \mathbb{C})$ に対し

$$p_K(\tilde{\sigma}|_K, \tau) \equiv \prod_{\tilde{\tau}|_K = \tau} p_L(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}. \quad (4)$$

ただし積は $\tilde{\tau} \in \text{Hom}(L, \mathbb{C})$ s.t. $\tilde{\tau}|_K = \tau$ を動く.

話を簡単にするために, 再び K を虚二次体とし, 代数体上定義され K の虚数乘法をもつ楕円曲線 E を考える. このとき K の CM 周期は Eq. (2), Eq. (3) で与えられていた. de Rham コホモロジー上のカップ積により

$$\begin{aligned} \wedge: H_{\text{dR}}^1(E, \overline{\mathbb{Q}}) \times H_{\text{dR}}^1(E, \overline{\mathbb{Q}}) &\rightarrow H_{\text{dR}}^2(E, \overline{\mathbb{Q}}) \cong H_{\text{dR}}^1(\mathbb{G}_m, \overline{\mathbb{Q}}) = \overline{\mathbb{Q}} \cdot \frac{dx}{x} \\ \left(\frac{dx}{y}, \frac{x dx}{y} \right) &\mapsto \frac{dx}{y} \wedge \frac{x dx}{y} = c \cdot \frac{dx}{x} \quad (\exists c \in \overline{\mathbb{Q}}) \end{aligned}$$

と書ける (一般に曲線の 2 次コホモロジー群は乗法群の 1 次コホモロジー群と同型であることに注意). 加えて, de Rham の同型はカップ積に関して環準同型なので, 適切な積分経路 (領域) に対して

$$\int \frac{dx}{y} \cdot \int \frac{xdx}{y} = \int \frac{dx}{y} \wedge \frac{xdx}{y} = c \int \frac{dx}{x} = c' \cdot 2\pi i \quad (\exists c' \in \overline{\mathbb{Q}}) \quad (5)$$

という関係が成り立つ. Eq. (2), Eq. (3), Eq. (5) により, 複素共役に関する単項関係式

$$p_K(\text{id}, \text{id})p_K(\text{id}, \rho) \equiv 1 \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}$$

が得られる. 一般の場合などの詳細は [Sh, Theorem 32.5] を参照.

4 Chowla-Selberg 公式と Rohrlich の公式

ここでは古典的な 2 つの公式が CM 周期と関係していることを紹介する.

Chowla-Selberg 公式. Ramanujan の Δ 関数 (モジュラー判別式) は次式で定義される.

$$\Delta(z) = e^{2\pi iz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi iz})^{24}.$$

Dedekind の η 関数とは次の関係がある.

$$\Delta(z) = \eta(z)^{24}.$$

Chowla-Selberg 公式は次で与えられる:

$$(2\pi)^{12h} \prod_{\bar{\mathfrak{a}} \in \text{Cl}_K} |\Delta(\bar{\mathfrak{a}})|^2 = \frac{1}{d_K} \prod_{a=1}^{d_K} \Gamma\left(\frac{a}{d_K}\right)^{6w_K\chi_K(a)}. \quad (6)$$

ただし, K は虚二次体とし, Cl_K , d_K , χ_K , w_K , h_K はそれぞれ K のイデアル類群, 判別式, 2 次 Dirichlet 指標, 含まれる 1 の冪根の数, 類数を表す. イデアル類 $\bar{\mathfrak{a}} \in \text{Cl}_K$ を Δ に代入した値は, 代表元 $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ ($\text{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$) を用いて

$$\Delta(\bar{\mathfrak{a}}) := N(\mathfrak{a})^{12} \Delta(\omega_1/\omega_2) \omega_2^{-12}$$

で定義する.

$\Delta(z)$ はレベル 1, 重さ 12 の楕円保型形式なので, その CM 点での値の超越数部分は周期記号で表せる. 具体的には, 虚二次体 K と $\tau \in K$ ($\text{Im}(z) > 0$) に対して

$$\Delta(z) \equiv p_K(\text{id}, \text{id})^{12} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \quad (7)$$

を満たす. Eq. (6), Eq. (7) を合わせると, 虚二次体 K の CM 周期の明示公式

$$p_K(\text{id}, \text{id}) \equiv \pi^{-\frac{1}{2}} \prod_{\bar{\mathfrak{a}} \in (\mathbb{Z}/d_K\mathbb{Z})^\times} \Gamma\left(\frac{a}{d_K}\right)^{\frac{w_K\chi(a)}{4h_K}} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}$$

を得る.

Rohrlich の公式. Fermat 曲線

$$F_n: x^n + y^n = 1$$

を考える. F_n の種数は $(n-1)(n-2)/2$ であり, $H_{\text{dR}}^1(F_n, \mathbb{Q})$ の基底は

$$x^{r-1}y^{s-n}dx \quad (0 < r, s < n, r+s \neq n)$$

で与えられる. さらに積分値が 0 にならないような $F_n(\mathbb{C})$ の閉路 γ に対し

$$\int_{\gamma} x^{r-1}y^{s-n}dx \equiv \frac{\Gamma(\frac{r}{n})\Gamma(\frac{s}{n})}{\Gamma(\frac{r+s}{n})} (= B(\frac{r}{n}, \frac{s}{n})) \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^{\times}} \quad (8)$$

となることが分かる.

一般の n に対し F_n はアーベル多様体ではないが, そのヤコビ多様体の既約成分が円分体の虚数乗法を持つことが知られている. よって Eq. (8) の積分値は円分体の CM 周期で書ける ([Yo, Chap. III, §2. 特に (2.3)]). Eq. (8) を “ガンマ関数に関して解く” ことで, ガンマ関数の有理数点での値を円分体の CM 周期で表した次式を得る [Ka2, Theorem 3]:

$$\Gamma(\frac{a}{n}) \equiv \pi^{1-\langle \frac{a}{n} \rangle} \prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2}-\langle \frac{ab}{n} \rangle} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^{\times}}. \quad (9)$$

ただし $\langle \alpha \rangle$ は α の小数部分を表し, σ_b は $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の \mathbb{C} への埋め込み

$$[\sigma_b: \zeta_n \mapsto \zeta_n^b] \in \text{Hom}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{C})$$

を表すこととする.

5 ガンマ関数の関数等式と CM 周期の単項関係式の “対応”

Eq. (9) により

ガンマ関数の有理数点での値 $\Gamma(a/n)$ と円分体の CM 周期 $p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\sigma, \tau)$

が結び付けられた. また, ガンマ関数は関数等式を, CM 周期は単項関係式を, それぞれ満たしていた:

$$\text{ガンマ関数の関数等式} \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{反射公式: } \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \\ \text{倍数公式: } \prod_{k=0}^{d-1} \Gamma(z + \frac{k}{d}) = d^{\frac{1}{2}-dz} (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(dz). \end{array} \right.$$

$$\text{CM 周期の単項関係式} \cdots \begin{cases} \text{複素共役 } \rho: p_K(\sigma, \tau)p_K(\sigma, \rho \circ \tau) \equiv 1 \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}, \\ \text{体拡大 } K \subset L: p_K(\tilde{\sigma}|_K, \tau) \equiv \prod_{\tilde{\tau}|_K=\tau} p_L(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}. \end{cases}$$

これらには以下の“対応”がある. より正確には, Eq. (9) により以下の同値が導かれる. ただし, ガンマ関数の関数等式は有理数点 a/n での値に限り, 等式ではなく $\pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}$ での合同式に退化する. また CM 周期の単項関係式は円分体の場合に限られる.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-a}{n}\right) &\equiv \pi \iff p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_b)p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_{-b}) \equiv 1, \\ \prod_{k=0}^{d-1} \Gamma\left(\frac{a}{n} + \frac{k}{d}\right) &\equiv \pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{da}{n}\right) \iff p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_b) \equiv \prod_{c \equiv b \pmod{n}} p_{\mathbb{Q}(\zeta_{dn})}(\text{id}, \sigma_c). \end{aligned} \quad (10)$$

ここで合同式は全て $\pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}$ である. 最後の式は体拡大 $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{dn})$ の場合の CM 周期の単項関係式 Eq. (4) となっている.

6 p 進類似

以降では前節までの議論の p 進類似を考える. この節では対象となる関数や関係式を列挙する.

森田の p 進ガンマ関数. Euler のガンマ関数の p 進類似物は森田の p 進ガンマ関数と呼ばれる. これは連続関数

$$\Gamma_p(z): \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$$

であり,

$$\begin{aligned} \Gamma_p(n) &:= (-1)^n \prod_{0 < k < n, p \nmid k}^{n-1} k \quad (n \in \mathbb{N}), \\ \Gamma_p(z) &= \lim_{\mathbb{N} \ni n \xrightarrow{p\text{-adic}} z} \Gamma_p(n) \quad (z \in \mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

で定義される.

p 進ガンマ関数の関数等式. 関数等式の p 進版は次の形をしている:

$$\begin{aligned} \text{反射公式} \cdots \Gamma_p(z)\Gamma_p(1-z) &\equiv 1 \pmod{\mu_\infty}, \\ \text{倍数公式} \cdots \prod_{k=0}^{d-1} \Gamma_p\left(z + \frac{k}{d}\right) &\equiv d^{1-dz+(dz)_1} \Gamma_p(dz) \pmod{\mu_\infty} \quad (p \nmid d). \end{aligned}$$

ただし μ_∞ は 1 の冪根全体からなる群であり, $z \in \mathbb{Z}_p$ に対し $z_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$, $z_1 \in \mathbb{Z}_p$ を

$$z = z_0 + pz_1$$

で定める. 1 の冪根部分を明示的に書くこともできるが本稿では省略する.

p 進周期. (代数曲線やアーベル多様体の) 周期 (積分) は, 閉路と微分形式の pairing

$$\begin{aligned} H_1^B \times H_{\text{dR}}^1 &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (\gamma, \omega) &\mapsto \int_{\gamma} \omega \end{aligned}$$

とみなせる. これは de Rham の同型

$$H_B^1 \otimes \mathbb{C} \cong H_{\text{dR}}^1 \otimes \mathbb{C}$$

と対応する. この de Rham の同型を p 進 Hodge 理論の比較同型に取り替えることで, 別の pairing, すなわち p 進周期

$$\begin{aligned} H_1^B \times H_{\text{dR}}^1 &\rightarrow B_{\text{dR}}, \\ (\gamma, \omega) &\mapsto \int_{\gamma, p} \omega \end{aligned}$$

を定義できる. ここで B_{dR} は Fontaine の p 進周期環である. 志村の周期記号

$$p_K(\sigma, \tau) \in \mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

と同様の “分解” の操作を行うことで, p 進版の周期記号

$$p_{K,p}(\sigma, \tau) \in B_{\text{dR}}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

が定義できる.

通常の周期 (記号) とその p 進版を同時に考える “副産物” を紹介する. 虚二次体の場合の周期積分値 Eq. (2), Eq. (3) は楕円曲線等のモデルのとり方によっていた. しかしその影響は, 2 種類の積分値 $\int_{\gamma} \omega, \int_{\gamma, p} \omega$ に同変的に現れる. 例えば積分路を 2 周すれば, $\int_{\gamma} \omega$ も $\int_{\gamma, p} \omega$ も同時に 2 倍になる. 即ち, これらの “比”

$$\left[\int_{\gamma} \omega : \int_{\gamma, p} \omega \right] \in (\mathbb{C}^\times \times B_{\text{dR}}^\times) / \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

は楕円曲線や閉路のとり方によらないことが分かる. これは一般の CM 体 K に対しても同様に成り立つ現象である. すなわち, 周期記号の比は

$$[p_K(\sigma, \tau) : p_{K,p}(\sigma, \tau)] \in (\mathbb{C}^\times \times B_{\text{dR}}^\times) / \overline{\mathbb{Q}}^\times (\mu_\infty \times \mu_\infty) \quad (11)$$

に値をとる. mod μ_∞ の曖昧さは, 周期記号の定義に必要な “分解” の操作で現れる. 詳しくは [Ka2, §5.1] を参照.

周期の単項関係式. 志村の周期記号と同様の単項関係式を, p 進版の周期記号も満たすことが示せる. それだけでなく, 比 (Eq. (11)) が well-defined なことから, 以下が成り立つ [Ka2, Proposition 4].

- 複素共役 $\rho \in \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ と, $\sigma, \tau \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})$ に対し

$$p_K(\sigma, \tau) p_K(\sigma, \rho \circ \tau) \equiv p_{K,p}(\sigma, \tau) p_{K,p}(\sigma, \rho \circ \tau) \pmod{\mu_\infty}.$$

- 体拡大 $K \subset L$ (K, L は共に CM 体) と $\tau \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})$, $\tilde{\sigma} \in \text{Hom}(L, \mathbb{C})$ に対し

$$\frac{p_K(\tilde{\sigma}|_K, \tau)}{\prod_{\tilde{\tau}|_K=\tau} p_L(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})} \equiv \frac{p_{K,p}(\tilde{\sigma}|_K, \tau)}{\prod_{\tilde{\tau}|_K=\tau} p_{L,p}(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})} \pmod{\mu_\infty}. \quad (12)$$

ただし積は $\tilde{\tau} \in \text{Hom}(L, \mathbb{C})$ s.t. $\tilde{\tau}|_K = \tau$ を動く.

絶対フロベニウス作用. p 進版の周期記号の定義には p 進 Hodge 理論の比較同型が用いられていた. これは de Rham の同型より豊富な情報を持っている. 虚数乗法を持つアーベル多様体は潜在的良還元を持つことから, その p 進周期は B_{dR} の部分環 B_{cris} と $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の合成環 $B_{\text{cris}}\overline{\mathbb{Q}_p}$ に含まれる. また, 部分環 B_{cris} には絶対フロベニウス作用 Φ が作用している. よって p 進周期が値をとる合成環 $B_{\text{cris}}\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上には, (適当な基礎体上の)Weil 群 $W_p \subset \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ の半線形な作用

$$\Phi_\tau := \Phi^{\deg \tau} \otimes \tau \curvearrowright B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\text{ur}}} \overline{\mathbb{Q}_p} \cong B_{\text{cris}}\overline{\mathbb{Q}_p} \quad (\tau \in W_p)$$

が考えられる.

7 Colman の公式 (Fermat 曲線の Frobenius 行列)

Coleman は Fermat 曲線上の絶対フロベニウス作用を明示的に計算した [Co]. これは Rohrlich の公式 Eq. (9) の p 進類似とみなせる. 本稿では, 前節までに準備した周期記号を用いて書き換えた形で紹介する.

B_{dR} の部分集合

$$\widetilde{B}_{\text{cris}} := \{z \in B_{\text{dR}}^\times \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } z^n \in B_{\text{cris}}\overline{\mathbb{Q}_p}\}$$

を考える. 0 より大きく 1 より小さい有理数 a/n ($0 < a < n$, $(a, n) = 1$) に対し

$$P\left(\frac{a}{n}\right) := \frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right) \cdot \pi_p^{\frac{1}{2} - \frac{a}{n}} \prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n), p}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle}}{\pi^{1 - \frac{a}{n}} \prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle}} \in \widetilde{B}_{\text{cris}}/\mu_\infty \quad (13)$$

とおく. ただし $\pi_p \in B_{\text{cris}}$ は π の p 進類似を表す. 以下 2 点に注意してほしい.

- Rohrlich の公式 Eq. (9) より

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right) \equiv \pi^{1 - \frac{a}{n}} \prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^\times}$$

である. しかし周期記号は $\text{mod } \overline{\mathbb{Q}}^\times$ でしか定まらないので, 商

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right) / \pi^{1 - \frac{a}{n}} \prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle}$$

は, このままでは意味を持たない.

- Eq. (11) での議論により, 比

$$\left[\prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n), p}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle} : \prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle} \right]$$

は $\text{mod } \mu_\infty$ で定まる. しかし, それぞれ \mathbb{C}^\times , B_{dR}^\times の元なので, 商

$$\prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n), p}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle} / \prod_{\bar{b} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} p_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}(\text{id}, \sigma_b)^{\frac{1}{2} - \langle \frac{ab}{n} \rangle}$$

は, このままでは意味を持たない.

それゆえ, Eq. (13) の形にしてようやく $\text{mod } \mu_\infty$ で値が定まるのである.

Coleman の公式から以下を得る.

定理 7.1 ([Co, Theorem 1.7], [Ka1, Theorem 3], [Ka3, Theorem 2.4]). $p \nmid n$, $\deg \tau = 1$ のとき

$$\Gamma_p\left(\frac{a'}{n}\right) \equiv p^{\frac{1}{2}-\frac{a'}{n}} \frac{P\left(\frac{a'}{n}\right)}{\Phi_\tau\left(P\left(\frac{a'}{n}\right)\right)} \pmod{\mu_\infty} \quad (14)$$

ただし a' は $0 < a' < n$, $pa \equiv a' \pmod{n}$ を満たす自然数である.

Coleman は $p \mid n$ の場合の式も与えている [Co, Theorem 3.13]. また, Coleman が与えた元々の公式は $\text{mod } \mu_\infty$ の合同式ではなく等式である.

8 主結果 … Coleman の公式は, ある程度 “自動的に” 従う

本節では [Ka3] の主結果を紹介する. 次が鍵となる命題であり, p 進連続関数は “倍数公式” によって凡そ特徴付けられることを意味する.

命題 8.1 ([Ka3, Proposition 3.2]). 連続関数 $f(z): \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ が

$$f(dz) = \prod_{k=0}^{d-1} f\left(z + \frac{k}{d}\right) \quad (p \nmid d \in \mathbb{N}) \quad (15)$$

$$\frac{f(p^n + 1)}{f(p^n)} = \frac{f(p^{n+1} + 1)}{f(p^{n+1})} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (16)$$

を満たせば, 定数 a, b が存在して

$$f(z) = a^{z-\frac{1}{2}} b^{z+\frac{1}{2}}$$

と表せる.

Eq. (15) は倍数公式から補正項を取り除いたものである. Eq. (16) も以下の意味で “倍数公式の仲間” だと思える: もしも “ p 倍公式”

$$f(pz) = \prod_{k=0}^{p-1} f\left(z + \frac{k}{p}\right)$$

が成り立ったとする. 実際は

$$\frac{k}{p} \notin \mathbb{Z}_p \quad (0 < k \leq p-1)$$

なので, \mathbb{Z}_p 上の関数等式としては意味をなさない. しかし z の場合と $z + 1/p$ の場合

$$f\left(p\left(z + \frac{1}{p}\right)\right) = \prod_{k=0}^{p-1} f\left(z + \frac{k+1}{p}\right)$$

の辺々の商を考えると

$$\frac{f(pz)}{f(pz+1)} = \frac{f(z)}{f(z+1)}$$

となり, “ p 倍公式” から Eq. (16) を導くことができる.

Coleman の公式 Eq. (14) の右辺は Euler のガンマ関数, 周期記号, その p 進類似で定義されていた. Euler のガンマ関数はオリジナルの倍数公式 Eq. (1) を満たしていた. そして, 周期記号やその p 進類似, そしてそれらの商は, 対応する単項関係式を満たしている (Eq. (4), Eq. (10), Eq. (12)). これらのことから以下の “倍数公式” が導ける:

$$\prod_{k=0}^{d-1} P\left(\frac{a}{n} + \frac{k}{d}\right) \equiv \text{“補正項”} \cdot P\left(\frac{ad}{n}\right) \pmod{\mu_\infty} \quad (\forall d \in \mathbb{N}) \quad (17)$$

“補正項” 部分は明示的に書き下せる. 使っている関数等式は p 進とは関係ないので条件 $p \nmid d$ が不要であることにも注意して欲しい.

Coleman の公式 Eq. (14) の両辺の商

$$f\left(\frac{a'}{n}\right) := p^{\frac{1}{2} - \frac{a'}{n}} \frac{P\left(\frac{a'}{n}\right)}{\Phi_\tau\left(P\left(\frac{a'}{n}\right)\right)} \Big/ \Gamma_p\left(\frac{a'}{n}\right)$$

を考え, 以下を仮定する:

仮定. 絶対フロベニウス作用は p 進連続的である. 特に $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ と見なせる.

実際は “ $p \mid n$ の場合の絶対フロベニウス作用の p 進連続性” も仮定する必要がある. 詳細は [Ka3, Assumption 3.4] を参照. すると Eq. (17) より

$$\begin{aligned} f(dz) &\equiv \prod_{k=0}^{d-1} f\left(z + \frac{k}{d}\right) \pmod{\mu_\infty} \quad (p \nmid d \in \mathbb{N}), \\ \frac{f(p^n + 1)}{f(p^n)} &\equiv \frac{f(p^{n+1} + 1)}{f(p^{n+1})} \pmod{\mu_\infty} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

が導ける. よって命題 8.1 より以下を得る.

定理 8.2 ([Ka3, Corollary 3.6]). “絶対フロベニウス作用の p 進連続性” より, 定数 a, b が存在して

$$p^{\frac{1}{2} - \frac{a'}{n}} \frac{P\left(\frac{a'}{n}\right)}{\Phi_\tau\left(P\left(\frac{a'}{n}\right)\right)} \equiv a^{z - \frac{1}{2}} b^{z_1 + \frac{1}{2}} \Gamma_p\left(\frac{a'}{n}\right) \pmod{\mu_\infty}$$

となることが導ける.

9 一般化に向けて

本稿の話題は CM 体が円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の場合であり, 扱った式は

$$\text{Rohrlich の公式 Eq. (14), Coleman の公式 Eq. (9)}$$

であった. これらを一般の CM 体に拡張した予想が

吉田敬之氏の予想 (絶対 CM 周期記号)[Yo], その p 進類似 [KY1, KY2, Ka2]

として与えられている. 例えば, 吉田予想と一般の場合の “絶対フロベニウス作用の p 進連続性” から, 吉田予想の p 進類似が導けるか, などは興味深い問題であると思われる.

References

- [Co] R. Coleman, On the Frobenius matrices of Fermat curves, *p-adic analysis*, Lecture Notes in Math. **1454** (1990), 173–193.
- [Ka1] T. Kashio, Fermat curves and a refinement of the reciprocity law on cyclotomic units, *J. Reine Angew. Math.* **741** (2018), 255–273
- [Ka2] T. Kashio, On a common refinement of Stark units and Gross-Stark units, preprint (<https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.03198>)
- [Ka3] T. Kashio, Note on Coleman’s formula for the absolute Frobenius on Fermat curves, to appear in *Annales de l’Institut Fourier* (<https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.02879>)
- [KY1] T. Kashio, H. Yoshida, On p -adic absolute CM-periods. I, *Amer. J. Math.* **130** (2008), no. 6, 1629–1685
- [KY2] T. Kashio, H. Yoshida, On p -adic absolute CM-periods. II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. 1, 187–225
- [Sh] G. Shimura, *Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions*, Princeton Math. Ser., vol. 46, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.
- [Yo] H. Yoshida, *Absolute CM-Periods*, Math. Surveys Monogr., vol. 106, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

団代数と団散乱図[†]

中西 知樹 (名古屋大学)

概要. Gross-Hacking-Keel-Kontsevich はホモロジカルミラー対称性における散乱図の手法を用いて, 団代数理論におけるいくつかの重要な未解決問題を解決した. 本稿では, 彼らの理論における中心的対象である団散乱図に関する基本事項の説明をし, また, 二重対数元と五角関係式の役割を明らかにする.

1. はじめに

団代数 (cluster algebra) は, 2000 年ごろに Fomin と Zelevinsky によって導入された可換代数のクラスである. 団代数の定式化と基礎理論は, Fomin, Zelevinsky, および Berenstein による団代数四部作 (Cluster Algebras I–IV [FZ02, FZ03, BFZ05, FZ07]) により「一通りの」完成を見た. そしてその具体的な成果として, Laurent 現象, 有限型団代数の分類, 分離公式, などの重要な結果が得られた. その後, 多くの研究者の研究によって, Fomin と Zelevinsky による

- (1) C 行列の符号同一性予想 [FZ07]
- (2) 団変数の Laurent 正值性予想 [FZ02]

という二つの予想が団代数理論において基幹をなすことが明らかとなった. これらの予想に関してさまざまな部分クラスに対する個別の肯定的な解決がなされたものの, また一方で, 完全に一般的な証明を得ることは難しい問題であることも徐々に認識されていった.

このような状況を大きく変えたのは Gross-Hacking-Keel-Kontsevich による論文 [GHKK18] であった. 彼らは, Kontsevich-Soibelman [KS06], Gross-Siebert [GS11] によりホモロジカルミラー対称性の研究において導入された散乱図の概念と手法を用いて, 上の二つの予想の証明を含む団代数に関する多くの重要な結果を与えた. これによって, 団代数理論は大きく進展し, 新たな段階に入った.

本稿では, [GHKK18] における中心的対象である団散乱図 (cluster scattering diagram) の基本事項について, 予備知識を仮定せずできるだけ簡明に説明する. あわせて, [GHKK18] においては陰に隠れている二重対数元と五角関係式の果たす役割を明らかにし, 団散乱図の構造をより一層明確にする. 詳細は団散乱図および団代数と団散乱図の関係に関する著者による包括的なレビュー [Nak21a, Nak21b] を参照していただきたい.

2. 団代数と団散乱図

はじめに, 団代数と団散乱図のそれぞれの構成の原理を俯瞰しておこう (表 1).

r を正の整数として, $r \times r$ 整数行列 B に対して, DB が反対称行列となるような $r \times r$ 正有理対角行列 D が存在するとき, B を**反対称化可能** (skew-symmetrizable) といい, D を B の

[†] プログラムでは「団代数と団散乱図式」というタイトルであったが, 講演の際にタイトルを表記のように変更した.

| | 団代数/団パターン | 団散乱図 |
|---------|--|--|
| 初期データ | $B: r \times r$ 反対称化可能整数行列 | B : 左と同じ |
| 補助データ | $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$: 変数の組 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$: 変数の組 | N : ランク r の格子 e_1, \dots, e_r : N の基底 |
| 構成の原理 | 変異 | 整合性 |
| 背後にある構造 | なし | 構造群 G |

表 1. 団代数と団散乱図の構成の比較.

反対称化子 (skew-symmetrizer) と呼ぶ. 団代数と団散乱図はどちらも任意の $r \times r$ 反対称化可能整数行列 B を一つ与えることにより定まる. r は団代数および団散乱図の**ランク**と呼ばれる.

まず団代数については, 上の行列 B (**初期変異行列** (initial exchange matrix)) に変数の組 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ を合わせた**初期種子** (initial seed) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を考え, これにある規則で与えられる**変異** (mutation) を繰り返すことにより (一般には無限個の異なる) 新しい**種子** (seed) が得られる. これらの種子の集まりを**団パターン** (cluster pattern) と呼ぶ. そして, それらの種子に含まれる変数 \mathbf{x} の Laurent 多項式を**団変数** (cluster variable) と呼ぶ. このとき, すべての団変数の生成する代数として**団代数** (cluster algebra) $\mathcal{A}(B)$ が定まる. 本稿では団代数の代数構造について論じるわけではないので, 以下「団代数」と「団パターン」をほぼ同義語として扱うことにする. Fomin-Zelevinsky によるこの団代数の構成の根本的な問題点は, 背後の構造が何もないことである. すなわち, 種子の「変異」には概念的な支えがなく, ただ得られる結果の有用性によってのみ, その定義が正当化されているのである. 別の言い方をすると, 「団代数とは何か?」という問に対する概念的に明確な答をわれわれはまだ持っていないのである.

一方の団散乱図は, **整合散乱図** (consistent scattering diagram) と呼ばれるある種の錐複体の特別なものであり, その構成は**整合性** (consistency) に基づく. 構成の詳細は追って述べることにして, 団散乱図の構成の背後には**構造群** (structrue group) と呼ばれる行列 B から定まるある群があり, この群が団散乱図を局所的・大域的に統制する. これが団代数との大きな相違であり, 重要な点であることを強調しておきたい.

次に, 団代数と団散乱図の関係を簡単な例を用いて説明する. ランク 2 の団代数の初期交換行列として

$$(2.1) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える. 付随する団代数 $\mathcal{A}(B)$ は無限型 (無限個の異なる種子を持つ) である. 一般に, 団代数の各種子に対してそのトロピカル化として G 行列 (G -matrix) という $r \times r$ ユニモジュラー行列が定まる [FZ07]. また, G 行列を集めたものを G パターン (G -pattern) という. 各 G 行列の列ベクトル (g ベクトル (g -vector)) の張る \mathbb{R}^r における (凸有理多面) 錐 (G 錐 (G -cone)) を集めたものは扇をなす [Rea14]. これを団代数 $\mathcal{A}(B)$ に付随する G 扇 (G -fan, あ

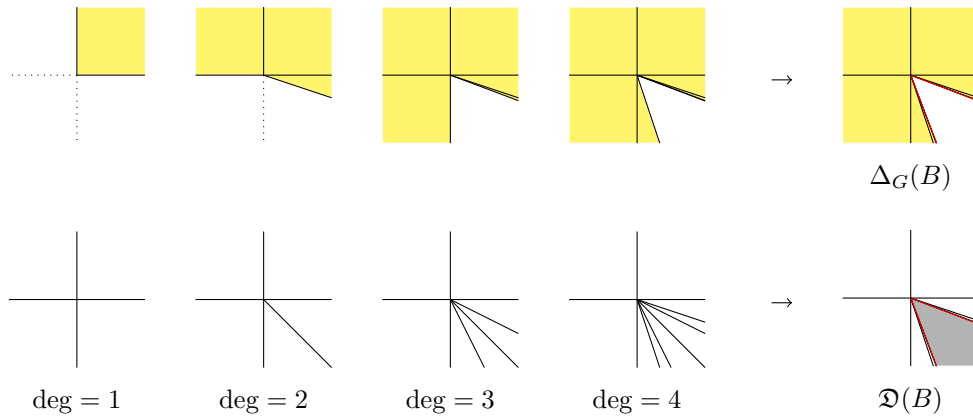


図 1. G 扇 $\Delta_G(B)$ と団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ の例.

るいは g ベクトル扇) と呼び, $\Delta_G(B)$ と表す. G 扇は G パターンの幾何学的表示であり, 団代数の全ての情報は G 扇から復元できる. この事実を, 脱トロピカル化 (detropicalization) という. 式 (2.1) の B に対する G 扇の構成の流れを図 1 の上段に示す. 左端の図の黄色の錐 (第一象限) が初期 G 行列 I に対応する G 錐である. 以下, 変異 (1, 2 の二方向がある) により得られる G 錐を両側に順次貼り合わせていくことにより G 扇 $\Delta_G(B)$ (右端の図) が得られる. 図では細かい部分が表せないが, 実際には無限個の G 錐があり, 図の黄色の領域が $\Delta_G(B)$ で, 赤い 2 本の非有理半直線が $\Delta_G(B)$ の境界である.

一方, B に付随する団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ は, 詳細はのちに述べるが, ある次数に関して帰納的に構成される (図 1 の下段). 左端の図は次数 1 で整合的である. これを次数 2 で整合的にするためには壁 (wall) と呼ばれる半直線を一本加える. 以下, 次数を上げる度に壁が増え, 最終的に得られる図が団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ (右端の図) である. (正確には, 図は $\mathfrak{D}(B)$ の台と呼ばれるものである.) 赤い 2 本の線 (これらは壁には含まれない) は G 扇の境界であり, 赤い線の外側は上の G 扇の図と完全に一致する. 一方, 赤い線の内側のグレーの部分には全ての有理半直線の壁が稠密に現れる [DM21]. この領域は非公式に “the Badlands” と呼ばれる¹.

上の例は以下のように一般化される [GHKK18].

- (a) 任意の反対称化可能整数行列 B に対して, G 扇 $\Delta_G(B)$ は対応する団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ に (適当な意味で) 埋め込まれる. したがって, 団散乱図は対応する団代数の全ての情報を含有している.
- (b) それに加えて, 団散乱図は G 扇の外側にも複雑で興味深い構造 (Badlands) を持つ.

これらが [GHKK18] における最も基本的な結果であり, (a) の埋め込みを通して, さらに団散乱図の性質から団代数に関するさまざまな重要な結果が得られる. (a) の事実は団代数 $\mathcal{A}(B)$ と団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ の双方が同じ初期データ B により定まることを考えれば納得はできるものの, 上の例の構成の過程の違いを見てもわかるように大変非自明な事である.

なお, 「散乱図 (scattering diagram)」という用語は [GS11] で導入されたが, 図 1 の $\mathfrak{D}(B)$ を第 2 象限側から粒子が入射し, 原点で衝突し崩壊し, 第 4 象限側に散乱したものと見立てそ

¹badlands (悪地) は極度に侵食した峡谷状の枯れ谷の地形を意味する. アメリカ・サウスダコタ州の The Badlands National Park が有名である.

のように名付けたと思われる。(一方, [KS14] ではこれを**壁越え構造** (wall-crossing structure) と呼んでいるが, [KS06] でも衝突 (collision) という同じニュアンスの用語が現れる.)

以上で概略の説明を終え, 以下では団散乱図に関する基本事項についてより具体的に述べていくことにする.

3. 二重対数元と五角関係式

3.1. 構造群. まず, 一般の散乱図の基礎となる構造群を導入する. これは, ファイバー束における構造群のような役割をなすものである.

しばらくは, 最終的な目標である団散乱図の初期データである反対称化可能整数行列 B を忘れ, $r \times r$ 反対称有理行列 $\Omega = (\omega_{ij})$ を任意に一つ固定する. Ω に付随する群 G_Ω を以下の手順で構成する. ランク r の自由アーベル群 $N \simeq \mathbb{Z}^r$ とその基底 e_1, \dots, e_r を任意に一つ固定する. これにより以下の二つが定まる.

(1). N 上の反対称有理形式

$$(3.1) \quad \{\cdot, \cdot\} : N \times N \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \{e_i, e_j\} = \omega_{ij}.$$

(2). N の正元の集合

$$(3.2) \quad N^+ := \left\{ n = \sum_{i=1}^r a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \neq 0 \right\}.$$

これらを用いて, まず \mathbb{Q} 上の N^+ 次数付き Lie 代数 \mathfrak{g}_Ω を以下で定める.

$$(3.3) \quad \mathfrak{g}_\Omega = \bigoplus_{n \in N^+} \mathbb{Q} X_n,$$

$$(3.4) \quad [X_n, X_{n'}] = \{n, n'\} X_{n+n'}.$$

上のリー括弧 $[\cdot, \cdot]$ が Jacobi 恒等式をみたすことは簡単に確かめられる. 次に, $n = \sum_{i=1}^r a_i e_i \in N^+$ に対して次数を $\deg(n) = \sum_{i=1}^r a_i$ と定め, \mathfrak{g}_Ω の次数に関する完備化を $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega$ とする. $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega$ の元 X は形式的無限和により

$$(3.5) \quad X = \sum_{n \in N^+} c_n X_n \quad (c_n \in \mathbb{Q})$$

と表される.

最後に, $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega$ に対応する群 G_Ω を定める. 形式的な全単射

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \exp : \widehat{\mathfrak{g}}_\Omega &\rightarrow G_\Omega \\ X &\mapsto \exp(X) \end{aligned}$$

を考える. すなわち, $\exp(X)$ は X に一対一に対応する G_Ω の元を表す単なる記号である. そして, G_Ω における積を Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式

$$(3.7) \quad \exp(X) \exp(Y) = \exp \left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots \right)$$

により定める. BCH 公式は Lie 代数と Lie 群の関係でよく知られた式で, Lie 代数の元 X に対する形式的べき級数 $\exp(X) := \sum_{k=0}^{\infty} X^k/k!$ の積公式を与える (例えば [Jac79]). 特に, 積は結合的である. 今の場合, $\exp(X)$ は形式的な記号であるが, $\widehat{\mathfrak{g}}_\Omega$ が N^+ 次数付きであることから (3.7) の右辺は G_Ω の元となる. これにより G_Ω に積が定まり, G_Ω は群となる. 任意の $g = \exp(X) \in G$ と $c \in \mathbb{Q}$ に対して, g の有理べきを $g^c = \exp(cX)$ と定める. 以上の構成

は、より一般的な状況で [KS14] により与えられたものであるが、群 G_Ω には特に固有の名前がない。これは不便であるので、ここではのちに定める散乱図式の**構造群** (structure group) と呼ぶことにする。また、誤解のない限り G_Ω を G と表すことにする。

次に、 G における無限積を定める。任意の $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して、

$$(3.8) \quad (N^+)^{>\ell} := \{n \in N^+ \mid \deg(n) > \ell\},$$

$$(3.9) \quad (N^+)^{\leq\ell} := \{n \in N^+ \mid \deg(n) \leq \ell\}$$

と定める。このとき、

$$(3.10) \quad \exp\left(\sum_{n \in (N^+)^{>\ell}} c_n X_n\right)$$

という形の元のなす G の部分集合 $G^{>\ell}$ は G の正規部分群となる。 $G^{>\ell}$ による商群を $G^{\leq\ell} = G/G^{>\ell}$ と表し、 $\pi_\ell: G \rightarrow G^{\leq\ell}$ を標準射影とする。 $G^{\leq\ell}$ の元の代表元は

$$(3.11) \quad \exp\left(\sum_{n \in (N^+)^{\leq\ell}} c_n X_n\right)$$

と表される。作り方より、 G は逆極限 $\lim_{\leftarrow} G_\ell$ と一致する。 G の元の形式的な無限積 p (可算全順序列) に対して、各 ℓ に対して π_ℓ の像が id ではないような因子が有限個しかないとき、有限積 $\pi_\ell(p)$ の極限 $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \pi_\ell$ により G の元が一意的に定まる。これを G における無限積という。

3.2. y 表現. 変数 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ に対して、 $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$ を \mathbf{y} の \mathbb{Q} 上の形式的べき級数環とする。 $n \in N^+$ に対して、 $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$ のベクトル空間としての自己準同形写像 \tilde{X}_n を

$$(3.12) \quad \tilde{X}_n(y^{n'}) = \{n, n'\} y^{n+n'}$$

で定めると、以下が成り立つ。

- (a) 対応 $X_n \mapsto \tilde{X}_n$ は Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ の $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$ 上の表現 $X \mapsto \tilde{X}$ に線形拡張される。
- (b) \tilde{X}_n は代数 $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$ の微分である。

また、(b) の事実より $\exp(\tilde{X}) := \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{X})^k / k!$ は $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$ の代数としての自己同形写像となる [Jac79]。以上より、群 G の表現

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \rho_{\mathbf{y}} : \quad G &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]) \\ \exp(X) &\mapsto \exp(\tilde{X}) \end{aligned}$$

が得られる。これを G の y 表現 (y -representation) と呼ぶ。(以下で見るように、これは団代数における y 変数の変異と関係をしている。)

3.3. 二重対数元. Euler により導入された以下のべき級数で定まる複素関数

$$(3.14) \quad \text{Li}_2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^2}$$

を**二重対数関数** (dilogarithm) という。ここでは特に以下の性質が重要である。

$$(3.15) \quad x \frac{d}{dx} (-\text{Li}_2(-x)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j = \log(1+x).$$

元 $n \in N^+$ に対して, $n = tn'$ ($t \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n' \in N^+$) ならば $t = 1$ となるとき n は原始的 (primitive) という. すべての原始的な N^+ の元のなす集合を N_{pr}^+ と表す. 任意の $n \in N_{\text{pr}}^+$ に対して, $\exp(\sum_{j=1}^{\infty} c_{jn} X_{jn})$ という形の G の元全体の集合 G_n^{\parallel} は G の部分アーベル群となる. これを n の平行部分群 (parallel subgroup) と呼ぶ.

各 $n \in N^+$ に対して, n の二重対数元 (dilogarithm element) $\Psi[n]$ を以下で定める.

$$(3.16) \quad \Psi[n] = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} X_{jn}\right) \in G_{n_0}^{\parallel}.$$

ここで, n_0 は, $n \in \mathbb{Z}_{>0} n_0$ となる原始的元である. 上の無限和 (あるいは G における無限積) を逆転させて, $\exp(X_n)$ を $\Psi[jn]$ の有理べきの無限積で表すこともできる. したがって, G の任意の元 g は二重対数元の有理べきの (無限かもしれない) 積で表すことが可能であり, この意味で二重対数元は G を生成する.

さて, y 表現のもとで $\Psi[n]$ は $\mathbb{Q}[[y]]$ の自己同形写像として以下のように作用することが, (3.15) と本質的に同じ計算によりわかる.

$$(3.17) \quad \Psi[n](y^{n'}) = y^{n'} \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \{n, n'\} y^j\right) = y^{n'} (1 + y^n)^{\{n, n'\}}.$$

この式の右辺は, (n を適当に取ることにより) 団代数における y 変数 (係数) の変異 (正確にはその Fock-Goncharov 分解における自己同型部分 [FG09]) を与える.

以上をまとめると, 二重対数元は二重対数関数の「代数化」であり, また, 団代数の変異を表現として実現する.

3.4. 五角関係式. 二重対数元は群 G において以下の特筆すべき関係式をみたす.

定理 3.1. 任意の $n_1, n_2 \in N^+$, $c_1, c_2, c' \in \mathbb{Q}$ に対して, 以下の関係式が成り立つ.

(1). (可換関係式 (commutative relation)) $\{n_2, n_1\} = 0$ のとき,

$$(3.18) \quad \Psi[n_2]\Psi[n_1] = \Psi[n_1]\Psi[n_2].$$

(2). (五角関係式 (pentagon relation)) ($c = 1$ [GHKK18], 一般の場合 [Nak21b]) $\{n_2, n_1\} = c \neq 0$ のとき,

$$(3.19) \quad \Psi[n_2]^{1/c} \Psi[n_1]^{1/c} = \Psi[n_1]^{1/c} \Psi[n_1 + n_2]^{1/c} \Psi[n_2]^{1/c}.$$

(3.18) は自明であるが重要である. (3.19) は y 表現を用いて示すことができる.

詳細は省くが, 五角関係式は二重対数関数に対する著名な Abel の恒等式 (五角恒等式) の「代数化」とみなすことができる.

4. 整合散乱図

4.1. 散乱図. 引き続き, 群 $G = G_{\Omega}$ を前節で定めたものとする.

前節のランク r の自由アーベル群 N に対して, $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおき, $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ を標準ペアリングとする. $n \in N_{\text{pr}}^+$ に対して, $n^{\perp} = \{z \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle n, z \rangle = 0\}$ とおく.

散乱図の構成要素は以下で定める壁である.

定義 4.1 (壁). 群 $G = G_{\Omega}$ に対して, 以下の三つ組 $(\mathfrak{d}, g)_n$ を壁 (wall) という.

- **法ベクトル** (normal vector) : $n \in N_{\text{pr}}^+$,
- **台** (support) : $\mathfrak{d} \subset n^\perp$ は次元 $r-1$ の (凸有理多面) 錐 (強凸とは限らない),
- **壁元** (wall element) : $g \in G_n^\parallel$.

なお, 法ベクトル n は \mathfrak{d} または g から一意的に定まるが, 明示的に与えておくと便利なのでデータとして加えてある.

例えば, $(n^\perp, \Psi[tn]^c)_n$ ($t \in \mathbb{Z}_{>0}, c \in \mathbb{Q}$) は壁である.

定義 4.2 (散乱図). 群 $G = G_\Omega$ の壁の族 $\mathfrak{D} = \{\mathbf{w}_\lambda = (\mathfrak{d}_\lambda, g_\lambda)_{n_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ (Λ は添字集合) が以下の条件をみたすとき構造群 G の **散乱図** (scattering diagram) という.

- **有限性条件** (finiteness condition) : 任意の $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $\pi_\ell(g_\lambda) \neq \text{id}$ となる壁 \mathbf{w}_λ は有限個である. ただし, $\pi_\ell : G \rightarrow G_\ell$ は標準射影である.

また, 各 $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して定まる散乱図 \mathfrak{D} の有限部分集合 $\mathfrak{D}_\ell = \{\mathbf{w}_\lambda \in \mathfrak{D} \mid \pi_\ell(g_\lambda) \neq \text{id}\}$ を散乱図 \mathfrak{D} の次数 ℓ の **縮小** (reduction) という.

散乱図 \mathfrak{D} に対して, \mathfrak{D} の **台** (support) $\text{Supp}(\mathfrak{D})$ と **特異点集合** (singular locus) $\text{Sing}(\mathfrak{D})$ を以下で定める.

$$(4.1) \quad \text{Supp}(\mathfrak{D}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{d}_\lambda,$$

$$(4.2) \quad \text{Sing}(\mathfrak{D}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \partial \mathfrak{d}_\lambda \cup \bigcup_{\substack{\lambda, \lambda' \in \Lambda \\ \dim \mathfrak{d}_\lambda \cap \mathfrak{d}_{\lambda'} = r-2}} \mathfrak{d}_\lambda \cap \mathfrak{d}_{\lambda'}.$$

定義 4.3 (許容曲線). 散乱図式 \mathfrak{D} に対して, 以下の条件をみたす曲線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M_{\mathbb{R}}$ を **許容曲線** (admissible curve) という.

- γ はなめらかである.
- γ は $\text{Sing}(\mathfrak{D})$ とは交わらない.
- γ の始点 $\gamma(0)$ と終点 $\gamma(1)$ は $\text{Supp}(\mathfrak{D})$ に属さない.
- γ は $\text{Supp}(\mathfrak{D})$ と横断的に交わる.

以下, 曲線 γ は考えている散乱図 \mathfrak{D} に対する許容曲線とする.

定義 4.4 (道順序積). 散乱図 \mathfrak{D} と曲線 γ に対して, 各 $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, 次数 ℓ の縮小 \mathfrak{D}_ℓ の壁のうち曲線 γ と交わるものを交わる順に $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ とする. ただし, 同時に複数の壁と交わる場合は, それらの順序は任意に選ぶ. γ と壁 $\mathbf{w}_i = (\mathfrak{d}_i, g_i)_{n_i}$ の交差符号 ϵ_i を

$$(4.3) \quad \epsilon_i = \begin{cases} 1 & \langle n_i, \gamma'(t_i) \rangle < 0, \\ -1 & \langle n_i, \gamma'(t_i) \rangle > 0 \end{cases}$$

と定める. ただし, $\gamma'(t)$ は $\gamma(t)$ の t における速度ベクトルである. このとき,

$$(4.4) \quad \mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}_\ell} = g_k^{\epsilon_k} \cdots g_1^{\epsilon_1}, \quad \mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}_\ell}$$

により定まる G の元 $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}$ を γ に沿う **道順序積** (path-ordered product) という.

定義 4.5 (同値性). 散乱図 $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ に対して, 双方に許容される任意の曲線 γ に対して $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}} = \mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}'}$ が成り立つとき, \mathfrak{D} と \mathfrak{D}' は **同値** (equivalent) という.

散乱図 \mathfrak{D} に対して、台の分割と統合、壁元の分割と統合、自明な壁元 id を持つ壁の付加と削除を（無限回を許し）繰り返すことにより \mathfrak{D} に同値な散乱図が無数に得られる。

4.2. **整合散乱図**. 以下が散乱図における最も重要な概念である。

定義 4.6 (整合性). 散乱図 \mathfrak{D} に対して、任意の閉曲線 γ に対して $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}} = \text{id}$ が成り立つとき、 \mathfrak{D} は**整合** (consistent) という。

基本群においてよく知られているように、上の条件は「任意の曲線 γ に対して $\mathfrak{p}_{\gamma, \mathfrak{D}}$ は γ の始点と終点にのみ依存する」という条件と同値である。

$M_{\mathbb{R}}$ における正および負の象限 (orthant) C^{\pm} を

$$(4.5) \quad C^+ := \{z \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle e_i, z \rangle \geq 0 \quad (i = 1, \dots, r)\},$$

$$(4.6) \quad C^- := \{z \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle e_i, z \rangle \leq 0 \quad (i = 1, \dots, r)\}$$

と定める。任意の $n \in N_{\text{pr}}^+$ に対して、 n^+ と C^{\pm} の内部 $\text{Int}(C^{\pm})$ は交わらない。したがって、壁の台と $\text{Int}(C^{\pm})$ も交わらない。整合散乱図 \mathfrak{D} に対して、この事実と \mathfrak{D} の整合性より、始点が C^+ の内部に、終点が C^- の内部にある曲線 γ_{+-} に対して、 $\mathfrak{p}_{\gamma_{+-}, \mathfrak{D}} \in G$ は γ_{+-} の取り方によらないことがわかる。この元を $g(\mathfrak{D})$ とおくと、写像

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccc} \varphi: \{ \text{構造群 } G \text{ のすべての整合散乱図} \} / \sim & \rightarrow & G \\ & \downarrow [\mathfrak{D}] & \mapsto g(\mathfrak{D}) \end{array}$$

が定まる。ここで、 $[\mathfrak{D}]$ は散乱図の同値による \mathfrak{D} の同値類である。

以下は、整合散乱図の存在と内在的な意味を示すもので、散乱図に関する最も基本的な定理である。

定理 4.7 ([KS14]). 写像 φ は全単射である。

定理の内容は、以下のように咀嚼できる。

- 整合散乱図 \mathfrak{D} のすべての情報は $g(\mathfrak{D})$ に含有されている。
- 整合散乱図とは、群 G の元の壁による幾何学的分解を表したものである。

4.3. **五角関係式と整合散乱図**. 定理 4.7 を示すため、[KS14] では写像 φ の逆写像、すなわち、各 $g \in G$ に対する整合散乱図の構成が与えられた。その構成は明示的ではあるが概念的でもあり、散乱図の具体的な形を与えてくれるわけではない。一方、以下の例で見ると、二重対数元と五角関係式を用いることにより、ある種の整合散乱図の具体的な形を自然に得ることができる。

以下、初期データ Ω として

$$(4.8) \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{e_2, e_1\} = 1$$

を考える。また、 $n = n_1 e_1 + n_2 e_2 \in N^+$ に対して、 $\Psi[n]$ を $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$ とも表すことにする。

例 4.8 (A_2 型団散乱図). 式 (4.8) の Ω に対して五角関係式 (3.19) を適用して、

$$(4.9) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

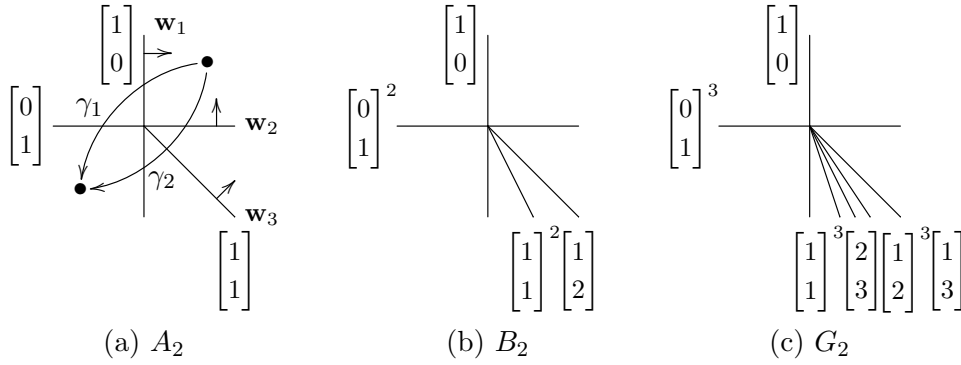


図 2. ランク 2 の有限型団散乱図.

が得られる. 以下の壁

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= (e_1^\perp, \Psi[e_1])_{e_1}, & \mathbf{w}_2 &= (e_2^\perp, \Psi[e_2])_{e_2}, \\ \mathbf{w}_3 &= (\mathbb{R}_{\geq 0}(e_1^* - e_2^*), \Psi[e_1 + e_2])_{e_1 + e_2}. \end{aligned}$$

を持つ散乱図 \mathfrak{D} を考える (図 2 (a)). すると, 関係式 (4.10) は \mathfrak{D} の (唯一の) 整合関係式

$$(4.11) \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{D}, \gamma_1} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{D}, \gamma_2}$$

とみなすことができる. したがって, \mathfrak{D} は整合関係式となる. これは次節で定義する団散乱図の特別なもので, \mathfrak{D} を A_2 型の団散乱図と呼ぶ. また, \mathfrak{D} の台は A_2 型の G 扇とみなすことができる. 式 (4.9) の右辺に現れるベクトルが A_2 型の正ルートであることにも注目する.

例 4.9 (B_2 型団散乱図). 式 (4.8) の Ω に対して五角関係式を繰り返す適用して, 関係式

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \end{aligned}$$

が得られる. ここで, 関係式 (4.12) に現れる二重対数元 $[n_1, n_2]$ に分数 n_1/n_2 ($[1, 0]$ に対しては ∞) を対応させると, 関係式 (4.12) の左辺は左から見て単調減少であり, 一方, (最後の等式の) 右辺は単調増加になる. このような形の二重対数元の積をそれぞれ, **反整列** (anti-ordered), **整列** (ordered) と呼ぶことにする. この性質より, 関係式 (4.12) は図 2 (b) の散乱図 \mathfrak{D} の (唯一の) 整合関係式とみなすことができる. この整合散乱図を B_2 型の団散乱図と呼ぶ. \mathfrak{D} の台は B_2 型の G 扇とみなすことができる. ただし, B_2 型の G 扇と対応させるため, 同一視 $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ を $e_1^* \mapsto \mathbf{e}_1, e_2^*/2 \mapsto \mathbf{e}_2$ で与えている. 右辺に現れるベクトルが B_2 型の正ルートであることにも注目する.

例 4.10 (G_2 型団散乱図). 同様にして, 式 (4.8) の Ω に対して五角関係式を繰り返すことにより, 以下の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \right) \\
 (4.13) \qquad &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^3 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^3.
 \end{aligned}$$

最後の等式の右辺は整列である. よって, これを図 2 (c) の散乱図 \mathfrak{D} の (唯一の) 整合関係式とみなすことができる. この整合散乱図を G_2 型の団散乱図と呼ぶ. \mathfrak{D} の台は G_2 型の G 扇とみなすことができる. ただし, G_2 型の G 扇と対応させるため, 同一視 $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ を $e_1^* \mapsto \mathbf{e}_1$, $e_2^*/3 \mapsto \mathbf{e}_2$ で与えている. 右辺に現れるベクトルが G_2 型の正ルートであることにも注目する.

上の 3 つの例で見たように, 五角関係式は, 団散乱図, G 扇 (団代数), そしてルート系の情報をすべて「知っている」のである.

5. 団散乱図

5.1. 平行部分群と散乱図. 団散乱図を定義するために, さらに準備をする.

引き続き, 構造群 $G = G_{\Omega}$ の散乱図を考える.

各 $n \in N_{\text{pr}}^+$ に対して, (3.3) で定めたリー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\Omega}$ の分解

$$(5.1) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+^n \oplus \mathfrak{g}_0^n \oplus \mathfrak{g}_-^n,$$

$$(5.2) \qquad \mathfrak{g}_0^n = \bigoplus_{\substack{n' \in N^+ \\ \{n', n\} = 0}} \mathfrak{g}_{n'}, \quad \mathfrak{g}_{\pm}^n = \bigoplus_{\substack{n' \in N^+ \\ \{n', n\} \geq 0}} \mathfrak{g}_{n'}, \quad \mathfrak{g}_n = \mathbb{Q}X_n$$

を考える. さらに部分 Lie 代数 \mathfrak{g}_0^n を

$$(5.3) \qquad \mathfrak{g}_0^n = \mathfrak{g}_n^{\parallel} \oplus \mathfrak{g}_n^{\perp}$$

$$(5.4) \qquad \mathfrak{g}_n^{\parallel} = \bigoplus_{n' \in \mathbb{Z}_{>0n}} \mathfrak{g}_{n'}, \quad \mathfrak{g}_n^{\perp} = \bigoplus_{\substack{n' \in N^+ \\ \{n', n\} = 0, n' \notin \mathbb{Z}_{>0n}}} \mathfrak{g}_{n'}$$

と分解する. \mathfrak{g} と同様に \mathfrak{g}_{\pm}^n , $\mathfrak{g}_n^{\parallel}$, \mathfrak{g}_n^{\perp} を完備化し, それらに対応する G の部分群を G_{\pm}^n , G_n^{\parallel} , G_n^{\perp} とおく. 特に, G_n^{\parallel} は 3.3 節で定めた平行部分群に他ならない. これより, 元 $g \in G$ の一意的な分解

$$(5.5) \qquad g = g_+^n (g_n^{\parallel} g_n^{\perp}) g_-^n \quad (g_{\pm}^n \in G_{\pm}^n, g_n^{\parallel} \in G_n^{\parallel}, g_n^{\perp} \in G_n^{\perp})$$

が得られる. そこで, 写像 (群準同形写像ではない)

$$\begin{aligned}
 (5.6) \qquad \psi: G &\rightarrow S^{\parallel} := \prod_{n \in N_{\text{pr}}^+} G_n^{\parallel} \\
 g &\mapsto (g_n^{\parallel})_{n \in N_{\text{pr}}^+}
 \end{aligned}$$

を考える. このとき, 次の事実が成り立つ.

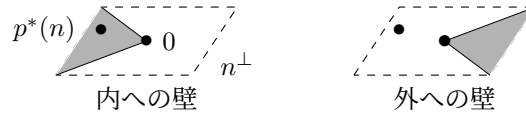


図 3. 内への壁と外への壁

定理 5.1 ([GHKK18]). 写像 ψ は全単射である.

二つの全単射 (4.7), (5.6) を組み合わせると, 任意の $\mathbf{h} = (h_n) \in S^{\parallel}$ に対して整合散乱図の同値類が一意的に定まる. その任意の代表元を $\mathfrak{D}(\mathbf{h})$ とおく.

散乱図 $\mathfrak{D}(\mathbf{h})$ (の同値類) の特徴づけを与えるため, 加群準同形写像

$$(5.7) \quad \begin{array}{ccc} p^* : N & \rightarrow & M_{\mathbb{R}} \\ & & n \quad \{\cdot, n\} \end{array}$$

を導入する. ただし, $\{\cdot, n\}$ は N 上の反対称形式の線形拡張である.

$$(5.8) \quad \langle n, p^*(n) \rangle = \{n, n\} = 0$$

より, $p^*(n) \in n^{\perp}$ であることに注意する.

定義 5.2 (内への壁/外への壁). 壁 $\mathbf{w} = (\mathfrak{d}, g)_n$ に対して, $p^*(n) \in \mathfrak{d}$ が成り立つとき \mathbf{w} を内への (incoming) 壁と呼び, $p^*(n) \notin \mathfrak{d}$ が成り立つとき \mathbf{w} を外への (outgoing) 壁と呼ぶ (図 3).

例えば, 壁 $(n^{\perp}, g)_n$ は内への壁である.

散乱図 \mathfrak{D} に対して, \mathfrak{D} のすべての内への壁からなる \mathfrak{D} の部分集合を \mathfrak{D}_{in} とおく. この概念を用いて, 散乱図 $\mathfrak{D}(\mathbf{h})$ は以下のように特徴付けられる.

定理 5.3 ([GHKK18]). 任意の $\mathbf{h} = (h_n) \in S^{\parallel}$ に対して,

$$(5.9) \quad \mathfrak{D}_{\text{in}} = \{(n^{\perp}, h_n)_n \mid n \in N_{\text{pr}}^+\}$$

となる整合散乱図 \mathfrak{D} が同値を除き一意的に存在する. また, そのような \mathfrak{D} は $\mathfrak{D}(\mathbf{h})$ と同値となる.

5.2. **団散乱図.** 準備が整ったので, いよいよ団散乱図の定義を与える.

B を任意の $r \times r$ 反対称化可能整数行列とする. 行列 B を, $r \times r$ 正整数対角行列 Δ と $r \times r$ 反対称有理行列 Ω により

$$(5.10) \quad B = \Delta \Omega$$

と分解する. 例えば, B の反対称化子 D に対して, 適当な正整数 λ をかけて λD^{-1} が正整数対角行列になるようにすると, $\Delta = \lambda D^{-1}$, $\Omega = \lambda^{-1} D B$ は上の分解を与える. また, 上の分解は一意的ではないが, 任意の分解を一つ選ぶことにする.

行列 $\Omega = (\omega_{ij})$ と補助データ N および e_1, \dots, e_r から, 今まで述べたように散乱図の構造群 $G = G_{\Omega}$ が定まる.

一方, 行列 $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r)$ から以下の新たなデータが定まる.

- N の部分群 $N^{\circ} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} \delta_i e_i$.
- N° の双対群 $M^{\circ} = \text{Hom}(N^{\circ}, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z} \delta_i^{-1} e_i^*$. ただし, $e_1^*, \dots, e_r^* \in M$ は e_1, \dots, e_r の双対基底である. 包含関係 $M \subset M^{\circ} \subset M_{\mathbb{R}}$ に注意する.

- 各 $n \in N^+$ に対して, $\delta(n)n \in N^\circ$ となる最小の正の有理数 $\delta(n)$ を n の**正規化因子** (normalization factor) という. 例えば, $\delta(e_i) = \delta_i$ である. また, 任意の $n \in N^+$ と正整数 t に対して, $\delta(tn) = t^{-1}n$ が成り立つ.

定理 5.3 において

$$(5.11) \quad h_n = \begin{cases} \Psi[e_i]^{\delta_i} & n = e_i, \\ \text{id} & n \neq e_i \ (i = 1, \dots, r) \end{cases}$$

とおくと, 以下の定理が得られる.

定理 5.4 ([GHKK18]). 任意の $\delta_1, \dots, \delta_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$(5.12) \quad \mathfrak{D}_{\text{in}} = \{(e_i^\perp, \Psi[e_i]^{\delta_i})_{e_i} \mid i = 1, \dots, r\}$$

となる整合散乱図 \mathfrak{D} が同値を除き一意に存在する.

この定理にもとづき, 団散乱図が定義される.

定義 5.5. B を任意の $r \times r$ 反対称化可能整数行列として, $B = \Delta\Omega$ を (5.10) における分解とする. このとき, 定理 5.4 により同値を除き一意に定まる構造群 G_Ω の散乱図 $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(B)$ を B に付随する**団散乱図** (cluster scattering diagram (CSD)) という.

注意 5.6. B の異なる分解 $B = \Delta'\Omega'$ に対しては構造群の同形 $G_\Omega \simeq G_{\Omega'}$ が存在し, 得られる団散乱図はこの同形のもとで分解 $B = \Delta\Omega$ に対する団散乱図と同一視できる. したがって, 団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ は本質的に B のみに付随して定まる.

5.3. ランク 2 の団散乱図と整列補題. 団散乱図の定義が与えられたので, あらためてランク 2 の場合を吟味する. 簡単のため, $B = O$ の場合を除く. このとき, 2×2 反対称化可能行列 B とその分解を

$$(5.13) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \Delta\Omega \quad (\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

としても一般性を失わない. 行列 Ω は (4.8) と同じものにとったことに注意する. この B に対する内への壁の条件を分かりやすく言い直そう. (5.7) の準同形写像 p^* は, 終域を縮小して準同形写像

$$(5.14) \quad p^* : N \rightarrow M^\circ$$

ともみなせる. p^* の上の基底 e_1, \dots, e_r および $\delta_1^{-1}e_1^*, \dots, \delta_r^{-1}e_r^*$ に関する表現行列を $A = (a_{ij})$ とおくと,

$$(5.15) \quad a_{ij} = \langle \delta_i e_i, p^*(e_j) \rangle = \{\delta_i e_i, e_j\} = \delta_i \omega_{ij} = b_{ij}$$

となり, 表現行列は B で与えられる. よって, (5.13) の B の符号から, $n \in N_{\text{pr}}^+$ の像 $p^*(n)$ は e_1^*, e_2^* に関する第二象限 (原点を除く境界を含む) に属することがわかる. したがって, 今の場合には, 壁が内への壁であるための必要十分条件は壁の台 \mathfrak{d} が第二象限 (原点を除く境界を含む) と交わりを持つことである.

そこで、図 2 の 3 つの整合散乱図をあらためて見ると、それぞれ $(\delta_1, \delta_2) = (1, 1), (2, 1), (3, 1)$ に対して条件 (5.12) をみたすことがわかる。したがって、それらに対応する行列 B

$$(5.16) \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

に付随する団散乱図であることがわかった。一般に、有限個の壁からなる散乱図を代表元を持つ団散乱図を**有限型** (of finite type) という。式 (5.13) の B に対して、 $\mathfrak{D}(B)$ が有限型になる必要十分条件は $\delta_1 \delta_2 \leq 3$ であることがわかっていて、これは対応する団代数 $\mathcal{A}(B)$ が有限型となる条件とも一致する。

以下では非有限型 $\delta_1 \delta_2 \geq 4$ の場合を考えよう。任意の壁元 g は $\Psi[n]^c$ ($n \in N^+, c \in \mathbb{Q}$) の無限積で表されることを思い出そう。すると、内向きの壁に対する条件 (5.12) より、有限型の場合と同様に、団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ の整合条件は

$$(5.17) \quad \Psi[e_2]^{\delta_2} \Psi[e_1]^{\delta_1} = \Psi[e_1]^{\delta_1} (\cdots) \Psi[e_2]^{\delta_2} \quad (\text{右辺は } \Psi[n]^c \text{ の整列積})$$

という形をしていなければならない。したがって、以下のことが問題となる。

- このような関係式は任意の δ_1, δ_2 に対して存在するか？
- 存在するならば有限型と同様に五角関係式を適用して得られるか？

以下の定理は両方の問に対する肯定的な答を与える。

定理 5.7 (整列補題 (Ordering Lemma) [Nak21b]). ランク 2 の場合に、任意の $\Psi[n]^{\delta(n)}$ ($n \in N^+$) の有限反整列積は、可換関係式 (3.18) と五角関係式 (3.19) を (必要ならば無限回用いて) $\Psi[n]^{\delta(n)}$ ($n \in N^+$) の (無限かもしれない) 整列積に直すことができる。

この定理の証明は具体的な整列のアルゴリズムを与え、そのアルゴリズムが途中で実行不可能にならないことを示すことにより得られる。例えば、積 $\Psi[e_2]^{1/2} \Psi[e_1]$ は五角関係式で整列不可能な反整列積であり、計算過程でこのような積が決して出てこないことを示す必要がある。また、アルゴリズムを SageMath のプログラムにしたものが [Nak21b] により与えられていて、具体的な整列積の形を計算機で (計算時間が許す範囲で) 任意の次数まで求めることができる。

非有限型団散乱図は、さらにアフィン型 ($\delta_1 \delta_2 = 4$) と非アフィン型 ($\delta_1 \delta_2 \geq 5$) に分類される。それぞれの場合の例を見てみよう。

例 5.8 ($A_1^{(1)}$ 型団散乱図). ここでは $(\delta_1, \delta_2) = (2, 2)$ の場合 ($A_1^{(1)}$ 型) について述べる。まず結果を述べると、整合関係式は

$$(5.18) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \cdots \prod_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 2^j \\ 2^j \end{bmatrix}^{2^{2-j}} \cdots \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2$$

で与えられる。対応する団散乱図の台は図 4 (a) に図示したものになる。この整合関係式自体は [Rei09, GPS10, Rea20] などによりすでにいろいろな方法で知られていた結果を二重対数元で書き直したものである。また、これが五角関係式から得られることの直接の証明は [Mat21] による。今の場合、 $n \in N_{\text{pr}}^+$ に対して $\delta(n) = 2$ 、また $\delta((2^j, 2^j)) = 2^{1-j}$ であることに注意をする。

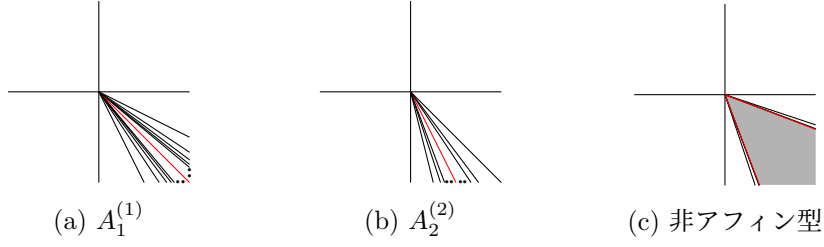


図 4. ランク 2 の無限型団散乱図の例.

以下では、五角関係式を (5.18) の右辺が無限積となる理由を発見的に説明する. まず, 有限型の場合と同様に, 左辺に五角関係式を適用ことにより, 関係式

$$(5.19) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2.$$

が得られる. この積は $[1, 2]$ と $[1, 0]$ の反整列積を含み, まだ整列化されていない. また, $\mathbf{n}' = (1, 2)$ と $\mathbf{n} = (1, 0)$ に対して, $\{\mathbf{n}', \mathbf{n}\} = 2$ であることにも注意する. まず, 最初の近似として $\text{mod } G^{>3}$ による近似を考える. すると, $[1, 2]$ と $[1, 0]$ は可換であり, あとは五角関係式を適用して

$$(5.20) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^2 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \pmod{G^{>3}}$$

を得る. これは確かに (5.22) と適合している.

次に, より高次の近似を得るために, 反整列積 $[1, 2][1, 0]$ に対して五角関係式 (3.19) で $c = 2$ としたものを適用する. 構造を見やすくするため, 記号 $[n_1, n_2]_2 := [n_1, n_2]^{1/2}$ を用いると, 関係式

$$(5.21) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_2^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_2^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_2^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_2^2.$$

を得る. これは関係式 (5.19) と同じ構造を持つことに注意する. そこで, 次の近似として, $\text{mod } G^{>7}$ による近似を考える. すると, $[3, 4]$ と $[1, 0]$ は可換であり, あとは $c = 2$ に対する五角関係式を適用して

$$(5.22) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_2^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_2^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}_2^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_2^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \pmod{G^{>7}}.$$

を得る. さらに, これを (5.19) に代入して, 再び $c = 1$ に対する五角関係式を適用して

$$(5.23) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^2 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^2 \pmod{G^{>7}}$$

を得る. これは確かに (5.22) と適合している. $\text{mod } G^{>2^\ell-1}$ で以上の操作を繰り返すことにより, (5.22) に収束する関係式が順次得られる.

$(\delta_1, \delta_2) = (1, 4), (4, 1)$ ($A_2^{(2)}$ 型) の場合も同様である. $(\delta_1, \delta_2) = (1, 4)$ の団散乱図の台を図 4 (b) に図示する.

例 5.9 (非アフィン無限型団散乱図). $\delta_1\delta_2 \geq 5$ (非アフィン無限型) の場合は, 整合関係式は非常に複雑となり, 一般的な公式はまだ知られていないが最も興味深い. $(\delta_1, \delta_2) = (3, 3)$ の場合は $\mathfrak{D}(B)$ の台は図 1 で提示したものであるが, 比較のため図 4 (c) に再掲する. これは非アフィン無限型の典型例であり, 他の場合も同様の状況が起こると考えられている. 一般に, 同一視 $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$, $e_1^*/\delta_1 \mapsto \mathbf{e}_1$, $e_2^*/\delta_2 \mapsto \mathbf{e}_2$ のもとで, Badlands の境界 (図 4 (c) の赤い線の傾き) は

$$(5.24) \quad \frac{\delta_1\delta_2 \pm \sqrt{\delta_1\delta_2(\delta_1\delta_2 - 4)}}{-2\delta_2}$$

で与えられ, Badlands の内部の全ての有理傾きに対する壁が現れることが予想されていて [GHKK18], $\delta_1 = \delta_2$ の場合には実際に正しいことが示されている [DM21]. 実際の状況を見るには, 前述の SageMath のプログラム [Nak21b] が有効である. このプログラムにより, 例えば $\text{mod } G^{>7}$ での整合関係式

$$(5.25) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^3 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}^3 \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}^{18} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}^{39} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}^{204} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^{18} \right. \\ \left. \times \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}^{54} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^{204} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}^{39} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}^{18} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}^9 \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^3.$$

が得られる. ここで, 括弧の中が Badlands の内部に対応する. これを見ると, Badlands 内の壁に対応する次数 7 以下の全ての $n \in N^+$ に対する二重対数元が現れている. これは上に予想されている有理傾きに対する壁が現れるという性質よりさらに強い性質であるが, 今のところ様々な δ_1, δ_2 に対する全ての計算例で反例はなく, 一般に成り立つことが予想される.

6. 団散乱図の正実現

6.1. 団散乱図の正実現の構成. 既に述べたように, 一般に, 壁元を二重対数元 $\Psi[n]$ の有理べきの無限積で表すことができるが, 団散乱図においてはべき c を特別な正有理数に限ることができる.

定理 6.1 ([GHKK18]). 任意の $r \times r$ 反対称化可能整数行列に対して, すべての壁元が $\Psi[n]^{\delta(n)}$ ($n \in N^+$) の積であるような (一意的ではない) 団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ が存在する.

特に, $\Psi[n]^{\delta(n)}$ の負べきが出ないことが重要であり, このような団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ を団散乱図の**正実現** (postive realization) という. 必要に応じて壁元を分解して, すべての壁元を $\Psi[n]^{\delta(n)}$ ($n \in N^+$) とすることも可能である. また, 正実現の台は, 同値な散乱図の台の中で最小の台を持つ.

以下では [GHKK18] による正実現の構成を, [GHKK18] の大筋に従いつつ, その一部 ([GHKK18] において perturbation trick 及び change of lattice trick と呼ばれる議論) を整列補題に置き換えて与えることにする.

構成に先立って以下の重要な概念を導入する.

定義 6.2 (継目). (1). 散乱図 \mathfrak{D} の壁 $\mathbf{w}_1 = (\mathfrak{d}_1, g_1)_{n_1}$, $\mathbf{w}_2 = (\mathfrak{d}_2, g_2)_{n_2}$ に対して, 台の交わり $j = \mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{d}_2$ の次元が $r - 2$ のとき, j を**継目** (joint) という.

(2). 継目 j に対して,

$$(6.1) \quad N_j = \{n \in N \mid \langle n, j \rangle = 0\} \subset N$$

と定める. 反対称形式 $\{\cdot, \cdot\}$ の N_j への制限が 0 となる時, j は平行 (parallel), そうでない時, j は垂直 (perpendicular) という. (したがって, (1) の継目 j が平行となる必要十分条件は $\{n_1, n_2\} = 0$ である.)

位相的な理由により, 散乱図 \mathfrak{D} の整合性は, レベル ℓ への還元 \mathfrak{D}_ℓ の各継目の周りの閉曲線に関する $\text{mod } G^{>\ell}$ での整合性に帰着される.

構成 6.3 (正実現の構成 [GHKK18, Nak21b]). 散乱図 \mathfrak{D}_ℓ を次数 ℓ に関して帰納的に与え, 極限 $\mathfrak{D} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_\ell$ で正実現を与える.

ステップ 1. \mathfrak{D}_1 を以下で与える.

$$(6.2) \quad \mathfrak{D}_1 = \{(e_i^\perp, \Psi[e_i]^{\delta_i})_{e_i} \mid i = 1, \dots, r\}.$$

ステップ 2. (これはステップ 3 の特別な場合であるが, 明瞭さのために重複を厭わずに述べる.) \mathfrak{D}_1 の各垂直継目 $j = e_i^\perp \cap e_j^\perp$ に対して, 必要なら i と j を取り替えて $\{e_j, e_i\} = c > 0$ とする. $\delta_j c = \{\delta_j e_j, e_i\} = b_{ij}$ は整数であり, 同様に, $\delta_i c$ も整数である. そこで, 五角関係式 (3.19) を用いて,

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \Psi[e_j]^{\delta_j} \Psi[e_i]^{\delta_i} &= (\Psi[e_j]^{1/c})^{c\delta_j} (\Psi[e_i]^{1/c})^{c\delta_i} \\ &\equiv \Psi[e_j]^{\delta_j} \Psi[e_i + e_j]^{c\delta_i \delta_j} \Psi[e_i]^{\delta_i} \pmod{G^{>2}} \end{aligned}$$

を得る. ここで, $\sigma(j, -p^*(e_i + e_j))$ を継目 j と $-p^*(e_i + e_j)$ の張る錐とする. j に対して, 外向きの壁

$$(6.4) \quad (\sigma(j, -p^*(e_i + e_j)), \Psi[e_i + e_j]^{c\delta_i \delta_j})_{e_i + e_j}$$

を新たに加えて, 得られる散乱図を \mathfrak{D}_2 とおく.

ステップ 3. 散乱図 \mathfrak{D}_ℓ が与えられたとする. 必要ならば \mathfrak{D}_ℓ の壁の台を分割して, \mathfrak{D}_ℓ の相異なる継目は交わるならば互いの境界でしか交わらないと仮定して良い. \mathfrak{D}_ℓ の各垂直継目 j に対して, $N_j^+ = N_j \cap N^+$, $N_{j, \text{pr}}^+ = N_j \cap N_{\text{pr}}^+$ とおく. このとき, $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in N_{\text{pr}}^+$ で以下をみたくものが一意的に存在する.

$$(6.5) \quad N_j^+ \subset \mathbb{Q}_{\geq 0} \tilde{e}_1 \oplus \mathbb{Q}_{\geq 0} \tilde{e}_2, \quad \{\tilde{e}_2, \tilde{e}_1\} > 0.$$

この \tilde{e}_1 と \tilde{e}_2 を基準として, \mathfrak{D}_ℓ において j を含む壁のうち第 2 象限に現れるものの壁元の積の反整列積を考え, それを整列補題を用いて整列積で表す. そして, その中でちょうど $\deg(tn) = \ell + 1$ となるような壁元 $\Psi[tn]^{s\delta(tn)}$ に対して, それぞれ外向きの壁

$$(6.6) \quad (\sigma(j, -p^*(n)), \Psi[tn]^{s\delta(tn)})_n$$

を新たに加えて, 得られる散乱図を $\mathfrak{D}_{\ell+1}$ とおく.

ステップ 4. 最後に極限 $\mathfrak{D} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_\ell$ を取ると求める正実現が得られる.

このようにして得られる散乱図 \mathfrak{D} は各垂直継目の周りで整合的であることは作り方からわかる. さらに, \mathfrak{D} と定理 5.4 で存在がわかっている団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ との「差」を調べることにより, 各平行継目の周りでも整合的であることがわかる, というのが [GHKK18] の構成と論証の巧みな点である.

上の構成を逆転させることにより, 団散乱図の構造に関する次の基本的事実が同時に得られる.

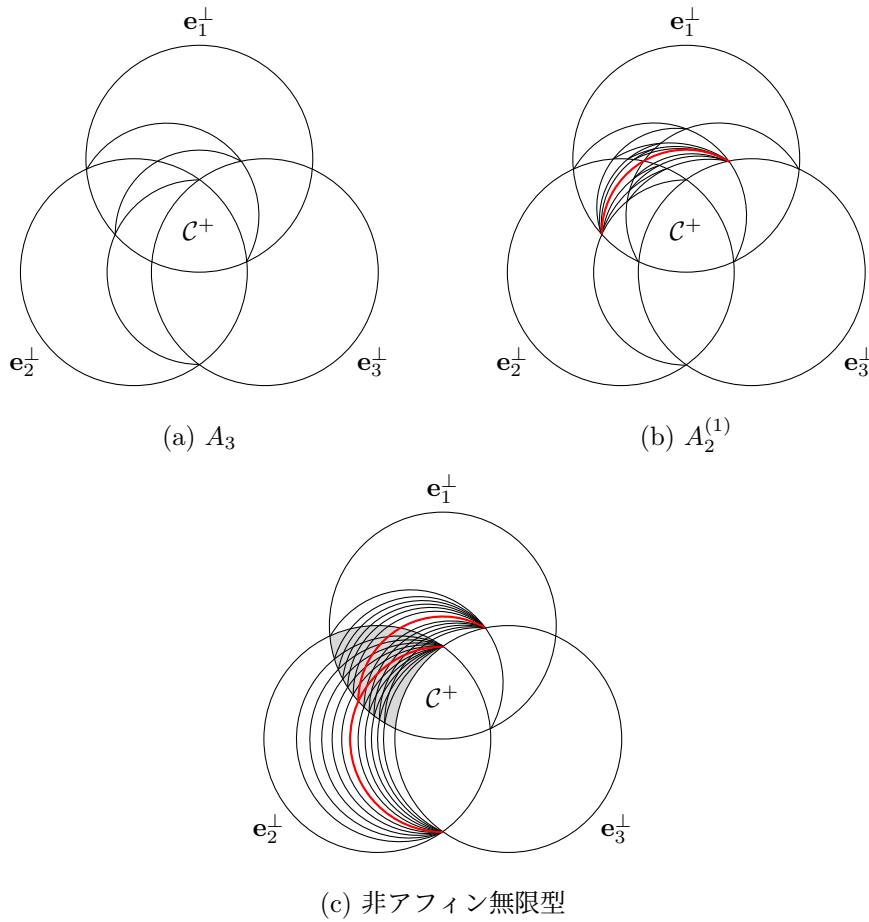


図 5. ランク 3 の団散乱図の例.

定理 6.4 ([Nak21b]). 団散乱図の任意の整合関係式は、可換関係式と五角関係式を（必要なら無限回）適用して自明なもの ($g = g$) に還元できる.

6.2. ランク 3 の団散乱図の例. 上で述べた正実現の構成を忠実にたどることにより、簡単な場合にランク 3 の団散乱図の例を実際に構成することが可能である. 詳細は [Nak21b] に譲り、ここでは典型的な 3 つの場合の団散乱図の台の図示のみを与える (図 5). なお、これらの図は $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^3$ における散乱図を \mathbb{R}^3 内の単位球面に射影し、さらに焦点 $(-1, -1, -1)/\sqrt{3}$ から平面に立体射影をしたものである. したがって、曲線が壁でそれらの交点が継目である. また、正確な射影図ではなく、トポロジカルな概形である.

(a). 有限型 (A_3 型) : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (図 5 (a)).

(b). アフィン型 ($A_2^{(1)}$ 型) : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (図 5 (b)). 赤い壁は図 4 (a) のランク 2 の赤い壁に相当する.

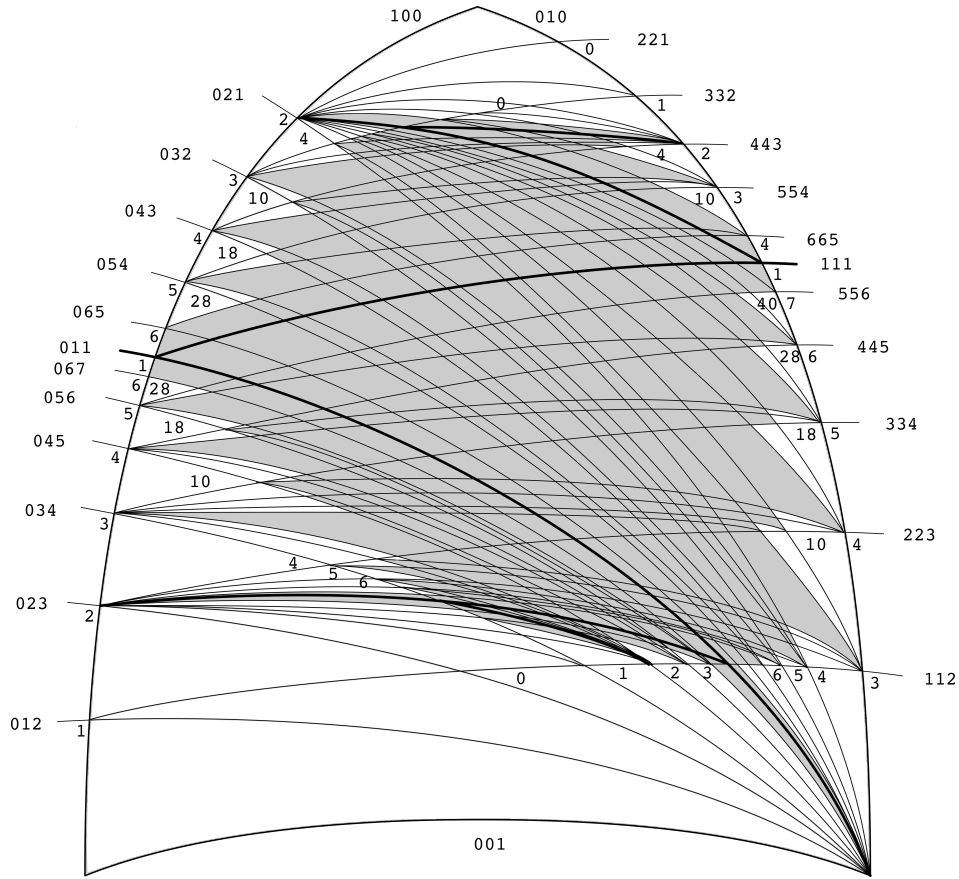


図 6. ランク 3 の Badlands の未完成図 ([Nak21b] から転載). これは, 図 5 (c) のグレーの部分拡大したものである. 3桁の数字は法ベクトルを表し, また継目に書かれている数字は正実現の構成において継目を生成する二つの壁の法ベクトル n_1, n_2 に対する $|\{n_2, n_1\}|$ の値である.

(c). 非アフィン無限型: $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (図 5 (c) をおよび図 6). 図 5 (c) における

グレーの領域を拡大したものが図 6 である. また, 図 6 のグレーの領域がランク 3 における Badlands の未完成図である. 未完成図と断ったのは Badlands の境界はフラクタル図形となるため, 正確な境界を描ききることができないからである. また, フラクタル図形になるのは, ランク r が 3 以上の場合に, G 扇をパラメタライズする正則 r 木グラフ \mathbb{T}_r がフラクタル図形であるからである.

6.3. 団代数への応用. 最後に団散乱図の団代数との関係および団代数への応用について結果のみを駆け足でまとめる.

まず定理 6.1 の正実現の構成 (およびその他のこと) を用いて, 以下が示される.

定理 6.5 (団散乱図の変異不変性 (mutation invariance), [GHKK18]). 任意の反対称化可能整数行列 B とその変異 B' に対して, 最小台を持つ団散乱図を $\mathcal{D}(B)$ と $\mathcal{D}(B')$ とする. このとき, $\text{Supp}(\mathcal{D}(B))$ と $\text{Supp}(\mathcal{D}(B'))$ は適当な区分線形変換で移り合う.

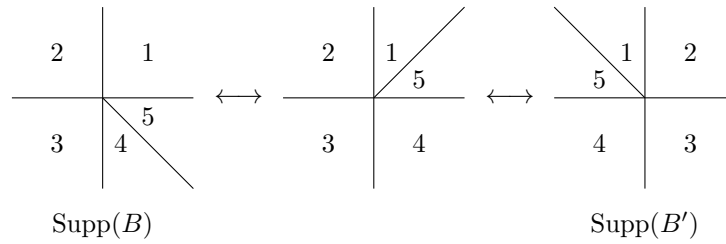


図 7. 団散乱図の変異不変性： A_2 型の例.

例 6.6. A_2 型の例を考える. $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, 例えば 1 方向の変異 $B' = \mu_1(B)$ は $B' = -B$ で与えられる. これに対する団散乱図 $\text{Supp}(\mathfrak{D}(B))$ と $\text{Supp}(\mathfrak{D}(B'))$ の間の区分線形変換は図 7 で与えられたものとなる. ここで $\mathfrak{D}(B)$ の第 2 象限が $\mathfrak{D}(B')$ の第 1 象限に対応していることに注意をする.

一般に, B の変異を繰り返して得られる団散乱図の正象限 C^+ に対応する錐が, 区分線形変換のもとで $\text{Supp}(\mathfrak{D}(B))$ における部屋 (chamber) として次々と隣接して現れ, 扇をなす. これを $\mathfrak{D}(B)$ における部屋構造 (chamber structure) という. これより, さらに以下の事実が示される.

定理 6.7 ([GHKK18]). (a). G 扇 $\Delta_G(B)$ も $\text{Supp}(\mathfrak{D}(B))$ と同じ区分線形変換による変異不変性を持つ.

(b). G 扇 $\Delta_G(B)$ の次元 $r - 1$ の錐の和集合は, 極小台を持つ団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ の台に部屋構造を保ちながら埋め込まれる.

(c). G 扇 $\Delta_G(B)$ の次元 $r - 1$ の錐の法ベクトル (c ベクトル) は, (b) の埋め込みのもとで対応する団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ の壁の法ベクトルと (正負を除き) 一致する.

上の定理の (c) より以下が直ちに得られる.

定理 6.8 (C 行列の符号同一性 (sign-coherence) [GHKK18]). 団代数の C 行列の各列ベクトル (c ベクトル) は, 正または負ベクトルである.

また定理 6.7 (b) の埋め込みの帰結として, 団代数 $A(B)$ の団変数の初期団変数に関する Laurent 多項式表示は, 団散乱図 $\mathfrak{D}(B)$ における **テータ関数** (theta functions) と呼ばれるものの特別なものとみなすことができる. (これは楕円関数論におけるテータ関数とは無関係である.) 一方, テータ関数は **折れ線** (broken line) と呼ばれる幾何的組合せ論的対象を用いて記述され, これと定理 6.1 の正実現を組み合わせるとテータ関数の係数の正値性が示される. これより, 以下が得られる.

定理 6.9 (団変数の Laurent 正値性 (Laurent positivity) [GHKK18]). 団代数の任意の団変数の初期団変数に関する Laurent 多項式表示の 0 でない係数は全て正である.

以上見たように, 団代数 (団パターン) を団散乱図の一部とみなすことにより, これまで未解決であった団代数理論における主要な未解決問題が自然な形で解決された. そして, 今後この見方をさらに深めることにより, 団代数に対するより概念的・内在的理解と定式化が得られることを筆者は大いに期待している.

参考文献

- [BFZ05] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Cluster algebras III: upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), 1–52; arXiv:math/035434 [math.RT].
- [DM21] B. Davison and T. Mandel, *Strong positivity for quantum theta bases of quantum cluster algebras*, Invent. Math. (2021), published online; arXiv:1910.12915 [math.RT].
- [FG09] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Annales Sci. de l'École Norm. Sup. **42** (2009), 865–930; arXiv:math/0311245 [math.AG].
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].
- [FZ03] ———, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121; arXiv:math/0208229 [math.RA].
- [FZ07] ———, *Cluster algebras IV. Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007), 112–164; arXiv:math/0602259 [math.RT].
- [GHKK18] M. Gross, P. Hacking, S. Keel, and M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), 497–608; arXiv:1411.1394 [math.AG].
- [GPS10] M. Gross, R. Pandharipande, and B. Siebert, *The tropical vertex*, Duke Math. J. (2010), no. 153, 297 – 362; arXiv:0902.0779 [math.AG].
- [GS11] M. Gross and B. Siebert, *From affine geometry to complex geometry*, Annals of Math. **174** (2011), 95–138; arXiv:math/0703822.
- [Jac79] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications, New York, 1979.
- [KS06] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Affine structures and non-Archimedean analytic spaces*, Prog. Math. **244** (2006), 321–385; arXiv:math/0406564.
- [KS14] ———, *Wall-crossing structures in Donaldson-Thomas invariants, integrable systems and mirror symmetry*, Homological mirror symmetry and tropical geometry, Lect. Notes Unione Ital., vol. 15, Springer, 2014, pp. 197–308; arXiv:1303.3253 [math.AG].
- [Mat21] K. Matsushita, *Consistency relations of rank 2 cluster scattering diagrams of affine type and the pentagon relation*, 2021, arXiv:2112.04743 [math.QA].
- [Nak21a] T. Nakanishi, *Cluster algebras and scattering diagrams, Part II. Cluster patterns and scattering diagrams*, 2021, preliminary draft for a monograph, arXiv:2103.16309 [math.CO].
- [Nak21b] ———, *Cluster algebras and scattering diagrams, Part III. Cluster scattering diagrams*, 2021, preliminary draft for a monograph; arXiv:2111.00800 [math.CO].
- [Rea14] N. Reading, *Universal geometric cluster algebras*, Mathematische Zeitschrift **277** (2014), 499–547; arXiv:1209.3987.
- [Rea20] ———, *A combinatorial approach to scattering diagrams*, Algebraic Combinatorics **3** (2020), 603–636; arXiv:1806.05094 [math.CO].
- [Rei09] M. Reineke, *Poisson automorphisms and quiver moduli*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2009), 653–667, arXiv:0804.3214 [math.RT].

非半単純モジュラーテンソル圏

芝浦工業大学 清水健一

はじめに. Turaev によって導入されたモジュラーテンソル圏 [Tur94, BK01] は, 2 次元の有理的共形場理論や 3 次元の位相的量子場の理論の研究から見いだされた代数的構造であり, ある種の有限性・非退化性を満たす半単純なリボン圏として定義される. モジュラーテンソル圏からは 3 次元の位相的量子場の理論を構成することができ, 特に閉 3 次元多様体の不変量や閉曲面の写像類群の射影表現が得られる. このような低次元トポロジーに動機がある研究以外にも, 1 の冪根における量子群の表現圏の ‘半単純化’ として得られる圏や, テンソル圏の研究において重要な Drinfeld center などがモジュラーテンソル圏の例となっており, このような純代数的な観点からの研究も盛んである. また, 近年では, トポロジカル相や, 量子計算の立場からも研究されているようである [RW18]. さて, それらに興味がある読者にとっては申し訳ないことであるが, 本稿は上述のような研究の解説を目的としない. 本稿が主題とするのは, Lyubashenko [Lyu95a, Lyu95b, Lyu95c] によって導入された非半単純なモジュラーテンソル圏である.

誤解のないように強調しておけば, 半単純なモジュラーテンソル圏の研究において解決すべき問題はまだまだたくさんある. それにも関わらず我々が非半単純な設定を考えるのは, 純粹に数学的に興味深いからという理由もあるが, 実際に表現論, 位相的量子場の理論, 共形場理論などに由来する様々な動機および例があるということも述べておきたい. Lyubashenko [Lyu95c] によって示されているように, 1 の冪根 q における小さな量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ の表現圏は, q の位数に関する適当な仮定の下で半単純ではないモジュラーテンソル圏になっている. このような例の何らかの重要な側面を, モジュラーテンソル圏の理論によって照らし出すことはできないだろうか. 低次元トポロジーにおいては, テンソル圏を用いて結び目や多様体の不変量を構成する理論があるが, これらの理論で実例として用いられる圏は半単純であることが多い. 半単純ではないモジュラーテンソル圏から, 新しい種類の不変量が得られないだろうか. 有理的とは限らない共形場理論から, 半単純ではないモジュラーテンソル圏が生じるのではないかという期待もある.

Lyubashenko [Lyu95a, Lyu95b, Lyu95c] は, 非半単純モジュラーテンソル圏を定式化し, そのような圏から閉 3 次元多様体の不変量や閉曲面の写像類群の射影表現が得られることを示している. 有限テンソル圏の一般論 [EO04, EGNO15] が整備されて後, 非半単純モジュラーテンソル圏の研究は大きく進展した. 本稿では, そのような研究に基づく Lyubashenko のモジュラー性の特徴づけ [Shi19] を紹介した後, ホップ代数的な手法を用いた非半単純モジュラーテンソル圏の構成法を与える [Shi19, LW22b]. 紙数の関係上, 簡単な解説のみに留めるが, 共形場理論と関連すると思われる新しい構成方法 [GLO18, Neg21, LW22a] や, Lyubashenko の不変量を修正して位相的量子場の理論に拡張するという結果 [DRGG⁺22, DRGG⁺23] も紹介する.

謝辞. 本稿は, 第 67 回代数学シンポジウムにおける筆者の講演に基づいたものです. 主催者の方々, 特に講演の機会を与えていただいた群論・表現論分野のプログラム責任者である東京女子大学の山内博さん, 名古屋大学の柳田伸太郎さんの両氏には, この場を借りて厚く御礼申し上げます.

記号. 本稿を通して, \mathbb{k} は代数閉体とし, 特に断りのない限り, ベクトル空間は \mathbb{k} 上のものを考える. 単に代数といえば, \mathbb{k} 上の単位的かつ結合的な多元環を意味する. 代数 A に対し, $A\text{-mod}$ で有限次元左 A -加群の圏を表す. 余代数とは, 余結合律および余単位律を満たす線形写像 $\Delta : C \rightarrow C \otimes_{\mathbb{k}} C$ (余積), $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{k}$ (余単位) が与えられているベクトル空間 C である. 余代数の余積を表示するために,

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}, \quad \Delta(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} = c_{(1)} \otimes \Delta(c_{(2)})$$

のような Sweedler 記法を用いる.

1 半単純モジュラーテンソル圏

1.1. テンソル圏. まずはじめに ‘テンソル圏’ という語について説明しておきたい. この語は, 現状, 文献によって様々な意味で使われているが, 我々は [EGNO15] の意味でこの語を用いる. その場合に最も基本となる例は, 群 G の有限次元表現の圏 $\mathcal{C} := \mathbb{k}G\text{-mod}$ であろう. この圏の対象 X と Y が与えられたとき, それらのテンソル積 $X \otimes_{\mathbb{k}} Y$ は $g \cdot (x \otimes y) = gx \otimes gy$ ($g \in G, x \in X, y \in Y$) で与えられる作用によって圏 \mathcal{C} の対象となる. また, X の双対空間 $X^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, \mathbb{k})$ は, $(g \cdot \xi)(x) = \xi(g^{-1}x)$ ($g \in G, \xi \in X^*, x \in X$) で与えられる作用によって圏 \mathcal{C} の対象となる. この ‘双対表現’ に付随して, 線形写像

$$\text{eval}_X : X^* \otimes_{\mathbb{k}} X \rightarrow \mathbb{k}, \quad \xi \otimes x \mapsto \xi(x), \quad \text{coev}_X : \mathbb{k} \rightarrow X \otimes_{\mathbb{k}} X^*, \quad c \mapsto c \sum_{i=1}^m x_i \otimes x^i \quad (1.1)$$

が定義される (ただし $\{x_i\}_{i=1}^m$ は X の基底, $\{x^i\}$ は $\{x_i\}$ の双対基底である). 線形写像 eval_X (evaluation) と coev_X (coevaluation) は \mathcal{C} の射となっていることに注意しよう. テンソル圏というのは, このような設定を代数的に抽象化したものである.

定義 1.1 ([EGNO15]). 局所有限アーベル圏 (locally finite abelian category) とは, 体 \mathbb{k} 上の線形アーベル圏であって, すべての対象の長さが有限であり, Hom 空間がすべて有限次元となっているようなものである. テンソル圏 (tensor category) とは, 双線形関手 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, 対象 $\mathbb{1} \in \mathcal{C}$ および自然同型

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z), \quad \ell_X : \mathbb{1} \otimes X \rightarrow X, \quad r_X : X \otimes \mathbb{1} \rightarrow X \quad (X, Y, Z \in \mathcal{C})$$

が与えられた局所有限アーベル圏 \mathcal{C} であって, 以下の条件を満足するものである.

- (1) 自然同型 a, ℓ および r は, 五角形公理および三角形公理を満たす.
- (2) 各対象 $X \in \mathcal{C}$ は左双対対象 X^* を持つ.
- (3) 対応 $X \mapsto X^*$ によって与えられる反変関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ は反圏同値である.
- (4) 単位対象 $\mathbb{1}$ は \mathcal{C} の単純対象である.

竹内 [Tak77] の結果により, 局所有限アーベル圏というのは, ある余代数の上の有限次元余加群の圏と同値なものとして特徴づけられる [EGNO15, Theorem 1.9.15]. 条件 (2) における X の左双対対象というのは, ある等式を満たす \mathcal{C} の射 $\text{eval}_X : X^* \otimes X \rightarrow \mathbb{1}$ と $\text{coev}_X : \mathbb{1} \rightarrow X \otimes X^*$ が存在するということを以って特徴づけられる \mathcal{C} の対象 X^* である. 条件 (3) は, 各対象 X が右双対 (つまり, X を左双対とするような対象) を持つことと同値である. 基礎体 \mathbb{k} は代数閉体と仮定しているため, 条件 (4) から $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{k}$ が従う. テンソル圏の定義について, より詳しくは [EGNO15, Definition 4.1.1] を参照いただきたい.

例 1.2 (ホップ代数). 体 \mathbb{k} 上の双代数 (bialgebra) とは, 余代数の構造を持った代数であり, 余積と余単位が代数射となっているようなもののことである. H を双代数とする. 左 H -加群 X と Y に対し, $X \otimes_{\mathbb{k}} Y$ は

$$h \cdot (x \otimes y) = h_{(1)}x \otimes h_{(2)}y \quad (h \in H, x \in X, y \in Y)$$

によって定義される作用によって左 H -加群となる. また, ベクトル空間 $\mathbb{1} := \mathbb{k}$ を余単位によって左 H -加群にすることができる. X, Y, Z を左 H -加群とするとき, ベクトル空間の自然な同型

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes_{\mathbb{k}} Y) \otimes_{\mathbb{k}} Z \rightarrow X \otimes_{\mathbb{k}} (Y \otimes_{\mathbb{k}} Z), \quad \ell_X : \mathbb{1} \otimes_{\mathbb{k}} X \rightarrow X, \quad r_X : X \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{1} \rightarrow X \quad (1.2)$$

は H -加群の射となっている. この構造により, 有限次元 H -加群の圏は, テンソル圏の公理から双対の存在に関する事柄を除いたものを満たす.

ベクトル空間 $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(H, H)$ は, 畳み込み積 $f * g := \nabla \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ ($f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(H)$) によって代数となる (ただし $\nabla : H \otimes_{\mathbb{k}} H \rightarrow H$ は H の積から誘導される線形写像である). 畳み込み積に関する id_H の逆元を対合射 (antipode) と呼び, 本稿では $S : H \rightarrow H$ で表す. 対合射を持つ双代数をホップ代数 (Hopf algebra) と呼ぶ. ホップ代数の簡単な例として群 G の群環 $\mathbb{k}G$ がある. これは, $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ ($g \in G$) によって与えられる構造射によってホップ代数となる. Lie 代数 \mathfrak{g} の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ や, アフィン代数群スキーム G の座標環 $\mathcal{O}(G)$ もホップ代数である. ある種の \mathfrak{g} や G に対しては, $U(\mathfrak{g})$ や $\mathcal{O}(G)$ にパラメータ q を入れて変形した量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ や量子座標環 $\mathcal{O}_q(G)$ と呼ばれるホップ代数も定義されており, 重要な研究対象である.

さて, H をホップ代数とし, X を有限次元左 H -加群とする. このとき X^* は $(h \cdot \xi)(x) = \xi(S(h)x)$ ($h \in H$, $\xi \in X^*$, $x \in X$) によって定義される作用と, 式 (1.1) によって定義される線形写像 eval_X と coev_X によって X の左双対対象となる. 一般には S は全単射とは限らないため [Tak71], 対応 $X \mapsto X^*$ が反圏同値であることは保証されない. しかし, S が全単射でないホップ代数は, むしろ構成するのが難しいくらいである. S の全単射性を仮定しておけば, 有限次元左 H -加群の圏はテンソル圏となる. H の有限次元性, 代数としての可換性, 余代数としての可換性のいずれかを仮定すれば, H の対合射は全単射となることを附記しておく.

例 1.3. G を群とする. G で次数付けられた有限次元ベクトル空間と, その間の G -次数付けを保つような線形写像からなる圏を Vec^G とする. この圏の対象 $X = \bigoplus_{g \in G} X_g$, $Y = \bigoplus_{g \in G} Y_g$ に対し, テンソル積 $X \otimes_{\mathbb{k}} Y$ を $(X \otimes_{\mathbb{k}} Y)_g = \bigoplus_{g=pq} X_p \otimes Y_q$ ($g \in G$) によって G -次数付きベクトル空間とする. このテンソル積とベクトル空間の自然な同型 (1.2) により, Vec^G はテンソル圏となる. なお, 左双対対象は, 双対ベクトル空間の上 $(X^*)_g = (X_{g^{-1}})^*$ ($g \in G$) によって次数付けを入れたものとなる.

実は, 圏 Vec^G をテンソル圏にする方法は他にもある. 関数 $\omega : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ を用意し, Vec^G の対象 X, Y, Z に対して線形写像 $a_{X,Y,Z}^\omega : (X \otimes_{\mathbb{k}} Y) \otimes_{\mathbb{k}} Z \rightarrow X \otimes_{\mathbb{k}} (Y \otimes_{\mathbb{k}} Z)$ を

$$a_{X,Y,Z}^\omega((x \otimes y) \otimes z) = \omega(p, q, r)x \otimes (y \otimes z) \quad (p, q, r \in G, x \in X_p, y \in Y_q, z \in Z_r)$$

で定義する. この自然同型 $a^\omega = \{a_{X,Y,Z}^\omega\}$ が五角形公理を満たすための必要十分条件は

$$\omega(p, q, r) \cdot \omega(pq, r, s)^{-1} \cdot \omega(p, qr, s) \cdot \omega(p, q, rs)^{-1} \cdot \omega(q, r, s) = 1 \quad (p, q, r, s \in G),$$

つまり ω が 3-cocycle 条件を満たすことである. これに加えて, ω は正規化条件 $\omega(g, 1, h) = 1$ ($g, h \in G$) も満たすとしておく. このとき圏 Vec^G は, 上で定義した自然同型 a^ω と, ベクトル空間の圏と同じ ℓ と r によってテンソル圏となる [EGNO15, Example 2.3.8].

群や Lie 代数の表現論では, $(X \otimes_{\mathbb{k}} Y) \otimes_{\mathbb{k}} Z$ と $X \otimes_{\mathbb{k}} (Y \otimes_{\mathbb{k}} Z)$ は区別されず, 単に $X \otimes_{\mathbb{k}} Y \otimes_{\mathbb{k}} Z$ などと書かれる. 上のような例を扱う場合は, このような略記の導入は危険である. それにも関わらず, テンソル圏の一般論を展開する際には, 自然同型 a, ℓ, r は恒等射であると仮定されることが多い. Mac Lane のコヒーレンス定理 [ML98] により, どんなテンソル圏も, a, ℓ, r が恒等射であるようなテンソル圏と (テンソル圏として) 同値になるからである. これを踏まえて, 以降では, a, ℓ, r は恒等射であると仮定する.

1.2. リボン・テンソル圏. 絡み目 (link) とは, 有限個の円周 S^1 を \mathbb{R}^3 へ埋め込んだもののことである. 連結成分がひとつであるような絡み目を結び目 (knot) という. 量子群の表現からジョーンズ多項式をはじめとする結び目や絡み目の不変量を構成することができるが, リボン・テンソル圏とは, このような理論の背景にある圏論的な構造を抽出したものである. はじめから結び目などを考えるのは大変だから, まずは組みひも的な構造を持ったテンソル圏について述べる.

定義 1.4. \mathcal{C} をテンソル圏とする. 自然同型 $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ ($X, Y \in \mathcal{C}$) で,

$$\sigma_{X \otimes Y, Z} = (\sigma_{X,Z} \otimes \text{id}_Y)(\text{id}_X \otimes \sigma_{Y,Z}), \quad \sigma_{X, Y \otimes Z} = (\text{id}_Y \otimes \sigma_{X,Z})(\sigma_{X,Y} \otimes \text{id}_Z) \quad (X, Y, Z \in \mathcal{C})$$

を満たすものを \mathcal{C} の組みひも構造 (braiding) と呼ぶ. 組みひも構造が与えられたテンソル圏を組みひもテンソル圏 (braided tensor category) と呼ぶ^{*1}.

B_n を n 本のひもからなる組みひもの群とし, $\sigma_i \in B_n$ ($i = 1, \dots, n-1$) を, i 番目のひもと $(i+1)$ 番目のひもが, $(i+1)$ 番目のひもを上にして交差しているような組みひもとする. 絵で描くと,

$$\sigma_i = \begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & & i & i+1 & & n \\ & | & | & \dots & | & \text{X} & | & \dots & | & | \\ \sigma_i & = & & & & & & & & \in B_n. \end{array}$$

\mathcal{C} を組みひもテンソル圏とし, σ をその組みひも構造とする. \mathcal{C} の対象 V から, 組みひも群の表現

$$B_n \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_n), \quad \sigma_i \mapsto \underbrace{\text{id}_V \otimes \dots \otimes \text{id}_V}_{i-1} \otimes \sigma_{V,V} \otimes \underbrace{\text{id}_V \otimes \dots \otimes \text{id}_V}_{n-i-1} \quad (1.3)$$

が得られる. もう少し一般的に, 各成分が \mathcal{C} の対象でラベル付けられているような組みひもは, \mathcal{C} の射として解釈することができる. (1.3) は, すべての成分が V でラベル付けられている場合である.

円周の代わりに, 有限個のアニュラス $S^1 \times [0, 1]$ を \mathbb{R}^3 へ埋め込んだものを枠付き絡み目 (framed link) あるいはリボン (ribbon) と呼ぶ. 組みひもテンソル圏に構造を追加し, 組みひもだけではなく, リボンも射として解釈できるようにしたものがリボン・テンソル圏である.

定義 1.5. リボン・テンソル圏 (ribbon tensor category) とは,

$$\theta_{X \otimes Y} = \sigma_{Y,X} \sigma_{X,Y} (\theta_X \otimes \theta_Y), \quad (\theta_X)^* = \theta_{X^*} \quad (X, Y \in \mathcal{C})$$

を満たす自然同型 $\theta_X : X \rightarrow X$ ($X \in \mathcal{C}$) が与えられた組みひもテンソル圏 \mathcal{C} である. 自然同型 θ は \mathcal{C} の捻り同型 (twist) などと呼ばれる.

^{*1} 組みひも圏と呼んでもよいと思うが, 本稿では [EGNO15] の意味でのテンソル圏になっていることを常に仮定してしまっているので, わざわざ組みひもテンソル圏と書くことにした. すぐ後に出てくるリボン・テンソル圏についても, 事情は同じである.

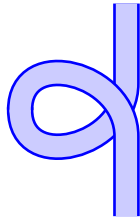


図1 リボンの捻り

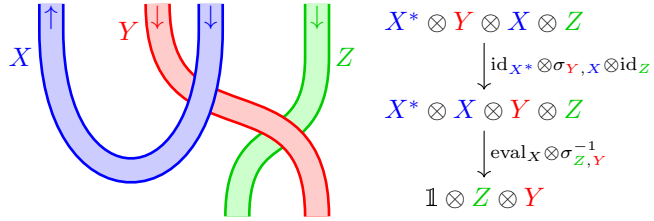


図2 リボン (の一部) をリボン圏における射として解釈する

捻り同型は、図1のような、リボンの‘捻り’と理解される。図2のようにして、各成分がリボン・テンソル圏 \mathcal{C} の対象でラベル付けられた向きの付いたリボンを、 \mathcal{C} の射として解釈することができる。この方法により、対象 $V \in \mathcal{C}$ をとるごとに、向きの付いたリボン L の不変量 $I_V(L) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{k}$ が得られる。例えば V が単純対象である場合など、 θ_V が id_V の定数倍になっているときは、不変量 $I_V(L)$ の構成方法を捻り数を用いて少し修正することで向きのついた絡み目の不変量を構成できる。

群 G に対する $\mathbb{k}G\text{-mod}$ は、 $\sigma_{X,Y}(x \otimes y) = y \otimes x$ によって定義される写像を組みひも構造とする組みひも圏である。この組みひも圏においては $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$ が成り立つことに注意せよ。このような組みひも圏は対称テンソル圏 (symmetric tensor category) と呼ばれており、とても重要なクラスなのであるが、こと結び目不変量の構成などを目的とする場合には興味深いものとは言えない。対称テンソル圏というのは、ひもの交差の上下を区別しない設定であり、その状況においては、すべての結び目はほどけてしまう。

例 1.6. 半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現の圏は、対称テンソル圏 $U(\mathfrak{g})\text{-mod}$ の変形とみなせるような、リボン・テンソル圏の構造を持つ。圏 $U_q(\mathfrak{g})\text{-mod}$ の単純対象 (つまり $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現) から、上で説明した方法によって絡み目不変量が構成される。例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ とし、 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の自然表現をとれば、Jones 多項式が得られる。解説としては、[Tur94, Kas95]などを参照されたい。

後で紹介する構成の材料として、リボン・テンソル圏の簡単な例を与えておこう。

例 1.7. G を群とし、例 1.3 のテンソル圏 Vec^G を考える (簡単のため、3-cocycle $\omega : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ は自明なものとする)。もし G が非可換なら、 Vec^G は組みひもテンソル圏になり得ない。そこで、 G は可換であるとする。関数 $\beta : G \times G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ を用意し、自然同型 $\sigma_{X,Y}^\beta : X \otimes_{\mathbb{k}} Y \rightarrow Y \otimes_{\mathbb{k}} X$ ($X, Y \in \text{Vec}^G$) を

$$\sigma_{X,Y}^\beta(x \otimes y) = \beta(g, h)y \otimes x, \quad (g, h \in G, x \in X_g, y \in Y_h)$$

で定義する。この σ^β が Vec^G の組みひも構造を与えるための必要十分条件は、

$$\beta(pq, r) = \beta(p, r)\beta(q, r), \quad \beta(p, qr) = \beta(p, q)\beta(p, r) \quad (p, q, r \in G) \quad (1.4)$$

である。条件 (1.4) を満たす β をひとつ選び、 Vec^G を β から誘導される組みひも構造によって組みひもテンソル圏とみる。対象 $X \in \text{Vec}_G$ に対して $\theta_X : X \rightarrow X$ を $\theta_X(x) = \beta(g, g)x$ ($g \in G, x \in X_g$) で定義すれば、 θ は Vec^G の捻り同型となる。

1.3. モジュラーテンソル圏。単純対象の同型類の個数が高々有限であるような半単純テンソル圏をフュージョン圏 (fusion category) と呼ぶ。 \mathcal{C} をリボン・フュージョン圏とし、その単純対象の完全代表系を $\{V_i\}_{i \in I}$ とする。図3のような、対象 V_i と V_j でラベル付けされたホップ絡み目 (正確には、それを捻りのない、向きの

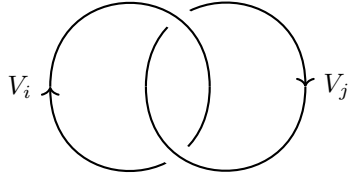


図3 ホップ絡み目

ついたりボンとしてみたもの) の不変量を $S_{ij} \in \mathbb{k}$ とする. 行列 $S = (S_{ij})$ を \mathcal{C} の S-行列と呼ぶ. \mathcal{C} が対称テンソル圏であるときは, S_{ij} の計算の際にホップ絡み目は ‘ほどけて’ しまい, S の階数は 1 となる. このような状況の対極にあるのがモジュラーテンソル圏である.

定義 1.8. 可逆な S-行列を持つリボン・フュージョン圏をモジュラーテンソル圏 (modular tensor category [Tur94, BK01]) と呼ぶ.

モジュラーテンソル圏からは, モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ の射影表現が構成される. このことは, モジュラーテンソル圏が ‘モジュラー’ と呼ばれることの所以とされる [BK01, Remark 3.1.3]. 具体的には, \mathcal{C} をモジュラーテンソル圏とし, その単純対象の完全代表系を $\{V_i\}_{i=1}^n$ とする. S を \mathcal{C} の S-行列とする. 行列 T を, その (i, i) 成分 θ_i が $\theta_{V_i} = \theta_i \cdot \text{id}_{V_i}$ によって与えられるような n 次の対角行列とする. このとき,

$$SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PGL_n(\mathbb{k}), \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto S, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto T \quad (1.5)$$

によって $SL_2(\mathbb{Z})$ の射影表現が定義される [BK01, Chapter 3]. さらに, S と T を適当に正規化すれば, 射影でない通常の表現にすることもできる.

モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ はトーラス $S^1 \times S^1$ の写像類群である. 射影表現 (1.5) は, 実は, より大きなトポロジ的構造の一角である. これを説明するために, コボルディズムの圏 Cob_d ($d = 1, 2, 3, \dots$) を導入しよう. この圏の対象は向き付けられた閉 $(d-1)$ 次元多様体である. Σ と Σ' をこの圏の対象とする. 向き付けられた d 次元多様体 M と向きを保つ微分同相写像 $\phi: \partial M \rightarrow \bar{\Sigma} \sqcup \Sigma'$ の組 (M, ϕ) を Σ から Σ' へのコボルディズム (cobordism) という (ここで $\bar{\Sigma}$ は Σ の向きを逆にしたものを意味する). Σ から Σ' への射は, コボルディズムの適当な同値関係に関する同値類である. コボルディズム $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ と $\Sigma' \rightarrow \Sigma''$ を間の Σ' において張り合わせることでコボルディズム $\Sigma \rightarrow \Sigma''$ が得られるが, これが圏 Cob_d における射の合成を定義する. この圏の恒等射は $\Sigma \times [0, 1]$ の類である.

d -次元の位相的量子場の理論 (topological quantum field theory, TQFT) とは, 圏 Cob_d からベクトル空間の圏への関手であって, 多様体の非交和をベクトル空間のテンソル積に写すなどの代数的な性質を満足するものである. d 次元の TQFT $\tau: \text{Cob}_d \rightarrow \text{Vec}$ が与えられたとすると,

- (1) 向き付けられた閉 d 次元多様体の不変量が得られる. 実際, そのような多様体 M は Cob_d における射 $M: \emptyset \rightarrow \emptyset$ とみなせる. TQFT の公理によって $\tau(\emptyset) = \mathbb{k}$ であるため, $\tau(M): \tau(\emptyset) \rightarrow \tau(\emptyset)$ は \mathbb{k} の要素とみなせる. これが M の不変量となる.
- (2) 向き付けられた閉 $(d-1)$ 次元多様体 Σ の写像類群 $\text{MCG}(\Sigma)$ の表現が得られる. 実際, 微分同相 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ に対し, 多様体 $M_f = \Sigma \times [0, 1]$ を考え, これを $\phi(x, 0) = x \in \bar{\Sigma}$, $\phi(x, 1) = f(x) \in \Sigma$ によってコボルディズム $M_f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ にする. f の同値類に対して $\tau(M_f): \tau(\Sigma) \rightarrow \tau(\Sigma)$ を対応させる

ことで, $\text{MCG}(\Sigma)$ の表現が得られる.

モジュラーテンソル圏に対して中心電荷 (central charge [BK01, Remark 3.1.20]) と呼ばれる有理数が定義される. 中心電荷がゼロであるモジュラーテンソル圏からは, 3次元 TQFT が構成される. 中心電荷がゼロでないときに同様の構成をすると, 射の合成が上手く保たれず, 厳密には上で定義した意味での TQFT ではないものになってしまう (TQFT with anomaly). それでも閉曲面の写像類群の射影表現が得られることは示される. この構成において, 特に閉曲面としてトーラスをとったものが (1.5) である. モジュラーテンソル圏を用いた TQFT の構成について, これ以上の詳しいことについては [Tur94] や [BK01] を参照されたい.

モジュラーテンソル圏の重要な例として, 有理的な頂点作用素代数の表現圏がある (Huang-Lepowsky による解説 [HL13]). また, 1 の冪根における量子群の表現圏を ‘半単純化’ して得られる圏も重要な例である [BK01]. これらについて解説することは筆者の力量を超えるため, ここでは割愛し, 以下では比較的簡単な例を紹介するに留める. 以下の例は, 後で紹介する構成の材料であったり, 雛形であったりする.

例 1.9. 基礎体 \mathbb{k} は標数 0 の代数閉体であるとする. G を有限アーベル群とし, 条件 (1.4) を満たす関数 $\beta : G \times G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ を選ぶ. Vec^G は β から誘導される組みひも構造によってリボン・テンソル圏となるのであった (例 1.7). G の要素 g によって次数付けられた 1 次元ベクトル空間を \mathbb{k}_g で表すとき, $\{\mathbb{k}_g\}_{g \in G}$ は Vec^G の単純対象の同型類の完全代表系である. S-行列の (g, h) 成分は $S_{g,h} = \beta(g, h)\beta(h, g)$ と計算される. G^\vee で G の指標群を表す. 指標の直交関係より, Vec^G がモジュラーテンソル圏となることと,

$$\phi(g)(x) = \beta(g, x)\beta(x, g) \quad (g, x \in G) \text{ で定義される写像 } \phi : G \rightarrow G^\vee \text{ は全単射である} \quad (1.6)$$

ということが同値であることが分かる.

例 1.10 (Drinfeld center). テンソル圏 \mathcal{C} に対し, \mathcal{C} の Drinfeld center と呼ばれる圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ が以下のようにして定義される. この圏の対象は, \mathcal{C} の対象 V と, 組みひも構造の定義と類似の等式を満たす自然同型 $c_X : V \otimes X \rightarrow X \otimes V$ ($X \in \mathcal{C}$) からなる組 (V, c) である. この圏の射 $f : (V, c) \rightarrow (W, d)$ は, 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して $(f \otimes \text{id}_X)c_X = d_X(\text{id}_X \otimes f)$ を満たすような \mathcal{C} の射 $f : V \rightarrow W$ である. 圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は,

$$(V, c) \otimes (W, d) = (V \otimes W, (c_{(-)} \otimes \text{id}_W)(\text{id}_V \otimes d_{(-)})) \quad ((V, c), (W, d) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C}))$$

によって定義されるテンソル積と $\sigma_{(V,c),(W,d)} = c_W$ によって定義される組みひも構造によって組みひもテンソル圏となる.

テンソル圏 \mathcal{C} において, 二重同型をとることによって定義される関手 $(-)^{**}$ はテンソル関手となる. 恒等関手から $(-)^{**}$ へのテンソル関手としての同型 $j_X : X \rightarrow X^{**}$ ($X \in \mathcal{C}$) で, 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して

$$\text{eval}_{X^*}(j_X \otimes \text{id}_{X^*})\text{coev}_X = \text{eval}_{X^{**}}(j_{X^*} \otimes \text{id}_{X^{**}})\text{coev}_{X^*}$$

を満たすものが与えられているとき, \mathcal{C} は trace-spherical [BW99, DSPS20] であるという*2. 基礎体 \mathbb{k} が標数 0 の代数閉体であり, \mathcal{C} が trace-spherical なフュージョン圏であるとき, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ はモジュラーテンソル圏となる [Müg03a, EGNO15].

*2 非半単純な設定での TQFT に関する研究に基づき, [DSPS20] では, [BW99] で導入された spherical という性質の定義を修正することが提案された. [DSPS20] では, 修正前の [BW99] の定義を trace-spherical, 修正後の定義を spherical と呼んでおり, 我々はこの用語法に従っている. 半単純性な設定では, これらの条件は同値なので, 気にしなくてもよい.

例 1.11. H を有限次元ホップ代数とする. H 上の (left-left^{*3}) Yetter-Drinfeld (YD) 加群とは, 左 H -加群であると同時に左 H -余加群でもあるようなベクトル空間 M であって, Yetter-Drinfeld 条件

$$h_{(1)}m_{(-1)} \otimes h_{(2)}m_{(0)} = (h_{(1)}m)_{(-1)}h_{(2)} \otimes (h_{(1)}m)_{(0)} \quad (h \in H, m \in M) \quad (1.7)$$

を満たすものことである (ただし, 左 H -余作用を, Sweedler 記法のように $m \mapsto m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$ と表している). H 上の有限次元 YD 加群の圏を ${}^H_H\mathcal{YD}$ で表すことにする. これは, 左 H -加群としてのテンソル積と左 H -余加群としてのテンソル積によってテンソル圏となる. さらに,

$$\sigma_{M,N} : M \otimes_{\mathbb{k}} N \rightarrow N \otimes_{\mathbb{k}} M, \quad \sigma_{M,N}(m \otimes n) = m_{(-1)}n \otimes m_{(0)} \quad (M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}, m \in M, n \in N)$$

によって定義される組みひも構造を持つ. なお, 条件 (1.7) は意味が理解しにくいかもしれないが, 実は $\sigma_{M,N}$ が H -加群の射であることを要求しているに過ぎない.

\mathcal{C} を有限次元左 H -加群の圏とする. 対象 $M \in {}^H_H\mathcal{YD}$ に対し, 自然同型 $c_X : M \otimes_{\mathbb{k}} X \rightarrow X \otimes_{\mathbb{k}} M$ ($X \in \mathcal{C}$) を $c_X(m \otimes x) = m_{(-1)}x \otimes m_{(0)}$ ($x \in X, m \in M$) で定義する. 実は, 対応 $M \mapsto (M, c)$ は組みひもテンソル圏の同型 ${}^H_H\mathcal{YD} \cong \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を与える. ここで基礎体 \mathbb{k} は標数 0 の代数閉体であり, H は半単純であると仮定しよう. このとき, Larson-Radford の定理 [LR88] により, \mathcal{C} は trace-spherical なフュージョン圏であるとわかる. したがって, 例 1.10 で紹介した結果より, ${}^H_H\mathcal{YD}$ はモジュラーテンソル圏となることがわかる.

2 非半単純モジュラーテンソル圏

2.1. 動機, あるいは期待. 本稿の冒頭で, ‘非半単純’ なモジュラーテンソル圏を研究する動機および理論の発展に期待されることを述べた. 筆者は主に有限次元ホップ代数と, 関連するテンソル圏の研究をしている. 本稿の主題とは直接的には関係しないのだが, せっかくなので, ホップ代数の研究の立場から非半単純モジュラーテンソル圏を研究する動機を述べておきたい.

Andruskiewitsch-Santos [AFS09] によれば, ホップ代数の概念は Lie 群のコホモロジー論と代数群の理論に出自を持つとされる. 初期のホップ代数の研究における手法や問題意識も, これらの理論に影響を受けているところが大きかったことであろう. 1980 年代半ばに量子群が発見されて以降は, 量子群の理論をハブ港として, 数多くの新手法がホップ代数の理論に輸入された. そのような流れの中, 半単純ホップ代数の研究において, モジュラーテンソル圏に関する結果ないし考え方をういていくつかの問題が解かれた. しばらくの間, 基礎体 \mathbb{k} は標数 0 の代数閉体であるとし, H は \mathbb{k} 上の有限次元半単純ホップ代数とする.

1. H の既約表現の次元は, H の次元を割り切るであろう (Kaplansky’s 6th conjecture). この予想は一般には未解決であるが, いくつかの部分的解答が与えられている [EG98, CM16]. Etingof-Gelaki [EG98] は, モジュラーテンソル圏の理論 (特に, テンソル積の分解則を S-行列を用いて記述する Verlinde 公式 [BK01]) を用いて, ${}^H_H\mathcal{YD}$ の既約な対象の次元が H の次元を割り切るということが示した. もし $H\text{-mod}$ が組みひも構造を持つなら, $H\text{-mod}$ は ${}^H_H\mathcal{YD}$ の部分圏とみなすことができ, 予想が従う.
2. 線形写像 $P_n : H \rightarrow H$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を $P_0(h) = \varepsilon(h)1_H$ ($h \in H$), $P_{n+1} = \text{id}_H * P_n$ で定義する (ここで $*$ は例 1.2 の中で用いた畳み込み積である). H が有限群 G の群環であるとき, $P_n(g) = g^n$ ($g \in G$) となる. そこで, 有限群の exponent の定義を真似て, $\exp(H)$ を線形写像の列 $\{P_n\}$ の周期と

*3 H -作用の左右, H -余作用の左右で計 4 つのバージョン ${}^H_H\mathcal{YD}$, ${}_H\mathcal{YD}^H$, ${}^H\mathcal{YD}_H$, \mathcal{YD}_H^H がある. どれも圏として同型なので, どれを選んで一般論を展開する上では問題ない.

して定義しよう. Etingof-Gelaki [EG99] は, 列 $\{P_n\}$ は周期的であり, その周期 $\exp(H)$ が $\dim(H)^3$ を割り切ることを示した. 周期性の部分は, 実はモジュラーテンソル圏の T-行列が有限位数であることを主張する Vafa の定理 [BK01] の帰結である.

現在の (半単純とは限らない) ホップ代数の研究において, Yetter-Drinfeld 加群および Drinfeld center は基本的かつ重要な道具となっている. 上述の Etingof-Gelaki による結果は, 標数 0 の代数閉体上の半単純ホップ代数 H に対する $\mathcal{Z}(H\text{-mod}) (\cong {}^H_H\mathcal{YD})$ がモジュラーテンソル圏であることが本質的に用いられている. このような経緯を踏まえると, 半単純とは限らない有限次元ホップ代数の研究においても, ‘非半単純’ なモジュラーテンソル圏の理論をよく理解することが重要なのではないかという予感が生じるのである.

2.2. Lyubashenko の定義. 本稿の冒頭および前節では, 我々が ‘非半単純’ モジュラーテンソル圏なるものを考えたい動機について述べた. 文献を紐解けば, そのようなものは既に Lyubashenko によって 1990 年代半ばに導入されている [Lyu95a, Lyu95b, Lyu95c]. 一連の論文の中で, Lyubashenko は ‘非半単純’ なモジュラーテンソル圏を定式化し, そのような圏から, 半単純の場合と同様に, 閉 3 次元多様体の不変量や閉曲面の写像類群の射影表現が得られることを示している. ひとまず Lyubashenko によるモジュラーテンソル圏の定義を紹介しよう. 大きな枠組みとしては, 以下に述べる意味での有限テンソル圏として定式化される.

定義 2.1 ([EGNO15]). 単純対象の同型類の個数が高々有限個であり, すべての対象が射影被覆を持つような局所有限アーベル圏を有限アーベル圏 (finite abelian category) と呼ぶ^{*4}. 有限アーベル圏であるようなテンソル圏を有限テンソル圏 (finite tensor category) と呼ぶ.

モジュラーテンソル圏を, 組みひも構造が何らかな意味で ‘非退化’ であるような, 半単純とは限らない有限リボン・テンソル圏として定義したい. S-行列は半単純性がなくても定義可能であるが, 非退化性の良い指標であるとは言い難い. 例えば標数 $p > 0$ で位数 p の巡回群 C_p の表現圏を考えると, 単純対象は自明表現のみであり, S-行列は 1×1 行列 (1) である. この行列は可逆であるが, $\mathbb{k}C_p\text{-mod}$ は対称テンソル圏であるから, 本来モジュラーなものと同様に位置するべきものはずである.

Lyubashenko の非退化性条件を説明するためには, 少々圏論的技巧を要する.

- (1) まずはじめに, テンソル圏において様々な代数的対象を定義できることに注意しておきたい. 例えば, テンソル圏 \mathcal{C} における代数とは, いくつかの等式を満たすような射 $m_A : A \otimes A \rightarrow A$ (‘積’) および $u_A : \mathbb{1} \rightarrow A$ (‘単位元’) が与えられた \mathcal{C} の対象 A である. A と B を \mathcal{C} における代数とする. もし \mathcal{C} が組みひも構造 σ を持つならば, $A \otimes B$ は積

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes \text{id}_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{m_A \otimes m_B} A \otimes B \quad (2.1)$$

と単位元 $u_A \otimes u_B : \mathbb{1} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \rightarrow A \otimes B$ によって \mathcal{C} の代数となる. このように代数のテンソル積が定義されることを使って, 組みひもテンソル圏における双代数およびホップ代数が定義される.

- (2) 次に, 淡中双対理論の基本的なアイデアと, その一般化について触れておく. H をホップ代数とし, \mathcal{C} を有限次元右 H -余加群の圏とする. \mathcal{C} からベクトル空間の圏への忘却関手を U とするとき, H は

$$H \cong \int^{X \in \mathcal{C}} U(X)^* \otimes_{\mathbb{k}} U(X)$$

^{*4} Lyubashenko の論文では, ‘bounded abelian category’ と呼ばれている. 有限アーベル圏は, ある有限次元代数上の有限次元加群の圏と同値であるような線形圏として特徴づけられる [EGNO15, §1.8].

として復元される (ここで、積分記号は、ある種の余極限として定義される余エンド [ML98] を意味する)。これが、いわゆる淡中再構成である。このプロセスにおいては、 \mathcal{C} がホップ代数の余表現の圏であることや、 U の値域がベクトル空間の圏であることはあまり本質的ではない。実際、テンソル圏 \mathcal{C} から組みひも構造を持つテンソル圏 \mathcal{V} へのテンソル積を保つような完全関手 $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}$ が与えられたとき、余エンド $H := \int^{X \in \mathcal{C}} U(X)^* \otimes U(X)$ は、 \mathcal{V} の ind-completion [KS06] におけるホップ代数となる (なお、 \mathcal{C} の有限性を仮定すれば、 $H \in \mathcal{V}$ となり、ind-completion は不要である)。このようにして関手 U からホップ代数 H を構成する手続きのことを、もはや何かを再構成しているわけではないということから、ここでは淡中構成と呼ぶことにしよう。

さて、 \mathcal{C} を組みひも有限テンソル圏 (つまり、組みひも構造が与えられた有限テンソル圏) とする。 \mathcal{C} 上の恒等関手に対して淡中構成を適用することで、 \mathcal{C} におけるホップ代数 $\mathbb{F} := \int^{X \in \mathcal{C}} X^* \otimes X$ を得る。さらに、 \mathbb{F} のホップ代数としての構造と整合的なペアリング $\omega : \mathbb{F} \otimes \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{1}$ が、射の族

$$X^* \otimes X \otimes Y^* \otimes Y \xrightarrow{\text{id}_{X^*} \otimes \sigma_{Y^*, X} \sigma_{X, Y^*} \otimes \text{id}_Y} X^* \otimes X \otimes Y^* \otimes Y \xrightarrow{\text{eval}_X \otimes \text{eval}_Y} \mathbb{1} \quad (X, Y \in \mathcal{C})$$

から誘導される。この射を絵で描くとホップ絡み目の上側を切り取ったようなものになっており、S-行列の残り香を感じられるかもしれない。

定義 2.2. \mathcal{C} , \mathbb{F} および ω を上の通りとする。射の合成

$$\mathbb{F} = \mathbb{F} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{F}} \otimes \text{coev}_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} \otimes \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}^* \xrightarrow{\omega \otimes \text{id}_{\mathbb{F}^*}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{F}^* = \mathbb{F}^*$$

が同型射であるとき、 \mathcal{C} の組みひも構造は非退化であるという。非退化な組みひも構造と捻り同型を持つ有限テンソル圏をモジュラーテンソル圏^{*5}と呼ぶ。

後で説明するように、 \mathcal{C} が半単純である場合は、定義 2.2 は S-行列を用いた定義 1.8 と同値である。以降、‘モジュラーテンソル圏’ という語は定義 2.2 の意味で用いることとし、定義 1.8 のものは ‘半単純モジュラーテンソル圏’ と呼んで区別することにしよう。なお、定義 2.2 では \mathbb{F} のホップ代数構造は使われていない。本稿では説明しないが、ホップ代数としての構造は、モジュラーテンソル圏から閉 3 次元多様体の不変量や閉曲面の写像類群の射影表現を構成する際に必要となる。

例 2.3 (ホップ代数の場合 [KL01, §7.4.6]). H を有限次元ホップ代数とし、有限テンソル圏 $\mathcal{C} = H\text{-mod}$ を考える。 \mathcal{C} の組みひも構造は、普遍 R-行列 (universal R-matrix) と呼ばれる $H \otimes_{\mathbb{k}} H$ の要素と 1 対 1 に対応している。そこで、以下では普遍 R-行列 $R = \sum_i a_i \otimes b_i \in H \otimes_{\mathbb{k}} H$ が与えられているとし、対応する \mathcal{C} の組みひも構造を σ とする。具体的には、

$$\sigma_{X, Y} : X \otimes_{\mathbb{k}} Y \rightarrow Y \otimes_{\mathbb{k}} X, \quad \sigma_{X, Y}(x \otimes y) = \sum_i b_i y \otimes a_i x \quad (X, Y \in \mathcal{C}, x \in X, y \in Y).$$

H の双対空間 H^* は自然なホップ代数構造を持ち、左 H -加群は右 H^* -余加群と同一視される。淡中双対の考え方をなぞると、余エンド $\mathbb{F} = \int^{X \in \mathcal{C}} X^* \otimes_{\mathbb{k}} X$ はベクトル空間として H^* と同一視でき、さらに H の \mathbb{F} への作用 \triangleright は $\langle h \triangleright f, h' \rangle = \langle f, S(h_{(1)})h'h_{(2)} \rangle$ ($f \in \mathbb{F}$, $h, h' \in H$) で与えられることが分かる。 \mathbb{F} のホップ代数としての構造は割愛する。ペアリング ω は普遍 R-行列を用いて

$$\omega : \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{k}, \quad \omega(f \otimes g) = \sum_{i, j} \langle f, a_i b_j \rangle \langle g, S(b_i a_j) \rangle \quad (f, g \in \mathbb{F}) \quad (2.2)$$

^{*5} = perfect modular category [Lyu95c, Definition 2.2.2] = modular category [KL01, Definition 5.2.7].

によって与えられる。つまり、 ω の非退化性は (H, R) の factorizability [RSTS88, Sch01] と同値である。

さて、ひとまず非退化性の判定条件を具体的に書き下すことはできたが、実際に非自明な例を与えるのは簡単ではない。Lyubashenko は、単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に付随する ‘小さな’ 量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ の表現圏が、1 の冪根 q の位数に関する適当な条件の下でモジュラーテンソル圏となることを示している [Lyu95c]。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に、 $u_q(\mathfrak{g})$ とその普遍 R-行列がどのようなものになるのか紹介しよう。基礎体 \mathbb{k} は標数 0 の代数閉体であるとする。 $N > 1$ を奇数とし、 $q \in \mathbb{k}$ を 1 の原始 N 乗根とする。 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ は、関係式

$$KE = q^2 EK, \quad KF = q^2 FK, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad E^N = F^N = 0, \quad K^N = 1$$

を満たす E, F, K によって生成される代数に対し、

$$\Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, \quad \Delta(K) = K \otimes K$$

によって一意的に定まるホップ代数構造を与えたものとして定義される。このホップ代数 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ は、

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i,j,k=0}^{N-1} \frac{(q - q^{-1})^k}{[k]_q!} q^{k(k-1)/2 + 2k(i-j) - 2ij} E^k K^i \otimes F^k K^j \in u_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes_{\mathbb{k}} u_q(\mathfrak{sl}_2)$$

(ただし $[0]_q! = 1$, $[k]_q! = [k]_q \cdot [k-1]_q!$ ($k = 1, 2, \dots$), $[k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$)

で与えられる普遍 R-行列を持つ [Kas95, IX.7]。この R に対してペアリング (2.2) は非退化となるのであるが、そもそも R が普遍 R-行列であるということからして明らかではない。本稿では、その計算を追ってみるようなことはしない。ここで R をきちんと書いてみたのは、むしろ問題の複雑さを実感していただくためである。

2.3. 非退化性の特徴づけ。 前節で紹介した Lyubashenko による非退化性の定義は、S-行列を用いた半単純モジュラーテンソル圏の定義と随分と乖離している。モジュラーテンソル圏の理論に踏み込む際にまず問題となるのが、この定義の難しさかもしれない。例 2.3 で紹介したように、ホップ代数の表現圏の場合には余エンドやペアリング ω を具体的に表示することはできる。しかし、これも例 2.3 で見たように、実際に ω の非退化性を確認することは簡単とは限らない。ホップ代数の表現圏とは限らない、一般的な設定の場合には、そもそも余エンドの具体的な表示が知られていないかもしれない。

このような問題意識を踏まえて、ここでは、Lyubashenko の非退化性条件と同値な条件を紹介したい。まずは、定義 2.2 と S-行列との関係性について説明しておこう。 \mathcal{C} を組みひも有限テンソル圏とし、 \mathbb{F} と ω をモジュラーテンソル圏の定義で用いたものとしよう。ペアリング ω により、線形写像

$$\Omega : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \mathbb{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{F}, \mathbb{1}), \quad a \mapsto \omega \circ (a \otimes \text{id}_{\mathbb{F}}) \quad (a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \mathbb{F}))$$

が誘導される。さて、 \mathcal{C} の単純対象の同型類の代表系を $\{V_i\}_{i \in I}$ としよう。 \mathcal{C} が半単純であるとき、余エンド \mathbb{F} は \mathcal{C} の対象として $\bigoplus_{i \in I} V_i^* \otimes V_i$ と同型となる（この表示は分かりやすく感じられるかもしれないが、余エンドとしての普遍性を使いたいときには難儀するため、一長一短がある）。線形写像 Ω の始域と終域は、この直和分解に関する良い基底を持っており、その基底に関する Ω の行列表示が S-行列となっているのである。 \mathcal{C} が半単純ではない場合は、 Ω の始域と終域の良い基底は知られておらず、 Ω の行列表示として標準的なものがあるというわけではない。しかし、それでも写像 Ω の可逆性を考えることはできるだろう。

Lyubashenko の非退化性の複雑な定義は、果たして‘良い’ものなのであろうか。例えば、S-行列の観点からは、むしろ上で導入した写像 Ω の可逆性こそを‘非退化性’と呼ぶべきかもしれない。本稿では詳しくは延べないが、Schneider [Sch01] の factorizable Hopf algebra に関する結果を受け、Etingof らは組みひも有限テンソル圏の factorizability という条件を導入した [ENO04]。これも組みひも構造の‘非退化性’を意識した条件のひとつである。もうひとつの‘非退化性’条件として、Müger center を用いたものを紹介する。

定義 2.4. \mathcal{C} を組みひもテンソル圏とし、その組みひも構造を σ とする。充満部分圏

$$\mathcal{C}' = \{T \in \mathcal{C} \mid \sigma_{X,T}\sigma_{T,X} = \text{id}_T \otimes \text{id}_X \text{ for all } X \in \mathcal{C}\}$$

を \mathcal{C} の Müger center と呼ぶ。

単位対象 1 の有限直和に同型な対象は、いつでも \mathcal{C}' に属する。 \mathcal{C}' の対象がそのようなもの以外にないとき、 \mathcal{C} の Müger center は自明であるということにする。 \mathcal{C} が対称テンソル圏であるということは、 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ であることと同値である。組みひも構造の非退化性は、要するに‘対称テンソル圏とは程遠い’と言いたいわけだから、Müger center が自明となる場合に相当するのではなからうか。Müger [Müg03b] は、半単純な設定では、その推察が実際に正しいということを示している。

Lyubashenko の非退化性条件は、そこから閉 3 次元多様体の不変量や閉曲面の写像類群の射影表現が得られると既にわかっているため、‘良い’ものであると考えたい。しかしながら、定義を満たしているかどうかの確認の難しさや、半単純の場合との比較から、他の非退化性条件に移りしてしまうかもしれない。さて、それでは、どの条件が‘正しい’のだろうか。結局どれでも良いというのが以下の定理の主張である。

定理 2.5 ([Shi19]). 組みひも有限テンソル圏 \mathcal{C} に対し、以下の条件は同値である。

1. \mathcal{C} は Lyubashenko の意味で非退化である。
2. \mathcal{C} は [ENO04] の意味で factorizable である。
3. \mathcal{C} の Müger center は自明である。
4. 上で導入した線形写像 $\Omega : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \mathbb{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{F}, \mathbb{1})$ は全単射である。

これらの条件の同値性は、半単純の場合には良く知られていたことである [EGNO15]。この定理を証明するためには、Lyubashenko がモジュラーテンソル圏の基礎理論を築いた時点ではまだ存在していなかった様々な手法が必要である。中核となるのは Etingof-Ostrik によって築かれた有限テンソル圏の基礎理論 [EO04, EGNO15] であるが、それに加えて、Hopf monad [BV07, BV12, BLV11] の理論や、テンソル圏における指標理論 [Shi17b] などが必要となる。

この定理により、組みひも有限テンソル圏の非退化性の確認が大幅に簡単になる場合がある。例えば、 \mathcal{C} を有限テンソル圏とする。上の定理と [ENO04] の結果を合わせると、Drinfeld center $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の組みひも構造は非退化であるとわかる。 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ がモジュラーであると言い切るに足りないのは、これが捻り同型を持たない（つまりリボンでない）ことがあるからである。 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の捻り同型は、Kauffman-Radford の Drinfeld double に関する結果 [KR93] を一般化する形で、[Shi16, Shi17a] において分類された。それらの結果をまとめると、

定理 2.6. \mathcal{C} が [DSPS20] の意味で spherical ならば、 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ はモジュラーテンソル圏である。

Müger は、例 1.10 で紹介した半単純モジュラーテンソル圏の Drinfeld center による構成方法を、半単純とは限らない場合に拡張することができるかと問うている [Müg10, Open Problem (7)]。上の定理は、この問題に対する肯定的な解答を与える。

3 小さな量子群のモジュラー性

3.1. 組みひも Yetter-Drinfeld 加群. 定理 2.6 は有限テンソル圏の Drinfeld center がモジュラーテンソル圏となるための十分条件を与える. この結果は自明なものではないのだが, 半単純モジュラーテンソル圏の研究においては, Drinfeld center は例として基本的なものであり, むしろ Drinfeld center として得られないようなものに興味があるという状況である. これを踏まえると, 定理 2.6 は, 非半単純なモジュラーテンソル圏の研究の出発地点に立ったに過ぎないという感じがある. ここでは, 非退化な組みひも有限テンソル圏の, Drinfeld center 以外の構成方法を与えよう.

我々の目標となるのは小さな量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ である. ここでは Sommerhäuser [Som96] や Majid [Maj99] の構成を, テンソル圏の理論の立場から見直したものを使う. まず, \mathcal{C} を組みひも有限テンソル圏とし, その組みひも構造を σ とする. 例 1.11 でホップ代数上の YD 加群を導入したが, Bespalov [Bes95] により, \mathcal{C} におけるホップ代数に対しても YD 加群が定義されている.

定義 3.1 (= a crossed module [Bes95, Definition 2.6]). B を \mathcal{C} におけるホップ代数とする. B 上の組みひも YD 加群とは, 左 B -加群の構造 $a_M : B \otimes M \rightarrow M$ および左 B -余加群の構造 $\delta_M : M \rightarrow B \otimes M$ が与えられた対象 $M \in \mathcal{C}$ であって, Yetter-Drinfeld 条件

$$\begin{aligned} (\nabla \otimes \text{id}_M)(\text{id}_H \otimes \sigma_{M,B})(\delta_M a_M \otimes \text{id}_B)(\text{id}_B \otimes \sigma_{B,M})(\Delta \otimes \text{id}_M) \\ = (\nabla \otimes a_M)(\text{id}_B \otimes \sigma_{B,B} \otimes \text{id}_M)(\Delta \otimes \delta_M) \end{aligned} \quad (3.1)$$

を満たすようなものである (ここで, $\nabla : B \otimes B \rightarrow B$ と $\Delta : B \rightarrow B \otimes B$ は, それぞれ, ホップ代数 B の積と余積である). ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ で B 上の YD 加群の圏を表す.

\mathcal{C} が有限次元ベクトル空間の圏のとき, 条件 (3.1) は (1.7) になり, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ は例 1.11 の意味での YD 加群の圏となる. 例 1.11 を一般化する形で, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ は組みひも有限テンソル圏であることが示される. そこで ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ の Müger center (定義 2.4) を計算すると,

定理 3.2 ([Shi19]). ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ の Müger center と, \mathcal{C} のそれは, 圏同値である.

定理 2.5 と 3.2 から, \mathcal{C} の組みひも構造が非退化であり, さらに ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ が捻り同型を持つならば, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ はモジュラーテンソル圏となるということがわかる. ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ の捻り同型が存在するための十分条件も知られている. \mathcal{C} における B -加群の圏を $B\text{-mod}_{\mathcal{C}}$ で表す. この圏は, B のホップ代数構造から誘導されるテンソル積によって有限テンソル圏となる. Laugwitz [Lau20] によれば, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ は $B\text{-mod}_{\mathcal{C}}$ の ‘relative Drinfeld center’ として表すことができる. 定義より, それは $\mathcal{Z}(B\text{-mod}_{\mathcal{C}})$ の充満部分圏である. したがって,

補題 3.3. もし $\mathcal{Z}(B\text{-mod}_{\mathcal{C}})$ が捻り同型を持てば, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ も捻り同型を持つ.

ここまでの話をまとめると, 以下のような構成が得られる. \mathcal{C} を非退化な組みひも構造を持つ有限テンソル圏とし, B を \mathcal{C} におけるホップ代数とする. このとき, 定理 3.2 より, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ は非退化な組みひも構造を持つ有限テンソル圏である. もし $\mathcal{Z}(B\text{-mod}_{\mathcal{C}})$ が捻り同型を持つならば, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ はモジュラーテンソル圏である. なお, 前章の終わりで言及したが, Drinfeld center の捻り同型は [Shi16, Shi17a] において分類されている.

この構成の具体例をひとつ見てみよう. 組みひも有限テンソル圏 \mathcal{C} が, 有限次元ホップ代数 H 上の左加群の圏として与えられていたとする. 定義より, 圏 ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ の対象は左 H -加群, 左 B -加群および左 B -余加群の構造を持っている. これらの構造をすべて忘れることにより, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ から Vec への忘却関手が得られる.

したがって、淡中双対により、 $U\text{-mod} \approx {}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ を満たすホップ代数 U が存在することがわかる。このホップ代数 U は Majid [Maj99] の二重ボゾン化 (double bosonization) という方法によって具体的に記述される。それによれば、 U はベクトル空間としては $U = B^* \otimes_{\mathbb{k}} H \otimes_{\mathbb{k}} B$ のような ‘三角分解’ を持つ (そもそも Sommerhäuser [Som96] や Majid [Maj99] の目的は、このような三角分解を持つ、量子群に似たホップ代数を系統的に構成することであった)。テンソル積の左の成分から順に、 ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ の対象の B -余作用、 H -作用、 B -作用を担当していると思うと分かりやすい。 U の積と余積は複雑であるが、 B -余作用、 H -作用、 B -作用が満たすべき整合性の条件から自然に導かれるものである。 ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ は組みひも構造を持つから、 U は普遍 R -行列を持つ。それも Majid [Maj99] の方法によって具体的に記述される。

例 3.4. 例 2.3 で紹介した $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ が、ここまでの話の中でどのように理解されるのかを説明したい。基礎体 \mathbb{k} は標数 0 の代数閉体であるとする。 $N > 1$ を奇数とし、 q を 1 の原始 N 乗根とする。 $G = \langle g \mid g^N = 1 \rangle$ とし、 $\beta : G \times G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ を $\beta(g^i, g^j) = q^{2ij}$ で定義する。この関数は条件 (1.4) および (1.6) を満たす。テンソル圏 Vec^G に β によって誘導される非退化な組みひも構造を入れたものを \mathcal{C} としよう。

少々唐突に思われるかもしれないが、代数 $B = \mathbb{k}[x]/(x^N)$ を考える。 G -次数付けを $\deg(x) = g$ で与えることにより、 B は \mathcal{C} における代数となる。代数射 $\Delta : B \rightarrow B \otimes_{\mathbb{k}} B$ を $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ で定義する (ただし $B \otimes_{\mathbb{k}} B$ は (2.1) によって与えられる積によって \mathcal{C} における代数とみなす)。代数 B は、この余積 Δ により、 \mathcal{C} におけるホップ代数になる。定理 3.2 より、 ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ の組みひも構造は非退化である。

G の指標群を Γ とすれば、 $\mathcal{C} = \mathbb{k}\Gamma\text{-mod}$ とみなせる。したがって、二重ボゾン化の手法により、テンソル圏として $U\text{-mod} \approx {}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ であり、ベクトル空間として $U = B^* \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}\Gamma \otimes_{\mathbb{k}} B$ となっているようなホップ代数 U が得られる。実はこの U が $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ である。テンソル積分解における B^* , $\mathbb{k}\Gamma$, B の部分が、それぞれ、 KF , K , E で生成される $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の部分代数に相当する。

3.2. Nichols 代数による一般化。この説では、前節の $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の構成を Nichols 代数の理論に基づいて一般化する。 V を有限次元ベクトル空間とし、Yang-Baxter 方程式

$$(c \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c)(c \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes c)(c \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c) \quad (\text{on } V \otimes_{\mathbb{k}} V \otimes_{\mathbb{k}} V)$$

を満たす $V \otimes_{\mathbb{k}} V$ 上の自己同型 c が与えられていると仮定する。このとき、(1.3) において $\sigma_{V,V}$ を c に置き換えた式により、組みひも群の表現の系列 $\rho_n : B_n \rightarrow GL(V^{\otimes n})$ ($n = 1, 2, \dots$) が得られる。Nichols 代数とは、この表現によるテンソル代数の ‘対称化’ である。とはいえ、対称群 S_n と違って B_n は無限群であるから、定義には少々工夫が必要となる。まず、 $\sigma \in S_n$ に対し、その最短表示に現れる基本互換 $(i, i+1)$ を $\sigma_i \in B_n$ に置き換えて得られる組みひも群の要素を $\hat{\sigma}$ と書くことにする (この対応 $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ は、Matsumoto section と呼ばれる、 B_n から S_n への well-defined な写像を定める)。そして、

定義 3.5. 次数付きベクトル空間 $\mathfrak{B}(V, c) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n(V, c)$ を、

$$\mathfrak{B}_n(V, c) = V^{\otimes n} / \text{Ker}(\mathfrak{S}_n^c), \quad \mathfrak{S}_n^c = \sum_{\sigma \in S_n} \rho_n(\hat{\sigma}) : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定義する。ベクトル空間 $\mathfrak{B}(V, c)$ は V 上のテンソル代数の商として次数付き代数となる。この次数付き代数を (V, c) に付随する Nichols 代数と呼ぶ。

基礎体の標数が 0 であるとき、 V 上の対称代数は、 c が $c(x \otimes y) = y \otimes x$ で与えられるときの $\mathfrak{B}(V, c)$ に相当する。この意味で、Nichols 代数は対称代数の一般化とみなせるが、一般には可換代数であるとは限らない

し、有限次元になったりすることもある。例えば、 $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ で c が $c(x \otimes y) = -y \otimes x$ で与えられるとき、 $\mathfrak{B}(V, c)$ は V 上の外積代数となる。これに似た例として、

例 3.6. $q \in \mathbb{k}^\times$ とする。 $V = \mathbb{k}x$ を不定元 x で張られる 1 次元ベクトル空間とし、 $c(x \otimes x) = qx \otimes x$ で与えられる線形写像 $c: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ を考えよう。このとき \mathfrak{S}_n^c を計算してみると、

$$\mathfrak{S}_n^c(\underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\ell(\sigma)} x \otimes \cdots \otimes x = \prod_{k=1}^n (1 + q + \cdots + q^{k-1}) \cdot x \otimes \cdots \otimes x$$

となる (ただし $\ell(\sigma)$ は σ の最短表示の長さである)。 q が 1 の冪根でないなら $\text{Ker}(\mathfrak{S}_n^c) = 0$ であり、したがって $\mathfrak{B}(V, c) = \mathbb{k}[x]$ (1 変数多項式環) である。 q の位数が $N > 1$ のときは、 $N \geq n$ に対して $\mathfrak{S}_n^c = 0$ となるため、 $\mathfrak{B}(V, c)$ は例 3.4 で用いた $B = \mathbb{k}[x]/(x^N)$ であることがわかる。

既約余加群がすべて 1 次元であるようなホップ代数は点状 (pointed) であるという。 Nichols 代数は様々な分野で現れるが、本稿の中で重要となるのが Andruskiewitsch-Schneider による有限次元点状ホップ代数の分類に関する研究 [AS10] である。 H を有限次元点状ホップ代数とする。このとき、 H の余根基 (余代数に対する Jacobson 根基のようなもの) から定まるフィルトレーションに関する次数付きベクトル空間 $\text{gr}(H)$ は、次数付きホップ代数となっている。 $\pi: \text{gr}(H) \rightarrow \text{gr}_0(H)$ を第 0 成分への射影とし、

$$B := \{b \in H \mid (\text{id}_H \otimes \pi)\Delta(b) = b \otimes 1\}, \quad G := \{g \in H \mid \Delta(g) = g \otimes g, \varepsilon(g) = 1\}$$

とおく。 G は有限群である。 Radford [Rad85] と Majid [Maj94, Maj97] の結果より、 B は ${}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}\mathcal{YD}$ におけるホップ代数の構造を持ち、 $\text{gr}(H)$ は B のボゾン化 (bosonization) と同型であることがわかる。 H は G の要素と ‘歪原始元’ と呼ばれる種類の元で生成されると予想されており、実際にそうなっている場合は、 B は適当な (V, c) の Nichols 代数となる。現在の有限次元点状ホップ代数の分類プログラムの指導原理は、端的に言えば以上の議論の逆である。すなわち、まず $(V, \sigma_{V,V})$ に付随する Nichols 代数が有限次元となるような対象 $V \in {}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}\mathcal{YD}$ を分類する (ここで σ は ${}_{\mathbb{k}G}^{\mathbb{k}G}\mathcal{YD}$ の組みひも構造である)。そして、それぞれの V に対し、 $\mathfrak{B}(V, \sigma_{V,V})$ をボゾン化したものの変形をすべて決定するのである。

有限次元 Nichols 代数の研究は、このような背景の下で盛んに行われ、結果として、我々は膨大な数の有限次元 Nichols 代数を得ている。これを踏まえて、モジュラーテンソル圏の構成方法を以下に与えよう。

- (1) G を有限アーベル群とし、 $\mathcal{C} = \text{Vec}^G$ とする。
- (2) 条件 (1.4) および (1.6) を満たす $\beta: G \times G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ を用意し、 \mathcal{C} に非退化な組みひも構造を入れる。
- (3) 対象 $V \in \mathcal{C}$ で Nichols 代数 $B := \mathfrak{B}(V, \sigma_{V,V})$ が有限次元となるようなものをひとつとる。
- (4) B は $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ ($x \in V$) によって与えられる余積により、 \mathcal{C} におけるホップ代数となる。
- (5) 組みひも YD 圏 ${}_{B}^B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ は非退化な組みひも構造を持つ有限テンソル圏である。必要なら、二重ボゾン化の手法により、この圏を実現するホップ代数を構成できる。
- (6) もし $\mathcal{Z}(B\text{-mod}_{\mathcal{C}})$ が捻り同型を持つならば、 ${}_{B}^B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ はモジュラーテンソル圏である。

このレシピにおける設定の下では、 $\mathfrak{B}(V, \sigma_{V,V})$ は ‘対角型’ と呼ばれる種類の Nichols 代数となる。標数 0 の代数閉体上の有限次元の対角型 Nichols 代数は、Heckenberger によって完全に分類された [Hec09]。詳細な解説と関係する膨大なデータが Andruskiewitsch-Angiono [AA17] によって与えられている。それによれば、有限次元の対角型 Nichols 代数には、単純 Lie 代数と関係する標準型、標数 0 の Lie superalgebra と関係するスーパー型、正標数における単純 Lie (super)algebra と関係する (super)modular 型、そして、未だ何処の星から来たものなのか判明していない UFO 型と呼ばれる系列がある。

例 3.7 ([Shi19]; Laugwitz-Walton [LW22b]). 基礎体 \mathbb{k} は標数 0 の代数閉体であるとする. 例 3.4 を一般化する形で, 小さな量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ を構成する方法を紹介する. $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ を有限型カルタン行列とし, d_i ($i = 1, \dots, m$) を $d_i \in \{1, 2, 3\}$, $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, m$) を満たすものとする. $N > 1$ を奇数とし, $\det(DA)$ と N は互いに素であると仮定する. 以上のデータを元に, まず有限アーベル群 G を

$$G = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^N = 1, g_i g_j = g_j g_i \ (i, j = 1, \dots, m) \rangle$$

で定義する. q を 1 の原始 N 乗根とし, 条件 (1.4) を満たす関数 $\beta : G \times G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\beta(g_i, g_j) = q^{d_i a_{ij}}$ で定義する. N に関する条件は, β によって与えられる $C := \text{Vec}^G$ の組みひも構造が非退化条件 (1.6) を満たすように設定されている.

さて, V を x_1, \dots, x_m を基底とするベクトル空間とし, $\deg(x_i) = g_i$ ($i = 1, \dots, m$) によって G -次数付けを定める. このとき $B := \mathfrak{B}(V, \sigma_{V,V})$ はカルタン型 (標準型の一つ) の Nichols 代数であり, 有限次元であるわかる (本当のところは, 有限次元 Nichols 代数のリストを眺め, B が有限次元になるようにパラメータを選んでおいたのである). カルタン行列 A に対応する半単純 Lie 代数を \mathfrak{g} とする. テンソル圏 ${}^B_B \mathcal{YD}(C)$ からベクトル空間の圏への忘却関手に対して淡中構成を適用すれば, $u_q(\mathfrak{g})$ と同型なホップ代数が生じる.

この例について, 2 点の補足をしておく.

- (1) 本稿ではモジュラーテンソル圏の構成が目的であったため q が 1 の冪根である場合を考えた. 1 の冪根でない q に対する $U_q(\mathfrak{g})$ も, YD 圏を用いた類似の方法によって構成される. この構成の詳細およびテンソル圏の理論からの解釈については, Laugwitz [Lau20] を参照されたい.
- (2) 上の例では, 1 の冪根 q の位数は奇数であると仮定されている. Lenter-Ohrmann [LO17] は, $u_q(\mathfrak{g})$ とその一般化の表現圏の組みひも構造の非退化性を, q の位数が偶数の場合も含めて決定している.

例 3.8. 本章の最後に, Laugwitz-Walton [LW22b, Example 5.18] が, $A(1|1)$ 型ルート系に対応するスーパー型 Nichols 代数を用いて, 表現圏がモジュラーテンソル圏となるようなホップ代数を構成していることに触れておきたい. これは, 本章で紹介した構成方法を用いてはじめて発見されたものと思われる. このように, 対角型 Nichols 代数のリストには, まだまだ未知のモジュラーテンソル圏が埋まっているのではないかと思われる.

4 発展的な話題

最後に, モジュラーテンソル圏についての発展的な話題について紹介したい.

4.1. Log-modular quantum groups. G を有限群とし, $\mathcal{O}(G) = (\mathbb{k}G)^*$ とする. $\mathcal{O}(G)$ は $\mathbb{k}G\text{-mod}$ における代数の構造を持つ. ホップ加群の基本定理 [Mon93] によれば, $\mathbb{k}G\text{-mod}$ における $\mathcal{O}(G)$ 加群の圏は Vec と同値になる. さて, 有限テンソル圏 \mathcal{C} が $\mathcal{D} := \mathbb{k}G\text{-mod}$ を部分テンソル圏として含んでいるとする. このとき \mathcal{C} における $\mathcal{O}(G)$ -加群の圏 $\mathcal{O}(G)\text{-mod}_{\mathcal{C}}$ を考える. 関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{O}(G)\text{-mod}_{\mathcal{C}}$, $X \mapsto \mathcal{O}(G) \otimes X$ による \mathcal{D} の像は, 上述のホップ加群の基本定理より, Vec と同値になる. この意味で, $\mathcal{O}(G)\text{-mod}_{\mathcal{C}}$ というのは, \mathcal{C} の部分圏 \mathcal{D} を Vec に ‘潰した’ ようなものと思える. この構成は de-equivariantization [DGNO10] と呼ばれる (群作用による ‘不動点圏’ を与える equivariantization の逆になっているためである).

さて, \mathcal{C} をリボン・フュージョン圏とする. このとき \mathcal{C} の Müger center \mathcal{C}' は対称テンソル圏である. ここで, 都合よく, ある有限群 G が存在し, \mathcal{C}' が $\mathbb{k}G\text{-mod}$ とリボン・テンソル圏として同値であったとしよう. こ

のとき, $\mathcal{C}' \approx \mathbb{k}G\text{-mod}$ を de-equivariantization によって潰してしまうことにより, 新しい半単純モジュラーテンソル圏が生じる. この構成をモジュラー化 (modularization [Bru00]) と呼ぶ.

Gainutdinov-Lentner-Ohrmann [GLO18] および Negron [Neg21] は, モジュラー化のアイデアを用いて, 対数的共形場理論と関係すると予想されるモジュラーテンソル圏を構成している. これらは, 最早ホップ代数ではなく, 準ホップ代数 [BCPO19] の表現圏として実現されている. 目的とする準ホップ代数を構成するため, [GLO18] では, 例 1.3 で紹介した群と 3-cocycle から構成されるテンソル圏における Nichols 代数を用いている. このような, ホップ代数の表現圏や YD 圏以外のテンソル圏における Nichols 代数は, 純代数的な観点からも研究の必要があると思われる.

4.2. 局所加群による構成. 共形場理論と関係すると思われるモジュラーテンソル圏のもうひとつの構成方法として, Laugwitz-Walton [LW22a] による局所加群を用いた方法を紹介する. \mathcal{C} を組みひも構造 σ を持つモジュラーテンソル圏とし, A を \mathcal{C} における可換代数とする. A 上の局所加群 (= dyslectic module [Par95]) とは, $A\text{-mod}_{\mathcal{C}}$ の対象 M であって, 作用 $\rho_M : A \otimes M \rightarrow M$ が $\rho_M \circ \sigma_{M,A} = \rho_M \circ \sigma_{A,M}^{-1}$ を満たすものである. 局所 A -加群の圏を $A\text{-mod}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}$ で表すことにしよう. 正確な条件は長くなるので説明しないが, A が分離性などの条件を満たすとき, $A\text{-mod}_{\mathcal{C}}^{\text{loc}}$ はモジュラーテンソル圏となる [LW22a].

この構成は, Kirillov-Ostrik [KO02] による局所加群による半単純モジュラーテンソル圏の構成方法を非半単純な設定へと一般化するものである. 同論文でそのような構成方法が与えられた背景には, 頂点作用素代数の拡大の理論がある. 同論文によれば, ある種の頂点作用素代数 V の拡大は, V の表現圏における分離性などの条件を満たす可換代数と対応している (なお, 同論文の設定の元では, V の表現圏は半単純モジュラーテンソル圏となる). 局所加群の圏は, 拡大として得られる頂点作用素代数の表現圏として現れる. 同様のことが非半単純な設定でも成り立つかどうかは, 興味深い問題である.

4.3. 修正トレースと TQFT. Lyubashenko は, 半単純とは限らないモジュラーテンソル圏から, 閉 3 次元多様体の不変量や閉曲面の写像類群の射影表現を構成した [Lyu95a, Lyu95b, Lyu95c]. モジュラーテンソル圏が半単純である場合は, これらは 3 次元 TQFT (with anomaly) の一部となっている. 半単純ではない場合はどうかというと, 実は, Lyubashenko の 3 次元多様体の不変量を TQFT に拡張することは一般には不可能であることが知られている. ところが最近, Lyubashenko の不変量を適切に ‘renormalize’ することで, モジュラーテンソル圏 \mathcal{C} から 3 次元 TQFT が構成できることが示された [DRGG⁺22, DRGG⁺23]. ただし, 正確に言えば, この ‘TQFT’ の定義域は \mathcal{C} に関する admissible cobordism category [DRGG⁺23] と呼ばれるもので, 通常のコボルディズムの圏と比べて, 双対象が存在するとは限らないなどの違いがある. この結果と, 関連する研究についての解説として, [BDR21] も紹介しておきたい.

Lyubashenko の 3 次元多様体の不変量を ‘renormalize’ する際に用いられるのが, 修正トレース (modified trace) と呼ばれるものである. 一般に, \mathcal{C} をテンソル圏とし, テンソル関手の同型 $j_X : X \rightarrow X^{**}$ ($X \in \mathcal{C}$) が与えられていると仮定する. このとき右側部分トレースなる線形写像

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P \otimes X, Q \otimes X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q) \quad (P, Q, X \in \mathcal{C})$$

が j を用いて定義される. $\text{Proj}(\mathcal{C})$ で \mathcal{C} の射影的对象からなるクラスを表す. \mathcal{C} 上の右側修正トレースとは, 線形写像の族 $\{t_P : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P) \rightarrow \mathbb{k}\}_{P \in \text{Proj}(\mathcal{C})}$ であって, 通常のトレースのような巡回性を満たし, さらに右側部分トレースと整合的であるようなものである. 左側修正トレースや, 両側修正トレースについても同様にして定義される.

この修正トレースという概念は、半単純ではないテンソル圏を用いて意味のある結び目不変量を構成しようとする取り組みの中で導入された [BDR21, Section 2]. 有限テンソル圏の修正トレースは、中山関手と深い関係があることがわかっている [SS21, SW21]. 修正トレースの存在や一意性 (up to scalar) は重要な問題であるが, [SS21] では、有限テンソル圏が非自明な両側修正トレースを持つことと、それが [DSPS20] の意味で spherical であることが同値であることが示された。また, [SW21] では、‘trace field theory’ なる関手が修正トレースを用いて構成されており、様々な興味深い帰結が得られている。

4.4. おわりに。本稿では、非半単純モジュラーテンソル圏の構成方法を詳しく取り上げた。本稿の冒頭で述べた様々な研究領域からの非半単純モジュラーテンソル圏への期待は、まだ成就されたとは言い難い。それでも、最終章で述べたような部分的な結果が続々と出ており、今後の発展が見込まれる。

私自身は、ホップ代数の理論において知られていることをテンソル圏の枠組みで再解釈してみるということや常々行っているのだが、本稿で紹介した YD 圏や Nichols 代数を用いた非半単純モジュラーテンソル圏の構成は、そのような取り組みの成功例のひとつと言えるかもしれない。また、その逆の流れとして、テンソル圏の研究の中で新たに生まれた代数的手法にインスピレーションを授かることも少なくない。最後に紹介した修正トレースなどはその一例であり、ホップ代数の表現論の立場から調べなければならないことが多くあると考えている (それで少し調べてみたのが [SS21] である)。総括していえば、テンソル圏の理論の周辺には数多くの分野からの問題意識や手法が持ち込まれており、それらの相互作用が面白いということである。本稿が読者にそのことを伝えられていることを祈りつつ、ここで筆を置くことにしたい。

参考文献

- [AA17] N. Andruskiewitsch and I. Angiono. On finite dimensional Nichols algebras of diagonal type. *Bull. Math. Sci.*, 7(3):353–573, 2017.
- [AFS09] N. Andruskiewitsch and W. F. Santos. The beginnings of the theory of Hopf algebras. *Acta Appl. Math.*, 108(1):3–17, 2009.
- [AS10] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider. On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras. *Ann. of Math. (2)*, 171(1):375–417, 2010.
- [BCPO19] D. Bulacu, S. Caenepeel, F. Panaite and F. Oystaeyen. *Quasi-Hopf algebras. A categorical approach.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 171. Cambridge University Press, Cambridge, 2019.
- [BDR21] C. Blanchet and M. De Renzi. Modular categories and TQFTs beyond semisimplicity. In *Topology and geometry—a collection of essays dedicated to Vladimir G. Turaev*, volume 33 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 175–208. Eur. Math. Soc., Zürich, [2021] ©2021.
- [Bes95] Y. Bespalov. Crossed modules, quantum braided groups and ribbon structures. *Teoret. Mat. Fiz.* 103 (1995), no. 3, 368–387; reprinted in *Theoret. and Math. Phys.* 103 (1995), no. 3, 621–637
- [BK01] B. Bakalov and A. Kirillov, Jr. *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [BLV11] A. Bruguières, S. Lack, and A. Virelizier. Hopf monads on monoidal categories. *Adv. Math.*, 227(2):745–800, 2011.
- [Bru00] A. Bruguières. Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3. *Math. Ann.*, 316, 215–236, 2000.
- [BV07] A. Bruguières and A. Virelizier. Hopf monads. *Adv. Math.*, 215(2):679–733, 2007.
- [BV12] A. Bruguières and A. Virelizier. Quantum double of Hopf monads and categorical centers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(3):1225–1279, 2012.

- [BW99] J. W. Barrett and B. W. Westbury. Spherical categories. *Adv. Math.*, 143(2):357–375, 1999.
- [CM16] J. Cuadra and E. Meir. On the existence of orders in semisimple Hopf algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(4):2547–2562, 2016.
- [DGNO10] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. On braided fusion categories. I. *Selecta Math. (N.S.)*, 16(1):1–119, 2010.
- [DRGG⁺22] M. De Renzi, A. M. Gainutdinov, N. Geer, B. Patureau-Mirand, and I. Runkel. 3-Dimensional TQFTs from non-semisimple modular categories. *Selecta Math. (N.S.)*, 28(2):Paper No. 42, 60, 2022.
- [DRGG⁺23] M. De Renzi, A. M. Gainutdinov, N. Geer, B. Patureau-Mirand, and I. Runkel. Mapping class group representations from non-semisimple TQFTs. *Commun. Contemp. Math.*, 25(1):Paper No. 2150091, 52, 2023.
- [DSPS20] C. L. Douglas, C. Schommer-Pries, and N. Snyder. Dualizable tensor categories. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 268(1308):vii+88, 2020.
- [EG98] P. Etingof and S. Gelaki. Some properties of finite-dimensional semisimple Hopf algebras. *Math. Res. Lett.*, 5(1-2):191–197, 1998.
- [EG99] P. Etingof and S. Gelaki. On the exponent of finite-dimensional Hopf algebras. *Math. Res. Lett.*, 6(2):131–140, 1999.
- [EGNO15] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [ENO04] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik. An analogue of Radford’s S^4 formula for finite tensor categories. *Int. Math. Res. Not.*, (54):2915–2933, 2004.
- [EO04] P. Etingof and V. Ostrik. Finite tensor categories. *Mosc. Math. J.*, 4(3):627–654, 782–783, 2004.
- [GLO18] A. M. Gainutdinov, S. Lentner, and T. Ohrmann. Modularization of small quantum groups. *arXiv e-prints*, page arXiv:1809.02116.
- [Hec09] I. Heckenberger. Classification of arithmetic root systems. *Adv. Math.*, 220(1):59–124, 2009.
- [HL13] Y.-Z. Huang and J. Lepowsky. Tensor categories and the mathematics of rational and logarithmic conformal field theory. *J. Phys. A*, 46(49):494009, 21, 2013.
- [Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [KL01] T. Kerler and V. V. Lyubashenko. *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners*, volume 1765 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [KO02] A. Kirillov, Jr. and V. Ostrik. On a q -analogue of the McKay correspondence and the ADE classification of \mathfrak{sl}_2 conformal field theories. *Adv. Math.*, 171(2):183–227, 2002.
- [KR93] L. H. Kauffman and D. E. Radford. A necessary and sufficient condition for a finite-dimensional Drinfel’d double to be a ribbon Hopf algebra. *J. Algebra*, 159(1):98–114, 1993.
- [KS06] M. Kashiwara and P. Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Lau20] R. Laugwitz. The relative monoidal center and tensor products of monoidal categories. *Commun. Contemp. Math.*, 22(8):1950068, 53, 2020.
- [LO17] S. Lentner and T. Ohrmann. Factorizable R -matrices for small quantum groups. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 13:Paper No. 076, 25, 2017.
- [LR88] R. G. Larson and D. E. Radford. Finite-dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple. *J. Algebra*, 117(2):267–289, 1988.
- [LW22a] R. Laugwitz and C. Walton. Constructing non-semisimple modular categories with local modules. *arXiv e-prints*, page arXiv:2202.08644, February 2022.
- [LW22b] R. Laugwitz and C. Walton. Constructing non-semisimple modular categories with relative monoidal centers. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20):15826–15868, 2022.
- [Lyu95a] V. V. Lyubashenko. Modular transformations for tensor categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 98(3):279–

327, 1995.

- [Lyu95b] V. V. Lyubashenko. Modular properties of ribbon abelian categories. In *Proceedings of the 2nd Gauss Symposium. Conference A: Mathematics and Theoretical Physics (Munich, 1993)*, Sympos. Gaussiana, pages 529–579, Berlin, 1995. de Gruyter.
- [Lyu95c] V. V. Lyubashenko. Invariants of 3-manifolds and projective representations of mapping class groups via quantum groups at roots of unity. *Comm. Math. Phys.*, 172(3):467–516, 1995.
- [Maj94] S. Majid. Cross products by braided groups and bosonization. *J. Algebra*, 163(1):165–190, 1994.
- [Maj97] S. Majid. Some comments on bosonisation and biproducts. *Czechoslovak J. Phys.*, 47(2):151–171, 1997.
- [Maj99] S. Majid. Double-bosonization of braided groups and the construction of $U_q(\mathfrak{g})$. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 125(1):151–192, 1999.
- [ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [Mon93] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.
- [Müg03a] M. Müger. From subfactors to categories and topology. II. The quantum double of tensor categories and subfactors. *J. Pure Appl. Algebra*, 180(1-2):159–219, 2003.
- [Müg03b] M. Müger. On the structure of modular categories. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 87(2):291–308, 2003.
- [Müg10] M. Müger. Tensor categories: a selective guided tour. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 51(1):95–163, 2010.
- [Neg21] C. Negron. Log-modular quantum groups at even roots of unity and the quantum Frobenius I. *Comm. Math. Phys.*, 382(2):773–814, 2021.
- [Par95] B. Pareigis. On braiding and dyslexia. *J. Algebra*, 171(2):413–425, 1995.
- [Rad85] D. E. Radford. The structure of Hopf algebras with a projection. *J. Algebra*, 92(2):322–347, 1985.
- [RSTS88] N. Y. Reshetikhin and M. A. Semenov-Tian-Shansky. Quantum R -matrices and factorization problems. *J. Geom. Phys.*, 5(4):533–550 (1989), 1988.
- [RW18] E. C. Rowell and Z. Wang. Mathematics of topological quantum computing. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 55(2):183–238, 2018.
- [Sch01] H.-J. Schneider. Some properties of factorizable Hopf algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(7):1891–1898, 2001.
- [Shi16] K. Shimizu. Pivotal structures of the Drinfeld center of a finite tensor category. arXiv:1608.05905.
- [Shi17a] K. Shimizu. Ribbon structures of the Drinfeld center. arXiv:1707.09691.
- [Shi17b] K. Shimizu. The monoidal center and the character algebra. *J. Pure Appl. Algebra*, 221(9):2338–2371, 2017.
- [Shi19] K. Shimizu. Non-degeneracy conditions for braided finite tensor categories. *Adv. Math.*, 355:106778, 36, 2019.
- [Som96] Y. Sommerhäuser. Deformed enveloping algebras. *New York J. Math.*, 2:35–58, electronic, 1996.
- [SS21] T. Shibata and K. Shimizu. Modified traces and the Nakayama functor. *Algebr Represent Theor* (2021).
- [SW21] C. Schweigert and L. Woike. The trace field theory of a finite tensor category. arXiv:2103.15772.
- [Tak71] M. Takeuchi. Free Hopf algebras generated by coalgebras. *J. Math. Soc. Japan*, 23:561–582, 1971.
- [Tak77] M. Takeuchi. Morita theorems for categories of comodules. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 24(3):629–644, 1977.
- [Tur94] V. G. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

一般化量子アフィン Schur–Weyl 双対性と圏同値

直井克之

概要

Kang–柏原–Kim により導入された一般化量子アフィン Schur–Weyl 双対性関手は、**箭 Hecke 代数**の有限次元加群圏から量子アフィン代数の有限次元加群圏へのモノイダル関手である。本稿では、特別な場合にこの関手が、**箭 Hecke 代数**の有限次元加群圏全体と、量子アフィン代数のある加群圏 (Hernandez–Leclerc のコア部分圏) の間の圏同値を与える、という筆者の最近の結果と、その証明の概略を紹介する。

1 歴史的背景

1.1 量子アフィン代数と箭 Hecke 代数

量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ は、Lie 代数 \mathfrak{g} の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の q 変形として Drinfel'd [Dri87] と神保 [Jim85] により 80 年代に導入された代数であり、その有限次元加群から Yang–Baxter 方程式の解を体系的に構成することができる。その導入当初から、 \mathfrak{g} が有限次元単純 Lie 代数の場合だけでなく、 \mathfrak{g} がアフィン Lie 代数の場合 (大雑把に言えば、有限次元単純 Lie 代数 \mathfrak{g}_0 に対し $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t^\pm]$ と表せる場合) も、その量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ からパラメータ付きの方程式解が得られることから、活発に研究がなされていた。このアフィン Lie 代数 \mathfrak{g} に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ を**量子アフィン代数 (quantum affine algebra)** と呼ぶ。量子アフィン代数の有限次元加群は、Yang–Baxter 方程式以外にも様々な数学的対象 (結晶基底、箭多様体、団代数など) と興味深い関連を持つことが知られており、現在でも重要な研究対象である。

量子群の発見から 20 年以上を経てから、本稿のもう一方の主役である**箭 Hecke 代数 (quiver Hecke algebra)** が Khovanov–Lauda [KL09] と Rouquier [Rou08] により発見された^{*1}。箭 Hecke 代数は、Lie 代数 \mathfrak{g} に付随して定義される代数の族 $\{R(\beta)\}_{\beta \in Q_+}$ であり、ある種の量子群を圏化する。もう少し詳しく述べると、各 $R(\beta)$ たちは次数付き代数であり、有限次元次数付き加群圏たちの直和 $\bigoplus_{\beta \in Q_+} R(\beta)\text{-fgmod}$ はモノイダル圏の構造を持つ。このとき Grothendieck 群 $\bigoplus_{\beta \in Q_+} K(R(\beta)\text{-fgmod})$ は $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 代数とみなすことができ、これが量子展開環 $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_-)^{\vee *2}$ と $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 代数として同型となる、というのが「 $\{R(\beta)\}_{\beta \in Q_+}$ が量子群を圏化する」という主張の正確な意味である。さらに \mathfrak{g} が対称型^{*3}のとき、 $\bigoplus_{\beta} R(\beta)\text{-fgmod}$ の (自己双対) 単純加群のクラスと

^{*1} このため箭 Hecke 代数は Khovanov–Lauda–Rouquier 代数とも呼ばれる。

^{*2} $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_-)^{\vee}$ は $U_q(\mathfrak{g})$ のある $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 部分代数である。

^{*3} 対応する Cartan 行列が対称行列となるもの。

$U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_-)^{\vee}$ の上大域基底 (upper global basis) が³, この同型を通して対応することも知られている [VV11, Rou12].

アフィン Lie 代数に付随する箴 Hecke 代数は量子アフィン代数 (の部分代数) を圏化するもので, その意味では箴 Hecke 代数と量子アフィン代数が関係することは明らかである. しかしこれとは全く別に, 二つの代数の間には非常に興味深い関係があることが分かってきた. それが次節で述べる一般化量子アフィン Schur–Weyl 双対性である.

1.2 一般化量子アフィン Schur–Weyl 双対性

Schur–Weyl 双対性は, 対称群 \mathfrak{S}_d と一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ それぞれの有限次元加群圏の間に, 様々な良い性質を持つ関手を与える理論であり, 1900 年代初頭に Schur により創設された (その後自身の著書でこれを広めたのが Weyl である). これまでに, 様々な Schur–Weyl 双対性の一般化や variant が得られている. その一つが Chari–Pressley [CP96], Cherednik [Che87], Ginzburg–Varagnolo–Vasserot [GRV94] による量子アフィン Schur–Weyl 双対性 (quantum affine Schur–Weyl duality) である. これは A 型のアフィン Hecke 代数 (アフィン Weyl 群の群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d] \times \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ の q 変形) と A 型の量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ に対し, それぞれの有限次元加群圏の間の関手を与える理論である.

一方別の話として, A 型のアフィン Hecke 代数は, 特殊線形 Lie 代数の普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_n)$ およびその表現を圏化することが知られていた (Lascoux–Leclerc–Thibon–有木理論 [Ari96]). 上で述べた箴 Hecke 代数による量子群の圏化の理論は, この LLT–有木理論のある種の一般化であり, その意味では箴 Hecke 代数は A 型アフィン Hecke 代数の拡張とみなすこともできる.

すると A 型アフィン Hecke 代数の別の性質である量子アフィン Schur–Weyl 双対性についても, 箴 Hecke 代数に拡張できるのではないか, という期待が生まれる. この期待を実現したのが Kang–柏原–Kim [KKK18] による一般化量子アフィン Schur–Weyl 双対性 (**generalized quantum affine Schur–Weyl duality**) である. すなわち彼らは, 箴 Hecke 代数の有限次元加群圏から (A 型と限らない一般の) 量子アフィン代数の有限次元加群圏への関手を構成する, 体系的な手法を考案したのである. 本稿では, この手法により構成される関手の中でも, とりわけ良い性質を持つ Hernandez–Leclerc のコア部分圏への関手を扱う. これについて次節で説明しよう.

1.3 Hernandez–Leclerc のコア部分圏

少し話が前後するが, Hernandez と Leclerc は [HL15] の中で, ADE 型量子アフィン代数の有限次元加群圏 \mathcal{C} の Grothendieck 代数 $K(\mathcal{C})$ ⁴ について研究を行った⁵. その中で彼らは, コア部分圏 (**core subcategory**) と呼ばれるモノイダル部分圏 $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ を定義し, その Grothendieck 代数 $K(\mathcal{C}_0)$ が $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_-)^{\vee}$ の $q = 1$ での特殊化と同型となり, さらに単純加群のクラスが上大域基底の特

⁴ テンソル積により, Grothendieck 群 $K(\mathcal{C})$ は代数構造を持つ.

⁵ 正確には, 彼らは $K(\mathcal{C})$ を適切に q 変形して得られる代数 (量子 Grothendieck 環) について研究を行った.

特殊化と一致する, という事実を示した. 一方 1.1 節で述べた籠 Hecke 代数の圏化の理論を特殊化すると, $\bigoplus_{\beta \in Q_+} K(R(\beta)\text{-fmod}_0)^{*6}$ もやはり $U_{\mathbb{Z}(\mathfrak{n}_-)}^\vee|_{q=1}$ と同型であり, その単純加群は上大域基底の特殊化と一致することが分かる. すなわち量子アフィン代数と籠 Hecke 代数という二つの代数が, 全く同じ対象を圏化するのである.

Kang–柏原–Kim [KKK15] は, これが単なる Grothendieck 代数の一致にとどまらないことを示した. すなわち彼らは, 前節で述べた関手の構成法を用いて $\bigoplus_{\beta \in Q_+} R(\beta)\text{-fmod}_0$ から \mathcal{C}_0 へのモノイダル関手を構成し, さらにこれが単純対象の同型類の間の全単射を与えることを証明したのである. この後藤田 [Fuj22, Fuj20] により, 籠多様体の同変 K 群による量子アフィン代数の幾何的実現の理論を用いた更なる考察がなされ, この関手が圏同値を与えることも示されている.

コア部分圏 \mathcal{C}_0 の定義は ADE 型限定のものであったが, その後様々な研究 [KKKO16, KO19, OS19] を経て, 現在ではすべての量子アフィン代数の有限次元加群圏に対しそのコア部分圏が定義されており, さらに上で述べた Kang–柏原–Kim の結果も拡張されている. すなわち籠 Hecke 代数の有限次元加群圏からコア部分圏へのモノイダル関手で, 単純加群の全単射を与えるものが構成されているのである. 筆者は [Nao21] において, 上で述べた藤田の結果を拡張し, 一般の量子アフィン代数に対しこれらの関手が圏同値であることを示した. 一般の量子アフィン代数には対応する籠多様体が存在せず, 幾何的表現論の結果を用いることはできない. 代わりに筆者は, 純代数的な手法により証明を与えた. 本稿では, この結果について説明を行うとともに, その証明の概略を述べたいと思う.

2 記号・定義の準備

2.1 量子アフィン代数

\mathfrak{g} を有限次元複素単純 Lie 代数, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ をその Cartan 部分代数とし, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathfrak{h}^*$ を単純ルートの集合, $I = \{1, \dots, n\}$ をその添え字集合とする. $R \subseteq \mathfrak{h}^*$ をルート系とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ でルート空間分解を表す. 正ルートの集合 $R_+ := (\sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i) \cap R$ に対し, $\mathfrak{n}_\pm := \bigoplus_{\alpha \in \pm R_+} \mathfrak{g}_\alpha$ とおく. このとき三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ が得られる. $\{e_i, h_i, f_i \mid i \in I\}$ を対応する Chevalley 生成元とする. また $i \in I$ に対し, $\varpi_i \in \mathfrak{h}^*$ を $\langle h_j, \varpi_i \rangle = \delta_{ij}$ を満たす元とする (基本ウェイト). ルート格子 Q , ウェイト格子 P , およびそれらの部分モノイド Q_+, P_+ を

$$Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i, \quad Q_+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i, \quad P = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \varpi_i, \quad P_+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i$$

で定める. $(,)$ で, Weyl 群不変かつ $\min\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in R\} = 2$ を満たす \mathfrak{h}^* 上の双線形形式を表す.

例 2.1. 特殊線形 Lie 代数 \mathfrak{sl}_{n+1} は, トレース 0 の $n+1$ 次正方形行列のなす単純 Lie 代数である (ブラケット積は $[X, Y] := XY - YX$ により定まる). このとき対角行列のなす部分 Lie 代数は

^{*6} $R(\beta)\text{-fmod}_0$ は $K(R(\beta)\text{-fgmod})|_{q=1} = K(R(\beta)\text{-fmod}_0)$ となるような, 有限次元 $R(\beta)$ 加群圏 $R(\beta)\text{-fmod}$ の部分圏である. 3 節参照

Cartan 部分代数となる. また $\varepsilon_i \in (\text{Mat}_{n+1}(\mathbb{C}))^*$ ($1 \leq i \leq n+1$) を $\langle E_{kl}, \varepsilon_i \rangle = \delta_{ik} \delta_{il}$ で定め (E_{ij} は $\text{Mat}_{n+1}(\mathbb{C})$ の標準基底), 以下 ε_i を \mathfrak{h}^* の元とみなす. このとき, 上で述べた各記号は以下のような標準的な取り方ができる (これらの記号は, これ以降の例でも断りなく用いる):

$$\begin{aligned} I &= \{1, \dots, n\}, \quad \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \quad R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}, \quad R_+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\}, \\ \mathfrak{n}_+ &= \{\text{上三角行列で対角成分がすべて } 0\}, \quad \mathfrak{n}_- = \{\text{下三角行列で対角成分がすべて } 0\}, \\ e_i &= E_{i,i+1}, \quad h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad \varpi_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i. \end{aligned}$$

$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ は, $[X \otimes f(t), Y \otimes g(t)] = [X, Y] \otimes f(t)g(t)$ により Lie 代数となる (ループ Lie 代数). 以下 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes 1 \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}$ により, \mathfrak{g} を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数とみなす. このとき,

$$\widehat{I} = I \sqcup \{0\}, \quad e_0 = e_{-\theta} \otimes t, \quad f_0 = e_{\theta} \otimes t^{-1}, \quad h = -h_{\theta}$$

($\theta \in R_+$ は最高ルート, e_{α} はルート α に付随するルートベクトル, h_{α} は対応する余ルート) とおくと, $\widehat{\mathfrak{g}}$ は $\{e_i, h_i, f_i \mid i \in \widehat{I}\}$ を生成元にもつ. 以下, 基礎体 \mathbf{k} を $\mathbb{C}(q)$ の代数的閉包とする. 量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ は, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の普遍包絡環 $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ の q 変形であり, $\{e_i, h_i, f_i \mid i \in \widehat{I}\}$ に対応する生成元 $\{E_i, K_i^{\pm 1}, F_i \mid i \in \widehat{I}\}$ といくつかの関係式 (例えば [KKK18] 等参照) により定義される \mathbf{k} 上の結合的代数である*7.

例 2.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は $\{E_i, K_i^{\pm 1}, F_i \mid i \in \{0, 1\}\}$ から生成され, 以下を定義関係式とする \mathbf{k} 代数である: $i, j \in \{0, 1\}$ に対し,

$$\begin{aligned} K_i K_j &= K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = 1, \quad K_i E_j K_i^{-1} = q^{-2+4\delta_{ij}} E_j, \\ K_i F_j K_i^{-1} &= q^{2-4\delta_{ij}} F_j, \quad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ \sum_{k=0}^3 (-1)^k p_k E_i^{3-k} E_j E_i^k &= \sum_{k=0}^3 (-1)^k p_k F_i^{3-k} F_j F_i^k = 0 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

ただし $k = 1, 2$ のとき $p_k = q^2 + 1 + q^{-2}$, $k = 0, 3$ のとき $p_k = 1$ とする. それぞれの生成元は “極限 $q \rightarrow 1$ ” において, 以下のように対応する:

$$E_0 \leftrightarrow f_1 \otimes t, \quad E_1 \leftrightarrow e_1, \quad F_0 \leftrightarrow e_1 \otimes t, \quad F_1 \leftrightarrow f_1, \quad \frac{K_i^{\pm} - 1}{q - 1} \leftrightarrow \pm(-1)^{\delta_{i0}} h_i.$$

$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ には余積 (coproduct) $\Delta: U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$, 余単位射 (counit) $\varepsilon: U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathbf{k}$, 対合射 (antipode) $S: U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}})^{\text{opp}}$ と呼ばれる 3 つの代数射が定義され, これらにより $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ は Hopf 代数となる (例えば [Kas95] など参照). このため M, N を $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群とするとき, $M \otimes N$ は Δ によりやはり $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群となる. また M の双対空間には S あるいは S^{-1} により, 2 通りの $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群の構造が定まる. 前者を左双対, 後者を右双対と呼び, それぞれ ${}^*M, M^*$ と表す. また ε により定義される 1 次元表現を自明表現と呼ぶ.

*7 正確にはこれは量子ループ代数と呼ぶべきものであり, 量子アフィン代数は通常その中心拡大を指す. 本稿では “量子アフィン Schur–Weyl 双対性” という言葉との整合性から, あえてこれを量子アフィン代数と呼ぶことにする. ちなみに有限次元加群を考える限りは, どちらの代数を扱っても本質的に差はない.

可積分^{*8}な有限次元 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群の圏を $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ と表す. このとき \mathcal{C} はテンソル積と自明表現によりモノイダル圏の構造を持つ. $i \in I$ に対し, 単純対象 $V \in \mathcal{C}$ のウェイト空間分解が

$$\dim_{\mathbf{k}} V_{\varpi_i} = 1, \quad V_{\lambda} \neq 0 \Rightarrow \varpi_i - \lambda \in Q_+$$

を満たすとき, V を i に付随する基本表現と呼ぶ. i に付随する基本表現は, \mathbf{k}^\times の元でパラメトライズされる. 以下 $i \in I$ と $a \in \mathbf{k}^\times$ に付随する基本表現を $V(i, a)$ と表す.

例 2.3. $a \in \mathbb{C}^\times$ に対し, $\varphi_a(X \otimes f(t)) = f(a)X$ は Lie 代数の準同型 $\varphi_a: \widehat{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ を定める (評価写像 (evaluation map)). $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のとき評価写像は q 変形に持ち上がり, 代数射 $\Phi_a: U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ ($a \in \mathbf{k}^\times$) が定義できる ([Jim86]). このとき $V(i, a)$ は, $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ の最高ウェイト ϖ_i の単純加群 $V(\varpi_i)$ の, Φ_a に関する引き戻しにより得られる.

有限型の量子群の場合と異なり, $M, N \in \mathcal{C}$ が単純加群であるとき $M \otimes N$ と $N \otimes M$ が同型となるとは限らない. しかし以下の定理が述べるように, 片方の加群を “アフィン化” すると同型となる.

命題 2.4 ([Kas02]). $M, N \in \mathcal{C}$ を単純加群とし, $u \in M, v \in N$ を最高ウェイトベクトル^{*9}とする. $M(z) := M \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(z)$ に対し

$$E_i(v \otimes f(z)) = E_i v \otimes z^{\delta_{i0}} f(z), \quad F_i(v \otimes f(z)) = F_i v \otimes z^{-\delta_{i0}} v, \quad K_i(v \otimes f(z)) = K_i v \otimes f(z)$$

($i \in \widehat{I}, v \in M, f(z) \in \mathbf{k}(z)$) と定めることで, $M(z)$ を $(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}), \mathbf{k}(z))$ 双加群とみなす. このとき $(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}), \mathbf{k}(z))$ 双加群の同型 $R_{M,N}(z): M(z) \otimes_{\mathbf{k}} N \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\mathbf{k}} M(z)$ で, $R_{M,N}(z)(u \otimes v) = v \otimes u$ を満たすものがただ一つ存在する. $R_{M,N}(z)$ は (正規化) \mathbf{R} 行列と呼ばれる.

2.2 籠 Hecke 代数

\mathfrak{g} を単純 Lie 代数とし, 簡単のため本節では \mathfrak{g} が対称型であると仮定する^{*10}. $\beta = \sum_{i \in I} m_i \alpha_i \in Q_+$ に対し, $m = \sum_i m_i$ とおき,

$$I^\beta := \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m) \in I^m \mid \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m} = \beta\}$$

と定める. このとき, \mathfrak{g} に付随するウェイト β の籠 Hecke 代数 $R(\beta) = R^{\mathfrak{g}}(\beta)$ は, 対称群の群環と多項式環の $|I_\beta|$ 個の直和の半直積 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m] \rtimes \left(\bigoplus_{\mathbf{i} \in I^\beta} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] e(\mathbf{i}) \right)$ を適切に変形した \mathbb{C} 代数であり, 生成元 $\{e(\mathbf{i}) \mid \mathbf{i} \in I^\beta\}$, $\{x_k \mid 1 \leq k \leq m\}$, $\{\tau_l \mid 1 \leq l < m\}$ からある関係式 (例えば [KKK18] 参照) で定義される^{*11}.

^{*8} $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群 M が可積分であるとは, ウェイト空間分解 $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ を持ち, E_i, F_i が局所べき零に作用すること.

^{*9} 単純加群 V に対し, $\dim V_\lambda = 1$ かつ $V_\mu = 0$ ($\mu - \lambda \in Q_+ \setminus \{0\}$) を満たす $\lambda \in P_+$ がただ一つ存在する. これを最高ウェイトと呼び, 0 でない $v \in V_\lambda$ を最高ウェイトベクトルと呼ぶ (ℓ 最高ウェイトベクトルと呼ぶ文献も多い).

^{*10} 実際には任意の Kac-Moody Lie 代数に対し, 付随する籠 Hecke 代数が定義できる.

^{*11} 定義関係式を決定するには, \mathfrak{g}, β 以外にもう少し追加のデータを与える必要がある. ただし本稿で主に扱う ADE 型の場合は, データによらず得られる代数はすべて同型である.

例 2.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のとき $R(\beta)$ の定義関係式 (の一つの取り方) は, 以下のようになる ($s_l \in \mathfrak{S}_m$ は l と $l+1$ を入れ替える互換を表す):

$$\begin{aligned} e(\mathbf{i})e(\mathbf{i}') &= \delta_{\mathbf{i}\mathbf{i}'}e(\mathbf{i}), \quad \sum_{\mathbf{i} \in I^\beta} e(\mathbf{i}) = 1, \quad x_k x_l = x_l x_k, \quad x_k e(\mathbf{i}) = e(\mathbf{i})x_k, \quad \tau_l e(\mathbf{i}) = e(s_l(\mathbf{i}))\tau_l, \\ \tau_k \tau_l &= \tau_l \tau_k \quad (|k-l| > 1), \quad \tau_k^2 e(\mathbf{i}) = \begin{cases} (\pm x_k \mp x_{k+1})e(\mathbf{i}) & i_k = i_{k+1} \pm 1, \\ e(\mathbf{i}) & \text{それ以外,} \end{cases} \\ (\tau_k x_l - x_{s_k(l)} \tau_k) e(\mathbf{i}) &= \begin{cases} (-1)^{l-k+1} e(\mathbf{i}) & l-k \in \{0, 1\}, i_k = i_{k+1}, \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases} \\ (\tau_{k+1} \tau_k \tau_{k+1} - \tau_k \tau_{k+1} \tau_k) e(\mathbf{i}) &= \begin{cases} \pm e(\mathbf{i}) & i_k = i_{k+1} \mp 1 = i_{k+2}, \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases} \end{aligned}$$

場合分けが与えられている関係式を, 全て “それ以外” のものに変えると, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m] \times (\bigoplus_{\mathbf{i} \in I^\beta} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]e(\mathbf{i}))$ の定義関係式が得られる.

$R(\beta)$ は, 次のように次数を定めることで次数付き代数となる:

$$\deg e(\mathbf{i}) = 0, \quad \deg x_k e(\mathbf{i}) = (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_k}), \quad \deg \tau_k e(\mathbf{i}) = -(\alpha_{i_k}, \alpha_{i_{k+1}}).$$

$R(\beta)$ -fgmod で有限次元次数付き加群の圏を表す. $\beta, \gamma \in Q_+$ に対し, $M \in R(\beta)$ -fgmod と $N \in R(\gamma)$ -fgmod を取った時, M と N の畳み込み積 (convolution product) $M \circ N$ が

$$M \circ N := R(\beta + \gamma) \underset{R(\beta) \otimes R(\gamma)}{\otimes} (M \otimes N)$$

により定義され, $M \circ N \in R(\beta + \gamma)$ -fgmod となる. このことから, $\bigoplus_{\beta \in Q_+} R(\beta)$ -fgmod はモノイダル圏となる. このときその Grothendieck 群 $\bigoplus_{\beta \in Q_+} K(R(\beta)\text{-fgmod})$ には, 積 $[M] \cdot [N] = [M \circ N]$ と $q[M] = [M[-1]]$ (次数のシフト) により $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 代数の構造が定まる.

定理 2.6 ([KL09, Rou08, VV11, Rou12]).

(1) $\bigoplus_{\beta \in Q_+} K(R(\beta)\text{-fgmod})$ は $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_-)^{\vee}$ と $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 代数として同型である. ここで $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_-)^{\vee}$ は, $U(\mathfrak{n}_-) \subseteq U(\mathfrak{g})$ に対応する部分代数 $U_q(\mathfrak{n}_-) \subseteq U_q(\mathfrak{g})$ のある $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 格子である.

(2) (1) の同型は, 以下のような $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 基底の間の 1 対 1 対応を与える:

$$\bigoplus_{\beta \in Q_+} K(R(\beta)\text{-fgmod}) \supseteq \{ \text{自己双対な単純加群のクラス} \} \xrightarrow{\sim} \{ \text{上大域基底} \} \subseteq U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_-)^{\vee}$$

(上大域基底 (upper global basis) については, [Kas94] 参照).

3 Kang–柏原–Kim による関手の構成

本章以降 \mathfrak{g} は (対称型とは限らない) 単純 Lie 代数とし, \mathcal{C} で可積分有限次元 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群の圏を表す. 本章では Kang–柏原–Kim [KKK18] により導入された, 与えられた \mathcal{C} の単純加群の列を用

いて, (この列から定まる) 籠 Hecke 代数の有限次元加群圏から \mathcal{C} へのモノイダル関手を構成する手法について述べる.

$\{W_j\}_{j \in J}$ を \mathcal{C} の実単純加群^{*12}の列とする (J は添え字集合^{*13}). 各 J の元の組 i, j に対し, $b_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を R 行列 $R_{W_i, W_j}(z): W_i(z) \otimes W_j \rightarrow W_j \otimes W_i(z)$ の $z = 1$ における極の位数とする. またグラフ Σ を次のように定める: 頂点集合は J であり, 2点 i, j 間の辺の本数を $b_{i,j} + b_{j,i}$ とする.

補足 3.1. $b_{i,j} = 0$ のとき R 行列を $z = 1$ で特殊化でき, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群の準同型 $R_{W_i, W_j}(1): W_i \otimes W_j \rightarrow W_j \otimes W_i$ を得ることができる. このため $b_{i,j} + b_{j,i} = 0$ であることは, $W_i \otimes W_j \cong W_j \otimes W_i$ となることと同値である. つまり Σ の辺の本数は, $W_i \otimes W_j$ と $W_j \otimes W_i$ がどのくらい同型から遠いかを表す値とみなせる.

以下 \mathfrak{g} を, その Dynkin 図形が Σ であるような Kac–Moody Lie 代数とし^{*14}, \mathfrak{g} に付随する各記号は \mathfrak{g} を添えて表す ($\alpha_i^{\mathfrak{g}}, Q_+^{\mathfrak{g}}$ 等). また \mathfrak{g} に付随するウェイト $\beta \in Q_+^{\mathfrak{g}}$ の籠 Hecke 代数 $R^{\mathfrak{g}}(\beta)$ を, 単に $R(\beta)$ と表す.

例 3.2. $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $J = \{-k+1, -k+3, \dots, k-1\}$ とし, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の基本表現の族 $\{V(1, q^j) \mid j \in J\}$ を考える. このとき

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & j - i = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

が成り立つ. よって Σ は A_k 型の Dynkin 図形であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{k+1}$ となる.

次に各 $\beta \in Q_+^{\mathfrak{g}}$ に対し, $(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}), R(\beta))$ 双加群を定義する. まず各 i に対し

$$\widehat{W}_{i,z} = W_i \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[[z-1]]$$

とおく ($U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群構造は $W_i(z)$ と同様に定める). $\beta = \sum_{j \in J} m_j \alpha_j^{\mathfrak{g}}$ と書き, $m = \sum_j m_j$ とおく. $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群 $\widehat{W}^{\otimes \beta}$ を

$$\widehat{W}^{\otimes \beta} = \bigoplus_{j \in J^{\beta}} \widehat{W}_j, \quad \widehat{W}_j = \widehat{W}_{j_1, z_1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \widehat{W}_{j_m, z_m}$$

と定める ($\widehat{\otimes}$ はテンソル積の完備化). このとき, $\widehat{W}^{\otimes \beta}$ に右からの $R(\beta)$ 作用を次のようにして定めることができる. 生成元たちの作用は, $e(j)$ が \widehat{W}_j への射影, x_k が $(z_k - 1)$ 倍で作用し, τ_k は各 \widehat{W}_j に

$$\text{id}_{\widehat{W}_{(j_1, \dots, j_{k-1})}} \otimes r_k \otimes \text{id}_{\widehat{W}_{(j_{k+2}, \dots, j_m)}} : \widehat{W}_j \rightarrow \widehat{W}_{s_k(j)}$$

で作用する ($s_k \in \mathfrak{S}_m$ は k と $k+1$ を入れ替える互換). ここで $r_k: \widehat{W}_{j_k, z_k} \widehat{\otimes} \widehat{W}_{j_{k+1}, z_{k+1}} \rightarrow$

^{*12} 単純加群 $M \in \mathcal{C}$ が実であるとは, $M \otimes M$ がやはり単純であること.

^{*13} 以下 i, j は主に \mathfrak{g} の添え字集合 I の元を表すときに用いるため, J の元を表すときは i, j を主に用いる.

^{*14} 本稿で主に扱うのは \mathfrak{g} が単純 Lie 代数となる場合だけである.

$\widehat{W}_{J_{k+1}, z_k} \widehat{\otimes} \widehat{W}_{J_k, z_{k+1}}$ は

$$r_k(v) = \begin{cases} (R_{W_{J_k}, W_{J_{k+1}}}(z_k/z_{k+1}) - \text{id})(z_k - z_{k+1})^{-1}(v) & (J_k = J_{k+1}) \\ (z_k/z_{k+1} - 1)^{b_{J_k, J_{k+1}}} R_{W_{J_k}, W_{J_{k+1}}}(z_k/z_{k+1})(v) & (J_k \neq J_{k+1}) \end{cases} \Big|_{z_k \leftrightarrow z_{k+1}}$$

と定める. この作用により, $\widehat{W}^{\otimes \beta}$ は $(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}), R(\beta))$ 双加群となる.

$R(\beta)\text{-fmod}_0$ で, $x_k \in R(\beta)$ ($k = 1, \dots, m$) の作用がべき零であるような有限次元 $R(\beta)$ 加群のなす圏を表す^{*15}. $M \in R(\beta)\text{-fmod}_0$ に対し $\widehat{W}^{\otimes \beta} \otimes_{R(\beta)} M$ は \mathcal{C} の対象となり, これにより関手 $\mathcal{F}_\beta: R(\beta)\text{-fmod}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ が得られる.

定義 3.3. 関手

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{\beta \in Q_+^{\mathfrak{e}}} \mathcal{F}_\beta: \bigoplus_{\beta \in Q_+^{\mathfrak{e}}} R(\beta)\text{-fmod}_0 \rightarrow \mathcal{C}$$

を一般化量子アフィン Schur–Weyl 双対性関手と呼ぶ.

例 3.4. $\beta = \alpha_j$ (単純ルート) のとき, $R(\alpha_j)$ は 1 変数多項式環 $\mathbf{k}[x]$ と同型となる. このとき 1 次元単純加群 $\mathbf{k}[x]/(x) \in R(\alpha_j)\text{-fmod}_0$ の \mathcal{F} での行先は,

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}[x]/(x)) = \widehat{W}_{j, z} \otimes_{\mathbf{k}[x]} \mathbf{k}[x]/(x) \cong W_j \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[[z-1]]/(z-1) \cong W_j$$

より W_j である.

定理 3.5 ([KKK18]). (i) \mathcal{F} はモノイダル関手である. 特に $M, N \in \bigoplus_{\beta} R(\beta)\text{-fmod}_0$ に対し,

$$\mathcal{F}(M \circ N) \cong \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(N)$$

が成り立つ.

(ii) \mathfrak{g} が有限次元単純 Lie 代数ならば, \mathcal{F} は完全関手である.

4 コア部分圏と主定理

前章で述べた Kang–柏原–Kim の構成法からは, 様々な関手が構成できる. 本稿の主定理は, それらの中でとりわけ良い性質を持つ, Hernandez–Leclerc のコア部分圏への関手に関するものである. まずこの部分圏に関して述べよう.

\mathcal{C} の単純加群は基本表現の有限列でパラメトライズされる. このことから分かるように, \mathcal{C} は非可算無限個の単純加群の同型類を持ち, きわめて大きな圏である. そこでまず以下のような部分圏を考える (コア部分圏はこの $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ よりさらに小さな部分圏である).

^{*15} 次数を忘れることで自然な忘却関手 $R(\beta)\text{-fgmod} \rightarrow R(\beta)\text{-fmod}_0$ が定義でき, これは \mathbb{Z} 代数の同型 $K(R(\beta)\text{-fgmod}) \Big|_{q=1} = K(R(\beta)\text{-fmod}_0)$ を誘導する.

定義 4.1. 各 $i \in I$ に対し $r_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $s_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を適切に取り,

$$I_{\mathbb{Z}} = \{(i, 2kr_i + s_i) \mid i \in I, k \in \mathbb{Z}\} \subseteq I \times \mathbb{Z}$$

と定める. このとき $\{V(i, q^\ell) \mid (i, \ell) \in I_{\mathbb{Z}}\}$ を含み, テンソル積を取る操作で閉じるような \mathcal{C} の最小の Serre 部分圏を $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ と表し, **Hernandez-Leclerc 部分圏** と呼ぶ (正確な定義は [HL15, HL16] 参照).

例 4.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のとき, 全ての $i \in I$ に対し $r_i = 1$ とし, $s_i \in \{0, 1\}$ を $s_i \equiv i \pmod{2}$ と定めると $I_{\mathbb{Z}}$ が得られる^{*16}. 例えば $n = 3$ の場合にこの $I_{\mathbb{Z}}$ を図示すると以下ようになる:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} i \setminus \ell & \cdots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 1 & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & \\ 2 & \cdots & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \cdots \\ 3 & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & \end{array}$$

任意の単純対象 $V \in \mathcal{C}$ は, 適切な $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ の単純対象 V_1, \dots, V_k と $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{k}^\times$ を取ることで,

$$V \cong \psi_{a_1}^*(V_1) \otimes \cdots \otimes \psi_{a_k}^*(V_k)$$

の形で表せる. ここで ψ_a は簡単な $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の代数自己同型である. このことから, \mathcal{C} を調べる際に $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ に話を制限しても (少なくとも単純加群に関しては) ほとんど情報は失われない.

大雑把に述べると, $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ の中で “双対を取る操作に関する基本領域” に当たる部分圏がコア部分圏である. これをもう少し正確に述べよう. 任意の $(i, \ell) \in I_{\mathbb{Z}}$ に対し, 対応する基本表現の左双対 $*V(i, q^\ell)$ はある $(j, k) \in I_{\mathbb{Z}}$ に対し $*V(i, q^\ell) \cong V(j, q^k)$ を満たす. よって $D(i, \ell) = (j, k)$ と定めることで, 全単射 $D: I_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} I_{\mathbb{Z}}$ が定義できる. このとき $I_{\mathbb{Z}}$ への $D^{\pm 1}$ の作用に関する基本領域 $I_{\mathbb{Z}}^0 \subseteq I_{\mathbb{Z}}$ をうまく選ぶことで, 以下の定義が得られる ($I_{\mathbb{Z}}^0$ の選び方は, 補足 4.5 内の文献参照).

定義 4.3. $\{V(i, q^\ell) \mid (i, \ell) \in I_{\mathbb{Z}}^0\}$ を含み, テンソル積を取る操作で閉じるような $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ の最小の Serre 部分圏を $\mathcal{C}(I_{\mathbb{Z}}^0)$ と表し, Hernandez-Leclerc のコア部分圏と呼ぶ^{*17}.

例 4.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ とし, $I_{\mathbb{Z}}$ を例 4.2 のようにとる. $\xi: I \rightarrow \mathbb{Z}$ を, すべての $i \in I$ に対し $\xi(i+1) - \xi(i) \in \{\pm 1\}$, $\xi(i) \equiv i \pmod{2}$ を満たす関数とする (高さ関数). このとき部分集合 $I_{\mathbb{Z}}^0(\xi) \subseteq I_{\mathbb{Z}}$ を

$$I_{\mathbb{Z}}^0(\xi) := \{(i, \ell) \in I_{\mathbb{Z}} \mid \xi(n+1-i) - n + 1 \leq \ell \leq \xi(i)\}$$

と定める. このとき $\xi \mapsto \mathcal{C}(I_{\mathbb{Z}}^0(\xi))$ により高さ関数と $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ のコア部分圏が 1 対 1 に対応する. 例えば $n = 3$, $\xi(i) = 4 - i$ のとき $I_{\mathbb{Z}}^0(\xi)$ を図示すると, 以下ようになる:

^{*16} Hernandez-Leclerc 圏の取り方は一意ではなく, この場合も $r = 1$, $s_i \equiv i + 1 \pmod{2}$ としてもよい.

^{*17} 以下の例でみるように $I_{\mathbb{Z}}^0$ の選び方は様々なバリエーションがあり, コア部分圏は全く一意ではない.

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------|-----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| $i \setminus \ell$ | ... | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
| 1 | | ○ | | ● | | ● | | ● | | ○ | | ○ | |
| 2 | ... | | ○ | | ● | | ● | | ○ | | ○ | | ... |
| 3 | | ○ | | ○ | | ● | | ○ | | ○ | | ○ | |

また $(i, \ell) \in I_{\mathbb{Z}}$ に対し, $D(i, \ell) = (n + 1 - i, \ell + n + 1)$ となる. このとき各 ξ に対し, $I_{\mathbb{Z}}^0(\xi)$ が $D^{\pm 1}$ の作用に関して基本領域であることは, 容易に確認できる.

補足 4.5. まず ADE 型の場合に, コア部分圏が [HL15] において定義され, さらに下で述べる定理 4.6 が [KKK15] により (ADE 型で) 証明された. その後これらの結果を他の型へ拡張する試みがなされ, BC 型は [KO19], FG 型は [OS19] において, それぞれコア部分圏の定義, および定理 4.6 の証明がなされた. また [FO21] では, Q データと呼ばれる組合せ論的対象を用いることで, 型によらない統一的なコア部分圏の定義も与えられている.

\mathfrak{g} の型に応じて, 単純 Lie 代数 \mathfrak{g} を以下の型で定める (以下 m で \mathfrak{g} のランクを表す).

| | | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|------------|-----------|-------|-------|
| \mathfrak{g} | A_n | D_n | E_n | B_n | C_n | F_4 | G_2 |
| \mathfrak{g} | A_n | D_n | E_n | A_{2n-1} | D_{n+1} | E_6 | D_4 |

定理 4.6. $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}(I_{\mathbb{Z}}^0)$ を $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ のコア部分圏とする. このときある部分集合 $J = \{(i_1, \ell_1), \dots, (i_m, \ell_m)\} \subseteq I_{\mathbb{Z}}^0$ が存在して, 単純加群の族 $\{V(i_k, q^{\ell_k}) \mid 1 \leq k \leq m\}$ に Kang–柏原–Kim の構成法を施して得られる関手を $\mathcal{F}: \bigoplus_{\beta} R(\beta)\text{-fmod}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ とすると, \mathcal{F} の行先はすべて \mathcal{C}_0 に含まれる. またこの \mathcal{F} に関し以下が成り立つ.

- (a) この圏 Hecke 代数 $R(\beta)$ は単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に付随するものである.
- (b) \mathcal{F} はモノイダルかつ完全な関手である^{*18}.
- (c) \mathcal{F} は単純加群を単純加群にうつし, $\bigoplus_{\beta} R(\beta)\text{-fmod}_0$ と \mathcal{C}_0 の単純加群の同型類の一対一写像を誘導する.

特にこの定理と定理 2.6 から以下の系が従う.

系 4.7. \mathbb{Z} 代数の同型

$$K(\mathcal{C}_0) \cong \bigoplus_{\beta} K(R(\beta)\text{-fmod}_0) \cong U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{n}_-)^{\vee} \Big|_{q=1}$$

が成り立つ. さらにこれらの同型は, 単純加群のクラスと上大域基底 (の特殊化) との全単射を与える.

例 4.8. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ とし, $I_{\mathbb{Z}}$ を例 4.2 のようにとる. ξ を高さ関数とし $I_{\mathbb{Z}}^0(\xi)$ の元の番号付け $I_{\mathbb{Z}}^0(\xi) = \{(i_1, \ell_1), \dots, (i_r, \ell_r)\}$ を,

$$p < s \Rightarrow \ell_p \geq \ell_s$$

^{*18} これは定理 3.5 と (a) から従う.

がすべての $1 \leq p, s \leq r$ に対して成り立つように選ぶ (このとき $r = n(n+1)/2$ となる). $s_k \in \mathfrak{S}_{n+1}$ ($1 \leq k \leq n$) を k と $k+1$ を入れ替える互換とすると, $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_r}$ は最長元 $w_0 = (n+1, n, \dots, 1)$ の簡約表示になる. よって $\beta_k = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$ とおくと, $R_+ = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ が成り立つ. このとき

$$J := \{(i_k, l_k) \in I_{\mathbb{Z}}^0(\xi) \mid \beta_k \text{ は単純ルート}\}$$

とおくと, この J は定理 4.6 を満たす. 例えば $n = 3$, $\xi(i) = 4 - i$ の場合, $I_{\mathbb{Z}}^0(\xi)$ の番号付けとして

$$\{(i_1, l_1), \dots, (i_6, l_6)\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 1), (2, 0), (1, -1)\}$$

が取れる. このとき対応する簡約表示は $w_0 = s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1$ であり,

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_4 = \alpha_2, \quad \beta_5 = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_6 = \alpha_3$$

であるから, $J = \{(1, 3), (1, 1), (1, -1)\}$ となる.

以下が本稿の主定理であり, ADE 型の場合は [Fuj22, Fuj20] において, 一般の場合は [Nao21] において証明が与えられた*¹⁹.

定理 4.9. 定理 4.6 の関手 \mathcal{F} は, $\bigoplus_{\beta} R(\beta)\text{-fmod}_0$ と \mathcal{C}_0 の (モノイダル圏としての) 圏同値を与える.

このことから, 即座に以下の系が得られる.

系 4.10. 単純 Lie 代数の組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ が以下のいずれかであるとする.

| | | | | |
|-----------------|------------|-----------|-------|-------|
| \mathfrak{g} | B_n | C_n | F_4 | G_2 |
| \mathfrak{g}' | A_{2n-1} | D_{n+1} | E_6 | D_4 |

$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}'})$ のコア部分圏 \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}'_0 をそれぞれ任意にとるとき, \mathcal{C}_0 と \mathcal{C}'_0 はモノイダル圏として同値である.

Proof. 定理 4.9 から, \mathcal{C}_0 と \mathcal{C}'_0 はともに同じ箆 Hecke 代数に関する $\bigoplus_{\beta} R(\beta)\text{-fmod}_0$ と同値である. よって系が従う. \square

*¹⁹ 本稿では簡単のため, 非ねじれ型 (untwisted type) の量子アフィン代数に対してのみ定理を述べているが, [Nao21] ではねじれ型 (twisted type) の場合も扱っている.

5 主定理の証明

5.1 アフィン最高ウェイト圏

本節では、定理 4.9 の証明において重要な役割を果たすアフィン最高ウェイト圏について述べる*20. \mathcal{A} をネター \mathbf{k} 代数とし、その Jacobson 根基を \mathcal{I} とあらわす. 以下 \mathcal{A}/\mathcal{I} は有限次元であり、 \mathcal{A} は \mathcal{I} 進位相に関し完備であると仮定する. $\{L(\pi) \mid \pi \in \Pi\}$ を \mathcal{A} の (有限次元) 単純加群の同型類とし、各 π に対し $P(\pi)$ で射影被覆を表す. 集合 Π に半順序 \leq が与えられていると仮定し、各 $\pi \in \Pi$ に対し $\Delta(\pi)$ (標準加群 (standard module)) を、 $\Delta(\pi)$ の単純部分商が全て $L(\sigma)$ ($\sigma \leq \pi$) に同型となるような $P(\pi)$ の極大商 \mathcal{A} 加群とする. 有限生成 \mathcal{A} 加群の圏を、 $\mathcal{A}\text{-mod}$ と表す.

定義 5.1. $\mathcal{A}\text{-mod}$ が以下の条件を満たすとき、半順序集合 (Π, \leq) に付随するアフィン最高ウェイト圏であるという.

(i) 全ての $\pi \in \Pi$ に対し、 $P(\pi)$ はフィルトレーション

$$P(\pi) = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{m_\pi} = 0$$

で、 $V_0/V_1 \cong \Delta(\pi)$ かつ、全ての $i > 0$ に対しある $\sigma_i > \pi$ が存在して $V_i/V_{i+1} \cong \Delta(\sigma_i)$ を満たすものが存在する.

(ii) 全ての $\pi \in \Pi$ に対し、自己準同型代数 $\text{End}_{\mathcal{A}}(\Delta(\pi))$ は形式的べき級数環 $\mathbf{k}[[z_1, \dots, z_{n_\pi}]]$ と同型であり、 $\Delta(\pi)$ は $\text{End}_{\mathcal{A}}(\Delta(\pi))$ 上有限ランク自由加群である*21.

$\pi \in \Pi$ に対し N_π を $\text{End}_{\mathcal{A}}(\Delta(\pi))$ の極大イデアルとし、 $\overline{\Delta}(\pi) := \Delta(\pi)/N_\pi\Delta(\pi)$ とおく (真標準加群 (proper standard module)). 真標準加群の双対概念である、真余標準加群 (proper costandard module) $\overline{\nabla}(\pi)$ も定義できる.

アフィン最高ウェイト圏の間の関手に対して、以下のような同値となるための十分条件が知られており、これが定理 4.9 の証明で本質的な役割を果たす.

定理 5.2 ([Fuj18]). $i = 1, 2$ に対し、代数 \mathcal{A}_i が中心上有限生成であり、さらに $\mathcal{A}_i\text{-mod}$ が (Π_i, \leq_i) に付随するアフィン最高ウェイト圏であると仮定する. 完全関手 $\mathcal{F}: \mathcal{A}_1\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}_2\text{-mod}$ に対し、ある半順序を保つ全単射 $f: \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ が存在して、

$$\mathcal{F}(\Delta(\pi)) \cong \Delta(f(\pi)), \quad \mathcal{F}(\overline{\nabla}(\pi)) \cong \overline{\nabla}(f(\pi))$$

がすべての $\pi \in \Pi_1$ で成り立つとき、 \mathcal{F} は同値である.

*20 主定理の証明の概略を理解するだけであれば、必ずしも正確な定義は必要ないので、興味のない方は適当に読み飛ばしていただいて構わない.

*21 文献によっては、 $\text{End}_{\mathcal{A}}(\Delta(\pi))$ としてより一般の代数を許容するものもある.

5.2 定理 4.9 の証明の概略

本節を通して、量子アフィン代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ とそのコア部分圏 \mathcal{C}_0 を固定し、

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\beta \in Q_+^{\mathfrak{e}}} \mathcal{F}_\beta: \bigoplus_{\beta \in Q_+^{\mathfrak{e}}} R(\beta)\text{-fmod}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$$

を対応する一般化量子アフィン Schur–Weyl 双対性関手とする。以下 $\mathcal{R}_\beta := R(\beta)\text{-fmod}_0$ と略記する。まず q 指標の理論により、以下の命題が示せる。

命題 5.3. \mathcal{C}_0 の block 分解 $\mathcal{C}_0 = \bigoplus_{\beta \in Q_+} \mathcal{C}_{0,\beta}$ で、各 $\beta \in Q_+$ に対し $\mathcal{F}_\beta(\mathcal{R}_\beta) = \mathcal{C}_{0,\beta}$ となるものが存在する。

よって各 $\beta \in Q_+^{\mathfrak{e}}$ に対し $\mathcal{F}_\beta: \mathcal{R}_\beta \rightarrow \mathcal{C}_{0,\beta}$ が圏同値となることを示せば十分である。これを定理 5.2 を用いて示す、というのが大まかな証明のアイデアである。しかしながら、 \mathcal{R}_β と $\mathcal{C}_{0,\beta}$ はそのままではアフィン最高ウェイト圏とはならず、定理 5.2 は適用できない。そこでこれらの圏を含むアフィン最高ウェイト圏 $\widehat{\mathcal{R}}_\beta, \widehat{\mathcal{C}}_{0,\beta}$ をそれぞれ定義し、こちらに定理 5.2 を適用することを考える。

以下 $\beta \in Q_+^{\mathfrak{e}}$ を固定する。 $\widehat{\mathcal{R}}_\beta$ の定義は比較的容易で、 $\widehat{R}(\beta)$ を $R(\beta)$ の次数付けに関する完備化とし^{*22}、 $\widehat{\mathcal{R}}_\beta := \widehat{R}(\beta)\text{-mod}$ とすればよい。すると \mathcal{R}_β に属する $R(\beta)$ 加群は自然に $\widehat{R}(\beta)$ 加群に持ち上がり、 $\mathcal{R}_\beta = \widehat{R}(\beta)\text{-fmod} \subseteq \widehat{R}(\beta)\text{-mod}$ とみなせる。さらに以下の定理が成り立つ。

定理 5.4 ([Kat14, BKM14, Fuj18]). $\widehat{R}(\beta)\text{-mod}$ はアフィン最高ウェイト圏である。

一方 $\widehat{\mathcal{C}}_{0,\beta}$ については $\widehat{\mathcal{R}}_\beta$ ほど自然な候補はなく、この $\widehat{\mathcal{C}}_{0,\beta}$ にあたる圏を見つけることが定理 4.9 の証明の重要なステップである。

補足 5.5. 先行研究において定理 4.9 を ADE 型で示した [Fuj22] では、籐多様体の同変 K 群の有限生成加群圏を $\widehat{\mathcal{C}}_{0,\beta}$ として採用している^{*23}。しかし、 ADE 型でない場合には対応する籐多様体が (現状) 存在しないため、この手法は一般の型には拡張できない。ちなみに [Fuj20] では、やはり ADE 型の場合に、より幾何的な手法により定理 4.9 に別証明を与えている。こちらの証明も籐多様体を用いており一般の型には拡張できない。

[Nao21] における $\widehat{\mathcal{C}}_{0,\beta}$ の定義について述べよう。3 章において \mathcal{F}_β を定義する際に考えた $(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}), R(\beta))$ 双加群 $\widehat{W}^{\otimes \beta}$ は、自然に $(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}), \widehat{R}(\beta))$ 双加群に持ち上がる。そこで \mathbf{k} 代数 \mathbb{E}_β を

$$\mathbb{E}_\beta := \text{End}_{\widehat{R}(\beta)\text{-opp}}(\widehat{W}^{\otimes \beta})$$

とおく^{*24}。このとき \mathbb{E}_β の有限生成加群圏 $\mathbb{E}_\beta\text{-mod}$ が $\widehat{\mathcal{C}}_{0,\beta}$ にあたる圏である。上で述べたように証明を完了するには、この圏がアフィン最高ウェイト圏であり、さらに (適切な意味で) $\mathcal{C}_{0,\beta}$ を含む

^{*22} 例えば $\beta = \alpha_i$ (単純ルート) のとき $R(\alpha_i) \cong \mathbf{k}[x]$ であるが、このとき $\widehat{R}(\alpha_i) = \mathbf{k}[x]$ となる。

^{*23} この圏が $\mathcal{C}_{0,\beta}$ を含むことは、[Nak01] の結果を用いて示される。

^{*24} これは Schur 代数 $\text{End}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]\text{-opp}}((\mathbb{C}^n)^{\otimes d})$ のある種の一般化である。

ことを示す必要がある。より正確に述べると、以下の命題が成り立つ。

命題 5.6. (i) $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の $\widehat{W}^{\otimes \beta}$ への作用により、自然な代数射 $\Phi_\beta: U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathbb{E}_\beta$ が定義できる。このとき、引き戻し Φ_β^* は圏同値 $\mathbb{E}_\beta\text{-fmod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{0,\beta}$ を引き起こす (よって $\mathcal{C}_{0,\beta} \subseteq \mathbb{E}_\beta\text{-mod}$ とみなせる)。(ii) $\mathbb{E}_\beta\text{-mod}$ はアフィン最高ウェイト圏である。

関手 $\mathcal{F}_\beta: \mathcal{R}_\beta \rightarrow \mathcal{C}_{0,\beta}$ は自然に $\widehat{\mathcal{F}}_\beta: \widehat{\mathcal{R}}_\beta \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{0,\beta}$ に持ち上がり、定理 5.2, 定理 5.4 と上の命題 (ii) を適用することで $\widehat{\mathcal{F}}_\beta$ が圏同値であることが示せる。このとき上の命題 (i) より、 \mathcal{F}_β の同値性が証明される。

謝辞 第 67 回代数学シンポジウム関係者の方々、特に講演のお声がけを下されたプログラム責任者の柳田伸太郎さんと山内博さんに、心より感謝申し上げます。本研究は、日本学術振興会学術研究助成基金・基盤研究 (C) No.20K03554 による助成を受けたものです。

参考文献

- [Ari96] S. Ariki. On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$. *J. Math. Kyoto Univ.*, 36(4):789–808, 1996.
- [BKM14] J. Brundan, A. Kleshchev, and P. J. McNamara. Homological properties of finite-type Khovanov–Lauda–Rouquier algebras. *Duke Math. J.*, 163(7):1353–1404, 2014.
- [Che87] I. V. Cherednik. A new interpretation of Gelfand–Tsetlin bases. *Duke Math. J.*, 54:563–577, 1987.
- [CP96] V. Chari and A. Pressley. Quantum affine algebras and affine Hecke algebras. *Pac. J. Math.*, 174(2):295–326, 1996.
- [Dri87] V. G. Drinfel’d. A new realization of Yangians and of quantum affine algebras. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 296(1):13–17, 1987.
- [FO21] R. Fujita and S.-J. Oh. Q-data and representation theory of untwisted quantum affine algebras. *Commun. Math. Phys.*, 384(2):1351–1407, 2021.
- [Fuj18] R. Fujita. Tilting modules of affine quasi-hereditary algebras. *Adv. Math.*, 324:241–266, 2018.
- [Fuj20] R. Fujita. Geometric realization of Dynkin quiver type quantum affine Schur–Weyl duality. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2020(22):8353–8386, 2020.
- [Fuj22] R. Fujita. Affine highest weight categories and quantum affine Schur–Weyl duality of Dynkin quiver types. *Represent. Theory*, 26:211–263, 2022.
- [GRV94] V. Ginzburg, N. Reshetikhin, and E. Vasserot. Quantum groups and flag varieties. In *Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups. AMS-IMS-SIAM summer research conference, June 13-19, 1992, Mount Holyoke College, South Hadley, MA, USA*, pages 101–130. Providence, RI: Amer-

ican Mathematical Society, 1994.

- [HL15] D. Hernandez and B. Leclerc. Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 2015(701):77–126, 2015.
- [HL16] D. Hernandez and B. Leclerc. A cluster algebra approach to q -characters of Kirillov-Reshetikhin modules. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 18(5):1113–1159, 2016.
- [Jim85] M. Jimbo. A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10(1):63–69, 1985.
- [Jim86] M. Jimbo. A q -analogue of $U(\mathfrak{gl}(N + 1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 11(3):247–252, 1986.
- [Kas94] M. Kashiwara. Crystal bases of modified quantized enveloping algebra. *Duke Math. J.*, 73(2):383–413, 1994.
- [Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Grad. Texts Math.* New York, NY: Springer-Verlag, 1995.
- [Kas02] M. Kashiwara. On level-zero representations of quantized affine algebras. *Duke Math. J.*, 112(1):117–175, 2002.
- [Kat14] S. Kato. Poincaré–Birkhoff–Witt bases and Khovanov–Lauda–Rouquier algebras. *Duke Math. J.*, 163(3):619–663, 2014.
- [KKK15] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R -matrices of quantum affine algebras, II. *Duke Math. J.*, 164(8):1549–1602, 2015.
- [KKK18] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R -matrices of quantum affine algebras. *Invent. Math.*, 211(2):591–685, 2018.
- [KKKO16] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-J. Oh. Symmetric quiver Hecke algebras and R -matrices of quantum affine algebras IV. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(4):1987–2015, 2016.
- [KL09] M. Khovanov and A. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I. *Represent. Theory*, 13(14):309–347, 2009.
- [KO19] M. Kashiwara and S.-j. Oh. Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: doubly laced types. *J. Algebraic Combin.*, 49(4):401–435, 2019.
- [Nak01] H. Nakajima. Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(1):145–238, 2001.
- [Nao21] K. Naoi. Equivalence between module categories over quiver Hecke algebras and Hernandez-Leclerc’s categories in general types. *Adv. Math.*, 389:47, 2021. Id/No 107916.
- [OS19] S.-j. Oh and T. Scrimshaw. Categorical relations between langlands dual quantum affine algebras: exceptional cases. *Comm. Math. Phys.*, 368(1):295–367, 2019.
- [Rou08] R. Rouquier. 2-Kac-Moody algebras. *arXiv preprint arXiv:0812.5023*, 2008.
- [Rou12] R. Rouquier. Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras. In *Algebra colloquium*,

volume 19, pages 359–410. World Scientific, 2012.

- [VV11] M. Varagnolo and E. Vasserot. Canonical bases and KLR-algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 2011(659):67–100, 2011.

3次元の双有理幾何

川北真之

京都大学数理解析研究所

3次元の極小モデルプログラムが完成して四半世紀が経ち、一般次元のフリップの存在をはじめとして、高次元の極小モデル理論は大きく発展した。それと並行して極小モデル理論を応用することにより、3次元の双有理幾何が明示的に研究されてきた。このようにして解明された3次元の双有理幾何の様子を、極小モデルプログラムの手順に沿って解説する。

基礎体は複素数体 \mathbf{C} とする。 n 次元空間 \mathbf{C}^n の原点における解析的近傍を $o \in \mathfrak{D}^n$ で表す。

1 極小モデルプログラム

曲面の極小モデル理論の復習から入る。 S を滑らかな射影的曲面とする。 S を一点を中心に爆発させて新しい曲面を得る操作は S の双有理幾何においては本質的ではない。爆発で得られる曲線は (-1) -曲線であり、逆に任意の (-1) -曲線は Castelnuovo の収縮定理によって収縮される。そこで (-1) -曲線の収縮 $S \rightarrow T$ によって S を T で取りかえる操作を繰り返すと、Picard 数の減少により有限回の操作ののちに (-1) -曲線を持たない曲面に到達する。その曲面 S は次のいずれかである。

- S は極小モデル。すなわち標準因子 K_S がすべての曲線 C と非負の交叉数 $(K_S \cdot C) \geq 0$ を持つ。
- S は曲線上の \mathbf{P}^1 束であるか、射影平面 \mathbf{P}^2 と同型。前者では \mathbf{P}^1 束の底曲線を B とおき、後者では $B = \text{Spec } \mathbf{C}$ とおくことで、 $-K_S$ が相対的に豊富なファイバー構造 $S \rightarrow B$ が入る。

到達先が極小モデルとファイバー構造のどちらになるかは、標準因子 K_S が擬有効かどうか、すなわち有効因子の極限と数値的同値かどうかという S の性質から決まる。

曲面の極小モデル理論の高次元化において問題となるのが特異点である。 (-1) -曲線の収縮は反標準因子 $-K_X$ が相対的に豊富な写像 $X \rightarrow Y$ として一般化されるが、もとの X が滑らかであっても Y もそうであるとは限らない。例えば3次元空間の芽 $o \in \mathbf{C}^3$ を位数2の巡回群 \mathbf{Z}_2 の作用 $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, -x_3)$ で割って得られる商特異点 $o \in Y = \mathbf{C}^3/\mathbf{Z}_2$ の原点を中心とする爆発 $\pi: X \rightarrow Y$ を考えると、 X は滑らかで $-K_X$ は相対的に豊富である。 Y の標準因子 K_Y は2倍すると Cartier になる Weil 因子であり、例外因子 E に対して $K_X = \pi^* K_Y + (1/2)E$ となる。一般に ζ を1の原始 r 乗根として $o \in \mathfrak{D}^n$ の巡回群 \mathbf{Z}_r の作用 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\zeta^{a_1} x_1, \dots, \zeta^{a_n} x_n)$ ($a_i \in \mathbf{Z}$) による商を $o \in \mathfrak{D}^n/\mathbf{Z}_r(a_1, \dots, a_n)$ と書き $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ 型の商特異点と呼ぶ。上の特異点 $o \in Y$ は $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ 型である。

$\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ 型の特異点 $o \in Y$ においては爆発 $\pi: X \rightarrow Y$ がその特異点解消であり、標準因子の比較 $K_X = \pi^* K_Y + (1/2)E$ における E の係数 $1/2$ が正であることが $-K_X$ の相対豊富性を担保している。この観察をもとに高次元の極小モデル理論が許す特異点として末端特異点が定義される。そのような特異点 $x \in X$ は標準因子 K_X が \mathbf{Q} -Cartier であること、すなわちある正の整数倍 rK_X

が Cartier になることが曲線との交叉数を考える上で不可欠である。これを X が **Q-Gorenstein** であるといい、最小の正整数 r を $x \in X$ の指数と呼ぶ。このとき引き戻し μ^*K_X が有理係数の因子として定義される。正規特異点 $x \in X$ が端末的であるとは、**Q-Gorenstein** であって、特異点解消 $\mu: X' \rightarrow X$ において例外因子 E_i たちを用いて $K_{X'} = \mu^*K_X + \sum_i d_i E_i$ と表したとき、すべての係数 $d_i \in \mathbf{Q}$ が正であることをいう。

特異点のさらなる障害は、3次元以上では収縮写像 $\pi: X \rightarrow Y$ が余次元 1 で同型となる場合があることである。このとき仮に K_Y が **Q-Cartier** ならば $K_X = \pi^*K_Y$ となり $-K_X$ の相対豊富性に矛盾する。よって Y は **Q-Gorenstein** にはなりえず K_Y との交叉数は定義できない。その状況を立て直す操作が π のフリップ $\pi^+: X^+ \rightarrow Y$ であり、 π^+ は K_{X^+} が相対的に豊富である余次元 1 で同型な写像として定義される。

極小モデルプログラムでは端末特異点のみを持つ射影代数多様体のうちすべての因子が **Q-Cartier** であるものを考える。そのような代数多様体のなす圏を \mathcal{C} と書く。与えられた $X \in \mathcal{C}$ に対してプログラムは次のように走る。

- 1 K_X がネフならば X を極小モデルとして出力する。
- 2 K_X がネフでないならば $-K_X$ が相対的に豊富な収縮写像 $\pi: X \rightarrow Y$ が存在する。
- 3 Y の次元が X の次元より小さいとき、 π は森ファイバー空間と呼ばれ、これを出力する。
- 4 π が双有理で例外因子を持つとき、 π は因子収縮写像と呼ばれる。 X を $Y \in \mathcal{C}$ で取りかえて 1 にもどる。Picard 数 $\rho(Y) = \rho(X) - 1$ は減少する。
- 5 π が余次元 1 で同型なとき、 π はフリップ収縮写像と呼ばれる。 π のフリップ $\pi^+: X^+ \rightarrow Y$ をとり、 X を $X^+ \in \mathcal{C}$ で取りかえて 1 にもどる。Picard 数 $\rho(X^+) = \rho(X)$ は変わらない。

3次元森ファイバー空間は一般ファイバーの次元が 1, 2, 3 のときそれぞれ 2 次曲線束、**del Pezzo** 曲面束、**Fano** 多様体である。フリップの存在およびフリップ列の終止性がいえればプログラムが機能することが Picard 数の推移からわかる。3次元フリップの終止は Shokurov [86]、存在は森 [67] による。Birkar, Cascini, Hacon, Mckernan [9, 31] は一般次元でフリップの存在を証明し、さらに例えば相対次元が 0 の設定では、フリップ列の方向を上手に選べば終止することを示してプログラムを機能させた。

2 端末特異点

指数 1 の端末特異点 $x \in X$ は Gorenstein 特異点である。Reid [77] は 3次元 Gorenstein 特異点を孤立 **cDV** 特異点 (compound Du Val) として特徴付けた。ここで $x \in X$ が cDV 特異点であるとは、その一般超平面切断 $x \in S$ が Du Val であることをいう。指数 r が一般の端末特異点 $x \in X$ は指数 1 被覆 $\bar{x} \in \bar{X}$ の商 $x \in X = \bar{X}/\mathbf{Z}_r$ として表される。ここで $\bar{x} \in \bar{X}$ も端末的なので、Reid の結果より半不変関数 $\xi \in \mathcal{O}_{\bar{X}}$ を用いて

$$x \in X = (\xi = 0) \subset \mathcal{D}^4/\mathbf{Z}_r(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

と記述される。森 [66] はこれが端末特異点となる条件を調べていくつかの型 $cA/r, \dots, cE/2$ に分

類した. 最も典型的である cA/r 型の特異点は

$$x \in X = (x_1x_2 + f(x_3, x_4) = 0) \subset \mathfrak{D}^4/\mathbf{Z}_r(1, -1, 0, b) \quad (b, r \text{ は互いに素})$$

と表される. 分類の十分性は Kollár, Shepherd-Barron [58] により確認されている.

Reid [78] はこの分類結果を受けて, 3次元の双有理幾何の研究を牽引する役目を担うことになる重要な洞察を行った. 指数 1 の 3次元端末特異点 $x \in X$ の一般超平面切断は Du Val であるが, 指数が一般のときも超平面切断の代わりに $-K_X$ と線型同値な一般の曲面 $x \in S \subset X$ を考えればやはり $x \in S$ は Du Val であるという洞察である. 例えば上の cA/r 型特異点では $S = (x_4 = 0) \sim -K_X$ を考えると $x \in S = (x_1x_2 + f(x_3, 0) = 0) \subset \mathfrak{D}^3/\mathbf{Z}_r(1, -1, 0)$ は A 型の Du Val 特異点になっている. 彼は反標準因子系 $|-K_X|$ の一般元 S を **general elephant** と呼び, 次の予想を立てた.

General elephant 予想 端末的な 3次元代数多様体 X について, 反標準因子 $-K_X$ が豊富となる適切な状況下では X の general elephant S は高々 Du Val 特異点しか持たない.

3次元双有理幾何が general elephant 予想を解決しながら発展した様子を以下で見ることになる.

3 フリップ

はじめに 3次元フリップの最初の例を挙げる. 通常 2重点 $o \in Y = (x_1x_2 + x_3x_4 = 0) \subset \mathfrak{D}^4$ のイデアル (x_2, x_4) に沿う爆発 $X \rightarrow Y$ およびイデアル (x_1, x_4) に沿う爆発 $X^+ \rightarrow Y$ はともに余次元 1 で同型であり, 図式 $X \rightarrow Y \leftarrow X^+$ は標準因子に関して中立なフロップとなる. これを Atiyah のフロップと呼ぶ [4]. これを巡回群 \mathbf{Z}_2 の作用 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_1, x_2, x_3, -x_4)$ で割って得られる図式 $X/\mathbf{Z}_2 \rightarrow Y/\mathbf{Z}_2 \leftarrow X^+/\mathbf{Z}_2$ は Francia のフリップとして知られている [25].

3次元フリップ収縮写像は解析的には既約な曲線の収縮たちに分解される. そこで例外集合 $\pi^{-1}(y)$ が既約なフリップ収縮写像 $\pi: C \simeq \mathbf{P}^1 \subset X \rightarrow y \in Y$ を考える. 川又 [48] はフリップよりも扱いやすいフロップの存在を 3次元で証明した上で, 次のようにフリップの存在をフロップの存在に帰着させる枠組を与えた. 仮に組 $(X, T/2)$ が標準特異点を持つ曲面 $T \sim -2K_X$ が見つければ, T に沿って分岐する X の 2重被覆 $\mu: \bar{X} \rightarrow X$ をとると分岐公式 $K_{\bar{X}} = \mu^*(K_X + T/2)$ より \bar{X} は標準的である. $\pi: X \rightarrow Y$ の持ち上げ $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ は $K_{\bar{X}}$ に関して中立なので, そのフロップ $\bar{\pi}^+: \bar{X}^+ \rightarrow \bar{Y}$ の商として π のフリップ $\pi^+: X^+ \rightarrow Y$ が得られる.

この設定で general elephant 予想は一般の曲面 $S \sim -K_X$ が Du Val であることを主張するが, そのとき逆同伴より組 $(X, S = 2S/S)$ は標準的になる. 特に $|2S|$ の一般元 T に対しても組 $(X, T/2)$ は標準的なので, 川又の枠組により π のフリップが存在する. 森 [67] は π の分類とともに general elephant 予想もしくはよい T の存在を示してフリップを明示的に構成したのである. なお例外集合が既約な場合の general elephant 予想はのちの Kollár との共同研究 [57] で完全に示されている.

分類の手法は埋め込み $C \subset X$ の緻密な解析に尽きるが, ここでは着想の本質的な一端を垣間見るために, X 上の Gorenstein でない特異点は高々 2 個であることを証明する. 自然な準同型 $\mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{O}_X(-K_X) \rightarrow \mathcal{O}_X$ の C への制限

$$(\mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{O}_C/\text{tors}) \otimes (\mathcal{O}_X(-K_X) \otimes \mathcal{O}_C/\text{tors}) \rightarrow \mathcal{O}_C$$

を考える． $\mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{O}_C/\text{tors}$ は $\mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{O}_C$ をねじれ部分で割った商であり， $C \simeq \mathbf{P}^1$ 上のある可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s)$ と同型である．全射 $R^1\pi_*\mathcal{O}_X(K_X) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s))$ と川又–Viehweg 消滅 $R^1\pi_*\mathcal{O}_X(K_X) = 0$ により $-1 \leq s$ である．同様に $\mathcal{O}_X(-K_X) \otimes \mathcal{O}_C/\text{tors} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s')$ においても $-1 \leq s'$ ．一方で上の制限写像は Gorenstein でない特異点 p_1, \dots, p_l において全射ではないから，単射 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(s') \hookrightarrow \mathcal{O}_C(-\sum_i p_i)$ が誘導される．次数比較より $-2 \leq s + s' \leq -l$ ，すなわち $l \leq 2$ ．

4 点への因子収縮写像

3次元因子収縮写像の例外因子は曲面なので，それは点か曲線に収縮される．まず点に収縮する写像 $\pi: E \subset X \rightarrow y \in Y$ を考える． $E = \pi^{-1}(y)$ が例外因子である．関係式 $K_X = \pi^*K_Y + dE$ に現れる E の係数 d は食違い係数と呼ばれ，端末特異点 $y \in Y$ の指数 n とあわせて π の基本的な数値的不変量である．食違い係数 d は $nd \in \mathbf{Z}$ となる正の有理数である．

収縮先が商特異点，通常2重点のときの川又 [50]，Corti [21] の結果，および食違い係数が1以下のときの早川 [33, 34] の研究ののち，私は因子収縮写像 π の系統的研究を行った [42, 43, 44, 45]．相対的に豊富な因子 $-E$ が定める次数付き \mathcal{O}_Y 代数 $\mathcal{R} = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} \pi_*\mathcal{O}_X(-iE)$ によって $X = \text{Proj}_Y \mathcal{R}$ と表される．私の手法は \mathcal{R} を数値的情報 $d_i = \dim \pi_*\mathcal{O}_X(-iE)/\pi_*\mathcal{O}_X(-(i+1)E)$ から回復させるものである．消滅定理 $R^1\pi_*\mathcal{O}_X(-iE) = 0$ より適当なコンパクト化ののちに

$$d_i = \chi(\mathcal{O}_X(-iE)) - \chi(\mathcal{O}_X(-(i+1)E))$$

であり，Euler 標数の差である右辺が Reid による次の特異点版 Riemann–Roch 公式 [78] により計算される．

一般に3次元端末特異点は商特異点たちの集合に変形されるので， X 上の特異点たちを変形して商特異点の集合 $\{\frac{1}{r_i}(1, -1, b_i)\}_{i \in B}$ が得られる．これを X のかご (basket) と呼ぶ． X 上の \mathbf{Q} -Cartier 因子 D は各点で $D \sim e_i K_X$ と表される．このとき Euler 標数 $\chi(\mathcal{O}_X(D))$ は通常 Riemann–Roch 公式による値 $D(D - K_X)(2D - K_X)/12 + Dc_2(X)/12 + \chi(\mathcal{O}_X)$ と X のかごの貢献 $\sum_{i \in B} c_i(D)$ の和となる．各貢献項 $c_i(D)$ は r_i, b_i, e_i を用いて明示的に表示される．

結果として π は数値的に通常型 o1, o2, o3 と15個の例外型 e1, ..., e16 (e4 は存在しない) に分類され，すべて例を持つ．この数値的分類から \mathcal{R} を復元して π の幾何的分類を導く際に X 上の general elephant 予想が必要となり，それを証明した．幾何的な分類は以下にまとめられる．

定理 例外因子が点に収縮する3次元因子収縮写像 $\pi: E \subset X \rightarrow y \in Y$ は，食違い係数が非常に小さい場合を除き，適当な表現

$$y \in Y = (f(x_1, \dots, x_5) = x_5 + g(x_1, \dots, x_4) = 0) \subset \mathfrak{D}^5/\mathbf{Z}_r$$

のもとで重み付き爆発である．

ここで $y \in Y$ はつねに $\mathfrak{D}^4/\mathbf{Z}_r$ に埋め込めるが， π を記述する際には $\mathfrak{D}^5/\mathbf{Z}_r$ への埋め込みが必要になる場合が生じる．食違い係数が非常に小さい場合は例外因子の候補が計算可能な程度に絞られるので，上の結果は実用上満足いくものである．

5 曲線への因子収縮写像

次いで例外因子が曲線に収縮する 3 次元因子収縮写像 $\pi: E \subset X \rightarrow C \subset Y$ を考える. この場合 π は曲線 C 上の一般の点の近くでは C を中心とする爆発である. 特に $C \subset Y$ が与えられたとき π は存在すれば一意であり, $K_X = \pi^*K_Y + E$ である. 次数付き代数 $\mathcal{R} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \pi_*\mathcal{O}_X(-iE)$ による表現 $X = \text{Proj}_Y \mathcal{R}$ において i 次部分 $\pi_*\mathcal{O}_X(-iE)$ は C を定めるイデアル $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ の i 次記号べき $\mathcal{I}^{(i)} = \mathcal{I}^i \mathcal{O}_{Y,\eta} \cap \mathcal{O}_Y$ に等しい. ただし η は C の生成点. よって π が存在すれば \mathcal{I} の記号べき代数 $\mathcal{S} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^{(i)}$ は有限生成であり, X は $W = \text{Proj}_Y \mathcal{S}$ と Y 上同型になる.

X 上の general elephant 予想は C を含む Y 上の一般の曲面 $S \sim -K_Y$ が Du Val であることを意味する. この性質を $C \subset Y$ について仮定するとき, 記号べき代数 $\mathcal{S} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^{(i)}$ は有限生成で $W = \text{Proj}_Y \mathcal{S}$ は標準特異点を持つことがわかる. この下では $W \rightarrow Y$ が因子収縮写像の唯一の候補であるから, 解析的な芽 $y \in C \subset S \subset Y$ から出発して定まる W がさらに端末的かどうかを決定することが問題となる.

この問題について Tziolas [90, 91, 92] と Ducat [23] による研究が挙げられる. Tziolas は Y が Gorenstein で C が滑らかな曲線の場合を考えた. 出発点である Jaffe [41] による芽 $y \in C \subset S$ の分類は McKay 対応と関連する. いくつかの場合, W は適当な表示における重み付き爆発として記述される. 例えば Du Val 特異点 $y \in S$ が最も基本的な A_1 型るとき, 表示

$$y \in C = (x_1 \text{ 軸}) \subset Y = (x_1x_2 + x_3^2 + x_4^n = 0) \subset \mathbb{D}^4$$

によって $W \rightarrow Y$ は重み $(0, 2, 1, 1)$ 付きの爆発であり, W はつねに端末的である.

一方で Ducat は Y が滑らかな場合を一般的に考えた. C が局所交叉のときの構造は直ちにわかるのでそうでないとする. このとき \mathcal{O}_Y 加群としての \mathcal{O}_C の射影的分解が Eisenbud [24] による行列分解を用いて記述できて Jaffe の分類に呼応する分類を持つ. Ducat は C を中心とする Y の通常の爆発からはじめて Papadakis, Reid [74] の **unprojection** によりモデルを取りかえてゆき最終的に W に到達した. 例えば $y \in S$ が A_1 型るとき W は重み付き射影空間 $\mathbf{P}(1, 1, 1, 2)$ との直積への埋め込み $W \subset Y \times \mathbf{P}(1, 1, 1, 2)$ を持つ. さらに W が端末的であるための必要十分条件は $y \in C$ の重複度が 3 であることである.

6 Sarkisov プログラム

例えば射影空間 \mathbf{P}^n は自明な束 $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^{n-m} \rightarrow \mathbf{P}^m$ の全空間と双有理であるように, 一般に森ファイバー空間は双有理的には多くの構造を持ちうる. **Sarkisov プログラム** は二つの森ファイバー空間 $X/S, Y/T$ の全空間に双有理射 $X \dashrightarrow Y$ が与えられたとき, それを基本的なリンクたちに分解する. このプログラムは有理問題における次の重要な結果の証明をもとに定式化された [19, 32, 82].

定理 (Iskovskikh–Manin [40]) 滑らかな 3 次元 4 次超曲面 $X_4 \subset \mathbf{P}^4$ は有理的ではない.

Iskovskikh と Manin は実質的に X を森ファイバー空間 $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{C}$ とみて, それが他の森ファイバー空間 $Y \rightarrow T$ と双有理的につながらないことを証明して非有理性を示した. つまり $X/\text{Spec } \mathbf{C}$ は森ファイバー空間の圏において有理性と対極の性質である双有理超剛性を有することを証明したのである.

定義 $\pi: X \rightarrow S$ を森ファイバー空間とする. もう一つの森ファイバー空間 $\varphi: Y \rightarrow T$ (π と同じでもよい) と全空間の双有理射 $f: X \dashrightarrow Y$ が任意に与えられたときに, ある X の自己双有理射 $\sigma: X \dashrightarrow X$ と底空間の双有理射 $g: S \dashrightarrow T$ が存在して, 生成ファイバーの同型 $X \times_S \eta_S \simeq Y \times_T \eta_T$ を導く可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f \circ \sigma} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

をつくる時, π は双有理剛的であるという. さらに σ としてつねに X の恒等写像を選べるとき, π は双有理超剛的であるという.

代数多様体が有理的かどうかを調べることは基本的な問題である. 有理性から順に安定有理性, 単有理性, 有理連結性, 単線織性へと概念が拡がり, 最後の単線織性は数値的な判定が可能である [10, 65]. 曲面に対しては有理性から有理連結性まで同値であるが, 3次元以上では最初の3つはすべて異なり [3, 5, 18], 単有理性と有理連結性も異なるであろうと予想されている.

7 2次曲線束

3次元多様体からの2次曲線束 $\pi: X \rightarrow S$ に対してはフリップ収縮写像の議論の多くが解析的な芽 $s \in S$ の上で通用する. 大きな違いは相対次元が正のために $R^1\pi_*\mathcal{O}_X(K_X)$ が消滅するとは限らないことである. それでも森, Prokhorov [68, 69, 70] は $\pi^{-1}(s)$ が既約すなわち $\pi^{-1}(s) \simeq \mathbf{P}^1$ の場合に X 上の general elephant 予想を証明して近傍 $\pi^{-1}(s) \simeq \mathbf{P}^1 \subset X \rightarrow s \in S$ を分類した. 帰結として底曲面 S は A 型の Du Val 特異点しか持たないという Iskovskikh の予想を得た.

2次曲線束 $\pi: X \rightarrow S$ は伝統的には生成ファイバーを変えずに標準2次曲線束に取りかえて研究される [81]. すなわち π は滑らかな射影代数多様体間の相対次元1の平坦射で, $-K_X$ は相対的に豊富, 相対 Picard 数 $\rho(X/S) = 1$ である. π は S 上階数3の局所自由層 $\pi_*\mathcal{O}_X(-K_X)$ のつくる \mathbf{P}^2 束に埋め込まれ, 退化域が判別因子 $\Delta \subset S$ として定まる. X が有理的ならば S もそうなので, 有理性問題では S は有理的であると仮定する. この下で Shokurov [85] と Iskovskikh [38] は X の有理性を (S, Δ) で判定する予想を立て, X が有理的ならば線型系 $|2K_S + \Delta|$ は空であると予想した. これは S が射影平面または Hirzebruch 曲面のとき, つまり森ファイバー構造を持つときに証明されている [85].

判別因子は一般の2次曲線束 $\pi: X \rightarrow S$ に対しても定義できる. $2K_S + \Delta$ に擬有効でない K_S を加えて $4K_S + \Delta$ をつくる. Sarkisov [80, 81] は $4K_S + \Delta$ がなお擬有効ならば π は双有理超剛的であることを証明した.

8 Del Pezzo 曲面束

Del Pezzo 曲面束 $\pi: X \rightarrow B$ の生成ファイバー $X_\eta = X \times_B \eta$ は B の関数体上の del Pezzo 曲面であり, その次数 $d = K_{X_\eta}^2$ ($1 \leq d \leq 9$) が基本的な不変量となる. 標準2次曲線束のように, 生成ファイバー X_η を変えずに π をよい del Pezzo 曲面束で取りかえる問題を考える. X が3次元のときは曲線の代数的な芽 $b \in B$ の上で考えればよい. Corti [20] は $d \geq 3$ のとき, 全空間 X が

Gorenstein でファイバー $F = X \times_B b$ が整である del Pezzo 曲面束を X_η の標準モデルと呼び、その存在を証明した。 F の非常に豊富な因子 $-K_F$ による \mathbf{P}^d への埋め込みは延長されて、埋め込み $X \subset \mathbf{P}^d \times B$ を持つ。 なお $d = 2, 1$ のときは F が整ならば F はそれぞれ $\mathbf{P}(1, 1, 1, 2), \mathbf{P}(1, 1, 2, 3)$ へ埋め込まれるが、Abban, Fedorchuk, Krylov [1] は変数を一つ増やしてそれぞれ $\mathbf{P}(1, 1, 1, 2, 2) \times B, \mathbf{P}(1, 1, 2, 3, 3) \times B$ へ埋め込まれる X_η のモデル X/B の存在を証明した。

よいモデルの存在は X 上の general elephant 予想と関連しており、general elephant 予想については Hacking, Prokhorov [29, 75] により $F = X \times_B b$ が対数的末端特異点を持つ場合に示されている。一般にはファイバー F は重複度 m を持ち、素因子 P を用いて $F = mP$ と表される。森, Prokhorov [71] は特異点版 Riemann–Roch 公式を用いて重複度 m が 6 以下であることを示した。

Del Pezzo 曲面束 $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ の次数 d が 5 以上ならば X が有理的であることはよく知られている。 $d = 4$ のとき Alexeev [2] は π から標準 2 次曲線束へのリンクを構成して X の有理性を位相的 Euler 標数 $\chi(X)$ が $0, -4, -8$ のいずれかであることで特徴付けた。最終的な完成は Shramov [87] による。 d が 3 以下のときは双有理剛性が調べられ、Pukhlikov は K^2 条件を、Grinenko は K 条件を提唱した。

K^2 条件 K_X^2 は X の曲線が生成する錐 $\text{NE}(X) \subset N_1(X)$ の内部に属さない。

K 条件 $-K_X$ は X の可動因子が生成する錐 $\text{Mov}(X) \subset N^1(X)$ の内部に属さない。

K^2 条件から K 条件が従うことは簡単にわかる。以下では X は滑らかとする。Pukhlikov [76] は $d = 2$ のとき π が K^2 条件をみたせば双有理剛的、 $d = 1$ のとき K^2 条件をみたせば双有理超剛的であることを証明した。Grinenko [27, 28] は $d = 1$ のとき、 π が K 条件をみたすことと双有理超剛的であることは同値であることを証明した。

9 Fano 多様体

Fano 多様体 X は一般の 2 点が有理曲線で結ばれる有理連結多様体である。 X が滑らかなとき、Campana [11] と Kollár, 宮岡, 森 [54, 55, 56] は 2 点をいくつかの有理曲線の鎖で結び、それに有理曲線を付加して変形することで 1 本の有理曲線 C で結んだ。この曲線の $-K_X$ に関する次数 $(-K_X \cdot C)$ を抑えることによって、滑らかな Fano 多様体たちの族の有界性が得られる。

有界性を特異点付きの Fano 多様体に対して示したのが Birkar [7, 8] である。正の実数 ε を固定するとき、Fano 多様体のうちすべての上空の因子が対数的食違い係数 ε 以上を持つものは有界な族をなすという BAB 予想 (Borisov–Alexeev–Borisov) を証明した。ちなみに ε の仮定を外して単に対数的標準な Fano 多様体を集めると双有理な意味でも有界にはならない。Lin [61] が構成したとおり、次数 $2n + 3$ の判別因子 Δ_n を持つ標準 2 次曲線束 $X_n \rightarrow \mathbf{P}^2$ からの収縮写像 $X_n \rightarrow Y_n$ で得られる Fano 多様体 Y_n について、それらが双有理的に有界であれば $n \geq 5$ における X_n/\mathbf{P}^2 の双有理超剛性により Δ_n の算術種数 $p_a(\Delta_n) = (n + 1)(2n + 1)$ も上から抑えられるはずだからである。

滑らかな 3 次元 Fano 多様体 X は del Pezzo 曲面の 3 次元版として豊かな研究対象であり、特に Picard 数 1 のものは Iskovskikh [36, 37, 39] によって明示的に分類されている。向井 [72] によるベクトル束を用いた記述は双正則的である。Iskovskikh の分類の前提は Shokurov による general elephant 予想の解決 [83] と適切な下での直線の存在 [84] である。Fano 多様体に対する general

elephant 予想は最も大域的な主張であり, Gorenstein 性を外すと反例が出てくる. 反標準因子系 $|-K_X|$ が空になる例や, それが唯一の元 $S \in |-K_X|$ を持ち, S が楕円特異点を持ったり正規でなかったりする例が知られている [35, 79].

Corti, Pukhlikov, Reid [22] は Iskovskikh, Manin の結果を大幅に拡張して, 重み付き射影空間の一般の超平面 $X \subset \mathbf{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ として実現される 3 次元 Fano 多様体は双有理剛的であることを示した. Fano 多様体の双有理剛性と \mathbf{K} 安定性との関係は目下さかんに研究されている対象である. Fano 多様体の \mathbf{K} 多重安定性と **Kähler–Einstein** 計量を持つことは同値であるという Yau, Donaldson, Calabi の予想は近年 X. Chen, Donaldson, Sun [17] によって解決され, 特異点を持つ場合へと拡張されている [6, 60, 62]. Stibitz, Zhuang [88] によれば, 有理的な対数的標準閾に相当する α 不変量が $1/2$ 以上である双有理超剛的な Fano 多様体は \mathbf{K} 安定であり **Kähler–Einstein** 計量を持つ. Cheltsov [12] と Kim, 岡田, Won [52] により上の Fano 多様体 $X \subset \mathbf{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ の α 不変量は $1/2$ 以上であることが確かめられ, それが双有理超剛的ならば **Kähler–Einstein** 計量を持つ.

10 極小モデル

双有理同値な極小モデルたちは森ファイバー空間とは対照的に多くの性質を共有する. 二つの極小モデル X, X' の双有理射 $X \dashrightarrow X'$ は余次元 1 で同型であり, 川又 [51] はそれがフロップの有限列に分解されることを見た. Kollár [53] はさらに 3 次元フロップ $X \rightarrow Y \leftarrow X^+$ は解析的に対合 (involution) を用いて記述されることを観察した. 特に X と X^+ の解析的特異点集合は等しい. 例として前述の Atiyah のフロップを考える. $Y = (x_1x_2 + x_3x_4 = 0)$ 上で $\pi: X \rightarrow Y$ と $\pi^+: X^+ \rightarrow Y$ はそれぞれイデアル (x_2, x_4) と (x_1, x_3) に沿う爆発であった. このとき π^+ は x_1 と x_2 の交換 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_1, x_3, x_4)$ で定まる Y の対合 $\iota: Y \rightarrow Y$ による合成 $\iota \circ \pi: X \rightarrow Y$ である.

極小モデル X における重要な問題はネフ標準因子 K_X が半豊富であることを主張するアバンドランス予想である. ここで小平次元 $\kappa = \kappa(X)$ と数値的小平次元 $\nu = \nu(X)$ を導入する. 小平次元 κ は十分大きく割り切れる整数 l に対して線系 $|lK_X|$ が定める有理写像 $\varphi_l: X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(\mathcal{O}_X(lK_X))$ の像 $\varphi_l(X)$ の次元であり, 数値的小平次元 ν は K_X^ν が数値的に非自明であるような最大の整数である. アバンドランス予想は川又 [46], 中山 [73], Lai [59] らの仕事により次の二つの主張に帰着されている.

- $\kappa \geq 0$.
- $\nu \geq 1$ ならば $\kappa \geq 1$.

3 次元の場合は前者は宮岡 [64] により, 後者は $\nu = 1$ のとき宮岡 [63], $\nu = 2$ のとき川又 [49] により示されている. $\nu = 3$ から $\kappa = 3$ が従うことは一般論による.

アバンドランスは滑らかな極小モデル X に対して lK_X が自由になる正の整数 l の存在を主張するが, そのような l を上から抑えられるかどうかは興味深い問題である. κ が次元に等しいときは Hacon, McKernan [30] および高山 [89] により正しい. 3 次元に限れば $\kappa = 0, 1, 2$ のときそれぞれ川又 [47], 藤野, 森 [26], Viehweg, Zhang [93] により示されて有界性は完成している. 次の問

題は l を明示的に抑えることである. J. A. Chen, M. Chen [13, 14, 15, 16] は 3 次元極小モデル X において $\kappa = 3$ ならば $h^0(\mathcal{O}_X(12K_X)) \geq 1$, $h^0(\mathcal{O}_X(24K_X)) \geq 2$ であり, すべての $l \geq 57$ に対して lK_X の定める有理写像 φ_l が双有理的であることを特異点版 Riemann–Roch 公式を用いて証明した. 現在知られている最も悪い例は 46 次超曲面 $X_{46} \subset \mathbf{P}(4, 5, 6, 7, 23)$ であり, $l = 23$ ではじめて φ_l が双有理的になる.

参考文献

- [1] H. Abban, M. Fedorchuk and I. Krylov. Stability of fibrations over one-dimensional bases. *Duke Math. J.* **171** (2022), 2461–2518.
- [2] V. A. Alekseev. Rationality conditions for three-dimensional varieties with sheaf of del pezzo surfaces of degree 4. *Mat. Zametki* **41** (1987), 724–730; translation in *Math. Notes* **41** (1987), 408–411.
- [3] M. Artin and D. Mumford. Some elementary examples of unirational varieties which are not rational. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **25** (1972), 75–95.
- [4] M. F. Atiyah. On analytic surfaces with double points. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **247** (1958), 237–244.
- [5] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and P. Swinnerton-Dyer. Variétés stablement rationnelles non rationnelles. *Ann. of Math.* (2) **121** (1985), 283–318.
- [6] R. J. Berman, S. Boucksom and M. Jonsson. A variational approach to the Yau–Tian–Donaldson conjecture. *J. Amer. Math. Soc.* **34** (2021), 605–652.
- [7] C. Birkar. Anti-pluricanonical systems on Fano varieties. *Ann. of Math.* (2) **190** (2019), 345–463.
- [8] C. Birkar. Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties. *Ann. of Math.* (2) **193** (2021), 347–405.
- [9] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon and J. McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. *J. Amer. Math. Soc.* **23** (2010), 405–468.
- [10] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun and T. Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *J. Algebraic Geom.* **22** (2013), 201–248.
- [11] F. Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **25** (1992), 539–545.
- [12] I. A. Cheltsov. Extremal metrics on two Fano manifolds. *Mat. Sb.* **200** (2009), 97–136; translation in *Sb. Math.* **200** (2009), 95–132.
- [13] J. A. Chen and M. Chen. Explicit birational geometry of threefolds of general type, I. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **43** (2010), 365–394.
- [14] J. A. Chen and M. Chen. Explicit birational geometry of 3-folds of general type, II. *J. Differential Geom.* **86** (2010), 237–271.
- [15] J. A. Chen and M. Chen. Explicit birational geometry of 3-folds and 4-folds of general type, III. *Compos. Math.* **151** (2015), 1041–1082.
- [16] M. Chen. On minimal 3-folds of general type with maximal pluricanonical section index. *Asian J. Math.* **22** (2018), 257–268.
- [17] X. Chen, S. Donaldson and S. Sun. Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. *J. Amer. Math. Soc.* **28** (2015), 235–278.
- [18] C. H. Clemens and P. A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *Ann. of Math.* (2) **95** (1972), 281–356.
- [19] A. Corti. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov. *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), 223–254.
- [20] A. Corti. Del Pezzo surfaces over Dedekind schemes. *Ann. of Math.* (2) **144** (1996), 641–653.
- [21] A. Corti. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry. *Explicit birational geometry of 3-folds*, 259–312. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281**, Cambridge Univ. Press, 2000.

- [22] A. Corti, A. Pukhlikov and M. Reid. Fano 3-fold hypersurfaces. *Explicit birational geometry of 3-folds*, 175–258. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281**, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [23] T. Ducat. Divisorial extractions from singular curves in smooth 3-folds. *Internat. J. Math.* **27** (2016), 1650005, 23pp.
- [24] D. Eisenbud. Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **260** (1980), 35–64.
- [25] P. Francia. Some remarks on minimal models I. *Compos. Math.* **40** (1980), 301–313.
- [26] O. Fujino and S. Mori. A canonical bundle formula. *J. Differential Geom.* **56** (2000), 167–188.
- [27] M. M. Grinenko. Birational properties of pencils of del Pezzo surfaces of degrees 1 and 2. *Mat. Sb.* **191** (2000), 17–38; translation in *Sb. Math.* **191** (2000), 633–653.
- [28] M. M. Grinenko. On fibrations into del Pezzo surfaces. *Mat. Zametki* **69** (2001), 550–565; translation in *Math. Notes* **69** (2001), 499–513.
- [29] P. Hacking and Y. Prokhorov. Smoothable del Pezzo surfaces with quotient singularities. *Compos. Math.* **146** (2010), 169–192.
- [30] C. D. Hacon and J. McKernan. Boundedness of pluricanonical maps of varieties of general type. *Invent. Math.* **166** (2006), 1–25.
- [31] C. D. Hacon and J. McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type II. *J. Amer. Math. Soc.* **23** (2010), 469–490.
- [32] C. D. Hacon and J. McKernan. The Sarkisov program. *J. Algebraic Geom.* **22** (2013), 389–405.
- [33] T. Hayakawa. Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **35** (1999), 515–570.
- [34] T. Hayakawa. Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities, II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **36** (2000), 423–456.
- [35] A. R. Iano-Fletcher. Working with weighted complete intersections. *Explicit birational geometry of 3-folds*, 101–173. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281**, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [36] V. A. Iskovskih. Fano 3-folds. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **41** (1977), 516–562; translation in *Math. USSR-Izv.* **11** (1977), 485–527.
- [37] V. A. Iskovskih. Fano 3-folds. II. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **42** (1978), 506–549; translation in *Math. USSR-Izv.* **12** (1978), 469–506.
- [38] V. A. Iskovskih. On the rationality problem for conic bundles. *Duke Math. J.* **54** (1987), 271–294.
- [39] V. A. Iskovskih. Double projection from a line on Fano threefolds of the first kind. *Mat. Sb.* **180** (1989), 260–278; translation in *Math. USSR-Sb.* **66** (1990), 265–284.
- [40] V. A. Iskovskih and J. I. Manin. Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. *Mat. Sb.* **86(128)** (1971), 140–166; translation in *Math. USSR-Sb.* **15** (1971), 141–166.
- [41] D. B. Jaffe. Local geometry of smooth curves passing through rational double points. *Math. Ann.* **294** (1992), 645–660.
- [42] M. Kawakita. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points. *Invent. Math.* **145** (2001), 105–119.
- [43] M. Kawakita. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound A_1 points. *Compos. Math.* **133** (2002), 95–116.
- [44] M. Kawakita. General elephants of three-fold divisorial contractions. *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 331–362.
- [45] M. Kawakita. Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices. *Duke Math. J.* **130** (2005), 57–126.
- [46] Y. Kawamata. Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties. *Invent. Math.* **79** (1985), 567–588.
- [47] Y. Kawamata. On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K \equiv 0$. *Math. Ann.* **275** (1986), 539–546.

- [48] Y. Kawamata. Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces. *Ann. of Math. (2)* **127** (1988), 93–163.
- [49] Y. Kawamata. Abundance theorem for minimal threefolds. *Invent. Math.* **108** (1992), 229–246.
- [50] Y. Kawamata. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities. *Higher dimensional complex varieties*, 241–246. De Gruyter, 1996.
- [51] Y. Kawamata. Flops connect minimal models. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), 419–423.
- [52] I.-K. Kim, T. Okada and J. Won. K-stability of birationally superrigid Fano 3-fold weighted hypersurfaces. arXiv:2011.07512.
- [53] J. Kollár. Flops. *Nagoya Math. J.* **113** (1989), 15–36.
- [54] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori. Rational curves on Fano varieties. *Classification of irregular varieties*, 100–105. Lecture Notes in Math. **1515**, Springer, 1992.
- [55] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori. Rationally connected varieties. *J. Algebraic Geom.* **1** (1992), 429–448.
- [56] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. *J. Differential Geom.* **36** (1992), 765–779.
- [57] J. Kollár and S. Mori. Classification of three-dimensional flips. *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), 533–703; errata by S. Mori *ibid.* **20** (2007), 269–271.
- [58] J. Kollár and N. I. Shepherd-Barron. Threefolds and deformations of surface singularities. *Invent. Math.* **91** (1988), 299–338.
- [59] C.-J. Lai. Varieties fibered by good minimal models. *Math. Ann.* **350** (2011), 533–547.
- [60] C. Li. G -uniform stability and Kähler–Einstein metrics on Fano varieties. *Invent. Math.* **227** (2022), 661–744.
- [61] J. Lin. Birational unboundedness of \mathbf{Q} -Fano threefolds. *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2003** (2003), 301–312.
- [62] Y. Liu, C. Xu and Z. Zhuang. Finite generation for valuations computing stability thresholds and applications to K-stability. *Ann. of Math. (2)* **196** (2022), 507–566.
- [63] Y. Miyaoka. Abundance conjecture for 3-folds: case $\nu = 1$. *Compos. Math.* **68** (1988), 203–220.
- [64] Y. Miyaoka. On the Kodaira dimension of minimal threefolds. *Math. Ann.* **281** (1988), 325–332.
- [65] Y. Miyaoka and S. Mori. A numerical criterion for uniruledness. *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), 65–69.
- [66] S. Mori. On 3-dimensional terminal singularities. *Nagoya Math. J.* **98** (1985), 43–66.
- [67] S. Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 117–253.
- [68] S. Mori and Y. Prokhorov. On \mathbf{Q} -conic bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), 315–369.
- [69] S. Mori and Y. Prokhorov. On \mathbf{Q} -conic bundles, II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), 955–971.
- [70] S. Mori and Y. Prokhorov. On \mathbf{Q} -conic bundles, III. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), 787–810.
- [71] S. Mori and Y. G. Prokhorov. Multiple fibers of del Pezzo fibrations. *Tr. Mat. Inst. Steklova* **264** (2009), 137–151; reprinted in *Proc. Steklov Inst. Math.* **264** (2009), 131–145.
- [72] S. Mukai. Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **86** (1989), 3000–3002.
- [73] N. Nakayama. *Zariski-decomposition and abundance*. *MSJ Memoirs* **14**, Mathematical Society of Japan, 2004.
- [74] S. A. Papadakis and M. Reid. Kustin–Miller unprojection without complexes. *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), 563–577.
- [75] Y. Prokhorov. A note on degenerations of del Pezzo surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **65** (2015), 369–388.
- [76] A. V. Pukhlikov. Birational automorphisms of algebraic threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **62** (1998), 123–164; translation in *Izv. Math.* **62** (1998), 115–155.
- [77] M. Reid. Minimal models of canonical 3-folds. *Algebraic varieties and analytic varieties*, 131–180. Adv.

- Stud. Pure Math. **1**, North-Holland, 1983.
- [78] M. Reid. Young person's guide to canonical singularities. *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985*, 345–414. Proc. Sympos. Pure Math. **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., 1987.
- [79] T. Sano. Deforming elephants of \mathbf{Q} -Fano 3-folds. J. Lond. Math. Soc. (2) **95** (2017), 23–51.
- [80] V. G. Sarkisov. Birational automorphisms of conic bundles. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **44** (1980), 918–945; translation in Math. USSR-Izv. **17** (1981), 177–202.
- [81] V. G. Sarkisov. On conic bundle structures. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), 371–408; translation in Math. USSR-Izv. **20** (1983), 355–390.
- [82] V. G. Sarkisov. Birational maps of standard \mathbf{Q} -Fano fiberings. Kurchatov Institute of Atomic Energy preprint, 1989.
- [83] V. V. Šokurov. Smoothness of the general anticanonical divisor on a Fano 3-fold. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 430–441; translation in Math. USSR-Izv. **14** (1980), 395–405.
- [84] V. V. Šokurov. The existence of a straight line on Fano 3-folds. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), 922–964; translation in Math. USSR-Izv. **15** (1980), 173–209.
- [85] V. V. Shokurov. Prym varieties: theory and applications. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **47** (1983), 785–855; translation in Math. USSR-Izv. **23** (1984), 83–147.
- [86] V. V. Shokurov. The nonvanishing theorem. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **49** (1985), 635–651; translation in Math. USSR-Izv. **26** (1986), 591–604.
- [87] K. A. Shramov. On the rationality of non-singular threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces of degree 4. Mat. Sb. **197** (2006), 133–144; translation in Sb. Math. **197** (2006), 127–137.
- [88] C. Stibitz and Z. Zhuang. K-stability of birationally superrigid Fano varieties. Compos. Math. **155** (2019), 1845–1852.
- [89] S. Takayama. Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type. Invent. Math. **165** (2006), 551–587.
- [90] N. Tziolas. Terminal 3-fold divisorial contractions of a surface to a curve I. Compos. Math. **139** (2003), 239–261.
- [91] N. Tziolas. Families of D -minimal models and applications to 3-fold divisorial contractions. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **90** (2005), 345–370; corrigendum *ibid.* **93** (2006), 82–84.
- [92] N. Tziolas. Three-fold divisorial extremal neighborhoods over cE_7 and cE_6 compound DuVal singularities. Internat. J. Math. **21** (2010), 1–23.
- [93] E. Viehweg and D.-Q. Zhang. Effective Iitaka fibrations. J. Algebraic Geom. **18** (2009), 711–730.

Kummer surfaces and quadratic line complexes in characteristic 2¹

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 金銅 誠之²

1 はじめに

主題は標数 2 の代数閉体上の話であるが、この節では簡単のため断らない限り複素数体上で考える。Kummer 曲面の定義はアーベル曲面（あるいは 2 次元複素トーラス）の (-1) -倍写像による商曲面の非特異極小モデルとして定義される。が、歴史的には 19 世紀に \mathbf{P}^3 内の 16 個の node (A_1 型有理二重点) を持ち 16 個の trope (二重 2 次曲線) を含む 4 次曲面 (Kummer 4 次曲面) として発見された。1822 年に物理学者の A. J. Fresnel が特別な場合に、1864 年に E. Kummer が一般の場合に発見した。Kummer が与えた定義方程式は

$$[(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + a(xy + zt) + b(xz + yt) + c(xt + yz)]^2 + Kxyz = 0$$

である。この式において、例えば $x = 0$ とすると 2 次式の平方となっており、 $x = 0$ での切り口が trope である。その後、1870 年に F. Klein [9] が Kummer 4 次曲面と quadratic line complex との間の美しい関係を見出した。 \mathbf{P}^3 内の直線のなす Grassmann 多様体を $G = G(1, 3)$ とすると、Plücker 埋め込みで G は \mathbf{P}^5 の非特異 2 次超曲面となる。Quadratic line complex とは二つの 2 次超曲面の交叉 $G \cap Q$ (Q は別の 2 次超曲面) を指し、 \mathbf{P}^3 内の直線のなす 3 次元族に他ならない。ただし $G \cap Q$ は非特異であると仮定する。Quadratic line complex $G \cap Q$ から自然に Kummer 4 次曲面 $S \subset \mathbf{P}^3$ とその双対 Kummer 4 次曲面 $S^\vee \subset (\mathbf{P}^3)^\vee$ およびそれらの非特異極小モデルである $K3$ 曲面 $\Sigma \subset \mathbf{P}^5$ 、種数 2 の曲線 C やそのヤコビ多様体であるアーベル曲面 $J(C)$ が得られ、 $J(C)/\langle \iota \rangle \cong S \cong S^\vee$ が成り立つ。ここで ι は (-1) -倍写像である。

以上の話は標数が 2 でなければそのまま成り立つ。ここでは標数 2 の場合に類似が成り立つか、を問題とする。標数 2 の場合の問題点は二つある。一つは 2 次超曲面を扱うので標数 2 の 2 次形式の特殊性に注意する必要がある。もう一つは種数 2 の曲線やアーベル曲面の様子が随分と異なる。表 1 にその主な違いを列挙しておく。

| | char p | $p \neq 2$ | $p = 2$ | $p = 2$ | $p = 2$ |
|--------------------------------------|----------|--------------|---------|----------------------|---------|
| $J(C)$ の 2 階数 | -- | 2 (ordinary) | 1 | 0 (supersingular) | |
| $C \rightarrow \mathbf{P}^1$ の分岐点の個数 | 6 | 3 | 2 | 1 | |
| $J(C)$ の 2 分点の個数 | 16 | 4 | 2 | 1 | |
| $J(C)/\langle \iota \rangle$ の特異点 | $16A_1$ | $4D_4$ | $2D_8$ | $\mathbb{Q}_{0,1}^1$ | |

表 1: 種数 2 の曲線とヤコビアン

表において、 C は種数 2 の曲線、 $J(C)$ はそのヤコビアンである。 $J(C)$ の 2 倍写像の核の被約部分の階数を 2 階数と呼ぶ。 C は超楕円曲線なので \mathbf{P}^1 の二重被覆として表せる。また ι は $J(C)$ の inversion ((-1) -倍写像に相当) である。特異点の項で、例えば $2D_8$ は D_8 型有理二重点を二つ持つという意味であり、最後の $\mathbb{Q}_{0,1}^1$ は Wagreich [17]

¹桂利行氏との共同研究である。

²JSPS 科研費基盤 (A) No. 20H00112 の援助を受けている。

の意味での楕円型特異点を指す。種数 2 の曲線 C は $J(C)$ の 2 階数で 3 種類に分けられるが、2 階数が 2 のものを ordinary, 0 のものを supersingular と呼ぶ。種数 2 の曲線に関しては井草 [6] が詳しい。標数 2 の場合の特異点の違いを見出したのは塩田 [16], 桂 [7] である。

このような状況ではあるが、標数 2 の場合にも Kummer 4 次曲面と quadratic line complex の関係の類似は存在する。なぜ上のような違いが起こるかを簡単に説明しておく。

標数が 2 でなければ、 $G \cap Q$ が非特異であるという仮定の下で、 G と Q は同時対角化できる：

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^6 X_i^2 = 0 \right\}, \quad Q = \left\{ \sum_{i=1}^6 a_i X_i^2 = 0 \right\}.$$

ここで (X_1, \dots, X_6) は \mathbf{P}^5 の斉次座標, $a_1, \dots, a_6 \in \mathbf{C}, a_i \neq a_j (i \neq j)$ である。このとき種数 2 の曲線は

$$y^2 = \prod_{i=1}^6 (x - a_i)$$

で与えられる。標数が 2 でないときは、2 次形式は付随した対称行列で決まる。一方、標数 2 では、2 次形式は付随した交代行列では決まらない。この違いが、標数 2 では $G \cap Q$ が非特異でも同時対角化できない場合を許し、種数 2 の曲線に 3 つの種類が起こる理由となる（詳しくは節 4 を見よ）。

Kummer 曲面と quadratic line complex の関係に関してはベクトル束のモジュライの観点から Narasimhan-Ramanan [14] が再構築している。標数 2 では Bhosle [1] が \mathbf{P}^{2g+1} 内の二つの 2 次超曲面の交叉を研究し、交叉上の $(g-1)$ 次元部分空間のなす多様体が種数 g の超楕円曲線のヤコビアンに同型であることを示している（ただし、 $g=2$ の場合の ordinary に相当する場合に限っている）。標数 2 の Kummer 4 次曲面の定義方程式は ordinary の場合に Laszlo-Pauly [11], [12] が、一般の場合に Duquesne [4] が与えている。Kummer 曲面の歴史については Dolgachev [3] に詳しい。Kummer 曲面と Quadratic line complex に関しては、Griffiths-Harris [5], Cassels-Flynn [2] が教科書として挙げられる。

2 種数 2 の曲線の井草の標準形：標数 2 の場合

標数 2 の曲線とそのヤコビアンの特徴については表 1 にまとめておいた。ここでは種数 2 の曲線の井草の標準形を紹介しておく：

$$y^2 + y = \begin{cases} \alpha x + \beta x^{-1} + \gamma(x-1)^{-1} & (J(C) \text{ は } \textit{ordinary}), \\ x^3 + \alpha x + \beta x^{-1} & (J(C) \text{ の } 2 \text{ 階数が } 1), \\ x^5 + \alpha x^3 & (J(C) \text{ は超特異}). \end{cases}$$

ここで定数 α, β, γ は ordinary の場合には全て 0 ではなく、2 階数が 1 の場合には β は 0 でない。

3 Quadratic line complex

この節では古典的な quadratic line complex と Kummer 曲面の話を紹介する。標数は断らない限り任意標数とする。前のように $G = G(1, 3) \subset \mathbf{P}^5$ はグラスマン多様体とする。まず Schubert cycle を導入する。点 $p \in \mathbf{P}^3$ および平面 $h \subset \mathbf{P}^3$ に対して

$$\sigma(p) = \{\ell \in G : p \in \ell\}, \quad \sigma(h) = \{\ell \in G : \ell \subset h\}, \quad \sigma(p, h) = \{\ell \in G : p \in \ell \subset h\}$$

と定めると、 $\sigma(p), \sigma(h)$ は \mathbf{P}^5 の平面で、 $\sigma(p, h)$ は直線である。逆に G に含まれる \mathbf{P}^5 の平面と直線はこの形をしている。

今, Q を \mathbf{P}^5 内の 2 次超曲面とし, 交叉 $X = G \cap Q$ は非特異であると仮定する. この仮定から, X に含まれる平面は存在しないことが示せる. よって $\sigma(p) \cap X = \sigma(p) \cap Q$ は平面 $\sigma(p)$ 内の 2 次曲線である. そこで

$$S = \{p \in \mathbf{P}^3 : \sigma(p) \cap Q \text{ は特異 2 次曲線}\}, \quad R = \{p \in S : \sigma(p) \cap Q \text{ は二重直線}\}$$

と定める. これらの双対

$$S^\vee = \{h \in (\mathbf{P}^3)^\vee : \sigma(h) \cap Q \text{ は特異 2 次曲線}\}, \quad R^\vee = \{h \in S^\vee : \sigma(h) \cap Q \text{ は二重直線}\}.$$

も定まる. S が Kummer 4 次曲面, S^\vee がその双対である. S と S^\vee は射影同値であることも知られている.

次に S, S^\vee のブローアップとなっている曲面を定義する. $x \in X$ に対し l_x を対応する \mathbf{P}^3 内の直線とする. 直線 l_x が特異であるとは, ある点 $p \in \mathbf{P}^3$ が存在して, x が 2 次曲線 $\sigma(p) \cap Q$ の特異点であるときをいう. この点 p は x に対して一意的に定まり, l_x の焦点と呼ばれる. この双対版も定義できる. そこで

$$\Sigma = \{x \in X : l_x \text{ は特異}\}$$

と定義すると, 次が成り立つ.

命題 3.1. (Griffiths and Harris [5, p.767], Cassels and Flynn [2, Lemma 17.2.1]) $x \in X$ に対し,

$$x \in \Sigma \iff Q \text{ の } x \text{ での接空間 } T_x(Q) \text{ は } G \text{ にある点で接している.}$$

x に対して l_x の焦点 p を対応させる写像

$$\pi : \Sigma \rightarrow S, \quad \pi^\vee : \Sigma \rightarrow S^\vee$$

が定まる. 2 次曲線 $\sigma(p) \cap Q$ が二重直線の場合, 二重直線上の任意の点 x に対し l_x は特異であり, この二重直線が π によって 1 点 $p \in R$ に写される. これから π は Kummer 曲面の R でのブローアップを与えていることが分かる.

\mathbf{P}^5 内の非特異な 2 次超曲面 Q に含まれる平面全体は 2 組の 3 次元既約族から成る (標数 2 でも類似が成り立つ). $Q = G$ の場合には $\{\sigma(p)\}_{p \in \mathbf{P}^3}, \{\sigma(h)\}_{h \in (\mathbf{P}^3)^\vee}$ がそれらである. 2 次超曲面からなる束

$$\{t_0G + t_1Q\}_{(t_0:t_1) \in \mathbf{P}^1}$$

を考えよう. 上に述べたことから, 二重被覆

$$p : C \rightarrow \mathbf{P}^1$$

が定まる. $p^{-1}((t_0, t_1)) ((t_0, t_1) \in \mathbf{P}^1)$ は束のメンバー $t_0G + t_1Q$ に含まれる平面の既約族に対応している. p の分岐は束のメンバー $t_0G + t_1Q$ が含む既約な平面の族がただ一つ, すなわち 2 次超曲面が特異点を持つ場合である.

標数が $p \neq 2$ とすると, 「はじめに」で述べたように G と Q は同時対角化でき, 命題 3.1 を用いれば,

$$\Sigma = \left\{ \sum_{i=1}^6 X_i^2 = \sum_{i=1}^6 a_i X_i^2 = \sum_{i=1}^6 a_i^2 X_i^2 = 0 \right\}$$

であることが容易に分かり, C も「はじめに」において与えたものであることが確かめられる. この場合, Σ は非特異であり, 従って $K3$ 曲面であり, $\pi : \Sigma \rightarrow S, \pi^\vee : \Sigma \rightarrow S^\vee$ は非特異極小モデルを与える射である. Σ は 32 本の直線を含んでいる³. S の 16 個の nodes 上の 16 個の例外曲線および S 上の 16 個の tropes の固有変換である. 後者から成る 16 個の直線をブローダウンすることで, S^\vee が得られる.

³32 本の直線の交わり関係は (16₆)-configuration と呼ばれる.

さて $A \subset G(1,5)$ を X 上の直線全体のなす多様体とする. このとき $A \cong J(C)$ であることが知られている (Griffiths and Harris [5, Chap. 6, §3], Cassels and Flynn [2, Theorem 17.0.1]). 一方, 各直線 $L \in A$ に対し, \mathbf{P}^3 内の点 p_L と平面 h_L が存在して $L = \sigma(p_L, h_L)$ を表せる. よって写像

$$\varphi : A \rightarrow S, \quad \varphi^\vee : A \rightarrow S^\vee, \quad \varphi(L) = p_L, \quad \varphi^\vee(L) = h_L$$

が定まる. このとき 2 次曲線 $\sigma(p_L) \cap Q$ は 2 本の直線に分解している, すなわち

$$\sigma(p_L) \cap Q = \sigma(p_L, h_L) + \sigma(p_L, h') \quad (h' \text{ は } p_L \text{ を含む平面})$$

となっており, φ により 2 直線 $\sigma(p_L, h_L), \sigma(p_L, h')$ は p_L に写され, 従って φ, φ^\vee は二重被覆である. $\sigma(p_L, h_L) = \sigma(p_L, h')$ の場合, φ は $p_L \in R$ で分岐している. 以上から φ, φ^\vee はそれぞれ R, R^\vee で分岐する二重被覆である. 実は φ, φ^\vee は写像 $J(C) \rightarrow J(C)/\langle i \rangle$ に他ならないことも知られている.

4 Pencils of quadratic forms (標数 2 の場合)

Q_1, Q_2 を \mathbf{P}^5 の二次超曲面およびそれらの定義方程式 (2 次形式) を表すこととする. Q_1, Q_2 に付随した交代形式をそれぞれ A_1, A_2 とし, 対応する交代行列も A_1, A_2 で表す. ここで A_1 は正則と仮定し, $A_1^{-1}A_2$ の特性多項式を

$$\prod_i (t - a_i)^{2m_i}, \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j)$$

とする. Klingenberg [10] により A_1, A_2 は以下の標準形に変形できる⁴: $A_i = \begin{pmatrix} 0 & A'_i \\ {}^t A'_i & 0 \end{pmatrix}$ とするとき,

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a) \quad A'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad A'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ または } (c) \quad A'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

この結果を使うことで, 例えば最初の (a) の場合,

$$Q_1 : \sum_{i=1}^3 (X_i Y_i + p_i X_i^2 + t_i Y_i^2) = 0, \quad Q_2 : \sum_{i=1}^3 (a_i X_i Y_i + r_i X_i^2 + s_i Y_i^2) = 0 \quad (1)$$

とできる. ただし $(X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3)$ は \mathbf{P}^5 の斉次座標である. ここで $X_i Y_i$ を保つ変数変換を施すことで,

$$Q_1 : \sum_{i=1}^3 X_i Y_i = 0, \quad Q_2 : \sum_{i=1}^3 (a_i X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2) = 0$$

とできる. このようにして以下の 2 次形式の標準形を得る.

命題 4.1. Q_1 に付随した交代形式は正則であるとする. このとき Q_1, Q_2 は変数変換で次のいずれかに変形できる.

$$(a) : \begin{cases} Q_1 : \sum_{i=1}^3 X_i Y_i = 0, \\ Q_2 : \sum_{i=1}^3 a_i X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$(b) : \begin{cases} Q_1 : \sum_{i=1}^3 X_i Y_i = 0, \\ Q_2 : \sum_{i=1}^3 (a_i X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2) + b_1 X_2 Y_3 + b_2 X_3 Y_2 + b_3 X_2 X_3 + b_4 Y_2 Y_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

⁴[10] では標数は 2 以外と仮定しているが, Bhosle [1] も指摘しているように, [10] の証明は標数 2 でも成り立つ.

ここで $a_2 = a_3$, $b_1 b_2 = b_3 b_4$, $(b_1, b_2, b_3, b_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ である.

$$(c) : \begin{cases} Q_1 : \sum_{i=1}^3 X_i Y_i = 0, \\ Q_2 : \sum_{i=1}^3 (a X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2) + C = 0 \end{cases} \quad (4)$$

ここで

$$C = b_1 X_2 Y_3 + b_2 X_3 Y_2 + b_3 X_2 X_3 + b_4 Y_2 Y_3 + b_5 X_1 Y_2 + b_6 X_2 Y_1 + b_7 X_1 X_2 + b_8 Y_1 Y_2$$

であり, $b_1 b_2 = b_3 b_4$, $b_5 b_6 = b_7 b_8$, $(b_1, b_2, b_3, b_4) \neq (0, 0, 0, 0)$, $(b_5, b_6, b_7, b_8) \neq (0, 0, 0, 0)$ である.

注意 4.1. (b), (c) の場合, Klingenberg の結果によつて 2 次形式は式 (1) の Q_2 にそれぞれ $X_3 Y_2$, $X_2 Y_1 + X_3 Y_2$ を加えた形である. Q_1 の $p_i X_i^2 + t_i Y_i^2$ を消す変換を施したため Q_2 はやや複雑な式 (3), (4) に変換される.

5 Kummer 4 次曲面と quadratic line complexes: ordinary case

命題 4.1 で得た標数 2 の場合の二つの 2 次超曲面の標準形を出発点として, Kummer 4 次曲面 S とそのブローアップである Σ や種数 2 の曲線 C を求める. 区別のため Case (a) の場合はこれらをそのまま S, Σ, C と表し, (b) の場合は S_1, Σ_1, C_1 と, (c) の場合は S_0, Σ_0, C_0 と表す. どの場合も同様の結果が得られるが, ここでは概観が分かるように最も簡単な (a) の場合を述べ, 次節に (b), (c) の場合の方程式を述べることにする.

補題 5.1. X, X_1, X_0 をそれぞれ (a), (b), (c) の場合の $Q_1 \cap Q_2$ を表す. このとき次が成り立つ.

$$(a) X \text{ が非特異} \iff \prod_i c_i d_i \neq 0.$$

$$(b) X_1 \text{ が非特異} \iff c_1 d_1 \neq 0 \text{ 且つ } b_2 b_4 c_2 + b_1 b_4 c_3 + b_1 b_3 d_2 + b_2 b_3 d_3 \neq 0.$$

$$(c) X_0 \text{ が非特異} \iff c_1(b_1 b_8 + b_4 b_6)(b_2 b_6 + b_3 b_8) + c_3(b_1 b_5 + b_4 b_7)(b_1 b_8 + b_4 b_6) + d_1(b_1 b_5 + b_4 b_7)(b_2 b_7 + b_3 b_5) + d_3(b_2 b_6 + b_3 b_8)(b_2 b_7 + b_3 b_5) \neq 0.$$

以下, X, X_1, X_0 は非特異と仮定する. まず Kummer 4 次曲面の方程式であるが, 2 次曲線 $\sigma(p) \cap Q_2$ が特異点を持つ条件を計算することで得られる.

定理 5.1. (Ordinary の場合) (1) Kummer 4 次曲面 S は次で与えられる:

$$(a_1 + a_2)^2 (c_3 x^2 y^2 + d_3 z^2 t^2) + (a_1 + a_3)^2 (c_2 x^2 z^2 + d_2 y^2 t^2) + (a_2 + a_3)^2 (c_1 x^2 t^2 + d_1 y^2 z^2) + (a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1) x y z t = 0.$$

(2) S は次の 4 点

$$P_1 = (1, 0, 0, 0), \quad P_2 = (0, 1, 0, 0), \quad P_3 = (0, 0, 1, 0), \quad P_4 = (0, 0, 0, 1)$$

で D_4 型有理二重点を持ち, 次の 4 個の trope を含んでいる:

$$\bar{\Theta}_1 : x = (a_1 + a_2) \sqrt{d_3 z t} + (a_1 + a_3) \sqrt{d_2 y t} + (a_2 + a_3) \sqrt{d_1 y z} = 0, \quad \bar{\Theta}_2 : y = (a_1 + a_2) \sqrt{d_3 z t} + (a_1 + a_3) \sqrt{c_2 x z} + (a_2 + a_3) \sqrt{c_1 x t} = 0,$$

$$\bar{\Theta}_3 : z = (a_1 + a_2) \sqrt{c_3 x y} + (a_1 + a_3) \sqrt{d_2 y t} + (a_2 + a_3) \sqrt{c_1 x t} = 0, \quad \bar{\Theta}_4 : t = (a_1 + a_2) \sqrt{c_3 x y} + (a_1 + a_3) \sqrt{c_2 x z} + (a_2 + a_3) \sqrt{d_1 y z} = 0.$$

各 trope $\bar{\Theta}_i$ は 4 個の特異点の内 3 点 P_j ($j \neq i$) を通る.

次に Σ であるが, これも命題 3.1 を用いることで計算できる.

定理 5.2. (Ordinary の場合) (1) 曲面 Σ は次で与えられる :

$$\Sigma = \left\{ \sum_{i=1}^3 X_i Y_i = \sum_{i=1}^3 a_i X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 X_i Y_i = 0 \right\}.$$

(2) Σ は次の 8 本の直線を含んでいる : $\tilde{\Theta}_1 : X_1 = X_2 = X_3 = \sum_i \sqrt{d_i} Y_i = 0$, $E_1 : Y_1 = Y_2 = Y_3 = \sum_i \sqrt{c_i} X_i = 0$,

$$\tilde{\Theta}_2 : Y_1 = Y_2 = X_3 = \sqrt{c_1} X_1 + \sqrt{c_2} X_2 + \sqrt{d_3} Y_3 = 0, \quad E_2 : X_1 = X_2 = Y_3 = \sqrt{d_1} Y_1 + \sqrt{d_2} Y_2 + \sqrt{c_3} X_3 = 0,$$

$$\tilde{\Theta}_3 : Y_1 = X_2 = Y_3 = \sqrt{c_1} X_1 + \sqrt{d_2} Y_2 + \sqrt{c_3} X_3 = 0, \quad E_3 : X_1 = Y_2 = X_3 = \sqrt{d_1} Y_1 + \sqrt{c_2} X_2 + \sqrt{d_3} Y_3 = 0,$$

$$\tilde{\Theta}_4 : X_1 = Y_2 = Y_3 = \sqrt{d_1} Y_1 + \sqrt{c_2} X_2 + \sqrt{c_3} X_3 = 0, \quad E_4 : Y_1 = X_2 = X_3 = \sqrt{c_1} X_1 + \sqrt{d_2} Y_2 + \sqrt{d_3} Y_3 = 0.$$

これら 8 本の直線の交わりは図 1 の通りである.

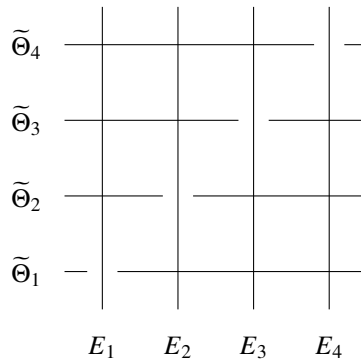


図 1: Σ 上の 8 本の直線

(3) Σ は $\tilde{\Theta}_i$ と E_j の 12 個の交点で A_1 型有理二重点を持つ. 特に Σ の非特異極小モデル $\tilde{\Sigma}$ は $K3$ 曲面である. $\tilde{\Sigma}$ 上の 20 個の非特異有理曲線のなす双対図形は図 2 の通りである. ただし図では, $\tilde{\Theta}_i, E_j$ の固有変換も同じ記号で表し, 無印の頂点は特異点解消の例外曲線を表す.

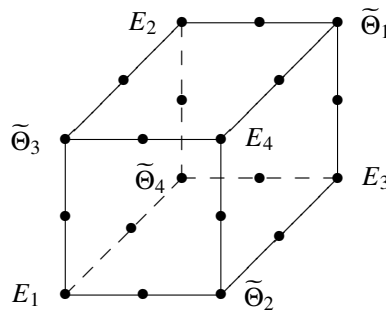


図 2: $\tilde{\Sigma}$ 上の 20 本の非特異有理曲線の双対図形

注意 5.1. 図 2 において, E_1, E_2, E_3, E_4 を中心とする 4 個の D_4 型 Dynkin 図形および $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2, \tilde{\Theta}_3, \tilde{\Theta}_4$ を中心とする 4 個の D_4 型 Dynkin 図形が存在する. 最初の 4 個の D_4 型 Dynkin 図形に対応した 16 個の非特異有理曲線をブローダウンすると 4 個の D_4 型有理二重点を持つ曲面が得られるが, これが S に他ならない. 後者の 4 個の D_4 型 Dynkin 図形に対応した 16 個の非特異有理曲線をブローダウンすると双対 S^\vee が得られる.

注意 5.2. Peters–Stienstra [15] は複素数体上で図 2 の 20 個の非特異有理曲線を含む 1 次元族を構成している. また向井–大橋 [13] は複素数体上のある Enriques 曲面の構成に定理 5.1 の 4 次曲面を用いている.

最後に種数 2 の曲線も定義に従って計算することで得られる。

定理 5.3. (Ordinary の場合) Quadratic line complex \mathcal{X} に付随した種数 2 の曲線は次で与えられる：

$$z^2 + (t + a_1)(t + a_2)(t + a_3)z = c_1d_1(t + a_2)^2(t + a_3)^2 + c_2d_2(t + a_1)^2(t + a_3)^2 + c_3d_3(t + a_1)^2(t + a_2)^2.$$

また C の井草の標準モデルは

$$y^2 + y = \frac{\sqrt{c_1d_1}(a_2 + a_3)}{(a_1 + a_2)(a_1 + a_3)}x + \frac{\sqrt{c_2d_2}(a_1 + a_3)}{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)x} + \frac{\sqrt{c_3d_3}(a_1 + a_2)}{(a_1 + a_3)(a_2 + a_3)(x + 1)}$$

である。

注意 5.3. 井草の標準モデルが非特異であるのは $\prod_i c_i d_i \neq 0$ であった (節 2)。これは \mathcal{X} が非特異である条件 Lemma 5.1 (a) に一致している。また任意の ordinary な種数 2 の曲線は quadratic line complex に付随したものとして得られることも明らかであろう。

注意 5.4. Kummer 4 次曲面 S は $J(C)/\langle t \rangle$ に同型であるが、標数が 2 以外では線形系 $|2\Theta|$ による像でもあり、さらに $\Sigma \subset \mathbf{P}^5$ は線形系 $|4\Theta - \sum p_i|$ (p_i は 2 分点) による像であることも知られている (例えば Griffiths-Harria [5])。ここで Θ は $J(C)$ 上のテータ因子である。標数 2 でも Kummer 4 次曲面 S は $|2\Theta|$ による像である (Laszlo-Pauly [11], Duquesne [4])。また ordinary の場合だけではあるが、 Σ は線形系 $|4\Theta - \sum 2p_i|$ による像であることも示すことができる ([8])。

6 付録：2 階数 1 および超特異の場合

前節では ordinary の場合を説明した。ここでは残りの場合の S, Σ, C の定義方程式を列挙しておく。計算は大変になるが、方法は ordinary の場合と全く同様である。詳細は [8] 参照。

6.1 2 階数 1 の場合

(1) Kummer 4 次曲面 S_1 は次で与えられる：

$$\begin{aligned} & b_3^2c_1x^4 + b_2^2d_1y^4 + b_1^2d_1z^4 + b_4^2c_1t^4 + (b_3^2d_2 + b_2^2c_2 + (a_1 + a_2)^2c_3 + (a_1 + a_2)b_2b_3)x^2y^2 \\ & + (b_3^2d_3 + b_1^2c_3 + (a_1 + a_2)^2c_2 + (a_1 + a_2)b_1b_3)x^2z^2 + (b_2^2d_3 + b_4^2c_3 + (a_1 + a_2)^2d_2 + (a_1 + a_2)b_2b_4)y^2t^2 \\ & + (b_1^2d_2 + b_4^2c_2 + (a_1 + a_2)^2d_3 + (a_1 + a_2)b_1b_4)z^2t^2 + (a_1 + a_2)^2(b_3x^2yz + b_2xy^2t + b_1xz^2t + b_4yzt^2) = 0. \end{aligned}$$

(2) 曲面 Σ_1 は次で与えられる：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 X_i Y_i &= \sum_{i=1}^3 (a_i X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2) + b_1 X_2 Y_3 + b_2 X_3 Y_2 + b_3 X_2 X_3 + b_4 Y_2 Y_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i^2 X_i Y_i + b_1 b_3 X_2^2 + b_2 b_3 X_3^2 + b_2 b_4 Y_2^2 + b_1 b_4 Y_3^2 = 0. \end{aligned}$$

ここで $a_2 = a_3, b_1 b_2 = b_3 b_4$ である。

(3) 種数 2 の曲線 C_1 は次で与えられる：

$$v^2 + (t + a_1)(t + a_2)^2 v = (t + a_2)^4 c_1 d_1 + (t + a_1)^2 (t + a_2)^2 \left(b_1 b_2 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + b_1 \sqrt{c_3 d_2} + b_2 \sqrt{c_2 d_3} + b_3 \sqrt{d_2 d_3} + b_4 \sqrt{c_2 c_3} \right)$$

$$+(t+a_1)^2(t+a_2)\{b_3(b_1d_2+b_2d_3)+b_4(b_2c_2+b_1c_3)\},$$

また C_1 の井草の標準形は次で与えられる：

$$y^2 + y = x^3 + \alpha x + \beta x^{-1}.$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt[6]{b_4(b_2c_2+b_1c_3)+b_3(b_1d_2+b_2d_3)}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{\sqrt[3]{\{b_4(b_2c_2+b_1c_3)+b_3(b_1d_2+b_2d_3)\}^2}}{a_1^2+a_2^2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{c_2d_2+c_3d_3+b_1b_2+b_4\sqrt{c_2c_3}+b_2\sqrt{c_2d_3}+b_1\sqrt{c_3d_2}+b_3\sqrt{d_2d_3}}}{\sqrt[3]{b_4(b_2c_2+b_1c_3)+b_3(b_1d_2+b_2d_3)}}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{c_1d_1}\sqrt[3]{b_4(b_2c_2+b_1c_3)+b_3(b_1d_2+b_2d_3)}}{a_1^2+a_2^2} \end{aligned}$$

である。節 2 で述べたように井草の標準形においては $\beta \neq 0$ であつた。すなわち

$$c_1d_1 \neq 0, \text{ 且つ } b_4(b_2c_2+b_1c_3)+b_3(b_1d_2+b_2d_3) \neq 0$$

であるが、これは X_1 が非特異である条件と一致している (Lemma 5.1(b)).

6.2 超特異の場合

(1) Kummer 4 次曲面 S_0 は次で与えられる：

$$\begin{aligned} &(b_3^2c_1+b_7^2c_3)x^4 + (b_2^2d_1+b_8^2c_3)y^4 + (b_1^2d_1+b_6^2d_3)z^4 + (b_4^2c_1+b_5^2d_3)t^4 \\ &+ b_5(b_1b_5+b_4b_7)xt^3 + b_7(b_2b_7+b_3b_5)x^3t + b_2(b_2b_6+b_3b_8)xy^3 + b_8(b_2b_6+b_3b_8)y^3z \\ &+ b_3(b_2b_7+b_3b_5)x^3y + b_4(b_1b_5+b_4b_7)zt^3 + b_6(b_1b_8+b_4b_6)yz^3 + b_1(b_1b_8+b_4b_6)z^3t \\ &+ (b_2^2c_2+b_3^2d_2)x^2y^2 + (b_1^2c_3+b_3^2d_3+b_6^2c_1+b_7^2d_1)x^2z^2 + (b_5^2c_2+b_7^2d_2)x^2t^2 \\ &+ (b_6^2d_2+b_8^2c_2)y^2z^2 + (b_2^2d_3+b_4^2c_3+b_5^2d_1+b_8^2c_1)y^2t^2 + (b_1^2d_2+b_4^2c_2)z^2t^2 \\ &+ b_7(b_2b_6+b_3b_8)x^2yz + b_3(b_1b_5+b_4b_7)x^2zt + b_8(b_2b_7+b_3b_5)xy^2t + b_2(b_1b_8+b_4b_6)y^2zt \\ &+ b_1(b_2b_6+b_3b_8)xyz^2 + b_6(b_1b_5+b_4b_7)xz^2t + b_4(b_2b_7+b_3b_5)xyt^2 + b_5(b_1b_8+b_4b_6)yzt^2 = 0. \end{aligned}$$

ここで $b_1b_2 = b_3b_4, b_5b_6 = b_7b_8$ である。

(2) 曲面 Σ_0 は次で与えられる：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 X_i Y_i &= \sum_{i=1}^3 (a X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2) + b_1 X_2 Y_3 + b_2 X_3 Y_2 + b_3 X_2 X_3 + b_4 Y_2 Y_3 + b_5 X_1 Y_2 + b_6 X_2 Y_1 + b_7 X_1 X_2 + b_8 Y_1 Y_2 \\ &= a^2 \sum_{i=1}^3 X_i Y_i + b_5 b_7 X_1^2 + (b_1 b_3 + b_6 b_7) X_2^2 + b_2 b_3 X_3^2 + b_6 b_8 Y_1^2 + (b_2 b_4 + b_5 b_8) Y_2^2 + b_1 b_4 Y_3^2 \\ &\quad + (b_1 b_5 + b_4 b_7) X_1 Y_3 + (b_2 b_6 + b_3 b_8) X_3 Y_1 + (b_2 b_7 + b_3 b_5) X_1 X_3 + (b_4 b_6 + b_1 b_8) Y_1 Y_3 = 0. \end{aligned}$$

ここで $b_1b_2 = b_3b_4, b_5b_6 = b_7b_8$ である。

(3) 種数 2 の曲線 C_0 は次で与えられる：

$$z^2 + (t+a)^3 z = (t+a)^4 (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + b_1 b_2 + b_5 b_6)$$

$$\begin{aligned}
& +(t+a)^3 [b_6b_8c_1 + (b_5b_8 + b_2b_4)c_2 + b_1b_4c_3 + b_5b_7d_1 + (b_1b_3 + b_6b_7)d_2 + b_2b_3d_3] \\
& +(t+a)^2 (b_8^2c_1c_2 + b_6^2c_1d_2 + b_5^2c_2d_1 + b_7^2d_1d_2 + b_4^2c_2c_3 + b_2^2c_2d_3 + b_1^2c_3d_2 + b_3^2d_2d_3 + b_1b_3b_5b_8 + b_2b_4b_6b_7) \\
& +(t+a) [(b_1b_3b_8^2 + b_2b_4b_6^2)c_1 + (b_1b_3b_5^2 + b_2b_4b_7^2)d_1 + (b_5b_8b_1^2 + b_6b_7b_4^2)c_3 + (b_5b_8b_3^2 + b_6b_7b_2^2)d_3] \\
& +(b_1^2b_8^2 + b_4^2b_6^2)c_1c_3 + (b_3^2b_8^2 + b_2^2b_6^2)c_1d_3 + (b_1^2b_5^2 + b_4^2b_7^2)c_3d_1 + (b_3^2b_5^2 + b_2^2b_7^2)d_1d_3.
\end{aligned}$$

また C_0 の井草の標準形は次で与えられる :

$$y^2 + y = x^5 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x^3.$$

ここで

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= b_6b_8c_1 + (b_5b_8 + b_2b_4)c_2 + b_1b_4c_3 + b_5b_7d_1 + (b_1b_3 + b_6b_7)d_2 + b_2b_3d_3 \\
&+ (b_1b_8 + b_4b_6)\sqrt{c_1c_3} + (b_3b_8 + b_2b_6)\sqrt{c_1d_3} + (b_1b_5 + b_4b_7)\sqrt{c_3d_1} + (b_3b_5 + b_2b_7)\sqrt{d_1d_3}, \\
\alpha_2 &= \sqrt[5]{[(b_1b_3b_8^2 + b_2b_4b_6^2)c_1 + (b_1b_3b_5^2 + b_2b_4b_7^2)d_1 + (b_5b_8b_1^2 + b_6b_7b_4^2)c_3 + (b_5b_8b_3^2 + b_6b_7b_2^2)d_3]^3}.
\end{aligned}$$

井草の標準形において $\alpha_2 \neq 0$ である. すなわち

$$(b_1b_3b_8^2 + b_2b_4b_6^2)c_1 + (b_1b_3b_5^2 + b_2b_4b_7^2)d_1 + (b_5b_8b_1^2 + b_6b_7b_4^2)c_3 + (b_5b_8b_3^2 + b_6b_7b_2^2)d_3 \neq 0$$

であるが, $b_1b_2 = b_3b_4$, $b_5b_6 = b_7b_8$ に注意すれば, これは X_0 が非特異である条件と一致している (Lemma 5.1(c)).

参考文献

- [1] U. Bhosle, *Pencils of quadrics and hyperelliptic curves in characteristic two*, J. reine angew. Math., **407** (1990), 75–98.
- [2] J.W.S. Cassels, E.V. Flynn, *Prolegomena to a middlebrow arithmetic of curves of genus 2*, London Math. Soc. Lect. Note Series **230**, Cambridge Univ. Press 1996.
- [3] I. Dolgachev, *Kummer surfaces: 200 years of study*, Notices of the American Math. Soc., November 2020, 1527–1533.
- [4] S. Duquesne, *Traces of the group law on the Kummer surface of a curve of genus 2 in characteristic 2*, Math. Computer Science 3 (2010), 173–183.
- [5] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, New York 1978.
- [6] J. Igusa, *Arithmetic variety of moduli for genus two*, Ann. Math., **72** (1960), 612–649.
- [7] T. Katsura, *On Kummer surfaces in characteristic 2*, M. Nagata (ed.), Proceedings of the international symposium on algebraic geometry, 525–542, Kinokuniya Book Store, Tokyo 1978.
- [8] T. Katsura, S. Kondo, *Kummer surfaces and quadratic line complexes in characteristic two*, in preparation.
- [9] F. Klein, *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades*, Math. Ann., **2** (1870), 198–226.
- [10] W. Klingenberg, *Paare symmetrischer und alternierender Formen zweiten Grades*, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Universität Hamburg **12** (1954), 78–93.
- [11] Y. Laszlo, C. Pauly, *The action of the Frobenius map on rank 2 vector bundles in characteristic 2*, J. Algebraic Geometry **11** (2002), 219–243.

- [12] Y. Laszlo, C. Pauly, *The Frobenius map, rank 2 vector bundles and Kummer's quartic surface in characteristic 2 and 3*, Adv. Math., **185** (2004), 246–269.
- [13] S. Mukai, H. Ohashi, *The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces*, Recent advances in algebraic geometry, 307–320, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **417**, 2015.
- [14] M.S. Narasimhan, S. Ramanan, *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. Math., **89** (1969), 14–51.
- [15] C. Peters, J. Stienstra, *A pencil of K3-surfaces related to Apéry's recurrence for $\zeta(3)$ and Fermi surfaces for potential zero*, Lect. Notes in Math., **1399** (1991), 110–127, Springer.
- [16] T. Shioda, *Kummer surfaces in characteristic 2*, Proc. Japan Acad., **50** (1974), 718–722.
- [17] P. Wagreich, *Elliptic singularities of surfaces*, Amer. J. Math., **92** (1970), 419–454.

Quiver Heisenberg Algebras: a cubical analogue of preprojective algebras

源 泰幸 (大阪公立大学)

1 導入

箭 Q の道代数 $\mathbf{k}Q$ と前射影的代数 $\Pi(Q)$ は有限次元代数の表現論における重要な研究対象であるのみならず、他の分野 (Klein 特異点と McKay 対応、団代数、幾何学的表現論、etc.) でも重要な役割を演じる基本的な数学的对象である。

前射影的代数 $\Pi(Q)$ は具体的な生成元と関係式から定義される代数であるが、Auslander-Reiten 理論によれば道代数 $\mathbf{k}Q$ の加群圏 $\mathbf{k}Q \text{ mod}$ から生み出されると言える。

私は M. Herschend 氏との共同研究により前射影的代数のある種の中心拡大代数 ${}^{\circ}\Lambda(Q)$ を箭 Heisenberg 代数と名付けその性質を明らかにした。箭 Heisenberg 代数は先に研究されていた代数の特殊な場合であるが、我々は $\Pi(Q)$ と同様に、 ${}^{\circ}\Lambda(Q)$ が $\mathbf{k}Q \text{ mod}$ の AR 理論と密接に関係していることを発見した。 ${}^{\circ}\Lambda(Q)$ は $\Pi(Q)$ と次元高い類似の性質を持つ。さらに我々は道代数 $\mathbf{k}Q$ の次元高い類似の代数 ${}^{\circ}B(Q)$ を見出した。そして、これらが root 系や compound du Val 特異点と関係していることを発見した。

1.1 取り決め

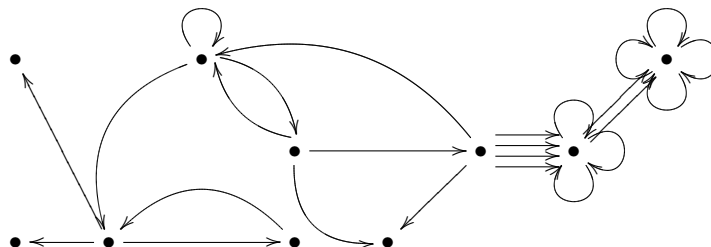
このノートでは \mathbf{k} は体を表す。代数といえば \mathbf{k} 代数を、代数上の加群は左加群を意味する。加群 M にたいする M^* は \mathbf{k} 双対をあらわす： $M^* := \text{Hom}_{\mathbf{k}}(M, \mathbf{k})$ 。

2 Auslander-Reiten 理論概観

Auslander-Reiten 理論 (AR 理論) については教科書 [3, 4] や概説 [19] をご覧頂きたい。

ここでは、AR 理論の一側面を手短に紹介する。

圏は対象と射から構成されていた。なので、一般の圏をイメージすると以下の様な取り留めのないものになる：



AR 理論は、線形圏 \mathcal{C} にその骨格とも言える箭 $\vec{\Gamma}(\mathcal{C})$ (Auslander-Reiten 箭) を定義する。更に、有限次元代数 A の加群圏 $A \text{ mod}$ (やその他の圏) には Auslander-Reiten 移送や Auslander-Reiten 列という概念を与え、 $A \text{ mod}$ (やその他の圏) の AR 箭が整然とした構造を持つことを教える。

2.1 Auslander-Reiten 籠

定義 2.1. 線形圏 C にたいし AR 籠 $\overrightarrow{\Gamma}(C)$ を次で定める :

- 頂点は直既約対象 (:=非自明な直和分解を持たない非零対象)、
- 頂点 (=直既約対象) x から y への矢印は x から y への既約射 (:= “それ以上分解できない射”)。

2.2 Auslander-Reiten 移送、Auslander-Reiten 列

線形圏 C の骨格である、と言っても AR 籠 $\overrightarrow{\Gamma}(C)$ は一般に定義されるものである。一般の線形圏というのは取り留めもないので、一般に AR 籠といってもそれはやはり取り留めのない只の籠であると言うしかなく、求める手立てもない。

しかし、加群圏 $A \text{ mod}$ には、AR 移送と呼ばれる関手対

$$\tau : A \text{ mod} \rightleftarrows A \overline{\text{mod}} : \tau^{-1}$$

と、AR 列と呼ばれる $A \text{ mod}$ の短完全列が定義される¹。以下に見る様に、これらは AR 籠 $\overrightarrow{\Gamma}(A \text{ mod})$ の構造に強い制限を与え、さらにこれを求める手段を提供する。

2.2.1

M が入射的でない直既約加群の場合、 M から始まる AR 列は次の形をした短完全列である² :

$$(2-1) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow \tau^{-1}(M) \rightarrow 0$$

今回の研究では次の事実が重要である。

命題 2.2. M から始まる AR 列の中間項への射 $M \rightarrow N$ には M からの既約射が全て現れる。中間項からの射 $N \rightarrow \tau^{-1}M$ には $\tau^{-1}M$ への既約射が全て現れる。

$$\begin{array}{c}
 M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r N_i \longrightarrow \tau^{-1}(M) \\
 \hline
 \begin{array}{ccccc}
 & & N_1 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & N_2 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & \vdots & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & N_r & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 M & & & & \tau^{-1}(M)
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \boxed{\overrightarrow{\Gamma}(A \text{ mod})}$$

定義 2.1 を振り返ると、AR 列を求めることが出来れば AR 籠 $\overrightarrow{\Gamma}(A \text{ mod})$ のなかで頂点 M から出ていく矢印と頂点 $\tau^{-1}M$ に入っていき矢印が全て得られたことになる。さらに、これら二種類の矢印の本数が一致することも、この命題は示唆している。

AR 移送 τ, τ^{-1} は構成的に定義され、有限次元代数 A とその加群 M が与えられれば実際に計算³できることも多々ある。加群 M から出発し、 $\tau(M), \tau^{-1}(M)$ を求め、AR 列の中間項 N を決定する、という作業を繰り返すことで、AR 籠 $\overrightarrow{\Gamma}(A \text{ mod})$ (の一部) を計算することが出来たりする。

¹圏 $A \text{ mod}$ は加群圏 $A \text{ mod}$ から射影加群を経由する射を 0 射とする事で得られる剰余圏 $A \overline{\text{mod}} := A \text{ mod} / [\text{射影加群}]$ であり (射影) 安定圏と呼ばれる。射影加群を入射加群に置き換えることで (入射) 安定圏 $A \overline{\text{mod}} = A \text{ mod} / [\text{入射加群}]$ が構成される。

²双対的に、射影的でない直既約加群 M にたいしては、 M で終わる AR 列があり、それは $\tau(M)$ が左端にある短完全列である。

³「加群を計算する。」というのは多元環の表現論でよく使われる言い回しだが、加群の組成列を求め代数 A の生成系の作用を決める、とかいう意味である。

2.2.2

圏論的には次の様に見ることが出来る。

根基陪関手 $\text{rad}(-, +)$ と呼ばれる Hom 陪関手 $\text{Hom}_C(-, +)$ の部分陪関手が存在する。Mitchell の論文 [22] のタイトルに示されているように、線形圏 C を“対象を複数もつ代数”と見做すことが出来る⁴。その観点のもとで Hom 陪関手の部分陪関手は両側イデアルに対応し、特に根基陪関手 $\text{rad}(-, +)$ は Jacobson 根基に対応する。

直既約加群 M から加群 N への射 $f: M \rightarrow N$ が左 rad 近似とは f が $\text{rad}(M, N)$ に属し、かつ、 $\text{rad}(M, L)$ に属する任意の射 $g: M \rightarrow L$ は全て $f: M \rightarrow N$ を経由することをいう。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow g & \downarrow \\ & & L \end{array}$$

射 $f: M \rightarrow N$ が左極小というのは f が $0 \rightarrow L$ ($L \neq 0$) という形の直和成分をもたないことをいう。

左極小な左 rad 近似を左極小 rad 近似と呼ぶ。同様に、右 rad 近似、右極小射、右極小 rad 近似を定義する。

補題 2.3. 入射的でない直既約加群 M から始まる AR 列 (2-1) のなかで、中間項への射 $M \rightarrow N$ は M の極小左 rad 近似である。中間項からの射 $N \rightarrow \tau^{-1}(M)$ は $\tau^{-1}(M)$ の極小右 rad 近似である。

3 籠 Q の道代数 $\mathbf{k}Q$ と前射影的代数 $\Pi(Q)$

籠 $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$ とは有向グラフの別名だった。道代数 $\mathbf{k}Q$ とは Q の道を基底とし、道の合成を積と定める代数だった (合成できない道の積は 0 と定める)。

以下に基本的な二つの例を挙げる：

例 3.1. $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ の場合。道代数 $\mathbf{k}Q$ は 3 次上半三角行列代数である：

$$\begin{aligned} \mathbf{k}Q &= \mathbf{k}e_1 \oplus \mathbf{k}e_2 \oplus \mathbf{k}e_3 \oplus \mathbf{k}\alpha \oplus \mathbf{k}\beta \oplus \mathbf{k}\alpha\beta \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{k}e_1 & \mathbf{k}\alpha & \mathbf{k}\alpha\beta \\ 0 & \mathbf{k}e_2 & \mathbf{k}\beta \\ 0 & 0 & \mathbf{k}e_3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k} & \mathbf{k} \\ 0 & \mathbf{k} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 3.2. $Q: \circ$ (loop) の場合。道代数 $\mathbf{k}Q$ は一変数多項式代数である：

$$\mathbf{k}Q = \mathbf{k}e \oplus \mathbf{k}x \oplus \mathbf{k}x^2 \oplus \cdots \cong \mathbf{k}[x].$$

道代数 $\mathbf{k}Q$ が有限次元であるための必要十分条件は Q が有限非輪状 (つまり、頂点、矢印が有限個で、有向サイクルをもたない) ことである。そこで、

♠ 以下、(loop を除いて) 籠 Q は連結有限非輪状と仮定。

定義 3.3. 有限次元代数 A が有限表現型 (*resp.* 無限表現型) を持つとは、直既約加群の同型類が有限個 (*resp.* 無限個) のことをいう。

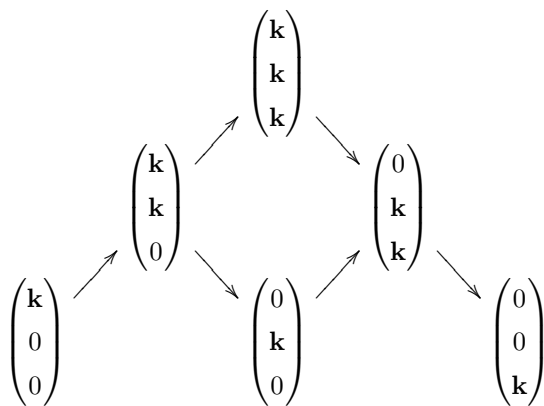
道代数の表現型に関する基本定理は次です：

定理 3.4 (Gabriel). 籠 Q にたいして次が成り立つ：

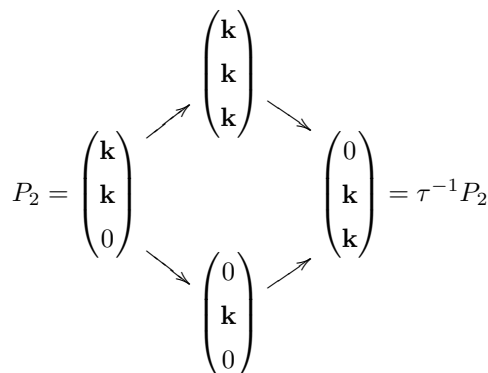
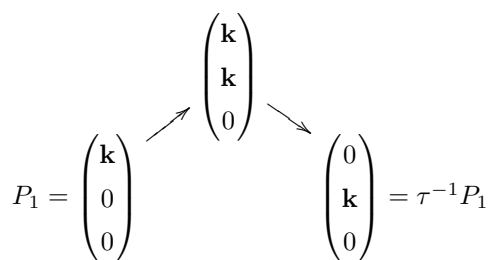
$$\begin{aligned} \mathbf{k}Q \text{ は有限表現型} &\iff Q \text{ は Dynkin 籠} \\ \mathbf{k}Q \text{ は無限表現型} &\iff Q \text{ は non-Dynkin 籠} \end{aligned}$$

⁴浅芝先生の [2] の第 1,2 章も参考になります。

例 3.5. $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ の場合、AR 籠 $\vec{\Gamma}(\mathbf{k}Q \text{ mod})$



♣ 頂点 1, 2 に対応する直既約射影加群 $P_1 = \mathbf{k}Qe_1$, $P_2 = \mathbf{k}Qe_2$ から始まる AR 列は以下である :



3.0.1 次元ベクトルとルート系

$\mathbf{k}Q$ 加群 M の次元ベクトル $\underline{\dim}M$ を以下で定める :

$$\underline{\dim}M := (\dim e_i M)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}Q_0.$$

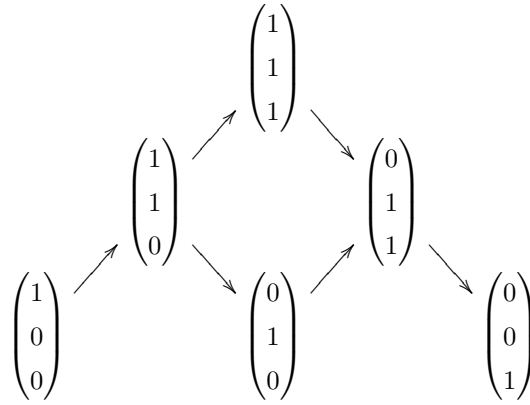
次元ベクトルは $\mathbf{k}Q \text{ mod}$ の Grothendieck 群と $\mathbb{Z}Q_0 = \mathbb{Z}^{\oplus \#Q_0}$ の群同型を与える :

$$\underline{\dim} : K_0(\mathbf{k}Q) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}Q_0, \quad \text{単純加群 } S_i \mapsto \text{基本ベクトル } \vec{e}_i.$$

定理 3.6 (Kac-Gabriel). 同型写像 $\underline{\dim}$ は、直既約加群の次元ベクトルと、 Q から定まる (一般化された) $root$ 系の正の $roots$ への全射を与える :

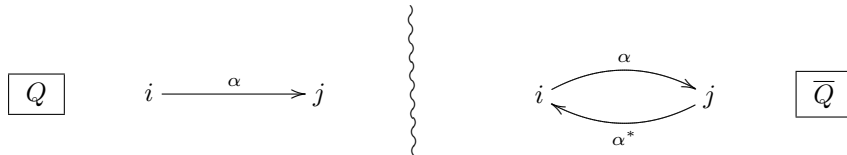
$$\begin{aligned} \text{ind}(\mathbf{k}Q \text{ mod}) &\xrightarrow{\text{surj}} R_{Q,+}, \\ \text{ind}(\mathcal{P}(Q) \vee \mathcal{I}(Q)) &\xrightarrow{1:1} R_{Q,+}^{\text{re}}, \\ \text{ind}(\mathcal{R}(Q)) &\xrightarrow{\infty:1} R_{Q,+}^{\text{im}}. \end{aligned}$$

例 3.7. $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ の場合の次元ベクトル:



3.1 前射影的代数 $\Pi(Q)$

箭 Q の二重化 \overline{Q} とは、各矢 $\alpha: i \rightarrow j$ に形式的に $\alpha^*: j \rightarrow i$ を付け加えたもの:



定義 3.8. (1) 各頂点 $i \in Q_0$ にたいして網目関係式 $\rho_i \in \mathbf{k}\overline{Q}$ を以下で定める:

$$\rho_i := \sum_{\alpha \in Q_1: t(\alpha)=i} \alpha\alpha^* - \sum_{\alpha \in Q_1: h(\alpha)=i} \alpha^*\alpha.$$

(2) 総和 $\rho := \sum_{i \in Q_0} \rho_i$ も網目関係式と呼ばれる⁵。

(3) 箭 Q の前射影的代数 $\Pi(Q)$ を $\mathbf{k}\overline{Q}$ の網目関係式による剰余環として定める:

$$\Pi(Q) = \frac{\mathbf{k}\overline{Q}}{(\rho)} = \frac{\mathbf{k}\overline{Q}}{(\rho_i \mid i \in Q_0)}.$$

例 3.9. $Q = \circlearrowleft$ の場合。二重化箭 \overline{Q} は二つの loop であり、道代数は二変数非可換多項式環 $\mathbf{k}\overline{Q} = \mathbf{k}\langle x, x^* \rangle$ であり、網目関係式は二つの変数の可換子 $\rho = xx^* - x^*x = [x, x^*]$ である。

$$\overline{Q} = x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \cdot \\ \curvearrowleft \end{array} x^*, \quad \mathbf{k}\overline{Q} = \mathbf{k}\langle x, x^* \rangle, \quad \rho = xx^* - x^*x.$$

このことから、前射影的代数は二変数可換多項式環 $\Pi(\circlearrowleft) \cong \mathbf{k}[x, y]$. と分かります:

$$\Pi(\circlearrowleft) = \frac{\mathbf{k}\overline{Q}}{\rho} = \frac{\mathbf{k}\langle x, x^* \rangle}{[x, x^*]} \cong \mathbf{k}[x, y].$$

例 3.10. $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ の場合に、二重化箭 \overline{Q} と網目関係式 ρ_1, ρ_2, ρ_3 を書き下すと以下のものが得られる:

$$\overline{Q} \quad 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\alpha^*} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\beta^*} \end{array} 3,$$

$$\rho_1 = \alpha\alpha^*, \quad \rho_2 = -\alpha^*\alpha + \beta\beta^*, \quad \rho_3 = -\beta^*\beta.$$

⁵世間ではこちらが網目関係式と呼ばれる

道代数 $\mathbf{k}Q$ には、道の長さにより次数が定義されるが、それとは別の次数を二重化簡の道代数にたいし導入する。

定義 3.11. 二重化簡 \overline{Q} に次数 (* 次数) を以下で定める :

$$\deg^* e_i := 0 \text{ for } i \in Q_0, \deg^* \alpha := 0, \deg^* \alpha^* := 1 \text{ for } \alpha \in Q_1.$$

すると、 $\deg^* \rho_i = 1$ であり、 $\Pi(Q)$ は * 次数代数。

$\Pi(Q)$ の * 次数 n 部分を $\Pi(Q)_n$ と表す。すると、 $\Pi(Q)_0 = \mathbf{k}Q$ であり、 $\Pi(Q)_n$ は両側 $\mathbf{k}Q$ 加群。

3.2 簡の道代数 $\mathbf{k}Q$ の AR 理論と前射影的代数

道代数 $\mathbf{k}Q$ の場合には、 $\text{gldim } \mathbf{k}Q \leq 1$ という特殊事情から、AR 移送 τ^{-1} は加群圏の自己関手に持ち上がり、次の形に表せる :

$$\begin{aligned} \tau^{-1} : \mathbf{k}Q \text{ mod} &\rightarrow \mathbf{k}Q \text{ mod}, \\ \tau^{-1}(M) &= \text{Ext}_{\mathbf{k}Q}^1(\mathbf{k}Q^*, \mathbf{k}Q) \otimes_{\mathbf{k}Q} M, \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{k}Q^* := \text{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}Q, \mathbf{k})$ ($\mathbf{k}Q$ の \mathbf{k} 双対に自然な $\mathbf{k}Q$ 両側加群の構造を与えたもの)。

定理 3.12 (Baer-Geigle-Lenzing [5], Crawley-Boevey [7], Ringel [23]).

(1) 次の両側 $\mathbf{k}Q$ 加群の同型が存在する :

$$\Pi_1 \cong \text{Ext}_{\mathbf{k}Q}^1(\mathbf{k}Q^*, \mathbf{k}Q).$$

(2) 任意の $\mathbf{k}Q$ 加群 M にたいして、次の同型が存在する :

$$\tau^{-1}(M) = \Pi_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M.$$

(3) 次の次数代数の同型が存在する :

$$\Pi(Q) \cong \mathbb{T}_{\mathbf{k}Q}(\Pi_1)$$

ただし、 $\mathbb{T}_{\mathbf{k}Q}$ はテンソル代数をあらわす :

$$\mathbb{T}_{\mathbf{k}Q}(\Pi_1) := \mathbf{k}Q \oplus \Pi_1 \oplus (\Pi_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} \Pi_1) \oplus (\Pi_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} \Pi_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} \Pi_1) \oplus \cdots.$$

特に、 $\Pi_n = \Pi_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} \Pi_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} \cdots \otimes_{\mathbf{k}Q} \Pi_1$ (n 個)

定義 3.13. $\Pi_n = \tau^{-n}(\mathbf{k}Q)$ ($n \geq 0$) の直和の直和因子を前射影的加群と呼ぶ。さらに、それらの直和も前射影加群⁶とよぶ。その全体を $\mathcal{P}(Q)$ と表す。

$$\mathcal{P}(Q) := \text{add}\{\tau^{-n}(\mathbf{k}Q) \mid n \geq 0\}.$$

上の定理 3.12 の記述から何となく予測できることですが、 $\Pi(Q)$ を $\mathbf{k}Q$ 加群と見た場合には次の直和分解がある。証明された順番は時系列では逆であることを注意しておく。

定理 3.14 (Gelfand-Ponomarev [13], Dlab-Ringle [9]). 次の $\mathbf{k}Q$ 加群の同型が存在する :

$$\Pi(Q) \cong \bigoplus_{N \in \text{ind } \mathcal{P}(Q)} N.$$

Q が Dynkin の場合、 $\mathcal{P}(Q) = \mathbf{k}Q \text{ mod}$ が知られている。

⁶前射影的加群というのは τ を施していくといずれ射影加群になる加群とも言い換えられる。それが命名の理由と想像される。因みに、射影加群に τ を施すと 0 になる。

系 3.15. Dynkin 籠 Q にたいして、次の $\mathbf{k}Q$ 加群の同型が存在する：

$$\Pi(Q) \cong \bigoplus_{N \in \text{ind}(\mathbf{k}Q \text{ mod})} N.$$

特に、次の等式が成り立つ：

$$\dim \Pi(Q) \cong \sum_{N \in \text{ind}(\mathbf{k}Q \text{ mod})} \dim N = \frac{rh(h+1)}{6}.$$

ただし、 h は Coxeter 数、 $r := \#Q_0$. (二つ目の等号は *Etingof-Rains[10]* による。)

3.2.1

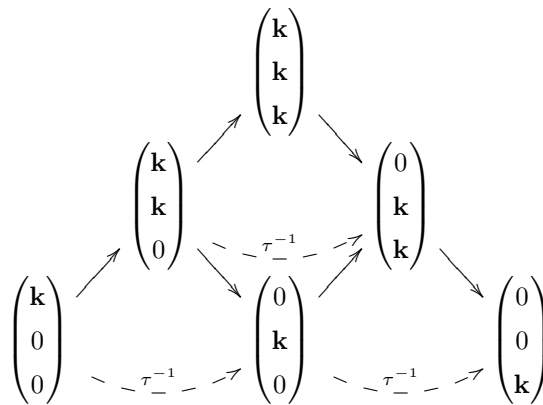
籠 Q が Dynkin か否かで $\Pi(Q)$ の性質は大きく変わる。どちらの場合でも良いホモロジー代数的性質を持つ。

定理 3.16. 次が成り立つ：

- (1) Q が Dynkin のとき、 $\Pi(Q)$ は安定 2-Calabi-Yau Frobenius 代数。
 (Frobenius := 片側加群として $\Pi(Q) \cong \Pi(Q)^*$),
 (安定 2-CY := 安定圏 (\simeq 特異導来圏) $\text{mod} \Pi(Q)$ は 2-CY 三角圏.)
- (2) Q が non-Dynkin のとき、 $\Pi(Q)$ は 2-Calabi-Yau 代数。

3.2.2 A_3 籠の場合：

$Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ の場合、



$$\begin{aligned} \Pi(Q) &\cong \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\ &\oplus \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \tau^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\oplus \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \tau^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \tau^{-2} \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

通常の変数 *Heisenberg* 代数は *Artin-Schelter* 正則代数 [1] (=次数付き捻じれ *Calabi-Yau* 代数) の具体例です。二変数で生成された AS 正則代数は他にも多数あるので、それらの筋版を研究してみるとなにか面白いことが分かるかも知れない。

例 4.4. $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ の場合 :

$$\overline{Q}: 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\alpha^*} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\beta^*} \end{array} 3.$$

網目関係式は以下のものだった :

$$\rho_1 = \alpha\alpha^*, \rho_2 = -\alpha^*\alpha + \beta\beta^*, \rho_3 = -\beta^*\beta.$$

重み $v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbf{k}^\times Q_0$ にたいする筋 *Heisenberg* 関係式は以下である :

$$\begin{aligned} {}^v\eta_\alpha &= [\alpha, {}^v\rho] = v_2^{-1}\alpha\rho_2 - v_1^{-1}\rho\alpha = -(v_2^{-1} + v_1^{-1})\alpha\alpha^*\alpha + v_2^{-1}\alpha\beta\beta^*, \\ {}^v\eta_\beta &= -(v_2^{-1} + v_3^{-1})\beta\beta^*\beta + v_2^{-1}\alpha^*\alpha\beta, \\ {}^v\eta_{\alpha^*} &= (v_1^{-1} + v_2^{-1})\alpha^*\alpha\alpha^* - v_2^{-1}\beta\beta^*\alpha^*, \\ {}^v\eta_{\beta^*} &= (v_2^{-1} + v_3^{-1})\beta^*\beta\beta^* - v_2^{-1}\beta^*\alpha^*\alpha. \end{aligned}$$

4.1 先行研究 : 前射影的代数の拡大と変形

補題 4.5. 次の代数同型がある :

$${}^v\Lambda(Q) \cong \frac{\mathbf{k}[z]\overline{Q}}{(\rho_i - (v_i z)e_i \mid i \in Q_0)}.$$

このことから $\text{QHA} {}^v\Lambda(Q)$ は次の代数の特殊化であるとわかる :

- 前射影的代数の中心拡大 (Etingof-Rains [10] (2006))

$$\Pi(Q)_{\lambda, \mu} := \frac{\mathbf{k}[z]\overline{Q}}{(\rho_i - (\lambda_i z + \mu_i)e_i \mid i \in Q_0)}$$

ただし、 $\lambda_i, \mu_i \in \mathbf{k}$ for each $i \in Q_0$.

これは次の代数の特殊化である。

- $N = 1$ -quiver algebra (Cachazo-Katz-Vafa [6](2001))

$$\Pi(Q)_P := \frac{\mathbf{k}[z]\overline{Q}}{(\rho_i - P_i(z)e_i \mid i \in Q_0)}$$

ただし、 $P_i(z) \in \mathbf{k}[z]$ for each $i \in Q_0$.

これは次の代数族の引き戻しである。

- 前射影的代数の変形族 (Crawley-Boevey-Holland [8](1998))

$$\Pi(Q)_\bullet := \frac{\mathbf{k}[z_1, \dots, z_r]\overline{Q}}{(\rho_i - z_i e_i \mid i \in Q_0)}$$

ただし、 $r = \#Q_0$.

4.1.1

重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ と $\mathbf{k}Q$ 加群 M の次元ベクトル $\underline{\dim}M$ の内積を以下で表す：

$$v \cdot \underline{\dim}M := \sum_{i \in Q_0} v_i \dim(e_i M).$$

定義 4.6. 重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ が正則とは、任意の直既約 $\mathbf{k}Q$ 加群 M の次元ベクトルと直交しないことをいう：

$$v \cdot \underline{\dim}M \neq 0$$

注意 4.7. $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ かつ Q が *Dynkin* の場合。同一視 $\mathfrak{h} = \mathbf{k}Q_0$ の下で、*Lie* 環論での正則元と一致する、次の先行結果がある。

定理 4.8 ((1) Etingof-Rains [10], (2) Eu-Schedler [12], (3) Etingof-Latour-Rains [11]), $\text{char } \mathbf{k} = 0$ とする。籠 Q は *Dynkin*、重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ は正則とする。次が成り立つ：

(1) $QHA {}^v\Lambda(Q)$ は有限次元 *Frobenius* 代数であり、次が成り立つ：

$$\dim {}^v\Lambda(Q) = \sum_{N \in \text{ind}(\mathbf{k}Q \text{ mod})} (\dim N)^2 = \frac{rh^2(h+1)}{12}$$

ただし h は Q の *Coxeter* 数、 $r := \#Q_0$ 。

(2) $QHA {}^v\Lambda(Q)$ は安定 3-*Calabi-Yau*。

(3) *generic* な正則重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ にたいして ${}^v\Lambda(Q)$ は対称代数。

(対称代数 := 両側加群として ${}^v\Lambda \cong {}^v\Lambda^* \Rightarrow$ *Frobenius* 代数)

前節の結果と比較すると、籠 Heisenberg 代数 ${}^v\Lambda(Q)$ は前射影的代数 $\Pi(Q)$ と 1 次元だけ高い類似の性質を持っていることが分かる。

特に (1) は系 3.15 の次元公式の類似である。しかし、後者が $\mathbf{k}Q$ 加群としての直和分解から次元をとることで得られたのに比べ、前者は次元だけが求められていた。この ${}^v\Lambda(Q)$ の次元公式の上にある $\mathbf{k}Q$ 加群の直和分解を与えたの我々の主結果の一つである。

4.2 結果

4.2.1 普遍 Auslander-Reiten 列

$\alpha \in Q_1$ にたいして ${}^v\eta_\alpha = [\alpha, {}^v\varrho]$, ${}^v\eta_{\alpha^*} = [\alpha^*, {}^v\varrho]$ だったので次がなりたつ：

$$\text{deg}^* {}^v\eta_\alpha = 1, \quad \text{deg}^* {}^v\eta_{\alpha^*} = 2.$$

なので、 $QHA {}^v\Lambda(Q)$ は $*$ 次数代数であり、また 0 次部分は道代数 $\mathbf{k}Q$ と一致する： ${}^v\Lambda(Q)_0 = \mathbf{k}Q$ 。

荷重綱目関係式 ${}^v\varrho$ は $QHA {}^v\Lambda(Q)$ の中心元であり、これが生成する両側イデアルによる剰余代数は前射影的代数 $\Pi(Q)$ と一致する： $\Pi(Q) = {}^v\Lambda(Q)/({}^v\varrho)$ 。別の言い方をすれば、以下の $*$ 次数 ${}^v\Lambda$ 両側加群の完全列が存在する：

$$U: \quad {}^v\Lambda(-1) \xrightarrow{{}^v\varrho} {}^v\Lambda \xrightarrow{{}^v\pi} \Pi \rightarrow 0$$

ただし、 ${}^v\pi$ は標準的な射影、 (-1) は $*$ 次数を -1 ずらす関手。

この完全列の * 次数 1 次部分は次の両側 $\mathbf{k}Q$ 加群の完全列を与える：

$$\text{AR} : \mathbf{k}Q \xrightarrow{v_\varrho} {}^v\Lambda_1 \xrightarrow{v_\pi} \Pi_1 \rightarrow 0.$$

直既約加群 M とのテンソル積 $\text{AR}_M := \text{AR} \otimes_{\mathbf{k}Q} M$ を観察する。 $\mathbf{k}Q \otimes_{\mathbf{k}Q} M \cong M$, $\Pi_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \cong \tau^{-1}(M)$ だったので、次の形を得る：

$$\text{AR}_M : M \xrightarrow{v_{\varrho_M}} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \xrightarrow{v_{\pi_M}} \tau^{-1}(M) \rightarrow 0.$$

定理 4.9 (普遍 Auslander-Reiten 列). 重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ は正則とする。 M が入射的でない直既約 $\mathbf{k}Q$ 加群であれば、写像 v_{ϱ_M} は単射であり、完全列 AR_M は M から始まる AR 列である：

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{v_{\varrho_M}} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \xrightarrow{v_{\pi_M}} \tau^{-1}(M) \rightarrow 0.$$

4.2.2 * 次数 2 の関係式 $v_{\eta_{\alpha^*}}$ について

掛け算写像 $v_\mu : {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \rightarrow {}^v\Lambda_2$, $x \otimes y \rightarrow xy$ は全射であり、核は Π_1 の商である。別の言い方をすると、次の両側 $\mathbf{k}Q$ 加群の完全列が存在する：

$$\Pi_1 \xrightarrow{v_{\eta^*}} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \xrightarrow{v_\mu} {}^v\Lambda_2 \rightarrow 0$$

準同型 $v_{\eta^*} : \Pi_1 \rightarrow {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1$ の大雑把な説明は“ α^* を $v_{\eta_{\alpha^*}}$ に送る”である。

M を (適切な仮定を満たす) 直既約 $\mathbf{k}Q$ 加群とする。 M から始まる AR 列は次の形である：

$$M \longrightarrow {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \xrightarrow{v_{\pi_M}} \tau^{-1}(M)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N_1 & & \\
 & & \nearrow & & \\
 & & N_2 & & \\
 & & \vdots & & \\
 & & \searrow & & \\
 M & & & & \tau^{-1}(M) \\
 & & N_r & &
 \end{array}$$

中間項 ${}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M$ から始まる AR 列の直和⁷は次の形である：

$$M \quad {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \xrightarrow{v_{\varrho} v_{\Lambda_1 \otimes M}} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \longrightarrow \tau^{-1}({}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & N_1 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & \tau^{-1}(N_1) \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & N_2 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & \tau^{-1}(N_2) \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 M & & & & \tau^{-1}(M) & & \\
 & & N_r & \longrightarrow & L_s & \longrightarrow & \tau^{-1}(N_r)
 \end{array}$$

ただし、中間項 ${}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M$ の直和因子 $\tau^{-1}(M), L_1, \dots, L_s$ は重複度を持ち、それは N_1, \dots, N_r からそれぞれに入ってきている矢印の本数である。例えば L_1 の重複度は 2 である。

AR 理論的な考察から、中間項から中間項の中間項への射 $v_{\rho} v_{\Lambda_1 \otimes M} : {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \rightarrow {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M$ から一つ目の AR 列の右側の射 $v_{\pi_M} : {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \rightarrow \tau^{-1}(M)$ には retraction が存在すると分かる。

その section (の定数倍) を * 次数 2 の関係式から得られる準同型 $v_{\eta_M^*} : \tau^{-1}(M) \rightarrow {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M$ が与える、ということが次の定理が主張である。

⁷正確には、中間項の直既約因子から始まる AR 列の直和、と言うべきもの。

定理 4.10. 重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ は正則とする。直既約 $\mathbf{k}Q$ 加群 M は入射的でなく ${}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M$ も入射加群を直和因子に持たないとする。すると、 $\mathbf{k}Q$ 加群準同型写像 ${}^v\xi_M : {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \rightarrow \tau^{-1}(M)$ が存在して次の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
 & \tau^{-1}(M) & \\
 & \downarrow v\eta_M^* & \nearrow \lambda \text{id}_{\tau^{-1}(M)} \\
 {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M & \xrightarrow{{}^v\rho_{{}^v\Lambda_1 \otimes M}} & {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M \\
 & & \searrow \text{---} {}^v\xi_M \text{---} \\
 & & \tau^{-1}(M) \\
 & \nearrow v\pi_M & \\
 & &
 \end{array}$$

ただし、

$$\lambda := -\frac{v \cdot \dim({}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} M)}{v \cdot \dim(M)}.$$

注意 4.11. ${}^v\xi_M$ 以外の上の図式に現れる射は両側加群の射と M とのテンソル積であるが、 ${}^v\xi_M$ は一般にはそうはならない。より詳しくいうと：

generic な正則重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ にたいしては、両側 $\mathbf{k}Q$ 加群準同型 ${}^v\xi : {}^v\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1 \rightarrow \widetilde{\Pi}_1$ で以下を満たすものは存在しない：

$${}^v\xi_M = {}^v\xi \otimes M \quad (\forall M \in \text{ind}(\mathbf{k}Q \text{ mod})).$$

しかし、重み $v \in \mathbf{k}Q$ が正則であり、Coxeter 行列 Φ の転置 Φ^t の固有ベクトルであり、固有値が -1 でなければこの様な ${}^v\xi$ が存在する。

このことから、籠 Heisenberg 代数 ${}^v\Lambda(Q)$ の性質は重み $v \in \mathbf{k}Q$ に依存することがわかる。

4.2.3

次の定理は籠 Heisenberg 代数 ${}^v\Lambda(Q)$ の $\mathbf{k}Q$ 上の代数としての記述を与える。

定理 4.12. 次の次数代数の同型がある：

$${}^v\Lambda(Q) \cong \frac{T_{\mathbf{k}Q} {}^v\Lambda_1}{(\text{Im } {}^v\eta^*)}.$$

前射影的代数 $\Pi(Q)$ は AR 移送を生み出す両側加群 $\Pi(Q)_1 = \text{Ext}_{\mathbf{k}Q}^1(\mathbf{k}Q^*, \mathbf{k}Q)$ の $\mathbf{k}Q$ 上のテンソル代数であり、その意味で $\Pi(Q)$ は $\mathbf{k}Q \text{ mod}$ の AR 理論から生み出される、と言っていいであろう。上の定理は ${}^v\Lambda(Q)$ が AR 列の中間項を生み出す両側加群 ${}^v\Lambda(Q)_1$ のテンソル代数に中間項の中間項から $\tau^{-1}(M)$ を除するという関係式を課したものであると主張する。このことから、前射影的代数 $\Pi(Q)$ と同様に籠 Heisenberg 代数 ${}^v\Lambda(Q)$ も $\mathbf{k}Q \text{ mod}$ の AR 理論から生み出される、と言っていいであろう。

4.2.4 ${}^v\Lambda$ の $\mathbf{k}Q$ 加群としての直既約分解

定理 4.13. 重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ は正則とする。次の $\mathbf{k}Q$ 加群の同型がある：

$${}^v\Lambda(Q) \cong \bigoplus_{N \in \text{ind } \mathcal{P}(Q)} N^{\oplus \dim N}.$$

Dynkin 籠にたいしては、 $\mathcal{P}(Q) = \mathbf{k}Q \text{ mod}$ なので、

系 4.14. Dynkin 籠 Q と正則重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ にたいして、次の $\mathbf{k}Q$ 加群の同型がある：

$${}^v\Lambda(Q) \cong \bigoplus_{N \in \text{ind}(\mathbf{k}Q \text{ mod})} N^{\oplus \dim N}.$$

特に次が成り立つ：

$$\dim {}^v\Lambda(Q) = \sum_{N \in \text{ind}(\mathbf{k}Q \text{ mod})} (\dim N)^2 = \frac{rh^2(h+1)}{12}.$$

注意 4.15. 系の次元公式は、標数 $\text{char } \mathbf{k} = 0$ の場合には *Etingof-Rains* による結果 (定理 4.8(1)) である。彼らの証明は、量子関数環 $F_q(\text{SL}(2))$ の有限次元余加群のテンソル圏 $\tilde{\mathcal{C}}_q$ を用いて、 ${}^v\Lambda(Q)$ の道の長さに関する次数部分の次元の漸化式を得ることで実行される。道の長さに関する次数を使っていることから、彼らの証明方法を詳細に調べて我々の道代数加群としての同型を得ることは困難であろうと予想される。

例 4.16. $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ の場合：

$$\begin{aligned} {}^v\Lambda_0 e_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^v\Lambda_1 e_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^v\Lambda_2 e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}. \\ {}^v\Lambda(Q) &\cong \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix}^{\oplus 2} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}^{\oplus 2} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}^{\oplus 3}. \\ \dim {}^v\Lambda(Q) &= 20 = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot (4+1)}{12} \quad (r=3, h=4). \end{aligned}$$

4.2.5

定理 4.17. Q を Dynkin 籠とする。

- (1) 正則重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ にたいしては ${}^v\Lambda(Q)$ は対称代数になる。
- (2) 正則でない重み v にたいしては ${}^v\Lambda(Q)$ は無限次元になる。

定理 4.18. Q を non-Dynkin 籠とする。 ${}^v\Lambda(Q)$ は 3-Calabi-Yau 代数である。

4.3 導来籠 Heisenberg 代数と根基ベキ近似

ここまで加群の圏 $\mathbf{k}Q \text{ mod}$ で話しを進めてきたが、実際の証明ではまず導来圏 $D^b(\mathbf{k}Q \text{ mod})$ を調べる。そのために、Happel[15] による導来圏 $D^b(A \text{ mod})$ の AR 理論を用いる。そして、導来籠 Heisenberg 代数 ${}^v\tilde{\Lambda}(Q)$ と呼ばれる微分次数代数を導入する。以下に基本的な性質を述べる：

- $\text{char } \mathbf{k} \neq 2$ の時はポテンシャル付き籠 $(\overline{Q}, -\frac{1}{2}v_{\varrho\rho})$ にたいする Ginzburg DG 代数 [14, 21, 25] である：

$${}^v\tilde{\Lambda}(Q) = \mathcal{G}(\overline{Q}, -\frac{1}{2}v_{\varrho\rho}).$$

- 0 次コホモロジー代数 $H^0({}^v\tilde{\Lambda}(Q))$ は ${}^v\Lambda(Q)$ に一致する。

$$H^0({}^v\tilde{\Lambda}(Q)) \cong {}^v\Lambda(Q)$$

- 導来前射影的代数 $\tilde{\Pi}(Q)$ への射 $v\tilde{\pi} : {}^v\tilde{\Lambda}(Q) \rightarrow \tilde{\Pi}(Q)$ が存在し、0 次コホモロジーでは $v\pi : {}^v\Lambda(Q) \rightarrow \Pi(Q)$ に一致する。

- 次の形の完全三角がある：

$$\tilde{U} : \quad v\tilde{\Lambda}(Q)(-1) \xrightarrow{v\varrho} v\tilde{\Lambda}(Q) \xrightarrow{v\tilde{\pi}} \tilde{\Pi}(Q) \rightarrow$$

定理 4.19. 完全三角 \tilde{U} の * 次数 1 部分を \tilde{AR} とする：

$$\tilde{AR} : \quad \mathbf{k}Q \xrightarrow{v\varrho} v\tilde{\Lambda}(Q)_1 \xrightarrow{v\tilde{\pi}} \tilde{\Pi}(Q)_1 \rightarrow .$$

この \tilde{AR} は普遍 AR 三角である。正確には次が成り立つ：

直既約対象 $M \in D^b(\mathbf{k}Q \text{ mod})$ にたいして $\tilde{AR}_M := \tilde{AR} \otimes_{\mathbf{k}Q}^{\mathbb{L}} M$ は AR 三角。

$$\tilde{AR}_M : \quad M \xrightarrow{v\varrho_M} v\tilde{\Lambda}_1 \otimes_{\mathbf{k}Q}^{\mathbb{L}} M \xrightarrow{v\tilde{\pi}_M} \tilde{\Pi}_1 \otimes_{\mathbf{k}Q}^{\mathbb{L}} M. \rightarrow$$

節 2.2.2 で説明したこと（の導来圏版）より、* 次数 1 部分 $v\tilde{\Lambda}_1$ は根基陪関手 $\text{rad}(-, +)$ に関する極小近似を司る、といえる。

2 以上の自然数 n にたいして * 次数 n 部分 $v\tilde{\Lambda}_n$ は根基陪関手の n 乗 $\text{rad}^n(-, +)$ に関する極小近似を司る、ことを示すのが主結果である。

定理 4.20. n を自然数とする。簾 Q が Coxeter 数 h の Dynkin 簾の場合は $0 \leq n \leq h - 2$ を満たすとする。直既約対象 $M \in \text{ind } D^b(\mathbf{k}Q \text{ mod})$ にたいして次が成り立つ：

(1) $v\tilde{\pi}_{n,M} := v\tilde{\pi}_n \otimes^{\mathbb{L}} M : v\tilde{\Lambda}_n \otimes_{\mathbf{k}Q}^{\mathbb{L}} M \rightarrow \tilde{\Pi}_n \otimes_{\mathbf{k}Q}^{\mathbb{L}} M$ は極小右 rad^n 近似射である。

(2) 極小左 rad^n 近似射が存在する：

$$\beta^{(n)} : M \rightarrow v\tilde{\Lambda}_n \otimes_{\mathbf{k}Q}^{\mathbb{L}} M$$

注意 4.21. 荷重網目関係式の n 乗 $v\varrho^n : M \rightarrow v\tilde{\Lambda}_n \otimes_{\mathbf{k}Q}^{\mathbb{L}} M$ が極小左 rad^n 近似を与えるとは限らない。

しかし、 $\text{char } \mathbf{k} = 0$ の場合には *generic* な重みにたいして荷重網目関係式の n 乗が極小左 rad^n 近似を与えることが分かる。

注意 4.22. 根基陪関手のベキ rad^n に関する近似理論の研究は *Igusa-Todorov*[17] により開始された。これは加群圏を扱っているが、伊山 [18] は AR 移送をもつ線形圏として τ 圏を導入し、より一般的に論じている。

AR 理論的な考察から次の系が得られる。さらに、この系で M が直既約射影加群とすれば定理 4.13 を得られる。

系 4.23. 次の場合以外を考える： Q は *wild* 簾であり、 M は正則加群⁸。

すると、次の同型がある：

$$v\tilde{\Lambda} \otimes_{\mathbf{k}Q}^{\mathbb{L}} M \cong \bigoplus_{N \in \mathcal{C}_M} N^{\oplus \dim \text{Hom}(M, N)}$$

ただし \mathcal{C}_M は M の属する AR 簾の連結成分。

5 代数 ${}^vB(Q)$

定義 5.1. 簾 Q と正則重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ にたいして有限次元代数 ${}^vB(Q)$ を次で定義する：

$${}^vB(Q) := \begin{pmatrix} \mathbf{k}Q & v\Lambda_1 \\ 0 & \mathbf{k}Q \end{pmatrix}.$$

この代数 ${}^vB(Q)$ は道代数 $\mathbf{k}Q$ の 1 次元高い類似の性質を持つ。

⁸この“正則加群”は道代数 $\mathbf{k}Q$ をそれ上の加群とみたものではない。定義は教科書 [3, 24] 等をご覧ください。

5.1 Gabriel の定理の類似

伊山-Oppermann [20], Herschend-伊山-Oppermann [16] は高次 AR 理論の観点から高次 (n 次) 表現型の概念を導入した。道代数 $\mathbf{k}Q$ にたいしては 1 表現型は通常表現型と一致する。代数 ${}^vB(Q)$ の 2 表現型にたいして Gabriel の定理 (定理 3.4) の類似がなりたつ:

定理 5.2. 籠 Q と正則重み $v \in \mathbf{k}Q_0$ にたいして次が成り立つ:

$$\begin{aligned} {}^vB(Q) \text{ は 2 有限表現型} &\iff Q \text{ は Dynkin 籠,} \\ {}^vB(Q) \text{ は 2 無限表現型} &\iff Q \text{ は non-Dynkin 籠.} \end{aligned}$$

5.2 root 系との関係

両側 $\mathbf{k}Q$ - ${}^vB(Q)$ DG 加群 X を以下で定める:

$$X := (\mathbf{k}Q, \tilde{\Pi}_1).$$

関手 $F = X \otimes_{{}^vB(Q)}^- : D^b({}^vB(Q) \text{ mod}) \rightarrow D^b(\mathbf{k}Q \text{ mod})$ は Grothendieck 群に落とすと、 ${}^vB(Q)$ の “正の cluster roots \square_+ ” と $\mathbf{k}Q$ の (正とは限らない) roots Δ との全単射を与える:

$$\begin{array}{ccc} D^b({}^vB(Q) \text{ mod}) & \xrightarrow{F = X \otimes_{{}^vB(Q)}^-} & D^b(\mathbf{k}Q \text{ mod}) \\ \\ K_0({}^vB(Q)) & \xrightarrow{K_0(F)} & K_0(\mathbf{k}Q) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z}Q_0 \oplus \mathbb{Z}Q_0 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}Q_0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigsqcup_+ & \xrightarrow{1:1} & \Delta \end{array}$$

関手 F は (2-)APR 傾関手と整合的である。道代数 $\mathbf{k}Q$ に対しては APR 関手は Grothendieck 群では reflection になるので、上の $K_0(F)$ は root 系の 2 重被覆みたいなものを与える。

疑問. Lie 環論的な意味はあるのか????

なにか心当たりがある方は教えていただけると大変にありがたいです。

6 結語

籠 Q の道代数 $\mathbf{k}Q$ と前射影的代数 $\Pi(Q)$ は重要な数学的対象である。代数 ${}^vB(Q)$ と $\text{QHA}^v\Lambda(Q)$ はこれらの一次元高い類似物 (と見做せそう) なので、今後の研究の発展に期待したい。

参考文献

- [1] Artin, Michael; Schelter, William F. Graded algebras of global dimension 3 . Adv. in Math. 66 (1987), no. 2, 171-216.
- [2] 浅芝秀人 圏と表現論, サイエンス社
- [3] Auslander, Maurice; Reiten, Idun; Smalø, Sverre O. Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [4] Assem, Ibrahim; Simson, Daniel; Skowroński, Andrzej, Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory. London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [5] Baer, Dagmar; Geigle, Werner; Lenzing, Helmut, The preprojective algebra of a tame hereditary Artin algebra. *Comm. Algebra* 15 (1987), no. 1-2, 425-457.
- [6] Cachazo, Freddy; Katz, Sheldon; Vafa, Cumrun, Geometric Transitions and $\mathcal{N} = 1$ Quiver Algebras, arXiv:hep-th/0108120,
- [7] Crawley-Boevey, William Preprojective algebras, differential operators and a Conze embedding for deformations of Kleinian singularities. *Comment. Math. Helv.* 74 (1999), no. 4, 548-574.
- [8] Crawley-Boevey, William; Holland, Martin P. Noncommutative deformations of Kleinian singularities. *Duke Math. J.* 92 (1998), no. 3, 605-635.
- [9] Dlab, Vlastimil; Ringel, Claus Michael, The preprojective algebra of a modulated graph. Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 216-231, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin-New York, 1980.
- [10] Etingof, Pavel; Rains, Eric Central extensions of preprojective algebras, the quantum Heisenberg algebra, and 2-dimensional complex reflection groups. *J. Algebra* 299 (2006), no. 2, 570-588.
- [11] Etingof, Pavel; Latour, Frederic; Rains, Eric, On central extensions of preprojective algebras. *J. Algebra* 313 (2007), no. 1, 165-175.
- [12] Eu, Ching-Hwa; Schedler, Travis, Calabi-Yau Frobenius algebras. *J. Algebra* 321 (2009), no. 3, 774-815.
- [13] Gel'fand, I. M.; Ponomarev, V. A. Model algebras and representations of graphs. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 13 (1979), no. 3, 1-12.
- [14] Ginzburg Victor, Calabi-Yau algebras arXiv: math 0612139.
- [15] Happel, D. Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras. London Mathematical Society Lecture Notes Series 119. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- [16] Herschend, Martin; Iyama, Osamu; Oppermann, Steffen, n -representation infinite algebras. *Adv. Math.* 252 (2014), 292-342
- [17] Igusa, Kiyoshi; Todorov, Gordana Radical layers of representable functors. *J. Algebra* 89 (1984), no. 1, 105-147.
- [18] Iyama, Osamu, τ -categories. I. Ladders. *Algebr. Represent. Theory* 8 (2005), no. 3, 297-321.
- [19] Iyama, Osamu, Auslander-Reiten theory revisited. Trends in representation theory of algebras and related topics, 349-397, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2008.
- [20] Iyama, Osamu; Oppermann, Steffen, n -representation-finite algebras and n -APR tilting. *Trans. Amer. Math. Soc.* 363 (2011), no. 12, 6575-6614.
- [21] Keller, Bernhard, Deformed Calabi-Yau completions. With an appendix by Michel Van den Bergh. *J. Reine Angew. Math.* 654 (2011), 125-180.
- [22] Mitchell, Barry Rings with several objects. *Advances in Math.* 8 (1972), 1-161.

- [23] Ringel, Claus Michael, The preprojective algebra of a quiver. Algebras and modules, II (Geiranger, 1996), 467-480, CMS Conf. Proc., 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [24] Simson, Daniel; Skowronski, Andrzej Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 2. Tubes and concealed algebras of Euclidean type. London Mathematical Society Student Texts, 71. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xii+308 pp.
- [25] Van den Bergh, Michel, Calabi-Yau algebras and superpotentials. Selecta Math. (N.S.) 21 (2015), no. 2, 555-603.

ブローアップ代数のゴレンシュタイン性について

居相 真一郎 (北海道教育大学)

1 導入

与えられた可換な Noether 局所環 (A, \mathfrak{m}) の中に、いつ Rees 代数 $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{i \geq 0} I^i$ が Cohen-Macaulay 環となるイデアル I が存在するか? という問いは、川崎健の算術的 Cohen-Macaulay 化として結実した ([19], さらに川崎健は [20] において、基礎環が必ずしも局所環ではない場合に、それが存在するための必要十分条件を与えている)。他方、 $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環となるイデアル I を含む基礎環 A の構造に関する研究は、環 A が Cohen-Macaulay ではない場合には、依然として十分な進展を示しているとは言い難い。その理由としては、 $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環となるイデアル I を含む非 Cohen-Macaulay 局所環の具体例を解析した文献が少ないためであると考えられる。この報告では、Rees 代数の Gorenstein 性に関する研究を (基礎環 A が必ずしも Cohen-Macaulay ではない場合に限って) 概観しながら、最終節において、系列かつ大量に Gorenstein Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の具体例を提供したい。この系列かつ大量に具体例を提供するという内容は、明治大学の遠藤直樹・後藤四郎・松岡直之との最近の共同研究の一部の紹介である。

以下、この報告を通して、 (A, \mathfrak{m}) をネーター局所環とし、 t を A 上の不定元とする。Rees 代数 $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{i \geq 0} I^i$ は、 A 上の多項式環 $A[t]$ の部分環として見ると扱いやすい。これからは、 A のイデアル I に対して、

- $\mathcal{R}(I) = A[It] (\subseteq A[t])$
- $\mathcal{R}'(I) = A[It, t^{-1}] (\subseteq A[t, t^{-1}])$
- $\mathcal{G}(I) = \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I)$

とおく。上からそれぞれを、イデアル I の Rees 代数、拡大 Rees 代数、随伴次数環と呼び、これらを纏めて、ブローアップ代数という。多項式環 $A[t]$ と Laurent 多項式環 $A[t, t^{-1}]$ の自然な次数付けから、ブローアップ代数には次数環の構造が入る。次数環

として $\mathcal{R}(I) \cong \bigoplus_{i \geq 0} I^i$ である。代数幾何学では、次数環 $\mathcal{R}(I)$ が定める射影スキーム $\text{Proj } \mathcal{R}(I)$ は、 $\text{Spec } A$ の I を中心とするブローアップと呼ばれ、非常に重要な概念であり、うまくイデアル I を選び、 $\text{Proj } \mathcal{R}(I)$ が特異点を持たないように出来ることは、 $\text{Spec } A$ の特異点解消に他ならない。

本報告では、ブローアップ代数の環構造に注目する。特に、Rees 代数の Gorenstein 性について解説を行いたい。Rees 代数の「魅力」の一つは、基礎環 A が「悪い環」でも、イデアル I をうまく取れば、Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ を「良い環」にすることが出来るということであると考えられる。特に、高さが正である A のイデアル I を見つけて、その Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ を Cohen-Macaulay 環に出来るとき、 $\mathcal{R}(I)$ を A の算術的 Cohen-Macaulay 化と呼ぶ。その到達点は川崎の算術的 Cohen-Macaulay 化であり、川崎は非常に一般的な環において、そのようなイデアル I の構成に成功した。これは特異点解消とは違ってくるが、川崎の結果は多大な影響を与えた。例えば、川崎は「Noether 環が双対化複体を持つならば、その環は有限次元 Gorenstein 環の準同型像である」という Sharp 予想の肯定的な解決を導いた。このような研究方向に関して、出発点となったと思われる M. Hochster と J. L. Roberts の著名な次の具体例を紹介する。

例 1 (Hochster-Roberts [15], 1974 年). $k[[x, y]]$ を体 k 上の x, y を不定元とする形式的冪級数環とし、その部分環

$$A = k[[x^2, y, x^3, xy]]$$

を考える。この局所環 A は *Cohen-Macaulay* ではない。 $\mathfrak{q} = (x^2, y)A$ とおく。このとき次が正しい。

1. $\mathcal{R}(\mathfrak{q})$ は *Cohen-Macaulay* 環である。(Gorenstein 環ではない。)
2. $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^2)$ は *Gorenstein* 環である。

この例は、Cohen-Macaulay 性と Gorenstein 性は環直和因子には保たれないことを示すために提出されたが、そればかりではなく、非 Cohen-Macaulay 環の算術的 Cohen-Macaulay 化と算術的 Gorenstein 化を構成した初めての具体例であると思われる。この算術的 Cohen-Macaulay 化の具体例は、下田保博によって綿密に解析され、次のように一般化された。なお、特に断らない限りこの報告の中では、環の次元とは、Krull 次元のことである。

定理 2 (下田 [23], 1979 年). A を 2 次元 *Noether* 局所整域とし、 a, b を A のパラメータ系とする。 $\mathfrak{q} = (a, b)$ とおくと、次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(\mathfrak{q})$ は *Cohen-Macaulay* 環である。

(2) 等式 $(aA :_A b) \cap (bA :_A a) = aA \cap bA$ が成り立つ。

これは、 $\mathcal{R}(\mathfrak{q})$ は *Cohen-Macaulay* 性を基礎環 A の言葉で表したもので、この等式 $(aA :_A b) \cap (bA :_A a) = aA \cap bA$ はとても魅力的ではあるが、一見では、環 A の中で何を意味しているのかということとは分からない。この等式を解釈するために、いくつか記号を準備させてほしい。以下、 $Q(A)$ によって A の全商環を表し、 $Q(A)$ の有限生成 A -部分加群 L と A の非零因子 a に対して、

$$\frac{L}{a} = a^{-1}L \left(= \{ a^{-1}f \mid f \in L \} \right)$$

とおく。これは $Q(A)$ の有限生成 A -部分加群である。また、任意の整数 i に対して、

$$H_{\mathfrak{m}}^i(A) = \varinjlim \text{Ext}_A^i(A/\mathfrak{m}^n, A)$$

によって i 番目の \mathfrak{m} に関する A の局所コホモロジー加群を表す。これらの記号を使うと、下田の等式は次のように理解される。

補題 3. A を 2 次元の *Noether* 局所環とする。 $\{a, b\}$ は A のパラメータ系であり、 a と b は共に A の非零因子であると仮定する。

$$B = \frac{A}{a} \cap \frac{A}{b}$$

とおく。このとき、次の 3 条件は同値である。

(1) 等式 $(aA :_A b) \cap (bA :_A a) = aA \cap bA$ が成り立つ。

(2) $(a, b) \cdot H_{\mathfrak{m}}^1(A) = (0)$ である。

(3) a, b は B 上の正則列である。

このとき、 B は A の拡大環であり、有限生成 A -加群となっている。

上の条件 (2) はパラメータ系 a, b が「標準的」と呼ばれるものであることを言っている。この概念は一般的に、「unconditioned strong d -sequence」と呼ばれ、後藤四郎・山岸規久道 [11] によって非常に深く研究された。これは算術的 *Cohen-Macaulay* 化の構成の研究に多大な影響を与えたと考えられる。また、条件 (3) は a, b が「 A の拡大環で有限生成 *Cohen-Macaulay* A -加群であるもの」を表現していることを言っている。この構成方法は [5] に詳しい。

これまでの例や結果を鑑みると、基礎環が必ずしも Cohen-Macaulay でない場合には、Rees 代数の「良い性質」は、そのまま基礎環には遺伝しないけれども、基礎環の何かある「解析すべき性質」を浮き出させてくれているように感じる。この報告では、Rees 代数の「良い性質」が、その基礎環のどのような性質を浮き彫りにするのかということに注目しながら話を進めたい。

下田保博 [23] の証明は、等式 $(aA :_A b) \cap (bA :_A a) = aA \cap bA$ を、上の補題の条件 (2) に対応する「パラメータ系 a, b が unconditioned strong d -sequence をなすこと」に翻訳する作業が肝となっている。これは「達人的」な計算によってなされているが、上の補題の同値性の証明は、条件 (3) を経由することによって見やすくなる。証明を観察してみたい。

証明. $Q(A)$ の A -部分加群 L に対して、

$$\frac{L}{a} \cap \frac{L}{b} = \frac{aL \cap bL}{ab} = \frac{b(aL :_L b)}{ab} = \frac{aL :_L b}{a}$$

と計算できる。 $L = A$ の場合を考えると、 $B = \frac{aA :_A b}{a}$ と書けるので、この両辺に a をかけて、 $aB = aA :_A b$ となる。同様にして $bB = bA :_A a$ を得る。従って、

$$(aA :_A b) \cap (bA :_A a) = aB \cap bB$$

となることに注意しよう。まず、(1) \Leftrightarrow (3) を示す。上の等式により、条件 (1) と

$$aA \cap bA = aB \cap bB$$

であることは同値である。これは等式

$$\frac{aA \cap bA}{ab} = \frac{aB \cap bB}{ab}$$

が成り立つことと同値である。この等式は

$$B = \frac{aB :_B b}{a}$$

と書き換えられるので、条件 (1) と $aB = aB :_B b$ であることは同値であることが分かる。従って (1) \Leftrightarrow (3) が正しい。

次に、(2) \Leftrightarrow (3) を示そう。 B の定義により、 $A \subseteq B$ であり、 $(a, b) \cdot B/A = (0)$ である。故に $\ell_A(B/A) < \infty$ である。よって、 A -加群の完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$$

の局所コホモロジーを取り, A -加群の完全列

$$0 \rightarrow B/A \rightarrow H_m^1(A) \rightarrow H_m^1(B) \rightarrow 0$$

を得る。従って, $\text{depth}_A B \geq 2$ なら, $B/A \cong H_m^1(A)$ なので, $(a, b) \cdot H_m^1(A) = (0)$ が得られる。その様な訳で, (3) \Rightarrow (2) が正しい。

さて, $B/A \cong aB/aA = (aA :_A b)/aA$ であり, B/A は \mathfrak{m} の十分大きなべきを掛けると消えるので,

$$aA :_A b \subseteq \bigcup_{n \geq 0} aA : \mathfrak{m}^n$$

が成り立つ。では, 条件 (2) を仮定しよう。すると, すぐ上の包含は等号となる。実際, 元 a をかける写像 (これは $\overset{a}{\rightarrow}$ のように表される) から導かれる完全列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a} A \rightarrow A/aA \rightarrow 0$$

の局所コホモロジーを取ると, A -加群の完全列

$$0 \rightarrow H_m^0(A/aA) \rightarrow H_m^1(A) \xrightarrow{a} H_m^1(A)$$

を得るが, $a \cdot H_m^1(A) = (0)$ なので, $H_m^0(A/aA) \cong H_m^1(A)$ なる。局所コホモロジーの定義により,

$$H_m^0(A/aA) = \left(\bigcup_{n \geq 0} aA : \mathfrak{m}^n \right) / aA$$

であるが, $b \cdot H_m^1(A) = (0)$ なので, $\bigcup_{n \geq 0} aA : \mathfrak{m}^n \subseteq aA :_A b$ が成り立つ。このような訳で, 等式 $\bigcup_{n \geq 0} aA : \mathfrak{m}^n = aA :_A b$ を得る。纏めると,

$$H_m^1(A) \cong H_m^0(A/aA) \cong (aA :_A b)/aA \cong B/A$$

となっている。 A -加群の完全列

$$0 \rightarrow B/A \rightarrow H_m^1(A) \rightarrow H_m^1(B) \rightarrow 0$$

を思い出すと, $\ell_A(B/A) = \ell_A(H_m^1(A))$ であることにより, $H_m^1(B) = (0)$ でなくてはならない。これは B が Cohen-Macaulay A -加群であることを言っているので, B のパラメータ系 a, b は B 上の正則列である。□

下田の定理 2 は次のように高次元化されている。これは M. Herrmann, S. Ikeda, U. Orbanz によるこの分野の詳細な教科書 [14] の中で端的に整理されている。

定理 4 ([5], [9], [14]). A を d 次元 Noether 局所環とし, \mathfrak{q} を A のパラメータイデアルとする。このとき, $d \geq 2$ ならば, 次の 3 条件は同値である。

- (1) $\mathcal{R}(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay 環である。
- (2) 整数 i が $i \neq 1, d$ なるとき $H_m^i(A) = (0)$ であり, $\mathfrak{q}H_m^1(A) = (0)$ である。
- (3) A の拡大環 B で有限生成 Cohen-Macaulay A -加群であるものが存在して, $\mathfrak{q}B \subseteq A$ を満たす。

では他方, Hochster-Roberts の例 1 で, なぜ 2 乗を取ったパラメータイデアルの Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^2)$ は Gorenstein 環となるのだろうか? このことは, \mathfrak{q}^2 の随伴時数環 $\mathcal{G}(\mathfrak{q}^2)$ の a -不変量を「好ましいもの」に揃えることが本質的であるが, 後の節で解説したい。ここでは, この例の Gorenstein 性について, 一般化する方向での成果として, 次の下田保博の結果を紹介させてほしい。

定理 5 (下田, 1991 年). A を 2 次元 Noether 局所環とし, a, b を A のパラメータ系とする。 $\mathfrak{q} = (a, b)$ とおくと, 次の 2 条件は同値である。

- (1) $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^2)$ は Gorenstein 環である。
- (2) (i) 元 a, b はどちらも A の非零因子であり,
(ii) 等式 $[aA :_A b] \cap [bA :_A a] = aA \cap bA$ が成り立ち,
(iii) 局所環 $A/(abA + a[aA :_A b] + b[bA :_A a])$ は Gorenstein である。

これが, この Rees 代数の Gorenstein 性を, 基礎環 A の言葉で特徴づけた最初の結果であると思われる。この結果は 30 年ほど前の明治大学で行われた可換環論セミナーで報告されたものである。上の条件 (2) の (ii) については, 先ほど解説した。新しく出てきた (iii) も魅力的なものであるが, Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^2)$ が Gorenstein であるとき, 基礎環 A はどのような性質をもつものなのか? という問いに端的には答えてくれないように思える。そのため, この条件のままでは, 一般次元への拡張は難しい。この報告の第 3 節で, 同時期に後藤四郎によって提出された新たな条件を考察することによって, この結果が一般次元に拡張出来ることを紹介する。第 4 節では, その拡張された結果から得られる高次元の Gorenstein Rees 代数の具体例を, 大量かつ系統的に提供したい。次の第 2 節では, 第 3, 4 節の補足のために Gorenstein Rees 代数の一般論を簡単に解説する。

2 Gorenstein Rees 代数の一般論

H. Bass は自己入射次元が有限である Noether 局所環を Gorenstein 環と呼んだ ([2] 1963 年)。この定義はとても明確であるが、本報告では、A. Grothendieck による「正準加群 (canonical module)」を用いた Gorenstein 環の定義から出発したい。(なお、論文 [2] の中において、両方の定義の関係性を J. P. Serre から言及を受けたと、当時の事情が述べられている。) 以下、この節では、 A は正則局所環 R の準同型像であると仮定する。

$$K_A = \text{Ext}_R^m(A, R)$$

(ここで $m = \dim R - \dim A$ である) とおき、 A の正準加群という。特に、 A が 1 次元整域であり、剰余体 A/\mathfrak{m} は無限体で、その整閉包 \bar{A} が有限生成 A -加群なるとき、 $\mathfrak{c} = A : \bar{A}$ とおくと、D. Gorenstein の論文 [4] の中に出てくる著名な等式

$$\ell_A(\bar{A}/\mathfrak{c}) = 2\ell_A(\bar{A}/A)$$

が成り立つことと、 $K_A \cong A$ であることが同値となっている事が知られている (cf. [22], [24])。ここで、 $\ell_A(-)$ は A -加群としての長さを表している。つまり、D. Gorenstein の等式は環 A とその整閉包 \bar{A} との「差」の条件であるが、それを正準加群 K_A を用いて、基礎環 A だけの条件で言い表すことができる。この報告では (この事実に示唆を受けたと思われる Grothendieck の定義に戻って) 局所環 A が Gorenstein 環であるとは、 A は Cohen-Macaulay 局所環であってかつ $K_A \cong A$ であるときにいう。この意味では、Gorenstein 環の理論は、正準加群の理論の一部として捉えることが出来る。つまり、正準加群はどのようなものなのか? というのを調べていくことが本報告の研究方法の根幹である。なお、局所環 A が Cohen-Macaulay 環であることと、整数 i が $i \neq \dim R - \dim A$ (即ち、整数 i が正準加群になる番号以外の所) なるとき、

$$\text{Ext}_R^i(A, R) = (0)$$

が成り立つことは同値である。このような事が起こっていると、正準加群は非常に扱いやすい。例えば、局所環 A の正則列で割ってやると、次元が 0 の場合を考えればよいというような芸当が出来たりする。他方、 A が Cohen-Macaulay 局所環とは限らない場合は異様である。正準加群を正則元で割ってやっても、それは、割ってやった環上の正準加群とは限らない。本報告の主題である Rees 代数が Gorenstein 環であっても、基礎環 A が Cohen-Macaulay 環であるとは限らないので、このような異様な基礎環の正準加群を丹念に調べていくことが、本研究の肝となっている。

次に、次数付きの正準加群を見ていきたい。 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とする。 \mathbb{N} -次数環 $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S_i$ は、環 S_0 上 1 次元で生成される有限生成代数である。以下、 S_0 は正則局所環 R の準同型像であるとする。 R 上の不定元 X_1, X_2, \dots, X_ℓ を、 S の 1 次元生成元に対応させることによって、 S は \mathbb{N} -次数付き多項式環 $T = R[X_1, X_2, \dots, X_\ell]$ の準同型像となる。

$$K_S = \text{Ext}_T^m(S, T(-\ell))$$

(ここで、 $m = \dim T - \dim S$ である) とおき、 S の次数付き正準加群と呼ぶ。可換環論で次数環 S が Gorenstein 環であるとは、任意の $P \in \text{Spec } S$ に対して、その局所化 S_P が Gorenstein 局所環となる時にいうが、後藤四郎・渡辺敬一 [12] によって、 a -不変量

$$a(S) = -\min\{n \in \mathbb{Z} \mid [K_S]_n \neq (0)\}$$

が定義され、次数環 S が Gorenstein 環であることは、 S は Cohen-Macaulay 環であって、次数 S -加群として $K_S \cong S(a)$ であることと同値であることが知られている。(但し、 $a = a(S)$ である。) なお、局所環 A (もしくは、次数環 S) が quasi-Gorenstein 環であるとは、 A -加群として $K_A \cong A$ (もしくは、次数 S -加群として $K_S \cong S(a)$) であるときにいう。つまり、Gorenstein 性の定義から Cohen-Macaulay 性を除いたものである。

さて、ブローアップ代数の考察を行おう。以下、 $I (\neq A)$ は A のイデアルとする。Rees 代数の Krull 次元は、ほとんどの場合が $\dim \mathcal{R}(I) = \dim A + 1$ となる ([26])。例えば、 $\text{ht}_A I > 0$ なら、 $\dim \mathcal{R}(I) = \dim A + 1$ である。本報告を通して、Rees 代数の Krull 次元は $\dim A + 1$ であると仮定する。 $\text{grade}_A I$ によって、 I に含まれる正則列の長さの最大値を表す。まず、次の Rees 代数の基本事実から始めたい。

補題 6. *Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環であるならば、 $\text{grade}_A I > 0$ である。*

実際、環として $\mathcal{R}(I)/\mathcal{R}(I)_+ \cong A$ であり、 $\dim \mathcal{R}(I) = \dim A + 1$ であるので、 $\text{ht}_{\mathcal{R}(I)} \mathcal{R}(I)_+ = 1$ となる。このとき、 $\mathcal{R}(I)_+$ の中に斉次元の非零因子が取れるので、それを ct^i (但し、 i は正整数で、 $c \in I^i$ である) と表すと、 c が I 内の非零因子である。

このような訳で以下、 $\text{grade}_A I > 0$ であると仮定する。 $\mathcal{R}(I)$ の環構造を $\mathcal{G}(I)$ の環構造と $\mathcal{G}(I)$ の a -不変量によって特徴付けることは、後藤・下田 [10] 1982 年の成功によって幕を開けたが、この方向での Gorenstein Rees 代数研究における金字塔は、次の池田信の結果である。

定理 7 (池田 [18], 1986 年). $\text{grade}_A I \geq 2$ とする。このとき $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環ならば、次の 2 条件は同値である。

- (1) $\mathcal{R}(I)$ は Gorenstein 環である。
- (2) $K_A \cong A$ かつ $K_{\mathcal{G}(I)} \cong \mathcal{G}(I)(-2)$ である。

この定理により, $\text{grade}_A I \geq 2$ なるとき, Gorenstein Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の与える影響は, A と $\mathcal{G}(I)$ は共に quasi-Gorenstein 環であり, $\mathcal{G}(I)$ の a -不変量は -2 に決まってしまうということが分かる。とても美しい結果であるが, 見惚れてしまい $\text{grade}_A I = 1$ の場合を見過ごしてしまいそうになる。 $\text{grade}_A I = 1$ のときには, もう少し歪んだ基礎環や随伴次数環の情報が得られる。なお, Hochster-Roberts の例 1 は, $\text{grade}_A I = 1$ の場合となっている。重要な場合で, 見過ごしてはならないと思う。これからは, $\text{grade}_A I = 1$ の場合も含めて, 詳しく見ていきたい。まず, ブローアップ代数の a -不変量について, 以下の 2 つの補題はブローアップ代数の基本事実として知られている。

補題 8. 次が正しい。

1. $a(\mathcal{R}(I)) = -1$ である。
2. $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環ならば, $a(\mathcal{G}(I)) < 0$ である。
3. $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環ならば, $a(\mathcal{G}(I)) = \begin{cases} -2 & (\text{grade}_A I \geq 2 \text{ の場合}) \\ -1 & (\text{grade}_A I = 1 \text{ の場合}) \end{cases}$ である。

上の主張 3 に注目してほしい。 $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環であるならば, 随伴次数環 $\mathcal{G}(I)$ の a -不変量は -2 か -1 かで固定されてしまう。一方, $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環となる例で, $\mathcal{G}(I)$ の a -不変量を任意の負の値を選んで作ることが出来る。例えば, 基礎環 A が Cohen-Macaulay であるときには, J. Barshay [1] 1973 年によって, A のパラメータイデアル \mathfrak{q} の Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay 環であり, さらに, $\mathcal{G}(\mathfrak{q})$ の a -不変量については, 次の事実がわかっている。

補題 9. A が d 次元 Noether 局所環で, \mathfrak{q} が A のパラメータイデアルであるならば,

$$a(\mathcal{G}(\mathfrak{q})) = -d$$

である。

では, $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環であるとき, なぜ $\mathcal{G}(I)$ の a -不変量は -1 や -2 に限定されるような振る舞いをするのだろうか? ここでは少し天下りではあるが, 次の後藤四郎・西田康二の結果によって理解したい。(彼らの結果は, 単に「イデアル」のブローアップ代数ではなく, 一般的に「イデアルのフィルトレーション」のブローアップ代数を考察し

ている。この報告では、簡単のために「イデアル」のブローアップ代数として、結果を紹介している。）

定理 10 (後藤・西田 [8] 1994 年). $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環であるならば、次数 $\mathcal{G}(I)$ -加群の完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{G}(I)(-2) \rightarrow \mathbf{K}_{\mathcal{G}(I)} \rightarrow \mathrm{Ext}_A^1(A/I, A)(-1) \rightarrow 0$$

が存在する。

次数環としての自然な準同型 $\mathcal{G}(I) \rightarrow \mathcal{G}(I)/\mathcal{G}(I)_+ = A/I$ によって、 $\mathrm{Ext}_A^1(A/I, A)$ を 0 次のみの次数 $\mathcal{G}(I)$ -加群と見ている。従って $\mathrm{Ext}_A^1(A/I, A)(-1)$ は 1 次のみの次数 $\mathcal{G}(I)$ -加群である。

任意の整数 n と \mathbb{N} -次数環 S 上の \mathbb{Z} -次数加群 M に対して、 $M_{\geq n} = \bigoplus_{i \geq n} M_i$ のように表すこととしよう。すると、この定理は、次数 $\mathcal{G}(I)$ -加群として

$$[\mathbf{K}_{\mathcal{G}(I)}]_{\geq 2} \cong \mathcal{G}(I)(-2)$$

であり、 A -加群として

$$[\mathbf{K}_{\mathcal{G}(I)}]_1 \cong \mathrm{Ext}_A^1(A/I, A)$$

となっていることを言っている。このような訳で、 $\mathrm{grade}_A I$ の振る舞いによって $\mathcal{G}(I)$ の a -不変量が決定される。

池田信の定理 7 の $\mathrm{grade}_A I = 1$ の場合も含めた主張は、次のように端的に纏めることができる。

定理 11 (後藤・西田 [8] 1994 年, Trung-Viêt-Zarzuela [25] 1995 年). Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環ならば、次の 2 条件は同値である。

- (1) $\mathcal{R}(I)$ は Gorenstein 環である。
- (2) $[\mathbf{K}_{\mathcal{G}(I)}]_{\geq 2} \cong \mathcal{G}(I)(-2)$ である。

つまり、 $\mathbf{K}_{\mathcal{G}(I)}$ の 2 次以上の所が問題で、1 次の所はどうなっても構わないということである。なお、池田の定理 7 によると、 $\mathrm{grade}_A I \geq 2$ のときには、 $\mathcal{R}(I)$ は Gorenstein 性は、基礎環 A が quasi-Gorenstein であることを導くが、 $\mathrm{grade}_A I = 1$ の場合はそうとはならない。しかしながら、次のことがわかっている。それを注意してこの節を終わりたい。

命題 12 (後藤・西田 [8]). $\mathcal{R}(I)$ は Gorenstein 環であるならば, A -加群として

$$K_A \cong \text{Hom}_A(I, A)$$

が成り立つ。

なお, 上の命題によると, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環であるならば, 自然な A -加群の完全列 $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ の $\text{Hom}_A(\quad, A)$ を取ることにより, A -加群の完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow K_A \rightarrow \text{Ext}_A^1(A/I, A) \rightarrow 0$$

を得る。よって, $\text{grade}_A I \geq 2$ なるときには $K_A \cong A$ となり, 池田の結果を導く。

3 Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ の Gorenstein 性

この節では, 第 1 節で紹介した下田保博の結果を, 高次元化した結果を紹介したい。つまり, この節の標題にあるようなパラメータイデアル \mathfrak{q} の d 乗の Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ の Gorenstein 性について解説する。ここで $d = \dim A \geq 2$ である。なぜ d 乗なのだろうか? この辺から探っていきたい。

n を正整数とする。イデアル I の n 冪を取ったイデアル I^n の随伴次数環 $\mathcal{G}(I^n)$ の a -不変量に関する次の L. T. Hoa の公式を紹介することから始める。ここで, $[-]$ はガウス記号を表す。即ち, 有理数 q に対して, $[q] = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid i \leq q\}$ と定めるものである。

定理 13 (Hoa [17] 1993 年). I を \mathfrak{m} -準素イデアルとする。このとき, 等式

$$a(\mathcal{G}(I^n)) = \left[\frac{a(\mathcal{G}(I))}{n} \right]$$

が成り立つ。

補題 9 によるとパラメータイデアルの随伴次数環の a -不変量は $-d$ であった。そうすると次の事実が単純計算によって得られる。

系 14. $d = \dim A \geq 2$ とし, \mathfrak{q} を A のパラメータイデアルとすると, 次が正しい。

1. $n = d - 1 \implies a(\mathcal{G}(\mathfrak{q}^n)) = -2$ である。
2. $n = d \implies a(\mathcal{G}(\mathfrak{q}^n)) = -1$ である。

実は, Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^n)$ が Gorenstein 環であるとき, \mathfrak{q} が A の標準的なパラメータイデアルであるならば, 上の逆が正しい。このことを見てみよう。まず, $a(\mathcal{G}(\mathfrak{q}^n)) = -2$ の場合, 即ち $\text{grade}_A \mathfrak{q} \geq 2$ の場合には, 次のような非常に強いことが成り立つ。

定理 15 (Herrmann-Hyry-Korb [13], 1998 年). A のパラメータイデアル \mathfrak{q} が標準的であり, ある正整数 n が存在して Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^n)$ が Gorenstein 環であるとせよ. このとき, $\text{grade}_A \mathfrak{q} \geq 2$ であるならば, 基礎環 A は Gorenstein 環である.

つまり, $\text{grade}_A \mathfrak{q} \geq 2$ なるときには, 基礎環 A が Gorenstein 環になってしまうような影響を, Gorenstein Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^n)$ は与える. 基礎環 A が Gorenstein 環や Cohen-Macaulay 環である場合には, Rees 代数の Gorenstein 性は非常に深く研究され, 多くの結果が発表されている. この報告では, 基礎環 A が非 Cohen-Macaulay 環である場合に焦点を絞って解説していることを了解してほしい. 詳細を詳しく述べないが, 基礎環 A が 2 次元以上の Gorenstein 局所環であるときには, すでに大石彰によって, Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^n)$ が Gorenstein になるならば, $n = d - 1$ でなくてはならないことが示されている (大石 [21], 1993 年). 従って, これら 2 つの結果を合わせると, 標準的なパラメータイデアル \mathfrak{q} に関して, 系 14 の主張 1 の逆が正しいことが分かる.

定理 15 の教えてくれていることは, 基礎環が非 Cohen-Macaulay 環である場合は, $\text{grade}_A \mathfrak{q} = 1$ のときに限るということである. この場合の結果は当時からほとんど見当たらないが, 近年, 系 14 の主張 2 の逆について, 後藤四郎との共同研究 [7] によって次のような結果を得た. 以下, この節の結果のすべては [7] 中にあるものの紹介である.

命題 16. $d = \dim A \geq 2$ とする. A のパラメータイデアル \mathfrak{q} が標準的であり, ある正整数 n が存在して Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^n)$ が Gorenstein 環であるとせよ. このとき, $\text{grade}_A \mathfrak{q} = 1$ であるならば, $n = d$ である.

次の結果を記述するために, 記号を準備したい. 有限生成 A -加群 M に対して,

$$r_A(M) = \ell_A(\text{Ext}_A^{\text{depth}_A M}(A/\mathfrak{m}, M))$$

とおき, M の型 (type) と呼ぶ. 基礎環 A が Cohen-Macaulay 環で $M = A$ の場合には, A が Gorenstein 環であることと, $r_A(A) = 1$ であることは同値である. しかしながら, いま, 基礎環 A は Cohen-Macaulay であるとは限らないので, $r_A(A) = 1$ とはどのようなことなのか, 余り良く分かっていないと思われる. なお, $\ell_A(M) < \infty$ のときには,

$$r_A(M) = \ell_A(\text{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, M))$$

であるので, $r_A(M)$ は M の礎石 (socle) の A/\mathfrak{m} 上ベクトル空間としての次元に他ならない. このときには, 型は良く計算される不変量である. また, A の \mathfrak{m} -準素イデアル I に対して, $e_I(A)$ によって I の重複度を表す.

次の定理は, 下田保博の定理 5 の一般次元への拡張である.

定理 17. $d = \dim A \geq 2$ とし, $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ を A のパラメータイデアルとする。非負整数 i で $i \neq 1, d$ なるものに対して $H_m^i(A) = (0)$ であると仮定する。 $\mathfrak{c} = (0) :_A H_m^1(A)$ とおく。このとき, $\ell_A(H_m^1(A)) < \infty$ であるとする, 次の3条件は同値である。

- (1) Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ は Gorenstein である。
- (2) $H_m^1(A) \neq (0)$, $r_A(H_m^1(A)) = 1$, $\mathfrak{c} = \sum_{i=1}^d (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d)A :_A a_i$ である。
- (3) $\text{depth } A = 1$, $r_A(A) = 1$, $e_c(A) = 2\ell_A(A/\mathfrak{c})$, \mathfrak{q} は \mathfrak{c} の節減である。

このとき, 基礎環 A の (S_2) 化 \tilde{A} は Gorenstein 環であり, 等式 $\mathfrak{c} = A : \tilde{A}$ と等式

$$\ell_A(\tilde{A}/\mathfrak{c}) = 2\ell_A(\tilde{A}/A)$$

が成り立つ。

上の定理は Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ の Gorenstein 性を, いくつかの不変量を用いて, 基礎環 A の中だけの言葉で表している。ここで, \mathfrak{q} は \mathfrak{c} の節減であるとは, $\mathfrak{c}^{m+1} = \mathfrak{q}\mathfrak{c}^m$ となる非負整数 m が存在するときをいう。また, 環 A の (S_2) 化とは, 環 A を含む全商環 $Q(A)$ 内の有限生成 A -部分加群であり, Serre の (S_2) 条件を満たす最小のものである。このようなとき, コロン「:」は $Q(A)$ 内で考えている。つまり, $A : \tilde{A} = \{f \in Q(A) \mid \tilde{A} \cdot f \subseteq A\}$ である。なお, 基礎環 A が Buchsbaum 局所環であるときには, 上の定理は次のように端的に書き表すことができる。

系 18. 環 A は Buchsbaum 局所環であり, $d = \dim A \geq 2$ で $\text{depth } A = 1$ なるものと仮定する。このとき, 次の2条件は同値である。

- (1) Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ は Gorenstein 環である。
- (2) $e_m(A) = 2$ であり, \mathfrak{q} は \mathfrak{m} の節減である。

このとき, 非負整数 i で $i \neq 1, d$ なるものに対して, $H_m^i(A) = (0)$ である。

なお, Hochster-Roberts の例 $A = k[[x^2, y, x^3, xy]]$ は Buchsbaum 局所環となっている。また, $\mathfrak{q} = (x^2, y)A$ は \mathfrak{m} の節減であり, $e_m(A) = 2$ であることが簡単に計算できる。従って, 上の系を使っても, Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^2)$ は Gorenstein 環であることが分かる。

また, Buchsbaum 局所環ではない環 $A = k[[x^2, y, x^5, xy]]$ を見てみよう。 $\mathfrak{q} = (x^4, y)A$ とおくと, 上の定理を使って, Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^2)$ は Gorenstein 環となっていることが分かる。実際, $\mathfrak{c} = (x^4, xy, y)A$ であり, \mathfrak{q} は \mathfrak{c} の節減となっていて, $e_c(A) = 4 = 2\ell_A(A/\mathfrak{c})$ であると計算できる。

4 Gorenstein Rees 代数の具体例

この節で紹介する結果は、特に断らない限り遠藤直樹・後藤四郎・松岡直之（明治大学）との最近の共同研究 [3] の一部の紹介である。初めに、定理 17 の条件を、 A の全商環内のある拡大環 B の言葉で翻訳して、見やすくした次の結果を挙げたい。

定理 19. 次の 2 条件 (1) と (2) は同値である。

- (1) (i) Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay 環であり,
(ii) Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ は Gorenstein 環である。
- (2) 環 A の Cohen-Macaulay 拡大環 B が存在して、次の 3 条件を満たす。
 - (i) $0 < \ell_A(B/A) < \infty$ である。
 - (ii) $r_A(B/A) = 1$ である。
 - (iii) $A : B = \mathfrak{q}B$ である。

このとき、 B は Gorenstein 環である。

定理 17 の条件 (3) を見返してほしい。Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ の Gorenstein 性を基礎環 A だけの言葉で表現しているが、実際のところ $r_A(A) = 1$ であるような局所環とは如何なるものなのかを捉え難い。一方で、上の定理のように、基礎環 A とその拡大環 B との「差」の条件という視点に立つことによって、Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ が Gorenstein となる基礎環 A の具体例が大量に作りやすくなった。この節の目標は、上の条件 (2) 内の (i), (ii), (iii) を満たす高次元の具体例を系統的かつ大量に与えることである。

命題 20. k を体とし、 t_1, t_2, \dots を k 上の不定元とする。任意の正整数 i に対して、 $B_i = k[[t_1, t_2, \dots, t_i]]$ とおく。 n を正整数とする。このとき、 A_n は B_n の部分環で、 $0 < \ell_{A_n}(B_n/A_n) < \infty$ をみたすものとする。すると、 $\dim A_n = n$, $\text{depth } A_n = 1$ である。このとき、

$$A_{n+1} = A_n + t_{n+1}B_{n+1}$$

とおくと、 A_{n+1} は B_{n+1} の部分環で $\dim A_{n+1} = n + 1$, $\text{depth } A_{n+1} = 1$ である。さらに、次が成り立つ。

1. $0 < \ell_{A_{n+1}}(B_{n+1}/A_{n+1}) < \infty$ である。
2. $r_{A_{n+1}}(B_{n+1}/A_{n+1}) = r_{A_n}(B_n/A_n)$ である。
3. $A_{n+1} : B_{n+1} = (A_n : B_n)B_{n+1} + t_{n+1}B_{n+1}$ である。

この結果の言っていることは「下の環 A_n 」の必要な情報が「上の環 A_{n+1} 」に持ち上がるということである。よって、低次元の良い具体例を作れば、いくらでもその次元を上げられる。このことを Hochster-Roberts の例 $k[[x^2, y, x^3, xy]]$ で見てみよう。上の結果と記号をそろえて、この例を

$$k[[t_1^2, t_2, t_1^3, t_1 t_2]]$$

と表しておく。すると、この環も下から持ち上がってくるものと考えることが出来る。実際、 $B_1 = k[[t_1]]$ の部分環

$$A_1 = k[[t_1^2, t_1^3]]$$

を考えると、Hochster-Roberts の例は

$$\begin{aligned} k[[t_1^2, t_2, t_1^3, t_1 t_2]] &= k[[t_1^2, t_1^3, t_2, t_1 t_2]] \\ &= k[[t_1^2, t_1^3]] + t_2 k[[t_1, t_2]] \\ &= A_1 + t_2 B_2 \\ &= A_2 \end{aligned}$$

となっている。ここで、 $A_1 = k[[t_1^2, t_1^3]]$ は Gorenstein 局所環であることに注意しよう。その極大イデアルを \mathfrak{m}_1 と書く。 A_1 -加群の完全列

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_1/A_1 \rightarrow 0$$

の $\text{Hom}_{A_1}(A_1/\mathfrak{m}_1, \quad)$ を取り、 A_1 -加群の完全列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{A_1}(A_1/\mathfrak{m}_1, B_1/A_1) \rightarrow \text{Ext}_{A_1}^1(A_1/\mathfrak{m}_1, A_1)$$

を得る。 $\text{Ext}_{A_1}^1(A_1/\mathfrak{m}_1, A_1)$ は A_1/\mathfrak{m}_1 と同型であるので、 $\text{Hom}_{A_1}(A_1/\mathfrak{m}_1, B_1/A_1)$ もそう。このような訳で、等式 $r_{A_1}(B_1/A_1) = 1$ を得る。また、

$$\begin{aligned} A_1 : B_1 &= k[[t_1^2, t_1^3]] : k[[t_1]] \\ &= t_1^2 B_1 \end{aligned}$$

である。これらの情報が持ち上がって、 $0 < \ell_{A_2}(B_2/A_2) < \infty$, $r_{A_2}(B_2/A_2) = 1$,

$$\begin{aligned} A_2 : B_2 &= (A_1 : B_1)B_2 + t_2 B_2 \\ &= (t_1^2 B_1)B_2 + t_2 B_2 \\ &= (t_1^2, t_2)B_2 \end{aligned}$$

が、命題 20 により、得られる。

故に, $\mathfrak{q} = (t_1^2, t_2)A_2$ とおけば定理 19 により $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^2)$ は Gorenstein 環である。次に, 環

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2 + t_3 B_3 \\ &= k[[t_1^2, t_1^3, t_2, t_1 t_2]] + t_3 k[[t_1, t_2, t_3]] \\ &= k[[t_1^2, t_1^3, t_2, t_1 t_2, t_3, t_1 t_3]] \end{aligned}$$

を考える。命題 20 により, 情報が持ち上がって, $0 < \ell_{A_3}(B_3/A_3) < \infty, r_{A_3}(B_3/A_3) = 1,$

$$\begin{aligned} A_3 : B_3 &= k[[t_1^2, t_1^3, t_2, t_1 t_2, t_3, t_1 t_3]] : k[[t_1, t_2, t_3]] \\ &= (t_1^2, t_2, t_3)B_3 \end{aligned}$$

が導かれる。従って $\mathfrak{q} = (t_1^2, t_2, t_3)A_3$ とおけば, $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^3)$ は Gorenstein 環である。このように, 何処かの番号 n で, 条件

- (i) $0 < \ell_{A_n}(B_n/A_n) < \infty$ である。
- (ii) $r_{A_n}(B_n/A_n) = 1$ である。
- (iii) $A_n : B_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)B_n$ となる $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ が存在する。

をみたく B_n のある部分環 A_n を見付けることが出来れば, 上のような作業をして, その環 A_n から次元 n をどんどん上げて基礎環を作ることが出来て, Gorenstein Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^n)$ が得られる。では, 起点となるような環 A_1 の例をいくつか挙げてみたい。なお, 下の主張 1 は渡辺敬一 [27] の結果からの直接の帰結である。

例 21. k を体とし, t_1, t_2, \dots を k 上の不定元とする。任意の正整数 i に対して, $B_i = k[[t_1, t_2, \dots, t_i]]$ とおく。 n を正整数とする。このとき, 次が成り立つ。

1. $n = 1$ のとき (つまり $B_1 = k[[t_1]]$ のとき), H を対称的な数値半群で $1 \notin H$ なるものとすれば, H の数値半群環 $A_1 = k[[H]]$ は上の 3 条件を満たす。
2. $n = 1$ のとき $A_1 = k[[t_1^2 + t_1^3, t_1^4, t_1^6]]$ は上の 3 条件を満たす。なお, これは数値半群環ではない。

もう少し具体例を与えたい。一般の可換環 R と R -加群 M に対して, $R \times M$ によって R 上 M のイデアル化を表すこととする。即ち, R -加群としては $R \times M = R \times M$ であり, これに積

$$(r, m) \cdot (r', m') = (rr', rm' + r'm)$$

を考え, 環構造を入れたものである。すると, M と R -加群として同型の $(0) \times M$ は $R \times M$ のイデアルとなっている。これが「 M のイデアル化」という名称の由来である。

射影 $\rho: R \times M \rightarrow R$ は環の準同型写像であり、これにより R -加群を $R \times M$ -加群とみなす。 (R, \mathfrak{n}) が局所環なら、 $R \times M$ も局所環で、その極大イデアルは $\mathfrak{n} \times M$ である。射影 ρ は、環としての同型 $(R \times M)/(\mathfrak{n} \times M) \cong R/\mathfrak{n}$ を導く。

命題 22. (R, \mathfrak{n}) を Gorenstein 局所環とし、 $d = \dim R \geq 2$ とする。 Q を R のパラメータイデアルとし、 $A = R \times Q$ によって R 上 Q のイデアル化を、 $B = R \times R$ によって R 上 R のイデアル化を表す。 A -加群として

$$B/A = (R \times R)/(R \times Q) \cong R/Q$$

となっている。よって、 $\ell_A(B/A) = \ell_R(R/Q) < \infty$ であり、 $r_A(B/A) = r_R(R/Q) = 1$ である。さらに、

$$A : B = (0) :_A B/A = (0) :_A R/Q = Q \times Q = Q(R \times R) = QB$$

である。つまり、条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たす。よって、 $\mathcal{R}(\mathfrak{q}^d)$ は Gorenstein 環である。

次に、可換環 R とそのイデアル I に対して、2つの自然な環の準同型写像 $R \rightarrow R/I$ のファイバー積

$$R \times_{R/I} R = \{(x, y) \mid x, y \in R, x \equiv y \pmod{I}\}$$

を考える。これは直積環 $R \times R$ の部分環である。 $\rho: R \times_{R/I} R \rightarrow R$ を $\rho(x, y) = x$ と定義すると、 ρ は環の準同型写像であり、これにより R -加群を $(R \times_{R/I} R)$ -加群とみなす。 $A = R \times_{R/I} R$ とおき、 $B = R \times R$ とおく。 B は A の拡大環であり、 A -加群の完全列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\varphi} R/I \rightarrow 0$$

が作れる。ここで $\iota: A \rightarrow B$ は包含写像であり、 $\varphi: B \rightarrow R/I$ は $\varphi(x, y) = x - y \pmod{I}$ で定義されるものである。よって、 A -加群として、

$$B/A \cong R/I$$

である。ここで、 R/I は有限生成 A -加群であるので、 B もそう。よって R が Noether 環であるなら、 A もそうである。また、 (R, \mathfrak{n}) が局所環で $I \subseteq \mathfrak{n}$ であるなら、 A は局所環であり、 \mathfrak{m} を A の極大イデアルとすると、環の準同型写像 ρ は、環の同型

$$A/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{n}$$

を導く。

命題 23. (R, \mathfrak{n}) を Gorenstein 局所環とし, $d = \dim R \geq 2$ とする. Q を R のパラメータイデアルとし, ファイバー積 $A = R \times_{R/Q} R$ を考える. 即ち,

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in R, x \equiv y \pmod{Q}\}$$

である. $B = R \times R$ とおく. B は A の拡大環で, 有限生成 Cohen-Macaulay A -加群である. さらに, $\ell_A(B/A) = \ell_R(R/Q) < \infty$ であり, $\mathfrak{r}_A(B/A) = \mathfrak{r}_R(R/Q) = 1$ である.

$$\begin{aligned} A : B = (0) :_A B/A &= (0) :_A R/Q \\ &= \{(x, y) \in A \mid x \in Q, y \in R\} \\ &= Q \times Q \\ &= Q(R \times R) = QB \end{aligned}$$

である. つまり, 条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たす. よって, $\mathcal{R}(q^d)$ は Gorenstein 環である.

実は, 上で考察したイデアル化とファイバー積は統一的に扱うことが出来る. 最後に, 一般化されたイデアル化の例を紹介したい. 可換環 R とそのイデアル I , 元 $\alpha \in R$ に対して, $R \times_{\alpha} I$ によって, α による R 上 I の一般化されたイデアル化を表すこととする. 即ち, R -加群としては $R \times_{\alpha} I = R \times I$ であり, これに積

$$(r, i) \cdot (r', i') = (rr', ri' + r'i + \alpha(ii'))$$

を考え, 環構造を入れたものである. これは, $\alpha = 0$ のときには, イデアル化 $R \times I$ そのものであり, $\alpha = 1$ のときには, ファイバー積 $R \times_{R/I} R$ と環として同型となっている (そのファイバー積への対応は $r \in R$ と $i \in I$ に対して, $(r, i) \mapsto (r, r+i)$ である).

射影 $\rho : R \times_{\alpha} I \rightarrow R$ は環の準同型写像であり, これにより R -加群を $R \times_{\alpha} I$ -加群とみなす. (R, \mathfrak{n}) が局所環でありかつ, $I \neq R$ であるかまたは $\alpha \in \mathfrak{n}$ なら, $R \times_{\alpha} I$ も局所環で, その極大イデアルは $\mathfrak{n} \times_{\alpha} I$ である. 射影 ρ は, 環としての同型

$$(R \times_{\alpha} I)/(\mathfrak{n} \times_{\alpha} I) \cong R/\mathfrak{n}$$

を導く.

命題 24. (R, \mathfrak{n}) を Gorenstein 局所環とし, $d = \dim R \geq 2$ とする. Q を R のパラメータイデアルとし, $A = R \times_{\alpha} Q$, $B = R \times_{\alpha} R$ とおく. B は A の拡大環であり, A -加群として

$$B/A = (R \times_{\alpha} R)/(R \times_{\alpha} Q) \cong R/Q$$

となっている。よって, $\ell_A(B/A) = \ell_R(R/Q) < \infty$ であり, $r_A(B/A) = r_R(R/Q) = 1$ である。さらに,

$$A : B = (0) :_A B/A = (0) :_A R/Q = Q \times Q = Q(R \times R) = QB$$

である。つまり, 条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たす。よって, $\mathcal{R}(q^d)$ は *Gorenstein* 環である。

参考文献

- [1] J. Barshay, *Graded algebras of powers of ideals generated by A-sequences*, J. Algebra, **25** (1973), 90–99.
- [2] H. Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings*. Math. Z. **82** (1963), 8–28.
- [3] N. Endo, S. Goto, S.-i. Iai and N. Matsuoka, *When are the rings $I : I$ Gorenstein?*, arXiv:2111.13338v2.
- [4] D. Gorenstein, *An arithmetic theory of adjoint plane curves*, Trans. Amer. Math. Soc., **72** (1952), 414–436.
- [5] S. Goto, *On the Cohen-Macaulayfication of certain Buchsbaum rings*, Nagoya Math. J. **80** (1980), 107–116.
- [6] S. Goto, *Blowing-up of Buchsbaum rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **72** (1983), 140–162.
- [7] S. Goto and S.-i. Iai, *Gorensteinness in Rees algebras of powers of parameter ideals*, arXiv:2112.06676v2.
- [8] S. Goto and K. Nishida, *The Cohen-Macaulay and Gorenstein Rees algebras associated to filtrations*, Mem. Amer. Math. Soc., **110**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [9] S. Goto and Y. Shimoda, *On Rees algebras over Buchsbaum rings*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), no. 4, 691–708.
- [10] S. Goto and Y. Shimoda, *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979), 201–231, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **68**, Dekker, New York, 1982.
- [11] S. Goto and K. Yamagishi, *The theory of unconditioned strong d -sequences and modules of finite local cohomology*, preprint.

- [12] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On graded rings I*, Math. Soc. Japan, **30** (1978), no. 2, 179-213.
- [13] M. Herrmann, E. Hyry, and T. Korb, *On Rees algebras with a Gorenstein Veronese subring*, J. Algebra **200** (1998), no. 1, 279-311.
- [14] M. Herrmann, S. Ikeda, and U. Orbanz, *Equimultiplicity and blowing up (with an appendix by B. Moonen)*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [15] M. Hochster and J. L. Roberts, *Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay*, Advances in Mathematics **13** (1974), 115-175.
- [16] M. Herrmann, J. Ribbe, and S. Zarzuela, *On the Gorenstein property of Rees and form rings of power of ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), No. 2, 631-643.
- [17] L. T. Hoa, *Reduction numbers and Rees algebras of powers of an Ideal*, Proc. Amer. Math. Soc., **119** (1993), no. 2, 415-422.
- [18] S. Ikeda, *On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings*, Nagoya Math. J., **102** (1986), 135-154.
- [19] T. Kawasaki, *On arithmetic Macaulayfication of Noetherian rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 123-149.
- [20] T. Kawasaki, *Finiteness of Cousin cohomologies*, Trans. Amer. Math. Soc., **360** (2008), 2709-2739.
- [21] A. Ooishi, *On the Gorenstein property of the associated graded ring and the Rees algebra of an ideal*, J. Algebra **155** (1993), 397-414.
- [22] M. Rosenlicht, *Equivalence relations on algebraic curves*, Ann. of Math., **56** (1952), 169-191.
- [23] Y. Shimoda, *A note on Rees algebras of two-dimensional local domains*, J. Math. Kyoto Univ., **19** (1979), 327-333.
- [24] I. Swanson and C. Huneke, *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **336**, Cambridge Univ. Press, 2006.
- [25] N. V. Trung, D. Q. Viêt, and S. Zarzuela, *When is the Rees algebra Gorenstein?*, J. Algebra **175** (1995), 137-156.
- [26] G. Valla, *Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay*, J. Algebra, **42** (1976), 537-548.
- [27] K.-i. Watanabe, *Some examples of one dimensional Gorenstein domains*, Nagoya Math. J., **49** (1973), pp. 101-109.

Samuel による UFD 判定の一般化とその応用

長峰 孝典

(小山工業高等専門学校 一般科)*

概要

本稿では、1964 年に P. Samuel が構成した UFD 判定の一般化を紹介する。その応用として、新たな UFD 判定および 3 項式 (3 つの単行式) で定義される環が UFD となるための条件を与える。

1 はじめに

本稿は D. Daigle, G. Freudenburg との共著論文 [DFN22] に基づく。[DFN22] は UFD (一意分解整域) に関する研究成果をまとめたものである。UFD は基本的な環の種類ではあるが、その扱いは簡単ではない。例えば、 A が UFD であったとしても、その剰余環 A/I が UFD になるとは限らない。一方で、アフィン代数幾何学の諸問題を考える際には、随所に UFD が現れる。以下に、著者が取り組んでいる 2 つの問題を紹介する。

問題 1.1. (Zariski の消去問題) k を体、 A を k 上有限生成な整域とする。このとき、 $A[T] \cong k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ ならば $A \cong k[Y_1, \dots, Y_n]$ となるか? ($\iff \text{Spec } A \times \mathbb{A}_k^1 \cong \mathbb{A}_k^{n+1}$ のとき $\text{Spec } A \cong \mathbb{A}_k^n$ か?)

問題 1.1 の仮定 “ $A[T] \cong k[X_1, \dots, X_{n+1}]$ ” をみたすとき、 A は UFD であることに注意する。 $n \leq 2$ の場合、この問題は肯定的である。なお、 $n = 1$ のときは、Abhyankar, Heinzer および Eakin [AEH72] による。 $n = 2$ の場合、 k の標数が 0 のときは藤田 [Fuj79]、宮西および杉江 [MS80] によって、 k が完全体の場合は Russell [Rus81] によって示された。 k が一般の体の場合は、Bhatwadekar および Gupta [BG15] により示された (小島 [Koj16] による別証明もある)。

しかしながら、 $n \geq 3$ でかつ k の標数が正の場合は Gupta [Gup14a], [Gup14b] による反例がある。なお、 $n \geq 3$ でかつ k の標数が 0 の場合は未解決である。

次に述べる問題は、Hilbert の第 14 問題の特殊な場合になっている。

* t.nagamine14@oyama-ct.ac.jp

問題 1.2. k を標数 0 の体とし, $\mathbb{G}_a = \text{Spec } k[T]$ (基礎体 k の加法群) が多項式環 $k[X_1, \dots, X_n]$ に作用するとする. このとき, 不変式環 $k[X_1, \dots, X_n]^{\mathbb{G}_a}$ は k 上有限生成か?

\mathbb{G}_a 作用による不変式環 $k[X_1, \dots, X_n]^{\mathbb{G}_a}$ は $n - 1$ 次元の UFD となる ([Fre17]などを参照). $n \leq 3$ のとき, 問題 1.2 は Zariski [Zar54] の結果から肯定的となる (Zariski's finiteness theorem). 一方 $n \geq 5$ のときには反例がある. 特に, $n = 5$ の場合の反例は Daigle および Freudenburg [DF99] により与えられた. しかしながら, $n = 4$ の場合は未解決である. 少なくとも, 生成元の個数に上限がないことはわかっている ([DF01], [DFN22, Example 4.4]).

以上の通り, これら 2 つの問題には共通して UFD が現れる. 特に, それぞれの未解決の場合は, 3次元の UFD を考えることになる*1. そのため, UFD (特に 3次元) をよく調べれば, これら 2 つの問題への新たなアプローチが見出せるのではないかと考えたのが [DFN22] の始まりである.

本稿では第 67 回代数学シンポジウムでの講演内容に基づき, 以下の 4 種類の環に対する UFD 判定を紹介する.

- (1) $A[X]/(aX - b)$, ただし $a, b \in A$ (定理 3.1).
- (2) $A[Z]/(Z^c - F)$, ただし $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $F \in A$ (定理 3.4).
- (3) $A[Z]/(aZ^n - b)$, ただし $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $a, b \in A$ (定理 3.6).
- (4) $A[Z_1, \dots, Z_n]/(Z_1^{e_1} \cdots Z_n^{e_n} - F)$, ただし $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $F \in A$ (定理 3.7).

それぞれの定理では, A が UFD のとき, 上記の形の環が UFD となるための条件を与えている. 特に, (1) および (2) の判定法は, Samuel [Sam64] による判定法 (定理 2.3, 2.4) の一般化になっている. なお, [DFN22] では上記の他に 2 種類の判定法を構成している.

本稿は 4 つの章で構成されている. 2 章では必要な用語を準備し, UFD 判定に関する先行研究を紹介する. 3 章では上記 (1)~(4) の判定法の詳細を述べる. なお, (1) および (2) の証明は省略する. 4 章では, 3 章で紹介した UFD 判定を用いて, 3 項式 (3 つの単行式) で定義される, 体 k 上の代数 B に対する UFD 判定を与える. なお, k が代数的閉体のとき, $\text{Spec } B$ は複雑性 1 の代数的トーラスの作用をもつ代数多様体になり, 幾何学的にも重要な対象である.

2 準備

本稿を通して, 環といえば可換で単位元をもつものとする. 環 A に対して, A^* で A の単元群を表す. 非負整数 $n \geq 0$ に対して, $A^{[n]}$ は A 上 n 変数の多項式環とする. A が整域のとき $\text{frac}(A)$ でその商体を表す. また $A \subset B$ が整域ならば $\text{tr.deg}_A B$ で $\text{frac}(B)$ の $\text{frac}(A)$ 上の超越次数を表す.

*1 問題 1.1 では $n = 3$ のとき未解決で次元は $\dim A = 3$, 問題 1.2 では $n = 4$ のとき未解決で, 不変式環の次元は $\dim k[X_1, X_2, X_3, X_4]^{\mathbb{G}_a} = 3$ である.

まず, Krull 整域および atomic 整域について思い出しておく. 整域 A が **Krull 整域**であるとは, 以下の 3 条件 (a), (b) および (c) をみたすときをいう. 以下, $\mathbf{P}(A)$ で A の高さ 1 の素イデアル全体の集合を表す.

- (a) $\mathfrak{p} \in \mathbf{P}(A)$ に対して, $A_{\mathfrak{p}}$ は離散付値環である.
- (b) $A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{P}(A)} A_{\mathfrak{p}}$ が成り立つ.
- (c) A の非零元 $x \in A \setminus \{0\}$ に対して, $x \in \mathfrak{p}$ なる高さ 1 の素イデアル \mathfrak{p} は有限個である.

A が **atomic 整域**であるとは, 零元でも単元でもないすべての元が有限個の既約元の積に分解されるものをいう. 特に Krull 整域は atomic 整域である. よく知られているように, 以下の関係がある.

$$\text{PID} \implies \text{UFD} \implies \text{Krull 整域} \implies \text{atomic 整域}.$$

なお, PID は単項イデアル整域 (principal ideal domain) を表す.

Krull 整域 A に対して, $\text{Cl}(A)$ で A の因子類群 (divisor class group) を表す. よく知られているように, $\text{Cl}(A)$ を用いて UFD を特徴づけることができる.

命題 2.1. (cf. [Fos73, Proposition 6.1]) 環 A が UFD であるための必要十分条件は A が Krull 整域で $\text{Cl}(A) = 0$ をみたすことである.

2.1 永田の判定法

A を整域, $S \subset A$ を積閉集合とする. このとき, A が UFD ならその商環 $S^{-1}A$ も UFD である. 逆は一般には成り立たないが, 次に述べる永田の判定法は部分的に逆の主張を与える.

定理 2.2. A を atomic 整域, $S \subset A$ を A の素元で生成された積閉集合とする. このとき, $S^{-1}A$ が UFD なら A も UFD である.

元々の永田の定理では, A は Noether 整域としている ([Nag57], Lemma 2). Samuel はこれを A が Krull 整域の場合に拡張した ([Sam64], Corollary to Theorem 6.3). さらに, Kaplansky が ACCP (単項イデアルに関する昇鎖条件) をみたす A に対して一般化した ([Kap74], Theorem 177). 上の形の判定方法は Cohn による ([Coh77], §9.3, Theorem 3.7).

2.2 Samuel の判定法

次に Samuel [Sam64] による, 2 種類の UFD 判定について説明する. これらの一般化が本稿の主結果である. 整域 A に対して, $a, b \in A \setminus \{0\}$ が互いに素であるとは $aA \cap bA = abA$ をみたすときをいう.

定理 2.3. (cf. [Sam64, Proposition 7.6]) A を整域, $a, b \in A \setminus \{0\}$ を互いに素な元とする. $A[X] \cong A^{[1]}$, $A' = A[X]/(aX - b)$ とし $A[b/a]$ を $\text{frac}(A)$ の部分環とみなす. このとき以下が成り立つ.

- (a) A 代数としての全射 $A[X] \rightarrow A[b/a]; X \mapsto b/a$ の核は $(aX - b)$ である. したがって, $(aX - b)$ は $A[X]$ の素イデアルとなり $A' \cong A[b/a]$ を得る.
- (b) A が正規 Noether 整域で aA と $aA + bA$ が素イデアルなら, A' も正規 Noether 整域で $\text{Cl}(A') \cong \text{Cl}(A)$ をみたく.
- (c) A が Noether UFD で aA と $aA + bA$ が素イデアルなら, A' も Noether UFD である.

この定理の主張 (a) は Samuel の元々の主張より強いものであるが, Samuel の証明の帰結として得られる. なお, 次の章の定理 3.1 でこの判定法の一般化を与える.

次は Samuel による 2 つ目の判定法である. なお定理 3.4 で一般化を与える.

定理 2.4. (cf. [Sam64, Theorem 8.1]) R を UFD, $A = R[x_1, \dots, x_n] \cong R^{[n]}$ とし, 各変数 x_i の次数が正となる次数を付けを与える. $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を 1 以上の整数, $f \in A$ は素元かつ斉次元で $\text{gcd}(c, \deg f) = 1$ をみたくする. さらに, 次のいずれかの条件 (i) または (ii) をみたく仮定する.

- (i) $c \equiv 1 \pmod{\deg f}$.
- (ii) すべての有限生成射影 R 加群は自由 R 加群である.

このとき $A[Z]/(Z^c - f)$ は UFD である. ただし $A[Z] \cong A^{[1]}$ である.

3 UFD 判定

A を整域, $(a, b) \in A^2$ とする. 集合 $\mathbf{P}(A, (a, b))$ を, A の素元 p で $a \in pA$ かつ $pA + bA \neq A$ をみたくするものからなる集合と定める. ここで, 組 $(A, (a, b))$ に対して以下の 4 つの条件 $\mathcal{P}(i) \sim \mathcal{P}(iv)$ を考える.

- $\mathcal{P}(i)$: a, b は零元でなく互いに素で, a は単元または A の (有限個の) 素元の積である.
- $\mathcal{P}(ii)$: すべての $p \in \mathbf{P}(A, (a, b))$ に対して, $pA + bA$ は素イデアルである.
- $\mathcal{P}(iii)$: 同伴でないすべての組 $p, q \in \mathbf{P}(A, (a, b))$ に対して, $q \notin pA + bA$ である.
- $\mathcal{P}(iv)$: すべての $p \in \mathbf{P}(A, (a, b))$ に対して, $\bigcap_{i \geq 0} (pA + bA)^i = (0)$ が成り立つ.

特に a が素元の冪乗の場合, 同伴でない組 $p, q \in \mathbf{P}(A, (a, b))$ は存在しないので, 条件 $\mathcal{P}(iii)$ はみ

たされる. 例えば, Samuel による 1 つ目の判定法 (定理 2.3) に現れる組 $(A, (a, b))$ は, 条件 $\mathcal{P}(i) \sim \mathcal{P}(iv)$ のすべてをみたす.

3.1 1 つ目の判定法

以下は定理 2.3 の一般化である.

定理 3.1. (cf. [DFN22, Theorem 3.1]) A を Krull 整域, $(a, b) \in A^2$, $A[X] \cong A^{[1]}$ とし

$$A' = A[X]/(aX - b)$$

と定める. $(A, (a, b))$ が条件 $\mathcal{P}(i) \sim \mathcal{P}(iv)$ のすべてをみたすとき, 以下が成り立つ.

- (a) A' は Krull 整域で $\text{Cl}(A') \cong \text{Cl}(A)$ をみたす.
- (b) A' が UFD であることと A が UFD であることは同値である.

証明. [DFN22, Theorem 3.1] を見よ. □

以下は定理 3.1 の (証明の) 系である. 本稿では定理 3.1 の証明を省略したため, 以下に詳細な証明を述べる.

系 3.2. (cf. [DFN22, Corollary 3.5]) A を Noether UFD, $(a, b) \in A^2$, $A[X] \cong A^{[1]}$ とし

$$A' = A[X]/(aX - b)$$

と定める. $(A, (a, b))$ が条件 $\mathcal{P}(i)$ および $\mathcal{P}(ii)$ をみたすとき, A' は Noether UFD である.

証明. $(A, (a, b))$ が条件 $\mathcal{P}(i)$ および $\mathcal{P}(ii)$ をみたすとする. 定理 2.3 (a) により A' は整域で, A は A' の部分環とみなせる. $a \in A^*$ のとき主張は明らかなので, $a \notin A^*$ とする. このとき, 条件 $\mathcal{P}(i)$ により, a は素元の積である.

$P = \mathbf{P}(A, (a, b))$ とし, Q を A の素元 $p \in A$ で $a \in pA$ をみたすものの集合とする ($P \subset Q$ であることに注意しておく). もし $p \in Q$ ならば

$$A'/pA' \cong A[X]/(aX - b, p) \cong A/(pA + bA)[X] \cong (A/(pA + bA))^{[1]}.$$

したがって, $p \in P$ ならば p は A' の素元, $p \in Q \setminus P$ ならば p は A' の単元である.

$S \subset T$ をそれぞれ P, Q で生成される A の積閉集合とする. $a \in T$ なので, $T^{-1}A' = T^{-1}A$ である. さらに $Q \setminus P \subset (A')^*$ なので, $S^{-1}A' = T^{-1}A'$ となる. よって, $S^{-1}A' = T^{-1}A$ である. A は Noether 環でかつ UFD であるから, 永田の判定法 (定理 2.2) を用いると A' も UFD である. □

3.2 ブルバキの演習問題の反例

系 3.2 でみたように, UFD 判定をする場合において, Noether 性を仮定することで条件 $\mathcal{P}(\text{iii})$ および $\mathcal{P}(\text{iv})$ は不要となる. しかしながら, Noether 環とは限らない場合, これらの条件は必要である. これと関連して, ブルバキ [Bor72] の演習問題 (p.549, Exercise 15 (b), VII, §1) 以下にを引用する.

“Let A be a Krull domain and a, b two elements of A such that Aa and $Aa + Ab$ are prime and distinct. Show that $A[X]/(aX + b)$ is a Krull domain and that [the class group] $C(A[X]/(aX + b))$ is isomorphic to $C(A)$.”

実は, この演習問題の主張には反例がある. ここではその反例を紹介する. さらにこの反例は定理 3.1 における条件 $\mathcal{P}(\text{iv})$ の必要性を表すものでもある.

k を標数 0 の体, $k[x, y] \cong k^{[2]}$ とする. 正整数からなる列 $\{s(n)\}_{n \geq 1}$ を次で定める.

$$s(1) = 2, \quad s(2) = 3, \quad s(n) = n \prod_{i=1}^{n-2} s(i) \quad (n \geq 3).$$

$k[x, y][Z_0, Z_1, Z_2, \dots]$ を Z_i を変数とする $k[x, y]$ 上の無限変数多項式環とする. さらに

$$A = k[x, y][Z_0, Z_1, Z_2, \dots]/(xZ_{i+1} + y^{s(i+1)-1}Z_i^{s(i+1)} - Z_{i-1})_{i \geq 1}$$

と定める. このとき次の定理を得る.

定理 3.3. (cf. [DFN22, Theorem 6.1, Lemma 6.7]) A を上で定めたものとし $A' = A[T]/(xT - y)$ と定める. ただし $A[T] \cong A^{[1]}$ である. このとき以下が成り立つ.

- (a) A は Noether 環ではない UFD で, $\text{tr.deg}_k A = 4$ である.
- (b) $x, y \in A$ は同伴ではない A の素元, $xA + yA$ は A の極大イデアルである.
- (c) $\bigcap_{n \geq 0} (xA + yA)^n \neq 0$ が成り立つ.
- (d) A' は単項イデアルに関する昇鎖条件をみたさない整域である.

証明. [DFN22, Theorem 6.1, Lemma 6.7] を見よ. □

定理 3.3 (a) および (b) により, $(A, (x, -y))$ はブルバキの演習問題の仮定をみたす. 特に A は UFD なので $\text{Cl}(A) = 0$ である. しかしながら, (d) より A' は UFD ではない. よって, $\text{Cl}(A') \neq 0$ となり $\text{Cl}(A) \not\cong \text{Cl}(A')$ である. ゆえに $(A, (x, -y))$ はブルバキの演習問題の反例である.

一方, 定理 3.3 (b) より $\mathbf{P}(A, (x, y)) = \{x\}$ となり, $(A, (x, y))$ は条件 $\mathcal{P}(\text{i})$, $\mathcal{P}(\text{ii})$ および $\mathcal{P}(\text{iii})$ をみたす. しかしながら, (c) より条件 $\mathcal{P}(\text{iv})$ をみたさない. したがって, Noether 環ではない場合,

定理 3.1 において条件 $\mathcal{P}(\text{iv})$ は必要である.

3.3 2つ目の判定法

次は Samuel の判定法 (定理 2.4) の一般化である.

定理 3.4. (cf. [DFN22, Theorem 3.8]) A を \mathbb{Z} 次数付き整域とする. $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を 1 以上の整数, $F \in A$ を斉次元で $\gcd(c, \deg F) = 1$ をみたすものとし,

$$B = A[Z]/(Z^c - F)$$

と定める. ただし $A[Z] \cong A^{[1]}$ とする. このとき, B は整域である. さらに, F が A の素元ならば次が成り立つ.

- (a) A が Krull 整域であることと B が Krull 整域であることは同値である.
- (b) A または B を Krull 整域とする. このとき $\text{Cl}(B)$ は $\text{Cl}(A) \oplus \text{Cl}(A)$ の直和因子で, $\text{Cl}(A)$ は $\text{Cl}(B) \oplus \text{Cl}(B)$ の直和因子である. さらに, $\text{Cl}(A)$ または $\text{Cl}(B)$ のどちらかが有限生成であれば $\text{Cl}(A) \cong \text{Cl}(B)$ である.
- (c) A が UFD であることと B が UFD であることは同値である.

証明. [DFN22, Theorem 3.8] を見よ. □

系 3.5. R を UFD とする. $n \geq 3$ に対して, $R[X_1, \dots, X_n] \cong R^{[n]}$ とし, 整数 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ をとる. さらに, 以下のいずれかが成り立つと仮定する.

- (i) $n \geq 4$ かつ $\gcd(a_n, \prod_{i=1}^{n-1} a_i) = 1$.
- (ii) $n = 3$ かつ a_1, a_2, a_3 のどの 2 つも互いに素である.

このとき, $R[X_1, \dots, X_n]/(X_1^{a_1} + \dots + X_n^{a_n})$ は UFD である.

証明. $A = R[X_1, \dots, X_{n-1}]$, $F = -(X_1^{a_1} + \dots + X_{n-1}^{a_{n-1}}) \in A$ とする. a_i に関する仮定は F が $\text{frac}(R)[X_1, \dots, X_{n-1}]$ で既約であることを意味する. R は UFD なので, F は A でも既約である (特に素元でもある). $\omega = \text{lcm}(a_1, \dots, a_{n-1})$ とし, A に \mathbb{Z} 次数付き環の構造を, X_i が次数 ω/a_i の斉次元となるように定める. すると, F は次数 ω の斉次元で $\gcd(a_n, \omega) = 1$ である. したがって, 定理 3.4 (c) より,

$$R[X_1, \dots, X_n]/(X_1^{a_1} + \dots + X_n^{a_n}) = A[X_n]/(X_n^{a_n} - F)$$

は UFD である. □

3.4 3つ目および4つ目の判定法

ここでは一般化された Samuel の判定法 (定理 3.1 および 3.4) を用いて, 新たな判定法を構成する.

定理 3.6. (cf. [DFN22, Theorem 3.16]) A を \mathbb{Z} 次数付き整域, $a, b \in A \setminus \{0\}$ を互いに素な元, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を $\gcd(n, \deg b - \deg a) = 1$ をみたす正整数とする. さらに, $A[Z] \cong A^{[1]}$ に対して

$$B = A[Z]/(aZ^n - b)$$

と定める. このとき次が成り立つ.

- (a) $(aZ^n - b)$ は $A[Z]$ の素イデアルである.
- (b) A を Noether UFD とする. b が A の素元で $(A, (a, b))$ が条件 $\mathcal{P}(\text{ii})$ をみたすならば, B は UFD である.

証明. (a) $A[X] \cong A^{[1]}$ として, Z とは異なる A 上の変数 X を考える ($A[X, Z] \cong A^{[2]}$ である). A 上の \mathbb{Z} 次数付けを, X が次数 $\deg X = \deg b - \deg a$ の斉次元となるように $A[X]$ 上に延長する. すると, $aX - b$ は斉次元で環 $A' = A[X]/(aX - b)$ は \mathbb{Z} 次数付き環である. x を X の A' での像とし, $A' = A[x]$ と表す. このとき x は A' における次数 $\deg x = \deg b - \deg a$ の斉次元である. 特に定理 2.3 (a) より A' は整域である. ここで

$$B \cong A[X, Z]/(aX - b, Z^n - X) \cong A'[Z]/(Z^n - x)$$

が成り立つ. $\gcd(n, \deg x) = \gcd(n, \deg b - \deg a) = 1$ であるので, 定理 3.4 より $A'[Z]/(Z^n - x)$ は整域, よって B も整域である. したがって, イデアル $(aZ^n - b)$ は $A[Z]$ の素イデアルである.

(b) A は UFD なので, a は素元の積に分解できる. よって, $(A, (a, b))$ は条件 $\mathcal{P}(\text{i})$ をみたす. 特に A は Noether 環なので, 系 3.2 より A' は UFD である. また, $A'/xA' \cong A/bA$ より x は A' の素元である. したがって, 定理 3.4 (c) より $B \cong A'[Z]/(Z^n - x)$ も UFD である. \square

定理 3.7. (cf. [DFN22, Theorem 3.17]) A を \mathbb{Z} 次数付き整域, $F \in A$ を次数が $\omega \in \mathbb{Z}$ の斉次元とし, $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を $\gcd(e_1, \dots, e_n, \omega) = 1$ をみたす正整数とする. さらに, $A[Z_1, \dots, Z_n] \cong A^{[n]}$ に対して

$$B = A[Z_1, \dots, Z_n]/(Z_1^{e_1} \cdots Z_n^{e_n} - F)$$

と定める. このとき次が成り立つ.

- (a) $(Z_1^{e_1} \cdots Z_n^{e_n} - F)$ は $A[Z_1, \dots, Z_n]$ の素イデアルである.
- (b) A が Noether UFD で F が A の素元ならば B は UFD である.

証明には次の補題を用いる。この補題は Prime Avoidance Lemma の帰結である。^{*2}

補題 3.8. (cf. [DFN22, Lemma 2.9]) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を非負整数とする。さらに、整数 $a_1, \dots, a_n, b, c \in \mathbb{Z}$ を $\gcd(a_1, \dots, a_n, b, c) = 1$ をみたすようにとる。このとき、

$$\gcd(c, b + m_1 a_1 + \dots + m_n a_n) = 1$$

をみたす整数 $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ が存在する。

証明. [DFN22, Lemma 2.9] を見よ。 □

この補題と、定理 3.4 および 3.6 を用いて、定理 3.7 を証明する。

定理 3.7 の証明. (a) $n = 1$ のときは定理 3.4 より従うため、 $n \geq 2$ とする。補題 3.8 より、次をみたす整数 $m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{Z}$ がとれる。

$$\gcd(e_n, \omega - (m_1 e_1 + \dots + m_{n-1} e_{n-1})) = 1.$$

$R := A[Z_1, \dots, Z_{n-1}]$ とおく。 A 上の \mathbb{Z} 次数付けを、 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して Z_i が m_i 次の斉次元となるように R 上に延長する。ここで $a = Z_1^{e_1} \dots Z_{n-1}^{e_{n-1}}$, $b = F$ とおく。このとき a, b は R の非零元で $aR \cap bR = abR$, $\deg b = \omega$ および $\deg a = m_1 e_1 + \dots + m_{n-1} e_{n-1}$ となる。よって

$$\gcd(e_n, \deg b - \deg a) = \gcd(e_n, \omega - (m_1 e_1 + \dots + m_{n-1} e_{n-1})) = 1.$$

したがって、定理 3.6 (a) より、イデアル $(Z_1^{e_1} \dots Z_n^{e_n} - F) = (aZ_n^{e_n} - b)$ は $A[Z_1, \dots, Z_n] = R[Z_n]$ の素イデアルである。

(b) R は Noether UFD であることに注意しておく。 b は R の素元で、各 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して $Z_i R + bR$ は R の素イデアルである。よって $(R, (a, b))$ は条件 $\mathcal{P}(ii)$ をみたす。したがって、定理 3.6 (b) より、 $B = R[Z_n]/(aZ_n^{e_n} - b)$ は UFD となる。 □

4 応用 (3 項式で定義される UFD)

最後にこの章では、3 章で紹介した UFD 判定の応用として、3 項式で定義される環に対する UFD 判定を与える。以下 k を体とし、次の 3 つのデータを与える。

- (D.1) 整数 $n \geq 2$ と n の分割 $n = n_0 + n_1 + \dots + n_r$. ただし $r \geq 2$ かつ $n_i \geq 1$ ($0 \leq i \leq r$).
- (D.2) 各 $i \in \{0, \dots, r\}$ に対して、正整数の組 $\beta_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{in_i}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^{n_i}$.
- (D.3) どの 2 つも異なる定数 $\lambda_2, \dots, \lambda_r \in k^*$.

^{*2} 例えば次を見よ。 www.math.lsa.umich.edu/~hochster/615W17/supDim.pdf

1 つ目のデータ (D.1) は, k 上の変数を t_{ij} とする多項式環 $k[T_0, T_1, \dots, T_r] \cong k^{[n]}$ を与える. ただし, $T_i = \{t_{i1}, \dots, t_{in_i}\}$ とする ($0 \leq i \leq r$). 2 つ目のデータ (D.2) は $r+1$ 個の単項式 $T_0^{\beta_0}, \dots, T_r^{\beta_r} \in k[T_0, \dots, T_r]$ を与える. ただし

$$T_i^{\beta_i} = t_{i1}^{\beta_{i1}} \cdots t_{in_i}^{\beta_{in_i}} \quad (0 \leq i \leq r)$$

と定める.

定理 4.1. (cf. [DFN22, Theorem 5.1]) 上記の 3 つのデータ (D.1), (D.2) および (D.3) を与える. $0 \leq i \leq r$ に対して $d_i = \gcd(\beta_{i1}, \dots, \beta_{in_i})$ と定める. d_0, \dots, d_r のどの 2 つも互いに素ならば

$$B := k[T_0, \dots, T_r] / (T_0^{\beta_0} + \lambda_1 T_1^{\beta_1} + T_i^{\beta_i})_{2 \leq i \leq r}$$

は UFD で $\text{tr.deg}_k B = n - r + 1$ である. さらに $\mu \in k^* \setminus \{\lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ に対して, $T_0^{\beta_0} + \mu T_1^{\beta_1}$ の B での像は B の素元である.

証明. $r \geq 2$ に関する数学的帰納法を用いる. 部分環の列 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_r = B$ を

$$B_m = k[T_0, \dots, T_m] / (T_0^{\beta_0} + \lambda_1 T_1^{\beta_1} + T_i^{\beta_i})_{2 \leq i \leq m}$$

で定める. なお, $B_1 = k[T_0, T_1] \cong k^{[n_0+n_1]}$ なので UFD である. さらに定理 3.7 (a) より, 任意の $\mu \in k^*$ に対して $T_0^{\beta_0} + \mu T_1^{\beta_1}$ は B_1 の素元である.

ここで, ある $m \geq 2$ に対して, B_1, \dots, B_{m-1} は UFD で, 任意の $\mu \in k^* \setminus \{\lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}\}$ に対して $T_0^{\beta_0} + \mu T_1^{\beta_1}$ は B_{m-1} の素元であると仮定する.

$F = -(T_0^{\beta_0} + \lambda_m T_1^{\beta_1}) \in B_{m-1}$ とおくと $B_m = B_{m-1}[T_m] / (T_m^{\beta_m} - F)$ と表せる. よって, 定理 3.7 の判定法が使える形となる. 仮定より F は B_{m-1} の素元である. $0 \leq i \leq m-1$ なる i に対して, 以下をみたす整数 $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ をとる.

$$d_i = \gcd(\beta_{i1}, \dots, \beta_{in_i}) = d_{i1}\beta_{i1} + \cdots + d_{in_i}\beta_{in_i}.$$

B_{m-1} への \mathbb{Z} 次数付けを, 各変数 t_{ij} が次数 $\deg t_{ij} = d_{ij}d_0 \cdots \hat{d}_i \cdots d_{m-1}$ の斉次元となるように定める. このとき, それぞれの単項式 $T_i^{\beta_i}$ ($0 \leq i \leq m-1$) に対して,

$$\begin{aligned} \deg T_i^{\beta_i} &= \deg(t_{i1}^{\beta_{i1}} \cdots t_{in_i}^{\beta_{in_i}}) = \beta_{i1} \deg t_{i1} + \cdots + \beta_{in_i} \deg t_{in_i} \\ &= (d_{i1}\beta_{i1} + \cdots + d_{in_i}\beta_{in_i})(d_0 \cdots \hat{d}_i \cdots d_{m-1}) \\ &= d_0 \cdots d_{m-1} \end{aligned}$$

である. したがって, F は B_{m-1} の次数 $\deg F = d_0 \cdots d_{m-1}$ の斉次元である. 仮定より, d_0, \dots, d_r のはどの 2 つも互いに素なので $\gcd(\beta_{m1}, \dots, \beta_{mn_m}, \deg F) = \gcd(d_m, d_0 \cdots d_{m-1}) = 1$. よって, 定理 3.7 (b) より B_m は UFD である.

$\mu \in k^* \setminus \{\lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ に対して, $G = T_0^{\beta_0} + \mu T_1^{\beta_1} \in B_{m-1}$ とする. G は B_{m-1} の斉次元でかつ素元なので, $\overline{B_{m-1}} := B_{m-1}/GB_{m-1}$ は \mathbb{Z} 次数付き整域である. よって

$$\begin{aligned} B_m/GB_m &= B_{m-1}[T_m]/(T_0^{\beta_0} + \mu T_1^{\beta_1}, T_0^{\beta_0} + \lambda_m T_1^{\beta_1} + T_m^{\beta_m}) \\ &= \overline{B_{m-1}}[T_m]/(T_m^{\beta_m} + (\lambda_m - \mu)T_1^{\beta_1}) \end{aligned}$$

となる. 定理 3.7 (a) より, イデアル $(T_m^{\beta_m} + (\lambda_m - \mu)T_1^{\beta_1})$ は $\overline{B_{m-1}}$ の素イデアル, よって G は B_m の素元である.

したがって $B = B_r$ は UFD で, 各 $\mu \in k^* \setminus \{\lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ に対して $T_0^{\beta_0} + \mu T_1^{\beta_1}$ は B の素元となる. □

例 4.2. 森 [Mor77] は, 代数的閉体 k 上有限生成な 2 次元の UFD で, 非自明な $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付けを持つ場合の分類を与えた. それぞれの環は次の形をしている.

$$k[x, y, z_1, \dots, z_N]/(x^a + \mu_i y^b + z_i^{c_i})_{1 \leq i \leq N},$$

ただし $N \geq 0$ で, $a, b, c_1, \dots, c_N \geq 2$ はどの 2 つも互いに素な整数, $\mu_1, \dots, \mu_N \in k^*$ はどの 2 つも異なる定数で $\mu_1 = 1$ ある. この環は次のようにして 3 つのデータから得られる.

- (D.1) $n = N + 2, r = N + 1$, ただし $T_0 = x, T_1 = y$ かつ $T_i = z_{i-1}, 2 \leq i \leq r$;
- (D.2) $\beta_0 = a, \beta_1 = b$ かつ $\beta_i = c_{i-1}, 2 \leq i \leq r$;
- (D.3) $\lambda_i = \mu_{i-1}, 2 \leq i \leq r$.

注意 4.3. 定理 4.1 で現れた k 代数 B は, 非退化な \mathbb{Z}^{n-r} 次数付けを与える. k が代数的閉体のとき, これは代数多様体 $X = \text{Spec}(B)$ が複雑性 1 のトーラス作用を持つことを意味する. このような代数多様体は, 曲面の場合に森 [Mor77] により, 3 次元の場合に石田 [Ish77] により分類された. k の標数が 0 のときは, Hausen, Herppich および Süß [HHS11] が任意次元での分類を完成させた. 彼らの分類に現れる環は, 表示方法が異なるものの定理 4.1 で与えたものと同型になる. しかしながら, 我々の表示方法は森の分類に沿った簡潔なものになっている. 特に定理 4.1 は, 代数的閉体とは限らない任意の体 k 上で成り立つ.

謝辞

第 67 回代数学シンポジウムにて, 講演の機会を下さった環論のプログラム責任者である早坂太先生 (岡山大学) をはじめ, シンポジウム責任者の先生方に心より感謝申し上げます. 本研究は, JSPS 特別研究員奨励費 (18J10420) および JSPS 科研費 (20K22317, 21K13782) の助成を受けています.

参考文献

- [AEH72] S. Abhyankar, W. Heinzer and P. Eakin, On the uniqueness of the ring of coefficients in a polynomial ring, *J. Algebra* **23** (1972), 310–342.
- [BG15] S.M. Bhatwadekar and N. Gupta, A note on the cancellation property of $k[X, Y]$, *J. Algebra Appl.* **14** (2015), no. 9, 1540007, 5 pp.
- [Bor72] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Elements of Math., Addison-Wesley, 1972, Reading, MA.
- [Coh77] P. Cohn, *Algebra, Vol. 2*, second ed., John Wiley and Sons, 1989, Chichester, New York.
- [DF99] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert’s Fourteenth Problem in dimension five, *J. Algebra* **221** (1999), 528–535.
- [DF01] D. Daigle and G. Freudenburg, A note on triangular derivations of $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 657–662.
- [DFN22] D. Daigle, G. Freudenburg and T. Nagamine, Generalizations of Samuel’s criteria for a ring to be a unique factorization domain, *J. Algebra* **594** (2022), 271–306.
- [Fos73] R. Fossum, *The Divisor Class Group of a Krull Domain*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 74, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [Fre17] G. Freudenburg, *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations*, second ed., Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 136, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2017.
- [Fuj79] T. Fujita, On Zariski problem, *Proc. Japan Acad. Ser. A* **55** (1979) 106–110.
- [Gup14a] N. Gupta, On the cancellation problem for the affine space \mathbb{A}^3 in characteristic p , *Invent. Math.* **195** (2014) 279–288.
- [Gup14b] N. Gupta, On Zariski’s cancellation problem in positive characteristic, *Adv. Math.* **264** (2014) 296–307.
- [HHS11] J. Hausen, E. Herppich, and H. Süss, Multigraded factorial rings and Fano varieties with torus actions, *Doc. Math.* **16** (2011), 71–109.
- [Ish77] M. Ishida, Graded factorial rings of dimension 3 of a restricted type, *J. Math. Kyoto Univ.* **17** (1977), 441–456.
- [Kap74] I. Kaplansky, *Commutative Rings* (Revised Edition), University of Chicago Press (Chicago), 1974.

- [Koj16] H. Kojima, Notes on the kernels of locally finite higher derivations in polynomial rings, *Comm. Algebra* **44** (2016), no. 5, 1924–1930.
- [MS80] M. Miyanishi and T. Sugie, Affine surfaces containing cylinderlike open sets, *J. Math. Kyoto Univ.*, **20** (1980), 11–42.
- [Mor77] S. Mori, Graded factorial domains, *Japan J. Math.* **3** (1977), 224–238.
- [Nag57] M. Nagata, A remark on the unique factorization theorem, *J. Math. Soc. Japan* **9** (1957), 143–145.
- [Rus81] P. Russell, On affine ruled rational surfaces, *Math. Ann.*, **255** (1981), 287–302.
- [Sam64] P. Samuel, *Lectures on unique factorization domains*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, vol. 30, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.
- [Zar54] O. Zariski, Interprétations algébriques-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, *Bull. Sci. Math.*, **78** (1954), 155–168.

K3 曲面の導来圏の自己同値群

菊田 康平 *

1 導入

1.1 自己同値群

非特異射影複素代数多様体 X の導来圏 (derived category) を $\mathcal{D}^b(X)$ と書く. 導来圏は圏の一種であり, X 上の接続層からなる有界複体を対象とし, 複体の射のホモトピー同値類のなす空間を考え, さらに擬同型で局所化したものを圏としての射の空間と定義することで得られる. 標準的なテキストとして [17] が挙げられる. また最近出版されたテキスト [35] は, 接続層の導来圏について基礎的な内容から [17] 以降に進展した話題まで日本語で書かれた良書である.

代数幾何学はもちろん, シンプレクティック幾何学, 表現論や数理物理学など様々な分野と関わる. このとき導来圏そのものを (ただの X の不変量ではなく) ある種の幾何学的対象と捉える視点は重要である. 代数多様体の自己同型射に相当する, 導来圏 $\mathcal{D}^b(X)$ の自己同値関手 (autoequivalence) $\Phi : \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(X)$ を定義しよう. 複体の次数を $l \in \mathbb{Z}$ ずらすことで定義されるシフト関手を $[l] : \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(X)$ と書く. 自己同値 (関手) とは, シフト $[1]$ と可換かつ $\mathcal{D}^b(X)$ 内の完全三角形を再び完全三角形に移すような自分から自分への圏同値関手として定義される. 自己同値 (の自然同型類) からなる群を $\mathcal{D}^b(X)$ の自己同値群 (autoequivalence group) といい, $\text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ と書く. 自己同型射 $f \in \text{Aut}(X)$ の引き戻し f^* や直線束 $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ のテンソル積 $-\otimes \mathcal{L}$ は自己同値となり, これより自然な単射群準同型

$$\text{Aut}(X) \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X)), \quad \text{Pic}(X) \hookrightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$$

が得られる. 自己同型群 $\text{Aut}(X)$ と全く同様に, 自己同値群 $\text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ もまた群論における興味深い研究対象となる. 以下, 導来圏がよく研究されており, かつ興味深い現象を数多く提供する K3 曲面に絞って考える.

* 大阪大学大学院理学研究科
第 67 回代数シンポジウム (2022) 報告書
科研費 20K22310, 21K13780

1.2 写像類群との比較

弦理論における双対性の 1 つの数学的定式化として, Kontsevich により提唱されたホモロジー的ミラー対称性は, 代数多様体の導来圏とシンプレクティック多様体の深谷圏の間の圏同値を主張する. 球対象 (spherical object) $E \in \mathcal{D}^b(X)$ に沿った球面捻り (spherical twist) $T_E \in \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ という自己同値関手は, ホモロジー的ミラー対称性の元でシンプレクティック多様体の Lagrangian 球面に沿った Dehn 捻りの代数多様体の導来圏の対応物として, Seidel-Thomas により導入された [34]. 例えば K3 曲面の場合, 任意の直線束や (-2) 曲線 $C \subset X$ 上の直線束 \mathcal{O}_C が球対象となる. ホモロジー的ミラー対称性から, 自己同値群とシンプレクティック写像類群の比較が自然に考えられるが, 特に実 2 次元, つまり写像類群 $\text{MCG}(\Sigma_g)$ との比較を考える. ここで Σ_g は種数 g の向き付け可能な閉曲面とする. 球面捻りに留まらず交点数, 圏論的エントロピーや安定性条件の空間など, 写像類群に関連する概念の (ミラー対称性における) 対応物として導入されたものが数多くある. 以下の K3 曲面の自己同値群と写像類群に関連する概念の対応表も参考にされたい.

2 節で紹介するように, 自己同値群を理解するには, コホモロジー群への作用だけでは不十分であることが分かっている. そこで自己同値群の理解へのアプローチの一つとして, 1930 年代より始まる豊富な歴史を有する写像類群との比較は非常に有効となる. この写像類群との比較という方針に基づき, 主に筆者の仕事に関わる内容を中心に, K3 曲面の導来圏の自己同値群の幾何学的側面 (3 節)・群論的側面 (4 節)・力学系的側面 (5 節) を紹介することが本稿の目的である.

| K3 曲面の自己同値群 | 写像類群 |
|--|---|
| $\text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ | $\text{MCG}(\Sigma_g)$ |
| 球対象 $E \in \mathcal{D}^b(X)$ | 単純閉曲線 $a \subset \Sigma_g$ |
| 球面捻り $T_E \in \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ | Dehn 捻り $T_a \in \text{MCG}(\Sigma_g)$ |
| 交点数 $i(E_1, E_2)$ | 交点数 $i(a_1, a_2)$ |
| 圏論的エントロピー | 位相的エントロピー |
| 安定性条件の空間 $\mathcal{S}(X)$ | Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(\Sigma_g)$ |
| mass $m_\sigma(E)$ ($\sigma \in \mathcal{S}(X)$) | length $l_h(a)$ ($h \in \mathcal{T}(\Sigma_g)$) |
| 球対象のなす単体複体 $\mathcal{C}(X)$ | 曲線複体 $\mathcal{C}(\Sigma_g)$ |

2 K3 曲面の自己同値群の基礎

この報告書では, K3 曲面は全て \mathbb{C} 上かつ代数的であるとする.

X を K3 曲面とする. 整係数コホモロジー群 $H^*(X, \mathbb{Z})$ 上に, 複素化の直和分解

$$H^*(X, \mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus (H^0(X, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^4(X, \mathbb{C})) \oplus H^{0,2}(X)$$

より, 重さ 2 の Hodge 構造が定まる. この Hodge 構造に関する algebraic part

$$(H^0(X, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^4(X, \mathbb{C})) \cap H^*(X, \mathbb{Z})$$

を $N(X)$ と書く. 具体的には, 自由アーベル群 $N(X) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \text{Pic}(X) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$ となる. コホモロジー群 $H^*(X, \mathbb{Z})$ 上に, 向井ペアリングと呼ばれる双線型形式が次で定義される:

$$((r_1, c_1, s_1), (r_2, c_2, s_2)) := c_1 \cdot c_2 - r_1 s_2 - r_2 s_1 \in \mathbb{Z}, (r_i, c_i, s_i) \in H^*(X, \mathbb{Z}).$$

格子 $(H^*(X, \mathbb{Z}), (-, -))$ を向井格子と呼ぶ. 向井格子は符号 $(4, 20)$ のユニモジュラーな偶格子となる.

自己同値群 $\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ は向井格子 $(H^*(X, \mathbb{Z}), (-, -))$ に Hodge isometry として作用することから, 次の群準同型が得られる.

$$\text{Aut}(\mathcal{D}^b(X)) \rightarrow \text{O}(H^*(X, \mathbb{Z})); \quad \Phi \mapsto \Phi^H \quad (2.1)$$

任意の球面捻り T_E に対して T_E^H は鏡映となるので, $T_E^2 \in \text{Aut}_0(\mathcal{D}^b(X))$ となる. 従って準同型 (2.1) は単射ではない. そこで準同型 (2.1) の核を $\text{Aut}_0(\mathcal{D}^b(X))$ とおく. 言い換えると $\text{Aut}_0(\mathcal{D}^b(X))$ はコホモロジー群に自明に作用する自己同値のなす正規部分群であり, ちょうど写像類群の Torelli 部分群に対応する. 準同型 (2.1) の非単射性が, 自己同値群の群構造の決定が非常に難しいことの原因の一つである. 対照的に自己同型群の場合, $H^2(X, \mathbb{Z})$ 上の Hodge isometry のなす群への準同型は単射となる (cf. [20]):

$$\text{Aut}(X) \hookrightarrow \text{O}(H^2(X, \mathbb{Z}))$$

この埋め込みから格子を用いた自己同型群の研究は大きく発展した.

X の超越格子を $T(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ と書く. $T(X)$ は向井格子に関する $N(X)$ の直交補空間となっている. 有限指数部分群

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{\text{CY}}(\mathcal{D}^b(X)) &:= \{\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X)) \mid \Phi^H|_{T(X)} = \text{id}_{T(X)}\} \\ &= \{\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X)) \mid \Phi^H|_{H^{2,0}(X)} = \text{id}_{H^{2,0}(X)}\} \end{aligned}$$

を考える. $\text{Aut}_{\text{CY}}(\mathcal{D}^b(X))$ の元を Calabi–Yau 自己同値と呼ぶ. ちょうど自己同型群のシンプレクティック自己同型に相当する概念であり, 文献によってはシンプレクティック自己同値と呼ぶものもある. 明らかに $\text{Aut}_0(\mathcal{D}^b(X)) \subset \text{Aut}_{\text{CY}}(\mathcal{D}^b(X))$ となる.

2.1 ピカール数 1 の場合

K3 曲面はピカール数 1, つまり Picard 群 $\text{Pic}(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ の階数が 1 であると仮定する. 豊富直線束が与える $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ の生成元を H とおく. (H, H) は正偶数であり, $d := (H, H)/2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ を次数と呼ぶ. このとき, 自己同値群 $\text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ は有限生成となる. ピカール数 2 以上では有限生成性は未解決である. また部分群 $\text{Aut}_0(\mathcal{D}^b(X))/[2]$ は全ての (球面層に沿った) 球面捻りの 2 乗で生成される無限階数の自由群となる.

準同型 (2.1) において, $H^*(X, \mathbb{Z})$ 上の Hodge isometry を $N(X)$ 上に制限することで, 群準同型

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}(\mathcal{D}^b(X)) \rightarrow \mathrm{O}(N(X)) \quad (2.2)$$

が得られる. $N(X)$ の discriminant 群に自明に作用し, かつ 3 節で述べる $\mathbb{P}(N(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})$ 内の連結成分 $\Omega^+(X)$ を保つ $\mathrm{O}(N(X))$ の部分群を, $\Gamma^+(X)$ と書く. この群 $\Gamma^+(X)$ は, Fricke モジュラー群 $\Gamma_0^+(d)$ と呼ばれる $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ の部分群と同型になる [10]. Fricke モジュラー群はレベル d の Hecke 合同部分群

$$\Gamma_0(d) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ cd & e \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \right\}$$

と Fricke 対合 $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{d}} \\ \sqrt{d} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ で生成され, virtually free な第 1 種 Fuchs 群となる. 準同型 (2.2) から, 次の短完全列が得られる [6, 33]:

$$1 \rightarrow \mathrm{Aut}_0(\mathcal{D}^b(X))/[2] \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}(\mathcal{D}^b(X))/[2] \rightarrow \Gamma^+(X) \rightarrow 1$$

この短完全列は 3 節で説明する安定性条件の空間への作用を用いて証明される.

3 幾何学的側面

3.1 安定性条件の空間への等長作用

幾何学的群論の発展から, 与えられた群 Γ を研究する際に, 非正曲率的な性質 (CAT(0) 性, Gromov 双曲性など) を持つ距離空間 (M, d) への等長作用 $\Gamma \curvearrowright (M, d)$ を調べるのが非常に有効であることが分かっている. 例えば写像類群 $\mathrm{MCG}(\Sigma_g)$ は, Teichmüller 空間や曲線複体 (curve complex) といった距離空間に等長的に作用する. ここで Teichmüller 空間上では Weil–Peterson 距離を考えており, CAT(0) になることが知られている. 数理解物理的な観点から “Bridgeland 安定性条件 (stability condition) の空間” $\mathcal{S}(X)$ は Teichmüller 空間の類似物と見なすことができる. 従って, K3 曲面の自己同値群の安定性条件の空間という距離空間への等長作用

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{CY}}(\mathcal{D}^b(X))/[2] \curvearrowright (\mathcal{S}(X), d)$$

を考えていく. $\mathcal{S}(X)$ 上の距離 d は以下で順に紹介していく. 写像類群のこれまでの豊富な研究と比較すると, K3 曲面の自己同値群の幾何学的研究は始まって間もない. 現在は距離空間や等長作用自体を構成しその基本的性質を調べる段階にあり, それらを用いた自己同値群への応用は次の段階だと考える.

Bridgeland [7] により導入された $\mathcal{D}^b(X)$ 上の (数値的) 安定性条件とは $v \in N(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ と, ある $\mathcal{D}^b(X)$ 上の有界 t -構造の heart $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$ の組 $\sigma := (v, \mathcal{A})$ で, 然るべき条件を満たすものである. 準備が多く煩雑になるので定義は省略するが, 特に重要な条件として, 任意の対象

$E \in \mathcal{D}^b(X)$ に対して, (σ に関する)Harder–Narasimhan フィルトレーション

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \cdots & E_{p-1} & \longrightarrow & E_p = E \\
 & & \searrow & & \searrow & & \\
 & & A_1 & \cdots & A_p & &
 \end{array} \tag{3.1}$$

と呼ばれる完全三角形の列の存在を課している. 直感的な説明を加えると, 安定性条件 σ を与えることで, σ -安定な対象の族が定まり, さらに対象 E を σ -安定な対象 $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{D}^b(X)$ に順に分解していくルールが定まる. また σ -安定な対象 $A \in \mathcal{D}^b(X)$ に対して, phase と呼ばれる値 $\phi_\sigma(A) \in \mathbb{R}$ が定まる. 例えば [3] で最近の流儀で安定性条件の定義と, 関連する K3 曲面の周辺知識についてコンパクトにまとめてある.

$\mathcal{D}^b(X)$ 上の安定性条件のなす集合を $\text{Stab}(X)$ と書く. $\text{Stab}(X)$ 上に, 自然に位相を入れることができる. $\sigma \in \text{Stab}(X)$ に対して, 全ての点の構造層が σ -安定で同じ phase を持つとき, σ は幾何学的であるという. 幾何学的安定性条件からなる連結集合を含む $\text{Stab}(X)$ の連結成分を $\text{Stab}^\dagger(X)$ と書く. 安定性条件 $(v, \mathcal{A}) \in \text{Stab}^\dagger(X)$ が $(v, v) = 0$ を満たすとき reduced であると定義し, reduced な安定性条件のなす部分集合を $\text{Stab}_{\text{red}}^\dagger(X)$ と書く. $\mathcal{S}(X)$ を $\text{Stab}_{\text{red}}^\dagger(X)$ の自然な \mathbb{C} -作用に関する商位相空間と定義する:

$$\mathcal{S}(X) := \text{Stab}_{\text{red}}^\dagger(X) / \mathbb{C}.$$

以下断らない限り K3 曲面はピカール数 1 であると仮定する. $H \in \text{Pic}(X)$ を豊富直線束が与える生成元としていた. 空間 $\Omega^+(X)$ を

$$\{v \in \mathbb{P}(N(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \mid (v, v) = 0, (v, \bar{v}) > 0\}$$

の $[1 : iH : -\frac{1}{2}H^2] \in \mathbb{P}(N(X) \otimes \mathbb{C})$ を含む連結成分として定義する. この空間は IV 型有界対称領域の一種であり, 今の場合自然に上半平面 \mathbb{H} と同一視される. さらに向井格子に関する (-2) クラスを用いた超平面補空間

$$\Omega_0^+(X) := \Omega^+(X) \setminus \bigcup_{\delta \in N(X) \text{ s.t. } (\delta, \delta) = -2} \delta^\perp$$

を考える. 厳密には $\delta^\perp = \mathbb{P}((\mathbb{C}\delta)^\perp)$ で 1 点集合となり, 和集合 $\bigcup \delta^\perp$ は離散無限集合となる. 従って $\Omega_0^+(X)$ は $\Omega^+(X)$ における開集合となる.

自然な連続写像 $\text{Stab}(X) \rightarrow N(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}; (v, \mathcal{A}) \mapsto v$ は, 連続写像

$$\mathcal{S}(X) \rightarrow \Omega_0^+(X)$$

を誘導する.

定理 3.1 (Bridgeland [8], Bayer–Bridgeland [6]). $\mathcal{S}(X) \rightarrow \Omega_0^+(X)$ は普遍被覆となる. さらに, $\mathcal{S}(X)$ は可縮となる.

種数 g の双曲曲面のモジュライ空間 $\mathcal{M}(\Sigma_g) := \mathcal{T}(\Sigma_g)/\text{MCG}(\Sigma_g)$ の orbifold 基本群を考えると、同型 $\text{MCG}(\Sigma_g) \simeq \pi_1^{orb}(\mathcal{M}(\Sigma_g))$ が得られる。同様に K3 曲面 X の自己同値群も、 X のミラー対称性において重要となる stringy Kähler モジュライ空間 $\mathcal{M}_K(X) := \Omega_0^+(X)/\Gamma_0^+(d)$ の orbifold 基本群としての記述を持つ:

定理 3.2 (Bayer–Bridgeland [6], Huybrechts [19]). $\text{Aut}_{\text{CY}}(\mathcal{D}^b(X))/[2] \simeq \pi_1^{orb}(\mathcal{M}_K(X))$

注意 3.3. 由緒正しい空間 $\Omega_0^+(X)$ の普遍被覆になることから、 $\text{Stab}(X)$ よりも $\mathcal{S}(X)$ の方を重視するのは自然である。従って (ミラー対称性のような数理論理だけでなく) 距離空間への等長作用という観点からも、 $\text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ よりも $\text{Aut}_{\text{CY}}(\mathcal{D}^b(X))/[2]$ を重視すべきであると考えられる。

3.1.1 距離 d_P の曲率的性質

自然な同一視 $\Omega^+(X) \simeq \mathbb{H}$ をもとに、Poincaré 距離の開集合 $\Omega_0^+(X)$ への制限を考え、普遍被覆 $\mathcal{S}(X) \rightarrow \Omega_0^+(X)$ で引き戻すことで得られる $\mathcal{S}(X)$ 上の距離を d_P とかく。距離 d_P は、Fan–Kanazawa–Yau [14] によりミラー対称性を動機として導入された $\mathcal{S}(X)$ 上の Weil–Petersson 距離と一致する。

自己同値群 $\text{Aut}(\mathcal{D}^b(X)), \text{Aut}_{\text{CY}}(\mathcal{D}^b(X))/[2]$ は距離空間 $(\mathcal{S}(X), d_P)$ に等長的に作用する。Allcock は導来圏や安定性条件とは全く異なる文脈で、非正曲率リーマン多様体の超曲面補空間の分岐被覆の曲率 (CAT(0) 性) を考察した [1]。定理 3.1 と合わせることで次が得られる。

定理 3.4 (Allcock [1], Bayer–Bridgeland [6]). 距離空間 $(\mathcal{S}(X), d_P)$ の距離完備化は CAT(0) 空間となる。さらに、 $\mathcal{S}(X)$ は可縮となる。

一般に完備化を取らないと測地空間にすらならない。この意味で上記の定理において、距離完備化という操作が本質的である。

3.1.2 距離 d_B の曲率的性質

まず次の小節でも重要となる、対象 $E \in \mathcal{D}^b(X)$ の安定性条件 $\sigma = (v, \mathcal{A}) \in \text{Stab}(X)$ に関する mass $m_\sigma(E) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ という量を次で定義する:

$$m_\sigma(E) := \sum_{i=1}^p |(v, v(A_i))|.$$

ここで対象 $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{D}^b(X)$ は、 E の Harder–Narasimhan フィルトレーション (3.1) に現れる σ -安定な対象で、 $v(A_i) \in N(X)$ は A_i の数値類である。

\mathbb{C} -商を取る前の空間 $\text{Stab}_{\text{red}}^\dagger(X)$ 上に、次で定義される距離 d_B が定まる。

定義 3.5 (Bridgeland [7]). $\sigma, \tau \in \text{Stab}_{\text{red}}^\dagger(X)$ に対して、 $d_B(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を次で与える。

$$d_B(\sigma, \tau) := \sup_{E \neq 0} \left\{ |\phi_\sigma^+(E) - \phi_\tau^+(E)|, |\phi_\sigma^-(E) - \phi_\tau^-(E)|, \left| \log \frac{m_\sigma(E)}{m_\tau(E)} \right| \right\}.$$

ここで $E \in \mathcal{D}^b(X)$ の σ に関する Harder–Narasimhan フィルトレーション (3.1) を用いて、 $\phi_\sigma^+(E) := \phi_\sigma(A_1)$, $\phi_\sigma^-(E) := \phi_\sigma(A_p) \in \mathbb{R}$ と定義される。この距離 d_B は、実曲面内の単純閉曲線の length を用いて定まる Teichmüller 空間上の Teichmüller 距離または Thurston(非対称) 距離の類似である。

否定的な結果であるが、この距離 d_B に関する曲率的性質を調べた。

定理 3.6 (K [22]). 次が成り立つ。

- (i) 距離空間 $(\text{Stab}_{\text{red}}^\dagger(X), d_B)$ は CAT(0) 空間ではない。
- (ii) 距離空間 $(\text{Stab}_{\text{red}}^\dagger(X), d_B)$ は Gromov 双曲空間ではない。

\mathbb{C} -作用に関する d_B の商距離が $\mathcal{S}(X)$ 上に定まる。この商距離も同様に、CAT(0) でも Gromov 双曲的でもないことを期待するが、未解決である。

3.2 曲線の安定性条件の空間の Thurston コンパクト化

まず Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(\Sigma_g)$ の古典的な Thurston コンパクト化について簡単に復習する。Teichmüller 空間の元 t に付随して定まる計量に関する単純閉曲線 γ の length $l_t(\gamma)$ を用いて、無限次元射影空間への位相的な埋め込み

$$\text{Pl} : \mathcal{T}(\Sigma_g) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\geq 0}^{\mathcal{S}}; t \mapsto [l_t(\gamma)]_{\gamma \in \mathcal{S}},$$

が得られる。このとき像の閉包はコンパクトとなる。Thurston コンパクト化をこの像の閉包として定義した。

1 節の表にあるように、安定性条件から定まる対象の mass という概念が、単純閉曲線の length に対応する。これを出発点に、安定性条件の空間の Thurston コンパクト化が自然に考えられる。

問題 3.7 (Bapat–Deopurkar–Licata [2]). 安定性条件をもつ三角圏 \mathcal{D} に対して、 \mathcal{S} を $\text{Ob}(\mathcal{D})$ のある部分集合とする。このとき連続写像

$$\text{Pm} : \text{Stab}(\mathcal{D})/\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_{\geq 0}^{\mathcal{S}}; \sigma \mapsto [m_\sigma(E)]_{E \in \mathcal{S}}$$

はコンパクト化を与えるか？すなわち、像への同相写像かつ像の閉包がコンパクトとなるか？

もちろん K3 曲面 X に対する $\mathcal{S}(X)$ の Thurston コンパクト化の構成が最終的な目標である。その前段階として、まず曲線の場合を調べた [23]。この小節では [23] で得られた結果を紹介する。

C を \mathbb{C} 上の非特異射影曲線とする。 $\text{Stab}(C)$ を $\mathcal{D}^b(C)$ 上の安定性条件の空間とする。この場合、 $\text{Stab}(C)$ は連結かつ単連結となる。 $\text{Geo}(C)$ を幾何学的安定性条件のなす部分集合と定義する。種数 1 以上の場合、 $\text{Geo}(C) = \text{Stab}(C)$ となる。

点 $p \in C$ を固定する。このとき、部分集合 $\mathcal{S} \subset \text{Ob}(\mathcal{D}^b(C))$ を (i) 元は全て slope-安定な接続層、(ii) $\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_p, \mathcal{O}_C(-p) \in \mathcal{S}$, という 2 条件を満たすものとする。準備ができたので結果を紹介していく。

定理 3.8 (K–Koseki–Ouchi [23]). 連続写像

$$\mathbb{P}m: \text{Geo}(C)/\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_{\geq 0}^{\mathcal{S}}$$

は像への同相写像となる. さらに像の閉包 $\overline{\text{Geo}(C)/\mathbb{C}}$ は閉円板と同相になり, 特にコンパクトである.

$\overline{\text{Geo}(C)/\mathbb{C}}$ を $\text{Geo}(C)/\mathbb{C}$ の Thurston コンパクト化と呼ぶ.

上述のように種数 0, つまり射影直線の場合のみ $\text{Geo}(\mathbb{P}^1) \subsetneq \text{Stab}(\mathbb{P}^1)$ となる. このとき次が得られる.

命題 3.9 (K–Koseki–Ouchi [23]). (i) 部分集合 $\mathcal{S} \subset \text{Ob}(\mathcal{D}^b(\mathbb{P}^1))$ の取り方によらず, 連続写像

$$\mathbb{P}m: \text{Stab}(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^{\mathcal{S}}$$

は連続ではない.

(ii) 像 $\mathbb{P}m(\text{Stab}(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C})$ は $\text{Geo}(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C}$ の部分的なコンパクト化を与える.

射影直線の場合の非単射性は, $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}^1)$ の半直交分解の存在と密接に関わる. 単射とならないことは残念であるが, 一方で全空間 $\text{Stab}(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C}$ が $\text{Geo}(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C}$ の部分的なコンパクト化となることは興味深い現象である.

以下 X を種数 1, つまり楕円曲線とする. 楕円曲線の場合, Polishchuk–Zaslow によるホモロジー的ミラー対称性 [31]

$$\Phi_{\text{PZ}}: \mathcal{D}^b(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\pi} \text{Fuk}(\tilde{X})$$

を介して, 古典的なトーラス Σ_1 の場合の Thurston コンパクト化との比較が可能となる. ここで, $\mathcal{D}^{\pi} \text{Fuk}(\tilde{X})$ はミラートーラス \tilde{X} の導来深谷圏で, $\text{Sph}(X)$ と $\text{Sph}(\tilde{X})$ はそれぞれ $\mathcal{D}^b(X)$ と $\mathcal{D}^{\pi} \text{Fuk}(\tilde{X})$ の球対象 (の同型類) のなす集合とする.

定理 3.10 (K–Koseki–Ouchi [23]). 次の図式が可換となるような自然な連続写像 η, ι が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \text{Stab}(X)/\mathbb{C} & \xrightarrow{\mathbb{P}m} & \mathbb{P}_{\geq 0}^{\text{Sph}(X)} \\ \Phi_{\text{PZ}} \downarrow \wr & & \mathbb{P}\Phi_{\text{PZ}} \downarrow \wr \\ \text{Stab}(\tilde{X})/\mathbb{C} & \xrightarrow{\mathbb{P}m} & \mathbb{P}_{\geq 0}^{\text{Sph}(\tilde{X})} \\ \eta \uparrow \wr & & \iota \uparrow \wr \\ \mathcal{T}(\Sigma_1) & \xrightarrow{\mathbb{P}l} & \mathbb{P}_{\geq 0}^{\mathcal{S}}. \end{array}$$

さらに, この図式は 3 つの Thurston コンパクト化の間の同相写像を誘導する:

$$\overline{\text{Stab}(X)/\mathbb{C}} \simeq \overline{\text{Stab}(\tilde{X})/\mathbb{C}} \simeq \overline{\mathcal{T}(\Sigma_1)}.$$

交点数を用いて, Thurston 境界 $\partial \text{Stab}(X)/\mathbb{C}$ の稠密な部分集合を構成することができる. この意味で, コンパクト化の境界についても十分な理解が得られている.

またトーラスの写像類群の Nielsen–Thurston 分類を用いることで、自己同値の Nielsen–Thurston 分類が得られる:

定理 3.11 (K–Koseki–Ouchi [23]). $\text{Stab}(X)/\mathbb{C}$ に非自明に作用する $\mathcal{D}^b(X)$ 自己同値は、周期的、可約、擬 Anosov という 3 つのタイプの内いずれか 1 つとなる.

4 群論的側面

4.1 交点数, 2 つの球面捻りが生成する部分群

この小節の全ての内容は、より一般に proper dg 圏の導来圏の compact 対象のなす三角部分圏に対して成り立つ.

ホモロジー的ミラー対称性に基づいて、1 節の表にある交点数を導入する. 対象 $M, N \in \mathcal{D}^b(X)$ に対して、交点数 $i(M, N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$i(M, N) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(X)}(M, N[p]) \quad (4.1)$$

で定義する. 実際、実曲面の導来深谷圏の場合に (4.1) は古典的な交点数と一致する.

次は球面捻りの反復合成に関する交点数の振る舞いを記述する基本不等式である. 写像類群の場合にも Dehn 捻りの反復合成に関する全く同様の不等式が古典的に知られていた [15].

定理 4.1 (Barbacovi–K [3]). $E \in \mathcal{D}^b(X)$ を球面对象, $M, N \in \mathcal{D}^b(X)$ を対象とする. このとき任意の $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して、次が成り立つ.

$$i(E, M)i(E, N) \leq i(T_E^k M, N) + i(M, N).$$

2 つの対象 $M, N \in \mathcal{D}^b(X)$ が任意の整数 $l \in \mathbb{Z}$ に対して $M \not\cong N[l]$ を満たすとき、 M, N は distinct であるという.

次の定理は、幾何学的群論において基本的な ping-pong 補題を用いて、写像類群の場合と全く同様に示される. 定理 4.1 にある基本不等式が証明の核となる.

定理 4.2 (Barbacovi–K [3]). $E_1, E_2 \in \mathcal{D}^b(X)$ を distinct な球面对象とする. $i(E_1, E_2) \geq 2$ が成り立つとき、任意の $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して、部分群 $\langle T_{E_1}^{k_1}, T_{E_2}^{k_2} \rangle$ は階数 2 の自由群 F_2 と同型になる.

系として次が得られる. もちろん写像類群の場合に全く同様のことが知られていた.

系 4.3 (Barbacovi–K [3]). $E_1, E_2 \in \mathcal{D}^b(X)$ を distinct な球面对象とする. このとき次が成り立つ.

(i) $i(E_1, E_2) = 0 \iff \langle T_{E_1}, T_{E_2} \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(ii) $i(E_1, E_2) = 1 \iff \langle T_{E_1}, T_{E_2} \rangle \simeq B_3$, ここで B_3 は組紐 3 本のブレイド群である.

(iii) $i(E_1, E_2) \geq 2 \iff \langle T_{E_1}, T_{E_2} \rangle \simeq F_2$.

4.2 K3 曲面の自己同値群の中心群

次は自己同値による球対象の振る舞いと球面捻りの可換性の関係を述べた非常に基本的な主張である。こちらも定理 4.1 にある基本不等式を用いて示される。

定理 4.4 (Barbacovi–K [3]). $E_1, E_2 \in \mathcal{D}^b(X)$ を球対象, $\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ を自己同値, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を非零な整数とする。このとき, 次は同値である:

- (i) $\Phi \circ T_{E_1}^{k_1} = T_{E_2}^{k_2} \circ \Phi$.
- (ii) ある $l \in \mathbb{Z}$ に対して $\Phi(E_1) = E_2[l]$, かつ $k_1 = k_2$.

以下, X を K3 曲面とする。ここではピカール数に関する仮定は必要ない。ある群 Γ の中心群 $Z(\Gamma)$ とは,

$$Z(\Gamma) := \{g \in \Gamma \mid \text{任意の } h \in \Gamma \text{ に対して } gh = hg\}$$

で与えられ, 群の可換性を測る上で重要な不変量である。

上記の定理 4.4 に対応する主張を用いて, 写像類群の中心群が計算される。自己同値群の場合も全く同様の方針で中心群が計算できる。主張を述べる前にいくつか準備する。 $\text{Aut}^\dagger(\mathcal{D}^b(X))$ を連結成分 $\text{Stab}^\dagger(X)$ を保つ自己同値のなす部分群と定義する。ピカール数 1 の場合には $\text{Aut}^\dagger(\mathcal{D}^b(X)) = \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ が成り立つ。 $\text{Aut}(X)$ の部分群

$$\text{Aut}_t(X) := \{f \in \text{Aut}(X) \mid H^2(f)|_{\text{NS}(X)} = \text{id}_{\text{NS}(X)}\}$$

を超越自己同型群と呼ぶ。この群は有限巡回群であり, その位数を m_X とする。また生成元 $f_t \in \text{Aut}_t(X)$ を 1 つ固定する。

定理 4.5 (Barbacovi–K [3]). 次が成り立つ。

(i)

$$Z(\text{Aut}^\dagger(\mathcal{D}^b(X))) = \text{Aut}_t(X) \times \mathbb{Z}[1] \simeq (\mathbb{Z}/m_X) \times \mathbb{Z}.$$

(ii)

$$Z(\text{Aut}_{\text{CY}}^\dagger(\mathcal{D}^b(X))) = \begin{cases} \langle (f_t^*)^{m_X/2} \circ [1] \rangle & \text{if } m_X \text{ is even} \\ \mathbb{Z}[2] & \text{if } m_X \text{ is odd} \end{cases} \\ \simeq \mathbb{Z}.$$

5 力学系的側面

自己同型 $f \in \text{Aut}(X)$ に対して位相的エントロピー $h_{\text{top}}(f) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ という力学系的不変量 (i.e. 自己射の反復合成を用いて定義される量) が定まる。圏論的類似として, Dimitrov–Haiden–

Katzarkov–Kontsevich により, 自己同値関手の力学系的不変量である圏論的エントロピーが導入された [9]. 導入されてから 10 年とまだ日が浅い理論ではあるが, 筆者の結果を中心にこれまでの発展の一部を振り返る.

この節では特に断りのない限り, X を \mathbb{C} 上の滑らかな射影代数多様体とする. 対象 $G \in \mathcal{D}^b(X)$ を含む最小の thick 部分圏が $\mathcal{D}^b(X)$ 自身と一致するとき, G を $\mathcal{D}^b(X)$ の分裂生成子 (split-generator) と呼ぶ.

例 5.1. very ample な直線束 $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ に対して, 対象 $\bigoplus_{i=0}^{\dim X} \mathcal{L}^i \in \mathcal{D}^b(X)$ は $\mathcal{D}^b(X)$ の分裂生成子となる. 分裂生成子を自己同値で移したのも再び分裂生成子となる.

以下, $G \in \mathcal{D}^b(X)$ を分裂生成子, $\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ を自己同値, $f \in \text{Aut}(X)$ を自己同型とする.

定義 5.2 (Dimitrov–Haiden–Katzarkov–Kontsevich [9]). 分裂生成子 G に関する対象 $E \in \mathcal{D}^b(X)$ の complexity $\delta_t(G, E)$ ($t \in \mathbb{R}$) を次で定義する.

$$\delta_t(G, E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^p e^{n_i t} \mid \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & E_1 & \cdots & E_{p-1} & \xrightarrow{\quad} & E \oplus E' \\ & \searrow & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\ & & G[n_1] & \cdots & & & G[n_p] \end{array} \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

complexity を用いて圏論的エントロピーを定義する.

定義 5.3 (Dimitrov–Haiden–Katzarkov–Kontsevich [9]). 自己同値 $\Phi \in \text{Aut}(\mathcal{D}^b(X))$ の圏論的エントロピー $h_t(\Phi)$ ($t \in \mathbb{R}$) を次で定義する.

$$h_t(\Phi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta_t(G, \Phi^n(G')) \in \mathbb{R}.$$

圏論的エントロピーの定義において, 極限は存在し, かつ分裂生成子の取り方によらないことに注意する. またアприオリには極限が発散し得るが, Fan–Filip により任意の $t \in \mathbb{R}$ で有限の値を取ることが示されている [13].

次に圏論的エントロピーの基本的な性質を紹介する.

命題 5.4 ([9, 27]). 次が成り立つ.

- (i) $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $h_t(\Phi_1^l) = l h_t(\Phi_1)$.
- (ii) $h_t(\Phi_1 \Phi_2) = h_t(\Phi_2 \Phi_1)$.
- (iii) $\Phi_1 \Phi_2 = \Phi_2 \Phi_1$ ならば $h_t(\Phi_1 \Phi_2) \leq h_t(\Phi_1) + h_t(\Phi_2)$.
- (iv) $h_t(\Phi_2 \Phi_1 \Phi_2^{-1}) = h_t(\Phi_1)$.

この命題から, 既存のエントロピー理論 (位相的エントロピー, 測度論的エントロピー等) と基本的な性質を多く共有することがわかる. この意味で, 力学系的不変量 $h_t(\Phi)$ はエントロピーと呼ぶに相応しいものである.

あるクラスの自己連続写像の位相的エントロピーに対して“エントロピー＝交点数の指数増大度”というタイプの等式が成り立つ。次はその圏論的類似である。

定理 5.5 (Dimitrov–Haiden–Katzarkov–Kontsevich [9]). 次が成り立つ。

$$h_0(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log i(G, \Phi^n G)$$

この定理を用いて、いくつかの具体的な自己同値の圏論的エントロピーが計算されている。

例 5.6 ([9, 30]). 次が成り立つ。

- (i) $h_t([L]) = Lt$.
- (ii) $h_t(- \otimes \mathcal{L}) = 0$.
- (iii) $h_t(T_E) \geq (1 - \dim X)t$ かつ $h_0(T_E) = 0$.

また球面関手 (球面捻りではない) に沿った twist としての表示を持つ自己同値の圏論的エントロピーも Kim [28], Barbacovi–Kim [4] により研究されている。

自己同型射 $f \in \text{Aut}(X)$ から圏論的エントロピーと位相的エントロピーという 2 つの力学系的不変量が得られるが、これらは整合的である:

定理 5.7 (K–Takahashi [26]). 次が成り立つ。

$$h_0(f^*) = h_{\text{top}}(f)$$

次の Gromov–Yomdin の定理は、位相的エントロピーという超越的な量が線型写像のスペクトル半径で書けるということを主張する代数多様体上の力学系において非常に重要な定理である。

定理 5.8 (Gromov [16], Yomdin [36]). 次が成り立つ。

$$h_{\text{top}}(f) = \log \rho(H^*(f))$$

Gromov–Yomdin の定理の圏論的類似として、圏論的エントロピーと数値的 Grothendieck 群上に誘導する自己同型

$$\mathcal{N}(\Phi) : \mathcal{N}(\mathcal{D}^b(X)) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{D}^b(X))$$

のスペクトル半径 (の自然対数) $\log \rho(\mathcal{N}(\Phi))$ の比較を考える [26]. 一般に下からの評価が成り立つ。

定理 5.9 (K–Shiraishi–Takahashi [27]). 次が成り立つ。

$$h_0(\Phi) \geq \log \rho(\mathcal{N}(\Phi))$$

等式 $h_0(\Phi) = \log \rho(\mathcal{N}(\Phi))$ が成り立つ例が数多く知られている [4, 12, 21, 27, 26, 28, 30, 37]. 一方で、一般には成り立たないことが分かっている [4, 11, 29, 30].

最近では Barbacovi–Kim により、安定性条件の空間への自己同値群の作用と $GL^+(2, \mathbb{R})$ の普遍被覆群の作用の整合性を用いた、Gromov–Yomdin 型等式の新しいアプローチもなされている [5].

K3 曲面特有の圏論的エントロピーの研究についても触れる. Sheridan–Smith [32, 33] によって確立された、K3 曲面のホモロジー的ミラー対称性における自己同値群の研究に基づき、次を示した.

定理 5.10 (K–Ouchi [24]). 正の圏論的エントロピーのシンプレクティック *Torelli* 写像類を持つ K3 曲面が存在する.

これは Thurston によって構成された “実曲面の写像類でホモロジー群には自明に作用するが、力学系的に複雑な挙動を示す例” の実 4 次元かつ圏論的な類似である. ホモロジー的ミラー対称性は Novikov 体上の圏同値として定式化される. Novikov 体上の K3 曲面とその複素モデルの間での圏論的エントロピーの不変性の証明が技術的に重要であった.

自己同値群を理解するという目的からは逸れるが、筆者らによる Serre 次元と呼ばれる三角圏の不変量の研究 [25] も紹介する. 良いクラスの三角圏 (例えば smooth proper dg 圏の導来圏の perfect 対象のなす三角部分圏) に標準的に備わる Serre 関手の圏論的エントロピーを用いて、三角圏の Serre 次元が定義される. 筆者は、大内氏、高橋氏と共同で Serre 次元を研究し、Ikeda–Qiu の大域次元との比較や、Serre 次元が 1 より小さい三角圏の完全な分類を与えた.

参考文献

- [1] D. Allcock, *Completions, branched covers, Artin groups, and singularity theory*, Duke Math. J., **162** (2013), no. 14, 2645–2689.
- [2] A. Bapat, A. Deopurkar, A. M. Licata, *A Thurston compactification of the space of stability conditions*, arXiv:2011.07908.
- [3] F. Barbacovi and K. Kikuta, *Spherical twists, relations and the center of autoequivalence groups of K3 surfaces*, arXiv:2210.00228.
- [4] F. Barbacovi and J. Kim, *Entropy of the composition of two spherical twists*, arXiv:2107.06079.
- [5] F. Barbacovi and J. Kim, *On Gromov–Yomdin type theorems and a categorical interpretation of holomorphicity*, arXiv:2110.12597.
- [6] A. Bayer, T. Bridgeland, *Derived automorphism groups of K3 surfaces of Picard rank 1*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 1, 75–124.
- [7] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math., **166** (2007), 317–345.
- [8] T. Bridgeland, *Stability conditions on K3 surfaces*, Duke Math. J., **141** (2008) no. 2, 241–291.

- [9] G. Dimitrov, F. Haiden, L. Katzarkov and M. Kontsevich, *Dynamical systems and categories*, Contemporary Mathematics, **621** (2014), 133–170, DOI: 10.1090/conm/621.
- [10] I. V. Dolgachev, *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces*, J. Math. Sci., **81**(1996)(3), 2599–2630.
- [11] Y.-W. Fan, *Entropy of an autoequivalence on Calabi–Yau manifolds*, Math. Res. Lett., **25** (2018) no. 2, 509–519.
- [12] Y.-W. Fan, *On entropy of P-twists*, arXiv:1801.10485.
- [13] Y.-W. Fan and S. Filip, *Asymptotic shifting numbers in triangulated categories*, arXiv:2008.06159.
- [14] Y.-W. Fan, A. Kanazawa and S.-T. Yau, *Weil–Petersson geometry on the space of Bridgeland stability conditions*, Comm. Anal. Geom., **29** (2021), no. 3, 681–706.
- [15] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, volume 49 of Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, Princeton (2012).
- [16] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math., **49** (2003), 217–235.
- [17] D. Huybrechts, *Fourier–Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford (2006).
- [18] D. Huybrechts, *Stability conditions via spherical objects*, Math. Z., **271**(3-4) (2012), 1253–1270.
- [19] D. Huybrechts, *Introduction to stability conditions*, In Moduli spaces, volume 411 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 179–229. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.
- [20] D. Huybrechts, *Lectures on K3 surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge (2016).
- [21] K. Kikuta, *On entropy for autoequivalences of the derived category of curves*, Adv. in Math., **308** (2017), 699–712.
- [22] K. Kikuta, *Curvature of the space of stability conditions*, Manuscripta Mathematica, Published online, DOI: 10.1007/s00229-022-01389-9.
- [23] K. Kikuta, N. Koseki and G. Ouchi, *Thurston compactifications of spaces of stability conditions on curves*, arXiv:2211.08001.
- [24] K.Kikuta and G.Ouchi, *Hochschild entropy and Categorical entropy*, Arnold Mathematical Journal, Published online, DOI: 10.1007/s40598-022-00210-5.
- [25] K.Kikuta, G.Ouchi and A.Takahashi, *Serre dimension and stability conditions*, Mathematische Zeitschrift, **299** (2021), 997–1013.
- [26] K. Kikuta and A. Takahashi, *On the categorical entropy and the topological entropy*, Int. Math. Res. Notices, vol. 2019 (2019) Issue 2, 457–469.
- [27] K. Kikuta, Y. Shiraishi, A. Takahashi, *A note on entropy of auto-equivalences: lower bound and the case of orbifold projective lines*, Nagoya Math. J., **238** (2020), 86–103.

- [28] J. Kim, *Computation of categorical entropy via spherical functors*, to appear in Bull. Lond. Math. Soc.
- [29] D. Mattei, *Categorical vs topological entropy of autoequivalences of surfaces*, arXiv:1909.02758, to appear in Moscow Math. J..
- [30] G. Ouchi, *On entropy of spherical twists*, Proc. Amer. Math. Soc., **148** (2020) no. 3, 1003–1014.
- [31] A. Polishchuk and E. Zaslow, *Categorical mirror symmetry: the elliptic curve*, Adv. Theor. Math. Phys., **2** (1998) no.2, 443–470.
- [32] N. Sheridan and I. Smith, *Homological mirror symmetry for generalized Greene–Plesser mirrors*, arXiv:1709.08937, to appear in Invent. Math..
- [33] N. Sheridan and I. Smith, *Symplectic topology of K3 surfaces via mirror symmetry*, J. Amer. Math. Soc. **33** (2020), 875–915.
- [34] P. Seidel and R. Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Math. J. **108** (2001), no. 1, 37–108.
- [35] 上原北斗, 戸田幸伸, 連接層の導来圏と代数幾何学, 丸善出版 (2020).
- [36] Y. Yomdin, *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. **57** (1987), 285–300.
- [37] K. Yoshioka, *Categorical entropy for Fourier–Mukai transforms on generic abelian surfaces*, J. Alg., **556** (2020), 448–466.

ON LC-TRIVIAL FIBRATIONS WITH LOG BIG MODULI PARTS

橋詰 健太 (京都大学学際融合教育研究推進センター)

CONTENTS

| | |
|--|----|
| 1. イントロダクション | 1 |
| 2. Lc-trivial fibration | 1 |
| 3. Lc-trivial fibration with log big moduli part | 4 |
| 4. 極小モデル理論と lc-trivial fibration | 6 |
| 5. 有効的固定点自由化定理 | 8 |
| 6. 一般の lc-trivial fibration での有効的固定点自由化定理 | 11 |
| 文献 | 12 |

1. イントロダクション

本稿では、lc-trivial fibration と呼ばれる代数多様体間の射を扱う。双有理幾何学、特に極小モデル理論において lc-trivial fibration は頻繁に現れ、lc-trivial fibration における標準束公式と代数多様体の次元による帰納法を組み合わせた議論はかなり強力である。双有理幾何学の様々な結果、特にファノ型多様体の有界性についての近年の発展には lc-trivial fibration の標準束公式が無くてはならないものになっている。

ここでは、lc-trivial fibration with log big moduli part と呼ばれる特別な場合について、極小モデル理論に関連する結果を紹介していく。

用語と記号 1.1. 本稿では、簡単のために代数多様体は全て複素数体上の射影的正規代数多様体であるとし、 \mathbb{Q} -因子のみを扱う。また、 \mathbb{Q} -因子 $D = \sum_i a_i D_i$ に対し (各 D_i は相異なる既約因子)、

$$D^{>0} := \sum_{a_i > 0} a_i D_i, \quad D^{<0} := \sum_{a_i < 0} a_i D_i, \quad D^{=1} := \sum_{a_i = 1} D_i$$

と定義する。非特異代数多様体 X と単純正規交差因子 D に対し、 S が (X, D) の **stratum** であるとは $S = X$ または S が D の幾つかの既約因子 D_1, \dots, D_k の共通部分の既約成分であることと定義する。

2. LC-TRIVIAL FIBRATION

まず、本稿で登場する lc pair と klt pair を定義する。

Date: 2022/12/26.

定義 2.1. 代数多様体 X と有効 \mathbb{Q} -因子 Δ の組 (X, Δ) で $K_X + \Delta$ が \mathbb{Q} -カルティエであるものを **pair** という。

(X, Δ) を pair とするとき、 (X, Δ) が **lc pair** とは、全ての射影的有理写像 $f: Y \rightarrow X$ と Y 上の素因子 P に対し、 $K_Y - f^*(K_X + \Delta)$ における P の係数が -1 以上になるものをいう。一方 (X, Δ) が **klt pair** とは、全ての射影的有理写像 $f: Y \rightarrow X$ と Y 上の素因子 P に対し、 $K_Y - f^*(K_X + \Delta)$ における P の係数が真に -1 より大きくなるものをいう。

現在の極小モデル理論では、主に klt pair または lc pair の枠組み内で研究される。Lc pair (X, Δ) の極小モデル (X', Δ') で $K_{X'} + \Delta'$ が半豊富なものを **good minimal model** と呼ぶ。

上記の lc pair を用いて lc-trivial fibration を定義する。

定義 2.2. ファイブレーション $\pi: X \rightarrow Z$ ($\pi_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Z$ をみたす写像) と lc pair (X, Δ) の組が **lc-trivial fibration** とは、 $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*D$ をみたす Z 上の \mathbb{Q} -カルティエ因子 D が存在するようなものことである。

以下では、lc-trivial fibration を $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ と書くことにする。

注 2.3. 一般的に lc-trivial fibration においては (X, Δ) は lc pair と仮定しない ([1], [2], [16], [17], [11]) が、ここでは簡単のため上記の定義を採用する。また、一般に lc-trivial fibration $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ には、 $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*D$ をみたす D の情報は含まれない。つまり、 D の取り方には任意性がある。

以下の極小モデル理論に現れる写像は全て lc-trivial fibration の構造を持つ。

- 例 1. (X, Δ) を lc pair で $K_X + \Delta$ が半豊富であるものとする。 $\pi: X \rightarrow Z$ を $K_X + \Delta$ から誘導されるファイブレーションとすると、 $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ は lc-trivial fibration である。
- 例 2. $\pi: X \rightarrow Z$ を何らかの lc pair (X, Δ) の森ファイバー空間とする。このとき、 $-(K_X + \Delta)$ は Z 上相対的に豊富なので、ある豊富な因子 A で $(X, \Delta + A)$ が lc pair かつ $K_X + \Delta + A$ が Z 上相対的に数値的自明となるものが存在する。このとき、 $\pi: (X, \Delta + A) \rightarrow Z$ は lc-trivial fibration になる。
- 例 3. (X, Δ) がカラビ-ヤウ型、つまり (X, Δ) が lc pair で $K_X + \Delta$ が数値的自明であるものとする。このとき、 X から任意の代数多様体へのファイブレーション $X \rightarrow Z$ について、 $(X, \Delta) \rightarrow Z$ は lc-trivial fibration である。

$(X, \Delta) \rightarrow Z$ を lc-trivial fibration とするとき、 (X, Δ) の幾何学、これを一般ファイバー F に制限した $(F, \Delta|_F)$ の幾何学、さらに Z の幾何学が密接に関係している。上記の状況における研究の流れの例を挙げておくと、

- 例 1 では $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*D$ なる \mathbb{Q} -カルティエ因子 D は豊富な因子なので、 $(F, \Delta|_F)$ と D を調べることにより、 (X, Δ) に関する結果が期待できる。(例えば [24])
- 例 2 では $-(K_F + \Delta|_F)$ が豊富なので、この性質と (X, Δ) の幾何学を用いて、 Z に関する結果を得られることが期待できる。さらに、得られた結果と代数多様体の次元による帰納法などを用いて、 Z に関するより深い結果を得られれば、それを (X, Δ) に還元できることも期待できる。(例えば [3], [26])
- 例 3 で (X, Δ) が klt pair のときは、 Z 上に klt pair (Z, Δ_Z) で $K_Z + \Delta_Z \sim_{\mathbb{Q}} 0$ となるものが存在する。よって、 $(F, \Delta|_F)$ と (X, Δ) (または Z) を調べることにより、 Z (または X) についての結果を得られることが期待できる。(例えば [7], [15]。またカラビ-ヤウ型の話ではないが [18] も参照せよ)

一般に、lc-trivial fibration $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ が与えられたとき、まず (X, Δ) と $(F, \Delta|_F)$ の条件から Z や $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* D$ をみたす \mathbb{Q} -カルティエ因子 D に関する性質を調べ、さらにその性質を用いて (X, Δ) についてさらに強い性質を証明する、という議論が多いように思う。近年発展している有界性に関する結果 ([30], [26]) や後述する固定点自由化定理の結果 ([24]) も、この方針に則って証明される結果である。極小モデル理論に直接関連した応用としては、lc-trivial fibration $(X, \Delta) \rightarrow Z$ で (X, Δ) が klt pair かつ $K_X + \Delta$ の小平次元が Z の次元と一致するとき、Birkar–Cascini–Hacon–McKernan の結果 [6] と後述する標準束公式 ([27], [2]), さらに Nakayama–Zariski 分解の理論 [31] を用いて、 (X, Δ) の極小モデルまたは森ファイバー空間の存在が証明できる。

以下の lc-trivial fibration に関する予想は、代数多様体の次元に関する帰納法をより強力にするために重要である。

予想 2.4. $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ を lc-trivial fibration とする。このとき、ある Z 上に lc pair (Z, Δ_Z) が存在し、 $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_Z + \Delta_Z)$ が成立する。

この予想が成り立てば、 (X, Δ) の様々な幾何学が (Z, Δ_Z) 上の幾何学に帰着できる。予想 2.4 は (X, Δ) が klt pair の場合は Ambro [2] によって知られているが、一般には解決されていない。それどころか、lc pair になるような Z 上の \mathbb{Q} -因子が存在するかどうかも知られていない。

現在、lc-trivial fibration を扱う際には以下の Kawamata、Ambro により構築された定理が頻繁に用いられる。

定理 2.5 (標準束公式, cf. [27], [1]). $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ を lc-trivial fibration とするとき、任意の射影的雙有理写像 $g: Z' \rightarrow Z$ に対し $(X, \Delta) \rightarrow Z$ と g にのみ依存する \mathbb{Q} -因子 $B_{Z'}$ が定義できる。このとき、全ての Z' に対し、 $B_{Z'}$ の係数は 1 以下である。さらに、次をみたすような Z の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ が存在する。

- (1) $\text{Supp } B_W$ は単純正規交差、
- (2) $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* D$ をみたす \mathbb{Q} -カルティエ因子 D に対し、 $M_W := h^* D - (K_W + B_W)$ と定義すると、 M_W はネフ \mathbb{Q} -因子となる ([27])、
- (3) 全ての射影的雙有理写像 $h': W' \rightarrow W$ に対し、 $K_{W'} + B_{W'} = h'^*(K_W + B_W)$ ([1])。

$g: Z' \rightarrow Z$ に対し、定理 2.5 の $B_{Z'}$ を **discriminant part**、 $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* D$ をみたす \mathbb{Q} -カルティエ因子 D を取り、 $M_{Z'} := h^* D - (K_{Z'} + B_{Z'})$ で定義した $M_{Z'}$ を **moduli part** と呼ぶことにする。定理 2.5 より、 $(W, B_W^{\geq 0})$ は lc pair であることが分かる。

以下では、lc-trivial fibration $(X, \Delta) \rightarrow Z$ と雙有理写像 $Z' \rightarrow Z$ に対し、discriminant part を $B_{Z'}$ 、moduli part を $M_{Z'}$ で表記する。

注 2.6. 与えられた lc-trivial fibration $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ に対し、以下の事実を記しておく。

- 任意の $g: Z' \rightarrow Z$ に対し、 $B_{Z'}^{\leq 0}$ は g -例外 \mathbb{Q} -因子であり、 $g_* B_{Z'} = B_Z$ が成立。
- 任意の $Z' \rightarrow Z$ に対し、discriminant part は \mathbb{Q} -因子として定まるが、moduli part は \mathbb{Q} -線形同値の差を除いて定義される。これは、moduli part が $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* D$ をみたす D と $K_{Z'}$ の因子としての取り方に依存するからである。
- 定理 2.5 の (1)–(3) をみたす $h: W \rightarrow Z$ は一意的ではない。例えば、(1)–(3) をみたす $h: W \rightarrow Z$ を取り、さらに雙有理写像 $\tilde{h}: \tilde{W} \rightarrow W$ で \tilde{W} が (1) をみたすようにとる。このとき $K_{\tilde{W}} + B_{\tilde{W}} = \tilde{h}^*(K_W + B_W)$ が成立。よって、(3) については、任意の $h': W' \rightarrow \tilde{W}$ について、

$$K_{W'} + B_{W'} = (\tilde{h} \circ h')^*(K_W + B_W) = h'^*(K_{\tilde{W}} + B_{\tilde{W}})$$

となり、(2)については、

$$M_{\tilde{W}} = (h \circ \tilde{h})^* D - (K_{\tilde{W}} + B_{\tilde{W}}) = \tilde{h}^*(h^* D - (K_W + B_W)) = \tilde{h}^* M_W$$

となり、 $M_{\tilde{W}}$ もネフ \mathbb{Q} -因子となる。

予想 2.4 を標準束公式の観点からアプローチする場合、最も重要な部分は moduli part がどのような振る舞いをするかである。一般には次の予想がある。

予想 2.7 (B-semiample conjecture, [32, Conjecture 7.13, Remark 7.14]). $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ を *lc-trivial fibration* とする。定理 2.5 の (1)–(3) をみたす Z の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ で、 M_W が半豊富になるものが存在する。

予想 2.4 と予想 2.7 は以下の関係がある。

定理 2.8. 与えられた *lc-trivial fibration* $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ に対し、予想 2.7 が成り立てば、予想 2.4 が成り立つ。

証明. 予想 2.7 が $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ に対し成り立てば、特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ で、 $\text{Supp } B_W$ は単純正規交差かつ M_W が半豊富であるものが存在する。 $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* D$ なる D を取ると、 $h^* D \sim_{\mathbb{Q}} K_W + B_W + M_W$ が成立。Bertini の定理より、ある有効因子 $G_W \sim_{\mathbb{Q}} M_W$ が存在して、 $\text{Supp}(B_W + G_W)$ が単純正規交差かつ $B_W + G_W$ の係数が全て 1 以下となる。また、 $B_W^{\leq 0}$ は h -例外因子なので、 $\Delta_Z := h_*(B_W + G_W)$ は有効因子ある。このとき、

$$D \sim_{\mathbb{Q}} h_*(K_W + B_W + G_W) = K_Z + \Delta_Z$$

なので、 $K_Z + \Delta_Z$ は \mathbb{Q} -カルティエ因子かつ $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_Z + \Delta_Z)$ が成立。さらに

$$K_W + B_W + G_W = h^*(K_Z + \Delta_Z)$$

となるので、 (Z, Δ_Z) は lc pair. よって予想 2.4 が成り立つ。□

現在は、Fujino–Gongyo [17]、Floris–Lazić [11] により、半豊富とまではいかないものの moduli part について強い性質が知られている。

定理 2.9 ([17], [11]). $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ を *lc-trivial fibration* とする。このとき、定理 2.5 の (1)–(3) をみたす Z の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ で、さらに以下の性質をみたすものが存在する。

(4) (W, B_W^{-1}) の任意の *stratum* S に対し、全射 $\phi_S: S \rightarrow V_S$ と V_S 上の巨大 \mathbb{Q} -因子 N_S が存在して、 $M_W|_S \sim_{\mathbb{Q}} \phi_S^* N_S$ が成立。

この結果の帰結として以下の定理が知られている。

定理 2.10. 予想 2.7 は曲線 Z 上の *lc-trivial fibration* $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ については正しい。

なお、 (X, Δ) が klt pair の場合は定理 2.9 も定理 2.10 も Ambro ([1], [2]) によって証明されている。

3. LC-TRIVIAL FIBRATION WITH LOG BIG MODULI PART

Lc pair (X, Δ) で *lc-trivial fibration* $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ の構造をもつものが与えられたとき、 (X, Δ) の極小モデル理論の問題は Z の問題に帰着させることが可能である。実際、定理 2.5 の (1)–(3) と定理 2.9 の (4) をみたす Z の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ をとる。このとき、 \mathbb{Q} -因子 $K_W + B_W^{>0} + M_W$ について、 $(W, B_W^{>0})$ は lc pair であり M_W はネフで

あるから、極小モデル理論の観点からは通常の lc pair と同じような研究が可能である。特に $K_W + B_W^{\geq 0} + M_W$ に関する極小モデルプログラムを議論することができる。さらに Nakayama–Zariski 分解の理論 [31] を用いると、この $K_W + B_W^{\geq 0} + M_W$ に関する極小モデルプログラムが停止すれば、 (X, Δ) が極小モデルを持つことも分かる。

ただ、 $K_W + B_W^{\geq 0} + M_W$ に帰着させて問題が簡単になるとは限らない。例えば $M_W \sim_{\mathbb{Q}} 0$ の場合、本質的に lc pair $(W, B_W^{\geq 0})$ を扱うことと等しくなるので、 (X, Δ) の極小モデル理論を考えることと難しさはほとんど変わらない。一方、 M_W が巨大かつ $(W, B_W^{\geq 0})$ が klt pair であるなら、Birkar–Cascini–Hacon–McKernan [6] の結果を応用することにより、 $K_W + B_W^{\geq 0} + M_W$ に関する極小モデルプログラムで半豊富な因子で停止するものを構成でき、結果として (X, Δ) は good minimal model を持つことが分かる。この状況を $(W, B_W^{\geq 0})$ が klt pair でない場合にも一般化したのが以下の定義である。

定義 3.1 (Lc-trivial fibration with log big moduli part, [24, Definition 4.1]). Lc-trivial fibration $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ が **lc-trivial fibration with log big moduli part** であるとは、定理 2.5 の (1)–(3) をみたす Z の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ で、さらに以下の性質をみたすものが存在するもののことをいう。

(4') (W, B_W^{-1}) の任意の stratum S に対し、 $M_W|_S$ が巨大である。

注 3.2. \mathbb{Q} -カルティエ因子 D が非特異多様体 Y と単純正規交差因子 Γ からなる lc pair (Y, Γ) に対し上記 (4') の条件をみたすとき、 D は (Y, Γ) に関して **対数的巨大 (log big)** と呼ばれる。定義 3.1 の名前の由来はこの概念である。

以下の例に示すように、lc-trivial fibration with log big moduli part はいくらでも存在する。 $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ を lc-trivial fibration とする。

例 1. $(W, B_W^{\geq 0})$ が klt pair なら $B_W^{-1} = 0$ なので、(4') は moduli part が巨大であることと同値である。 (X, Δ) が klt であれば $(W, B_W^{\geq 0})$ も klt pair であり、このとき moduli part の飯高次元は、 π のファイバーのホッジ構造の変形に依存する。Moduli part が巨大であることは、雑に言えばホッジ構造が最も変形する状況を意味する。

例 2. 定理 2.9 の記号で、

$$n := \max\{\dim S - \dim V_S \mid S \text{ は } (W, B_W^{-1}) \text{ の stratum}\}$$

と定義する。 Z 上の超曲面 H_1, \dots, H_n をとり、 $Z' = H_1 \cap \dots \cap H_n$, $X' := \pi^{-1}(Z')$, $\Delta' := \Delta|_{X'}$ と定義すると、 $(X', \Delta') \rightarrow Z'$ は lc-trivial fibration with log moduli part になる。

Lc-trivial fibration with log big moduli part の概念は、論文 [24] の中で定義されたものであり、一般的ではない。定義 3.1 を予想 2.4 や予想 2.7 の側面からみると、まずこの概念は定理 2.9 の特殊な状況として定義されている。定理 2.9 の表記を使うと、一般に $\dim W > \dim V_W$ であれば、lc-trivial fibration の底空間の次元に関する帰納法や Ambro の結果 [2, Theorem 3.3] を使うことにより何らかの結果を得られることが期待できる。実際、Floris–Lazić による結果 [11, Theorem E] では、[2, Theorem 3.3] を使い予想 2.7 を moduli part が巨大である場合にのみ考えればよいことを証明している。帰納法の議論や [2, Theorem 3.3] が有効でない場合が moduli part が巨大な場合である。また一般に、 (W, B_W^{-1}) の任意の stratum S に対し、(本稿ではなく [1], [16], [11] などの一般的な意味での) lc-trivial fibration $(Y_T, \Gamma_T) \rightarrow T$ と generically finite morphism $g: T \rightarrow S$ が存在して、 $g^*(M_W|_S)$ が $(Y_T, \Gamma_T) \rightarrow T$ の moduli part になるようなものが存在する。よって

lc-trivial fibration with log big moduli part とは、どんな $(Y_T, \Gamma_T) \rightarrow T$ に対しても帰納法の議論や [2, Theorem 3.3] が使いづらいような状況、といえる。

以上のように、lc-trivial fibration with log big moduli part では、lc-trivial fibration の構造を使って議論するより、3つ組 $(W, B_W^{>0}, M_W)$ を極小モデル理論の観点から調べるのが有効である。実際、この3つ組は Birkar–Zhang [10] により導入された generalized pair と呼ばれるものの1つである。より厳密には、generalized pair 以前に Birkar–Hu [9] によって定義された polarized pair と呼ばれるものとして扱うことができる。Generalized pair の概念は現在の双有理幾何学の発展に大きく貢献している対象であり、generalized pair に関する双有理幾何学も lc pair や klt pair と同様に豊かな内容を持っている。文献はいくつもあるが、Birkar による解説記事 [4]、また極小モデルプログラムの基本定理に関するものなら [10, Section 4] や [20] がある。本稿では、論文 [23] で証明された結果を使う。

定理 3.3 ([23]). 非特異多様体 X と単純正規交差 \mathbb{Q} -因子 Δ からなる lc pair (X, Δ) とこれに関する対数的巨大 (注 3.2 参照) なネフ \mathbb{Q} -因子 M からなる 3つ組 (X, Δ, M) を考える。 $K_X + \Delta + M$ が擬有効のとき、以下が成立する。

(i) $K_X + \Delta + M$ に関する極小モデルプログラムの有限ステップ

$$\phi: X \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_l$$

が存在して、 $K_{X_l} + \phi_*\Delta + \phi_*M$ が半豊富となる。

(ii) さらに $K_{X_l} + \phi_*\Delta + \phi_*M$ のカルティエ指数を r とすると、 $\dim X$ と r にのみ依存する正の整数 n が存在して、 $n(K_{X_l} + \phi_*\Delta + \phi_*M)$ は固定点自由となる。

この定理の証明は Generalized pair の極小モデルプログラムの結果 ([10, Section 4], [20]) を使うが、全てのアイデアは lc pair の極小モデル理論 ([22]) から来ている。

4. 極小モデル理論と LC-TRIVIAL FIBRATION

以下では、「 (X, Δ) に対し極小モデル理論が成立する」という言葉の意味を、 (X, Δ) から始まり極小モデルまたは森ファイバー空間で停止するような極小モデルプログラムの有限列

$$(X, \Delta) \dashrightarrow (X_1, \Delta_1) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow (X_m, \Delta_m)$$

が存在し、さらに (X_m, Δ_m) が極小モデルなら $K_{X_m} + \Delta_m$ は半豊富である、として定める。

Lc pair (X, Δ) が lc-trivial fibration の構造 $(X, \Delta) \rightarrow Z$ を持つとき、 (X, Δ) の極小モデル理論を Z の幾何学に帰着させるという発想は Gongyo–Lehmann [19] に見られる。彼らの結果は (X, Δ) が klt pair の結果であるが、lc-trivial fibration よりも一般的なファイブレーションに対して証明している。 (X, Δ) が lc pair の場合には [21] で得られた結果があり、 $\dim Z$ が 3 以下または $\dim Z$ と $K_X + \Delta$ の飯高次元が共に 4 の場合に (X, Δ) に関して極小モデル理論が成立することが知られている。

一方、以下の結果は lc-trivial fibration with log big moduli part という条件がついているが、多様体についての次元の仮定を必要としない。

定理 4.1. (X, Δ) を lc pair とする。 (X, Δ) が lc-trivial fibration with log big moduli part の構造を持つなら、 (X, Δ) に対し極小モデル理論が成立する。

証明の概略. $K_X + \Delta$ が擬有効でない場合、[25, Theorem 1.7] より、森ファイバー空間で停止する極小モデルプログラムの有限列が存在する。よって $K_X + \Delta$ が擬有効としてよい。 (X, Δ) が lc-trivial fibration with log big moduli part $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ の構造を持つとする。定理 2.5 (1)–(3) と定義 3.1 (4) をみたます Z の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ をとり、discriminant part を B_W 、moduli part を M_W とする。このとき、定理 3.3 (i) より、 $K_W + B_W^{\geq 0} + M_W$ に関する極小モデルプログラムの有限ステップ

$$\phi: W \dashrightarrow W_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow W_l$$

が存在して、 $K_{W_l} + \phi_* B_W^{\geq 0} + \phi_* M_W$ が半豊富となる。これより、特異点解消 $h': W' \rightarrow W$ で $W' \dashrightarrow W_l$ が写像になるものを取れば、 $h'^*(K_W + B_W^{\geq 0} + M_W)$ の Nakayama–Zariski 分解の正部分が半豊富になる。 $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* D$ なる Z 上の \mathbb{Q} -カルティエ因子 D を取りこの事実を用いると、 $h'^* h^* D$ の Nakayama–Zariski 分解の正部分も半豊富になる。

$f: X' \rightarrow X$ を X の特異点解消で、 $\pi': X' \dashrightarrow W'$ が写像になるものとする。

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ Z & \xleftarrow{h \circ h'} & W' \end{array}$$

このとき、 $f^*(K_X + \Delta) \sim_{\mathbb{Q}} \pi'^*(h'^* h^* D)$ なので、[31, III, 5.17 Corollary] を用いると、 $f^*(K_X + \Delta)$ の Nakayama–Zariski 分解の正部分が半豊富であることが分かり、さらに [22, Theorem 2.23] より (X, Δ) は good minimal model を持つ。[25, Theorem 1.7] より、 (X, Δ) から始まる極小モデルプログラムの有限列

$$(X, \Delta) \dashrightarrow (X_1, \Delta_1) \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow (X_m, \Delta_m)$$

で、 $K_{X_m} + \Delta_m$ が半豊富になるものが存在する。よって定理 4.1 が従う。□

以下は定理 4.1 の応用である。

定理 4.2. *Lc-trivial fibration with log big moduli part* $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ と Z 上の \mathbb{Q} -カルティエ因子 D で $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* D$ をみたますものを取る。このとき、 Z 上の任意の豊富な \mathbb{Q} -因子 A に対し、ある lc pair (Z, Δ_Z) が存在して、 $K_Z + \Delta_Z \sim_{\mathbb{Q}} D + A$ となる。とくに、 Z 上に lc pair の構造が存在する。

証明の概略. 定理 2.5 (1)–(3) と定義 3.1 (4') をみたます Z の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ をとり、discriminant part を B_W 、moduli part を M_W とする。このとき、十分大きな有理数 $t_0 > 2 \cdot \dim W$ と十分豊富な Z 上のカルティエ因子 L をとり $K_W + B_W^{\geq 0} + t_0 M_W + h^* L$ に定理 3.3 (i) をうまく適用することにより、 Z 上の双有理収縮 $\phi: W \dashrightarrow W'$ で、

- $\phi_* M_W$ はネフ、
- ある $t \gg t_0$ が存在して $K_{W'} + \phi_* B_W^{\geq 0} + t \phi_* M_W$ が Z 上相対的に豊富

となるものが構成できる。 $W' \rightarrow Z$ を h' と書くことにすると、 $\phi_* B_W^{\leq 0}$ は h' -例外因子で

$$K_{W'} + \phi_* B_W + \phi_* M_W \sim_{\mathbb{Q}} h'^* D$$

となる。 A を Z 上の豊富な \mathbb{Q} -因子をとり、また $0 < \epsilon < \frac{1}{t}$ を $A - \epsilon D$ が豊富であるようにとる。このとき、 $0 < \epsilon' \ll \epsilon$ で $A' := \epsilon'(K_{W'} + \phi_* B_W^{\geq 0} + t \phi_* M_W) + h'^*(A - \epsilon' D)$ が豊

富となるようなものが取れる。すると、

$$\begin{aligned} h'^*(D + A) &\sim_{\mathbb{Q}} (1 + \epsilon')(K_{W'} + \phi_* B_W + \phi_* M_W) + h'^*(A - \epsilon' D) \\ &= K_{W'} + \phi_* B_W^{>0} - (1 + \epsilon')\phi_* B_W^{<0} + (1 + \epsilon' - \epsilon' t)\phi_* M_W + A' \end{aligned}$$

となり、構成から $1 + \epsilon' - \epsilon' t > 0$ なので、

$$G' \sim_{\mathbb{Q}} (1 + \epsilon' - \epsilon' t)\phi_* M_W + A'$$

で、 $(W', \phi_* B_W^{>0} - (1 + \epsilon')\phi_* B_W^{<0} + G')$ が sub-lc pair になるものが存在する。 $\phi_* B_W^{<0}$ は h' -例外因子なので、 $\Delta_Z := h'_*(\phi_* B_W^{>0} - (1 + \epsilon')\phi_* B_W^{<0} + G')$ は有効因子で、 (Z, Δ_Z) は lc pair、さらに

$$K_Z + \Delta_Z = h'_*(K_{W'} + \phi_* B_W^{>0} - (1 + \epsilon')\phi_* B_W^{<0} + G') \sim_{\mathbb{Q}} D + A$$

なので、 (Z, Δ_Z) が求める lc pair となる。 \square

予想 2.4 や予想 2.7 は lc-trivial fibration with log big moduli part の状況でも未解決である。一方 3 節でも述べた通り、lc-trivial fibration $(X, \Delta) \rightarrow Z$ に対し Z 上に lc pair の構造が入るかどうか一般には知られていない。定理 4.2 はこの問題についての lc-trivial fibration with log big moduli part の場合の肯定的解決を与えている。

5. 有効的固定点自由化定理

極小モデル理論の大きな 2 つの予想として、「良い」モデルの存在予想と「アバンダンス予想」がある。「良い」モデルの存在予想はその名の通り、全ての lc pair (X, Δ) が「良い」モデル (極小モデルまたは森ファイバー空間) を持つだろうという予想である。現在は $K_X + \Delta$ が擬有効でない場合に森ファイバー空間を持つ事が知られているので、「 $K_X + \Delta$ が擬有効のときに極小モデルを持つか？」という、極小モデルの存在予想となっている。「アバンダンス予想」は (X, Δ) の極小モデル (X', Δ') について、 $K_{X'} + \Delta'$ が常に半豊富だろう、という予想である。どちらも 4 次元以上の lc pair で未解決であり、特にアバンダンス予想では $K_{X'} + \Delta'$ を何倍かすれば大域切断を持つかどうか未解決である。これは「非消滅予想」の極小モデル版の予想である。

$K_X + \Delta$ がネフである lc pair (X, Δ) について、アバンダンス予想が成立しているとする。このとき、 $m(K_X + \Delta)$ が固定点自由なカルティエ因子となる自然数 m が存在するが、この m は具体的にどのような量に依存するか？ というのは自然な問いである。これを本稿では有効的固定点自由化予想と呼ぶことにする。理想的には X の次元と $n\Delta$ がヴェイユ因子になるような最小の n のみに依存する m が存在すればよいが、これは非常に難解な予想である。例えば、 $\Delta = 0$ のとき、 K_X が数値的に 0 な lc pair (X, Δ) について、固定点自由化予想が成立することは K_X のカルティエ指数を X の次元のみによる値で一様に抑えられることを意味する。そこで、本稿では X の次元 d と $K_X + \Delta$ のカルティエ指数 r を固定した際の有効的固定点自由化予想について考える。

問 5.1. 任意の自然数 d と r に対し、 d と r にのみ依存する自然数 m で、以下をみたすものは存在するか？

- Lc pair (X, Δ) で $\dim X = d$ かつ $r(K_X + \Delta)$ が半豊富なカルティエ因子になるものに対し、 $m(K_X + \Delta)$ は固定点自由である。

Δ が豊富な有効因子を含むとき、上記問は Fujino [13] (klt pair の場合は Kollár [28]) によって解決されているが、一般の場合は全くと言っていいほど分かっていない。Kollár

や Fujino による証明は、Kodaira 型のコホモロジーの消滅定理に大きく依存しているため、[28] や [13] の証明を一般の klt pair や lc pair に適用することは難しい。

問 5.1 の (X, Δ) は $K_X + \Delta$ を用いて構成されるファイブレーションにより lc-trivial fibration の構造を持つ (2節の例 1 参照)。よって問 5.1 において lc-trivial fibration の構造の存在を仮定することは無意味である。ここでは、lc-trivial fibration with log big moduli part $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ の構造を持つときを考えることにする。しかしこれだけでは仮定として弱く、例えば $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ の場合にあまり意味をなさない。よって、 $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ の一般ファイバーに条件を課すことにする。これは $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ の場合には (X, Δ) そのものに条件を付けることと同じである。これらの仮定の下であれば、以下の定理のように問 5.1 が肯定的に成り立つことが分かる。

定理 5.2 (cf. [24, Theroem 4.3]). 任意の自然数 d, r と正の実数 v に対し、 d, r, v のみに依存する自然数 m が存在して以下をみたす： $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ を *lc-trivial fibration with log big moduli part* で

- $\dim X = d$,
- $m(K_X + \Delta)$ がネフなカルティエ因子、
- X 上のある \mathbb{Q} -カルティエなヴェイユ因子 A が存在して、 F を π の十分一般的なファイバーとすると、
 - $A|_F$ が豊富、
 - ある t が存在して $(F, \Delta|_F + tA|_F)$ が *lc pair*、
 - $\text{vol}(A|_F) = v$

をみたすとき、 $m(K_X + \Delta)$ は固定点自由となる。

注 5.3. 定理 5.2 の $K_X + \Delta$ についての仮定は半豊富まで必要なくネフだけで良い。つまり定理 5.2 はアバンダンス予想も含めて成り立つことを示している。

証明のカギとなるのは以下の結果である。

補題 5.4 (cf. [24, Lemma 1.1, Lemma 3.1]). 任意の自然数 d, r と正の実数 v に対し、 d, r, v のみに依存する自然数 m が存在して以下をみたす： $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ を *lc-trivial fibration* で

- $\dim X = d$,
- $m(K_X + \Delta)$ がカルティエ因子、
- X 上のある \mathbb{Q} -カルティエなヴェイユ因子 A が存在して、 F を π の十分一般的なファイバーとすると、
 - $A|_F$ が豊富、
 - ある t が存在して $(F, \Delta|_F + tA|_F)$ が *lc pair*、
 - $\text{vol}(A|_F) = v$

をみたすとき、 Z 上のある \mathbb{Q} -カルティエ因子 D が存在して、 $m(K_X + \Delta) \sim m\pi^*D$ かつ Z の任意の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ と *discriminant part* B_W 、*moduli part* M_W に対し、 $mh^*D = m(K_W + B_W + M_W)$ がカルティエ因子となる。

定理 5.2 の証明の概略. 定理 5.2 の仮定から、補題 5.4 の性質をみたす自然数 m と Z 上の \mathbb{Q} -カルティエ因子 D が取れる。定理 2.5 (1)–(3) と定義 3.1 (4) をみたす Z の特異点解消 $h: W \rightarrow Z$ をとり、discriminant part を B_W 、moduli part を M_W とする。このとき、 Z 上で $K_W + B_W^{>0} + M_W$ に関する極小モデルプログラムを走らせることにより、 Z 上

の双有理収縮射 $\phi: W \dashrightarrow W'$ で $W' \rightarrow Z$ を h' と書いたときに

$$K_{W'} + \phi_* B_W^{>0} + \phi_* M_W = h'^* D$$

となるものを構成できる。このとき、錐定理 ([29, Theorem 3.7]) または [24, Lemma 3.1] を繰り返し使うことにより、 $m(K_{W'} + \phi_* B_W^{>0} + \phi_* M_W)$ がカルティエ因子になる。また、 ϕ は $K_W + B_W^{>0} + M_W$ に関する極小モデルプログラムの有限ステップなので、定理 3.3 (ii) が適用でき、 $\dim W'$ と m にのみ依存する自然数 n が存在して、 $n(K_{W'} + \phi_* B_W^{>0} + \phi_* M_W)$ は固定点自由なカルティエ因子となる。 n を変えることにより、 n は $d = \dim X$ と m にのみ依存するとしてよい。

$f: X' \rightarrow X$ を X の特異点解消で、 $\pi': X' \dashrightarrow W'$ が写像になるものとする。

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ Z & \xleftarrow{h'} & W' \end{array}$$

このとき、

$$mnf^*(K_X + \Delta) \sim mn\pi'^*h'^*D = m\pi'^*(n(K_{W'} + \phi_* B_W^{>0} + \phi_* M_W))$$

なので、 $rmn(K_X + \Delta)$ は固定点自由と分かる。この rmn が求める自然数である。□

補題 5.4 (と定理 5.2) の 3 つ目の条件は、 F が $A|_F$ による偏極化多様体として d, r, v にのみ依存する有界族に含まれることを意味しており ([5, Corollary 1.8])、実際この条件とほぼ同値である。この条件は一見強く、多様体自身の有界性のみで緩めることが自然と期待されるが、以下の例に見られるように一般には不可能である。

例 5.5 (cf. [8, Example 3.1], [12]). 自然数 m を固定する。 \mathbb{P}^2 とその中の楕円曲線 E をとり、 E の群構造を 1 つ固定する。 E の中の 9 点 p_1, \dots, p_9 で以下を満たすものを取る。

- C の群構造で見たとき $(m+1) \sum_{i=1}^9 p_i$ が単位元、
- ある \mathbb{P}^2 の $3(m+1)$ 次曲線 C で、 p_1, \dots, p_9 で多重度 $m+1$ の特異点、その他の点は非特異なものが存在する。

\mathbb{P}^2 を p_1, \dots, p_9 で爆発したものを X とすると、 $-(m+1)K_X$ は固定点自由で $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を定義し、 $-(m+1)K_X \sim \pi^*P$ (P は 1 点) が成立する。特に $mK_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*D$ なる D はカルティエ因子ではない。

よって、任意の m に対し、lc-trivial fibration $\pi: (X, 0) \rightarrow Z$ で、

- $\dim X = 2$,
- K_X がカルティエ因子、
- 一般ファイバーが楕円曲線 (特に、ある有界族に属する)、
- $K_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*D$ となるどんな \mathbb{Q} -カルティエ因子 D をとってきても mD はカルティエ因子ではない

となるものが存在する。

上記のような現象が起こる原因は、lc-trivial fibration のファイバーの多重指数が有界でないからである。実際、上記の例では、特別なファイバーで多重指数が $m+1$ になるものが存在するが ([12])、補題 5.4 の設定では、全てのファイバーの多重指数が一様に上から抑えられる。

定理 5.2 は $K_X + \Delta$ がネフの場合の有効的固定点自由化定理であったが、定理 5.2 にある設定であれば $-(K_X + \Delta)$ がネフの場合でも同様の主張が証明できる。とくに、 $-(K_X + \Delta)$ がネフの場合のアバンドンス予想も証明することができる。一般の lc pair (X, Δ) では、 $-(K_X + \Delta)$ がネフであっても半豊富であることは期待できない(曲面で反例が存在)上に、 $\Delta = 0$ で $-K_X$ が半豊富なカルティエ因子であっても有効的固定点自由化定理は成立しない(例 5.5 がまさにその例である)。

定理 5.6 (cf. [24, Theorem 4.4]). 任意の自然数 d, r と正の実数 v に対し、 d, r, v のみに依存する自然数 m が存在して以下をみたす: $\pi: (X, \Delta) \rightarrow Z$ を *lc-trivial fibration with log big moduli part* で

- $\dim X = d$,
- $-m(K_X + \Delta)$ がネフなカルティエ因子、
- X 上のある \mathbb{Q} -カルティエなヴェイユ因子 A が存在して、 F を π の十分一般的なファイバーとすると、
 - $A|_F$ が豊富、
 - ある t が存在して $(F, \Delta|_F + tA|_F)$ が lc pair、
 - $\text{vol}(A|_F) = v$

をみたすとき、 $-m(K_X + \Delta)$ は固定点自由となる。

証明のアイデアは定理 5.2 と同じなので省略する。

6. 一般の LC-TRIVIAL FIBRATION での有効的固定点自由化定理

最後に、lc-trivial fibration with log big moduli part でない状況での有効的固定点自由化定理を紹介する。

定理 6.1. 任意の自然数 d, r と正の実数 v に対し、 d, r, v のみに依存する自然数 m が存在して以下をみたす: $e \in \{1, -1\}$ に対し $e(K_X + \Delta)$ が半豊富である *klt pair* (X, Δ) と $e(K_X + \Delta)$ から誘導されるファイブレーション $\pi: X \rightarrow Z$ で

- $\dim X = d$,
- $m(K_X + \Delta)$ がカルティエ因子、
- X 上のある有効 \mathbb{Q} -カルティエ因子 A が存在して、 F を π の十分一般的なファイバーとすると $\text{vol}(A|_F) = v$

が成り立つものに対し、 $me(K_X + \Delta)$ が固定点自由で $|ne(K_X + \Delta)|$ で定義される写像が π と一致する。

証明の概略. 十分小さな $t > 0$ を取って Z 上の $(K_X + \Delta + tA)$ -極小モデルプログラムを考え、 (X, Δ) を適切に取り換えることにより、 A が Z 上相対的に豊富として良い。補題 5.4 と [24, Lemma 3.1] を使うことにより、 d, r, v にのみ依存する m' と Z 上のカルティエ因子 D が存在して、 $m'(K_X + \Delta) \sim \pi^* D$ となる。このとき、 D は豊富である。構成より、[28, Theorem 1.1] と [14, Theorem 7.1] を使えば、 $\dim Z$ にのみ依存する m'' が存在して、 $m''D$ は非常に豊富となる。 m'' を取り替えれば、 m'' は $\dim X = d$ にのみ依存しているとしてよい。このとき、 $m := m'm''$ が定理 6.1 の条件をみたす。□

注 6.2. 定理 6.1 では 3 つ目の条件に A の有効性を仮定しているが、証明を少し変えれば有効性の仮定が必要ないことが分かった。これは [24] が更新されるときに変更される予定である。

一般に d, r, v を固定したとき、定理 6.1 の X は有界族に属するとは限らない。例えば $K_X + \Delta$ が巨大のとき、 $\text{vol}(K_X + \Delta)$ がいくらでも大きくなる可能性がある。さらに $-(K_X + \Delta)$ が半豊富な場合だと、 $\Delta = 0$ かつ X が有界族に属する場合でも有効的固定点自由化定理は一般に成立しない (例 5.5 と具体的な構成 [8, Example 3.1] 参照)。しかし多様体や pair の有界性を使う議論は様々な量の有限性や有界性を示すのに有効であるため、定理 6.1 に似た結果が多様体の有界性の議論を使って証明される期待は十分にある。

謝辞. 講演の機会を下さったプログラム責任者の岡田拓三先生、渡邊究先生、会場責任者の森脇淳先生、シンポジウム責任者の小島秀雄先生に感謝いたします。また、例 5.5 について議論してくださった尾高悠志先生、原稿を読んでコメントを下さった藤野修先生に感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 JP16J05875、JP19J00046、JP22K13887 の助成を受けたものです。

文献

- [1] F. Ambro, Shokurov's boundary property, *J. Differential Geom.* **67** (2004), no. 2, 229–255.
- [2] F. Ambro, The moduli b -divisor of an lc trivial fibration, *Compos. Math.* **141** (2005), no. 2, 385–403.
- [3] C. Birkar, Anti-pluricanonical systems on Fano varieties, *Ann. of Math.*, **19** (2019), no. 2, 345–463.
- [4] C. Birkar, Generalised pairs in birational geometry, *EMS Surv. Math. Sci.* **8** (2021), 5–24.
- [5] C. Birkar, Geometry of polarised varieties, to appear in *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*
- [6] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, *J. Amer. Math. Soc.* **23** (2010), no. 2, 405–468.
- [7] C. Birkar, Y. Chen, Images of manifolds with semi-ample anti-canonical divisor, *J. Algebraic Geom.* **25** (2016), 273–287.
- [8] C. Birkar, C. D. Hacon, Variations of generalised pairs, preprint (2022), arXiv:2204.10456v1.
- [9] C. Birkar, Z. Hu, Polarized pairs, log minimal models, and Zariski decompositions, *Nagoya Math. J.* **215** (2014), 203–224.
- [10] C. Birkar, D. Q. Zhang, Effectivity of Iitaka fibrations and pluricanonical systems of polarized pairs, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **123** (2016), no. 1, 283–331.
- [11] E. Floris, V. Lazić, On the B-semiampleness conjecture, *Épjournal de Géométrie Algébrique* **3** (2019), epiga:5063.
- [12] Y. Fujimoto, On Rational Elliptic Surfaces with Multiple Fibers, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **26** (1990), 1–13.
- [13] O. Fujino, Effective base point free theorem for log canonical pairs-Kollár type theorem, *Tohoku Math. J.* **61** (2009), 475–481.
- [14] O. Fujino, Effective basepoint-free theorem for semi-log canonical surfaces, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **53** (2017), no. 3, 349–370.
- [15] O. Fujino, Y. Gongyo, On images of weak Fano manifolds, *Math. Z.* **270** (2012), no. 1, 531–544.
- [16] O. Fujino, Y. Gongyo, On canonical bundle formulas and subadjunctions, *Michigan Math. J.* **61** (2012), no. 2, 255–264.
- [17] O. Fujino, Y. Gongyo, On the moduli b -divisors of lc-trivial fibrations, *Ann. Inst. Fourier* **64** (2014), no. 4, 1721–1735.
- [18] O. Fujino, Y. Gongyo, On images of weak Fano manifolds II, *Algebraic and complex geometry*, 201–207, Springer Proc. Math. Stat., 71, Springer, Cham, 2014.
- [19] Y. Gongyo, B. Lehmann, Reduction maps and minimal model theory, *Compos. Math.* **149** (2013), no. 2, 295–308.
- [20] J. Han, Z. Li, Weak Zariski decompositions and log terminal models for generalized polarized pairs, *Math. Z.* (2022).

- [21] K. Hashizume, Minimal model theory for relatively trivial log canonical pairs, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **68** (2018), no. 5, 2069–2107.
- [22] K. Hashizume, Finiteness of log abundant log canonical pairs in log minimal model program with scaling, to appear in *Michigan Math. J.*
- [23] K. Hashizume, Iitaka fibrations for dlt pairs polarized by a nef and log big divisor, *Forum Math. Sigma*. **10** (2022), e85.
- [24] K. Hashizume, A note on lc-trivial fibrations, preprint (2022), arXiv:2206.03921v1.
- [25] K. Hashizume, Z. Hu, On minimal model theory for log abundant lc pairs, *J. Reine Angew. Math.*, **767** (2020), 109–159.
- [26] J. Jiao, Boundedness of polarised Calabi-Yau fibrations, preprint (2022), arXiv:2202.07238v2.
- [27] Y. Kawamata, Subadjunction of log canonical divisors, II, *Amer. j. Math.*, **120** (1998), no. 5, 893–899.
- [28] J. Kollár, Effective base point freeness, *Math. Ann.* **296** (1993), no. 4, 595–605.
- [29] J. Kollár, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Translated from the 1998 Japanese original. Cambridge Tracts in Mathematics **134**. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [30] Z. Li, Boundedness of the vase varieties of certain fibrations, preprint (2020), arXiv:2002.06565v2
- [31] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Mem. **14**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.
- [32] Y. Prokhorov, V. V. Shokurov, Towards the second main theorem on complements, *J. Algebraic Geom.*, **18** (2009), no. 1, 151–199.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO
606-8502, JAPAN

Email address: hkenta@math.kyoto-u.ac.jp

hyperquotient 特異点の minimal log discrepancy

中村 勇哉 *

この記事は、第 67 回代数学シンポジウムの講演内容をまとめたものであり、柴田康介氏との共同研究 [NS22, NSa, NSb] の内容の解説である。

1 イントロダクション

極小ログ食い違い係数 (MLD) は、双有理幾何学で定義された特異点の不変量である。MLD について ACC 予想と LSC 予想と呼ばれる 2 つの重要な予想がある。この 2 つの予想の重要性はこの 2 つの予想がフリップの停止予想を導くことにある (Shokurov の定理 [Sho04])。その他関連する予想として、PIA 予想と Shokurov の index 予想と呼ばれているものがある。この記事では、商特異点や超商特異点に対する LSC 予想と PIA 予想、商特異点に対する ACC 予想と index 予想についての進展 (柴田康介氏との共同研究) について説明する。以下、 k を標数 0 の代数閉体とし、 k 上の代数多様体を扱う。

2 MLD

(X, Δ) がログ対であるとは、 X が正規代数多様体、 Δ が係数正の \mathbb{R} -因子で、 $K_X + \Delta$ が \mathbb{R} -Cartier であるときをいう。 $f: Y \rightarrow X$ が正規代数多様体 Y からの双有理写像であるとき、 Y 上の \mathbb{R} -因子 Δ_Y が

$$f^*(K_X + \Delta) = K_Y + \Delta_Y$$

により定まる。 E を Y 上の素因子とすると、食い違い係数 $a_E(X, \Delta)$ が

$$a_E(X, \Delta) := 1 - \text{coeff}_E \Delta_Y$$

により定まる。閉点 $x \in X$ に対し、極小ログ食い違い係数 $\text{mld}_x(X, \Delta)$ が

$$\text{mld}_x(X, \Delta) := \inf_E a_E(X, \Delta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$$

により定まる。ここで E は X 上空の素因子で X での中心 (像のこと) が $\{x\}$ に一致するもの全てを考える。 $\text{mld}_x(X, \Delta)$ は $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ に値をとることが知られている。

$\text{mld}_x(X, \Delta)$ は X の x での特異点の良さ・悪さを反映していると考えられている (MLD が小さいほど特異点は悪い)。

* 東京大学数理科学研究科, nakamura@ms.u-tokyo.ac.jp

この記事の後半ではイデアル版のログ対 (X, \mathfrak{A}) を中心に扱う。ここで X は \mathbb{Q} -Gorenstein であることを仮定し、 $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^s \mathfrak{a}_i^{r_i}$ は \mathbb{R} -イデアルである。つまり、 $\mathfrak{a}_i \subset \mathcal{O}_X$ は非零のイデアルであり、 $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$ である。このセッティングでも同様に $a_E(X, \mathfrak{A})$ が

$$a_E(X, \mathfrak{A}) := 1 + \text{coeff}_E(K_{Y/X}) - \sum_{i=1}^s r_i \text{ord}_E \mathfrak{a}_i$$

により定義され、 $\text{mld}_x(X, \mathfrak{A})$ が定義される。

3 MLD に関する予想

予想 3.1 (ACC 予想, Shokurov [Sho96]). d を正整数, I を DCC を満たす集合とする (つまり, I の元からなる無限列であって単調減少するものは存在しない). このとき以下の集合

$$\{\text{mld}_x(X, \Delta) \mid x \in X, \dim X = d, \Delta \in I\}$$

は ACC を満たす (つまり, 単調増加する無限部分列をもたない). ただし, $\Delta \in I$ で Δ の Weil 因子としての係数がすべて I に属することを表す.

ACC 予想は 2 次元の場合に Shokurov [Sho94] と Alexeev [Ale93] によって証明された. 3 次元の場合には川北 [Kaw15b, Kaw14], 中村 [Nak16b], Han-Liu-Luo [HLL] による部分的な結果がある. Han-Liu-Luo [HLL] による結果が最も一般的で, 3 次元 terminal 対に対して ACC 予想を証明している.

予想 3.2 (LSC 予想, Ambro [Amb99]). (X, Δ) をログ対とする. このとき関数

$$|X| \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \quad x \mapsto \text{mld}_x(X, \Delta)$$

は下半連続となる. ただし, 位相空間 $|X|$ は X の閉点からなる集合に Zariski 位相をいれたものである.

LSC 予想は 3 次元以下の場合に Ambro [Amb99] により証明された. また, Ein-Mustařa-安田 [EMY03] は弧空間の理論を応用することで, X が非特異の場合に LSC 予想を証明した (次元の制約はない). Ein-Mustařa [EM04] はこの結果を局所完全交差多様体に拡張している. 中村 [Nak16a] は別の方向の拡張として, 商特異点の場合に証明した. 中村と柴田 [NS22, NSa] はさらに, 超商特異点の場合に証明した.

イントロダクションで述べた通り, ACC 予想と LSC 予想の重要性は Shokurov [Sho04] により証明された「ACC 予想と LSC 予想を認めると, フリップの停止問題が導かれる」ことにある.

予想 3.3 (PIA 予想). (X, Δ) をログ対とする. S を X の正規 Cartier 素因子で, $S \not\subset \text{Supp}(\Delta)$ を満たすと仮定する. x を S の閉点とするとき,

$$\text{mld}_x(X, \Delta + S) = \text{mld}_x(S, \Delta|_S)$$

が成立する.

PIA 予想が証明されている状況は LSC 予想が証明されている状況と同じである。まず、3 次元以下の場合に正しい。Ein-Mustaṭā-安田 [EMY03] は X が非特異の場合に PIA 予想を証明し、Ein-Mustaṭā [EM04] は局所完全交差多様体に拡張している。中村と柴田 [NS22, NSa] は、 X が商特異点の場合に (より一般に、超商特異点の場合に) 証明した。

PIA 予想の重要性は「MLD の問題を次元の低い問題に帰着できる」ことにある。極小モデル理論の様々な結果は次元に関する帰納法により証明されており、MLD の問題を次元の帰納法で考える上で PIA 予想の解決は重要なステップとなりうる。また、特異点理論の面ではこの逆の方向性も重要である。PIA 予想を認めると「 X について LSC 予想が成立していれば S についても成立する」ことが証明できる。 X は S よりも次元が高いが、特異点は S よりも通常良くなっている。例えば、非特異多様体 X に対する PIA 予想と LSC 予想から、超曲面特異点に対する LSC 予想が導かれることになる。

予想 3.4 (Shokurov の index 予想). 正整数 d と非負実数 a に対し、以下の条件を満たす正整数 $r(n, a)$ が存在する: d 次元正規 \mathbb{Q} -Gorenstein 多様体 X 上の閉点 $x \in X$ が $\text{mld}_x(X) = a$ をみたすとき、 $r(n, a) \cdot K_X$ は x で Cartier となる。

index 予想は一見するとかなり非自明な予想に思われる。 mK_X が x で Cartier である場合、MLD の定義から $\text{mld}_x(X) \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}$ となることがすぐにわかる。従って、 X の Gorenstein index から MLD の可能性が“ほぼ” (上界があれば) 有限になることが分かる。index 予想はある意味この逆も成り立つことを主張している。即ち、MLD を固定して考えたときに Gorenstein index の取りうる可能性が有限であることを主張しているのだ。index 予想は ACC 予想の証明に利用できる可能性がある (中村 [Nak16b] により「Gorenstein index が有界であり、係数集合が有限集合である場合の ACC 予想」が証明されている)。

index 予想は、 $(d, a) = (2, 0)$ の場合に、曲面の分類により証明されている (cf. [Sho92, Corollary 5.10]). $n = 2$ の場合に (より一般にログ対に対するバージョンも)、Chen-Han [CH21, Theorem 1.4] により証明されている。 $(d, a) = (3, 0)$ の場合に、石井 [Ish00] と藤野 [Fuj01] により証明されている。藤野 [Fuj01] は一般次元であっても、 $a = 0$ の場合の index 予想を双有理自己同型射に関する別の予想に帰着させている。 X が 3 次元 terminal 多様体の場合、川又 [Kaw92] による分類から index 予想は証明することができる (Han-Liu-Luo [HLL] ではさらにログ対に対しても証明している)。 X が 3 次元 canonical 多様体の場合、川北 [Kaw15a] により証明された。 X がトーリック多様体の場合、Ambro [Amb09] により証明された。 X が商特異点をもち、 a が次元に対して十分小さいときに、index 予想は Moraga [Mor] により証明されている。中村-柴田 [NSb] は X が商特異点を持つ場合に (a の条件なしに) index 予想を証明した。

4 LSC 予想と PIA 予想に弧空間の理論が有効な理由

前章で解説した LSC 予想・PIA 予想について知られている結果 [EMY03, EM04, Nak16a, NS22, NSa] では弧空間の理論が本質的に利用されている。この章では、Ein-Mustaṭā-安田

[EMY03] の理論を概観し, LSC 予想と PIA 予想に対して弧空間の理論が, X が非特異の場合に有効な理由 (そして, X が特異点を持つ場合にうまくいかない理由) を説明する.

まず, Ein-Mustařă-安田 [EMY03] は MLD を弧空間の言葉で記述した. ここでは簡単のため, (X, \mathfrak{a}^r) の形のイデアル版のログ対 (\mathbb{R} -イデアルの定義において $s = 1$ の場合である) を考える (実際には一般の \mathbb{R} -イデアルについても公式がある).

定理 4.1 (Ein-Mustařă-安田 [EMY03]). (X, \mathfrak{a}^r) をログ対, ℓK_X が Cartier であると仮定する. このとき

$$C_{a,b} := \text{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a}) \cap \text{cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x) \cap \text{cont}^b(\mathfrak{n}_{\ell, X}) \subset X_{\infty}$$

とおくと,

$$\text{mld}_x(X, \mathfrak{a}^r) = \inf_{a,b \geq 0} \left\{ \text{codim } C_{a,b} - \frac{b}{\ell} - ra \right\}$$

が成立する.

ここで, X_{∞} や cont , codim , $\mathfrak{n}_{\ell, X}$ など弧空間に関連する未定義用語を以下簡単に説明する. より詳しい弧空間の解説は [EM09] に委ねる.

まず, X_{∞} は X の弧空間である. X を k 上の代数多様体とする. このとき X_m を X の m 次 jet 空間, X_{∞} を X の弧空間として定める. 集合としては

$$X_m = \{\text{Spec}(k[t]/(t^{m+1})) \rightarrow X : k\text{-morphism}\}, \quad X_{\infty} = \{\text{Spec } k[[t]] \rightarrow X : k\text{-morphism}\}$$

が成立している. X_m は有限次元の scheme になるが, X_{∞} は一般には無限次元である. $X_{\infty} = \varprojlim X_m$ が成立しており, $\varphi_m : X_{\infty} \rightarrow X_m$ により射影を表す.

X のイデアル \mathfrak{a} と非負整数 m に対し, **contact locus** $\text{cont}^m(\mathfrak{a})$ と $\text{cont}^{\geq m}(\mathfrak{a})$ が

$$\text{cont}^m(\mathfrak{a}) := \{\gamma \in X_{\infty} \mid \text{ord}_{\gamma}(\mathfrak{a}) = m\}, \quad \text{cont}^{\geq m}(\mathfrak{a}) := \{\gamma \in X_{\infty} \mid \text{ord}_{\gamma}(\mathfrak{a}) \geq m\}$$

により定義される. ここで, $\text{ord}_{\gamma}(\mathfrak{a})$ は次のように定義される. まず, γ は環の射 $\gamma^* : \mathcal{O}_X \rightarrow k[[t]]$ を定める. 像 $\gamma^*(\mathfrak{a})$ で生成される $k[[t]]$ のイデアルは $(t^{m'})$ の形をしているが, この m' を $\text{ord}_{\gamma}(\mathfrak{a})$ として定める.

$\text{codim } C$ は, X_{∞} の部分集合 C の中で cylinder と呼ばれる特別なものに対して定義される. $C \subset X_{\infty}$ が cylinder であるとはある m に対し X_m の構成可能集合が存在し C がその φ_m による逆像となっているときをいう. contact locus やそのいくつかの共通部分は cylinder となる. C が cylinder であることのポイントは $\varphi_m(C)$ が任意の m について構成可能集合となることであり, 特に $\dim \varphi_m(C)$ が定義できることである. cylinder C に対する $\text{codim } C$ の一般的な定義は [EM09] を見ていただきたい. X が非特異である場合には, 十分大きな m に対し

$$\text{codim } C = \dim X_m - \dim \varphi_m(C)$$

が成立している (十分大きな m について一定の値になる). また X が非特異である場合にはジェット空間 X_m は簡単な構造をしており, $\dim X_m = (m+1) \dim X$ が成立している.

Nash イデアル $\mathfrak{n}_{\ell, X}$ は $\Omega_X^{\dim X}$ と ω_X のズレを測るようなイデアルである. まず, 自然な射 $f : (\Omega_X^{\dim X})^{\otimes \ell} \rightarrow \mathcal{O}_X(\ell K_X)$ がある. ここで仮定から $\mathcal{O}_X(\ell K_X)$ は可逆層となる. したがって

f の像を

$$\text{Im } f = \mathfrak{n}_{\ell, X} \otimes \mathcal{O}_X(\ell K_X)$$

と表すことができるようなイデアル $\mathfrak{n}_{\ell, X} \subset \mathcal{O}_X$ が存在する. これが Nash イデアルの定義である. 定義から X が非特異であれば $\mathfrak{n}_{\ell, X} = \mathcal{O}_X$ となる. X が特異点を持つ場合は, Nash イデアルの存在が, 弧空間を用いた MLD の研究を難しくしている. 定理 4.1 に Nash イデアルが登場する理由を簡単に説明する. MLD は双有理射 $Y \rightarrow X$ に対する ω_- (標準因子 K_- に対応) のズレを使って定義されている. 一方で, 弧空間はその定義から微分加群 Ω_- と相性が良い. 実際, 双有理射 $Y \rightarrow X$ が与えられたとき, 弧空間における cylinder の余次元のズレは, 微分加群 Ω_- を使って記述される (モチーフ積分における変数変換公式). X が特異点を持つ場合には, $\Omega_X^{\dim X}$ と ω_X にズレが生じ, 定理 4.1 に Nash イデアルが登場することになるのである.

Ein-Mustaŭă-安田 [EMY03] は定理 4.1 を利用して, 「 X が非特異である場合の LSC 予想・PIA 予想」を証明した. 以下, X が非特異である場合になぜ弧空間の理論が LSC 予想・PIA 予想の証明に有効であるかを以下簡単に説明する (定理 4.1 自体は特異点をもつ X についても成立することに注意). X は非特異であることの特異性は, $C_{a,b} \subset X_\infty$ が閉 cylinder となることである. X が特異点を持つ場合,

$$C_{a,b} := \text{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a}) \cap \text{cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x) \cap \text{cont}^b(\mathfrak{n}_{\ell, X})$$

は $\text{cont}^b(\mathfrak{n}_{\ell, X})$ の寄与により一般に閉とはならない ($\text{cont}^{\geq b}$ ではなく cont^b であることに注意). しかし, X が非特異である場合, Nash イデアルが自明 $\mathfrak{n}_{\ell, X} = \mathcal{O}_X$ となるため, 定理 4.1 内の $C_{a,b}$ は

$$C_a = \text{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a}) \cap \text{cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x)$$

に置き換えることができる. 以下説明するように C_a が (その形から) 閉 cylinder となることが重要となる.

X が非特異である場合, codim の定義から

$$\text{codim } C_a = \dim X_m - \dim \varphi_m(C_a)$$

が十分大きな m に対し成立する. 自然な射影 $X_m \rightarrow X$ を $\varphi_m(\text{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a})) \subset X_m$ に制限したものを $g: \varphi_m(\text{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a})) \rightarrow X$ を考える. このとき $\varphi_m(C_a)$ は g の $x \in X$ でのファイバーに一致する. 従って, 「非特異多様体 X に対する LSC 予想」は定理 4.1 により「 g のファイバーの次元の上半連続性」に言い換えることができる. 「 g のファイバーの次元の上半連続性」を示す際に C_a が閉となることが重要となることは想像に難くないであろう*1. 以上が, LSC 予想への弧空間を使ったアプローチが, X が非特異である際にうまくいく (そして X が特異点を持つ場合にうまく行かない) 理由である.

次に PIA 予想についても簡単に説明する. PIA 予想は定理 4.1 により, 「 $\text{codim}_{X_\infty} C_a$ と $\text{codim}_{S_\infty}(C_a \cap S_\infty)$ の比較」が必要となる. そのために, “弧空間における intersection

1 一般に g が proper 射であれば「 g のファイバーの次元は上半連続性」となる. しかし, 今回の g は proper 射にはならない. そのために, ファイバーへの k^ -作用を考える必要がある. いずれにしても, C_a が閉であることは「 g のファイバーの次元は上半連続性」を示すために自然に要求したくなる条件である.

theory”のようなものが必要となる。通常の intersection theory では交わりにおいて想定通りに次元が下がるために、交わりを考える対象が閉であることが要求される。“弧空間における intersection theory”においても、考える対象が閉であることが重要であることは自然に理解していただけるものと思う。\$X\$ が非特異である場合には、先に述べた通り \$C_a\$ が閉になり、「\$\text{codim}_{X_\infty} C_a\$ と \$\text{codim}_{S_\infty} (C_a \cap S_\infty)\$ の比較」がうまくいくのである。

5 商特異点の MLD

中村と柴田 [NS22, NSa] は、商特異点をもつ多様体 \$X\$ に対し PIA 予想と LSC 予想を証明した。

定理 5.1 ([NS22, NSa]). \$Y\$ が閉点 \$x \in Y\$ で商特異点をもつと仮定する。\$X\$ は \$Y\$ の余次元 \$c\$ の部分多様体で、\$y\$ の周りで \$c\$ 個の式で定義されているものと仮定する。\$S\$ は \$X\$ の Cartier 素因子で \$x\$ を通るものとする。\$X\$ と \$S\$ は \$x\$ の周りで klt であることを仮定する。このとき \$X\$ と \$S\$ に対し、PIA 予想 (予想 3.3) が成立する。

定理 5.2 ([NS22, NSa]). 定理 5.1 のセッティングにおいて、\$X\$ に対し LSC 予想 (予想 3.2) が成立する。

中村 [Nak16a] は、商特異点に対し LSC 予想を証明しているため、定理 5.2 は定理 5.1 の系として得られる。定理 5.1 の証明のカギとなるのは、Denef と Loeser による商特異点の弧空間の研究 [DL02] である。以下、簡単に Denef-Loeser の理論 [DL02] を解説する。

まず、\$k[t]\$-scheme に対する弧空間の理論が必要となる。\$X\$ を \$k[t]\$-scheme とする。このとき \$X\$ の \$m\$ 次 jet 空間 \$X_m\$ と弧空間 \$X_\infty\$ を

$$\begin{aligned} X_m &:= \{\text{Spec}(k[t]/(t^{m+1})) \rightarrow X : k[t]\text{-morphism}\}, \\ X_\infty &:= \{\text{Spec } k[[t]] \rightarrow X : k[t]\text{-morphism}\} \end{aligned}$$

により定める。Denef-Loeser [DL02] は \$X_m\$ と \$X_\infty\$ に対しても (通常の \$k\$-scheme に対する弧空間と同じような) 理論を構築した。\$k[t]\$-scheme に対する弧空間の理論は、通常の \$k\$-scheme に対する弧空間の理論の拡張とみなせる。実際、\$Y\$ を \$k\$-scheme とし、\$k[t]\$-scheme \$X\$ を \$X = Y \times_k k[t]\$ により定めると、\$k[t]\$-scheme としての jet 空間 \$X_m\$ は \$k\$-scheme としての jet 空間 \$Y_m\$ に同型となる。

続いて、Denef-Loeser [DL02] は商多様体の弧空間の理論を構築した。\$G \subset \text{GL}_N(k)\$ を有限部分群とし、\$G\$ のアフィン空間 \$\bar{A} := \mathbb{A}_k^N\$ への線型な作用を考える。\$\bar{X} \subset \bar{A}\$ を \$G\$-不変な部分多様体とする。このとき商多様体 \$\bar{X}/G\$ の弧空間 \$(\bar{X}/G)_\infty\$ を調べることが目標となる。Denef-Loeser [DL02] の理論とは簡単に述べると次のようなものである。各 \$\gamma \in G\$ に対し、\$k[t]\$-scheme \$\bar{X}^{(\gamma)}\$ を定義し (後で構成法を記す)、自然に誘導される弧空間の射

$$\bigsqcup_{\gamma \in G} \bar{X}_\infty^{(\gamma)} \rightarrow (\bar{X}/G)_\infty$$

が “ほとんど” 全射な有限射であることを証明した。これにより、商多様体の弧空間 \$(\bar{X}/G)_\infty\$

を $\overline{X}_\infty^{(\gamma)}$ を通じて研究することが可能となる。

以下, $\gamma \in G$ を固定し, $k[t]$ -scheme $\overline{X}^{(\gamma)}$ の構成法を述べる. $d := |G|$ を G の位数, $\xi \in k$ を原始 d 乗根とする. γ の位数は有限であるため, 対角化が可能である. \mathbb{A}_k^N の座標を取り換えることにより, $\gamma = \text{diag}(\xi^{e_1}, \dots, \xi^{e_N})$ と対角化可能である. ここで e_i は $0 \leq e_i < d$ となるようにとることとする. Denef-Loeser [DL02] の重要なアイデアは次の環の射を考えることである:

$$\lambda_\gamma^* : k[x_1, \dots, x_N]^G \rightarrow k[t][x_1, \dots, x_N]; \quad x_i \mapsto t^{e_i/d} x_i.$$

ここで, 定義域を G -不変部分に定義しているため, 像が $k[t][x_1, \dots, x_N]$ に収まることに注意する. $I_X \subset k[x_1, \dots, x_N]^G$ を X の定義イデアルとする. 記号の使い方に多少問題があるが, $\lambda_\gamma^*(I_X)$ を I_X の像で生成されるイデアルを表すこととする. すると, λ_γ^* は商環の間の射

$$k[x_1, \dots, x_N]^G / I_X \rightarrow k[t][x_1, \dots, x_N] / \lambda_\gamma^*(I_X)$$

を誘導する. $k[t]$ -scheme $\overline{X}^{(\gamma)}$ を

$$\overline{X}^{(\gamma)} := \text{Spec}(k[t][x_1, \dots, x_N] / \lambda_\gamma^*(I_X))$$

と定義する. すると scheme の間の射

$$\overline{X}^{(\gamma)} \rightarrow \overline{X} / G$$

が得られ, 弧空間の間の射

$$\overline{X}_\infty^{(\gamma)} \rightarrow (\overline{X} / G)_\infty$$

も誘導される. ここで $\overline{X}_\infty^{(\gamma)}$ は $k[t]$ -scheme としての弧空間である.

例 5.3. $\overline{X} \subset \mathbb{A}_k^3$ が $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_2 x_3 = 0$ で定義されるとする. さらに $d = 3$, $\gamma = \text{diag}(\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ であるとする. このとき, $\overline{X}^{(\gamma)}$ は $x_1^3 + t x_2^3 + t^2 x_3^3 + t x_2 x_3 = 0$ で定義されるような $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^3$ の部分 scheme となる. この例からも分かることであるが, $t \neq 0$ のファイバーは \overline{X} に同型となる. $t = 0$ への退化の仕方に群作用の情報を持たせていることが分かる.

Denef-Loeser [DL02] の理論を用いて, 中村と柴田 [NS22, NSa] は商多様体に対して, Ein-Mustaṭā-安田型の公式を証明した.

定理 5.4 ([NS22, NSa]). \mathfrak{a} を \overline{X} / G のイデアルとする. このとき

$$C_{a,b,\gamma} := \text{cont}^{\geq a}(\mathfrak{a} \mathcal{O}_{\overline{X}^{(\gamma)}}) \cap \text{cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{\overline{X}^{(\gamma)}}) \cap \text{cont}^b(\mathfrak{n}_{\ell, \overline{X}^{(\gamma)}}) \subset \mathcal{O}_{\overline{X}^{(\gamma)}}$$

に対し,

$$\text{mld}_x(\overline{X} / G, \mathfrak{a}^r) = \inf_{a,b \geq 0, \gamma \in G} \left\{ \text{codim } C_{a,b,\gamma} + \text{age}(\gamma) - \frac{b}{\ell} - ra \right\}$$

が成立する.

定理 5.4 を使って, 定理 5.1 (や商特異点に対する LSC 予想) を証明することができる. \overline{X} が非特異である場合 (つまり $\overline{X} = \overline{A}$), Nash イデアルは $\mathfrak{n}_{\ell, \overline{X}^{(\gamma)}} = \mathcal{O}_{\overline{X}^{(\gamma)}}$ をみたす. 従っ

て, $C_{a,b,\gamma}$ が閉 cylinder となり, 前節で説明した Ein-Mustařă-安田の証明法が適用できることがポイントとなっている. \bar{X}/G 上で対応する cylinder $C_{a,b}$ を考えると閉にならないが, Denef-Loeser が定義した $\bar{X}_\infty^{(\gamma)}$ に $C_{a,b}$ を引き戻して得られる $C_{a,b,\gamma}$ は閉になるのである.

最後に定理 5.1 において \bar{X} が klt であることを仮定している理由を説明する. PIA 予想の証明にあたり, 弧空間 $\bar{X}_\infty^{(\gamma)}$ の cylinder の余次元の比較が必要になる. この際, 想定通りに余次元が下がることを証明するために, 弧空間 $\bar{X}_\infty^{(\gamma)}$ が自明でない (1 点集合にならない) ことが必要となる. \bar{X} が klt であることを仮定することで, Hacon-McKernan によって示された「klt 多様体の特異点解消のファイバーが有理鎖連結である」こと, Graber-Harris-Starr により示された「ファイバーが有理鎖連結であれば曲線はセクションをもつ」を利用し, $\bar{X}^{(\gamma)}$ 上に弧が十分多く存在することを証明することができる. この議論は Ein-Mustařă-安田の証明には現れない, 論文 [NS22] の議論の新しい部分である (通常の k -scheme X の場合, $\dim X \geq 1$ であれば X_∞ は無限次元となる).

例 5.5. \bar{X} が klt でない場合には弧空間 $\bar{X}_\infty^{(\gamma)}$ が自明になることがある. $\bar{X} \subset \mathbb{A}_k^3$ が $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ で定義されるとする. さらに $d = 3, \gamma = \text{diag}(\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ であるとする. このとき, $\bar{X}^{(\gamma)}$ は $x_1^3 + tx_2^3 + t^2x_3^3 = 0$ で定義されるような $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^3$ の部分 scheme となる. このとき, $\bar{X}^{(\gamma)}$ が 1 点集合になることが, t の次数に着目することで分かる.

以上の説明は群 G が \mathbb{A}_k^N に線形に作用する場合である (論文 [NS22] の内容). 論文 [NSa] では非線形な作用を扱っている. 非線形な作用は, 完備化を経ることにより線形な作用に置き換えることができる. 完備化を経ているため, $k[x_1, \dots, x_N][[t]]/I$ や $k[[x_1, \dots, x_N]]/J$ といった環の弧空間が登場する. 論文 [NSa] において, こういった弧空間の理論が整備され, 論文 [NS22] の証明が拡張されている.

6 商特異点の ACC 予想・index 予想

この章では, 商特異点の弧空間の理論を使った ACC 予想・index 予想への応用を説明する. 定理 5.4 を使うことで, 次の事実を証明することができる.

命題 6.1 ([NS22]). 定理 5.4 と同じ状況において,

$$\text{mld}_x(\bar{X}/G, \mathfrak{a}) = \min_{\gamma \in G} \text{mld}_x(\bar{X}/\langle \gamma \rangle, \mathfrak{a}\mathcal{O}_{\bar{X}/\langle \gamma \rangle})$$

が成り立つ.

これにより, Borisov [Bor97] が提起した問題「商特異点の MLD の集合は巡回商特異点の MLD の集合に一致するか?」を肯定的に解決することができる. さらに, 巡回商特異点の MLD はトーリック多様体の MLD になり, トーリック多様体に対する ACC 予想は Ambro [Amb06] により証明されている. 従って, 商特異点の ACC 予想 (因子なしのバージョン) が正しいことが分かる.

定理 6.2 ([NS22]). d を正整数とする. このとき集合

$$\{\text{mld}_x(X) \mid \dim X = d \text{ で } X \text{ は } x \text{ で商特異点をもつ}\}$$

は ACC を満たす.

命題 6.1 は Shokurov の index 予想にも応用することができる. 命題 6.1 と線型有限群に対する Jordan の定理を組み合わせることにより, 巡回商特異点の場合に帰着することができる. トーリック多様体に対する index 予想は Ambro [Amb09] により証明されているため, 一般の商特異点に対する証明が完結する.

定理 6.3 ([NSb]). 商特異点に対し, Shokurov の index 予想 (予想 3.4) が成立する.

Jordan の定理とは「各正整数 N に対し正整数 $d(N)$ が存在し, 任意の有限部分群 $G \subset \text{GL}_N(k)$ に対し, 指数 $d(N)$ 以下の G の正規部分アーベル群 H が存在する」という定理である. Jordan の定理を index 予想に利用するというアイデアは Moraga の論文 [Mor] から拝借している. Jordan の定理を用い, 命題 6.1 を二度適用することで比較的簡単に定理 6.3 は証明できる.

参考文献

- [Ale93] V. Alexeev, *Two two-dimensional terminations*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 527–545.
- [Amb99] F. Ambro, *On minimal log discrepancies*, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 5-6, 573–580.
- [Amb06] ———, *The set of toric minimal log discrepancies*, Cent. Eur. J. Math. **4** (2006), no. 3, 358–370.
- [Amb09] ———, *On the classification of toric singularities*, Combinatorial aspects of commutative algebra, Contemp. Math., vol. 502, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 1–3.
- [Bor97] A. Borisov, *Minimal discrepancies of toric singularities*, Manuscripta Math. **92** (1997), no. 1, 33–45.
- [CH21] G. Chen and J. Han, *Boundedness of (ϵ, n) -complements for surfaces*, Adv. Math. **383** (2021), Paper No. 107703, 40.
- [DL02] J. Denef and F. Loeser, *Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence*, Compositio Math. **131** (2002), no. 3, 267–290.
- [EM04] L. Ein and M. Mustața, *Inversion of adjunction for local complete intersection varieties*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 6, 1355–1365.
- [EM09] L. Ein and M. Mustața, *Jet schemes and singularities*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 505–546.
- [EMY03] L. Ein, M. Mustața, and T. Yasuda, *Jet schemes, log discrepancies and inversion of adjunction*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 519–535.
- [Fuj01] O. Fujino, *The indices of log canonical singularities*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 2, 229–253.
- [GHS03] T. Graber, J. Harris, and J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.
- [HM07] C. D. Hacon and J. Mckernan, *On Shokurov’s rational connectedness conjecture*, Duke Math. J. **138** (2007), no. 1, 119–136.
- [HLL] J. Han, J. Liu, and Y. Luo, *ACC for minimal log discrepancies of terminal threefolds*, available at [arXiv:2202.05287v2](https://arxiv.org/abs/2202.05287v2).
- [Ish00] S. Ishii, *The quotients of log-canonical singularities by finite groups*, Singularities—Sapporo 1998, Adv. Stud. Pure Math., vol. 29, Kinokuniya, Tokyo, 2000, pp. 135–161.
- [Kaw14] M. Kawakita, *Discreteness of log discrepancies over log canonical triples on a fixed pair*, J. Algebraic Geom. **23** (2014), no. 4, 765–774.
- [Kaw15a] ———, *The index of a threefold canonical singularity*, Amer. J. Math. **137** (2015), no. 1, 271–280.

- [Kaw15b] ———, *A connectedness theorem over the spectrum of a formal power series ring*, *Internat. J. Math.* **26** (2015), no. 11, 1550088, 27.
- [Kaw92] Y. Kawamata, *The minimal discrepancy coefficients of terminal singularities in dimension 3*, Appendix to V. V. Shokurov, *Three-dimensional log perestroikas*, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **56** (1992), no. 1, 105–203.
- [Mor] J. Moraga, *Small quotient minimal log discrepancies*, available at [arXiv:2008.13311v1](https://arxiv.org/abs/2008.13311v1).
- [Nak16a] Y. Nakamura, *On semi-continuity problems for minimal log discrepancies*, *J. Reine Angew. Math.* **711** (2016), 167–187.
- [Nak16b] ———, *On minimal log discrepancies on varieties with fixed Gorenstein index*, *Michigan Math. J.* **65** (2016).
- [NS22] Y. Nakamura and K. Shibata, *Inversion of adjunction for quotient singularities*, *Algebr. Geom.* **9** (2022), no. 2, 214–251.
- [NSa] ———, *Inversion of adjunction for quotient singularities II: Non-linear actions*, available at [arXiv:2112.09502v1](https://arxiv.org/abs/2112.09502v1).
- [NSb] ———, *Shokurov’s index conjecture for quotient singularities*, available at [arXiv:2209.04845v1](https://arxiv.org/abs/2209.04845v1).
- [Sho94] V. V. Shokurov, *A.c.c. in codimension 2* (1994, preprint).
- [Sho92] ———, *Three-dimensional log perestroikas*, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **56** (1992), no. 1, 105–203 (Russian); English transl., *Russian Acad. Sci. Izv. Math.* **40** (1993), no. 1, 95–202.
- [Sho96] ———, *3-fold log models*, *J. Math. Sci.* **81** (1996), no. 3, 2667–2699. *Algebraic geometry*, 4.
- [Sho04] ———, *Letters of a bi-rationalist. V. Minimal log discrepancies and termination of log flips*, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **246** (2004), no. *Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh.*, 328–351; English transl., *Proc. Steklov Inst. Math.* **3 (246)** (2004), 315–336.

偏極トーリック多様体の断面種数と格子点の数え上げ

土谷 昭善* (東邦大学・理学部)

概要

偏極多様体の古典的不変量として断面種数が知られている。断面種数は、それが小さい場合には偏極多様体が分類されているなど、偏極多様体の分類理論において重要な役割を持つ。一方、藤田隆夫は Castelnuovo による曲線の種数に関する上限 (Castelnuovo bound) の高次元版として、断面種数の上限を与えた。その上限に達する偏極多様体を Castelnuovo 多様体と呼ぶ。本稿では偏極トーリック多様体の断面種数を議論する。偏極トーリック多様体は格子凸多面体と 1 対 1 に対応しており、互いの性質をそれぞれ言い換えることができる。特に、偏極トーリック多様体の様々な不変量は、付随する格子凸多面体に含まれる格子点の数え上げで計算することが可能である。実際、断面種数は格子点の数え上げに関する組合せ論的不変量で計算することができる。この方法を紹介し、さらに偏極トーリック多様体が Castelnuovo となる同値条件を格子凸多面体の言葉で与える。

1 格子凸多面体と偏極トーリック多様体

n 次元複素射影多様体 X と X 上の豊富な因子 D の組 (X, D) は偏極多様体と呼ばれる (豊富な因子の代わりに X 上の豊富な直線束 L を用いて (X, L) を偏極多様体とすることもある)。格子凸多面体から射影トーリック多様体が構成できることはよく知られているが、実は格子凸多面体と偏極トーリック多様体は 1 対 1 に対応している。はじめにその対応について紹介する。

凸多面体とは \mathbb{R}^n の有限個の点の凸閉包で表される集合のことである。特に、有界である。またすべての頂点が格子点、つまりすべての頂点の成分が整数であるような凸多面体のことを (\mathbb{Z}^n 上の) **格子凸多面体**という。 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元格子凸多面体とすると、 \mathcal{P} は一意的なファセット表現

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{任意の } \mathcal{P} \text{ のファセット } \mathcal{F} \text{ に対し } \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_{\mathcal{F}} \rangle \geq -a_{\mathcal{F}}\}$$

を持つ。ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbb{R}^n の通常の内積であり、 $\mathbf{u}_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Z}^n$ と $a_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Z}$ は $a_{\mathcal{F}} = 0$ ならば $\mathbf{u}_{\mathcal{F}}$ は原始的であり、そうでなければ $\mathbf{u}_{\mathcal{F}}/a_{\mathcal{F}} \notin \mathbb{Z}^n$ を満たすものである。今、 $X_{\mathcal{P}}$ を \mathcal{P} の**正規扇**に付随する \mathbb{C} 上の n 次元トーリック多様体とする。このとき、 \mathcal{P} の各ファセット \mathcal{F} は $X_{\mathcal{P}}$ の素因子と対応する。それを $D_{\mathcal{F}}$ と書く。さらに、

$$D_{\mathcal{P}} = \sum a_{\mathcal{F}} D_{\mathcal{F}}$$

とおく。ここで \mathcal{F} は \mathcal{P} のすべてのファセットを走る。すると $D_{\mathcal{P}}$ は $X_{\mathcal{P}}$ の豊富な因子となることが知られている ([3, Proposition 6.1.10])。したがって $(X_{\mathcal{P}}, D_{\mathcal{P}})$ は n 次元偏極トーリック多様体となる。

一方、 X を扇 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ に付随する \mathbb{C} 上の n 次元トーリック多様体とし、 $\Sigma^{(1)}$ を Σ のすべての 1 次元錐の集合とする。このとき、各 1 次元錐 $\rho \in \Sigma^{(1)}$ は X 上の素因子 D_{ρ} と対応する。今、 X 上の豊富な因子 $D = \sum_{\rho \in \Sigma^{(1)}} a_{\rho} D_{\rho}$ に対し、

$$\mathcal{P}_D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{任意の } \rho \in \Sigma^{(1)} \text{ に対し } \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_{\rho} \rangle \geq -a_{\rho}\}$$

と定義する。ここで、 \mathbf{u}_{ρ} は $\rho \in \Sigma^{(1)}$ を生成する原始的なベクトルである。このとき、 \mathcal{P}_D は n 次元格子凸多面体となることが知られている ([3, Theorem 6.1.14])。

*akiyoshi@is.sci.toho-u.ac.jp

この2つの構成方法により,

$$\{(X, D) : n \text{次元偏極トーリック多様体}\}$$

と

$$\{\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n : n \text{次元格子凸多面体}\}$$

は1対1に対応する ([3, Theorem 6.2.1]).

偏極トーリック多様体と格子凸多面体のさまざまな性質は言い換えることが可能であり, それぞれの対象を行き来することで, 多くの結果が証明されている. トーリック多様体と格子凸多面体の基本的な関係は [3] や [17] に詳しく書かれている.

2 格子凸多面体の数え上げ数学

本稿で考える格子凸多面体の研究は格子点に関する数え上げである. n 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を与えた時, 数え上げ関数

$$L_{\mathcal{P}}(k) := \sharp(k\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n)$$

を定義する. ここで $k\mathcal{P} := \{k\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$ である. 1962年に Ehrhart により, この数え上げ関数 $L_{\mathcal{P}}(k)$ が k に関する n 次の多項式で, 定数項が1であることが証明された ([4]). 特に, $L_{\mathcal{P}}(k)$ の最高次の係数は \mathcal{P} の通常の体積 $\text{vol}(\mathcal{P})$ と一致する. この多項式 $L_{\mathcal{P}}(k)$ を \mathcal{P} の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ. さらに, Macdonald ([16]) により, **Ehrhart–Macdonald 相互法則** (reciprocity law) と呼ばれる等式,

$$L_{\text{int}(\mathcal{P})}(k) = \text{int}(k\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n = (-1)^n L_{\mathcal{P}}(-k) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

が成立することが証明された. ここで, $\text{int}(\mathcal{P})$ は \mathcal{P} の内部を表す.

次に, Ehrhart 多項式と同値な対象を定義する. 今, Ehrhart 多項式の母関数 $1 + \sum_{k \geq 1} L_{\mathcal{P}}(k)t^k$ を考えると, 以下のような有理関数の形として書ける:

$$1 + \sum_{k \geq 1} L_{\mathcal{P}}(k)t^k = \frac{h_0^* + h_1^*t + \cdots + h_n^*t^n}{(1-t)^{n+1}}.$$

この分子の多項式を $h^*(\mathcal{P}, t) = h_0^* + h_1^*t + \cdots + h_n^*t^n$ とすると, $h^*(\mathcal{P}, t)$ は t に関する, 高々 n 次の整数係数多項式になることが知られており, $h^*(\mathcal{P}, t)$ を \mathcal{P} の h^* 多項式, $h^*(\mathcal{P}) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_n^*)$ を h^* 列と呼ぶ (δ 多項式や δ 列とも呼ばれる). さらに Ehrhart–Macdonald 相互法則より,

$$\sum_{k \geq 1} L_{\text{int}(\mathcal{P})}(k)t^k = \frac{h_n^*t + h_{n-1}^*t^2 + \cdots + h_0^*t^{n+1}}{(1-t)^{n+1}}$$

が得られる. 特に, $\text{deg}(\mathcal{P})$ を $h^*(\mathcal{P}, t)$ の次数とすると,

$$\text{codeg}(\mathcal{P}) := n + 1 - \text{deg}(\mathcal{P}) = \min\{r : \text{int}(r\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset\}$$

が成り立ち, $\text{deg}(\mathcal{P})$ と $\text{codeg}(\mathcal{P})$ をそれぞれ \mathcal{P} の **次数** と **余次数** と呼ぶ. h^* 多項式はこの他にも格子凸多面体の情報を多く持った重要な不変量であり, 特に

- $h_i^* \geq 0$ ([19]),
- $h_0^* = 1, h_1^* = \sharp(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) - (n + 1)$,
- $r = \text{codeg}(\mathcal{P})$ とすると, $h_{\text{deg}(\mathcal{P})}^* = \sharp(\text{int}(r\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n)$, 特に, $h_n^* = \sharp(\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n)$

が従う. さらに $h^*(\mathcal{P}, 1) = h_0^* + \cdots + h_n^*$ は \mathcal{P} の **正規化体積** $\text{Vol}(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P}) \cdot n!$ と一致する. Ehrhart 多項式や h^* 多項式の基本的な情報は [1] を参照してほしい.

格子凸多面体の格子点の数え上げに関する研究の中で主な問題の1つは h^* 列の特徴づけである. この問題に関連して, h^* 列の古典的な2つの不等式が知られている.

- $h_0^* + h_1^* + \cdots + h_i^* \leq h_{\text{deg}(\mathcal{P})}^* + h_{\text{deg}(\mathcal{P})-1}^* + \cdots + h_{\text{deg}(\mathcal{P})-i}^*$, $0 \leq i \leq \lfloor \text{deg}(\mathcal{P})/2 \rfloor$ ([20]),
- $h_2^* + h_3^* + \cdots + h_{i+1}^* \geq h_{n-1}^* + h_{n-2}^* + \cdots + h_{n-i}^*$, $1 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ ([7]),

正規化体積が小さいときの h^* 列の特徴づけが知られており, $\text{Vol}(\mathcal{P}) \leq 3$ のときは, 上の 2 つの不等式で特徴づけられている ([9]). 一方, $\text{Vol}(\mathcal{P}) \geq 4$ の場合は, 更なる条件が必要となっているが, $\text{Vol}(\mathcal{P}) = 4$ のときは [8] で, $\text{Vol}(\mathcal{P}) = 5$ のときは [11] と [21] で特徴づけが与えられている.

この他にも様々な h^* 列に関する不等式が知られているが, 特に有名な不等式として日比の下限定理がある.

定理 2.1 (日比の下限定理 [7]). n 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ が内部に格子点を持ったとする. つまり, $h_n^* \neq 0$ である. このとき, 任意の $2 \leq i \leq n-1$ に対し, $h_1^* \leq h_i^*$ が成り立つ.

特に, 内部に格子点を持てば, h^* 列の全ての成分は正となることがわかる. この定理は組合せ論的な手法で証明されている. そこで気になるのは, この定理が代数幾何学の文脈, つまり, 偏極トーリック多様体に対してはどういった意味を持つのかである. 特に, 等号が成り立つときを考えていく.

3 断面種数と Castelnuovo 多様体

古典的な代数幾何学における結果として, 射影空間内の曲線に関する種数の上限が知られている.

定理 3.1 ([2]). $C \subset \mathbb{P}^m$ を種数 g , 次数 d とする非退化な既約曲線とする. このとき,

$$g \leq m(d-n) - \frac{1}{2}m(m-1)(n-1)$$

が成り立つ. ただし, $m = \lfloor (d-1)/(n-1) \rfloor$ である.

この種数の上限は **Castelnuovo bound** と呼ばれ, この上限に達する曲線のことを **Castelnuovo 曲線** と呼ぶ. 藤田はこの Castelnuovo 曲線の高次元版を定義し, その性質を調べた.

(X, L) を n 次元偏極多様体とし, $\chi(tL)$ を tL の Euler-Poincaré 標数とする. このとき, $\chi(tL)$ は t に関する n 次多項式で $\chi_j(X, L)$ を

$$\chi(tL) = \sum_{j=0}^n \chi_j(X, L) \binom{t+j-1}{j}$$

と定める. ここで $\chi_j(X, L) \in \mathbb{Z}$ である. このとき, **断面種数** $g(X, L)$ は次の式で定義される:

$$g(X, L) := 1 - \chi_{n-1}(X, L).$$

断面種数は偏極多様体の分類理論において重要な不変量である. 藤田は Castelnuovo bound の高次元版として, 断面種数の上限を与えた.

定理 3.2 ([5]). X を n 次元複素射影的多様体, L を $h^0(L) \geq n+2$ を満たす X 上の豊富な直線束とする. さらに, 次の条件を仮定する:

1. L は basepoint free である.
2. $|L|$ によって定まる射がその像に双有理である.

このとき,

$$g(X, L) \leq m\Delta(X, L) - \frac{1}{2}m(m-1)(L^n - \Delta(X, L) - 1)$$

が成り立つ. ただし, $m = \lfloor (L^n - 1)/(L^n - \Delta(X, L) - 1) \rfloor$ かつ $\Delta(X, L) = L^n + n - h^0(L)$ である. $\Delta(X, L)$ は (X, L) の Δ 種数と呼ばれている.

定理 3.2 の条件 (2) の双有理性は上限を得るために必要不可欠である. 偏極多様体が **Castelnuovo** であるとは命題 1 の仮定を満たし, かつその断面種数がこの上限に達するときという. 断面種数や Castelnuovo 多様体の詳細は [5] を参照してほしい.

注意 3.3. 藤田と同時期に Harris により Castelnuovo 多様体が定義された. Harris は断面種数ではなく幾何種数でその上限を考え, 同様に上限に達する多様体のことを Castelnuovo 多様体と呼んでいた. 藤田と Harris の定義した Castelnuovo 多様体は全く別物なので, 調べるときは注意が必要である. Harris が定義した Castelnuovo 多様体に関しては [6] を参照してほしい.

本演では Castelnuovo トーリック多様体に着目する.

4 組合せ論的藤田の上限定理

この節では定理 3.2 の格子凸多面体版を与える. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元格子凸多面体とし, (X, L) を \mathcal{P} に付随する偏極トーリック多様体とする. このとき, 定理 3.2 に現れる偏極多様体の不変量は \mathcal{P} の h^* 列を使って, 次のように書き直すことができる.

- $h^0(L) = \sharp(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) = h_1^* + (n + 1)$,
- $L^n = \text{Vol}(\mathcal{P}) = h_0^* + \cdots + h_n^*$,
- $g(X, L) = h_2^* + 2h_3^* + \cdots + (n - 1)h_n^*$ ([15]),
- $\Delta(X, L) = h_2^* + h_3^* + \cdots + h_n^*$.

さらに格子凸多面体に付随する直線束は常に basepoint free であることが知られている ([3, Proposition 6.1.10]). もう 1 つの性質である双有理性を \mathcal{P} の性質で説明するために用語を 1 つ準備する.

定義 4.1. n 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}^n$ が **spanning** であるとは,

$$\mathbb{Z}((\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) \times \{1\}) = \mathbb{Z}^{n+1}$$

が成立するときをいう. ただし, 有限集合 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\} \subset \mathbb{Z}^n$ に対し, $\mathbb{Z}A = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_r \mathbf{a}_r : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Z}\}$ である. つまり, \mathcal{P} が spanning であることと, \mathbb{Z}^n の任意の格子点が \mathcal{P} に含まれる格子点のアフィン整数結合で書けることと同値である.

spanning 性はかなり緩い条件であり, 断りもなしに仮定している論文も以前は多かった. しかし, 緩い条件にも関わらず, spanning 凸多面体は次のような特殊な性質を持つことが最近わかった.

定理 4.2 ([12]). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元 spanning 凸多面体とする. このとき, 任意の $0 \leq i \leq \text{deg}(\mathcal{P})$ に対し, $h_i > 0$ である.

この結果により, 最近, 格子凸多面体の研究はさまざまな方面で一気に進んだ. この spanning 性の代数幾何学的な意味が双有理性である.

命題 4.3 ([13, Proposition 2.11]). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元格子凸多面体とし, (X, L) を \mathcal{P} に付随する偏極トーリック多様体とする. このとき, $|L|$ によって定まる射がその像に対し双有理である.

以上より, 定理 3.2 を格子凸多面体の言葉で書き直す準備ができた.

定理 4.4. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元格子凸多面体で $h_1^* \geq 1$ とする. さらに \mathcal{P} は spanning であると仮定する. このとき,

$$h_2^* + 2h_3^* + \cdots + (n - 1)h_n^* \leq m(h_2^* + \cdots + h_n^*) - \frac{m(m - 1)}{2}h_1^* \quad (1)$$

が成り立つ. ただし, $m = \lfloor (h_1^* + \cdots + h_n^*)/h_1^* \rfloor$ である.

格子凸多面体が **Castelnuovo** であるとは, 付随する偏極トーリック多様体が Castelnuovo となるときにいう. 定理 4.4 から Castelnuovo 凸多面体は spanning であることに注意する. 一方, この定理の条件 $h_1^* \geq 1$ は spanning 凸多面体の場合, 1 種類の例外を除いて成り立つ. 格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ は $h^*(\mathcal{P}) = (1, 0, \dots, 0)$, つまり $h^*(\mathcal{P}, t) = 1$ のとき**単模単体**と呼ばれる. 特に, \mathcal{P} が単模単体であることと, $(X, L) = (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ であることは同値である. 定理 4.2 より, spanning 凸多面体 \mathcal{P} が $h_1^* \geq 1$ である必要十分条件は \mathcal{P} が単模単体でないことがわかる. したがって \mathcal{P} が単模単体でなければ, 定理 4.4 における条件 $h_1^* \geq 1$ は必要ない. 定義から単模単体は Castelnuovo ではないが, 便宜上, 単模単体も Castelnuovo 凸多面体と呼ぶことにする.

Castelnuovo 凸多面体の例を見る.

例 4.5. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ を 2 次元格子凸多面体で単模単体ではないとする. このとき, $h^*(\mathcal{P}) = (1, a, b)$ で, $a \geq 1, b \geq 0$ である. 特に, $a \geq b$ である. 2 次元格子凸多面体が spanning なのは \mathcal{P} に含まれる頂点以外格子点をもたない格子三角形を考えれば容易にわかる. このとき, $g(X, L) = b$ で (1) の右辺は $mb - \frac{m(m-1)}{2}a$ である. この値は $a = b$ と $a > b$ に分けて考えると, どちらの場合も b と一致するので, (1) の等号が成立する. よって 2 次元格子凸多面体は Castelnuovo である. つまり 2 次元偏極トーリック多様体は Castelnuovo である.

この Castelnuovo 凸多面体を組合せ論的に特徴づけるのが本研究の目標である.

5 Castelnuovo 凸多面体

格子凸多面体が内部に格子点を持つ場合、定理 2.1 より、体積にある種の下限が存在する。実際、

命題 5.1. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を内部に格子点を持つ n 次元格子凸多面体とする。このとき、

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) \geq 1 + (n-1) \cdot \#\!(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) + \#\!(\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n)$$

が成り立つ。等号成立条件は任意の $2 \leq i \leq n-1$ に対し、 $h_1^* = h_i^*$ が成り立つことである。

この等号が成り立つことが、実は Castelnuovo 凸多面体の特徴づけになっている。

定理 5.2 ([15]). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を内部に格子点を持つ n 次元格子凸多面体とする。このとき \mathcal{P} が Castelnuovo になることと、任意の $2 \leq i \leq n-1$ に対し、 $h_1^* = h_i^*$ が成り立つことは同値である。

つまり、内部に格子点を持つ場合、偏極トーリック多様体が定理 3.2 の意味で極大断面種数を持つことと、格子凸多面体が命題 5.1 の意味で極小体積を持つことが同値ということがわかる。なお格子凸多面体 \mathcal{P} が内部に格子点を持つことは、付随する偏極トーリック多様体 (X, L) に対し、 $h^0(L + K_X) \geq 1$ となることを意味している。

注意 5.3. 定理 5.2 で spanning の仮定が落ちているが、[15] では spanning は仮定された状態で証明されていた。しかし、この節の最後に、定理 5.2 では spanning の仮定が実際に必要ないことを説明する。

定理 5.2 を使って高次元の Castelnuovo 凸多面体の例を与える。

例 5.4. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ を 3 次元の格子凸多面体で $h^*(\mathcal{P}) = (1, a, a, 1)$ を満たすものとする。この凸多面体は**反射的凸多面体**と呼ばれる（一般次元での定義は $h^*(\mathcal{P})$ が対称列となることである）。反射的凸多面体は各次元に同型なものを除いて有限個しか存在しないことが知られており、3 次元の場合 4319 個である。定理 5.2 から 3 次元反射的凸多面体は Castelnuovo であることがわかる。代数幾何的には、3 次元 Gorenstein トーリック Fano 多様体 X に対し、 $(X, -K_X)$ が Castelnuovo となることを意味している。

例 5.5. 一般次元で非自明な Castelnuovo 凸多面体の無限類を与える。今、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= (0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{v}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_{n-1} &= (0, \dots, 0, 1, 0), \\ \mathbf{v}_n &= (an, \dots, an, an + 1) \end{aligned}$$

を頂点とする n 次元格子単体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を考える。ここで a は正の整数である。このとき、計算すると $h^*(\mathcal{P}) = (1, a, \dots, a)$ となることがわかる（[10] の Lemma 3.2 の証明を参照）。よって定理 5.2 により \mathcal{P} は Castelnuovo である。

定理 5.2 の証明では定理 2.1 の結果を用いるために、内部に格子点を持つという仮定が必要であった。一方、定理 2.1 は最近、一般の格子凸多面体に関して一般化された。格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ に対し、 $\mathbb{Z}_\varphi^n \subset \mathbb{Z}^n$ を $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ で張られる \mathbb{Z}^n の部分格子とし、 \mathcal{P} を \mathbb{Z}_φ^n 上の格子凸多面体としてみたものを $\tilde{\mathcal{P}}$ とする。このとき、 $\tilde{\mathcal{P}}$ は \mathbb{Z}_φ^n 上 spanning である。特に、 \mathcal{P} が (\mathbb{Z}^n 上で) spanning であることと、 $\mathbb{Z}_\varphi^n = \mathbb{Z}^n$ は同値である。 $\tilde{\mathcal{P}}$ に対し、格子を取り替えることで同様に h^* 多項式を定義し、 $\text{deg}(\tilde{\mathcal{P}})$ でその多項式の次数を表すこととする。また \mathcal{P} と $\tilde{\mathcal{P}}$ の h^* 列をそれぞれ $h^*(\mathcal{P}) = (h_0^*(\mathcal{P}), \dots, h_n^*(\mathcal{P}))$ と $h^*(\tilde{\mathcal{P}}) = (h_0^*(\tilde{\mathcal{P}}), \dots, h_n^*(\tilde{\mathcal{P}}))$ で書くと、任意の i に対して $h_i^*(\tilde{\mathcal{P}}) \leq h_i^*(\mathcal{P})$ が成り立つ。特に、 $\text{deg}(\tilde{\mathcal{P}}) \leq \text{deg}(\mathcal{P})$ である。

定理 5.6 ([13]). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元格子凸多面体とする。このとき、任意の $2 \leq i \leq \text{deg}(\tilde{\mathcal{P}}) - 1$ に対し、 $h_1^* \leq h_i^*$ が成り立つ。特に、 \mathcal{P} が spanning であれば、任意の $2 \leq i \leq \text{deg}(\mathcal{P}) - 1$ に対し、 $h_1^* \leq h_i^*$ が成り立つ。

この結果を使うと定理 2.1 だけでなく、定理 4.2 も系として得ることができる。spanning 凸多面体の場合、この定理を使ってある種の体積の下限を与えることができる。

命題 5.7. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元 spanning 凸多面体とする。このとき、

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) \geq 1 + (\text{deg}(\mathcal{P}) - 1) \cdot \#\!(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) + \#\!(\text{int}(r\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n)$$

が成り立つ。ただし、 $r = \text{codeg}(\mathcal{P})$ である。等号成立条件は任意の $2 \leq i \leq \text{deg}(\mathcal{P}) - 1$ に対し、 $h_1^* = h_i^*$ が成り立つことである。

さて、Castelnuovo 凸多面体は spanning であったため、定理 5.6 の後半の主張を使うことができる。しかし、内部に格子点を持つ場合と違い、Castelnuovo 凸多面体の特徴づけには極小の体積だけでなく、追加の条件が必要である。それでは、一般の Castelnuovo 凸多面体の特徴づけを紹介する。

定理 5.8. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元格子凸多面体とする。このとき \mathcal{P} が Castelnuovo になることと、次の 3 つの条件が成り立つことは同値である：

1. \mathcal{P} は spanning である。
2. 任意の $2 \leq i \leq \text{deg}(\mathcal{P}) - 1$ に対し、 $h_1^* = h_i^*$ が成り立つ。
3. $h_1^* \geq h_{\text{deg}(\mathcal{P})}^*$ 、つまり $\#\!(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) - (n + 1) \geq \#\!(\text{int}(r\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n)$ である。ただし $r = \text{codeg}(\mathcal{P})$ 。

内部に格子点を持つ場合と違い定理 5.8 の (1) と (3) の条件は必要である。

例 5.9. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ を

$$(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 2), (1, 0, -1, 0)$$

を頂点とする 4 次元格子凸多面体とする。このとき、 $h^*(\mathcal{P}) = (1, 1, 1, 1, 0)$ である。つまり定理 5.8 の (2) と (3) の条件を満たしている。一方で $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{Z}^4$ という格子点は $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^4$ のアフィン整数結合で書くことができないため、 \mathcal{P} は spanning ではない。したがって、定理 5.8 より \mathcal{P} は Castelnuovo ではない。

例 5.10. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ を

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 2, 3), (0, 0, -1)$$

を頂点とする 3 次元格子凸多面体とする。このとき、 $h^*(\mathcal{P}) = (1, 1, 2, 0)$ である。さらに \mathcal{P} が spanning であることも容易にわかる。よって定理 5.8 の (1) と (2) の条件を満たしている。しかし (3) の条件を満たしていないため、 \mathcal{P} は Castelnuovo ではない。

次に定理 5.8 から定理 5.2 を得る方法を紹介する。つまり定理 5.8 の条件 (1) と (3) がなぜ必要ないかを説明する。まず条件 (3) は簡単で、 \mathcal{P} が内部に格子点を持てば、その条件は $\#\!(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) \geq \#\!(\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n) + (n + 1)$ であり、 $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ には少なくとも頂点 ($n + 1$ 個以上) と内部の格子点が含まれるため、その不等式は成り立つ。

次に条件 (1) だが、これは条件 (2) から導くことができる。定理 2.1 の証明を追うと、等号が成立するときは次のような性質を持つことがわかる。

命題 5.11 ([22]). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を内部に格子点を持つ n 次元格子凸多面体とする。もし任意の $2 \leq i \leq n - 1$ に対し、 $h_1^* = h_i^*$ を満たすとき、 \mathcal{P} は単模三角形分割、つまりすべての極大単体が単模単体であるような三角形分割を持つ。特に、このとき \mathcal{P} は spanning である。

以上より、本来必要であった spanning 性の確認を込めて、定理 5.2 を得ることができた。

5.1 整分割性

Castelnuovo 凸多面体の特徴づけの応用を紹介する。 n 次元格子凸多面体 \mathcal{P} が十分豊富であるとは、任意の十分大きい整数 k に対し、

$$k\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n = \underbrace{(\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n) + \cdots + (\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n)}_k \quad (2)$$

を満たすときにいう。ここで $A, B \subset \mathbb{Z}^n$ に対し、 $A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$ である。さらに \mathcal{P} が整分割性を持つ、または IDP であるとは、任意の正の整数 k に対し (2) を満たすときにいう。このとき、

$$\text{IDP} \Rightarrow \text{十分豊富} \Rightarrow \text{spanning}$$

という関係が成り立つ. また (X, L) を \mathcal{P} に付随する偏極トーリック多様体とすると, \mathcal{P} が十分豊富であることと, L が十分豊富であることは同値であり, さらに \mathcal{P} が IDP であることと, L が正規生成であることは同値である.

格子凸多面体の研究の中心の 1 つはいつ格子凸多面体が IDP となるかである. その研究の中で特に有名な予想を紹介する. n 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ が非特異であるとは, 任意の \mathcal{P} の頂点に対し, その頂点から伸びる辺の方向ベクトルの集合が \mathbb{Z}^n の基底となっているときにいう. このとき, 格子凸多面体が非特異であることと, 付随する偏極トーリック多様体が非特異となることは同値である. 特に, 非特異凸多面体は十分豊富, つまり非特異射影的トーリック多様体の豊富な直線束は十分豊富であることが知られている. この事実より強い性質が成り立つことが小田忠雄によって予想され, 現在小田予想と呼ばれている.

予想 5.12 (小田予想 [18]). 非特異凸多面体は IDP である. つまり, 非特異射影的トーリック多様体の (十分) 豊富な直線束は正規生成である.

小田予想は 1997 年に提唱されて以降, 格子凸多面体の研究の中心の 1 つとなっているが, 3 次元以上の高次元では部分的結果もほとんどない状況である (2 次元の場合は比較的簡単にわかる).

一方, Castelnuovo 多様体に対し, 次の性質が知られている.

定理 5.13 ([5]). Castelnuovo 多様体の豊富な直線束は正規生成である.

よって Castelnuovo 凸多面体は IDP であることがわかる. 非特異凸多面体は十分豊富, よって spanning であったので, 小田予想に関連して次のことがわかる.

定理 5.14. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元格子凸多面体で次の 3 つの条件を満たすとすると:

1. \mathcal{P} は spanning (または非特異) である.
2. 任意の $2 \leq i \leq \deg(\mathcal{P}) - 1$ に対し, $h_1^* = h_i^*$ が成り立つ.
3. $h_1^* \geq h_{\deg(\mathcal{P})}^*$ である.

このとき \mathcal{P} は IDP である.

この結果は次の結果のある種の一般化となっている.

定理 5.15 ([14]). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元格子凸多面体で $h^*(\mathcal{P}) = (1, a, b, 0, \dots, 0)$ となるものとする. もし $a \geq b$ ならばこのとき \mathcal{P} は IDP である.

この定理の設定だと spanning であることは比較的容易に証明できるので, 定理 5.14 からこの定理を得ることができる.

6 今後の課題

あるクラスの偏極トーリック多様体の組合せ論的特徴づけが与えられれば, 次に考えたい問題はその分類である. もちろん Castelnuovo 凸多面体は各次元に無限個あるので, 何かしらの設定を考えて分類する必要がある. 例えば, 3 次元反射的凸多面体 (3 次元 Gorenstein トーリック Fano 多様体と 1 対 1 対応するもの) はすべて Castelnuovo であった. しかし, 4 次元以上だと Castelnuovo となる 4 次元反射的凸多面体の割合は少ない (なお 4 次元反射的凸多面体は 473,800,776 個存在する). これは, 高次元だと, Castelnuovo の条件はかなり強いものとなることが原因であろう. したがって, 一般次元で Castelnuovo 反射的凸多面体が分類できる可能性はゼロではない. この他にも, 非特異の場合を考えるなど, 分類問題に関してはまだまだ考える余地は多い.

参考文献

- [1] M. Beck and S. Robin, Computing the Continuous Discretely, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2015.
- [2] G. Castelnuovo, Ricerche di geometria sulle curve algebriche, *Atti Accad. Sci. Torino* **24** (1889), 346–373.
- [3] D. Cox, J. Little and H. Schenck, Toric varieties, Graduate Texts in Mathematics, vol. **124**, American Mathematical Society, Providence, 2011.

- [4] E. Ehrhart, Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions, *C. R. Acad. Sci. Paris* **254** (1962), 616–618.
- [5] T. Fujita, Classification theories of polarized varieties, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. **155**, Cambridge University Press, 1990.
- [6] J. Harris, A bound on the geometric genus of projective varieties, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **8** (1981), 35–68.
- [7] T. Hibi, A lower bound theorem for Ehrhart polynomials of convex polytopes, *Adv. Math.* **105** (1994), 162–165.
- [8] T. Hibi, A. Higashitani and N. Li, Hermite normal forms and δ -vectors, *J. Combin. Theory Ser. A* **119** (2012), 1158–1173.
- [9] T. Hibi, A. Higashitani and Y. Nagazawa, Ehrhart polynomials of convex polytopes with small volume, *European J. Combin.* **32** (2011), 226–232.
- [10] T. Hibi and A. Tsuchiya, Flat δ -vectors and their Ehrhart polynomials, *Arch. Math. (Basel)* **108** (2017), 151–157.
- [11] A. Higashitani, Ehrhart polynomials of integral simplices with prime volumes, *INTEGERS* **14** A 45 (2014), 1–15.
- [12] J. Hofscheier, L. Katthän and B. Nill, Ehrhart Theory of Spanning Lattice Polytopes, *Int. Math. Res. Not.* **2018** (2018), 5947–5973.
- [13] J. Hofscheier, L. Katthän and B. Nill, Spanning lattice polytopes and the uniform position principle, arXiv:1711.09512.
- [14] L. Katthän and K. Yanagawa, Graded Cohen–Macaulay domains and lattice polytopes with short h -vector, *Discrete Comput. Geom.* **68** (2022), 608–617.
- [15] R. Kawaguchi, Sectional genus and the volume of a lattice polytope, *J. Algebraic Combin.* **53** (2021), 1253–1264.
- [16] I. G. Macdonald, Polynomials associated with finite cell-complexes, *J. London Math. Soc.* **4** (1971), 181–192.
- [17] T. Oda, Convex bodies and algebraic geometry, Springer, Berlin, 1988.
- [18] T. Oda, Problems on Minkowski sums of convex lattice polytopes, arXiv:0812.1418.
- [19] R. P. Stanley, Decompositions of rational convex polytopes, *Annals of Discrete Math.* **6** (1980), 135–142.
- [20] R. P. Stanley, On the Hilbert function of a graded Cohen–Macaulay domain, *J. Pure and Appl. Algebra* **73** (1991), 307–314.
- [21] A. Tsuchiya, Ehrhart polynomials of lattice polytopes with normalized volumes 5, *J. Comb.* **10** (2019), 283–290.
- [22] A. Tsuchiya, Castelnuovo polytopes, *Michigan Math. J.* (2022), published online.

COMBINATORICS OF LATTICES OF SUBCATEGORIES OF A MODULE CATEGORY

HARUHISA ENOMOTO

1. INTRODUCTION

This article is based on [Eno]. For a given ring Λ ,

$$\{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ is a collection of } \Lambda\text{-modules satisfying } (*)\}$$

is a poset by inclusion for a given condition $(*)$. In this way obtain various posets by changing $(*)$. These obtained poset can be considered as *combinatorial invariants* associated to a ring Λ , and combinatorial properties of them are recently studied in the representation theory of algebras.

Then the following is a natural question.

Question 1.1. *How these posets are combinatorially related?*

The answer for this question will be useful also for pure combinatorics, since some important posets in combinatorics can be realized as posets of some collections of modules.

Also, we can consider this as a kind of *categorification of combinatorics*, because by taking invariants of the module category we obtain non-trivial results on combinatorics.

1.1. Examples and basic definitions. Throughout this article, let k be a field, and Λ denotes a finite-dimensional k -algebra. All modules are finitely generated. We denote by $\mathbf{mod} \Lambda$ the collection (or category) of all finitely generated Λ -modules.

As a first easy example, consider collections \mathcal{C} of k -modules which is

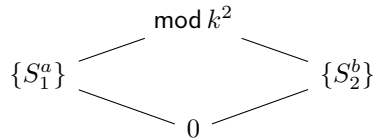
- closed under *direct sums* and *direct summands*, namely, $X, Y \in \mathcal{C}$ if and only if $X \oplus Y \in \mathcal{C}$.

It is easy to see that such \mathcal{C} must be equal to 0 or $\mathbf{mod} k$, the collection of all k -modules. Therefore, the poset of collections of k -modules satisfying this property is just a poset with two elements: $\{0 < \mathbf{mod} k\}$.

Next, consider $k^2 = k \times k$ and the same condition. Every k^2 -module M is decomposed as

$$M = S_1^a \oplus S_2^b$$

for unique $a, b \in \mathbb{N}$, where $S_1 := k \oplus 0$ and $S_2 := 0 \oplus k$. Therefore, choosing a collection satisfying the above condition is equivalent to choosing a subset of $\{S_1, S_2\}$. Thus, the poset in this case looks like the following Hasse diagram.



This can be easily generalized to a ring k^n as follows. Every k^n -module M is decomposed uniquely as

$$M = S_1^{a_1} \oplus S_2^{a_2} \oplus \cdots \oplus S_n^{a_n}$$

where $S_i := 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus k \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$. Therefore, the poset is isomorphic to the *powerset* $2^{\{1, \dots, n\}}$ of $\{1, \dots, n\}$. Here, we can observe that some combinatorics come

The aim of this article is to consider the following two classes of collection of modules:

- (1) Torsion class, whose poset is denoted by $\mathbf{tors} \Lambda$
- (2) Wide subcategory, whose poset is denoted by $\mathbf{wide} \Lambda$

The main result is that these two posets are closely related: one can obtain $\text{wide } \Lambda$ from $\text{tors } \Lambda$ purely combinatorially.

2. TORSION CLASSES

In the introduction, we consider collections of Λ -modules. This is equivalent to considering *Subcategories* of $\text{mod } \Lambda$, so we will use this terminology in the following.

When we consider subcategories of $\text{mod } \Lambda$, the following theorem is fundamental.

Theorem 2.1 (Krull-Schmidt). *Every $M \in \text{mod } \Lambda$ is decomposed uniquely as*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

such that each M_i is indecomposable.

This implies that considering subcategories (closed under direct sums and summands) is equivalent to considering *sets of indecomposable Λ -modules*.

2.1. Definition. Now let us define *torsion classes*, which was initially introduced by Dickson as a generalization of torsion modules over abelian groups.

Definition 2.2. A subcategory \mathcal{T} of $\text{mod } \Lambda$ is a *torsion class* $:\Leftrightarrow$ closed under extensions and quotients, that is, for any

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

$L, N \in \mathcal{T}$ implies $M \in \mathcal{T}$, and $M \in \mathcal{T}$ implies $N \in \mathcal{T}$. We denote by $\text{tors } \Lambda$ the poset of torsion classes ordered by inclusion.

By the Krull-Schmidt theorem, we only have to consider *indecomposable* modules in a torsion class.

Example 2.3. The easiest case is semisimple case:

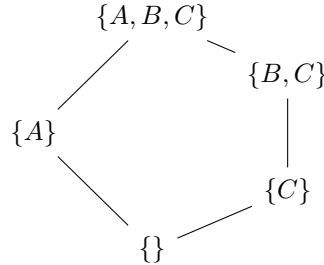
- $\text{tors } k = \{0, \text{mod } k\}$.
- If Λ is semisimple, then a torsion class is just a subcategory closed under direct sum and summands. Thus, $\text{tors } \Lambda$ is the powerset of the set of indecomposable (=simple) modules.

Example 2.4. The next non-trivial but simple example is the upper triangular matrix algebra. Consider $\Lambda := \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix} = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in k \}$.

Then it is known that there are precisely three indecomposable Λ -modules A, B, C (up to isomorphism), together with a short exact sequence:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

This is the only non-trivial short exact sequence in $\text{mod } \Lambda$ in some sense, and by using this fact, we can check that $\text{tors } \Lambda$ looks as follows (here we identify a subcategory of $\text{mod } \Lambda$ and a subset of $\{A, B, C\}$).



Remark 2.5. A torsion class is usually defined a part of a *torsion pair*. A torsion pair $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ is a pair of subcategories of $\text{mod } \Lambda$ which *divides mod Λ into two parts*: the torsion part \mathcal{T} and the torsion-free part \mathcal{F} . Historically, they are generalizations of *torsion groups* and *torsion-free groups*. Recently, torsion pairs are studied actively because they appear naturally when considering the derived category and *t-structures*.

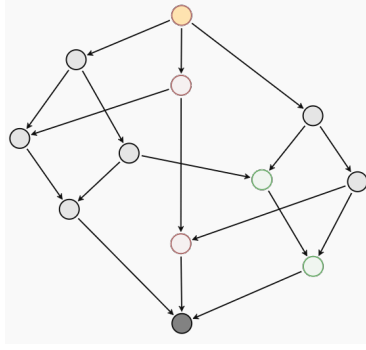


FIGURE 1. $\text{tors}k(1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3)/(ab)$ calculated by Geuenich's String Applet [Geu]

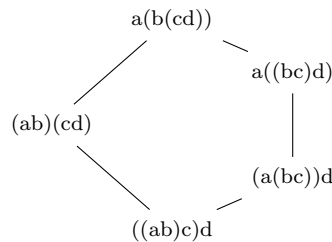
2.2. Combinatorial properties of the poset of torsion classes. In the rest, we assume $\text{tors} \Lambda$ is finite for simplicity. This poset enjoys the following remarkable combinatorial properties.

Proposition 2.6. *$\text{tors} \Lambda$ has the following properties:*

- A complete lattice: for any family \mathcal{T}_i of torsion classes, $\bigvee \mathcal{T}_i$ and $\bigwedge \mathcal{T}_i (= \bigcap \mathcal{T}_i)$ exist in $\text{tors} \Lambda$.
- The Hasse diagram is an n -regular graph (n is the number of simple Λ -modules) [AIR].
- $\#\{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \text{ covers } i \text{ elements}\} = \#\{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \text{ is covered by } i \text{ elements}\}$.
- $\text{tors} \Lambda$ is semidistributive [DIRRT].

This kind of properties are satisfied by some important posets arising in combinatorics. Indeed, it is known that the following posets can be realized as $\text{tors} \Lambda$ for a suitable Λ .

- Tamari lattice **Tam**: the poset of *order of binary operation*:



- The Dynkin variants of the Tamari lattice, called *Cambrian lattice* (Tamari lattice corresponds to type A) [IT].
- Finite Coxeter groups with weak order [Miz].

3. WIDE SUBCATEGORIES

Next, we will move to wide subcategories.

Definition 3.1. A subcategory \mathcal{W} of $\text{mod} \Lambda$ is *wide* if

- \mathcal{W} is closed under *kernels* and *cokernels*: for every $f: W_1 \rightarrow W_2$ with $W_i \in \mathcal{W}$, we have $\text{Ker } f, \text{Coker } f \in \mathcal{W}$.
- \mathcal{W} is closed under extensions.

We denote by $\text{wide} \Lambda$ the poset of wide subcategories of $\text{mod} \Lambda$.

Remark 3.2. A wide subcategory is an abelian subcategory since it has kernels and cokernels, so an wide subcategory can be defined as an extension-closed exact abelian subcategory.

Thus, a wide subcategory is a small abelian category inside the module category. Such a situation often occurs when we consider a ring homomorphism $\Lambda \rightarrow \Gamma$, which give rises to a functor $\text{mod} \Gamma \rightarrow \text{mod} \Lambda$. Under a good situation, this functor is fully faithful, and realizes $\text{mod} \Gamma$ as a wide subcategory of $\text{mod} \Lambda$. Indeed, under the assumption that $\text{tors} \Lambda$ is a finite set, it is

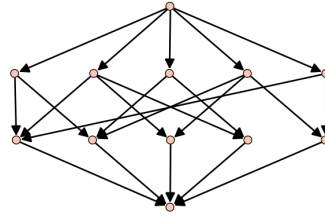


FIGURE 2. $\text{wide } k(1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3)/(ab)$

known that there is a bijection between $\text{wide } \Lambda$ and a class of ring epimorphisms satisfying certain conditions.

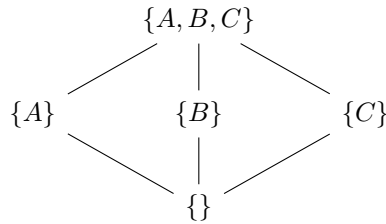
Now let us have a look at some examples.

Example 3.3. • If Λ is semisimple, then as in the case of torsion classes, a wide subcategory is just a subcategory closed under direct sums and summands, and hence $\text{wide } \Lambda = \text{tors } \Lambda \cong$ the powerset of the set of simple Λ -modules.

- Next consider the upper triangular matrix algebra again: $\Lambda := \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix} = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in k \}$. By looking at the following fundamental short exact sequence:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

we can calculate $\text{wide } \Lambda$ as follows:



3.1. Combinatorial properties. In general, $\text{tors } \Lambda$ and $\text{wide } \Lambda$ behave quite differently, and the Hasse diagrams are not similar. However, $\text{wide } \Lambda$ also has good symmetry:

Proposition 3.4. *wide Λ has the following properties:*

- A complete lattice.
- Ranked (graded). This means that $\text{wide } \Lambda$ has a rank function which is compatible with the covering relations (such a function is given by taking the number of simple objects in a wide subcategory).
- The rank of $\text{wide } \Lambda$ is symmetric, that is,

$$a_i := \#\{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \text{ is rank } i\} = \#\{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \text{ is rank } n - i\},$$

where n is the rank of $\text{mod } \Lambda$ (which is the number of simple Λ -modules).

- The rank is unimodal, that is,

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n/2} \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$$

holds [AHIKM].

Similarly to the case for torsion classes, these properties naturally arise in combinatorics, and indeed the following posets are known to be realized as $\text{wide } \Lambda$ for a suitable algebra Λ .

- Non-crossing partition lattice NC
- The Dynkin variants of NC (NC corresponds to type A).
- The *shard intersection order*, a relatively new lattice structure on a finite Coxeter group defined in [Rea], which is defined using (complicated) combinatorics of a hyperplane arrangement [Tho].

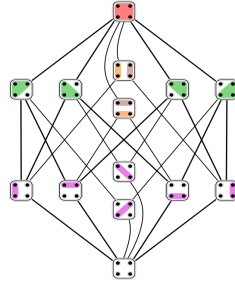


FIGURE 3. from Wikipedia, T. Piesk (CC BY 3.0)

4. MAIN RESULT

As we have seen, for a given algebra Λ , we have introduced two posets:

- $\text{tors } \Lambda$, the poset of torsion classes.
- $\text{wide } \Lambda$, the poset of wide subcategories.

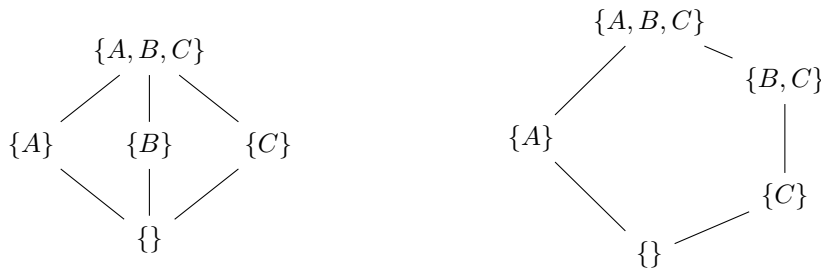
The main result of this article is that *we can compute wide Λ from tors Λ purely combinatorially*. Let us have a look at what this implies.

Example 4.1. Let Λ be an upper-triangular matrix algebra (of a fixed size). Then the following isomorphism is known.

- $\text{tors } \Lambda \cong \text{Tam}$ (Tamari lattice)
- $\text{wide } \Lambda \cong \text{NC}$ (non-crossing partition lattice)

Therefore, our result will yield a non-trivial relation between these combinatorial posets.

4.1. Marks–Šťovíček’s bijection. Let us see the following example again, for the algebra $\Lambda := \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$.



The left-hand side is $\text{wide } \Lambda$, and the right-hand side is $\text{tors } \Lambda$. From this, we can observe that although they are non-isomorphic, *the number of elements is same*. This is not a coincidence.

Theorem 4.2 ([MS]). *We have a bijection*

$$T: \text{wide } \Lambda \xrightarrow{\cong} \text{tors } \Lambda$$

where $T(\mathcal{W})$ is the smallest torsion class containing \mathcal{W} .

Therefore, at least set-theoretically, two sets $\text{wide } \Lambda$ and $\text{tors } \Lambda$ are related. However, this is not enough for our viewpoint because

Problem 4.3. $T: \text{wide } \Lambda \rightarrow \text{tors } \Lambda$ is order-preserving, but not a poset isomorphism.

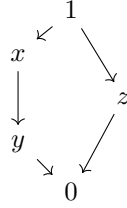
Below, to deal with this problem, we will introduce a *new poset structure* \leq_κ on $\text{tors } \Lambda$ such that

$$T: \text{wide } \Lambda \cong (\text{tors } \Lambda, \leq_\kappa)$$

becomes an isomorphism of posets.

Suppose that we are given $\text{tors } \Lambda$ just as an abstract lattice. The following is a working example.

Example 4.4. $\Lambda := \begin{bmatrix} k & k \\ 0 & k \end{bmatrix}$. The Hasse quiver of $\text{tors } \Lambda$ is as follows.

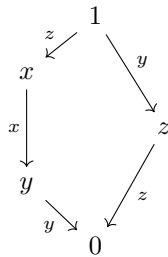


Here, the *Hasse quiver* is an orientation of the Hasse diagram such that $a \rightarrow b$ if $a > b$ and there is no c with $a > c > b$. We call an arrow in the Hasse quiver a *Hasse arrow*.

Definition 4.5. For each Hasse arrow $a \rightarrow b$ in $\text{tors } \Lambda$, we label its arrow by

$$\min\{x \in \text{tors } \Lambda \mid b \vee x = a\}.$$

This is well-defined and called the *join-irreducible label*.

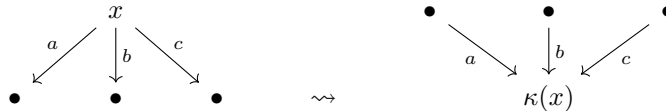


Using this label, [BTZ] introduced the *extended kappa map* $\kappa: \text{tors } \Lambda \xrightarrow{\sim} \text{tors } \Lambda$ as follows.

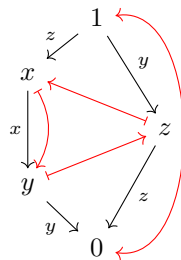
Definition 4.6. For each $x \in \text{tors } \Lambda$, there is unique $\kappa(x) \in \text{tors } \Lambda$ satisfying

$$\begin{aligned} &\{\text{labels of Hasse arrows starting at } x\} \\ &= \{\text{labels of Hasse arrows ending at } \kappa(x)\} \end{aligned}$$

The existence is not trivial, but holds in the generality of completely semidistributive lattice.



The following red orbit is the orbit of κ in our working example.



Using this order, we introduce a new poset structure on $\text{tors } \Lambda$.

Definition 4.7 (The kappa order). For $x, y \in \text{tors } \Lambda$, define

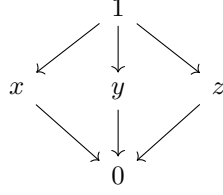
$$x \leq_{\kappa} y :\iff x \leq y \text{ and } \kappa(x) \geq \kappa(y).$$

It is clear from definition that the kappa order \leq_{κ} is actually a poset structure. Now we are ready to state our main result.

Theorem 4.8. $\top: \text{wide } \Lambda \rightarrow \text{tors } \Lambda$ induces a poset isomorphism:

$$\text{wide } \Lambda \cong (\text{tors } \Lambda, \leq_{\kappa})$$

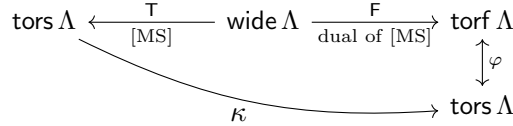
Let us look at our working example to see what happens here. Using the above calculation of the kappa orbit, one can easily construct the poset $(\mathbf{tors} \Lambda, \leq_\kappa)$:



Then this is isomorphic to $\mathbf{wide} \Lambda$ as the above figure illustrates.

Finally, we will explain a trick of this magic. The key point is that the extended kappa map, purely combinatorially defined map, has a natural representation-theoretical meaning.

As a dual of torsion class, we can consider *torsion-free class*. Actually, the posets of torsion classes and torsion-free classes are anti-isomorphic to each other, hence we have a bijection $\varphi: \mathbf{tors} \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{torf} \Lambda$. On the other hand, by considering the dual of Marks–Šťovíček’s bijection $T: \mathbf{wide} \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{tors} \Lambda$, we obtain a bijection $F: \mathbf{wide} \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{torf} \Lambda$ (where $F(\mathcal{W})$ is the smallest torsion-free class containing \mathcal{W}). Note that the notion of wide subcategories is self-dual. Then, by connecting these bijections, we obtain a bijection $\mathbf{tors} \Lambda \rightarrow \mathbf{tors} \Lambda$, and actually this coincides with κ ([BTZ]).



By using this representation-theoretic interpretation of κ , we can easily prove our main result, that is, $T: (\mathbf{wide} \Lambda, \subseteq) \rightarrow (\mathbf{tors} \Lambda, \leq_\kappa)$ is a poset isomorphism as follows. For $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in \mathbf{wide} \Lambda$, we have

$$\begin{aligned}
 T(\mathcal{W}_1) \leq_\kappa T(\mathcal{W}_2) &: \iff T(\mathcal{W}_1) \subseteq T(\mathcal{W}_2) \text{ and } \kappa T(\mathcal{W}_1) \supseteq \kappa T(\mathcal{W}_2) \\
 &\iff T(\mathcal{W}_1) \subseteq T(\mathcal{W}_2) \text{ and } F(\mathcal{W}_1) \subseteq F(\mathcal{W}_2) \\
 &\iff \mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2
 \end{aligned}$$

Here the last equivalence is the only non-trivial part, but can be proved using general results on the module category: for every subcategory \mathcal{C} of $\mathbf{mod} \Lambda$ closed under taking images of homomorphisms, we have $\mathcal{C} = T(\mathcal{C}) \cap F(\mathcal{C})$.

By applying $\mathbf{wide} \Lambda \cong (\mathbf{tors} \Lambda, \leq_\kappa)$ for a suitable algebra, we obtain the following combinatorial applications.

- Non-crossing partition lattice is isomorphic to the Tamari lattice together with \leq_κ (and the Dynkin invariants of this).
- The shard intersection order on a Coxeter group W coincide with \leq_κ with respect to the weak order (the corresponding algebra is so-called the *preprojective algebra* of Dynkin type).

The last description of the shard intersection order is quite interesting because the original definition of the shard intersection order is somewhat complicated, but our results yields a relatively simple combinatorial description of it using representation theory.

REFERENCES

- [AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ -tilting theory*, Compos. Math. 150 (2014), no. 3, 415–452.
[AHIKM] T. Aoki, A. Higashitani, O. Iyama, R. Kase, Y. Mizuno, *Fans and polytopes in tilting theory I: Foundations*, arXiv:2203.15213.
[BTZ] E. Barnard, G. Todorov, S. Zhu, *Dynamical combinatorics and torsion classes*, J. Pure Appl. Algebra 225 (2021), no. 9, Paper No. 106642, 25 pp.
[DIRRT] L. Demonet, O. Iyama, N. Reading, I. Reiten, H. Thomas, *Lattice theory of torsion classes*, arXiv:1711.01785.
[Eno] H. Enomoto, *From the lattice of torsion classes to the posets of wide subcategories and ICE-closed subcategories*, arXiv:2201.00595.

- [Geu] J. Geuenich, *String Applet*, Web applet for special biserial algebras, available at <https://www.math.uni-bielefeld.de/~jgeuenich/string-applet/>
- [IT] C. Ingalls, H. Thomas, *Noncrossing partitions and representations of quivers*, Compos. Math. 145 (2009), no. 6, 1533–1562.
- [MS] F. Marks, J. Šťovíček, *Torsion classes, wide subcategories and localisations*, Bull. London Math. Soc. 49 (2017), Issue 3, 405–416.
- [Miz] Y. Mizuno, *Classifying τ -tilting modules over preprojective algebras of Dynkin type*, Math. Z. 277 (2014), no. 3-4, 665–690.
- [Rea] N. Reading, *Noncrossing partitions and the shard intersection order*, J. Algebraic Combin. 33 (2011), no. 4, 483–530.
- [Tho] H. Thomas, *Stability, shards, and preprojective algebras*, Contemp. Math. 705 (2018), 251–262.

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA METROPOLITAN UNIVERSITY
Email address: henomoto@omu.ac.jp